Didaktik der Mathematik

8. Jahrgang 1980

Bayerischer Schulbuch-Verlag · München

Anschrift der Redaktion:
OStR Franz Hager, Blütenstr. 9, 8039 Puchheim,
Telefon (089) 80 30 43

Bezugsbedingungen: Jahresabonnement 4 Hefte DM 45,–
Einzelheft DM 12,60, zuzüglich Versandkosten.
In den Bezugspreisen sind 6,5 % MwSt. enthalten.
Postscheckkonto München 933 70–805
Bankkonto: Bayer. Vereinsbank München 81 154
»Didaktik der Mathematik« erscheint einmal vierteljährlich.
Für unverlangt eingesandte Manuskripte wird keine Gewähr übernommen. Nachdrucke innerhalb der gesetzl. Frist nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlages.

Verlag und Anzeigenverwaltung:
Bayerischer Schulbuch-Verlag, Postfach 87,
Hubertusstraße 4, 8000 München 19, Tel. (089) 17 40 67–69
Zur Zeit ist Anzeigenpreisliste Nr. 2 vom 1. 8. 1978 gültig.
Satz: Fotosatz W. Tutte, Salzweg
Druck: E. Rieder, Schrobenhausen

Didaktik der Mathematik wird laufend im PÄDAGOGISCHEN JAHRESBERICHT (Verlag für pädagogische Dokumentation, Duisburg) bibliografisch nachgewiesen.

Hinweise für Autoren siehe dritte Umschlagseite.

ISSN 0343-5334

Inhaltsverzeichnis

Baptist, Peter
Lösung der nichtlinearen Gleichung
$f(x) = 0$ mit Hilfe von Iterationsverfahren
und deren Programmierung mit dem
TI 58/59, Teil 2
(65–74)

Baptist, Peter
Programmierung auf dem Taschenrechner und Konvergenzuntersuchungen für das Steffensen-Verfahren
(189–199)

Barth, Friedrich / Kreutzer, Karl-Heinz
Problem des Monats 1
(79–80)

Bauer, Ludwig
Mathematiklernen durch Entdecken
– Möglichkeiten und Grenzen
(12–26)

Beck, Uwe
Graphische Computer im Geometrieunterricht
(305–323)

Bürger, Heinrich / Rinkens, Hans Dieter / Schweiger, Fritz
Zur Behandlung der Stetigkeit:
Diskussion eines breiteren Zugangs
(255–280)

15. Bundestagung für Didaktik der Mathematik
vom 4. 3. 1981 bis 7. 3. 1981 in der
Technischen Hochschule Darmstadt
(324)

Danckwerts, Rainer
Ein leistungskursgerechter genetischer
Zugang zur Taylor-Formel
(58–64)

Fritsch, Rudolf
Eine geometrische Hinführung
zum inneren Produkt
(133–147)

Heilmann, Wolf-Rüdiger
Ein Gegenbeispiel aus der Theorie
der Markov-Ketten
(75–78)

Henn, Hans-Wolfgang
Preisindices in der Schule
(222–238)

Hui, Erich
Informatik in 24 Stunden:
Ein Projekt für die schweizerischen
Gymnasien
(245–254)

Ineichen, Robert
Über den Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik –
Erfahrungen und Anregungen
(81–101)

Jeger, Max
Exemplarisches Erschließen
kombinatorischer Zusammenhänge.
Ein Diskussionsbeitrag zum Thema
Informatik im Schulunterricht
(161–182)

Karigl, Günther / Kronfellner, Manfred / Timischl, Werner
Drei Fallstudien aus der Genetik
(292–304)

Kratz, Johannes
Zur Identifizierung der unbekannten
Integralfunktion $L : x \to \int_1^x \frac{dt}{t}$
Methodisch didaktische Notizen
für den Unterricht
(239–243)

Lindenau, Volkmar / Schindler, Manfred
Anwendungsorientierter Mathematikunterricht: Das d'Hondtsche Höchstzahlverfahren als Beispiel für die
Lösung des Rundungsproblems bei
ganzzahliger Verteilung
(213–221)

