ÜBERBLICKE MATHEMATIK

BAND 5 · 1972

HERAUSGEGEBEN

VON

DETLEF LAUGWITZ

O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
DARMSTADT

BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH

B·I· WISSENSCHAFTSVERLAG

Druck: Zechnersche Buchdruckerei, Speyer
Bindearbeit: Pilger-Druckerei, Speyer
Printed in Germany
ISBN 3-411-01407-5
A

INHALTSVERZEICHNIS

Algebraische Kategorien

Von Bodo Pareigis in München

In einem früheren Aufsatz in Überblicke Mathematik Band 1 gab D. PUMPLÜN eine allgemeine Einführung in die Kategorien. Dieser Aufsatz soll in die Behandlung der universellen Algebra mit kategorietheoretischen Hilfsmitteln einführen. In den letzten Jahren ist in dieser Richtung ein umfangreiches Forschungsgebiet entstanden. Nun ist die Theorie der Kategorien eine neue, sehr umfassende Sprache der Mathematiker. Sie enthält eine große Menge von mehr oder weniger komplizierten Begriffen. Gerade in einer Einführung wird daher die Anzahl der Definitionen von Begriffen die Anzahl der beweisbaren Sätze übersteigen. Ich werde die zur Darstellung benötigten kategorietheoretischen Grundlagen nochmals (und in einigen Fällen abweichend von D. Pumplün) einführen und muß den Leser um Geduld bitten, wenn nicht gleich am Anfang tiefliegende Sätze zitiert werden können. Alle zitierten Sätze findet der Leser bewiesen in PAREIGIS [2].

1. Kategorien

In der Algebra, der Topologie und vielen anderen Gebieten der Mathematik trifft man auf folgende Strukturen, die durch den Begriff der Kategorie abstrahiert werden. Man betrachtet mathematische Objekte (z.B. Vektorräume oder topologische Räume) und die zulässigen Abbildungen (z.B. Vektorraum-Homomorphismen bzw. stetige Abbildungen) zwischen ihnen. Die zulässigen Abbildungen werden dabei immer so definiert, daß die identische Abbildung eine zulässige Abbildung ist und daß die Hintereinanderausführung von zwei zulässigen Abbildungen wieder eine zulässige Abbildung ist.

Dabei erfüllt die Hintereinanderausführung von Abbildungen, die als Verknüpfung aufgefaßt wird, zwei wichtige Bedingungen, die als Axiome in die Definition einer Kategorie eingehen. Seien nämlich A, B, C und D vier mathematische Objekte einer bestimmten Gattung (z.B. Vektorräume oder topologische Räume) und seien $f: A \to B$, $g: B \to C$ und $h: C \to D$ drei zulässige Abbildungen. Schreiben wir wie üblich für die Hintereinanderausführung von f und g auch gf, so gilt

$$(1) \qquad h(gf) = (hg)f$$

nach der Definition der Verknüpfung von Abbildungen. Bezeichnen wir mit 1_A die identische Abbildung von A, so gilt für alle mathematischen Objekte der betrachteten Art B und C und alle zulässigen Abbildungen $f: A \to B$ bzw. $g: C \to A$

$$(2) \qquad f 1_A = f \quad \text{und} \quad 1_A g = g.$$

Faßt man nun alle mathematischen Objekte einer bestimmten Art zusammen zu einem Ganzen (aus mengentheoretischen Gründen sollte dieses Ganze nicht mit Menge sondern mit einem anderen Ausdruck, etwa Klasse, bezeichnet werden) und faßt man die zulässigen Abbildungen zwischen je zwei Objekten zusammen zu einer Menge, so erhält man die folgende

Definition: *Sei $\mathfrak{C}$ eine Klasse von Objekten $A, B, C, \ldots \in$ Ob $\mathfrak{C}$ zusammen mit*

1) einer Familie von paarweise disjunkten Mengen $\{\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)\}$ für alle Objekte $A,B \in$ Ob $\mathfrak{C}$, deren Elemente $f, g, h, \ldots \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ Morphismen heißen, und

2) einer Familie von Abbildungen

$$\{\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B) \times \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(B,C) \ni (f,g) \mapsto gf \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,C)\}$$

für alle Objekte $A,B,C \in$ Ob $\mathfrak{C}$, die Verknüpfungen genannt werden.

$\mathfrak{C}$ heißt eine Kategorie, wenn $\mathfrak{C}$ folgende Axiome erfüllt:

1) Assoziativität: Für alle $A,B,C,D \in Ob\ \mathfrak{C}$ und alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(B,C)$ und $h \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(C,D)$ ist

$$h(gf) = (hg)f.$$

2) Identität: Für jedes Objekt $A \in Ob\ \mathfrak{C}$ existiert ein Morphismus $1_A \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,A)$, Identität genannt, so daß für alle $B,C \in Ob\ \mathfrak{C}$ und alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ und $g \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(C,A)$ gilt

$$f\,1_A = f \quad \text{und} \quad 1_A\, g = g.$$

Obwohl es viele Kategorien gibt, in denen die Morphismen keine Abbildungen sind, werden wir die übliche Pfeilschreibweise für beliebige Morphismen verwenden. $f: A \to B$ heißt also, daß f ein Morphismus von A nach B ist bzw. $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$. Statt $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ schreibt man auch häufig $\mathfrak{C}(A,B)$.

Wir wollen jetzt einige Beispiele von Kategorien betrachten, die wir später noch weiter benötigen werden.

Beispiel 1: $\mathfrak{Me}$ – Kategorie der Mengen: Die Klasse der Objekte ist die Klasse aller Mengen. Die Menge der Morphismen zwischen zwei Mengen A und B ist die Menge der Abbildungen. Die Verknüpfung ist die Hintereinanderausführung von Abbildungen. Dann sind nach den obigen Betrachtungen die Axiome der Assoziativität und der Identität erfüllt.

2: $\mathfrak{Gr}$ – Kategorie der Gruppen besteht aus den Gruppen als Objekten und den Gruppenhomomorphismen als Morphismen. Hier wie in den folgenden Beispielen, soweit nicht anders festgelegt, sei die Verknüpfung der Morphismen immer die Hintereinanderausführung der Abbildungen.

3: $\mathfrak{Ab}$ – Kategorie der abelschen Gruppen besteht aus den abelschen Gruppen als Objekten und den Gruppenhomomorphismen als Morphismen.

4: $\mathfrak{Ri}$ – Kategorie der Ringe besteht aus den assoziativen Ringen mit Einselement als Objekten und den Ringhomomorphismen, die das Einselement erhalten, als Morphismen.

5: R-$\mathfrak{Mod}$ – Kategorie der R-Moduln mit einem assoziativen Ring R mit Einselement besteht aus den unitären R-Moduln als Objekten und den Modulhomomorphismen als Morphismen.

6: $\mathfrak{Mo}$ – Kategorie der Monoide besteht aus den Monoiden als Objekten und den Monoidhomomorphismen als Morphismen.

Ähnlich definiert man die Kategorien der Lie-Algebren, der (kommutativen, assoziativen, unitären) k-Algebren, der Jordan-Algebren, der antikommutativen Algebren usw. Ein Beispiel, in dem Morphismen keine Abbildungen sind, ist das

Beispiel 7: $\mathfrak{N}$ – Objekte von $\mathfrak{N}$ sind die natürlichen Zahlen (inkl. 0). Sind m, n natürliche Zahlen, so sei $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{N}}(m, n) = \mathrm{Mor}_{\mathfrak{N}}(m, 1) \times \ldots \times \mathrm{Mor}_{\mathfrak{N}}(m, 1)$ (n Faktoren) und $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{N}}(m, 1) = \{p_m(1), \ldots, p_m(m)\}$ sei eine Menge mit m Elementen. $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{N}}(m, n)$ ist also die Menge von n-Tupeln $\{(p_m(i_1), \ldots, p_m(i_n)) \mid i_1, \ldots, i_n = 1, \ldots, m$ Für $m = 0, n \neq 0$ sei $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{N}}(m, n) = \emptyset$. Für $n = 0$ sei $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{N}}(m, n)$ eine Menge mit einem Element ω_m. Die Verknüpfung sei definiert durch

$$(p_m(j_1), \ldots, p_m(j_n))\,(p_r(i_1), \ldots, p_r(i_m)) = (p_r(i_{j_1}), \ldots, p_r(i_{j_n}))$$

wobei $(p_r(i_1), \ldots, p_r(i_m)) \colon r \to m$ und $(p_m(j_1), \ldots, p_m(j_n)) \colon m \to n$ sind. Weiter sei $\omega_m(p_r(i_1), \ldots, p_r(i_m)) = \omega_r$. Man kann leicht zeigen, daß diese Verknüpfung assoziativ mit Identitäten ist. Diese Kategorie kann auch auf andere Weise beschrieben werden, wie wir später noch sehen werden.

2. Funktoren

Wir haben gesehen, daß man zusammen mit mathematischen Objekten auch die zulässigen Abbildungen zwischen ihnen betrachtet.

Faßt man nun Kategorien als mathematische Objekte auf, so sind auch zwischen Kategorien zulässige Abbildungen zu betrachten, die Funktoren genannt werden. Im allgemeinen definiert man zulässige Abbildungen so, daß sie mit den definierenden Strukturen auf den mathematischen Objekten verträglich sind. Bei Kategorien sind diese Strukturen in der Vorgabe der Objekte, der Morphismen, der Verknüpfung und der Identitäten zu sehen. Man definiert daher einen Funktor folgendermaßen.

