Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

85. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1983

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

Moise, E. E., Geometric Topology in Dimensions 2 and 3 (Graduate Texts, vol 47), New York – Heidelberg – Berlin: Springer 1977, x + 262 p, cloth, DM 47,30

„Geometrische" Topologie, was ist das? Mengentheoretische Topologie, analytische Topologie, algebraische Topologie, stückweis lineare Topologie; immer gibt das Adjektiv einen Hinweis auf die Methoden, die zur Beschreibung topologischer – das heißt aber doch: geometrischer – Phänomene herangezogen werden. Was sind dann aber geometrische Methoden, ist Topologie nicht eo ipso geometrisch? Nun, der Begriff „geometrische Topologie" taucht seit einigen Jahren immer wieder auf und er meint wohl Problemstellungen, die stark der Anschauung, sozusagen der Elementargeometrie, entnommen sind und sich mit mengentheoretischen oder analytischen oder algebraischen oder stückweis linearen Methoden nur teilweise behandeln lassen. Der anschauliche Charakter kommt bei der Beschränkung auf die Dimensionen 2 und 3 besonders deutlich zum Vorschein und gerade die unterschiedlichen Verhältnisse in diesen beiden Dimensionen bilden ein reizvolles mathematisches Thema.

Edwin E. Moise, der Verfasser des vorliegenden *Graduate Text* schränkt das Gebiet noch etwas mehr ein. Für ihn ist geometrische Topologie in etwa der Zweig der Topologie der Mannigfaltigkeiten, der sich mit Fragen der Existenz von Homöomorphismen befaßt. Damit wird sofort deutlich, daß zumindest die elementaren Methoden der algebraischen Topologie nicht viel beitragen können, sie liefern ja im allgemeinen nur Homotopieaussagen und höchstens negative Ergebnisse in bezug auf Homöomorphie.

Zum Inhalt des Buches: Dieser kann kaum besser dargestellt werden, als es der Verfasser in seinem Vorwort getan hat. Wir können es natürlich hier nicht abschreiben, aber wir empfehlen dem interessierten Leser die Lektüre, die ihn auch etwas über die historische Entwicklung aufklärt. Die dargestellten Ergebnisse sind nicht neu, sondern eigentlich schon als klassisch zu bezeichnen; es handelt sich ja um ein Lehrbuch und nicht um eine Abhandlung. Die Auswahl hängt natürlich von den Interessen des Autors ab und hat ihren Schwerpunkt in seinen eigenen Beiträgen. Sie gipfelt in den wohl ersten syntaktisch wirklich vollständigen Beweisen der Triangulierbarkeit von 3-Mannigfaltigkeiten und der Hauptvermutung für triangulierte 3-Mannigfaltigkeiten. Der Weg dahin ist jedoch ziemlich lang. Er führt über positive und negative Aussagen.

Zu ersteren gehören

die Triangulierbarkeit und Klassifikation von 2-Mannigfaltigkeiten,

der Jordansche Kurvensatz und der Satz von Schönflies, daß jede 1-Sphäre in der reellen Ebene eine 2-Zelle berandet,

der stückweis lineare Schönflies-Satz in $\mathbf{R}^3$, daß jede polyedrale 2-Sphäre im Raum eine stückweis lineare 3-Zelle berandet,

das Loop Theorem von Papakyriakopoulos, daß sich zu jeder Schleife im Rand einer orientierbaren, berandeten 3-Mannigfaltigkeit, die sich in der Mannigfaltigkeit, aber nicht in ihrem Rand zusammenziehen läßt, eine abgeschlossene 2-Zelle finden läßt, deren Rand die gleichen Eigenschaften hat wie die gegebene Schleife,

seine Erweiterung auf zweiseitig eingebettete 2-Mannigfaltigkeiten und

die Berechnung von Knotengruppen.

