

# Didaktik der Mathematik

11. Jahrgang 1983

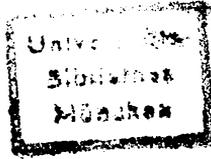
Wissenschaftlicher  
Beirat

Martin Barner  
Friedrich Barth  
Arthur Engel  
Friedrich Flohr  
Robert Ineichen  
Max Jeger  
Johannes Kratz  
Josef Laub  
Günter Pickert  
Karl Seebach  
Hans-Georg Steiner  
Ernst Wienholtz  
Horst Woschner  
Herbert Zeitler

Redaktion

Franz Hager

**Bayerischer Schulbuch-Verlag · München**



---

**Anschriften der Beiratsmitglieder:**

Prof. Dr. Martin Barner,  
Math. Inst. d. Univ., Hebelstr. 29, 7800 Freiburg  
StD Friedrich Barth, Abbachstr. 23, 8000 München 50  
Prof. Dr. Arthur Engel, Inst. f. Didaktik d. Mathematik,  
Senckenberganlage 9-11, 6000 Frankfurt 1  
Prof. Dr. Friedrich Flohr,  
Math. Inst. d. Univ., Hebelstr. 29, 7800 Freiburg  
Prof. Dr. Robert Ineichen,  
Kastanienbaumstr. 16, CH-6048 Horw  
Prof. Dr. Max Jeger, Mathematisches Seminar  
der ETH Zürich, Rämistr. 101, CH-8092 Zürich  
OSiD Johannes Kratz, Ulmenstr. 16, 8035 Gauting

Hofrat Dr. Josef Laub, Krottenbachstr. 33/6, A-1190 Wien  
Prof. Dr. Günter Pickert, Math. Inst. d. Justus-Liebig-  
Universität, Arndtstr. 2, 6300 Gießen  
Prof. Dr. Karl Seebach, Walhallastr. 5, 8000 München 19  
Prof. Dr. Hans-Georg Steiner,  
Marsstr. 16, 4800 Bielefeld 15  
Prof. Dr. Ernst Wienholtz, Mitterweg 14 a, 8033 Krailling  
StD Horst Woschner, Theresienstr. 60, 8000 München 2  
Prof. Dr. Herbert Zeidler, Universität Bayreuth  
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik  
Universitätsstraße 30, 8580 Bayreuth

---

**Anschrift der Redaktion:**

OSTR Franz Hager, Blütenstr. 9, 8039 Puchheim,  
Telefon (089) 80 30 43

**Bezugsbedingungen:** Jahresabonnement 4 Hefte DM 54,-  
Einzelheft DM 14,80, zuzüglich Versandkosten.  
In den Bezugspreisen sind 7 % MWSt. enthalten.  
Postscheckkonto München 933 70-805  
Bankkonto: Bayer. Vereinsbank München 81 154  
„Didaktik der Mathematik“ erscheint einmal vierteljährlich.  
Für unverlangt eingesandte Manuskripte wird keine  
Gewähr übernommen. Nachdrucke innerhalb der gesetzl.  
Frist nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlages.

**Verlag und Anzeigenverwaltung**

Bayerischer Schulbuch-Verlag, Postfach 87,  
Hubertusstraße 4, 8000 München 19, Tel. (089) 17 40 67-69  
Zur Zeit ist Anzeigenpreisliste Nr. 2 vom 1. 8. 1978 gültig.  
Satz: Fotosatz W. Tutte, Salzweg  
Druck: E. Rieder, Schrobenuhausen

Didaktik der Mathematik wird laufend im  
PÄDAGOGISCHEN JAHRESBERICHT (Verlag für  
pädagogische Dokumentation, Duisburg) bibliografisch  
nachgewiesen und regelmäßig für ZDM bzw.  
die Datenbank MATHDI ausgewertet.

Die in der Zeitschrift veröffentlichten Beiträge sind  
urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere  
das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.  
Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche  
Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form –  
durch Fotokopie, Mikrofilm oder andere Verfahren –  
reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere  
von Datenverarbeitungsanlagen, verwendbare Sprache  
übertragen werden.

Auch die Rechte der Wiedergabe durch Vortrag,  
Funk- und Fernsehsendung, im Magnettonverfahren  
oder ähnlichem Wege bleiben vorbehalten.

Fotokopien für den persönlichen und sonstigen  
eigenen Gebrauch dürfen nur von einzelnen Beiträgen  
oder Teilen daraus als Einzelkopien hergestellt  
werden. Jede im Bereich eines gewerblichen  
Unternehmens hergestellte oder benützte Kopie dient  
gewerblichen Zwecken gem. § 54 (2) UrhG und  
verpflichtet zur Gebührenzahlung an die VG WORT,  
Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49,  
8000 München 2, von der die einzelnen Zahlungs-  
modalitäten zu erfragen sind.

## Inhaltsverzeichnis

Apfelbacher, Karl  
Der Satz von Morley  
(36–51)

Barth, Friedrich /  
Kreutzer, Karl-Heinz  
Lösung von Problem des Monats 3  
(84–85)

Barth, Friedrich /  
Kreutzer, Karl-Heinz  
Problem des Monats 4  
(86–87)

Bentz, Hans-J.  
Zum Wahrscheinlichkeitsbegriff  
von Chr. Huygens  
(76–83)

Bungartz, Paul  
Problemorientierte Entdeckung der  
Vektorraumstruktur, Teil 1  
(307–312)

Drumm, Volker  
Wandmuster und ihre Symmetrien;  
eine Anwendung der Vektorrechnung  
und des Skalarproduktes, Teil 1  
(52–75)

Drumm, Volker  
Wandmuster und ihre Symmetrien;  
eine Anwendung der Vektorrechnung  
und des Skalarproduktes, Teil 2  
(152–168)

Egger, Thomas / Fritsch, Rudolf /  
Seebach, Karl  
Zum Winkelsummensatz für Tetraeder  
(14–35)

Fritsch, Rudolf  
Merkwürdige Kugeln am Tetraeder,  
Teil 1  
(262–269)

Geßner, Walter  
Irrationale Zahlen im Unterricht  
(126–134)

Herzig, Alfred  
Über elementargeometrische Vielecke,  
die in der Maßzahl von Flächeninhalt und  
Umfang übereinstimmen  
(144–151)

Hoffmann, Bernd-Dieter  
Magische Quadrate mit dem  
Zufallszahlengenerator  
(227–231)

Jeger, Max  
Die stereographische Projektion als Ver-  
anschaulichungshilfe bei der Erschließung  
der Symmetrie-Gruppe des Würfels, Teil 1  
(238–248)

Kratz, Johannes  
Beweisen im Geometrieunterricht, Teil 1  
(283–296)

Lang, Konrad  
Kugel- und Kreisspiegelung in der Schule, Teil 1  
(249–261)

Leinfelder, Herbert  
Eine Ergänzung zu meiner Note »Zum  
Fundamentalsatz der Algebra«  
(329–331)

Loeffel, Hans  
Jost Bürgi (1552–1632) als Pionier der  
algorithmischen Mathematik  
(135–143)

Pickert, Günter  
Vom Satz von Pohlke zur linearen Algebra  
(297–306)

Säckl, Herwig  
Zur Behandlung des Flächeninhalts in der  
Oberstufe  
(313–321)

Schrage, Georg  
Zahlentheoretische und algorithmische  
Aspekte bei der Berechnung von  
Quadratwurzeln  
(115–125)

Schranner, Ludwig  
Problemorientierte Einführung der  
Dreieckskonstruktion und Berechnung SSW  
(202–214)

Schröder, Eberhard M.  
Elementargeometrie für Lehramts-  
kandidaten  
(322–328)

Seebach, Karl  
Didaktische Überlegungen zum Satz  
von Dehn  
(1–13)

Seebach, Karl  
Über Schwerpunkte von Dreiecken,  
Vierecken und Tetraedern, Teil 1  
(270–282)

Transier, René  
Elementare Analysis mit infinitesimalen  
Zahlen  
(89–114)

Wintel, Maic / Wode, Stefan  
Von der Quersummenhäufigkeit zur  
Normalverteilung  
(215–226)

Zeitler, Herbert  
Kreisgeometrie in Schule und  
Wissenschaft oder: klassische und  
moderne Kreisgeometrie  
(169–201)

Zum 60. Geburtstag von Herbert Zeitler  
(233–237)

Thomas Egger/Rudolf Fritsch/Karl Seebach

## Zum Winkelsummensatz für Tetraeder

„... , si parmi les six angles que forment les faces [d'une pyramide triangulaire] deux à deux, on en connaît cinq, il est évident que le sixième sera déterminé; ...“ Lazare Carnot 1806 [2; S. 30].

An Beispielen wird erläutert, daß die Summe der Kantenwinkel eines Tetraeders nicht wie beim Dreieck konstant ist. Gewisse Teile des Winkelsummensatzes für Dreiecke haben aber trotzdem räumliche Analoga, die mit Methoden der Elementargeometrie, der Darstellenden Geometrie, der Sphärischen Trigonometrie und des Vektorkalküls im Unterricht behandelt werden können.