Definition: *Seien* $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{C}$ *Kategorien.* $\mathfrak{F}$ *bestehe aus*
1) einer Abbildung $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{B} \ni A \mapsto \mathfrak{F}(A) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ *und*
2) einer Familie von Abbildungen

$$\{\mathrm{Mor}_{\mathfrak{B}}(A, B) \ni f \mapsto \mathfrak{F}(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{F}(A), \mathfrak{F}(B))\}$$

für alle $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}$.
$\mathfrak{F}$ *heißt ein kovarianter Funktor, wenn* $\mathfrak{F}$ *folgende Axiome erfüllt:*
1) $\mathfrak{F}(1_A) = 1_{\mathfrak{F}(A)}$ *für alle* $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}$,
2) $\mathfrak{F}(fg) = \mathfrak{F}(f)\mathfrak{F}(g)$ *für alle* $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{B}}(B,C)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{B}}(A,B)$ *und alle* $A,B,C \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}$.

Neben den kovarianten Funktoren gibt es auch noch kontravariante Funktoren, die sich gegenüber den kovarianten Funktoren im wesentlichen darin unterscheiden, daß die Morphismen $f : A \to B$ in der Kategorie $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{F}$ übergeführt werden in Morphismen $\mathfrak{F}(f) : \mathfrak{F}(B) \to \mathfrak{F}(A)$ in der Kategorie $\mathfrak{C}$, d.h. daß die Pfeilrichtung umgekehrt wird. Wir benötigen im folgenden nur kovariante Funktoren und verzichten daher auf die Diskussion weiterer Fragen, die mit kontravarianten Funktoren zusammenhängen.

Wir wollen nun wieder an einigen Beispielen den Begriff des Funktors klarmachen.

Beispiel 8: Sei $\mathfrak{Gr}$ wie oben die Kategorie der Gruppen und $\mathfrak{Me}$ die Kategorie der Mengen. Eine Gruppe G besteht aus einer Menge G zusammen mit einer Verknüpfung, die auf G eine Gruppenstruktur definiert. Ein Gruppenhomomorphismus von einer Gruppe H in eine Gruppe G ist eine Mengen-Abbildung von H in G, die in der üblichen Weise mit den Verknüpfungen in H bzw. G verträglich ist. Wir ordnen nun jeder Gruppe G die unterliegende Menge $\mathfrak{F}(G) := G$ zu. Weiter ordnen wir jedem Gruppenhomomorphismus $f: H \to G$ die (unterliegende) Mengen-Abbildung f zu und bezeichnen sie mit $\mathfrak{F}(f)$. Dann ist leicht einzusehen, daß $\mathfrak{F}: \mathfrak{Gr} \to \mathfrak{Me}$ ein kovarianter Funktor ist, der „Vergiß-Funktor" von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der Mengen.

9: Seien $\mathfrak{Ri}$ die Kategorie der assoziativen Ringe mit Einselement und $\mathfrak{Ab}$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Ein Ring R besteht aus einer additiven Gruppe R zusammen mit einer weiteren Verknüpfung, der Multiplikation, die R dann zu einem Ring macht. Ein unitärer Ringhomomorphismus von einem Ring R in einen Ring S ist ein Gruppenhomomorphismus der abelschen Gruppe R in die abelsche Gruppe S, der in der üblichen Weise mit den weiteren Verknüpfungen und den Einselementen in R und S verträglich ist. Wir ordnen nun jedem Ring R die unterliegende abelsche Gruppe $\mathfrak{F}(R) := R$ zu. Weiter ordnen wir jedem Ringhomomorphismus $f: R \to S$ den (unterliegenden) Gruppenhomomorphismus f zu und bezeichnen ihn mit $\mathfrak{F}(f)$. Dann sieht man wieder leicht, daß $\mathfrak{F}: \mathfrak{Ri} \to \mathfrak{Ab}$ ein kovarianter Funktor ist, der (partielle) „Vergiß-Funktor" von der Kategorie der assoziativen Ringe mit Einselement in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Ebenso wie in den vorausgehenden beiden Beispielen definiert man Vergiß-Funktoren

10: von der Kategorie der kommutativen Gruppen in die Kategorie der Gruppen (hier liegt sogar eine Unterkategorie vor),

11: von der Kategorie der assoziativen, antikommutativen k-Algebren in die Kategorie der k-Moduln,

12: von der Kategorie der assoziativen, kommutativen, unitären k-Algebren in die Kategorie der k-Moduln,

13: von der Kategorie der assoziativen, unitären Ringe in die Kategorie der assoziativen Ringe,

14: von der Kategorie der unitären, assoziativen k-Algebren in die Kategorie der k-Lie-Algebren (man fasse eine k-Algebra als Lie-Algebra auf durch $[a, b] = ab - ba$ und vergesse die übrige Information über die Multiplikation),

15: von der Kategorie der assoziativen, unitären k-Algebren in die Kategorie der k-Jordan-Algebren (man fasse eine k-Algebra als Jordan-Algebra auf durch $[a, b] = ab + ba$ und vergesse die übrige Information über die Multiplikation),

16: von der Kategorie der assoziativen, unitären Ringe in die Kategorie der Monoide (man vergesse die Addition der Ringe),

17: für einen Ringhomomorphismus $f : k \to k'$ von der Kategorie der k'-Moduln in die Kategorie der k-Moduln bzw. von der Kategorie der k'-Algebren in die Kategorie der k-Algebren,

18: von der Kategorie der assoziativen, kommutativen, unitären k-Algebren in die Kategorie der Mengen.

Auf diese etwas umfangreiche Aufzählung von Vergiß-Funktoren werden wir später noch einmal zurückkommen. Wir wollen nun noch zwei weitere Funktoren besprechen.

Beispiel 19: Jeder Menge B ordne man den reellen Vektorraum $\mathbb{R}(B)$ mit der Basis B zu. Einer Abbildung $f : B \to C$ ordne man den eindeutig bestimmten Vektorraum-Homomorphismus $\mathbb{R}(f) : \mathbb{R}(B) \to \mathbb{R}(C)$ zu, der jedem Basiselement $b \in B$ das Basiselement $f(b) \in C$ zuordnet. $\mathbb{R}(-)$ ist ein Funktor von der Kategorie der Mengen in die Kategorie der reellen Vektorräume.
20: Wir definieren einen Funktor $\mathfrak{F} : \mathfrak{N} \to \mathfrak{Me}$ für eine fest vorgegebene Menge A durch $\mathfrak{F}(m) = A \times \ldots \times A$($m$-mal) $= A^m$ und für $(p_m(i_1), \ldots, p_m(i_n)) : m \to n$ durch
$\mathfrak{F}(p_m(i_1), \ldots, p_m(i_n))\,(a_1, \ldots, a_m) = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$, also
$\mathfrak{F}(p_m(i_1), \ldots, p_m(i_n)) : A^m \to A^n$.

Der Vollständigkeit wegen sei noch der Begriff der natürlichen Transformation oder des funktoriellen Morphismus erwähnt. In dieser einführenden Darstellung werden wir ihn allerdings kaum weiter verwenden.

Definition: *Seien $\mathfrak{F} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{G} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ zwei Funktoren. Ein funktorieller Morphismus $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ ist eine Familie von Morphismen $\varphi(A) : \mathfrak{F}(A) \to \mathfrak{G}(A)$ für alle Objekte A in $\mathfrak{B}$, so daß für alle Morphismen $f : A \to B$ von $\mathfrak{B}$ das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(A) \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "\mathfrak{F}(f)"'] & \mathfrak{G}(A) \arrow[d, "\mathfrak{G}(f)"] \\
\mathfrak{F}(B) \arrow[r, "\varphi(B)"] & \mathfrak{G}(B)
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist, d.h. $\varphi(B)\mathfrak{F}(f) = \mathfrak{G}(f)\varphi(A)$.

3. Produkte

Viele Begriffe, die man in der Kategorie der Mengen oder auch in vielen anderen Kategorien bildet, kann man auf beliebige Kategorien übertragen. Einige davon, die wir im folgenden noch weiter benötigen werden, sollen jetzt eingeführt werden.

Definition: *Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie. Seien A und B Objekte in $\mathfrak{C}$. Ein Morphismus $f : A \to B$ heißt Isomorphismus, wenn ein Morphismus $f^{-1} : B \to A$ so existiert, daß $ff^{-1} = 1_B$ und $f^{-1}f = 1_A$ gelten.*

Definition: *Seien A und B zwei Objekte in einer Kategorie $\mathfrak{C}$. Ein Tripel bestehend aus einem Objekt $A \times B$ und zwei Morphismen $p_A : A \times B \to A$ und $p_B : A \times B \to B$ heißt Produkt von A und B in $\mathfrak{C}$, wenn zu jedem Objekt C in $\mathfrak{C}$ und zu je zwei Morphismen $f : C \to A$ und $g : C \to B$ genau ein Morphismus $h : C \to A \times B$ so existiert, daß $f = p_A h$ und $g = p_B h$ gelten.*

Bei dieser Definition erhalten wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & A \\ C \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & A \times B \arrow[u, "p_A"'] \arrow[d, "p_B"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Die Morphismen p_A und p_B werden *Projektionen* genannt. Wir schreiben statt h auch häufig (f, g).

Man beweist leicht den folgenden Satz über Produkte.

Satz 1: *Seien $(A \times B, p_A, p_B)$ und (C, q_A, q_B) Produkte der Objekte A und B in $\mathfrak{C}$, dann existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $k : A \times B \to C$, so daß $q_A k = p_A$ und $q_B k = p_B$ gelten.*

Seien nun in der Kategorie der Mengen zwei Mengen A und B gegeben. Dann bildet die Menge der Paare $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} = A \times B$ zusammen mit den Projektionen

$$p_A : A \times B \ni (a, b) \mapsto a \in A$$

und

$$p_B : A \times B \ni (a, b) \mapsto b \in B$$

ein Produkt im Sinne der obigen Definition. Wegen des Satzes 1 kann ein anderes Produkt von diesem „kartesischen" Produkt sich nur durch einen Isomorphismus unterscheiden.

