
Mathematik

erfahren

und lehren

**Festschrift
für Hans-Joachim Vollrath**

herausgegeben von
Günter Pickert und Ingo Weidig

Ernst Klett Schulbuchverlag
Stuttgart Düsseldorf Berlin Leipzig

Inhaltsverzeichnis

Hans-Joachim Vollrath zum 60. Geburtstag.....	7
Hans-Georg Steiner, Bielefeld: Mathematikdidaktik von Ideen, Begriffen und Problemen aus - Hans-Joachim Vollraths Beiträge zur Entwicklung und Konsolidierung unserer Wissenschaft.....	8
Schriftenverzeichnis von Hans-Joachim Vollrath.....	16
Herbert Glaser und Otto Kuropatwa, Würzburg: Hans Joachim Vollrath als Hochschullehrer und Mensch aus der Sicht zweier Mitarbeiter	21
Hans-Georg Weigand, Oldenburg: Mein Einstieg in die Didaktik bei Hans-Joachim Vollrath	25
Erhard Anthes, Ludwigsburg: Mechanische Rechenmaschinen in der Schule	32
Kristina und Jürgen Appell, Würzburg: Proportionalität, Parametrisierungen, Phasenporträts.....	41
Peter Baptist, Bayreuth: Wandel in der Betrachtungsweise - Beobachtungen an einem historischen Beispiel.....	46
Hans-Günther Bigalke, Hannover: Chaos oder Zufall?	55
Willibald Dörfler, Klagenfurt: Haben wir Mathematik im Kopf?.....	63
Siegfried Dürschlag, Bamberg: Umgangssprachliche Bedeutungsinhalte als Ansatz bei der Entwicklung von Strategien der Begriffsbildung (Der pragmatische Aspekt für den Unterricht)	72
Walther L. Fischer, Erlangen-Nürnberg: Die Formale Begriffsanalyse als Werkzeug in der Mathematikdidaktik.....	80
Rudolf Fritsch, München: Bemerkungen zum Satz von Napoleon - Barlotti im Unterricht.....	89
Heinz Griesel, Kassel: Von enaktiven zu verinnerlichteten Verfahrenshilfsmitteln beim Aufbau der Rechenfertigkeit des Addierens im 1. Schuljahr	96
Lisa Hefendehl-Hebeker, Augsburg: Beiträge - anschaulicher Gehalt und mathematische Form.....	101

Hermann Heineken, Würzburg: Hare - Niemeyer und d'Hondt - Ein Vergleich	109
Gerhard Holland, Gießen: Zur maschinellen Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben	117
Arnold Kirsch und Werner Blum, Kassel: Bemerkungen zu einer bekannten "probabilistischen Paradoxie"	125
Peter Kirsche, Augsburg: Zum Problem der Schülerorientierung im Mathematikunterricht der Hauptschule.....	134
Detlef Laugwitz, Darmstadt: Ein Wendepunkt in der Auffassung vom Unendlichen: Riemann und die Mathematik als Denken in Begriffen	142
Norbert Matros, Landau in der Pfalz: Zahl und Sprache	149
Regina D. Möller, Landau in der Pfalz Vorstellungen als Stützpunkte zum Unterrichten von Größen.....	157
Günter Pickert, Gießen: Entstehung eines synthetischen Beweises.....	162
Hans-Christian Reichel, Wien: Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik.....	168
Harald Scheid, Wuppertal: Der Fetisch der Ganzzahligkeit.....	179
Alfred Schreiber, Flensburg: Queneau, Mathematik und "Potentielle Literatur"	185
Gert Schubring, Bielefeld: Euklid versus Legendre in Italien. Eine Fallstudie zur kulturellen Spezifität des Geometrieunterrichts	188
Hans Schupp, Saarbrücken: Der zerbrochene Stock.....	195
Heinz Schwartze, Gießen: Zur Umkehrung axonometrischer Parallelprojektionen	204
Helmut Siemon, Reichenberg/Würzburg: Über Steiner Tripel- und Quadrupelsysteme.....	213
Horst Struve, Landau in der Pfalz: Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs	220