Am Ende von [5] steht die Frage, ob dieser Sachverhalt auch einer unterrichtlichen Behandlung zugänglich gemacht werden kann. Wir wollen hierzu verschiedene Möglichkeiten darstellen, wobei wir jedoch nicht an eine geschlossene Unterrichtsreihe denken, sondern meinen, daß auch dieses Thema zur Pflege des räumlichen Anschauungsvermögens in verschiedenen Stufen wieder aufgegriffen werden sollte.

Beginnen wird man mit heuristischen Betrachtungen und Beispielen dafür, daß die Summe der Kantenwinkel eines Tetraeders nicht konstant ist. Unsere Beispiele (Abschnitt 1) sind zugleich Beispiele für den Satz von Dehn, der im vorangehenden Aufsatz [14] behandelt ist. Jedoch ganz beliebige Werte kann diese Summe auch nicht annehmen; im zweiten Abschnitt zeigen wir, daß die bei den Beispielen gefundenen Schranken scharf sind. Danach kommen wir zum eigentlichen

**Satz:** In einem Tetraeder ist durch fünf Kantenwinkel der sechste bestimmt.

Im 3. Abschnitt beweisen wir diesen Satz mit Hilfe der sog. *polaren* Methode, die für viele Betrachtungen am Tetraeder sehr nützlich ist und deshalb auch in Schulbüchern häufig zum Tragen kommt (z. B. [13]). Ein anderes Verfahren zeigen wir in Abschnitt 4. Wir nennen sie *induktive* Methode, weil wir dabei diesen 3-dimensionalen Satz auf die 2-dimensionale Aussage, daß *durch zwei Winkel eines Dreiecks der dritte bestimmt ist*, zurückführen. Wesentlich dafür ist der zunächst der Anschauung entnommene

**Hilfssatz:** Bei festen Winkeln  $\varphi_{AC}$  und  $\varphi_{BC}$  bestimmen sich die Winkel  $\gamma$  und  $\varphi_{CD}$  gegenseitig eindeutig.

(Zu den Bezeichnungen: Wir gehen aus von einem Tetraeder mit den Ecken A, B, C, D;  $\varphi_{AC}$ ,  $\varphi_{BC}$  und  $\varphi_{CD}$  bezeichnen die an den Kanten AC, BC bzw. CD anliegenden Winkel,  $\gamma$  ist wie üblich der an der Ecke C anliegende Winkel des Dreiecks ABC).

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Begründung dieses Hilfssatzes zu verschärfen. In Abschnitt 5 weisen wir das mit Methoden der Darstellenden Geometrie und der Vektoralgebra nach.

In Abschnitt 6 beschließen wir diese Arbeit mit einigen historischen Bemerkungen, wie sie unseres Erachtens auch gelegentlich in den Unterricht einfließen sollten; sie zeigen, daß auch Mathematiker Menschen mit Schicksalen in ihrer Zeit sind.

## 1. Vorüberlegungen und Beispiele

Ein *ebener Winkel* wird definiert als Durchschnitt oder Vereinigung zweier Halbebenen mit nicht-parallelen Randgeraden. In der Dreieckslehre betrachtet man üblicherweise nur Winkel der ersten Art, also Durchschnitte von Halbebenen. Nach Einführung der Winkelmessung entwickelt man den

**Satz:** Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist  $180^\circ$ .

Daraus erhält man als

**Folgerung:** Durch zwei Winkel ist der dritte Winkel eines Dreiecks bestimmt.

In Analogie dazu betrachten wir im Raum Durchschnitte von zwei Halbräumen mit nicht-parallelen Randebenen. Diese Randebenen schneiden sich in einer Geraden; wir nennen sie *Randkante*, und der ganze Durchschnitt heißt *Kantenwinkel*. Die Randkante eines Kantenwinkels entspricht also dem Scheitel eines ebenen Winkels. Die *Messung* von Kantenwinkeln führt man auf die Messung ebener Winkel zurück. Dazu gibt es zwei Methoden.

i) Die *induktive* Methode: Man schneidet den Kantenwinkel mit einer zur Randkante, senkrechten Ebene. Der Durchschnitt ist ein ebener Winkel. Dessen Maß  $\varphi$  ist das Maß des Kantenwinkels.

p) Die *polare* Methode: Man fällt von einem inneren Punkt des Kantenwinkels die Lote auf die beiden Randebenen. Diese Lote bestimmen eine Ebene und in ihr einen ebenen Winkel  $\psi$ . Dann gilt

$$\varphi = 180^\circ - \psi.$$

Das 3-dimensionale Analogon zum Dreieck ist das *Tetraeder*. Es hat 4 Ecken A, B, C, D, 6 Kanten AB, AC, BC, AD, BD, CD und daran anliegend 6 Kantenwinkel  $\varphi_{AB}, \varphi_{AC}, \dots$ ; wir nehmen als *Winkelsumme*

$$\Sigma = \varphi_{AB} + \varphi_{AC} + \varphi_{BC} + \varphi_{AD} + \varphi_{BD} + \varphi_{CD}.$$

Den Höhen im ebenen Dreieck entsprechen die Raumphöhen  $h_A, h_B, h_C, h_D$ ; das sind die Lote von einer Ecke auf die von den übrigen Ecken aufgespannte Ebene. Die zugehörigen Höhenfußpunkte bezeichnen wir mit  $H_A, H_B, \dots$ .

Erste Einsichten über die Winkelsumme  $\Sigma$  gewinnen wir, indem wir eine Ecke, sagen wir D, längs der zugehörigen Lotrichtung verschieben. Wir beobachten (Fig. 1 auf S. 16):

a) Für  $D \rightarrow \infty$  gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_{AB}, \varphi_{AC}, \varphi_{BC} &\rightarrow 90^\circ \\ \varphi_{AD} &\rightarrow \alpha, \varphi_{BD} \rightarrow \beta, \varphi_{CD} \rightarrow \gamma, \end{aligned}$$

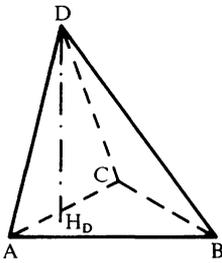


Fig. 1

wobei  $\alpha, \beta, \gamma$  in gewohnter Weise die Winkel des Dreiecks ABC bezeichnen. Also folgt für die Winkelsumme

$$\Sigma \rightarrow 3 \cdot 90^\circ + \alpha + \beta + \gamma = 450^\circ.$$

b) Ist  $H_D$  innerer Punkt des Dreiecks ABC, so gilt für  $D \rightarrow H_D$  (Fig. 2):

$$\varphi_{AB}, \varphi_{AC}, \varphi_{BC} \rightarrow 0^\circ$$

$$\varphi_{AD}, \varphi_{BD}, \varphi_{CD} \rightarrow 180^\circ,$$

also

$$\Sigma \rightarrow 540^\circ.$$

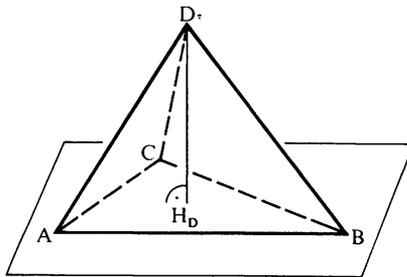


Fig. 2

c) Liegt  $H_D$  im Innern des Winkels  $\alpha$ , aber nicht auf der gleichen Seite der Geraden BC wie A, so ergibt sich für  $D \rightarrow H_D$  (Fig. 3):

$$\varphi_{AB}, \varphi_{AC}, \varphi_{BD}, \varphi_{CD} \rightarrow 0^\circ$$

$$\varphi_{BC}, \varphi_{AD} \rightarrow 180^\circ,$$

also

$$\Sigma \rightarrow 360^\circ.$$

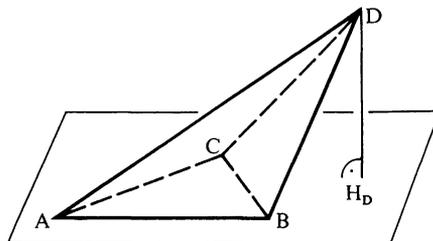


Fig. 3

(Dieser Grenzfall läßt sich vielleicht noch besser veranschaulichen, indem man ausgehend von einem regulären Tetraeder den Abstand der Mittelpunkte der Gegenkanten BC und AD klein macht, also etwa die Kante AD längs der Verbindungslinie dieser Mittelpunkte, auf die Kante BC zu, verschiebt.).

Zusammenfassend können wir feststellen:

**Satz:** Die Winkelsumme beim Tetraeder ist nicht konstant; sie kann jedenfalls Werte zwischen  $360^\circ$  und  $540^\circ$  annehmen.

Daß hier die scharfen Schranken für die Winkelsumme genannt sind, d. h. daß ganz allgemein gilt

$$360^\circ < \Sigma < 540^\circ$$

wird in 2. bewiesen.