Auch in vielen anderen Kategorien, z.B. $\mathfrak{Gr}$, $\mathfrak{Ab}$, $\mathfrak{Ri}$, R-$\mathfrak{Mod}$, ist das kartesische Produkt versehen mit der geeigneten Struktur ein Produkt.

Wir haben hier ein wichtiges Beispiel davon, daß gewisse schon lange in der Mathematik bekannte Objekte eine universelle Eigenschaft haben – das Tripel $(A \times B, p_A, p_B)$ hat gegenüber allen anderen Tripeln $(C, f : C \to A, g : C \to B)$ die universelle Eigenschaft, die im obigen Diagramm festgehalten ist – und daß sie durch diese universelle Eigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt werden. Daher verwendet man diese universelle Eigenschaft häufig zur Definition.

Der Begriff des Produkts ist nicht auf zwei Objekte beschränkt, sondern kann auch für eine beliebige Familie von Objekten definiert werden. Ist die Familie der Objekte leer, so erhält man den Begriff des Endobjekts.

Definition: *Ein Objekt E in einer Kategorie $\mathfrak{C}$ heißt ein Endobjekt, wenn für jedes Objekt A in $\mathfrak{C}$ genau ein Morphismus von A in E existiert.*

Man zeigt auch hier wieder, daß ein Endobjekt in einer Kategorie $\mathfrak{C}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, wenn es in $\mathfrak{C}$ existiert. In $\mathfrak{Me}$ ist die einpunktige Menge $\{\emptyset\}$ ein Endobjekt. Ebenso sind die einpunktigen Mengen versehen mit der geeigneten Struktur in den Kategorien $\mathfrak{Gr}$, $\mathfrak{Ab}$, $\mathfrak{Ri}$, R-$\mathfrak{Mod}$ usw. Endobjekte.

Wir erwähnen noch zwei weitere Begriffe, die man in beliebigen Kategorien definieren kann und die wir später noch benötigen werden.

Definition: *a) Ein Morphismus $h : B \to C$ in einer Kategorie $\mathfrak{C}$ heißt Monomorphismus, wenn für alle Objekte A in $\mathfrak{C}$ und alle Morphismen $f : A \to B$ und $g : A \to B$ aus $hf = hg$ folgt $f = g$.*
b) Ein Morphismus $h : C \to B$ in einer Kategorie $\mathfrak{C}$ heißt Epimorphismus, wenn für alle Objekte A in $\mathfrak{C}$ und alle Morphismen $f : B \to A$ und $g : B \to A$ aus $fh = gh$ folgt $f = g$.

Man zeigt, daß die Begriffe Monomorphismus und injektiver Homomorphismus (Abbildung) in den Kategorien $\mathfrak{Me}$, $\mathfrak{Gr}$, $\mathfrak{Ab}$, $\mathfrak{Ri}$, R-$\mathfrak{Mod}$ übereinstimmen. Weiter stimmen die Begriffe Epimorphismus und surjektiver Homomorphismus (Abbildung) in den Kategorien $\mathfrak{Me}$, $\mathfrak{Gr}$, $\mathfrak{Ab}$, R-$\mathfrak{Mod}$ überein, jedoch nicht in $\mathfrak{Ri}$. Man sieht hier, daß sich die Übertragung der Begriffe auf beliebige Kategorien nicht ganz reibungslos vornehmen läßt. Durch diese Tatsache entstehen aber auch neue interessante Probleme. Die Untersuchung der Epimorphismen in der Kategorie $\mathfrak{Ri}$ zum Beispiel hat in letzter Zeit zu einer umfangreichen Literatur geführt.

Ein wichtiges Studienobjekt ist die Frage, wie sich Funktoren in bezug auf die oben genannten (und andere) verallgemeinerte Begriffe verhalten, insbesondere die Frage, welche Funktoren Produkte, Mono- bzw. Epimorphismen erhalten. Man sagt, daß ein Funktor $\mathfrak{F} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ (endliche) Produkte erhält, wenn für jedes Paar A, B von Objekten in $\mathfrak{B}$, für das ein Produkt $(A \times B, p_A, p_B)$ in $\mathfrak{B}$ existiert, das Tripel $(\mathfrak{F}(A \times B), \mathfrak{F}(p_A), \mathfrak{F}(p_B))$ ein Produkt von $\mathfrak{F}(A)$ und $\mathfrak{F}(B)$ in $\mathfrak{C}$ ist. Man sagt, daß ein Funktor Endobjekte erhält, wenn für jedes Endobjekt E in $\mathfrak{B}$ das Objekt $\mathfrak{F}(E)$ ein Endobjekt in $\mathfrak{C}$ ist. Weiter sagt man, daß ein Funktor $\mathfrak{F} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ Mono- bzw. Epimorphismen erhält, wenn für jeden Mono- bzw. Epimorphismus $f : A \to B$ in $\mathfrak{B}$ der Morphismus $\mathfrak{F}(f) : \mathfrak{F}(A) \to \mathfrak{F}(B)$ in $\mathfrak{C}$ ein Mono- bzw. Epimorphismus ist. Für die letztere Erscheinung können wir schon einige Beispiele angeben. Die Vergiß-Funktoren $\mathfrak{Gr} \to \mathfrak{Me}$, $\mathfrak{Ab} \to \mathfrak{Gr}$, R-$\mathfrak{Mod} \to \mathfrak{Ab}$ erhalten Mono- und Epimorphismen (weil die betrachteten Abbildungen injektiv bzw. surjektiv sind). Der Vergiß-Funktor $\mathfrak{Ri} \to \mathfrak{Me}$ erhält Monomorphismen, aber nicht Epimorphismen. Weitere Beispiele auch für produkterhaltende Funktoren werden wir im folgenden noch kennenlernen. Es sollte noch bemerkt werden, daß jeder Funktor Isomorphismen erhält, denn $\mathfrak{F}(f)\,\mathfrak{F}(f^{-1}) = \mathfrak{F}(ff^{-1}) = \mathfrak{F}(1_B) = 1_{\mathfrak{F}(B)}$ und $\mathfrak{F}(f^{-1}f) = \mathfrak{F}(1_A) = 1_{\mathfrak{F}(A)}$ für einen Isomorphismus $f : A \to B$.

4. Algebraische Kategorien und Funktoren

Die in Beispiel 7 beschriebene Kategorie $\mathfrak{N}$ läßt sich mit den jetzt eingeführten Begriffen auch folgendermaßen schildern. $\mathfrak{N}$ ist eine Kategorie mit abzählbar vielen Objekten 0, 1, 2, . . . Die Morphismen sind so gewählt, daß jedes Objekt $n \neq 0$ ein n-faches Produkt des Objekts 1 mit sich selbst ist und daß 0 Endobjekt in $\mathfrak{N}$ ist. Dabei ist die kleinst mögliche Anzahl von Morphismen so zu verwenden, daß kein $n \neq 1$ isomorph zu 1 ist. Man zeigt leicht, daß zu je zwei Objekten m, n in $\mathfrak{N}$ ein Produkt existiert, dessen zugehöriges Objekt $m+n$ ist. Knapper gesagt ist $\mathfrak{N}$ eine Kategorie mit endlichen Produkten und Endobjekt, die von einem Objekt 1 minimal und nicht-trivial erzeugt wird.

Wir betrachten jetzt einen Funktor $\mathfrak{F}: \mathfrak{N} \to \mathfrak{Me}$, der endliche Produkte und Endobjekte erhält. Die Menge $\mathfrak{F}(1)$ werde mit A bezeichnet. Dann ist $\mathfrak{F}(n)$ ein n-faches Produkt von A mit sich selbst, also ohne Einschränkung der Allgemeinheit A^n. $\mathfrak{F}(p_n(i))$ sind die zugehörigen Projektionen $A^n \to A$. Weiter ist $\mathfrak{F}(0) = \{\emptyset\}$ Endobjekt in $\mathfrak{Me}$. Man sieht also, daß $\mathfrak{F}$ durch das Objekt A vollständig (bis auf Isomorphie) bestimmt ist. Die Umkehrung, daß eine beliebige Menge A einen Funktor $\mathfrak{F}: \mathfrak{N} \to \mathfrak{Me}$ bestimmt, der Produkte und Endobjekte erhält, gilt auch wegen Beispiel 20.

Die produkterhaltenden Funktoren (die auch das Endobjekt erhalten) von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{Me}$ fassen wir als Objekte einer neu zu bildenden Kategorie auf. Die Morphismen seien die funktoriellen Morphismen. Diese Kategorie bezeichnen wir mit $\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{N},\mathfrak{Me})$. Nach den obigen Überlegungen entspricht jedem Funktor in $\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{N},\mathfrak{Me})$ eine Menge in $\mathfrak{Me}$ und umgekehrt (bis auf Isomorphie). Ähnlich zeigt man, daß jedem funktoriellen Morphismus in $\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{N},\mathfrak{Me})$ eine Abbildung in $\mathfrak{Me}$ umkehrbar eindeutig entspricht. Man kann also sagen, daß die Kategorien $\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{N},\mathfrak{Me})$ und $\mathfrak{Me}$ isomorph sind. (Genaugenommen liegt hier eine Äquivalenz von Kategorien vor.) Wir wollen im folgenden ähnliche Beschreibungen für die Kategorien $\mathfrak{Gr}$, $\mathfrak{Ab}$, R-$\mathfrak{Mod}$, $\mathfrak{Ri}$ und andere geben. Nur für die Kategorie $\mathfrak{Gr}$ werden wir diese Beschreibung detailliert angeben.