Michael Toepell, München: Projektive Geometrie in der Schule? - Anmerkungen zu einem vergessenen Gebiet.....	228
Günter Törner und Stefan Grigutsch, Duisburg: "Mathematische Weltbilder" bei Studienanfängern - Quintessenz einer Erhebung.....	237
Ursula Viet, Osnabrück: Mathematikaufgaben und Lebenswirklichkeit - für Schüler zwei Paar Stiefel?.....	246
Ingo Weidig, Landau in der Pfalz: Abbildungsgeometrie, ein "Irrweg" des Geometrieunterrichts?	251
Hartmut Wellstein, Flensburg: Physikalische Experimente als Anreiz, Analysis zu lernen.....	259
Thomas Weth, Würzburg: Schöpferisches Tun durch Begriffsbildung im Geometrieunterricht	264
Heinrich Winter, Aachen: Die Fermat-Torricelli-Aufgabe - oder: Die Unersetzbarkeit der Elementargeometrie für die mathematische Allgemeinbildung	272
Peter Zahn, Darmstadt: Zeichen als mathematische Gebrauchsgegenstände. Ein Beitrag zur Philosophie der Mathematik	282
Herbert Zeitler, Bayreuth: Über reguläre Sternpolyeder	290
Peter Zimmermann, Speyer: Gymnasialer Mathematikunterricht. Ein Blick auf heutige und mögliche künftige Strukturen.....	300

Rudolf Fritsch, München

Bemerkungen zum Satz von Napoleon - Barlotti im Unterricht

Gerhard Gentzen (* Greifswald 24. 11. 1909, † Prag 4. 8. 1945), einer der bedeutendsten mathematischen Logiker unseres Jahrhunderts, teilt als dreizehnjähriger Schüler seinem Großvater Alfons Bilharz, einem jüngeren Bruder des berühmten Arztes Theodor Bilharz, in einem Brief vom Dezember 1922 einige "selbstgefundene und selbstbewiesene" mathematische Lehrsätze mit, von denen der vierte aussagt:

Die Umkreise der drei über den Seiten eines Dreiecks gezeichneten gleichseitigen Dreiecke schneiden sich im Schnittpunkt der Pereunten.

Dabei bezeichnet er - selbst sprachschöpferisch tätig - als Pereunten (pereuntes = die Hindurchgehenden) die Verbindungsgeraden einer Ecke des Dreiecks mit der Spitze des auf die gegenüberliegende Seite aufgesetzten gleichseitigen Dreiecks (Robbel, 1986). Daß die drei Pereunten eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden, ist Gentzens selbstgefundener Lehrsatz 2, der aber zum Beispiel schon Ludwig Kiepert 1869 bekannt war; es handelt sich um den Fermatschen Punkt des Dreiecks (siehe Schmidt, 1990). Die hier interessierende Aussage, daß der Fermatsche Punkt auf allen drei Umkreisen der aufgesetzten Dreiecke liegt, findet sich heute zumindest in einem Schulbuch (Kratz 1993a, Seite 85/86), wo sie benutzt wird, um den Satz von Napoleon bereits mit den in der 8. Jahrgangsstufe zur Verfügung stehenden geometrischen Hilfsmitteln zu beweisen. Die Konfiguration des Satzes von Napoleon hat offensichtlich nicht nur Gerhard Gentzen, sondern viele Mathematiker vor ihm und nach ihm fasziniert (siehe Schmidt, 1990). Barlotti hat diesen Satz 1955 von Dreiecken auf beliebige affin-reguläre Polygone erweitert. Der Spezialfall der affin-regulären Vierecke, das heißt, der Parallelogramme, findet sich allerdings schon in einer Notiz des Mathematiklehrers und späteren Versicherungsdirektors Victor Thébault aus dem Jahr 1937. Heutzutage wird viel darüber nachgedacht, wie man den merkwürdigen Satz von Napoleon - Barlotti, für den sich ein mathematisch eleganter Beweis in Fisher (1982) findet, einer unterrichtlichen Behandlung zugänglich machen kann (siehe Gerber, 1980; Schmidt, 1986; Kratz, 1992). In der Literatur bisher unbefriedigend gelöst ist der Grenzübergang vom affin-regulären n -Eck zur Ellipse. Dieser wurde im Rahmen einer Lehrerfortbildungstagung in Oberwolfach Ende 1992 ausführlich diskutiert, und dabei ergab sich eine recht gute Erklärung.

