WISSENSCHAFT UND PHILOSOPHIE

Interdisziplinäre Studien

Herausgegeben von Venanz Schubert

Band 4: Der Raum

DER RAUM

Raum des Menschen – Raum der Wissenschaft

Beiträge von

Gerd Albers
Jürgen Ehlers
Wolfgang Haber
Edgar Lüscher
Hans-Reinhard Müller
Bodo Pareigis
Ernst Pöppel
Helmut Schöner-Fedrigotti
Venanz Schubert
Wolfgang Tunner
Manfred Zahn

Herausgegeben und eingeleitet von
Venanz Schubert

EOS VERLAG ERZABTEI ST. OTTILIEN

Zum Titelbild:
Prof. Georg Brenninger, »Kontinente«, Neue Pinakothek, München. Vgl. dazu den Bildband »Georg Brenninger«, EOS Verlag St. Ottilien, 1984, Abbildung 47—53.

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Der Raum: Raum d. Menschen — Raum d. Wiss.
Beitr. von Gerd Albers ... Hrsg. u. eingel. von
Venanz Schubert. — Sankt Ottilien: EOS Verlag, 1987.
(Wissenschaft und Philosophie; Bd. 4)
ISBN 3-88096-754-7
NE: Albers, Gerd [Mitverf.]; Schubert, Venanz [Hrsg.]; GT

Gesamtherstellung: EOS Druck, D-8917 St. Ottilien
Schrift: 10/12 Punkt Paladium

INHALT

Bodo Pareigis

EIGENSCHAFTEN DES LEEREN RAUMES – WAS DENKBAR IST.

Vom physikalischen Raum und der Anschauung

Mit dem Begriff des Raumes erfassen und beschreiben wir die Lage und die Bewegungen unserer Umwelt. Das war seit den alten Griechen schon eine der wichtigsten Aufgaben der Mathematik. Der Raumbegriff orientiert sich daher zunächst an unseren Erfahrungen, am Erfahrbaren und an unserer Anschauung. Er ist ein Mittel, um unsere Umwelt zu ordnen.

Gleichzeitig hat uns die Erfahrung gelehrt, daß die Natur den auf logischen Gesetzen aufgebauten mathematischen Modellen gehorcht. Unser Weg zur Naturerkenntnis führt dabei über den Begriff des Raumes. Die Auswahl des besten Modelles für den Raum unter den verschieden möglichen – und solche sind denkbar, wie ich heute zeigen will – muß schließlich durch Experimente bestimmt werden, oder aber im Falle der Unentscheidbarkeit durch die mathematische Einfachheit und Eleganz.

Historisch gesehen ist der Raum als der Behälter für die Dinge und Ereignisse der Umwelt verstanden worden. Heute kann er jedoch nicht mehr ohne weiteres losgelöst von der in ihm befindlichen Materie und der mit ihm ablaufenden Zeit betrachtet werden.

Wenn ich also vom leeren Raum spreche, so meine ich gerade dieses nach heutiger Erkenntnis nicht mehr adäquate Denken über den Raum – losgelöst von Zeit und Materie. Zur Berechtigung dessen sollte ich daher zunächst zwei Dinge sagen: 1) daß die Entwicklung des Raumbegriffes in der Mathematik sich soweit von den anschaulichen Eigenschaften des uns umgebenden Raumes entfernt hat, daß ihre Darstellung an sich höchst interessant ist, 2) daß darüber hinaus in dem verallgemeinerten Raumbegriff aber auch die Möglichkeit verborgen liegt, die viel komplexeren Zusammenhänge von Raum, Zeit und Materie als räumliche bzw. geometrische Begriffe zu verstehen. Im Vortrag von Herrn Prof. Ehlers wurde z.B. die Entwicklung eines schwarzen Loches in einem Raum-Zeit Diagramm dargestellt, d.h. als eine geometrische Figur in der 4-dimensionalen Raum-Zeit aufgefaßt. Der Physiker weiß genau, daß er das dabei verwendete Raum-Modell ändern muß, wenn es nicht mehr in Übereinstimmung mit seinen Messungen steht.
Der Mathematiker hat hier die Aufgabe, möglichst alle denkbaren Modelle des Raumes aufzufinden, so daß der Physiker sich einen »Maßanzug« aussuchen kann. Diese Arbeit begann schon im Altertum mit der Erfindung der Geometrie, der Wissenschaft der Erdvermessung, deren mathematischer Teil ja in hervorragendem Maße eine Theorie des Raumes ist.
Die Entwicklung zum heute in der Mathematik verwendeten Begriff des Raumes ist diffus und stark von der Sprachverwendung beeinflußt. Kaum ein Mathematiker ist sich bewußt darüber, wann er von einem Raum spricht und wann nicht. Der Begriff des Rau-