Demgegenüber steht auf der negativen Seite die Diskussion von wilden Einbettungen. (Ein triangulierbarer Teilraum M in $\mathbf{R}^n$ ist *wild* eingebettet, wenn es keinen Homöomorphismus $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ gibt, derart daß h(M) ein Unterpolyeder des $\mathbf{R}^n$ ist.) Man findet die wilden Bögen und Sphären von Antoine, Wilder, Fox und Artin. Es wird gezeigt, daß man nicht – wie man auf Grund der Beispiele von Antoine vermuten könnte – zur Feststellung der Wildheit mit einer Untersuchung des Komplements auskommt. Erwähnenswert ist die Begründung dafür, daß das wohl berühmteste derartige Beispiel, die „gehörnte Sphäre" von Alexander nicht im Detail behandelt wird (S. 133): „[It] appeared after the work of Antoine. Pictorially it is easier to describe . . ., but mathematically it is harder to investigate. – Antoine was blind". Als zusätzliches negatives Ergebnis, das nicht mit der Wildheit zusammenhängt, ist das Beispiel von Stallings zu nennen, das mit Hilfe des Linsenraumes L(6, 1) zeigt, daß auf die Voraussetzung der Zweiseitigkeit im erweiterten Loop Theorem nicht verzichtet werden kann.

Die Beweise sind alle sorgfältig, vollständig und verständlich durchgeführt. Es werden soweit wie möglich stückweis lineare Methoden verwandt. Die algebraische Topologie spielt – wie schon gesagt – eine untergeordnete Rolle. Es wird Vertrautheit mit der elementaren Homologie von Komplexen vorausgesetzt, die Konstruktion der Fundamentalgruppe wird skizziert (einschließlich des Zusammenhangs mit H_1) und die Euler-Charakteristik wird in einer zwar unüblichen, aber für die hier vorkommenden niederdimensionalen Anwendungen sehr geschickten Weise entwickelt.

Natürlich erfordert ein Lehrbuch, das für einen Gebrauch zur Vorlesung gedacht ist, eine Beschränkung des Stoffes; diese hat der Autor doch ziemlich radikal vorgenommen. Man würde sich einige Ergänzungen wünschen, etwa eine ausführlichere Behandlung der Linsenräume, über deren Homöomorphismen es eine Reihe recht interessanter neuer Ergebnisse gibt, oder eine Darstellung der doch vielfach verwendbaren Heegard-Zerlegungen, oder auch die Schottenkappe, das Standardbeispiel für ein zusammenziehbares Polyeder, das nicht kollabiert; Ringvermutung und Streifenvermutung sind ebenfalls nicht erwähnt. Manchmal wäre ein Hinweis auf mögliche bzw. unmögliche Verallgemeinerungen der dargestellten Sätze in höheren Dimensionen direkt notwendig, so z. B. die Widerlegung der allgemeinen Hauptvermutung, die Theorie der Henkelkörper und das h-Cobordismus Theorem (Diese Aufzählung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit; selbstverständlich handelt es sich um eine zufällige und subjektive Auswahl des Referenten).

Aber in dem, was geboten wird, ist das Buch perfekt. Die Präzision geht hin bis zu dem Nachweis, daß das Einheitsintervall tatsächlich eine 1-Mannigfaltigkeit mit Rand im Sinne der abstrakten Definition ist (S. 19), und dabei bleibt – wohl infolge der Stoffbeschränkung – alles übersichtlich und verständlich! Es wird ganz deutlich, wieviel schwieriger die Fragen nach Homöomorphie sind als die nach Homotopieäquivalenz, worauf man in den üblichen Topologievorlesungen nur selten eingeht. Jedem Topologen sind die dargestellten Sachverhalte zwar irgendwann begegnet, aber er hat sich kaum die Mühe gemacht, die oft sehr straff gehaltenen Originalarbeiten zu verstehen. Es ist ein besonderes Verdienst des Autors, diese Beweise dem forschenden Mathematiker leichter zugänglich gemacht zu haben.

Was den Gebrauch durch Studenten anbetrifft, so ist dieses für mittlere Semester sicherlich möglich. Man kann eine einführende Vorlesung darauf aufbauen, es aber auch zum Selbststudium empfehlen. Für das letztere hat sich der Verfasser einen besonderen didaktischen Trick überlegt. Jedes der 36 Kapitel wird durch eine Serie von Aufgaben abgeschlossen; diese bestehen im allgemeinen aus Behauptungen, die zu beweisen oder zu *widerlegen* sind! Einem Studenten, der dieses Buch durchgeackert und verstanden hat, fällt es sicherlich leicht, weiterführende Literatur zu verarbeiten, und damit hat er eine solide Basis für eine Vertiefung in Richtung Diplom- oder Staatsexamensarbeit.

München R. Fritsch