Für den Höhenfußpunkt  $H_D$  sind natürlich noch andere Lagen möglich, das liefert bei unterrichtlicher Behandlung Stoff für Hausaufgaben. Wir listen kurz auf:

Für  $D \rightarrow H_D$  gilt

- d)  $H_D$  im Innern des Scheitelwinkels zu  $\alpha \Rightarrow \Sigma \rightarrow 540^\circ$
- e)  $H_D$  auf der Geraden BC, aber  $B \neq H_D \neq C \Rightarrow \Sigma \rightarrow 450^\circ$
- f)  $H_D = A \Rightarrow \Sigma \rightarrow 360^\circ + \alpha$ .

Als nächstes wollen wir nun die Winkelsumme  $\Sigma$  für einige spezielle Tetraeder konkret ausrechnen. Es ist eine reizvolle Aufgabe zu überlegen, bei welchen Tetraedern das ohne Trigonometrie machbar ist. Für unsere Beispiele gehen wir von einem Würfel aus:

(Bezeichnungen entsprechend Fig. 4): Wir betrachten zunächst die vierseitige Pyramide ABCDE. Von dieser interessieren uns die Kantenwinkel

$$\begin{aligned} \varphi_{AB} &= \varphi_{AD} = 90^\circ \\ \varphi_{BC} &= \varphi_{CD} = 45^\circ \end{aligned}$$

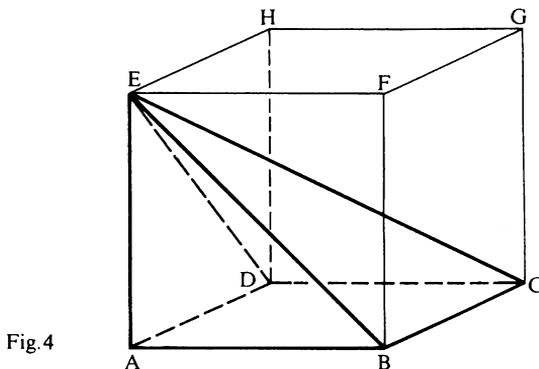


Fig.4

und der an der Raumdiagonale anliegende Winkel. Um diesen Winkel  $\varphi_{CE}$  zu berechnen, bemerken wir (in Erinnerung an das Verfahren zur Volumenberechnung von Pyramiden),

daß der Würfel in die drei kongruenten Pyramiden ABCDE, BCGFE und CDHGE zerfällt, die die Kante CE gemeinsam haben. Die zugehörigen Kantenwinkel sind gleich und ergeben zusammen  $360^\circ$ ; also haben wir

$$\varphi_{CE} = 120^\circ.$$

Um nun zu einem Tetraeder zu kommen, zerschneiden wir die Pyramide ABCDE durch die von den Ecken B, D und dem Würfelmittelpunkt M aufgespannte Ebene und erhalten so ein Tetraeder BCDM (Fig. 5).

Für die auftretenden Kantenwinkel hat man zunächst wie bei der Pyramide ABCDE

$$\varphi_{BC} = \varphi_{CD} = 45^\circ$$

$$\varphi_{CM} = 120^\circ.$$

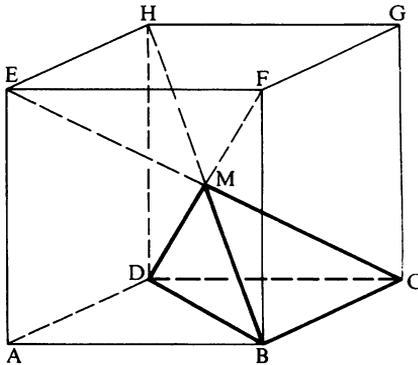


Fig. 5

Ferner ist offensichtlich

$$\varphi_{BD} = 90^\circ.$$

Zur Berechnung von  $\varphi_{BM}$  und  $\varphi_{DM}$  beachten wir, daß die Ebene BDM die vierseitige Pyramide ABCDM in zwei kongruente Teile zerlegt und damit den in ABCDM an der Kante BM anliegenden Winkel halbiert. Da es sich bei BM aber auch um einen Teil einer Raumdiagonale handelt, ist dieser Winkel  $120^\circ$  und somit in BCDM

$$\varphi_{BM} = 60^\circ,$$

sowie analog

$$\varphi_{DM} = 60^\circ.$$

Damit haben wir

$$\Sigma = 420^\circ.$$

Wir bemerken im Hinblick auf den voranstehenden Aufsatz [14], daß dieses Tetraeder einem Würfel zerlegungsgleich ist; die dafür nach Sydler auch hinreichende Dehnsche Bedingung (s. S. 10) ist erfüllt.

$$3 \cdot \Sigma - 12 \cdot 90^\circ = 1 \cdot 180^\circ.$$

Ein anderes Beispiel erhalten wir aus dem eben betrachteten Tetraeder durch einen weiteren Schnitt:

Sei K der Mittelpunkt der Kante BD. Die von CM und K aufgespannte Ebene zerlegt das Tetraeder BCDM in die beiden kongruenten Tetraeder BCMK (Fig. 6) und CDMK. Für BCMK haben wir

$$\varphi_{BC} = 45^\circ$$

$$\varphi_{BK} = \varphi_{CK} = \varphi_{MK} = 90^\circ$$

$$\varphi_{BM} = \varphi_{CM} = 60^\circ,$$

also

$$\Sigma = 435^\circ.$$

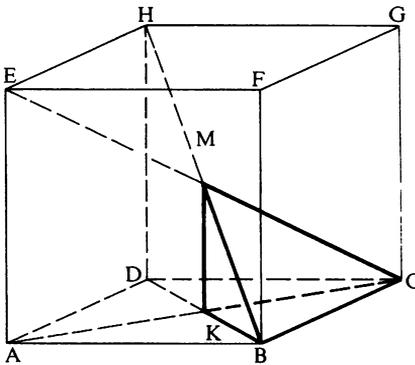


Fig. 6

Auch hier ist die Dehnsche Bedingung offensichtlich erfüllt

$$12 \cdot \Sigma - 12 \cdot 90^\circ = 12 \cdot 345^\circ = 23 \cdot 180^\circ.$$

Betrachten wir in unserem Würfel das von den Ecken A, B, C, E gebildete Tetraeder (Fig. 7 auf S. 20) – das ist die Hälfte der vorhin genannten vierseitigen Pyramide ABCDE –, so gilt

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AC} = \varphi_{BE} = 90^\circ$$

$$\varphi_{BC} = \varphi_{AE} = 45^\circ$$

$$\varphi_{CE} = 60^\circ$$

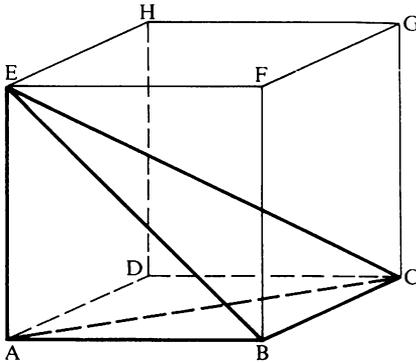


Fig. 7

also

$$\Sigma = 420^\circ.$$

Auch hier ist demnach die Dehnsche Bedingung erfüllt.

Im folgenden brauchen wir nun die trigonometrischen Funktionen. Im regulären Tetraeder sind alle Kantenwinkel gleich, etwa  $70,53^\circ$  (s. [14]); also ist

$$\Sigma \approx 423,17^\circ.$$

In [14] ist gezeigt, daß das reguläre Tetraeder die Dehnsche Bedingung nicht erfüllt.

Für das von den Ecken A, B, D, E unseres Würfels gebildete gleichschenkelig-rechtwinklige Tetraeder (Fig. 8) berechnen wir

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AD} = \varphi_{AE} = 90^\circ$$

und

$$\tan \varphi_{BD} = \tan \varphi_{BE} = \tan \varphi_{DE} = \sqrt{2},$$

d. h.

$$\varphi_{BD} = \varphi_{BE} = \varphi_{DE} \approx 54,74^\circ,$$

also

$$\Sigma \approx 434,21.$$

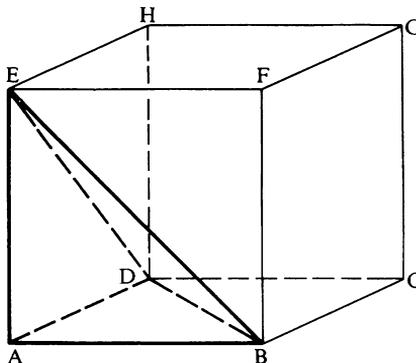


Fig. 8

Setzen wir

$$\alpha = \varphi_{BD} = \varphi_{BE} = \varphi_{DE},$$

so lautet die Dehnsche Bedingung wie in [14]

$$n \cdot \alpha = m \cdot \frac{\pi}{2}; \quad m, n \in \mathbb{N}; \quad (m, n) = 1.$$

Da  $(\tan \alpha)^2 = 2$ , also gerade ist, kann man genau so wie in [14] schließen, daß die Dehnsche Bedingung für die Zerlegungsgleichheit dieses Tetraeders mit einem Würfel nicht erfüllt ist.

Weitere Beispiele betrachten wir mit den im 5. Abschnitt zu entwickelnden Methoden in 5.4.

## 2. Schranken für die Summe der Kantenwinkel eines Tetraeders

Zur sachlichen Abrundung der bisherigen Darlegungen beweisen wir nun den schon erwähnten

**Satz:** Für die Summe  $\Sigma$  der Kantenwinkel eines Tetraeders gilt

$$2\pi < \Sigma < 3\pi;$$

dabei handelt es sich um scharfe Schranken.