Markl, Tasso Hagen
Analysis im Grundkurs der Kollegstufe
mit besonderer Berücksichtigung
geometrischer Reihen
(39–57)

Padberg, Friedhelm
Zum Einsatz des Taschenrechners bei der Entdeckung einfacher Sätze – ein zahlentheoretisches Beispiel
(183–188)

Pickert, Günter
Eine Bemerkung zur Taylor-Formel
(157–159)

Reichel, Hans-Christian
Zum Skalarprodukt im Unterricht an der Sekundarstufe, eine didaktische Analyse
(102–132)

Schneider, Hans / Stein, Gunter
Der χ^2-Test im Stochastik-Grundkurs der Sekundarstufe II
(200–212)

Timischl, Werner
Mathematische Modelle im Schulunterricht
(148–156)

Titze, Helmut
Elementare Fehlerbetrachtungen für den Unterricht
(281–291)

Walser, Hans
Der Einsatz von programmierbaren Taschenrechnern im Unterricht. Beispiele aus der Schulpraxis
(27–38)

Zeitler, Herbert
Über Brennkurven
(1–11)

Rudolf Fritsch

Eine geometrische Hinführung zum inneren Produkt

Aus axiomatischen Forderungen an die Begriffe „Länge" und „senkrecht" wird unter Zuhilfenahme von elementargeometrischen Tatsachen das innere Produkt als eine positiv definite, symmetrische Bilinearform auf einem reellen Vektorraum hergeleitet. Den formalen Beweisen wird dabei soweit möglich eine anschauliche Begründung vorausgeschickt. Zum Schluß wird auch gezeigt, wie man umgekehrt von einem inneren Produkt zu „Länge" und „senkrecht" kommt.

Die Lehrpläne für die Leistungskurse in Linearer Algebra sehen z.T. eine sehr ausführliche Behandlung des inneren Produkts vor. Deswegen hat sich der Verfasser bei der von ihm im Studienjahr 1977/78 gehaltenen Anfängervorlesung über Lineare Algebra bemüht, die Einführung des inneren Produktes elementargeometrisch – unter Voraussetzung von Kenntnissen aus der Mittelstufe des Gymnasiums zu begründen; Anregungen dazu fanden sich in Aufsätzen von G. Pickert [4] und F. Ostermann [3]. Die nachstehenden Überlegungen bilden eine überarbeitete Fassung des Vorlesungsmanuskripts und natürlich nur das „wissenschaftliche" Skelett für das angestrebte Ziel; das „didaktische" Fleisch ist bei der unterrichtlichen Behandlung noch zu ergänzen.

Das innere Produkt bildet in der didaktischen Literatur ein Thema mit Variationen. Man braucht sich dazu nur den Aufsatz von V. Drumm [1] anzusehen, dessen Ausführungen in vielen Punkten mit unseren Ansichten übereinstimmen. Insofern handelt es sich hier nur um noch eine Variation. Es scheint allerdings doch ein grundsätzlicher Meinungsunterschied über die Rolle zu bestehen, die dem inneren Produkt im gymnasialen Unterricht zukommt. Beim Studium von [1] gewinnt man den Eindruck, daß dort das Wesen des inneren Produktes als eines selbständigen Gegenstandes mathematischer Betrachtung durchleuchtet werden soll. Dagegen sind wir der Auffassung, daß es sich um ein Handwerkszeug handelt, das sich in der geometrischen Anwendung bewähren muß. Es ist zuzugeben, daß der Inhalt von [1] vielleicht näher an den ausgearbeiteten Lehrplänen orientiert ist; aber was soll denn das in Baden-Württemberg formulierte Lernziel: „Die Definition der Skalarmultiplikation wissen: ... Entscheiden können, ob eine vorgegebene Abbildung von $\mathscr{V} \times \mathscr{V}$ nach $\mathbb{R}$ eine Skalarmultiplikation ist", wenn hinterher nicht damit gearbeitet wird. Als Anwendungsfeld bietet sich vor allem die 3-dimensionale Elementargeometrie an; man hätte damit eine Möglichkeit, das räumliche Anschauungsvermögen zu pflegen, das nach dem völligen Verschwinden von Stereometrie und Darstellender Geometrie brach darnieder liegt.[1] Unser Ziel ist deshalb, von anschaulichen Begriffen Länge und senkrecht direkt zum abstrakten inneren Produkt durchzustoßen. Dabei wollen wir auf Nebenwege wie allgemeine Eichkurven und Purismus wie möglichst saubere Trennung von Längen- und Orthogonalitätsaxiomen verzichten. Außerdem sind wir natürlich an einem dimensionsfreien Zugang interessiert, der sich aus der Darstellung in [1] nur mit etwas Mühe entwickeln läßt.