mes an sich ist in der Mathematik nicht wohldefiniert. Ich möchte zur Klärung nur einige Beispiele der Verwendung des Wortes Raum geben. Man spricht von
affinen Räumen und projektiven Räumen,
von analytischen und geometrischen Räumen,
von metrischen und topologischen Räumen,
von Vektor-Räumen, Maß-Räumen und Wahrscheinlichkeits-Räumen,
von Hilbert-Räumen und den Zahlen-Räumen.
Andere Begriffe, wie Manngifaltigkeit, Geometrie, Flächen und Hyperflächen vervollständigen diese Aufzählung von in der Mathematik verwendeten Raumbegriffen. Interessant ist nun, daß die Mathematiker mit diesen Begriffen individuell in unterschiedlichem Maße konkrete Raum-Vorstellungen verbinden, Vorstellungen, die durchaus nicht mit unserer Erfahrung der Umwelt übereinstimmen, die durch unsere Sinnesorgane nicht vermittelt werden und auch nicht vermittelt werden können. Mir scheint, daß unser Vermögen zur Raum-Vorstellung durchaus nicht beschränkt ist auf die uns von Kindheit an gegebene Erfahrung des Raumes, sondern erweiterbar ist zu Raum-Vorstellungen, denen keine physikalische Realität zu Grunde liegt, bedingt allein durch das Denken darüber, oder durch Verwendung von Computern, die uns bildhaft zumindest einige Aspekte von ungewöhnlichen Räumen optisch näher bringen können. Ich spreche hier also von psychologischen Vorgängen, wenn ich von einer erweiterten Raum-Vorstellung bei den Mathematikern rede, nicht nur vom Formelaufbau, von den Berechnungen, auf die sich der jeweilige Raumbegriff stützt. Um ein sol-

ches Beispiel anzugeben, werde ich Ihnen am Schluß meines Vortrages einen Film über einen sich drehenden 4-dimensionalen Würfel zeigen. In der gedruckten Fassung dieses Vortrages sind die graphischen Möglichkeiten des Filmes durch einige geeignete Zeichnungen ersetzt worden.

Von verschiedenen mathematischen Raum-Begriffen und ihren Eigenschaften

Im Mittelpunkt meines Vortrages sollen jedoch einige konkrete Beispiele von Eigenschaften stehen, die wir an Räumen studieren. Ich kann hier weder einen Überblick über alle denkbaren Eigenschaften von Räumen geben, noch den mathematischen Hintergrund jeder Eigenschaft voll ausleuchten. Ich werde daher nur an einigen wenigen Beispielen zeigen, wie man konkret einige Eigenschaften des Raumes definieren kann und welche Konsequenzen wir aus diesen Eigenschaften ziehen können.
Was liegt einem Raum zu Grunde? Da wir den Raum ohne Materie, ohne Zeit studieren wollen (diese können als besondere Aspekte eines größeren Raumes aufgefaßt werden) ist der einzige interessante zugehörige Begriff der des Ortes oder des Punktes. Ein Raum besteht aus seinen Punkten und hat zunächst keine weiteren Eigenschaften, er ist die Zusammenfassung seiner Punkte zu einem Ganzen. In der Mathematik spricht man dann auch vom Raum als der Menge seiner Punkte. Das können wir hier als einfachste Definition des Begriffes eines leeren Raumes verwenden.

Was als erste Eigenschaft hinzu kam, ist wohl historisch gesehen der Begriff des Abstandes oder der Metrik. Das muß sogar den ersten Menschen schon bewußt gewesen sein. Welche grundlegenden Eigenschaften hat nun der Begriff des Abstandes? Es gelten

1) Der Abstand $A(p,q)$ zweier Punkte p und q ist immer eine positive reelle Zahl und genau dann ist der Abstand Null, wenn die beiden Punkte gleich sind.

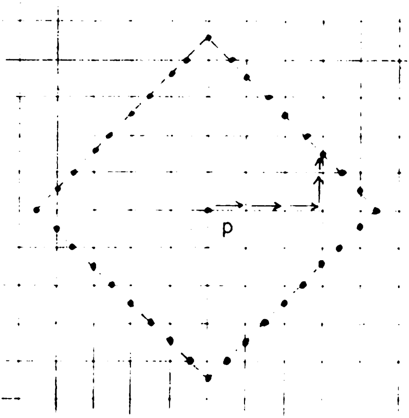
2) Der Abstand von p nach q ist derselbe, wie der Abstand von q nach p.