Eine Gruppe G läßt sich beschreiben nur mit Abbildungen, ohne die Elemente von G explizit zu verwenden. Eine Verknüpfung ist bekanntlich eine Abbildung $m: G \times G \to G$. Daß die Verknüpfung m assoziativ ist, läßt sich ausdrücken durch die Kommutativität des Diagramms

(3)
$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "m \times 1_G"] \arrow[d, "1_G \times m"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

wobei $(m \times 1_G)(g_1, g_2, g_3) = (g_1 g_2, g_3)$ ist. Diese Abbildung läßt sich auch ohne Elemente ausdrücken. Sie ist nämlich die eindeutig bestimmte Abbildung, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "m"] & G \\
(G \times G) \times G \arrow[u, "p_{G \times G}"] \arrow[r, "m \times 1_G"] \arrow[d, "p_G"'] & G \times G \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\
G \arrow[r, "1_G"] & G
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Entsprechend wird $1_G \times m$ definiert. Die Existenz eines rechts-neutralen Elements wird ausgedrückt durch eine Abbildung $e : \{\emptyset\} \to G$, so daß

(4)
$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(1_G{,}0)"] \arrow[drr, "1_G"'] & G \times \{\emptyset\} \arrow[r, "1_G \times e"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist, wobei $(1_G, 0)(g) = (g, \emptyset)$ ist. Auch diese Abbildung läßt sich wieder ohne Elemente ausdrücken. Schließlich ist die Existenz von Rechts-Inversen nichts anderes als eine Abbildung $s : G \to G$, so daß das Diagramm

(5)
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(1_G, s)"] \arrow[d, "0"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ \{\emptyset\} \arrow[r, "e"] & G \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Diese Beschreibung einer Gruppe läßt sich auf beliebige Kategorien übertragen.

Definition: *Ein Objekt G zusammen mit Morphismen $m : G \times G \to G$, $e : E \to G$ und $s : G \to G$ in einer Kategorie $\mathfrak{C}$ (wobei E ein Endobjekt ist) heißt Gruppe in $\mathfrak{C}$, wenn die Diagramme (3), (4) und (5) kommutativ sind.*

Wir können jetzt also von Gruppen in einer Kategorie sprechen, in der Objekte keine Elemente haben und in der Morphismen keine Abbildungen sind. Diese Tatsache wollen wir sogleich ausnützen. Wir verändern unsere Kategorie $\mathfrak{N}$ nämlich so, daß 1 eine Gruppe wird und daß alle anderen Objekte $\neq 0$ weiterhin Produkte von 1 mit sich selbst bleiben und 0 das Endobjekt bleibt. Zu diesem Zweck fügen wir in $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{N}}(2,1)$ einen neuen Morphismus m hinzu, ebenso e in $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{N}}(0,1)$ und s in $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{N}}(1,1)$. Dann fügen wir in allen Morphismenmengen formal alle möglichen neuen Verknüpfungen hinzu, damit wir wieder eine Kategorie erhalten. Bei dieser Konstruktion achten wir auch darauf, daß die Objekte Produkte der 1 mit sich selbst bleiben. Dann identifizieren wir die Morphismen, die gemäß der Diagramme (3), (4) und (5) gleich sein müssen, also etwa die Morphismen $m(m \times 1_1)$ und $m(1_1 \times m)$ in $\mathrm{Mor}(3,1)$ usw. Auch diese Identifizierung setzen wir in geeigneter Weise auf die übrigen Morphismenmengen fort. Diese Konstruktion kann wie angedeutet, exakt durchgeführt werden. So erhalten wir eine Kategorie mit abzählbar vielen Objekten 0, 1, 2, . . . , in der 1 eine Gruppe ist, 0 ein Endobjekt ist, und jedes Objekt $n \neq 0$ ein n-faches Produkt der 1 mit sich selbst ist, und die bezüglich dieser Eigenschaft minimal (aber nicht trivial) ist. Diese Kategorie werde mit $\mathfrak{Ngr}$ bezeichnet. Sie heißt *algebraische Theorie der Gruppen.*

Sei $\mathfrak{F}: \mathfrak{Ngr} \to \mathfrak{Me}$ ein produkterhaltender Funktor (der auch das Endobjekt erhält.) Es werde $\mathfrak{F}(1)$ mit G bezeichnet. Der Morphismus $m : 2 \to 1$ induziert durch $\mathfrak{F}$ eine Abbildung $\mathfrak{F}(m) : G \times G \to G$. Ebenso induzieren $e : 0 \to 1$ und $s : 1 \to 1$ Abbildungen $\mathfrak{F}(e) : \{\emptyset\} \to G$ und $\mathfrak{F}(s) : G \to G$. Da ein Funktor kommutative Diagramme in kommutative Diagramme überführt, machen $\mathfrak{F}(m)$, $\mathfrak{F}(e)$ und $\mathfrak{F}(s)$ die Diagramme (3), (4) und (5) kommutativ, also ist G mit der Verknüpfung $\mathfrak{F}(m)$ eine Gruppe.

Wie oben sieht man, daß der Funktor $\mathfrak{F}$ durch die Gruppe G vollständig beschrieben wird (bis auf Isomorphie). Jede Gruppe G definiert wieder einen produkterhaltenden Funktor von $\mathfrak{Ngr}$ in $\mathfrak{Me}$. Wie oben bilden wir die Kategorie $\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{Ngr}, \mathfrak{Me})$ der produkterhaltenden Funktoren von $\mathfrak{Ngr}$ in $\mathfrak{Me}$ als Objekte zusammen mit den funktoriellen Morphismen als Morphismen. Jedem Funktor in $\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{Ngr}, \mathfrak{Me})$ entspricht eine Gruppe in $\mathfrak{Gr}$ und umgekehrt (bis auf Isomorphie). Ähnlich zeigt man, daß jedem funktoriellen Morphismus in $\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{Ngr}, \mathfrak{Me})$ ein Gruppenhomomorphismus in $\mathfrak{Gr}$ umkehrbar eindeutig entspricht. Man kann also wieder sagen, daß die Kategorien $\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{Ngr}, \mathfrak{Me})$ und $\mathfrak{Gr}$ isomorph (äquivalent) sind.

Ähnlich definiert man eine abelsche Gruppe, einen assoziativen, unitären Ring, einen R-Modul, eine k-Lie-Algebra, eine k-Jordan-Algebra usw. in einer Kategorie. Verlangen wir, daß 1 in $\mathfrak{N}$ eine abelsche Gruppe, ein assoziativer, unitärer Ring, ein R-Modul, eine k-Lie-Algebra, eine k-Jordan-Algebra usw. ist, und daß 0 ein Endobjekt ist und daß jedes Objekt $n \neq 0$ ein n-faches Produkt der 1 mit sich selbst ist und daß diese Kategorie minimal und nicht trivial wird, so erhalten wir die algebraischen Theorien der abelschen Gruppen, der assoziativen, unitären Ringe, der R-Moduln, der k-Lie-Algebren, der k-Jordan-Algebren usw. Bildet man nun die Kategorie der produkterhaltenden Funktoren von den algebraischen Theorien der abelschen Gruppen, der assoziativen, unitären Ringe, der R-Moduln, der k-Lie-Algebren, der k-Jordan-Algebren usw. in die Mengen, so erhält man Kategorien, die zu den Kategorien $\mathfrak{Ab}, \mathfrak{Ri}$, R-$\mathfrak{Mod}$, der k-Lie-Algebren, der k-Jordan-Algebren usw. isomorph sind. Alle diese Kategorien werden *algebraische Kategorien* genannt. Im folgenden werden wir vermöge der vorgegebenen Isomorphismen die Kategorien identifizieren.

Diese Beschreibung der algebraischen Kategorien mag nur als interessante mathematische Spielerei erscheinen. Sie erlaubt es jedoch, viele wichtige Sätze allgemein über algebraische Kategorien zu beweisen, zum Beispiel

Satz 2: *Ein Morphismus in einer algebraischen Kategorie ist genau dann ein Monomorphismus, wenn er als Abbildung injektiv ist.*

Ein entsprechender Satz für Epimorphismen gilt nicht, wie wir schon früher bei der Kategorie $\mathfrak{Ri}$ gesehen haben.

Seien nun $\mathfrak{Na}$ und $\mathfrak{Nb}$ algebraische Theorien. Wir betrachten einen produkterhaltenden Funktor $\mathfrak{B}: \mathfrak{Na} \to \mathfrak{Nb}$ mit $\mathfrak{B}(1) = 1$ also auch $\mathfrak{B}(n) = n$. Dann induziert $\mathfrak{B}$ einen Funktor von $\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{Nb}, \mathfrak{Me})$ in $\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{Na}, \mathfrak{Me})$, der jedem produkterhaltenden Funktor $\mathfrak{F}: \mathfrak{Nb} \to \mathfrak{Me}$ den produkterhaltenden Funktor $\mathfrak{F}\mathfrak{B}: \mathfrak{Na} \to \mathfrak{Nb} \to \mathfrak{Me}$ zuordnet. Wir bezeichnen diesen Funktor mit

$$\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{B}, \mathfrak{Me}) : \mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{Nb}, \mathfrak{Me}) \to \mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{Na}, \mathfrak{Me})$$

und nennen ihn *algebraischen Funktor.*

Wir werden sogleich sehen, daß wir schon eine Reihe von algebraischen Funktoren kennen. Betrachten wir die algebraischen Theorien $\mathfrak{N}$ der Mengen und $\mathfrak{Ngr}$ der Gruppen. Ein Funktor $\mathfrak{B}: \mathfrak{N} \to \mathfrak{Ngr}$ sei gegeben durch $\mathfrak{B}(n) = n$ und $\mathfrak{B}(p_m(i)) = p_m(i)$. Dann sieht man, daß $\mathfrak{B}$ ein produkterhaltender Funktor ist. $\mathfrak{B}$ induziert den Funktor $\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{B}, \mathfrak{Me})$, den man als Funktor von $\mathfrak{Gr}$ in $\mathfrak{Me}$ auffassen kann. Rechnet man die Einzelheiten nach, so ist dieser algebraische Funktor der in Beispiel 8 beschriebene Vergiß-Funktor.