1 Mit den grundsätzlichen Ausführungen von L. Führer in [2] zum Geometrie-Unterricht in der Oberstufe stimmen wir vollständig überein!

Um eventuellen Angriffen wegen Ungenauigkeit oder Schlamperei vorzubeugen, wird für den folgenden Text ausdrücklich vereinbart: Wenn auf die Anschauung Bezug genommen wird, ist ein Vektor nichts anderes als ein Element, oder kürzer: ein Punkt, in einem $\mathbb{R}^n$. Gelehrt kann man das so ausdrücken: Wir fassen einen Vektorraum als punktierten affinen Punktraum auf.

Nun sei $\mathscr{V}$ ein für allemal ein reeller Vektorraum.

Wie kann man nun mit $\mathscr{V}$ einen Längenbegriff in Verbindung bringen? Anschaulich ist die Länge eines Vektors nichts anderes als sein Abstand vom Ursprung. Also sollten wir eine Funktion, d.h. eine Abbildung haben, die jedem Vektor x in $\mathscr{V}$ eine nicht-negative reelle Zahl $\mathrm{l}x$ zuordnet, symbolisch

$$x \mapsto \mathrm{l}x$$

(Um zu viele Klammern zu vermeiden, schreiben wir – wie bei den trigonometrischen Funktionen allgemein üblich – $\mathrm{l}x$ für die Länge von x anstelle von $\mathrm{l}(x)$, was man nach anderen Gebräuchen vielleicht erwarten würde.)

Zunächst stellen wir fest, daß eine solche Funktion durch die Vektorraumstruktur von $\mathscr{V}$ nicht eindeutig bestimmt sein kann. Im $\mathbb{R}^2$, und damit in jedem Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$, haben wir die durch den Satz des Pythagoras gegebene Längenfunktion. Die von (1,0) bzw. (1,1) erzeugten Untervektorräume (Figur 1) des $\mathbb{R}^2$ sind isomorph; es gibt z.B. einen durch die Zuordnung

$$(1,0) \mapsto (1,1)$$

bestimmten Isomorphismus. Dieser ist aber nicht mit Längen verträglich, denn

$$\mathrm{l}(1,0) = 1$$

aber

$$\mathrm{l}(1,1) = \sqrt{2}\,.$$

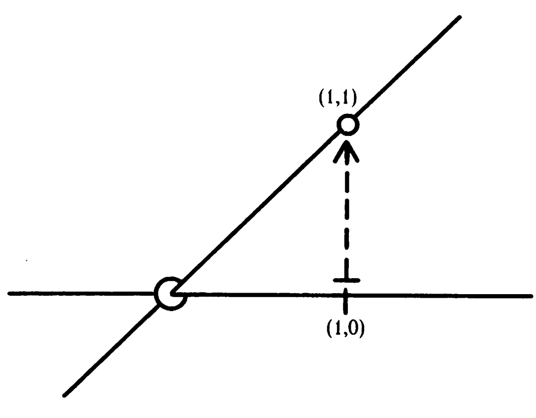

Fig. 1

„Länge“ ist also ein zusätzliches Strukturdatum für einen Vektorraum. Nun wird man aber nicht jede Abbildung

$$\mathscr{V} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

als Länge ansprechen wollen, sondern gewisse, in der Anschauung begründete Eigenschaften fordern. Für konkrete Berechnungen stellt sich zusätzlich das Problem der expliziten Beschreibung der Funktionsvorschrift.