3) Es gilt die Dreiecksgleichung

$A(p,q) + A(q,r) \geqq A(p,r)$.

Das sind nun Begriffe, die heute in der Mathematik zur Definition des metrischen Raumes verwendet werden. Ein großer Teil unserer geometrischen Begriffe läßt sich damit erfassen. So kann man z.B. einen Kreis um den Punkt p mit dem Radius R definieren als die Menge aller Punkte q, die von p genau den Abstand R haben. Und mit Kreisen kann man offenbar schon eine reichhaltige Geometrie betreiben. Daß mit dem Begriff der Metrik auch andere als unsere gängigen Vorstellungen des Abstandes beschrieben werden können, möge das folgende Beispiel zeigen.

Ein Taxifahrer auf der Insel Manhattan hat den folgenden Abstandsbegriff. Der Abstand zwischen zwei Adressen p und q ist die kürzeste Straßenverbindung von p nach q. Nehmen wir an, daß es keine Einbahnstraßen in New York gibt, dann gelten für diese Metrik ebenfalls die drei oben genannten Eigenschaften. Dieser metrische Raum sieht aber offenbar ganz anders aus, als der übliche. Die Punkte sind z.B. nur die erreichbaren Adressen an den Straßenzügen Manhattans. Die oben eingeführte Definition des Kreises ergibt für den Taxifahrer am Punkt p die folgende Figur:



Welches waren historisch die nächsten Eigenschaften des Raumes, die durch die Mathematik erfaßt wurden? Da muß in erster Linie die griechische Geometrie genannt werden, die mit dem Namen EUKLID verbunden ist. Euklid führte außer dem Begriff Punkt auch die Begriffe Gerade, Ebene, Winkel, Kreis usw. ein und studierte ihr gegenseitiges Zusammenspiel in axiomatischer Form. Aus der Vielzahl der Sätze aus dieser Geometrie sei nur einer herausgegriffen, nämlich:

Die Summe der Winkel in einem Dreieck ist 180°.

Zum Beweis dieses Satzes benötigt Euklid sein Parallelenaxiom, die Annahme,

daß zu einer Geraden durch einen Punkt genau eine Parallele verläuft.

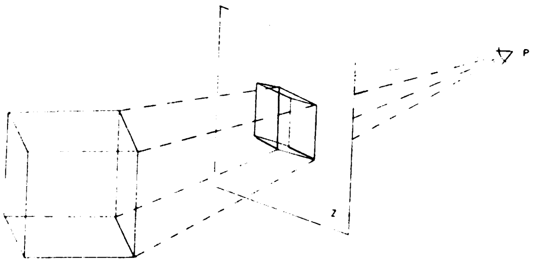
Wir werden später noch einmal auf diesen Satz zurückkommen. Hier sei nur darauf hingewiesen, daß die Geometrie des Euklid mit Objekten operiert, die keine Zahlen sind und auch nicht durch Zahlen festgelegt werden.
Der nächste Schritt war dann die großartige Beschreibung geometrischer Objekte mit Hilfe ihrer Koordinaten, deren Einführung wir René Descartes verdanken. Er schrieb dazu 1619 in einem Brief an den Mathematiker und Freund Beekman: »Eine völlig neue Wissenschaft, die eine allgemeine Lösung aller Probleme erlaubt, die irgendwie qualitativ kontinuierlich oder diskontinuierlich gestellt werden können und die in Übereinstimmung mit der Natur sind... damit wird fast nichts Neues mehr in der Geometrie entdeckt werden können.« Hier wurde erstmals das gesamte Gedankengebäude der Geometrie durch Zahlen erfaßbar, ja mit Zahlen völlig treu wiedergegeben. In der Ebene wurden zur Beschreibung eines Punktes zwei Koordinaten (x,y) benötigt, im Raum drei Koordinaten (x,y,z), und mit der Erfassung der Punkte durch Zahlen konnten auch geometrische Figuren durch Zahlen beschrieben werden, der Kreis $x^2 + y^2 = 1$ oder die Gerade $y = 2x + 1$ etwa. Die Brücke zwischen der Geometrie und dem Rechnen war geschlagen. Die Eigenschaften des Raumes wurden der Rechnung zugänglich.
Ein weiteres wurde auch möglich. Da ein Punkt im Raum durch das Tripel (x,y,z) seiner Koordinaten vollständig beschrieben wurde, war es für den Mathematiker gleichgültig, ob er seine Überlegungen am Punkt p oder an den Koordinaten (x,y,z) ausführte.