Worum geht es? Der Satz von Napoleon - Barlotti besagt (Barlotti, 1955):

Satz 1: *Errichtet man auf den Seiten eines affin-regulären n -Ecks nach außen (oder - auf allen Seiten - nach innen) reguläre n -Ecke, so bilden die Mittelpunkte der errichteten n -Ecke immer ein reguläres n -Eck.*

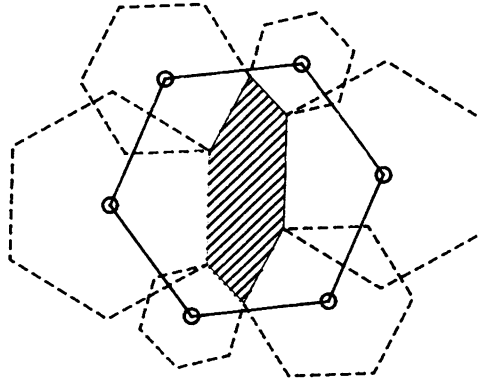


Fig. 1: $n = 6$:

Für $n = \infty^1$ hat Barlotti formuliert (1955/56):

Satz 2: Gegeben sei eine Ellipse mit den Halbachsen a und b . In jedem Punkt P dieser Ellipse sei auf der äußeren Normalen der Punkt P' so bestimmt, daß PP' gleich der halben Länge des zu dem durch P gehenden Durchmessers konjugierten Durchmessers ist. Dann ist der geometrische Ort für die Punkte P' der Kreis um den Mittelpunkt der Ellipse mit dem Radius $a+b$. Geht man statt nach außen dieselbe Entfernung nach innen, so erhält man als geometrischen Ort einen Kreis mit dem Radius $|a - b|$

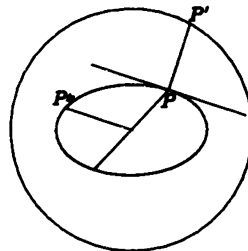


Fig. 2: $n = \infty$

Im Unterricht ist zunächst der Begriff des affin-regulären Polygons zu klären. Dazu ist nach dem Zusammenhang zu fragen, in dem die genannten Sätze behandelt werden könnten. Thematisch gehört zumindest Satz 1 zur Mittelstufengeometrie, in der der allgemeine Begriff der affinen Abbildung nicht zur Verfügung steht. Damit verbietet sich eigentlich die prägnante Definition: Ein ebenes Polygon heißt *affin-regulär*, wenn es affines Bild eines regulären Polygons ist. Eine brauchbare Alternative hat Kratz angeboten (1992). In Ergänzung der üblichen Behandlung der Schrägbilder räumlicher Figuren, schlägt er vor, auch Schrägbilder ebener Figuren zu betrachten (Kratz, 1993, Seite 209). Im Sinne der allgemeinen Theorie bedeutet das die Einschränkung auf die Behandlung

¹ $n = \infty$ dient hier als Abkürzung für den vollzogenen Grenzübergang $n \rightarrow \infty$.

von Achsenaffinitäten an Stelle von beliebigen Affinitäten. Wir wollen die im Schulunterricht zu besprechenden Tatsachen kurz nennen.