Welche Eigenschaften sollte eine Längenfunktion l erfüllen? Auf der Hand liegen doch wohl die beiden folgenden Forderungen:

(L0) $\mathrm{l}\,x$ ist genau dann 0, wenn x der Nullvektor ist.

(L1) Für alle reellen Zahlen λ gilt

$$\mathrm{l}(\lambda x) = |\lambda| \cdot \mathrm{l}\,x\,.$$

Ein wichtiger Spezialfall von (L1) ist (man setze $\lambda = -1$):

(L1′) $\quad \mathrm{l}(-x) = \mathrm{l}\,x\,.$

Bevor wir weitere Forderungen an l stellen, wollen wir uns kurz der Orthogonalität zuwenden. Anschaulich sind zwei Vektoren x, y senkrecht zueinander, wenn sie zusammen mit dem Ursprung ein rechtwinkliges Dreieck (Figur 2) bilden, mit dem rechten Winkel am Ursprung, symbolisch

$$x \perp y\,.$$

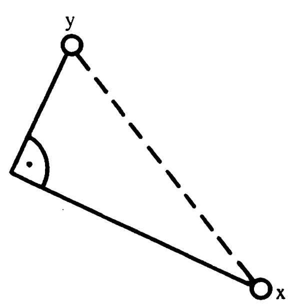

Fig. 2

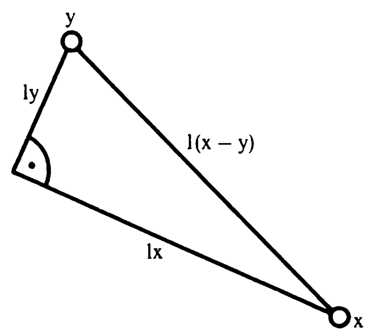

Fig. 3

Daraus sieht man zunächst, daß es sich bei dieser Orthogonalität um eine zweistellige Relation handelt. Ähnlich wie beim Längenbegriff kann man feststellen, daß eine Vektorraumstruktur verschiedene Orthogonalitätsrelationen zuläßt. Die elementargeometrische Orthogonalität läßt sich mit der Längenfunktion beschreiben, entweder durch den Satz des Pythagoras (Figur 3):

$$\begin{aligned}&x \perp y \quad \text{genau dann, wenn}\\ &(\mathrm{l}\,x)^2 + (\mathrm{l}\,y)^2 = (\mathrm{l}(x-y))^2\end{aligned}$$

oder mit Hilfe der Tatsache, daß ein Parallelogramm genau dann ein Rechteck ist, wenn die Diagonalen gleichlang sind (Fig. 4):

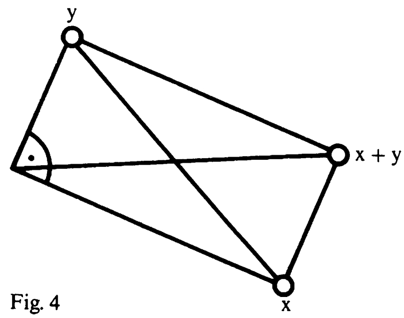

Fig. 4

$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ genau dann, wenn
$\mathrm{l}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathrm{l}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$.

Die Darstellung von V. Drumm in [1] geht vom Satz des Pythagoras aus; dem Vorbild F. Ostermanns [3] und G. Pickerts [4] folgend wählen wir die zweite Möglichkeit. Wir ordnen also jeder Funktion $\mathrm{l}: \mathscr{V} \to \mathbb{R}^+$ eine zweistellige Relation $\perp$ zu durch

$$\perp = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathscr{V} \cdot \mathscr{V} \mid \mathrm{l}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathrm{l}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}.$$

Wie üblich schreiben wir dann kurz „$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$“ an Stelle von „$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \perp$“. Wir sagen dann: „$\boldsymbol{x}$ ist senkrecht zu $\boldsymbol{y}$“ oder „$\boldsymbol{x}$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{y}$“. Offensichtlich steht jeder Vektor senkrecht auf dem Nullvektor, d. h.

$$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{0} \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{V}.$$