Betrachten wir nun die algebraischen Theorien $\mathfrak{N}\mathfrak{ab}$ der abelschen Gruppen und $\mathfrak{N}\mathfrak{ri}$ der assoziativen, unitären Ringe. Man erhält $\mathfrak{N}\mathfrak{ri}$ aus $\mathfrak{N}\mathfrak{ab}$ durch Hinzufügen einer weiteren Verknüpfung $\mu : 2 \to 1$ und einer Operation $\epsilon : 0 \to 1$ und durch Identifizieren gewisser Morphismen, die das Assoziativgesetz, die Distributivgesetze und die Eigenschaft der Eins beschreiben. Natürlich muß auch hier durch eine umfangreiche detaillierte Konstruktion gegangen werden. Diese Konstruktion definiert jedenfalls einen produkterhaltenden Funktor $\mathfrak{B} : \mathfrak{N}\mathfrak{ab} \to \mathfrak{N}\mathfrak{ri}$ mit $\mathfrak{B}(n) = n$. Dieser definiert einen algebraischen Funktor von $\mathfrak{R}\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{b}$, den Vergiß-Funktor von Beispiel 9.

Man kann zeigen, daß alle in den Beispielen 10 bis 18 angegebenen Vergiß-Funktoren (und alle anderen auf ähnliche Weise definierten Vergiß-Funktoren) zwischen algebraischen Kategorien algebraische Funktoren sind. Um die Eigenschaften der algebraischen Funktoren weiter studieren zu können, benötigen wir einige weitere kategorietheoretische Begriffe.

5. Limites und Kolimites

Schon im dritten Abschnitt lernten wir ein Beispiel dafür kennen, daß man gewisse Objekte und Morphismen durch ihre universelle Eigenschaft charakterisieren kann. Wir wollen hier eine allgemeinere Definition und gewisse Spezialfälle davon betrachten. Dazu benötigen wir zunächst den Begriff eines Diagramms. Sei $\mathfrak{D}$ eine Kategorie mit einer Menge von Objekten, ein sogenanntes *Diagrammschema.* Ein Funktor $\mathfrak{F} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ heißt *Diagramm* über $\mathfrak{D}$. Ist $\mathfrak{D}$ zum Beispiel eine Kategorie bestehend aus den Objekten A, B, C und den Morphismen $f : A \to C$ und $g : B \to C$ und den Identitäten, so ist $\mathfrak{F} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ gegeben durch Objekte $\mathfrak{F}(A)$, $\mathfrak{F}(B)$, $\mathfrak{F}(C)$ und Morphismen $\mathfrak{F}(f)$ und $\mathfrak{F}(g)$, also durch das Diagramm

(6)
$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{G}(A) \arrow[d, "\mathfrak{G}(f)"] \\ \mathfrak{G}(B) \arrow[r, "\mathfrak{G}(g)"] & \mathfrak{G}(C) \end{tikzcd}$$

Definition: *Sei $\mathfrak{D}$ ein Diagrammschema. Sei $\mathfrak{F} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ ein Diagramm über $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{C}$. Ein Objekt X in $\mathfrak{C}$ zusammen mit einer Familie von Morphismen $\{p(D) : X \to \mathfrak{F}(D)\}$ für alle Objekte D in $\mathfrak{D}$ heißt Limes des Diagramms $\mathfrak{F}$, wenn*
1) für jeden Morphismus $f : D \to D'$ in $\mathfrak{D}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p(D)"] \arrow[dr, "p(D')"'] & \mathfrak{F}(D) \arrow[d, "\mathfrak{F}(f)"] \\
 & \mathfrak{F}(D')
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist und wenn
2) für jedes Objekt Y in $\mathfrak{C}$ und jede Familie $\{q(D) : Y \to \mathfrak{F}(D)\}$ für alle Objekte D in $\mathfrak{D}$, so daß für jeden Morphismus $f : D \to D'$ in $\mathfrak{D}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "q(D)"] \arrow[dr, "q(D')"'] & \mathfrak{F}(D) \arrow[d, "\mathfrak{F}(f)"] \\
 & \mathfrak{F}(D')
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist, genau ein Morphismus $q : Y \to X$ so existiert, daß für jedes Objekt D in $\mathfrak{D}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q(D)"'] & X \arrow[d, "p(D)"] \\
 & \mathfrak{F}(D)
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Diese etwas umfangreiche Definition ergibt im obigen Beispiel ein Objekt X und zwei Morphismen $p(A) : X \to \mathfrak{F}(A)$ und $p(B) : X \to \mathfrak{F}(B)$, so daß das Quadrat

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p(A)"] \arrow[d, "p(B)"'] & \mathfrak{F}(A) \arrow[d, "\mathfrak{F}(f)"] \\ \mathfrak{F}(B) \arrow[r, "\mathfrak{F}(g)"] & \mathfrak{F}(C) \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. (Einen Morphismus $p(C) : X \to \mathfrak{F}(C)$ benötigen wir hier nicht, weil $p(C) = \mathfrak{F}(f)p(A)$ gelten muß.) Wir haben dabei weiter die folgende universelle Eigenschaft. Ist ein Objekt Y in $\mathfrak{C}$ mit zwei Morphismen $q(A) : Y \to \mathfrak{F}(A)$ und $q(B) : Y \to \mathfrak{F}(B)$ gegeben, so daß das Quadrat

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "q(A)"] \arrow[d, "q(B)"'] & \mathfrak{F}(A) \arrow[d, "\mathfrak{F}(f)"] \\ \mathfrak{F}(B) \arrow[r, "\mathfrak{F}(g)"] & \mathfrak{F}(C) \end{tikzcd}$$

kommutativ wird, so existiert genau ein Morphismus $q : Y \to X$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "q"] \arrow[drr, "q(A)"] \arrow[ddr, "q(B)"'] & & \\ & X \arrow[r, "p(A)"] \arrow[d, "p(B)"] & \mathfrak{F}(A) \arrow[d, "\mathfrak{F}(f)"] \\ & \mathfrak{F}(B) \arrow[r, "\mathfrak{F}(g)"] & \mathfrak{F}(C) \end{tikzcd}$$

kommutativ wird.

Der in diesem Beispiel diskutierte Spezialfall wird auch *Faserprodukt* des Diagramms (6) genannt.

In der Kategorie der Gruppen zum Beispiel wird ein Faserprodukt eines Diagramms

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\alpha"] \\ H \arrow[r, "\beta"] & K \end{tikzcd}$$

gegeben durch $\{(g,h) \mid g \in G,\ h \in H,\ \alpha(g) = \beta(h)\}$ und die Homomorphismen

$$\{(g,h) \mid g \in G,\ h \in H,\ \alpha(g) = \beta(h)\} \ni (g,h) \mapsto g \in G$$
$$\{(g,h) \mid g \in G,\ h \in H,\ \alpha(g) = \beta(h)\} \ni (g,h) \mapsto h \in H.$$

Ist H die Gruppe mit nur einem Element e, so ist $\beta(e) = e$ das neutrale Element in K. In diesem Fall ist das Faserprodukt $\{(g,e) \mid g \in G,\ e \in H,\ \alpha(g) = e\}$ isomorph zum Kern $\{g \mid g \in G,$ $\alpha(g) = e\}$ der Abbildung α.

Ein weiteres Beispiel für einen Limes haben wir im Begriff des Produkts kennengelernt. Sei $\mathfrak{D}$ dazu eine Kategorie mit zwei Objekten A und B und nur den identischen Morphismen. Sei $\mathfrak{F}: \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ ein Diagramm. Ein Limes von $\mathfrak{F}$ ist dann ein Objekt X zusammen mit zwei Morphismen $p(A): X \to \mathfrak{F}(A)$ und $p(B): X \to \mathfrak{F}(B)$, so daß zu jedem Tripel $(Y, q(A): Y \to \mathfrak{F}(A), q(B): Y \to \mathfrak{F}(B))$ genau ein Morphismus $q: Y \to X$ mit $p(A)q = q(A)$ und $p(B)q = q(B)$ existiert. Vergleichen wir diese Eigenschaft mit der Definition des Produkts, so ist klar, daß das Produkt nur ein Spezialfall eines Limes ist.

Es gibt interessante Zusammenhänge zwischen Limites und anderen Begriffen. So gilt zum Beispiel

Satz 3: *$f: A \to B$ ist genau dann ein Monomorphismus in $\mathfrak{C}$, wenn das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

ein Faserprodukt ist.

Eine wichtige Frage ist, welche Funktoren Limites erhalten. Ein Funktor $\mathfrak{F}:\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$ zwischen zwei beliebigen Kategorien führt ein Diagramm in $\mathfrak{B}$ in ein Diagramm in $\mathfrak{C}$ über. Hat ein Diagramm in $\mathfrak{B}$ einen Limes, so wird dieser auch nach $\mathfrak{C}$ abgebildet und die Frage ist, ob das Bild in $\mathfrak{C}$ auch ein Limes des nach $\mathfrak{C}$ abgebildeten Diagramms ist. Ist das der Fall für jedes Diagramm in $\mathfrak{B}$, so sagt man, daß der Funktor $\mathfrak{F}$ Limites erhält. Diese Eigenschaft ist unter gewissen zusätzlichen Eigenschaften äquivalent zu einer Eigenschaft des Funktors $\mathfrak{F}$, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden soll.