Ein *Schrägbildverfahren* ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die folgendermaßen beschrieben ist:

Gegeben sind eine Gerade a , die *Schrägbildachse*, ein Winkel ω , der *Verzerrungswinkel*, und eine positive reelle Zahl q , der *Verzerrungsmaßstab*. Die Punkte von a sind Fixpunkte. Das Bild eines Punktes $A \notin a$ wird folgendermaßen gefunden: Zunächst wird das Lot von A auf a gefällt. Im Lotfußpunkt A^* wird an die Halbgerade $[A^*A$ der Winkel $90^\circ + \omega$ angetragen (in mathematisch positivem Sinn). Auf dem freien Schenkel dieses Winkels wird die Strecke $q \cdot \overline{AA^*}$ abgetragen. Ihr Endpunkt ist das Bild A' von A .

Ein Schrägbildverfahren ist eine geradentreue Abbildung, die zu a parallele Strecken in zu a parallele Strecken gleicher Länge abbildet und Teilverhältnisse erhält. Konvexe Polygone werden auf konvexe Polygone abgebildet. Ein Schrägbildverfahren ist durch die Wahl der Achse und des Bildes eines nicht auf der Achse gelegenen Punktes festgelegt. Die Umkehrabbildung zu einem Schrägbildverfahren ist auch wieder ein Schrägbildverfahren, und zwar mit gleicher Achse. Alle diese Eigenschaften lassen sich leicht mit Hilfe der Gesetze der zentrischen Streckung herleiten.

Eine leichte Umrechnung führt auf eine mehr gebräuchliche Charakterisierung der Achsenaffinität: Für alle Punkte $A \notin a$ sind die Geraden AA' untereinander parallel und die Strecken $[AA']$ werden durch die Achse a in einem festen Verhältnis geteilt.

Da der allgemeine Begriff des affin-regulären Polygons sonst im Unterricht nicht vorkommt und bei der Behandlung der affinen Abbildungen in der Oberstufe sicher vergessen ist, kann man bei der Behandlung des Satzes von Napoleon - Barlotti durchaus auf die fremdklingende Vokabel "affin" verzichten und stattdessen von "fastregulären" Polygonen sprechen, im Sinne der folgenden, formalen Definition.

Ein ebenes Polygon ρ heißt *fastregulär*, wenn es eine Seite $[A_1, A_2]$ besitzt, derart daß das auf $[A_1, A_2]$ errichtete reguläre Polygon ρ' Bild von ρ unter einem Schrägbildverfahren mit der Achse A_1A_2 ist.

Daß diese Definition vernünftig ist, ergibt sich aus der folgenden Tatsache:

Satz 3: *Ist das ebene Polygon ρ fastregulär, so ist jedes auf einer Seite von ρ errichtete reguläre Polygon Bild von ρ unter einem Schrägbildverfahren mit der Trägergeraden dieser Seite als Achse.*

Aus den genannten Eigenschaften des Schrägbildverfahrens folgt unmittelbar, daß jedes Dreieck fastregulär und dieser Satz für Dreiecke trivial ist. Da ein Schrägbildverfahren Parallelität erhält, muß ein fastreguläres Viereck ein Parallelogramm sein und damit erhält man diesen Satz auch für alle fastregulären Vierecke. Also bleiben reguläre n -Ecke mit $n > 4$ zu betrachten. Für $n=5$ ist

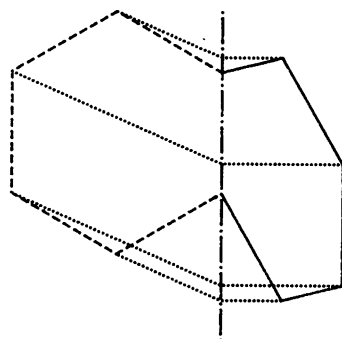


Fig. 3: fastreguläres 6-Eck

ein schülergemäßer Beweis in (Kratz, 1992) ausgeführt; dort wird auch bemerkt, daß man für $n > 5$ analog vorgehen kann. Dazu ist eine weitere Idee notwendig und deswegen wollen wir hier die vollständige Argumentation angeben. Dies bedeutet nicht, daß wir uns eine Behandlung des Satzes von Napoleon - Barlotti ohne diesen Beweis nicht vorstellen können. Die Einzelschritte des Beweises sind sicherlich für Schüler nachvollziehbar; wie viele von ihnen aber den Gesamtzusammenhang begreifen, darüber sollte man sich keinen Illusionen hingeben. Unseres Erachtens ist es erlaubt, diesen Satz als Faktum hinzunehmen, um damit die wesentlich interessantere Aussage des Satzes von Napoleon - Barlotti zu erarbeiten. Aber nun zum