Erfüllt die Funktion l die Bedingung (L1′), so ist die Relation $\perp$ symmetrisch; dann gilt auch

$$\boldsymbol{0} \perp \boldsymbol{x} \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{V}.$$

Die weiteren Bedingungen an eine Längenfunktion formulieren wir nun mit Hilfe der Orthogonalität. Es sollte doch wohl so sein, daß die Gesamtheit der Vektoren, auf denen ein gegebener Vektor senkrecht steht, einen Untervektorraum von $\mathscr{V}$ bildet. Diese Überlegung führt zu den Forderungen

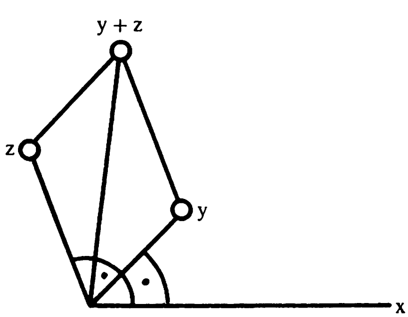

Fig. 5

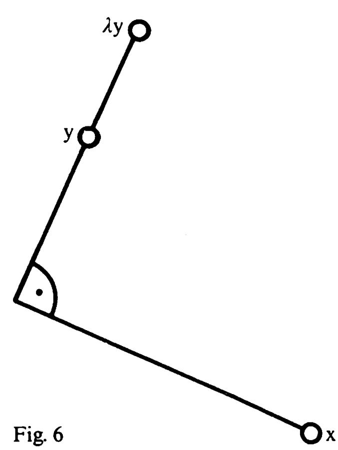

Fig. 6

(L2) Aus $x \perp y$ und $x \perp z$ folgt $x \perp y+z$ (Figur 5).

(L3) Aus $x \perp y$ folgt $x \perp \lambda y$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (Figur 6).

Der entscheidende Punkt fehlt allerdings noch. Wir müssen verlangen, daß man von einem Vektor auf die durch den Nullvektor und einen von Null verschiedenen Vektor bestimmte Gerade ein eindeutig bestimmtes Lot fällen kann. Dies bedeutet formal (Fig. 7)

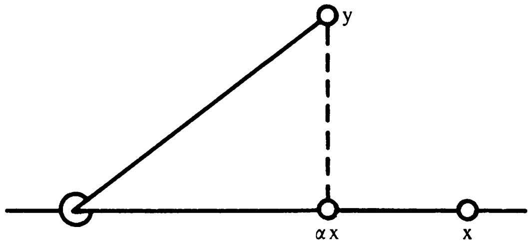

Fig. 7

(L4) Zu jedem Paar x, y von Vektoren mit $x \neq 0$ gibt es genau eine reelle Zahl α mit $x \perp y - \alpha x$.

Nun kommt der gedanklich vielleicht wichtigste Schritt. Eine Aussage der Form: „Zu jedem... gibt es genau ein..." ist ja nichts anderes als eine Abbildungsvorschrift! Die Bedingung (L4) verlangt also die Existenz einer bestimmten Abbildung und das angestrebte Ziel, das innere Produkt, wird sich nun durch Manipulationen an dieser Abbildung ergeben. Wir bezeichnen diese Abbildung mit dem Symbol $\hat{s}$ und bemühen uns zunächst um eine formale Beschreibung: Der Definitionsbereich von $\hat{s}$ besteht aus allen Paaren (x, y) von Vektoren mit $x \neq 0$; der Wertbereich ist $\mathbb{R}$. $\hat{s}$ ist also eine Funktion (= Abbildung mit Wertebereich $\mathbb{R}$) in zwei Variablen, symbolisch

$$\hat{s}\colon (\mathscr{V} \setminus \{0\}) \times \mathscr{V} \to \mathbb{R}.$$

Die Bedingung (L4) nimmt nun die folgende Form an:

(L4') Es gibt genau eine Funktion

$$\hat{s}\colon (\mathscr{V} \setminus \{0\}) \times \mathscr{V} \to \mathbb{R} \quad \text{mit}$$
$$x \perp y - \hat{s}(x,y) \cdot x \quad \text{für alle} \quad (x,y) \in (\mathscr{V} \setminus \{0\}) \times \mathscr{V}.$$