Er hatte aber jetzt die Möglichkeit, auch Geometrie mit Punkten zu betreiben, die durch 4 Koordinaten (u,x,y,z) festgelegt wurden oder mit 5 oder mehr Koordinaten.
Hier also hat die neue Methode das Tor geöffnet zu qualitativ neuen geometrischen Begriffen, dem 4-dimensionalen, dem n-dimensionalen oder gar dem ∞-dimensionalen Raum.
Für unsere Überlegungen zum Begriff des Raumes wird an diesem Beispiel klar, wie fließend der Übergang von einer Raum-Vorstellung zu ihrer logischen und schließlich zahlenmäßigen Erfassung ist. Koordinaten erfassen vollständig das Gebäude der euklidischen Geometrie, sie erlauben darüber hinaus Erweiterungen der Geometrie, die sonst wohl kaum »denkbar« wären. Sie erweitern aber letztendlich auch unseren Erfahrungs- und Anschauungsraum auf äußerst abstrakte und subtile Weise. Die Frage, warum ein großer Mathematiker wie Bernhard Riemann eine besondere Fähigkeit für höherdimensionale Vorstellungen und Analyse hatte, war wohl für die Philosophen und auch die Psychologen bis vor wenigen Jahrzehnten lediglich die Frage nach den ungewöhnlichen und unerklärbaren Kräften eines einzelnen Menschen. In der heutigen Zeit, in der mehr und mehr Menschen mit der Mathematik und den ständig wachsenden Möglichkeiten für geometrische Darstellung durch Computer in Berührung kommen, stellt sich immer stärker die Frage nach den Grenzen der menschlichen Vorstellungskraft bzgl. des Raumes. Viele Möglichkeiten und Varianten der Geometrie werden heute erfahrbar durch Computer-Graphik und die Frage, ob

die 3-dimensionale euklidische Anschauungsform für uns denknotwendig ist oder welche Anschauungsformen für den Raum-Begriff möglich sind, scheint mir mehr denn je ungeklärt. Ich meine, daß wir bei genügender Beschäftigung und unter Verwendung der neuen technischen Möglichkeiten zu ungeahnten neuen räumlichen Anschauungsformen kommen können.

In der verbleibenden Zeit dieses Vortrages möchte ich Ihnen drei mögliche Erweiterungen unseres Raumbegriffes erläutern. Die Unsymmetrie der euklidischen Geometrie der Ebene, nämlich daß zwei verschiedene Geraden sich entweder in einem Punkt schneiden, oder aber zueinander parallel verlaufen (dieses ist die einfachste von einer Reihe von Unsymmetrien) wurde im letzten Jahrhundert auf zweierlei Weise behoben. Eine Lösung war die Einführung der projektiven Geometrie, die andere die Einführung der nichteuklidischen Geometrien.

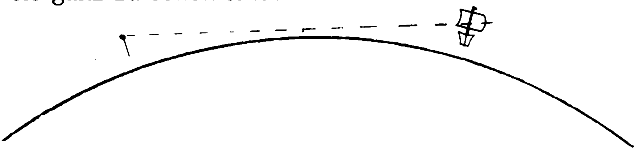
Die projektive Geometrie z.B. der Ebene führt für jede Richtung von (parallelen) Geraden einen idealen »unendlich fernen« Punkt ein, in dem sich dann die parallelen Geraden schneiden. Weiter führt sie die »unendlich ferne« Gerade als die Menge aller »unendlich fernen« Punkte ein. Diese neuen Punkte und Geraden werden zu den schon vorhandenen völlig gleichgestellt und eine geeignete Erfassung dieser Objekte zeigt, daß diese Erweiterung widerspruchsfrei bleibt. So kann man in der projektiven Geometrie davon sprechen, daß sich zwei Geraden immer schneiden müssen. Die beklagte Unsymmetrie ist damit behoben. Die euklidische Geometrie der Ebene spielt sich in einem Teil der projektiven Ebene ab. Ähnlich kann man auch den 3-dimensionalen euklidischen Raum in den 3-dimensionalen projektiven Raum einbetten. Damit war auch das Verständnis z.B. der ebenen Perspektive gewachsen. Lassen Sie mich das etwas weiter ausführen. In der geometrischen Formulierung der Perspektive betrachtet man Abbildungen des Raumes auf die (Zeichen)-Ebene gemäß der folgenden Skizze