Beweis von Satz 3: Als Schrägbild eines regulären Polygons ist ein fastreguläres Polygon immer konvex. Es sei $\rho = P_1 P_2 \dots P_n$ ein fastreguläres Polygon (Orientierung gegen Uhrzeigersinn) und auf den Seiten $[P_1, P_2]$, $[P_i, P_{i+1}]$ (für ein $i \in \{2, \dots, n\}$, Addition modulo n) von ρ seien die regulären Polygone $A = P_1 P_2 A_3 \dots A_n$, $B = B_1 \dots B_{i-1} P_i P_{i+1} B_{i+2} \dots B_n$ nach außen errichtet (Orientierung im Uhrzeigersinn); wir setzen noch $A_1 = P_1$, $A_2 = P_2$, $B_i = P_i$, $B_{i+1} = P_{i+1}$. Ein Schrägbildverfahren f ist durch $P_1 P_2$ als Achse und $f(P_3) = A_3$ festgelegt. Da ρ als fastregulär vorausgesetzt ist, können wir annehmen, daß A das Bild von ρ unter f ist, also auch $f(P_j) = A_j$ für alle $j \in \{4, \dots, n\}$ gilt. Es ist zu zeigen, daß dann B Bild von ρ unter einem Schrägbildverfahren mit Achse $P_i P_{i+1}$ ist. Im Rahmen der allgemeinen Theorie der affinen Abbildungen ist dies leicht einzusehen. Sei g die Drehstreckung mit $g(A_j) = B_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Die Verkettung $h = g \cdot f$ ("g nach f") ist dann eine Affinität mit den beiden Fixpunkten P_i, P_{i+1} , also die gesuchte Achsenaffinität.

Für einen "elementaren" Beweis betrachtet Kratz (1992) die Mittelpunkte M_A und M_B der regulären Polygone. Das liegt schon deshalb nahe, weil es im Satz von Napoleon - Barlotti gerade um diese Mittelpunkte geht. Dabei ist es sinnvoll, das Urbild M von M_A bezüglich des Schrägbildverfahrens f als Mittelpunkt von ρ anzusehen. Ein Schrägbildverfahren h ist durch $P_i P_{i+1}$ als Achse und $h(M) = M_B$ festgelegt. Wir zeigen: $h(P_j) = B_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, woraus Satz 3 unmittelbar folgt.

Für $j \in \{i, i+1\}$ ist das klar, denn bei $P_i = B_i$ und $P_{i+1} = B_{i+1}$ handelt es sich um Fixpunkte. Wir untersuchen nun einen Punkt P_j mit $i \neq j \neq i+1$. Die Punkte A_j, A_{i+1} und A_i liegen auf einem Kreis (mit Mittelpunkt M_A) und sind deshalb nicht kollinear. Damit sind die Geraden $A_i M_A$ und $A_{i+1} A_j$ auf jeden Fall verschieden.

Wir haben nun zwei Fälle zu behandeln.

1. Die Geraden $A_i M_A$ und $A_{i+1} A_j$ schneiden sich in einem Punkt T_A (die unseres Erachtens notwendige Betrachtung des Punktes T_A fehlt in Kratz, 1992). Dann schneiden sich auch die Geraden $P_i M_B$ und $P_{i+1} B_j$ in einem Punkt T_B . Aus Ähnlichkeitsbetrachtungen folgt, daß T_A die Strecke $[A_i, M_A]$ im gleichen Verhältnis teilt wie T_B die Strecke $[P_i, M_B]$. Da das Schrägbildverfahren Teilverhältnisse erhält, teilt das Urbild T von T_A bezüglich f die Strecke $P_i M$ in eben demselben Verhältnis und aus dem gleichen Grund folgt dann $h(T) = T_B$. Dieses Argument wird nun noch einmal variiert: A_j teilt die Strecke $[A_{i+1}, T_A]$ im gleichen Verhältnis wie B_j die Strecke $[P_{i+1}, T_B]$ und P_j teilt die Strecke $P_{i+1} T$ in eben demselben Verhältnis. Also teilt $h(P_j)$ die Strecke $[h(P_{i+1}), h(T)] = [P_{i+1}, T_B]$ im gleichen Verhältnis wie B_j , woraus - wie gewünscht - $h(P_j) = B_j$ folgt.