Für das weitere ist es nützlich, die Funktion $\hat{s}$ zu einer auf ganz $\mathscr{V} \times \mathscr{V}$ definierten Funktion s mit Werten in $\mathbb{R}$ zu erweitern. Dazu setzen wir

$$s(x,y) = \begin{cases} \hat{s}(x,y), & \text{falls } x \in \mathscr{V} \setminus \{0\}, y \in \mathscr{V}. \\ 0, & \text{falls } x = 0 \in \mathscr{V}, y \in \mathscr{V}. \end{cases}$$

Anschaulich ist klar, daß es sich hierbei um keine „stetige" Fortsetzung von $\hat{s}$ handeln kann. Um das einzusehen wählen wir $x \in \mathscr{V} \setminus \{0\}$ und $y \in \mathscr{V}$ mit $\hat{s}(x,y) \neq 0$, sowie eine Nullfolge (λ_i) in $\mathbb{R}^*$. Dann hat man (jedenfalls im „Anschauungsraum")

$$\lambda_i x \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{aber} \quad s(\lambda_i x, y) \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \infty \neq s(0,y) = 0.$$

Daß diese Erweiterung von $\hat{s}$ zu s trotzdem vernünftig ist, wird sich im folgenden zeigen. Das Stetigkeitsproblem wird dadurch aus der Welt geschafft, daß bei den Anwendungen die Funktion s immer noch mit einer weiteren Funktion multipliziert wird, so daß das Produkt dann global stetig ist. Diese Situation ist aus der Analysis durchaus bekannt. Die auf $\mathbb{R}^*$ definierte Funktion $\hat{f}: x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ ist zwar stetig, läßt sich aber nicht stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen. Definiert man aber $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$fx = \begin{cases} \hat{f}x, & x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & x = 0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

so ist die Funktion $x \mapsto x \cdot fx$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Im folgenden werden wir zeigen, daß jede Längenfunktion mit den Eigenschaften (L0) bis (L4) ein inneres Produkt bestimmt, aus dem sie sich zurückgewinnen läßt. Dazu benötigen wir weitere Eigenschaften der Funktion s, die man im Unterricht auf jeden Fall elementargeometrisch plausibel machen sollte. Ob man dann die formale Rückführung auf (L0) bis (L4) noch vornimmt oder wiederum sagt, wir betrachten nur Längenfunktionen, deren zugehöriges s diese elementargeometrisch vernünftigen Eigenschaften hat, hängt von den jeweiligen Rahmenbedingungen ab.

Unmittelbar klar ist jedenfalls:

(S0) es ist $s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ genau dann, wenn $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ gilt.

(Gelehrt ausgedrückt: Die Relation $\perp$ ist genau die Nullstellenmenge von s; das ist bereits ein Grund dafür, daß die Erweiterung von $\hat{s}$ zu s vernünftig ist).

Als nächstes bemerken wir, daß s in der zweiten Variablen linear ist:

(S1) s ist in der 2. Variablen additiv, d.h. es gilt

$$s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \text{ für alle } \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \mathscr{V}$$

Elementargeometrisch ergibt sich dies aus Parallelogrammeigenschaften (s. Fig. 8):

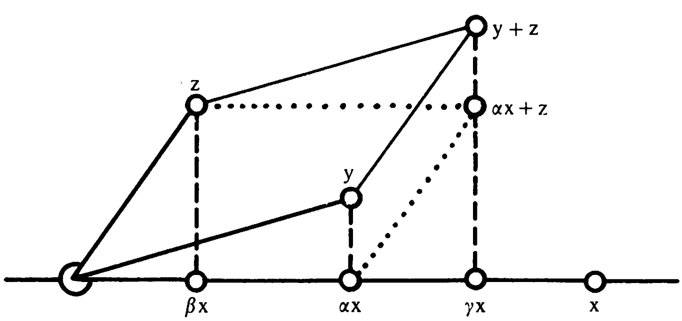

Fig. 8

Die Verbindungsstrecke von $\boldsymbol{0}$ und $\alpha\boldsymbol{x}$ ist „parallelgleich" zur Verbindungsstrecke von $\boldsymbol{z}$ und $\boldsymbol{z} + \alpha\boldsymbol{x}$.

