Beiträge zum Mathematikunterricht 1985

Vorträge auf der 19. Bundestagung
für Didaktik der Mathematik
vom 5. 3. bis 8. 3. 1985 in Giessen

Verlag B. Franzbecker, Didaktischer Dienst,
Bad Salzdetfurth, 1985

INHALT

Hauptvorträge

Sektionsvorträge

Rudolf FRITSCH, München

Ein geometrisches Beispiel für die Macht und Ohnmacht des Differentialkalküls.

Zu den Aufgaben des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen gehört auch die Auslotung der Tragweite und Grenzen bestimmter mathematischer Methoden. Jedem Lehrer ist das bewußt, wenn er seine Schüler vor übertriebener Genauigkeit beim (Taschen-)Rechnen mit Dezimalbrüchen warnt. Hier möchte ich diese Zielsetzung einmal am Differentialkalkül demonstrieren. Von allem Beiwerk entkleidet handelt es sich dabei um die Diskussion einer Schar von Arcus-Funktionen wie sie etwa in den Aufgaben des bayerischen Zentralabiturs [3] verlangt wird. Das dürre Gerippe kann aber ganz attraktiv eingepackt werden und gibt für den Unterricht mehr her als nur eine Kurvendiskussion. Es ist - unter bewußt mißbräuchlicher Verwendung eines modischen didaktischen Terminus - ein interessantes Unterrichtsprojekt, bei dem verschiedene Gebiete der Mathematik zur Anwendung kommen, neben dem Titelhelden Differentialkalkül: Elementargeometrie, Trigonometrie, eventuell sogar sphärische Trigonometrie, Stereometrie und algebraische Gleichungen.Der reinen Lehre eines Projekts widerspricht nur, daß die Motivation nicht von irgendwelchen Anwendungen auf der grünen Wiese herrührt, sondern innermathematisch begründet ist. Sie besteht in einer simplen Beobachtung. Das Prinzip der Analogiebildung führt vom Winkelsummensatz für ebene Polygone zu der Suche nach einem entsprechenden Satz für 3-dimensionale Polyeder. In erster Linie wird man dabei die Kantenwinkel betrachten, d.h. die Winkel, unter denen zwei Seitenflächen eines Polyeders gegeneinander geneigt sind, und den ersten Gegenstand der Untersuchung bildet die dreidimensionale Verallgemeinerung des Dreiecks: das Tetraeder, d.h. die dreiseitige Pyramide. Auch hier wird man mit einem einfachen Fall anfangen, der regulären dreiseitigen Pyramide, deren Basis ein gleichseitiges Dreieck ist und deren Spitze auf dem Mittellot zur Basis liegt. Halten wir die Basis fest, so ergibt sich für die Kantenwinkelsumme Σ als Funktion der Höhe h: bei $h \to 0$ verschwinden auch die drei Winkel an den Kanten der Basis, während die drei Seitendreiecke gegeneinander um fast 180° geneigt sind, d.h. $\Sigma \to 540°$; bei $h \to \infty$ wachsen die Winkel an der Basis gegen 90° während die Neigung der Seitendreiecke gegeneinander auf die entsprechenden Winkel des Grunddreiecks, d.h. 60°, fällt, also $\Sigma \to 3 \cdot 90 + 3 \cdot 60 = 450°$. Bei stetiger Veränderung von h, von 0 bis ∞, kommen wir auch zum regulären Tetraeder, zu dem Tetraeder, dessen Kanten alle gleichlang sind, und berechnen in diesem Fall elementar $\Sigma \approx 423°10'$. Dieser Wert liegt außerhalb des durch die angegebenen Grenzwerte bestimmten Intervalls! Das ermuntert dazu, die Kantenwinkelsumme Σ zumindest einiger leicht beschreibbarer Polyeder genauer zu untersuchen und um einerseits nicht ganz trivial, andererseits aber im Bereich des schulisch Möglichen zu bleiben, bietet sich die Kantenwinkelsumme regulärer Pyramiden an. Der mathematische Sachverhalt ist in [1] ausführlich dargelegt. Es geht um die Diskussion der Kurveschar.

$$\sigma = \sigma_n(h) = 180° - \arcsin h \cdot \frac{s \cos\alpha + \cos\beta}{(s+\cos\beta)\sqrt{s^2-\cos^2\beta}},$$

wobei den Variablen folgende geometrische Bedeutung zukommt:

$\sigma = \varphi + \psi$, wobei φ den Winkel bezeichnet, den ein Seitendreieck der Pyramide mit der Basis einschließt, und ψ den Winkel, unter den zwei Seitendreiecke gegeneinander geneigt sind; die Regularität liefert dann $\Sigma = n(\varphi+\psi)$, wobei n die Anzahl der Seiten der Pyramide angibt;

h : die Höhe der Pyramide;

$s = \sqrt{h^2+1}$: die Länge der Seitenkanten der Pyramide (da Winkel unter Ähnlichkeitstransformationen invariant sind, kann angenommen werden, daß der Umkreis der Basis den Radius 1 hat);

$\alpha = 2\beta = 180° - \frac{360°}{n}$: Winkel, den zwei aneinanderstoßende Seiten der Basis miteinander bilden.