2. Die Geraden $A_i M_A$ und $A_{i+1} A_j$ sind parallel. Dabei liegen die Punkte M_A und A_j auf der gleichen Seite der Geraden $A_i A_{i+1}$.

Die Punkte A_i, M_A, A_j, A_{i+1} bilden also ein Trapez und dessen Diagonalen $A_i A_j, A_{i+1} M_A$ schneiden sich. Wir wiederholen die Argumentation des 1. Falles unter Vertauschung der Rollen von i und $i+1$, was auf $h(P_i) = B_j$ führt. (Dieser zweite Fall tritt bei $n = 5$ nicht auf, deswegen wird er in Kratz, 1992, nicht erwähnt.)

Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Der weitere Beweis des Satzes von Napoleon - Barlotti für fastreguläre Polygone kann nun genau wie in Kratz (1992) erfolgen; es handelt sich dabei unseres Erachtens auch um ein für

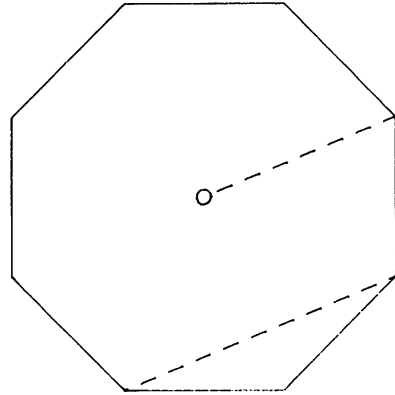


Fig.4: $A_i M_A \parallel A_{i+1} A_j$

Schüler sehr gut geeignetes Vorgehen. Wir halten nur noch fest, daß der im Beweis von Satz 3 untersuchte Punkt M tatsächlich der Mittelpunkt des regulären Polygons aus der Behauptung des Satzes von Napoleon - Barlotti ist. Man mag diese Tatsache als Rechtfertigung dafür ansehen, daß man den Punkt M als Mittelpunkt des fastregulären Polygons bezeichnet.

Nun wenden wir uns der angekündigten Diskussion des Grenzüberganges $n \rightarrow \infty$ zu. Die folgenden Ausführungen eignen sich zwar nicht mehr für den Unterricht in der Mittelstufe, finden aber bei der Behandlung des Grenzwertbegriffes in der 11. Jahrgangsstufe ihren natürlichen Platz. Ihr Wert liegt vor allem darin, daß hier Grenzwerte nicht nur von Zahlenfolgen, sondern auch von Folgen geometrischer Objekte gebildet werden.

Beim ersten Hinsehen bemerkt man, daß bei Erhöhung der Eckenzahl des fastregulären Polygons ρ unter Beibehaltung seiner Fläche die Seiten von ρ , und damit auch die Seiten der betrachteten regulären Polygone, immer kleiner werden. Damit schließt man unüberlegt weiter, daß die zur Debatte stehenden Polygone gegen Punkte konvergieren, und zwar gegen Punkte der Ellipse, gegen die die fastregulären Polygone konvergieren; die in Satz 2 beschriebenen Kreise sind davon weit entfernt. Aber hierbei handelt es sich um einen Trugschluß. Wie der Mathematiklehrer Roland Fischer aus Freudenstadt bei der eingangs erwähnten Tagung in Oberwolfach bemerkte, werden die Seiten kleiner, aber die Winkel größer, so daß sich diese Effekte gegenseitig aufheben und die Fläche der regulären Polygone bei Erhöhung der Eckenzahl im wesentlichen konstant bleibt.