Ein wichtiges Prinzip in der Theorie der Kategorien ist die Dualität. Wenn man einen Begriff für beliebige Kategorien definiert hat, so erhält man den dualen Begriff dadurch, daß man in der Definition die Pfeilrichtungen umkehrt. Ein Beispiel dafür ist die Definition des Epimorphismus, die dual zur Definition des Monomorphismus ist. Mit dieser Methode definieren wir den Begriff des Kolimes:

Definition: *Sei $\mathfrak{D}$ ein Diagrammschema. Sei $\mathfrak{F}:\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}$ ein Diagramm über $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{C}$. Ein Objekt X in $\mathfrak{C}$ zusammen mit einer Familie von Morphismen $\{p'(D) : \mathfrak{F}(D)\to X\}$ für alle Objekte D in $\mathfrak{D}$ heißt Kolimes des Diagramms $\mathfrak{F}$, wenn*

1) für jeden Morphismus $f : D'\to D$ in $\mathfrak{D}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}(D') \arrow[d, "\mathfrak{F}(f)"'] \arrow[dr, "p'(D')"] & \\ \mathfrak{F}(D) \arrow[r, "p'(D)"'] & X \end{tikzcd}$$

kommutativ ist und wenn
2) für jedes Objekt Y in $\mathfrak{C}$ und jede Familie $\{q'(D) : \mathfrak{F}(D) \to Y\}$ für alle Objekte D in $\mathfrak{D}$, so daß für jeden Morphismus $f : D' \to D$ in $\mathfrak{D}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(D') \arrow[d, "\mathfrak{F}(f)"'] \arrow[dr, "q'(D')"] & \\
\mathfrak{F}(D) \arrow[r, "q'(D)"'] & Y
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist, genau ein Morphismus $q' : X \to Y$ so existiert, daß für jedes Objekt D in $\mathfrak{D}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(D) \arrow[d, "p'(D)"'] \arrow[dr, "q'(D)"] & \\
X \arrow[r, "q'"] & Y
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Wir wollen hier nur ein ganz spezielles Beispiel für einen Kolimes angeben. Seien zwei abelsche Gruppen A und B in $\mathfrak{Ab}$ gegeben. Wir fassen sie wie bei der Definition eines Produktes als Diagramm über einem Diagrammschema mit zwei Objekten und nur den identischen Morphismen auf. Der Kolimes heißt in diesem Falle *Koprodukt* und ist in dem speziellen Fall der Kategorie der abelschen Gruppen die direkte Summe $A \oplus B$ zusammen mit den Injektionen $A \to A \oplus B$ und $B \to A \oplus B$.

Das Dualitätsprinzip, das wir hier nicht präzise formuliert haben, impliziert nun auch den zu Satz 3 dualen Satz.

Satz 4: *$f : B \to A$ ist genau dann ein Epimorphismus in $\mathfrak{C}$, wenn das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "1_A"] \\ A \arrow[r, "1_A"] & A \end{tikzcd}$$

ein Kofaserprodukt ist.

Wir definieren noch einen speziellen Kolimes, das *Anfangsobjekt*, den dualen Begriff des Endobjekts. Es ist der Kolimes über ein leeres Diagramm.

Limites und Kolimites sind von besonderem Interesse unter anderem aufgrund des folgenden Satzes, den wir für den Spezialfall von Produkten schon kennengelernt haben.

Satz 5: *Sei* $\mathfrak{F} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ *ein Diagramm. Sind* $(X, \{p(D) : X \to \mathfrak{F}(D)\})$ *und* $(Y, \{q(D) : Y \to \mathfrak{F}(D)\})$ *Limites von* $\mathfrak{F}$, *so existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus* $f : X \to Y$, *so daß* $q(D)f = p(D)$ *für alle Objekte* D *in* $\mathfrak{D}$ *ist. Sind* $(X, \{p'(D) : \mathfrak{F}(D) \to X\})$ *und* $(Y, \{q'(D) : \mathfrak{F}(D) \to Y\})$ *Kolimites von* $\mathfrak{F}$, *so existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus* $f' : Y \to X$, *so daß* $f'q'(D) = p'(D)$ *für alle Objekte* D *in* $\mathfrak{D}$ *ist.*

Limites und Kolimites sind also bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

6. Adjungierte Funktoren

Wir betrachten den Funktor $\mathbb{R}\text{-} : \mathfrak{Me} \to \mathbb{R}\text{-}\mathfrak{Mod}$, den wir in Beispiel 19 eingeführt haben. Weiter betrachten wir den Vergiß-Funktor $\mathfrak{V} : \mathbb{R}\text{-}\mathfrak{Mod} \to \mathfrak{Me}$, der jedem $\mathbb{R}$-Vektorraum die unterliegende Menge zuordnet. Seien nun X eine Menge und V ein reeller Vektorraum. Aus der linearen Algebra ist bekannt, daß ein Homomorphismus $f : \mathbb{R}(X) \to V$ schon vollständig beschrieben ist durch die Bilder

der Basis X, d.h. durch eine Abbildung $f^* : X \to V$. Zudem definiert jede Abbildung $f^* : X \to V$ eindeutig einen Homomorphismus $f : \mathbb{R}(X) \to V$. Genaugenommen benötigen wir für die Beschreibung von f^* nur die V unterliegende Menge $\mathfrak{V}(V)$, so daß $f^* : X \to \mathfrak{V}(V)$ eine Abbildung von X in $\mathfrak{V}(V)$ ist. Die obige Bemerkung sagt nun, daß es eine Bijektion

$$(7) \qquad \mathrm{Mor}_{\mathbb{R}\text{-}\mathfrak{Mod}}(\mathbb{R}(X), V) \cong \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Me}}(X, \mathfrak{V}(V))$$

gibt.

Man kann nun $\mathrm{Mor}_{\mathbb{R}\text{-}\mathfrak{Mod}}(\mathbb{R}(X), V)$ in den Argumenten X und V als Funktor von der Kategorie der Mengen bzw. der $\mathbb{R}$-Vektorräume in die Kategorie der Mengen auffassen. Dasselbe gilt für $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Me}}(X, \mathfrak{V}(V))$. Wir schreiben diese Funktoren auch als $\mathrm{Mor}_{\mathbb{R}\text{-}\mathfrak{M}}(\mathbb{R}\text{-},\text{-})$ bzw. $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Me}}(\text{-}, \mathfrak{V}\text{-})$. Auf die Details der Definition dieser Funktoren wollen wir hier nicht eingehen. Allgemein gilt für jede Kategorie $\mathfrak{C}$, daß $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\text{-},\text{-})$ ein Funktor in zwei Variablen aus $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{Me}$ ist. Im ersten Argument ist dieser Funktor kontravariant, im zweiten kovariant.

Definition: *Seien $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ Funktoren. Existieren Isomorphismen*

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, \mathfrak{G}(D)) \cong \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{F}(C), D)$$

die in den Argumenten C und D funktoriell sind, so heißt $\mathfrak{F}$ linksadjungiert zu $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}$ rechtsadjungiert zu $\mathfrak{F}$.

Im oben besprochenen Beispiel ist der angegebene Isomorphismus (7) funktoriell in X und V. Damit ist der Funktor $\mathbb{R}\text{-} : \mathfrak{Me} \to \mathbb{R}\text{-}\mathfrak{Mod}$ linksadjungiert zu $\mathfrak{V} : \mathbb{R}\text{-}\mathfrak{Mod} \to \mathfrak{Me}$.

Für adjungierte Funktoren gilt der folgende wichtige Satz.

Satz 6: *Sei $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ ein kovarianter Funktor. Seien $\mathfrak{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{G}' : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ Funktoren, die beide rechtsadjungiert oder beide linksadjungiert zu $\mathfrak{F}$ sind. Dann existiert ein funktorieller Isomorphismus zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$.*

Weiter gilt der folgende Satz.

Satz 7: *Besitzt der Funktor $\mathfrak{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ einen linksadjungierten Funktor $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, so erhält $\mathfrak{G}$ Limites. Außerdem erhält $\mathfrak{F}$ Kolimites.*

In Satz 3 haben wir den Zusammenhang zwischen Limites und Monomorphismen aufgezeigt. Zusammen mit dem Satz 7 erhalten wir eine Folgerung.

Folgerung: *Besitzt der Funktor $\mathfrak{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ einen linksadjungierten Funktor $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, so erhält $\mathfrak{G}$ Monomorphismen und $\mathfrak{F}$ Epimorphismen.*

Eine Anwendung hiervon ist die Tatsache, daß der Vergiß-Funktor $\mathfrak{V} : \mathbb{R}\text{-}\mathfrak{Mod} \to \mathfrak{Me}$ Limites und Monomorphismen erhält. Insbesondere ist für jeden Monomorphismus $f : V \to W$ in $\mathbb{R}\text{-}\mathfrak{Mod}$ die Abbildung $\mathfrak{V}(f)$ injektiv, eine Tatsache, die wir schon im dritten Abschnitt erwähnt haben.

7. Freie Algebren

Wir kommen jetzt zur Diskussion der algebraischen Kategorien und der algebraischen Funktoren zurück. Man kann für alle algebraischen Funktoren den folgenden Satz beweisen. Dazu verwendet man die spezielle Darstellung der algebraischen Kategorien und Funktoren, wie sie im vierten Abschnitt gegeben wurde.

Satz 8: *Sei* $\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{V},\mathfrak{Me}) : \mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{Na},\mathfrak{Me}) \to \mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{Nb},\mathfrak{Me})$ *ein algebraischer Funktor. Dann besitzt* $\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{V},\mathfrak{Me})$ *einen linksadjungierten Funktor.*

Für den Spezialfall des Vergiß-Funktors $\mathrm{Funkt}_\pi(\mathfrak{Na},\mathfrak{Me}) \to \mathfrak{Me}$ nennt man den linksadjungierten Funktor den Funktor „freie Algebra". Für das im sechsten Abschnitt diskutierte Beispiel ist der Funktor $\mathbb{R}\text{-} : \mathfrak{Me} \to \mathbb{R}\text{-}\mathfrak{Mod}$ der Funktor freie Algebra (hier also freier Vektorraum). Diesen Satz verwendet man, um folgende Sätze zu beweisen.