Der Nachweis von  $3\pi$  als oberer Schranke für  $\Sigma$  sprengt allerdings den sonst in [5] und auch in dieser Note gesetzten Rahmen, da er als zusätzliche Hilfsmittel Elemente der sphärischen Trigonometrie erfordert, die bei der Betrachtung der an den Ecken des Tetraeders gebildeten Raumwinkel hereinkommen<sup>1</sup>. Zumindest in Bayern kann aber die sphärische Trigonometrie wieder Unterrichtsgegenstand sein, und in diesem Fall ist dieser Beweis eine einfache, aber bedeutsame Anwendung der dabei entwickelten Methoden. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir die bekannten Definitionen und Sätze: Ein *Raumwinkel* ist ein Durchschnitt von 3 Halbräumen, deren Randebenen sich in einem Punkt, dem *Scheitel*, schneiden. Als *Maß* für einen Raumwinkel nimmt man die Fläche des sphärischen Dreiecks, das der Raumwinkel aus der Kugel mit dem Scheitel als Mittelpunkt und dem Radius 1 ausschneidet (Auf den „komplementären“ Fall können wir bei unseren Betrachtungen auch hier verzichten).

Ein Raumwinkel  $\chi$  bestimmt 3 Kantenwinkel  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Für diese gilt (im Bogenmaß)

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 > \pi \tag{1}$$

<sup>1</sup> Das wird schon daran deutlich, daß wir hier anstatt des anschaulicheren Gradmaßes das Bogenmaß verwenden.

$$\chi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi. \quad (2)$$

Die Ungleichung (1) ist mit Hilfe der polaren Methode leicht einzusehen. Fällt man von einem inneren Punkt des Raumwinkels die Lote auf die Randebenen, so bilden diese miteinander die Winkel

$$\psi_i = \pi - \varphi_i \quad i = 1, 2, 3$$

und die Summe der ebenen Winkel, die drei Geraden im Raum miteinander bilden (wenn sie nicht einer Ebene liegen), ist immer kleiner als der Vollwinkel, also

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 < 2\pi, \quad (1')$$

woraus sich (1) durch leichte Umrechnung ergibt.

Auf der rechten Seite der Gleichung (2) steht der sog. „sphärische Exzeß“. Daß dieser gerade die Fläche des zugehörigen sphärischen Dreiecks mißt, steht am Beginn jedes Unterrichts in sphärischer Trigonometrie.

Wenden wir uns nun den Verhältnissen am Tetraeder zu, so finden wir 4 Raumwinkel  $\chi_A, \chi_B, \chi_C$  und  $\chi_D$ . Wir setzen

$$\Omega = \chi_A + \chi_B + \chi_C + \chi_D.$$

Zunächst erhalten wir durch Summation der 4 Ungleichungen (1)

$$2\Sigma > 4\pi$$

also

$$2\pi < \Sigma$$

und damit die behauptete untere Schranke. Diese Herleitung war auch noch ohne sphärische Trigonometrie möglich. Für die obere Schranke benötigen wir aber dann die Gleichung (2). Summation über alle 4 Ecken ergibt

$$\Omega = 2\Sigma - 4\pi.$$

Diese Gleichung erlaubt – unabhängig von unserem Ziel – noch eine interessante Deutung. Ein Tetraeder hat ja vier Dreiecke als Begrenzungsflächen, in jedem ist die Summe der Winkel  $\pi$ . Also ist die Gesamtsumme E der ebenen Winkel am Tetraeder  $4\pi$ , und damit gilt der

**Satz:** In einem Tetraeder ist die Summe der 4 Raumwinkel und der 12 ebenen Winkel gleich zweimal der Summe der 6 Kantenwinkel:

$$\Omega + E = 2\Sigma.$$

Um aber zu der behaupteten oberen Abschätzung für  $\Sigma$  zu kommen, formen wir um

$$\Sigma = \frac{1}{2}\Omega + 2\pi$$

und erhalten das Ergebnis aus dem

**Satz:** In einem Tetraeder ist die Summe der Raumwinkel kleiner als  $2\pi$ :

$$\Omega < 2\pi.$$

Bevor wir die technischen Einzelheiten des Beweises ausführen, wollen wir kurz die dahinter stehende Idee erläutern. In dem Halbraum, der von der Ebene ABC begrenzt wird und die Ecke D enthält, betrachten wir drei Halbebenen durch den Punkt C: Die ersten beiden seien die von den Dreiecken ACD und BCD erzeugten Halbebenen, die 3. sei parallel zum Dreieck ABD. Diese Halbebenen bilden 4 Raumwinkel, die 1. kongruent zu den Raumwinkeln  $\chi_A, \chi_B, \chi_C, \chi_D$  des Tetraeders sind und 2. keine inneren Punkte gemeinsam haben.

Ihre Summe füllt den Halbraum nicht ganz aus und ist deshalb echt kleiner als  $2\pi$ . Die einzige Schwierigkeit des Beweises besteht nun darin, diese 4 Raumwinkel zu identifizieren und die behaupteten Kongruenzen nachzuweisen. Dafür ist es geschickt, die ganze Sache etwas anders aufzuziehen.

Wir betrachten die Halbkugel um die Ecke C mit Radius 1, die von der Ebene ABC begrenzt wird und bezüglich dieser Ebene im gleichen Halbraum liegt wie die Ecke D. Die Oberfläche  $H$  dieser Halbkugel hat das Maß  $2\pi$  und wir werden zeigen, daß auf ihr die sphärischen Dreiecke, die das Maß der Winkel  $\chi_A, \chi_B, \chi_C, \chi_D$  liefern, so untergebracht werden können, daß sie keine inneren Punkte gemeinsam haben und die Halbkugel aber auch nicht ganz überdecken.

Als erstes (Fig. 9) spiegeln wir den Raumwinkel  $\chi_D$  am Mittelpunkt Z der Kante CD. T, U und S seien die Schnittpunkte der Spiegelbilder von AD, BD bzw. CD mit der Halbkugel(fläche)  $H$ .

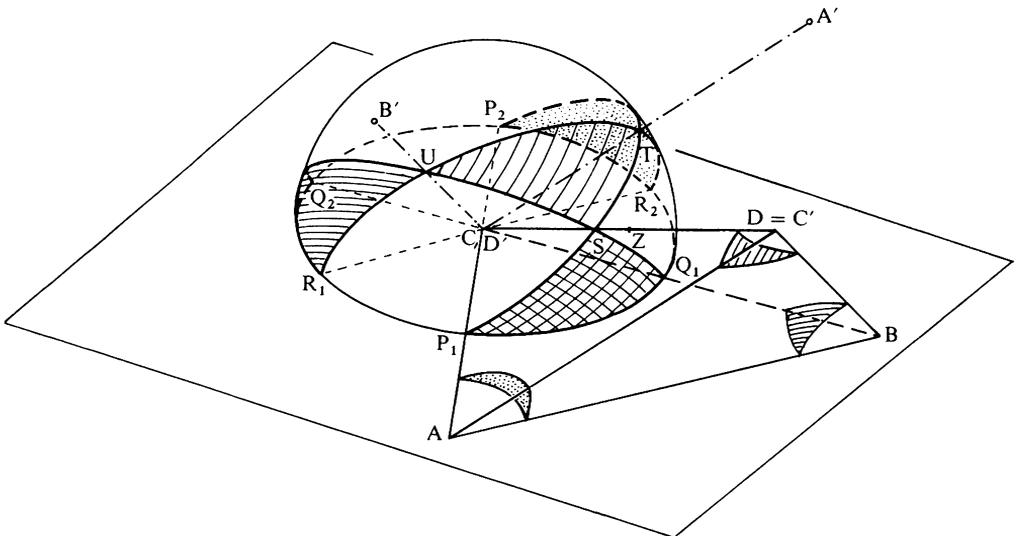


Fig. 9

Wir stellen fest:

(I) Die Fläche des sphärischen Dreiecks STU, das ganz im Innern von  $H$  liegt (Fig. 10), ist dann gerade das Maß des Winkels  $\chi_D$ .

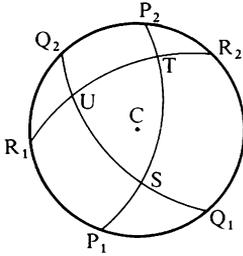


Fig. 10

Die 3 Scheitelwinkel der Winkel dieses sphärischen Dreiecks bilden zusammen mit dem Randkreis der Halbkugel 3 weitere sphärische Dreiecke, deren Ecken wir gemäß Figur 10 bezeichnen.

Nun bemerken wir: Die Ebenen ACD und BCD enthalten den Spiegelpunkt, werden also in sich selbst abgebildet, d. h.

$$ACD = TSC \quad BCD = USC.$$

Folglich liegen  $P_1$  und  $Q_1$  auf den Geraden AC bzw. BC, mehr noch: von C aus gesehen auf der gleichen Seite dieser Geraden wie A bzw. B (Fig. 11 zeigt die Verhältnisse in der Ebene ACD).