Strahlen vom Punkt P zu den Punkten des 3-dimensionalen Objektes werden mit der Zeichenebene Z geschnitten und ergeben das Abbild des Objektes. Betrachten wir das Beispiel von parallelen Eisenbahngleisen:

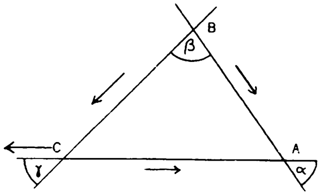
In der perspektivischen Darstellung der Ebene E, in der die Gleise liegen, auf die Zeichenebene erhält man also tatsächlich einen unendlich fernen Punkt, ja sogar die unendlich ferne Gerade als Horizont-Linie. Die Darstellung unserer Ebene E auf Z ist erst dann wirklich sinnvoll, wenn man E als projektive Ebene mit

unendlich ferner Geraden auffaßt. Eine sinnvolle, ja anschauliche Erweiterung unseres Raumbegriffes!
Eine der wichtigsten Eigenschaften des Raumes, die auch erst durch Einbettung des Raumes in gewisse Erweiterungen ganz verständlich wird, ist die sogenannte Krümmung des Raumes. Lassen Sie mich dazu eine 2-dimensionale Analogie betrachten. Die Menschheit hat lange gebraucht, bis sie eingesehen hat, daß die Erde eine Kugel ist. Dem Seefahrer hätte das nicht ganz überraschend kommen können, denn tatsächlich kann man sich davon mit guten Augen selbst überzeugen mit der Feststellung, daß weit entfernte Leuchttürme, Berge, Schiffe auf dem Meer an klaren Tagen mit der oberen Hälfte schon über den Horizont ragen, ehe sie ganz zu sehen sind.

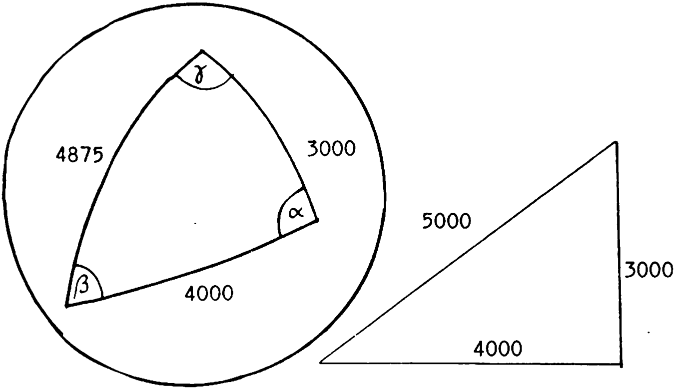


Durch astronomische Beobachtungen an verschiedenen Orten wurde diese Tatsache gefestigt. Wären wir jedoch, wie auf der Venus, dauernd unter tiefliegenden Wolken verborgen, wäre dieselbe Entdeckung spätestens nach der ersten Weltumsegelung gemacht worden. Aber selbst in einem Lande wohnend, das von lauter feindlichen Nationen umgeben ist, die keine Durchreise gestatten, wäre diese Feststellung möglich gewesen.
Bevor ich Ihnen erkläre, wie das möglich ist, möchte ich Ihnen mein Lieblingstier vorstellen, die berühmte und hochintelligente Winkelmaus. Sie hat die entscheidende Entdeckung gemacht, daß die Winkelsum-

me im Dreieck 180° ist, und sie hat dabei das Parallelenaxiom nicht verwendet! Wie war sie vorgegangen?



Sie war geradeaus von C nach A gelaufen, hatte bei A eine Drehung nach rechts um den Winkel α gemacht und war rückwärts nach B gelaufen. Dort hatte sie sich weiter nach rechts um den Winkel β gedreht und war nunmehr wieder vorwärts laufend geradeaus nach C gekommen. Dort hat sie sich schließlich nocheinmal nach rechts um den Winkel γ gedreht und festgestellt, daß sie sich nunmehr um $\alpha + \beta + \gamma$ gedreht hat und rückwärts zu der Ausgangsrichtung endet, also um 180° verdreht. Daraus schloß sie messerscharf, daß $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Ein phantastischer neuer Beweis des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck ohne Verwendung des Parallelenaxioms. Aber leider ist er nicht korrekt, wie wir gleich sehen werden.
Die Wissenschaftler in der isolierten und von Wolken bedeckten Nation stellen nämlich etwas anderes fest; wenn sie ihre Winkelmaus laufen lassen und ihr die genauen Zahlen für die Winkel α, β und γ mitgeben, dann kommt schließlich eine ganz aufgeregte Winkelmaus zurück mit der Feststellung, daß sie sich auf dem Wege um mehr als 180° gedreht hat, um sich am Ende einmal nach rückwärts gedreht zu haben. An der Skizze ist das leicht zu erkennen. Läuft die Maus zum