Die Schrägbildauffassung von Kratz liefert ein wirkliches Verständnis für den Grenzübergang. Betrachten wir eine Ellipse \mathcal{E} als angenähert durch fastreguläre Polygone wachsender Eckenzahl. Sei P ein Punkt von \mathcal{E} . Sehen wir P als Grenzwert der Strecken $[P_1, P_2]$ an, so bietet es sich an, die Tangente t an \mathcal{E} durch P als Grenzwert der Geraden $P_1 P_2$ und damit als Schrägbildachse zu nehmen. Der Witz an der Sache ist nun, daß es zu dieser Achse genau ein Schrägbildverfahren gibt, das die Ellipse in einen auf der anderen Seite der Achse liegenden Kreis abbildet.

Satz 4: Zu jedem Punkt einer Ellipse gibt es genau einen Kreis, der die Ellipse von außen berührt und Bild der Ellipse bezüglich eines Schrägbildverfahrens mit der gemeinsamen Tangente als Achse ist.

Beweis: Der gesuchte Kreis muß die Tangente t in P berühren, also muß sein Mittelpunkt M_P auf der äußeren Normalen zu ε liegen.

Bezeichnet M den Mittelpunkt der Ellipse und P^* einen Endpunkt des zu dem durch P gehenden Durchmesser konjugierten Durchmessers, so ist die Strecke $\overline{MP^*}$ parallel zur Schrägbildachse, wird also durch ein Schrägbildverfahren auf eine Strecke gleicher Länge abgebildet. Dabei handelt es sich um eine Strecke, die den Kreismittelpunkt mit einem Punkt der Kreislinie verbindet, das heißt, um einen Radius

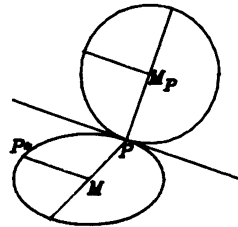


Fig. 5: Kreis als Schrägbild einer Ellipse

des gesuchten Kreises. Also muß M_P von P den gleichen Abstand haben wie M von P^* . Damit ist M_P als Punkt der äußeren Normalen eindeutig festgelegt und zwar handelt es sich gerade um den in Satz 2 beschriebenen Punkt P' . Weiterhin ist der gesuchte Kreis als Kreis \varkappa um M_P mit Radius $r_P = MP^*$ festgelegt. Es bleibt zu zeigen, daß dieser Kreis tatsächlich Schrägbild der Ellipse unter einem Schrägbildverfahren mit der Achse t ist. Ein mögliches Schrägbildverfahren muß M in M_P überführen; dadurch ist es aber schon vollständig bestimmt. Im allgemeinen führt ein Schrägbildverfahren eine Ellipse in eine Ellipse über. In unserer Situation ist das Bild von ε eine Ellipse mit zwei zueinander senkrechten, gleichlangen Durchmessern, also ein Kreis, der Kreis \varkappa .

Damit gestattet Satz 2 folgende Umformulierung, bei welcher der Grenzübergang deutlich wird.

Satz 2': Die Mittelpunkte der Kreise, die eine gegebene Ellipse von außen berühren und Bilder der Ellipse bezüglich eines Schrägbildverfahrens mit der gemeinsamen Tangente als Achse sind, liegen auf dem Kreis um den Mittelpunkt der Ellipse, dessen Radius gleich der Summe der beiden Halbachsen ist. Spiegelt man alle diese Berührungskreise an den zugehörigen Tangenten, so liegen die neuen Mittelpunkte auf dem Kreis um den Mittelpunkt der Ellipse, dessen Radius gleich der Differenz der beiden Halbachsen ist.