Nun die Diskussion:

1) "Nullstellen". Sinnvoll ist die Frage: Wann ist $s \cos\alpha + \cos\beta = 0$? Das ist nur für $n = 5$, $h = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ der Fall. Man suche und finde die entsprechende Pyramide in einem regulären Ikosaeder!

2) Minima bei $s = 2\cos\beta$. Die Größe $b = 2\cos\beta$ beschreibt die Länge einer Seite der Basis. Die regulären Pyramiden mit minimaler Kantenwinkelsumme sind also genau die Pyramiden, bei denen alle Kanten gleich lang sind: das reguläre Tetraeder, das halbe Oktaeder und die Kappe des Ikosaeders. Für $n \geq 6$ sind σ und Σ monoton wachsende Funktion von h.

Soweit reicht die Macht des Differentialkalküls.

3) Wendepunkte? Formal verschwinden die Ableitungen bei

$$s^3 - 3s^2 \cos\beta + \cos^3\beta = 0$$

Das ergibt für den Unterricht die Möglichkeit, die Lösung von Polynomgleichungen 3.Grades in trigonometrischen Funktionen zu diskutieren. Man erhält

$$s = \cos\beta\ (1+2\sin\gamma)\ ,\ \gamma\in\{70,190°,310°\}\ .$$

Die Bedingung $s > 1$ impliziert $\gamma = 70°$, $3 \leq n \leq 8$.
Damit kommt man zu folgender Liste.

n	h_n	$\sigma_n(h_n)$
3	2,284	132°5'45,1"
4	1,774	166°8'46,7"
5	1,365	178°35'57,6"
6	1,036	184°59'17,4"
7	0,749	187°31'46"
8	0,463	186°52'10,1"

($\sigma_n(h_n)$) hat als Funktion von $n\in\mathbb{R}$ ein Maximum an der Stelle $n = 180° : (90-\arccos\sqrt{\sin 70° + \cos 140°}) \approx 7{,}3$ mit einem Wert von rund 187°40'37").

Eine merkwürdige Liste! Hat sie eine geometrische Bedeutung? Nein! Die Lage der Wendepunkte ist nämlich parameterabhängig. In den vorangehenden Berechnungen wurden die zu untersuchenden Winkel willkürlich auf den Parameter h bezogen. Wählt man s als unabhängigen Parameter, so erhält man für die Wendestellen die polynomiale Gleichung 4.Grades:

$$8s^4 - 12bs^3 - 4s^2 + b(b^2+8)s - b^2 = 0$$

die andere Nullstellen hat als die vorherige Gleichung 3. Grades! Das Phänomen läßt sich leicht erklären: Führt man irgendeine Parametertransformation durch, d.h. betrachtet man h als differenzierbare Funktion einer in einem geeigneten Bereich definierten Variablen t mit $h'(t) > 0$ für alle t, so gilt einerseits $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{dh} \cdot h'$, was zeigt, daß $\frac{d\sigma}{dt}$ und $\frac{d\sigma}{dh}$ als Funktionen von h die gleichen Nullstellen haben. Das ist geometrisch klar: Die Ähnlichkeitsklassen regulärer Pyramiden mit minimaler Kantenwinkelsumme sind wohldefiniert! Andererseits berechnet man

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{d^2\sigma}{dh^2} \cdot (h')^2 + \frac{d\sigma}{dh} \cdot h'' ,$$

woraus folgt, daß $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$ und $\frac{d^2\sigma}{dh^2}$ als Funktionen von t im allgemeinen verschiedene Nullstellen haben.

Die Untersuchung der 2.Ableitung bringt also nichts, der Kalkül hat keine Macht.

Zur Abrundung des Themas im Unterricht sollte man auf die in der Motivation gestellte Frage nach einem Winkelsummensatz für konvexe Polyeder zurückkommen und die Formel [2]

$$2\Sigma - \Omega = 2(f-2)\pi$$

herleiten, in der Ω die Summe der an den Ecken des Polyeders gebildeten Raumwinkel und f die Anzahl der Seitenflächen des Polyeders bezeichnet. Die Formel stammt für Tetraeder vom Abbé de Gua (1783) und allgemein von Brianchon (1837).

Literatur

[1] R.Fritsch, *Zur Kantenwinkelsumme der regulären Pyramiden,* Elemente der Mathematik 40, Heft 3(1985)

[2] H.Hopf, *Über die Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik im Rahmen der elementaren Geometrie,* Mathematisch - Physikalische Semesterberichte 3, 16-29(1953)

[3] A.Walther, *Arcusfunktionen (ein Trainingskurs für das Mathematik-Abitur),* Bayerischer Schulbuch-Verlag München 1979