Beispiel vom Nordpol zum Äquator, dreht dort um 90°, läuft dann längs des Äquators noch einmal dieselbe Strecke, dreht um weitere 90°, läuft dann zurück zum Nordpol und dreht sich nochmals um 90°, so hat sie sich um 270° gedreht, steht jedoch rückwärts zur Ausgangsrichtung. Das, so erklären die Wissenschaftler dieses Landes, kann nur daran liegen, daß die Erdoberfläche gekrümmt ist. Auch andere Sätze der euklidischen Geometrie gelten nicht mehr. Gehen Sie z.B. auf der Erde erst 3000 km in einer Richtung, dann 4000 km im rechten Winkel dazu, dann sind Sie nicht etwa 5000 km vom Ausgangspunkt entfernt, wie der Satz des Pythagoras vermuten ließe, sondern nur 4875,13 km. Ich will jetzt nicht darauf eingehen, was die Winkelmaus falsch gemacht hat, sondern nur hinweisen auf die Tatsache, daß man im sehr kleinen Bereich schon feststellen kann, ob die Erdoberfläche gekrümmt ist oder ob sie flach ist.

Gauss und Riemann haben dieses in eine denkbar einfache Formel gebracht:

$c^2 = Ea^2 + 2Fab + Gb^2$,

die für $E = 1$, $F = 0$ und $G = 1$ den Satz des Pythagoras in der Ebene ergibt und mit allgemeinen Werten E, F und G die Geometrie der gekrümmten Flächen erfaßt. Ein ähnliches Maß

$d^2 = Ea^2 + Fb^2 + Gc^2 + 2Hab + 2Ibc + 2Kac$

beschreibt die Krümmung des 3-dimensionalen Raumes.

Die bedeutende Beobachtung hier ist, daß man aus inneren Eigenschaften allein und sogar aus lokalen Eigenschaften schließen kann, ob der Raum gekrümmt ist oder nicht. Es bedarf keines Betrachters aus einer höheren Dimension, nicht einmal der Existenz einer höheren Dimension für die Möglichkeit der Raumkrümmung. Sie ist allein im 3-dimensionalen definierbar und kann physikalisch allein dort getestet werden. Der Raum in unserer Nähe kann also gekrümmt sein, und es gibt physikalisch meßbare Bedingungen dafür. Dafür benötigen wir nicht die physikalische Existenz einer 4. Raum-Dimension.

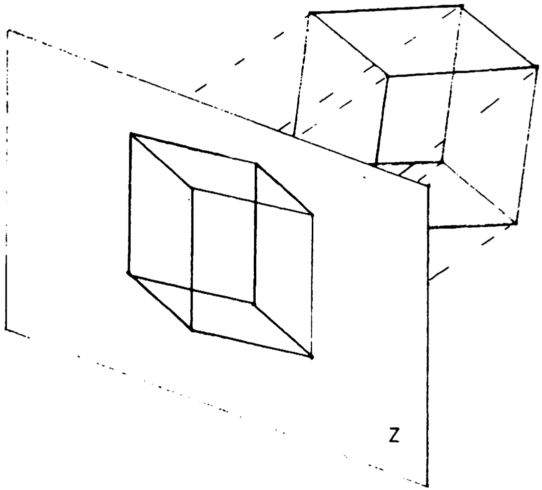
Allerdings zeigt die Mathematik auch, daß man solche gekrümmten Räume immer in höherdimensionale »flache« Räume einbetten kann. Tatsächlich finden sich viele verschiedene mögliche Weltmodelle in einer Theorie von Roger Penrose in einem einzigen 10-dimensionalen Raum (komplex von der Dimension 5) und gestatten damit eine einheitliche geometrische Behandlung. Dieser 10-dimensionale Raum ist auch noch als projektiver Raum gewählt, so daß verschiedene Einbettungsideen zusammen laufen, Einbettung des gekrümmten Raumes in einen »flachen« Raum, Einbettung des euklidischen Raumes in einen projektiven Raum, Einbettung der reellen Zahlen in die komplexen Zahlen.