Den Beweis, der zum Beispiel in Schmidt (1990) nachgelesen werden kann, wollen wir hier nicht ausführen. Stattdessen wollen wir zum Abschluß diese "qualitative" noch durch eine "quantitative" Betrachtung ergänzen, die zu einem echten Grenzwertprozeß führt. Dazu überlegen wir zuerst, daß die Konfiguration des Satzes von Napoleon - Barlotti durch die Eckenzahl n , die Punkte M , M_A und die Gerade $g = P_1P_2$ (Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 3) festgelegt ist. Sind diese Daten gegeben, so erhält man den Mittelpunkt P der Strecke $[P_1, P_2]$ als den Fußpunkt des Lotes von M_A auf g , die Punkte P_1 , P_2 befinden sich auf den durch die vereinbarte Orientierung festgelegten Halbgeraden, in die die Gerade g durch den Punkt P zerlegt wird, im Abstand

$$\rho \cdot \tan \frac{\pi}{n}$$

von P , wobei $\rho = \overline{M_A P}$ den Abstand des Punktes M_A von g bezeichnet. Durch M_A , P_1 und P_2 ist das reguläre n -Eck A bestimmt. Das Schrägbildverfahren f , das durch die Achse g und $f(M_A) = M$ festgelegt ist, erzeugt das fastreguläre Polygon ρ aus dem regulären Polygon A . Wir halten nun M , M_A , g , und damit auch ρ , fest, lassen aber n gegen unendlich gehen. Das reguläre n -Eck A hat den Umfang

$$U_n = 2 \cdot n \cdot \rho \cdot \tan \frac{\pi}{n}.$$

Damit berechnen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 2 \cdot \rho \cdot \pi \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\pi} \tan \frac{\pi}{n} = 2 \cdot \rho \cdot \pi$$

Das ist der Umfang eines Kreises mit Radius ρ . Der Kreis mit Mittelpunkt M_A und Radius ρ ist also der Grenzwert der in Betracht kommenden regulären Polygone. Da das Schrägbildverfahren eine stetige Abbildung ist, ist die Ellipse, die sich als Bild des Kreises ergibt, der Grenzwert der zugehörigen fastregulären Polygone. Wir bemerken noch die besondere Bedeutung des Kreises mit Mittelpunkt M und Radius $\overline{MM_A}$. Er enthält die Ecken aller regulären n -Ecke aus der Behauptung des Satzes von Napoleon - Barlotti, einschließlich $n = \infty$. Mit anderen Worten: Alle diese regulären Polygone haben diesen Kreis als gemeinsamen Umkreis.

Dank gilt meinen Kollegen Schütte und Schwichtenberg für den Hinweis auf den Brief von Gerhard Gentzen.

Literatur

- Barlotti, A.: Una proprietà degli n -agoni che si ottengono trasformando in una affinità un n -agono regolare. In: Bolletino della Unione Matematica Italiana (3) 10 (1955), S. 96-98.
- Barlotti, A.: Affinité et polygones réguliers: Extension d'un théorème classique relatif au triangle. *Mathematica Paedagogie* 9 (1955/56).
- Fisher, J.C., Ruoff, D. u. Shilleto, J.: Polygons and Polynomials. In: *The Geometric Vein, The Coxeter Festschrift*. Berlin 1982.
- Gerber, L.: Napoleon's theorem and the parallelogram inequality for affine-regular polygons. In: *The American Mathematical Monthly* 87 (1980), S. 644-648.
- Kratz, J.: Vom regulären Fünfeck zum Satz von Napoleon-Barlotti. In: *Didaktik der Mathematik* 20 (1992), S. 261-270.
- Kratz, J.: *Zentrale Themen des Geometrieunterrichts aus didaktischer Sicht*. München 1993.
- Kratz, J.: *Mathematik, Geometrie 9*. München 1993a.
- Robbel, G.: Ein Brief Gerhard Gentzens an seinen Großvater. In: *alpha* 20 (1986), S. 28-29.
- Schmidt, E.: Affin-reguläre n -Ecke und ihre regulären Komponenten. In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 39 (1986), S. 502.
- Schmidt, F.: 200 Jahre französische Revolution - Problem und Satz von Napoleon mit Variationen. In: *Didaktik der Mathematik* 18 (1990), S. 15-29.
- Thébault, V.: Solution to Problem 169. In: *National Mathematics Magazine* 12 (1937-38), S. 192-194.