Also:

(II) Das sphärische Dreieck  $P_1 Q_1 S$  ist genau das Dreieck, das der Raumwinkel  $\chi_C$  aus der Halbkugel  $H$  ausschneidet.

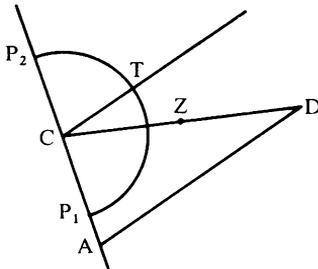


Fig. 11

Da bei einer Punktspiegelung jede Ebene in eine zu sich parallele Ebene abgebildet wird, ist die Ebene TUC parallel zur Ebene ABD.

Folglich ist die Gerade  $R_1 R_2$ , die den Punkt C enthält, parallel zu AB und es gilt (s. Fig. 12)

$$\sphericalangle BAC = \alpha = \sphericalangle R_2 C P_2$$

$$\sphericalangle CBA = \beta = \sphericalangle Q_2 C R_1$$

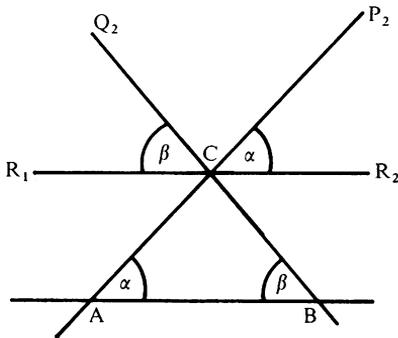


Fig. 12

Also:

(III) Die Translation, die die Ecke A des Tetraeders in die Ecke C überführt, bildet den Raumwinkel  $\chi_A$  in den kongruenten Raumwinkel ab, der aus der Halbkugel  $H$  das sphärische Dreieck  $P_2 R_2 T$  ausschneidet.

Schließlich:

(IV) Die Translation mit  $B \mapsto C$  liefert einen analogen Zusammenhang zwischen dem Raumwinkel  $\chi_B$  und dem sphärischen Dreieck  $Q_2 R_1 U$ .

Damit ist aber das Gewünschte erreicht, die Summe  $\Omega$  der Raumwinkel des Tetraeders ist gleich der Summe der Flächen der sphärischen Dreiecke  $STU$ ,  $P_1 Q_1 S$ ,  $P_2 R_2 T$  und  $Q_2 R_1 U$ .

Da das sphärische Dreieck  $STU$  ganz im Innern der Halbkugel  $H$  liegt, ist so sicherlich  $\Omega$  echt kleiner als  $2\pi$ .

Daß die angegebenen Schranken für die Summe  $\Sigma$  der Kantenwinkel scharf sind, folgt aus den Vorüberlegungen unter 1.; damit ist der Hauptsatz dieses Abschnitts vollständig bewiesen. Darüber hinaus kann man aber noch feststellen, daß für  $\Sigma$  jeder Wert zwischen  $2\pi$  und  $3\pi$  tatsächlich möglich ist. Um das einzusehen stellen wir folgende Plausibilitätsbetrachtungen an:

a) Verschiebt man – ausgehend von einem regulären Tetraeder – die Spitze  $D$  stetig auf den Höhenfußpunkt  $H_D$  zu, so wächst  $\Sigma$  stetig von  $\Sigma_r$  auf  $3\pi$ , wobei  $\Sigma_r$  ( $\approx 423,17^\circ$  im Gradmaß) die Summe der Kantenwinkel des regulären Tetraeders bezeichnet. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt dann  $\Sigma$  jeden Wert zwischen  $\Sigma_r$  und  $3\pi$  an.

b) Läßt man – wiederum von einem regulären Tetraeder ausgehend – den Abstand der Mittelpunkte zweier Gegenkanten stetig kleiner werden, so fällt  $\Sigma$  stetig von  $\Sigma_r$  auf  $2\pi$ .

Zur Abrundung dieser Ergebnisse halten wir noch fest, daß wegen der Gleichung  $\Omega = 2\Sigma - 4\pi$  auch folgt:

*Die Summe  $\Omega$  der Raumwinkel eines Tetraeders kann jeden Wert zwischen 0 und  $2\pi$  annehmen.*

### 3. Die polare Methode

In diesem Abschnitt beweisen wir nun mit Hilfe der polaren Methode unseren schon genannten

**Hauptsatz:** In einem Tetraeder ist durch 5 Kantenwinkel der 6. eindeutig bestimmt.

Wir wählen einen inneren Punkt  $P$  eines fest vorgegebenen Tetraeders. Von  $P$  aus fallen wir die vier Lote auf die Seitenflächen. Der Winkel zwischen je einem Paar dieser Lote ist dann – wie oben in Abschnitt 1 bemerkt – der Ergänzungswinkel auf  $180^\circ$  zum Kantenwinkel, den die entsprechenden Seitenflächen bilden. Wir benötigen nun den folgenden

**Hilfssatz 1:** Diese vier Lote liegen nicht in einem abgeschlossenen Halbraum.

Dies ist zwar anschaulich klar, aber doch nicht so einfach präzise zu begründen. Wir benutzen dazu die Methoden der vektoriellen analytischen Geometrie, wie sie in der Oberstufe zur Verfügung stehen. Das Tetraeder ist der Durchschnitt der vier Halbräume, die durch die Ebenen der Seitenflächen bestimmt sind und den Punkt  $P$  enthalten, und darüber hinaus eine beschränkte Punktmenge.

Angenommen, die vier von einem Punkt  $P$  ausgehenden Lote liegen nun in einem Halbraum, dann wählen wir ein Koordinatensystem mit  $P$  als Nullpunkt, so daß die Lotfußpunkte alle eine nicht-positive  $x_3$ -Koordinate haben. Ist nun  $e$  ein solcher Lotfußpunkt und  $E$  die zugehörige Ebene, so ist  $E$  durch die Gleichung  $e \cdot x - e^2 = 0$  bestimmt. Der durch  $E$  bestimmte Halbraum, der den Ursprung enthält, ist dann gegeben als

$$H_E = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid e \cdot a - e^2 \leq 0\}.$$

Für einen Punkt  $a = (0, 0, a_3)$  mit  $a_3 \geq 0$  auf der nicht negativen  $x_3$ -Achse ist nun offensichtlich  $ea = a_3 a_3 \leq 0$  also

$$ea - e^2 \leq 0, \quad \text{d. h.} \quad a \in H_E.$$

Somit liegt die ganze nicht-negative  $x_3$ -Achse im gleichen Halbraum von  $E$  wie  $P$ , also auch im Durchschnitt aller vier durch die Seitenflächen bestimmten Halbräume. Diese unbeschränkte Menge kann aber kein Tetraeder sein.

Auf Grund dieses Hilfssatzes genügt es zum Beweis unseres Satzes zu zeigen:

**Hilfssatz 2:** Es seien  $g_1, g_2, g_3$  und  $g_4$  vier Halbgeraden, die von einem Punkt ausgehen und nicht in einem abgeschlossenen Halbraum liegen. Sind fünf der sechs Zwischenwinkel, die von je einem Paar der Halbgeraden gebildet werden, bestimmt, so ist es auch der sechste.

Diesen Hilfssatz sehen wir folgendermaßen ein:

Es seien alle Winkel bestimmt außer dem zwischen  $g_3$  und  $g_4$ . Dann ist die gegenseitige Lage von  $g_1$  und  $g_2$  bestimmt und – bis auf Spiegelung an der von ihnen definierten Ebene  $E$  – auch die Lage von  $g_3$ . Durch die beiden weiteren gegebenen Winkel ist dann auch die Lage von  $g_4$  eindeutig, denn die Ebene  $E$  definiert zwei Halbräume, von denen einer  $g_3$  und der andere  $g_4$  enthalten muß. Damit ist aber auch der sechste Winkel (zwischen  $g_3$  und  $g_4$ ) eindeutig bestimmt.

In der Wahl dieser fünf als gegeben betrachteten Zwischenwinkel ist man natürlich nicht völlig frei. Wegen ihrer eindeutigen Beziehung zu den Kantenwinkeln eines Tetraeders lassen sich die Überlegungen zur Winkelverteilung am Tetraeder (vgl. [5]) auf diese übertragen. Um nur ein Beispiel anzuführen: Da beim Tetraeder unter den sechs Kantenwinkeln mindestens drei spitz sind (vgl. [5, Satz 4]), müssen bei den Halbgeraden mindestens drei Zwischenwinkel stumpf, von fünf ausgewählten also mindestens zwei stumpf sein.

#### 4. Die induktive Methode

Wir beginnen mit zwei (beweglichen) Ebenen, die eine (feste) Grundebene unter festen Kantenwinkeln  $\varphi_{AC}$  und  $\varphi_{BC}$  schneiden. Ihre gegenseitige Lage ist durch die Lage der Schnittkanten mit der Grundebene, d. h. durch deren Schnittwinkel  $\gamma$  eindeutig bestimmt.