Satz 9: *In jeder algebraischen Kategorie existiert zu jedem Diagramm ein Limes. Dieser kann wie in der Kategorie der*

Mengen auf den unterliegenden Mengen gebildet werden und dann mit geeigneter Struktur versehen werden.

Satz 10: *In jeder algebraischen Kategorie sind die Monomorphismen genau die injektiven Homomorphismen.*

So einfach die Limites in algebraischen Kategorien gebildet werden, so kompliziert sind die Kolimites. Ebenso sind die Epimorphismen viel komplizierter, als die Monomorphismen. Es gilt aber der folgende Satz.

Satz 11: *In jeder algebraischen Kategorie existiert zu jedem Diagramm ein Kolimes.*

In der Kategorie der Mengen ist das Koprodukt zweier Mengen die (disjunkte) Vereinigungsmenge. Da die Funktoren „freie Algebra" rechtsadjungierte Funktoren besitzen, erhalten sie Kolimites. Ein Spezialfall ist davon die folgende Aussage. Sei $\text{Funkt}_\pi(\mathfrak{Na},\mathfrak{Me})$ eine algebraische Kategorie. Seien A und B Mengen. Dann ist das Koprodukt der freien Algebra über A mit der freien Algebra über B gleich der freien Algebra über der Vereinigung von A und B.

Die Funktoren in den Beispielen 8 bis 18 sind alle Beispiele von algebraischen Funktoren. Die zugehörigen linksadjungierten Funktoren umfassen eine Fülle von speziellen Konstruktionen, die man früher in der Algebra häufig unabhängig voneinander durchgeführt hat. Wir wollen die einzelnen Beispiele durchgehen und die klassischen Namen für die zugehörigen linksadjungierten Funktoren angeben.

8: *Freie Gruppe:* von der Kategorie der Mengen in die Kategorie der Gruppen.

9: $\mathbb{Z}$-*Tensoralgebra:* von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der assoziativen Ringe mit Einselement.

10: *Kommutatorfaktorgruppe:* von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der abelschen Gruppen.

11: *Äußere Algebra:* von der Kategorie der k-Moduln in die Kategorie der assoziativen, antikommutativen k-Algebren.

12: *Symmetrische Algebra:* von der Kategorie der k-Moduln in die Kategorie der assoziativen, kommutativen, unitären k-Algebren.

13: *Adjunktion einer Eins:* von der Kategorie der assoziativen Ringe in die Kategorie der assoziativen, unitären Ringe.
14: *Universelle Einhüllende einer Lie-Algebra:* von der Kategorie der k-Lie-Algebren in die Kategorie der assoziativen, unitären k-Algebren.
15: *Universelle Einhüllende einer Jordan-Algebra:* von der Kategorie der k-Jordan-Algebren in die Kategorie der assoziativen, unitären k-Algebren.
16: *Monoid-Ring:* von der Kategorie der Monoide in die Kategorie der assoziativen, unitären Ringe.
17: *Grundringerweiterung:* von der Kategorie der k-Moduln bzw. k-Algebren in die Kategorie der k'-Moduln bzw. k'-Algebren.
18: *Kommutative Polynomalgebra:* von der Kategorie der Mengen in die Kategorie, der assoziativen, kommutativen, unitären k-Algebren.

Wir rechnen hier nicht nach, daß die genannten Funktoren wirklich linksadjungiert zu den entsprechenden algebraischen Funktoren sind. Im Prinzip ist das auch nicht nötig. Wir können die Beispiele 8 bis 18 zur Definition dieser Funktoren verwenden. Es lassen sich auch damit alle für diese Funktoren benötigten algebraischen Eigenschaften nachweisen, allerdings wird dieser Weg nur selten beschritten.

Alle genannten Funktoren besitzen rechtsadjungierte Funktoren. Also erhalten sie Kolimites und Epimorphismen. Dieses Ergebnis ist besonders im Hinblick auf die Tatsache von Interesse, daß Kolimites und Epimorphismen in algebraischen Kategorien schwer zu behandeln sind. Ein Beispiel für dieses Ergebnis erhalten wir für den Funktor Kommutator-Faktorgruppe. Das Koprodukt zweier abelscher Gruppen A und B in der Kategorie der Gruppen ist sehr groß. (Das Koprodukt heißt in der Gruppentheorie freies Produkt.) Selbst wenn A und B endlich sind, ist ihr Koprodukt $A * B$ unendlich. Die Kommutator-Faktorgruppe von A bzw. B ist die Gruppe A bzw. B selbst, weil A und B abelsche Gruppen sind. Die Kommutator-Faktorgruppe von $A * B$ stimmt nun mit dem Koprodukt von A und B in der Kategorie der abelschen Gruppen überein, also mit $A \oplus B$. Eine explizite Berechnung der Kommutator-Faktorgruppe erfordert zumindest, daß man das freie Produkt $A * B$ genau kennt, während unser Schluß auf allgemeinen kategorietheoretischen Prinzipien beruht.

8. Monaden

In diesem letzten Abschnitt soll eine Abstraktion des Begriffes der algebraischen Kategorie betrachtet werden. Dazu dient nun eine besondere Eigenschaft, die wir bisher noch nicht studiert haben. Zunächst müssen wir einige neue Begriffe einführen.

Sei der Funktor $\mathfrak{F}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ linksadjungiert zu $\mathfrak{G}: \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$. Damit sind Isomorphismen

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, \mathfrak{G}(D)) \cong \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{F}(C), D)$$

und

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{F}(C), D) \cong \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, \mathfrak{G}(D))$$

gegeben. Setzen wir im ersten Fall $C = \mathfrak{G}(D)$ ein, so entspricht der Identität $1_{\mathfrak{G}(D)}$ ein Morphismus $\psi: \mathfrak{F}\mathfrak{G}(D) \to D$. Setzen wir im zweiten Fall $D = \mathfrak{F}(C)$, so entspricht der Identität $1_{\mathfrak{F}(C)}$ ein Morphismus $\epsilon: C \to \mathfrak{F}\mathfrak{G}(C)$. Beide Morphismen ψ und ϵ sind funktoriell in D bzw. C. ψ induziert einen Morphismus $\mu = \mathfrak{G}\psi\mathfrak{F}$: $\mathfrak{G}\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{F}(D) \to \mathfrak{G}\mathfrak{F}(D)$. Auch $\mu: \mathfrak{G}\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{F} \to \mathfrak{G}\mathfrak{F}$ ist ein funktorieller Morphismus. Kürzen wir nun noch den Funktor $\mathfrak{G}\mathfrak{F}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{H}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ ab, so erhalten wir zwei funktorielle Morphismen $\mu: \mathfrak{H}\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ und $\epsilon: \mathrm{Id}_{\mathfrak{C}} \to \mathfrak{H}$, wobei $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}}$ der identische Funktor von $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}$ ist. Diese funktoriellen Morphismen machen die folgenden Diagramme kommutativ:

(8)
$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H} \arrow[r, "\epsilon\mathfrak{H}"] \arrow[d, "\mathfrak{H}\epsilon"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathfrak{H}}"] & \mathfrak{H}\mathfrak{H} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathfrak{H}\mathfrak{H} \arrow[r, "\mu"] & \mathfrak{H}
\end{tikzcd}$$

und

$$
(9) \qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{H}\mathfrak{H}\mathfrak{H} \arrow[r, "\mathfrak{H}\mu"] \arrow[d, "\mu\mathfrak{H}"'] & \mathfrak{H}\mathfrak{H} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathfrak{H}\mathfrak{H} \arrow[r, "\mu"] & \mathfrak{H}
\end{tikzcd}
$$

Definition: *Ein Funktor* $\mathfrak{H} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ *zusammen mit zwei funktoriellen Morphismen* $\mu : \mathfrak{H}\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ *und* $\epsilon : \mathrm{Id}_{\mathfrak{C}} \to \mathfrak{H}$, *für die die Diagramme (8) und (9) kommutativ sind, heißt eine Monade.*

Ein anderer gebräuchlicher Name für eine Monade ist auch *Tripel.*

Wir haben gesehen, daß jedes Paar von adjungierten Funktoren eine Monade definiert. Es gibt viele Fälle, in denen verschiedene Paare von adjungierten Funktoren dieselbe Monade definieren. Wir wollen zunächst die Frage behandeln, ob jede Monade durch ein Paar adjungierter Funktoren definiert wird. Sei dazu ($\mathfrak{H} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, $\mu : \mathfrak{H}\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, $\epsilon : \mathrm{Id}_{\mathfrak{C}} \to \mathfrak{H}$) eine Monade. Wir bilden eine neue Kategorie $\mathfrak{C}^{\mathfrak{H}}$, deren Objekte Paare (A, α) sind, wobei A ein Objekt in $\mathfrak{C}$ und $\alpha : \mathfrak{H}A \to A$ ein Morphismus in $\mathfrak{C}$ sind, so daß die Diagramme

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\epsilon(A)"'] \arrow[dr, "1_A"] & \\
\mathfrak{H}(A) \arrow[r, "\alpha"] & A
\end{tikzcd}
\qquad \text{und} \qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{H}\mathfrak{H}(A) \arrow[r, "(\alpha)"] \arrow[d, "\mu(A)"'] & \mathfrak{H}(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathfrak{H}(A) \arrow[r, "\alpha"] & A
\end{tikzcd}
$$

kommutativ sind. Ein solches Paar (A, α) wird auch $\mathfrak{H}$-*Algebra* genannt. Ein Morphismus von einer $\mathfrak{H}$-Algebra (A, α) in eine $\mathfrak{H}$-Algebra (B, β) ist ein Morphismus $f : A \to B$, derart, daß

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{H}(A) \arrow[r, "\mathfrak{H}(f)"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathfrak{H}(B) \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Die Verknüpfung ist dieselbe, wie in $\mathfrak{C}$.