Die dreidimensionale Sicht eines vierdimensionalen Würfels

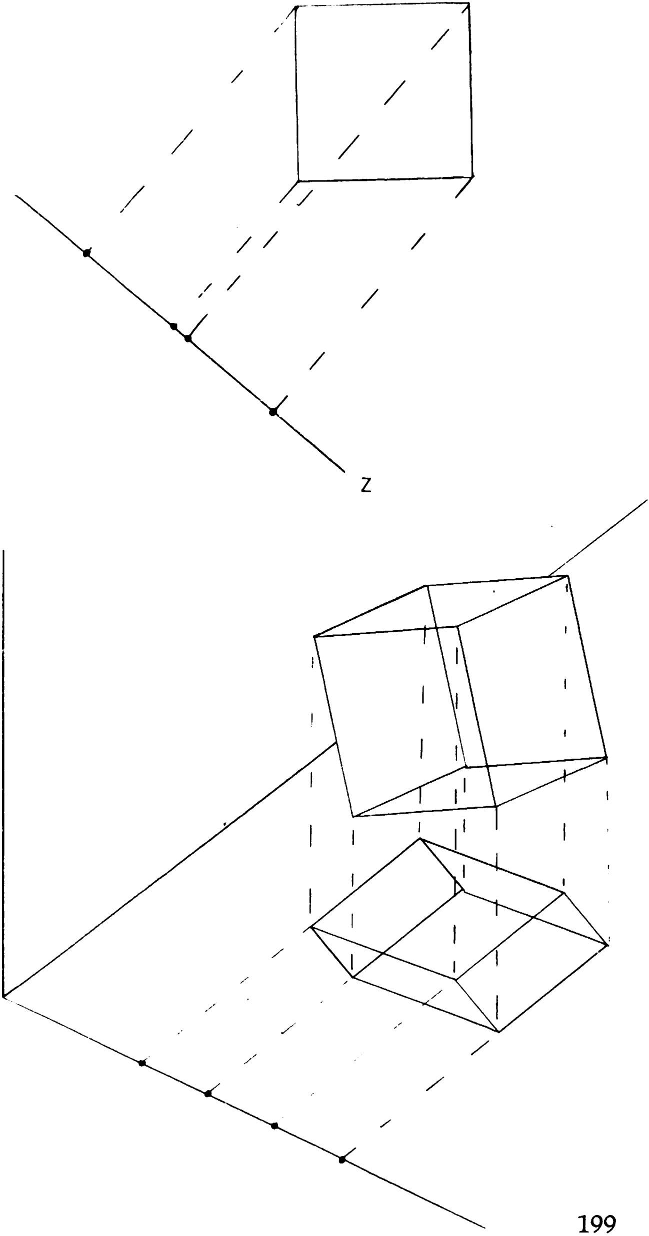
Ich habe versucht, Ihnen anzudeuten, wie man den (leeren) Raum und einige seiner Eigenschaften mathematisch erfassen kann, wie die dabei verwendeten Konzepte verallgemeinert werden können, um andere Modelle unserer physikalischen Welt angeben zu können, daß unsere Welt aber nicht denknotwendig in einem Raum höherer Dimension liegen muß. Außerdem hoffe ich, daß ich Ihnen die Vorstellung des Mathematikers vom Raum etwas näher bringen konnte. Sie ist wohl durch Erfahrung geprägt, aber dieser Erfahrungsraum kann ausgedehnt werden, vor allem durch die Möglichkeiten der Computer-Graphik.
Zum Abschluß meines Vortrages will ich Ihnen nun eine solche Möglichkeit vorführen, nämlich die Darstellung eines 4-dimensionalen Würfels. Dazu muß ich noch einmal auf das bei der Perspektive Gesagte zurückkommen. Betrachten wir die Darstellung eines gewöhnlichen Würfels mit einem unendlich weit entfernten Beobachter, d.h. ohne Perspektive.

Alles, war wir vom Würfel sehen können, ist ein flächenhaftes Bild. Versuchen wir uns nun einmal ein 2-dimensionales Wesen vorzustellen. Wie sieht das ein Quadrat in der Ebene? Es ist gewöhnt, aus einer

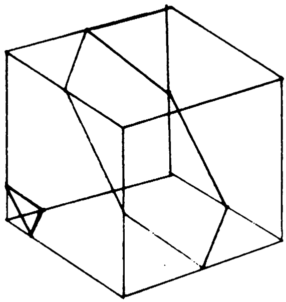
Zeichnung in der Zeichengeraden Z die flächige Struktur des Quadrates zu rekonstruieren, zu sehen. Wie kann man aber dem Flachwesen einen Würfel zeigen? Das geht aus der folgenden Skizze hervor.