(Das ist eine etwas laxe, aber hoffentlich anschauliche Ausdrucksweise. Präzise müßte man sagen: Es sei eine feste Grundebene und ein durch sie bestimmter Halbraum ausgezeichnet. Ferner seien zwei bewegliche, zu der Grundebene nicht parallele Ebenen gegeben; zu jeder dieser Ebenen sei ebenfalls ein Halbraum ausgezeichnet. Die Ebenen werden nur so bewegt, daß sich die beiden mit dem festen Halbraum gebildeten Winkel nicht ändern. Dann ist die gegenseitige Lage der beweglichen Halbräume, d. h. das Maß des von ihnen gebildeten Winkels, durch den Durchschnitt dieses Winkels und der Grundebene eindeutig bestimmt).

Das bedeutet, daß auch der von diesen Ebenen gebildete Kantenwinkel  $\varphi_{CD}$  eindeutig durch  $\gamma$  bestimmt ist. Aber natürlich ist auch umgekehrt durch einen vorgegebenen Kantenwinkel  $\varphi_{CD}$  dessen Durchschnitt mit der Grundebene und damit der Winkel  $\gamma$  der Schnittkanten bestimmt. Damit ist der in der Einleitung genannte Hilfssatz zumindest heuristisch begründet, und man kann den Winkelsummensatz nun folgendermaßen beweisen:

Seien wieder alle Kantenwinkel eines Tetraeders ABCD bis auf den Winkel  $\varphi_{CD}$  gegeben. Dann folgt aus dem Hilfssatz:

- a)  $\varphi_{AB}, \varphi_{AC}$  und  $\varphi_{AD}$  bestimmen  $\alpha$ ,      b)  $\varphi_{AB}, \varphi_{BC}$  und  $\varphi_{BD}$  bestimmen  $\beta$ .

Also ist auch

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

bestimmt, und damit liefert eine nochmalige Anwendung des Hilfssatzes:

c)  $\varphi_{AC}$ ,  $\varphi_{BC}$  und  $\gamma$  bestimmen  $\varphi_{CD}$ .

(Wir vermuten, daß dieses der Schluß ist, den Carnot als „evident“ bezeichnet.)

## 5. Konstruktive und algebraische Begründung des Hilfssatzes

### 5.1. Darstellende Geometrie

Im Rahmen eines Lehrgangs Darstellende Geometrie sind es reizvolle Aufgaben,

a)  $\varphi_{CD}$  aus  $\varphi_{AC}$ ,  $\varphi_{BC}$  und  $\gamma$ , bzw.

b)  $\gamma$  aus  $\varphi_{AC}$ ,  $\varphi_{BC}$  und  $\varphi_{CD}$

zu konstruieren.

Zu a): Wir wählen ein Dreitafelverfahren mit einer Grundrißebene, die den Winkel  $\gamma$  mit dem Scheitel C enthält, einer Aufrißebene senkrecht zur Geraden AC und einer Seitenrißebene senkrecht zur Geraden BC (Fig. 13). Die Ebene b, die die Grundrißebene in AC unter dem Winkel  $\varphi_{AC}$  schneidet, erscheint im Aufriß als eine Gerade  $b''$ , die mit der Tafelkante 12 im Punkt  $C''$  den Winkel  $\varphi_{AC}$  einschließt. Die Ebene a, die die Grundrißebene in BC unter dem Winkel  $\varphi_{BC}$  schneidet, erscheint im Seitenriß als eine Gerade  $a'''$ , die mit der Tafelkante 13 im Punkt  $C'''$  den Winkel  $\varphi_{BC}$  einschließt. Die Geraden  $b''$  und  $a'''$  stellen gleichzeitig Auf- und Seitenriß der Schnittgeraden  $s = CD$  der Ebenen a und b dar. Wir bestimmen zuerst ihren Grundriß  $s'$ , indem wir von einem von  $C''$  verschiedenen, aber sonst beliebig auf  $s''$  gewählten Punkt  $E''$  ausgehend,  $E'''$  im Seitenriß und  $E'$  im Grundriß so konstruieren, daß  $E'$ ,  $E''$ ,  $E'''$  einen Punkt E der Geraden CD beschreiben. In der von C,  $E'$  und E aufgespannten Ebene betrachten wir das Lot zu  $s = CD$  durch E und bestimmen seinen Schnittpunkt F mit dem Grundriß  $s'$  von s. Dazu klappen wir diese Ebene um ihre Spur  $s'$  in die Grundrißebene und erhalten die Gerade  $s^*$  und den Punkt  $E^*$  als Bild von s bzw. E; F ist nun der Schnittpunkt des Lotes zu  $s^*$  durch  $E^*$  mit  $s'$ . Dann errichten wir in der Grundrißebene das Lot n zu  $s'$  durch F. Seine Schnittpunkte G und H mit AC bzw. BC zusammen mit E bilden ein Dreieck und  $\sphericalangle GEH$  ist der gesuchte Winkel; wir finden ihn durch Umklappen dieses Dreiecks in die Grundrißebene.

Determination: Die Konstruktion interessiert nur für

$$0^\circ < \gamma, \varphi_{AC}, \varphi_{BC} < 180^\circ.$$

Ein Punkt  $E'$  kann dann immer ermittelt werden. Für  $\varphi_{AC} = \varphi_{BC} = 90^\circ$  ist  $E' = C$ ; in diesem Fall ist aber  $\varphi_{CD} = \gamma$ . Ist  $E' \neq C$ , so findet man sicher den Punkt F. Schwierigkeiten ergeben sich nun, falls  $s'$  senkrecht zu AC oder BC ist. Aber dann wird eben ein Schenkel des konstruierten Winkels  $\varphi_{CD}$  parallel zu AC bzw. BC. Eine Lösung  $\varphi_{CD}$  gibt es also für jede Vorgabe von  $\gamma$ ,  $\varphi_{AC}$  und  $\varphi_{BC}$ , die der obigen Einschränkung genügt.

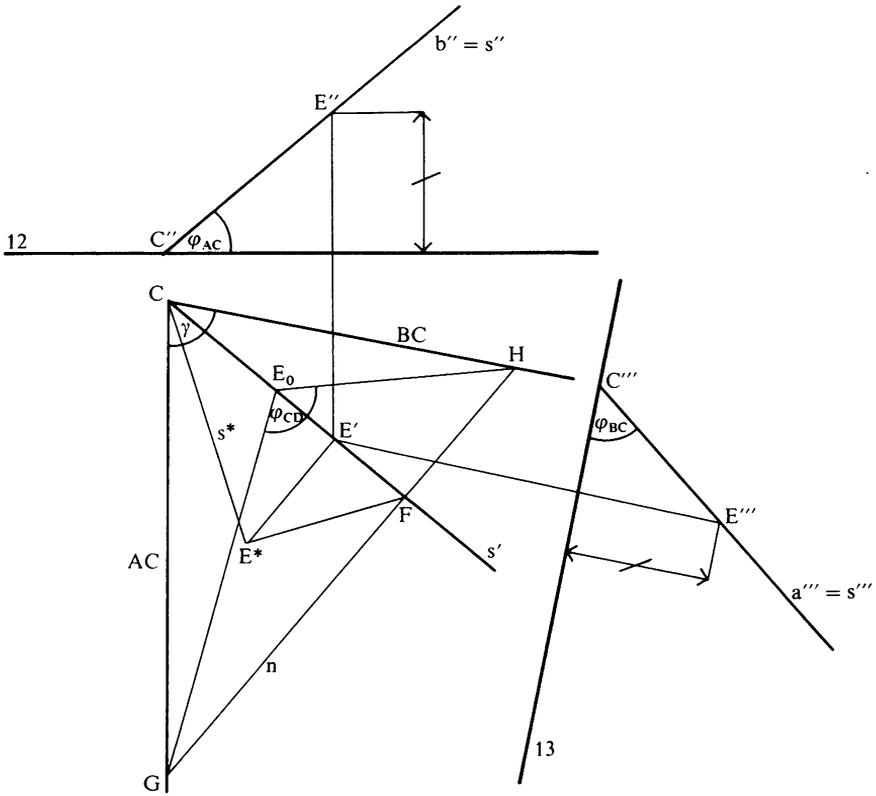


Fig. 13

Zu b): Wir wollen die polare Methode verwenden. Dazu stellen wir uns einen inneren Punkt P des Tetraeders so vor, daß das Lot  $l_D$  von P auf die Ebene ABC diese in einem inneren Punkt des Winkels  $\gamma$  schneidet. Wir fällen außer  $l_D$  noch die Lote  $l_A$  und  $l_B$  von P auf die Ebenen BCD und ACD; sie bilden miteinander folgende Winkel:

$$\begin{aligned} \sphericalangle(l_A, l_B) &= \psi_{CD} = 180^\circ - \varphi_{CD} \\ \sphericalangle(l_A, l_D) &= \psi_{BC} = 180^\circ - \varphi_{BC} \\ \sphericalangle(l_B, l_D) &= \psi_{AC} = 180^\circ - \varphi_{AC}. \end{aligned}$$

Da diese Lote nicht in einer Ebene liegen, muß gelten (s. Ungleichung (1') in Abschnitt 2.):

$$\psi_{CD} + \psi_{BC} + \psi_{AC} < 360^\circ.$$

Bezeichnen wir mit  $a'$  die von  $l_B$  und  $l_D$  aufgespannte Ebene und mit  $b'$  die von  $l_B$  und  $l_C$  aufgespannte Ebene, so ergibt sich wegen unserer Wahl von P als Schnittwinkel von  $a'$  und  $b'$  der Winkel

$$\gamma' = 180^\circ - \gamma.$$

Wir lösen nun unsere Aufgabe, indem wir  $\gamma'$  aus  $\psi_{AC}$ ,  $\psi_{BC}$  und  $\psi_{CD}$  konstruieren (Fig. 14).