Es gibt einen Vergiß-Funktor $\mathfrak{T}$ von der Kategorie $\mathfrak{C}^{\mathfrak{H}}$ der $\mathfrak{H}$-Algebren in die Kategorie $\mathfrak{C}$, der jeder $\mathfrak{H}$-Algebra (A, α) das Objekt A und jedem $\mathfrak{H}$-Algebren-Homomorphismus f den Morphismus f in $\mathfrak{C}$ zuordnet. Außerdem gibt es einen Funktor „freie Algebra" $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{C}$ in die Kategorie $\mathfrak{C}^{\mathfrak{H}}$ der $\mathfrak{H}$-Algebren, der jedem Objekt A in $\mathfrak{C}$ die Algebra $(\mathfrak{H}(A), \mu(A))$ zuordnet und der jedem Morphismus $f: A \to B$ in $\mathfrak{C}$ den Morphismus $\mathfrak{H}(f): \mathfrak{H}(A) \to \mathfrak{H}(B)$ von $\mathfrak{H}$-Algebren zuordnet.

Satz 12: *Der Funktor „freie Algebra" $\mathfrak{S}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}^{\mathfrak{H}}$ ist linksadjungiert zu dem Vergiß-Funktor $\mathfrak{T}: \mathfrak{C}^{\mathfrak{H}} \to \mathfrak{C}$ und die Monade $(\mathfrak{H}, \mu, \epsilon)$ wird von diesem Paar adjungierter Funktoren definiert.*

Damit ist zunächst die Frage positiv beantwortet, ob jede Monade von einem Paar adjungierter Funktoren erzeugt wird. Die obige Konstruktion hat aber noch eine universelle Eigenschaft.

Satz 13: *Sei $\mathfrak{F}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ linksadjungiert zu $\mathfrak{G}: \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$. Sei $(\mathfrak{H}, \mu, \epsilon)$ die durch $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ definierte Monade. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Funktor $\mathfrak{L}: \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}^{\mathfrak{H}}$, so daß die Diagramme*

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} \arrow[dl, "\mathfrak{F}"'] \arrow[dr, "\mathfrak{S}"] & \\ \mathfrak{D} \arrow[rr, "\mathfrak{L}"'] & & \mathfrak{C}^{\mathfrak{H}} \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} \mathfrak{D} \arrow[rr, "\mathfrak{L}"] \arrow[dr, "\mathfrak{G}"'] & & \mathfrak{C}^{\mathfrak{H}} \arrow[dl, "\mathfrak{T}"] \\ & \mathfrak{C} & \end{tikzcd}$$

kommutativ sind.

Wie auch bei den anderen universellen Problemen, z.B. bei Limites, ist diese universelle Lösung bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Daher ist es sinnvoll, das Vorliegen einer solchen universellen Lösung mit einem besonderen Namen zu versehen.

Definition: *Ein Funktor* $\mathfrak{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ *heißt monadisch, wenn* $\mathfrak{G}$ *einen linksadjungierten Funktor* $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *besitzt, so daß der durch die Monade* $(\mathfrak{G}\mathfrak{F} = \mathfrak{H}, \mu, \epsilon)$ *definierte Funktor* $\mathfrak{L} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}^{\mathfrak{H}}$ *ein Isomorphismus ist.*

In bezug auf die algebraischen Kategorien und Funktoren gilt nun der folgende Satz.

Satz 14: *Jeder algebraische Funktor ist monadisch.*

Das bedeutet für den Spezialfall eines Vergiß-Funktors $\mathfrak{V}$ von einer algebraischen Kategorie in die Kategorie der Mengen, der eine Monade $\mathfrak{H}$ definiert, daß die vorgegebene algebraische Kategorie isomorph zur Kategorie der $\mathfrak{H}$-Algebren ist.

Man kann aber auch zeigen, daß bis auf eine gewisse Einschränkung ein Funktor $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Me}$ von einer Kategorie $\mathfrak{C}$ in die Kategorie der Mengen, der monadisch ist, schon isomorph zu einem algebraischen Funktor ist. Insbesondere ist dann $\mathfrak{C}$ isomorph zu einer algebraischen Kategorie. (Genaugenommen muß man auch unendliche Operationen in den zu betrachtenden Algebren zulassen.) Man beachte jedoch, daß monadische Funktoren $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ existieren, wobei $\mathfrak{D}$ nicht die Kategorie der Mengen ist. Man kann viele der Sätze, die wir über algebraische Kategorien und Funktoren genannt haben, in geeigneter Form auch auf diesen allgemeinen Fall übertragen. Dazu verweisen wir auf die Spezialliteratur über dieses Gebiet.

9. Literaturverzeichnis

Außer der im Aufsatz über Kategorien von D. PUMPLÜN in den Überblicken Mathematik Band 1 gegebenen Literaturangaben hängen mit den hier behandelten Fragen folgende Veröffentlichungen zusammen:

APPELGATE, H. und TIERNEY, M.: Model induced adjount functors. Cahiers de topologie et géométrie différentielle XI, 1 - 21, 1969.

BARR, M.: [1] Shukla cohomology and triples. J. Algebra 5, 222 - 231, 1967.
– [2] Harrison cohomology, Hochschild cohomology and triples. J. Algebra 8, 314 - 323, 1968.

BECK, J.M.: Triples, algebras, and cohomology. Thesis. Columbia University 1967.

BRINKMANN, H.-B. und PUPPE, D.: Abelsche und exakte Kategorien, Korrespondenzen. Lecture Notes Nr. 96. Springer 1969.

Category Theory, Homology Theory, and their Applications I. Lecture Notes Nr. 86. Springer 1969. – II. Lecture Notes Nr. 92. Springer 1969. – III. Lecture Notes Nr. 99. Springer 1969.

DAVIS, R.: Component functors. Proc. Am. Math. Soc. 24, 396 - 400, 1970.

DUBUC, E.J.: Kan Extensions in Enriched Category. Lecture Notes Nr. 145. Springer 1970.

EILENBERG, S. und MOORE, J.C.: Adjoint functors and triples. Illinois J. Math. 9, 381 - 398, 1965.

FELSCHER, F.W.: [1] Adjungierte Funktoren und primitive Klassen. Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl. 1965, No. 4. – [2] Kennzeichnung von primitiven und quasiprimitiven Kategorien von Algebren. Archiv Math. 19, 390 - 397, 1968. – [3] Birkhoffsche und kategorische Algebra. Math. Ann. 180, 1 - 25, 1969.

FREI, A. und MACDONALD, J.L.: [1] Coalgèbres dans les catégories d'algèbres et structures induites par un triple. C.R. Acad. Sc. Paris, 267, 81 - 84, 1968. – [2] Algebras, Coalgebras and T-objects in general categories. Mimeographed notes 1969.

HEDRLIN, Z. und PULTR, A.: On full embeddings of categories of algebras. Illinois J. Math. 10, 392 - 406, 1966.

HERRLICH, H.: Algebraic categories, an axiomatic approach. Mimeographed notes 1970.

KAN, D.: Adjoint functors. Trans. Am. Math. Soc. 87, 295 - 329, 1958.

KLEISLI, H.: Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors. Proc. Am. Math. Soc. 16, 544 - 546, 1965.

KOCK, A.: Limit monads in categories. Aarhus Universitet Preprint series 1967/68 No. 6.

LAWVERE, F.W.: [1] Functorial semantics of algebraic theories. Thesis, Columbia University, 1963. – [2] Functorial semantics of algebraic theories. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 50, 869 - 872, 1963. – [3] An elementary theory of the category of sets. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 52, 1506 - 1511, 1964.

LINTON, F.E.: Triples versus theories. Notices Am. Math. Soc. 13, 227, 1966.

MANES, E.: A triple miscellany. Dissertation. Wesleyan University. Middletown Conn., 1967.

MARANDA, J.-M.: On fundamental constructions and adjoint functors. Canad. Math. Bull. 9, 581 - 591, 1966.

MENDELSOHN, E.: An elementary characterization of the category of (free) relational systems. Math. Z. 113, 224 - 232, 1970.

PAREIGIS, B.: [1] Vergessende Funktoren und Ringhomomorphismen. Math. Z. 93, 265 - 275, 1966. – [2] Kategorien und Funktoren. Mathematische Leitfäden. Teubner, Stuttgart 1969.

Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965. Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1966.

PUMPLÜN, D.: Eine Bemerkung über Monaden und adjungierte Funktoren. Math. Ann. 185, 329 - 337, 1970.

Reports of the Midwest Category Seminar I. Lecture Notes Nr. 47. Springer 1967. – II. Lecture Notes Nr. 61. Springer 1968. – III. Lecture Notes Nr. 106. Springer 1969. – IV. Lecture Notes Nr. 137. Springer 1970.

SCHUBERT, H.: Kategorien I und II. Heidelberger Taschenbücher Nr. 65 und 66. Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1970.

SCHULTE MÖNTING, J.: Kategorien von Algebren mit einer Familie von Grundobjekten. Diplomarbeit Universität Freiburg/Br. 1968.

Seminar on Triples and Categorical Homology Theory. Lecture Notes Nr. 80. Springer 1969.

VOLGER, H.: [1] Kategorien von Algebren über algebraische Theorien. Diplomarbeit Universität Freiburg/Br. 1967. – [2] Über die Existenz von freien Algebren. Math. Z. 106, 312 - 320, 1968.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Bodo Pareigis,
Mathematisches Institut der Universität,
8 München 13,
Schellingstraße 2 - 8.