Man projiziert zunächst den Würfel so, wie wir das für unser eigenes Sehen von Z benötigen, und zeigt diese Figur dann dem Flachwesen. Es wird auch 8 miteinander verbundene Punkte sehen (manchmal auch nur 4 oder 2) und sich dann die flächenhafte Figur vorstellen können. Aber welche Verwirrung, wenn wir den Würfel drehen und das Flachwesen die sich


Z

ändernden miteinander verbundenen Vierecke sieht, die sich jedes einzeln verformen! Vielleicht wird es nach langem Umgang damit sogar ein gewisses Gefühl der 3. Dimension erahnen, vielleicht sogar die 3. Dimension mit vielen ihrer Eigenschaften erfassen und sich vorstellen können. Sicher bedarf das jedoch sehr vieler Übungen. Wie können wir dem Flachwesen den Würfel noch näherbringen? Nun z.B. durch Querschnitte wie etwa diesen:

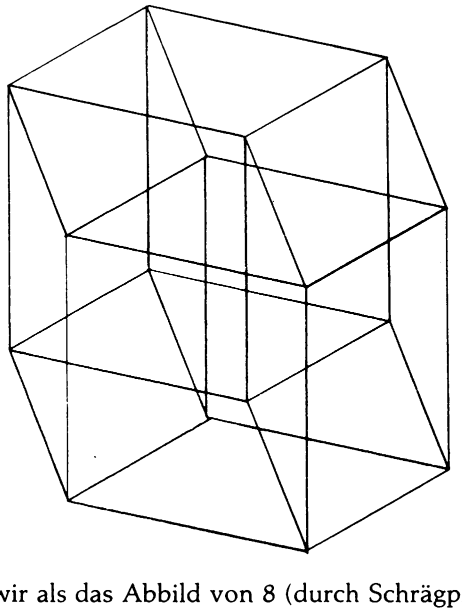


Das Flachwesen würde also ein Sechseck sehen, das beim Durchgang durch den Würfel sich über ein Dreieck aufbaut und dann wieder über ein Dreieck verschwindet. Selbst für uns 3-dimensionale Wesen ist das eine ganz ungewöhnliche Perspektive.
Übersetzt in unsere Sicht des 4-dimensionalen Würfels müssen wir also mit ähnlichen Schwierigkeiten rechnen. Wir werden im folgenden Film einen 4-dimensionalen Würfel sehen, der zunächst ins 3-Dimensionale projiziert wird. Die entstehende 3-dimensionale Figur können wir auf der Leinwand betrachten und den räumlichen Eindruck dadurch verstärken, daß wir das 3-dimensionale Bild drehen,

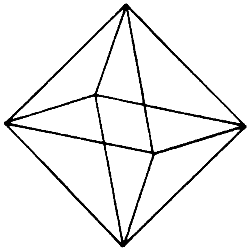
eventuell sogar perspektivisch darstellen. Weiter wird der 4-dimensionale Würfel gedreht werden – um eine Ebene! – und wir werden die sich ändernden 3-dimensionalen Projektionen sehen. Was haben wir zu erwarten? Ein 4-dimensionaler Würfel hat

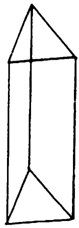
8 Würfel als Begrenzungsräume
24 Flächen als Grenzen zwischen den 8 Würfeln
32 Kanten und
16 Ecken

Es werden nur die 16 Ecken und 32 Kanten gezeigt werden. Eine typische Figur also ist



die wir als das Abbild von 8 (durch Schrägprojektionen verzerrten) Würfeln deuten müssen. Im zweiten Teil des Filmes werden wir dann beobachten können, wie ein Schnitt-»Raum« durch den 4-dimensionalen Würfel geführt wird und welche Schnittformen (Körper) dabei auftreten. Eine typische Schnittform wird ein Oktaeder sein, eine andere eine dreieckige Säule.





Ich überlasse Sie nunmehr den Eindrücken des kurzen Filmes und der Frage, ob Sie anschließend schon 4-dimensional sehen oder denken können, wie es einige Mathematiker, die mit solchen Computer- Graphiken arbeiten, von sich behaupten.