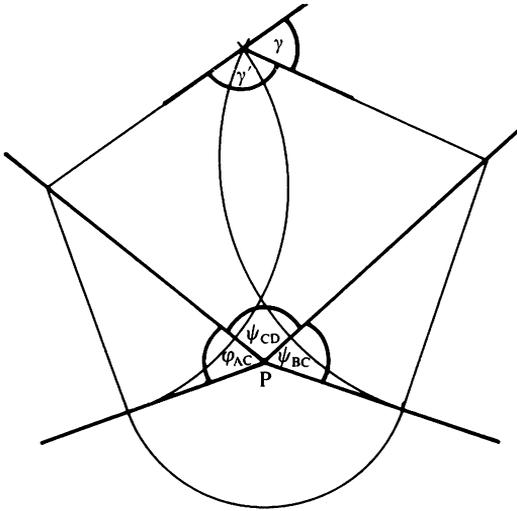


Fig. 14

Als Zeichenebene wird die von  $l_A$  und  $l_B$  aufgespannte Ebene gewählt; die Ebenen  $a'$  und  $b'$  werden um  $l_B$  bzw.  $l_A$  hineingeklappt.

Determination: Die Konstruktion ist ausführbar, wenn neben der schon genannten Schranke noch die „Dreiecksungleichungen“

$$|\psi_{AC} - \psi_{BC}| < \psi_{CD} < \psi_{AC} + \psi_{BC}$$

gelten. Als obere Grenze für  $\psi_{CD}$  haben wir demnach

$$\psi_{CD} < \min(\psi_{AC} + \psi_{BC}, 360^\circ - \psi_{AC} - \psi_{BC}).$$

Umgerechnet in das Ausgangsproblem ergibt sich damit als Bedingung an die Ausführbarkeit der Konstruktion

$$|180^\circ - \varphi_{AC} - \varphi_{BC}| < \varphi_{CD} < 180^\circ - |\varphi_{AC} - \varphi_{BC}|.$$

## 5.2. Vektoralgebra

Skalarprodukt und Hessesche Normalform erlauben es, den Zusammenhang zwischen  $\gamma$  und  $\varphi_{CD}$  algebraisch zu beschreiben. Dazu wählen wir ein Koordinatensystem  $(x_1, x_2, x_3)$  so, daß

- das Dreieck ABC ganz in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene liegt,
- der Ursprung innerer Punkt des Dreiecks ABC ist,
- die Ecke D eine positive  $x_3$ -Koordinate hat.

Für einen Punkt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

bezeichnen wir durch  $\bar{\mathbf{x}}$  seine orthogonale Projektion in die  $(x_1, x_2)$ -Ebene, d. h.

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Wir stellen nun die Ebenen BCD und ACD in Hessescher Normalform dar

BCD:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = a_0$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  mit  $|\mathbf{a}| = 1$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$  mit  $a_0 > 0$

ACD:  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = b_0$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  mit  $|\mathbf{b}| = 1$ ,  $b_0 \in \mathbb{R}$  mit  $b_0 > 0$ .

Die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  haben die Richtung der vom Ursprung auf die Ebenen BCD und ACD gefällten Lote, also ist

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \psi_{CD} = -\cos \varphi_{CD}.$$

Projektion in die  $(x_1, x_2)$ -Ebene liefert ebenso

$$\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos(180^\circ - \gamma) = -\sqrt{1 - a_3^2} \sqrt{1 - b_3^2} \cos \gamma.$$

Beachten wir

$$a_3 = \cos \varphi_{BC}, \quad b_3 = \cos \varphi_{AC},$$

und

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} + a_3 b_3,$$

so finden wir

$$\cos \varphi_{CD} = \sin \varphi_{BC} \cdot \sin \varphi_{AC} \cdot \cos \gamma - \cos \varphi_{BC} \cdot \cos \varphi_{AC} \quad (*)$$

das heißt

$$\cos \varphi_{CD} = m \cdot \cos \gamma - t$$

mit  $m > 0$ . Man hat also einen linearen Zusammenhang zwischen  $\cos \varphi_{CD}$  und  $\cos \gamma$ , woraus sich der Hilfssatz unmittelbar ergibt.

Die Gleichung (\*) erlaubt aber noch eine interessante Folgerung. Der Winkel  $\gamma$  kann Werte zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  annehmen, bei jeder Wahl der Winkel  $\varphi_{AC}$  und  $\varphi_{BC}$ . Dagegen ist der Winkel  $\varphi_{CD}$  gewissen Schranken unterworfen. Offensichtlich gilt

$$-\cos(\varphi_{AC} - \varphi_{BC}) < \cos \varphi_{CD} < -\cos(\varphi_{AC} + \varphi_{BC})$$

also

$$|180^\circ - \varphi_{AC} - \varphi_{BC}| < \varphi_{CD} < 180 - |\varphi_{AC} - \varphi_{BC}|.$$

Damit sind unsere Determinationen unter 5.1. algebraisch begründet!

### 5.3. Sphärische Trigonometrie

Steht die sphärische Trigonometrie zur Verfügung (s. Abschnitt 2), so ist die Gleichung (\*) unter 5.2. ein lieber alter Bekannter, der *Winkelcosinussatz*! Um das einzusehen, betrachtet man eine Kugel um C mit einem Radius  $r < AC, BC, CD$ . Sie schneidet aus dem Tetraeder ein sphärisches Dreieck mit den Winkeln  $\varphi_{AC}, \varphi_{BC}, \varphi_{CD}$  und  $\gamma$  als Gegenseite zum Winkel  $\varphi_{CD}$  aus. Man schließt dann wie unter 5.2. mit (\*) auf den Hilfssatz.

### 5.4. Anwendungen

Die Gleichung (\*) aus 5.2. erlaubt für einige andere Tetraeder die Kantenwinkel direkt zu berechnen, was wir nun tun wollen. Wir wählen zunächst ein Tetraeder mit einer gleichseitigen Grundfläche ABC. Der Schwerpunkt der Grundfläche falle mit dem Höhenfußpunkt  $H_D$  zusammen. Dann gilt für die Kantenwinkel:

$$\begin{aligned}\varphi_{AB} = \varphi_{AC} = \varphi_{BC} &= \theta, \quad 0 < \theta < 90^\circ \\ \varphi_{AD} = \varphi_{BD} = \varphi_{CD} &= \chi, \quad 60^\circ < \chi < 180^\circ.\end{aligned}$$

Der Winkelcosinussatz liefert dann folgende Beziehung zwischen  $\theta$  und  $\chi$ :

$$\cos \chi = (\sin \theta)^2 \cos 60^\circ - (\cos \theta)^2$$

oder:

$$3(\cos \theta)^2 + 2 \cos \chi = 1.$$

Ob es für ein solches Tetraeder ein Winkelpaar gibt, das die Dehn'sche Bedingung erfüllt? Es scheint uns unwahrscheinlich zu sein. Für  $\theta = \chi$  ergibt sich für das reguläre Tetraeder  $\cos \theta = \frac{1}{3}$ , also  $\theta \approx 70,53^\circ$ , für das die Dehnsche Bedingung nicht erfüllt ist.

Ähnlich behandeln wir noch das Tetraeder mit gleichschenkelig-rechtwinkliger Grundfläche ABC (mit rechtem Winkel bei A), wobei A zugleich Höhenfußpunkt  $H_D$  ist. Für die Kantenwinkel gilt dann:

$$\begin{aligned}\varphi_{AB} = \varphi_{AC} = \varphi_{AD} &= 90^\circ \\ \varphi_{BC} &= \theta, \quad 0 < \theta < 90^\circ \\ \varphi_{BD} = \varphi_{CD} &= \chi, \quad 45^\circ < \chi < 90^\circ.\end{aligned}$$

Aus dem Winkelcosinussatz ergibt sich hier die Beziehung:

$$\cos \chi = \sin \theta \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos 45^\circ - \cos \theta \cdot \cos 90^\circ$$

oder

$$\sin \theta = \sqrt{2} \cos \chi.$$

Für  $\theta = 45^\circ$  und  $\chi = 60^\circ$  ist diese Gleichung erfüllt, was ein Tetraeder ergibt, das der Dehn'schen Bedingung genügt (vgl. oben, Beispiel s. Fig. 6). Ob es noch weitere solche Winkel für ein derartiges Tetraeder gibt? Sicher nicht für den Fall  $\theta = \chi \approx 54,74^\circ$ , wie am Ende von 1. gezeigt wurde.

## 6. Historische Anmerkungen

Die erste uns bekannte Formulierung des hier behandelten *Winkelsummensatzes* haben wir diesem Aufsatz vorangestellt. Ihr Verfasser, Lazare Carnot (1753–1823), war nicht nur ein ausgezeichnete Mathematiker, sondern auch ein bedeutender Politiker. In der französischen Nationalversammlung stimmte er für die Hinrichtung Ludwigs XVI.; später war er Kriegsminister und sogar einer der Direktoren der französischen Republik. Als er dieses Amt abgeben mußte, verlor er zunächst auch seinen Platz im Institut de France (Akademie der Wissenschaften), den dann Napoleon erhielt. Der Thermodynamiker Sadi Carnot (1796–1832) ist sein Sohn.

Lazare Carnot hat wohl auch als erster 1806 die am Ende von [5] genannte *Determinantenbedingung* für die Kantenwinkel eines Tetraeders aufgestellt, allerdings mit einer anderen (polaren) Begründung [2, S. 38]. Die einfachere Herleitung in [5] findet sich 1807 in der für den Gebrauch an Schulen gedachten Aufgabensammlung ([8; 2. Teil, S. 119–121] von Meier Hirsch (1769–1851), ist also als didaktisches Thema gerade 175 Jahre alt. Meier Hirsch lebte als Privatlehrer der Mathematik in Berlin; seine bescheidenen Bedürfnisse bestritt er vor allem „von einem Jahrgehälte, das ihm Liberalität der Verleger seiner berühmten mathematischen Beispiele zu Theil werden ließ“ [11]. Gemeint ist hier allerdings seine „Beispielsammlung aus den Gebieten der Buchstabenrechnung und der niederen Algebra, welche den Namen „Meyer Hirsch“ durch eine Reihe von Jahrzehnten zu dem volkstümlichsten auf deutschen Mittelschulen machte“ [1]; diese 1804 erstmals erschienen Aufgaben [7] erlebten 1872 ihre 14. Auflage! Die Sammlung geometrischer Aufgaben [8], die uns hier interessiert, galt als schwieriger und war deshalb nicht so weit verbreitet. Sie enthält auch Aufgaben zur *Darstellenden Geometrie*, wie wir sie in Abschnitt 5.1. benötigen [8; 2. Teil, S. 15–18]. Über seiner Beschäftigung mit der Frage der Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen verfiel Meier Hirsch gegen Ende seines Lebens in den Wahnsinn. – Daß die von ihm und in [8] angegebene Begründung der Determinantenbedingung auf der Hand liegt, ergibt sich daraus, daß auch andere Mathematiker sie unabhängig gefunden haben, so z. B. Karl Buzengeiger (1771–1835), der sie in seinem Brief an Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834) vom 27.1.1826 erwähnt (vgl. auch [4]).

Unser ältester Beleg für den *Winkelcosinussatz* ist ebenfalls das Mémoire von Carnot [2; S. 4]. Er wird dort u. a. im Anschluß an den Winkelsummensatz benutzt, um aus der Kenntnis der Kantenwinkel auf die ebenen Winkel der Seiten des Tetraeders zu schließen.

Für die *Abschätzung der Summe der Kantenwinkel* von Tetraedern in Abschnitt 2. haben wir keine Quelle anzubieten. Die dafür wesentlichen Sätze über die *Summe der 4 Raumwinkel* finden sich in dem Essay [6; S. 367ff.]<sup>1</sup> des Abbé Jean-Paul de Gua de Malves (1712–1786). Er gehörte zu den in seiner Zeit noch existierenden Universalgelehrten und hatte die Idee zu der berühmten *Encyclopédie*, die dann von Diderot und d’Alembert verwirklicht wurde. Sein Plan, in den Flüssen des Languedoc Gold zu waschen, führte zum gesundheitlichen und wirtschaftlichen Ruin; er starb in einem öffentlichen Armenhaus in Paris.

1 Vgl. auch [9; S. 21].

Ein systematisches Studium der *Winkelverhältnisse* am Tetraeder hat Karl Wilhelm Feuerbach (s. o.), dessen tragisches Schicksal in [12] oder [4] nachzulesen ist, in [3] begonnen. Er hinterließ ein umfangreiches Manuskript, um dessen Herausgabe sich noch sein der Mathematik fernstehender philosophischer Bruder Ludwig Feuerbach (1804–1872) im Verein mit Gustav Junghann vergeblich bemühte. Junghann (1808–1881), von 1835 Oberlehrer für Mathematik und Physik am Gymnasium Luckau (Niederlausitz), wurde 1851 vom Disziplinarhof in Berlin wegen politischer Opposition entlassen und lebte dann als Privatgelehrter in Gotha und Braunschweig. Er entwickelte – aufbauend auf Feuerbach – eine der ebenen Trigonometrie nachgebildete Theorie von den Winkelbeziehungen am Tetraeder, die er in seiner zweibändigen „Tetraedrometrie“ [10] darstellt. Für uns waren vor allem seine Quellenangaben wichtig. Daß sonst sein Werk heute ziemlich in Vergessenheit geraten ist, mag z. T. daran liegen, daß er – wie viele andere Zeitgenossen – sich immer wieder bemüht, explizite Gleichungen aufzustellen, die zum Teil sehr kompliziert und undurchsichtig sind, während man heute mehr Wert auf die einprägsameren qualitativen Abschätzungen durch Ungleichungen legt. Als Beispiel [10, I. Teil, S. 51/4, Formeln 32b, 5b], geben wir die Formel für die Berechnung eines Kantenwinkels aus den fünf übrigen an, deren Aufstellung Junghann für sich in Anspruch nimmt (man kann sie etwa durch dreimaliges Anwenden des Winkelcosinussatzes unter Berücksichtigung von  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  erhalten):

$$\cos \varphi_{CD} = (4\Pi_1\Pi_2 - \cos \varphi_{AD} \cos \varphi_{BD} - \cos \varphi_{BC} \cos \varphi_{AC} - \cos \varphi_{AB} (\cos \varphi_{AD} \cos \varphi_{BC} + \cos \varphi_{BD} \cos \varphi_{AC})) : \sin^2 \varphi_{AB},$$

wobei

$$4\Pi_1\Pi_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{AB} - \cos^2 \varphi_{AC} - \cos^2 \varphi_{AD} - 2 \cos \varphi_{AB} \cos \varphi_{AC} \cos \varphi_{AD}} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{AB} - \cos^2 \varphi_{BC} - \cos^2 \varphi_{BD} - 2 \cos \varphi_{AB} \cos \varphi_{BC} \cos \varphi_{BD}}$$

Welch Ungetüm!

Anschriften der Verfasser: Dr. Thomas Egger, Hauptgasse 51, CH-9050 Appenzell; Professor Dr. Rudolf Fritsch, Friedemann-Bach-Straße 61, 8032 Gräfelfing; Professor Dr. Karl Seebach, Walhallastraße 5, 8000 München 19

Eingangsdatum: 11. 6. 1982

Die Anfertigung der Figuren 2 bis 8 verdanken wir Herrn Hofrat J. Laub, Figur 9 Herrn Studiendirektor R. Federle.

#### Literatur

- [1] Cantor, M.: Hirsch, Meyer H. In: Allgemeine Deutsche Biographie, Band 12, S. 467–468. Leipzig: Duncker & Humblot 1880
- [2] Carnot, L. N. M.: Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace. Paris: Courcier 1806

- [3] Feuerbach, K. W.: Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide. Nürnberg: In Commission bei Riegel und Wiesner 1827
- [4] Fritsch, R.: Ein Lehrer und zwei Schüler: Buzengeiger, v. Staudt und Feuerbach. In: Auf den Weg gebracht. Idee und Wirklichkeit der Gründung der Universität Konstanz, Herausgegeben von H. Sund und M. Timmermann. Konstanz: Universitätsverlag Konstanz 1979
- [5] Fritsch, R.: Winkelverteilung am Tetraeder. In: Didaktik der Mathematik 9 (1981), S. 276–290
- [6] Gua de Malves, J. P. de: Propositions neuves et non moins utiles que curieuses, sur le Tétrædre; ou Essai de Tétrædrométrie. In: Mémoires de l'Académie Royale de Sciences Année 1783 (Paris 1786), S. 363–402, Pl IV–VI
- [7] Hirsch, M.: Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Berlin: Duncker & Humblot 1804
- [8] Hirsch, M.: Sammlung geometrischer Aufgaben. 2 Teile. Berlin: Frölich 1805/7
- [9] Hopf, H.: Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik. In: Mathematisch-Physikalische Semesterberichte 3 (1953), S. 16–29
- [10] Junghann, G.: Tetraedrometrie. 2 Teile. Gotha: Thienemann 1862/63
- [11] Neuer Nekrolog der Deutschen, 29. Jahrgang, 1851; S. 1208. Weimar: Voigt 1853
- [12] Radbruch, G.: Paul Johann Anselm Feuerbach. Ein Juristenleben. 3. Aufl. Göttingen; Vandenhoeck & Ruprecht 1969
- [13] Renner, C.: Stereometrie. München; Ehrenwirth 1948
- [14] Seebach, K.: Didaktische Überlegungen zum Satz von Dehn. In: Didaktik der Mathematik 11 (1983), S. 1–13, dieses Heft.