Letztere ist wiederum parallelgleich zur Verbindungsstrecke von $\beta\boldsymbol{x}$ und $\gamma\boldsymbol{x}$. Also ist $\gamma = \alpha + \beta$.

Die Rückführung auf (L0) bis (L4) verläuft folgendermaßen: O.w.E. sei $x \neq 0$.

Wir setzen $\alpha = s(x,y)$ und $\beta = s(x,z)$.

Dann ist $x \perp y - \alpha x$ und $x \perp z - \beta x$, also nach (L2)

$$x \perp y + z - (\alpha + \beta)x.$$

Aus (L4) folgt nun

$$s(x, y + z) = \alpha + \beta = s(x,y) + s(x,z). \qquad \text{qed.}$$

(S2) s ist in der 2. Variablen homogen, d.h. es gilt

$$s(x,\lambda y) = \lambda s(x,y) \quad \text{für alle } x,y \in \mathscr{V} \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{(Fig. 9)}$$

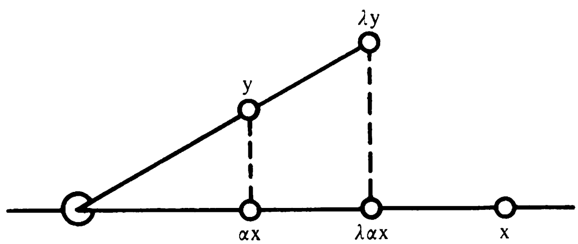

Fig. 9

Das ist natürlich ein Spezialfall des Vierstreckensatzes und ergibt sich so:

Ist $x \perp y - \alpha x$, dann ist wegen (L3) auch

$$x \perp \lambda y - \lambda\alpha x, \quad \text{also} \quad s(x,\lambda y) = \lambda\alpha. \quad \text{qed.}$$

Nun betrachten wir das Verhalten von s in der ersten Variablen; das ist keineswegs linear, weder additiv, noch homogen. Es gilt – und darauf beruht die schon erwähnte Unstetigkeit von s:

(S3) s ist in der 1. Variablen antihomogen, d.h. es gilt:

$$s(\lambda x, y) = \frac{1}{\lambda} s(x,y) \quad \text{für alle} \quad x,y \in \mathscr{V}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Vom elementaren Standpunkt aus ist das die triviale Gleichung

$$\alpha x = \frac{\alpha}{\lambda}(\lambda x).$$

Der Bezug zu (L0) bis (L4) ist ein klein wenig komplizierter. O.w.E. können wir wieder $x \neq 0$ annehmen. Ist dann $x \perp y - \alpha x$, so folgt aus (L1′) – wie bereits gezeigt – $y - \alpha x \perp x$, aus (L3) dann $y - \alpha x \perp \lambda x$ und wieder aus (L1′) $\lambda x \perp y - \alpha x$. Wegen $y - \alpha x = y - \frac{\alpha}{\lambda}\lambda x$ und (L4) ergibt sich daraus

$$s(\lambda x, y) = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} s(x, y). \quad \text{qed.}$$

Eine interessantere Eigenschaft dieser eng mit der Orthogonalität verbundenen Funktion s ist die Tatsache, daß man mit ihrer Hilfe die Längengleichheit charakterisieren kann.

(S4) Die Vektoren $x, y \in \mathscr{V}$ haben genau dann gleiche Länge, wenn gilt

$$s(x + y, x) = s(x + y, y).$$

Die Gleichung besagt – im Fall $x + y \neq \mathbf{0}$ – daß die von x und y auf die Verbindungsgerade von $\mathbf{0}$ und $x + y$ gefällten Lote den gleichen Fußpunkt haben, daß also die Diagonalen in dem von $\mathbf{0}, x, x + y$ und y gebildeten Parallelogramm aufeinander senkrecht stehen (Fig. 10 u. 11). Das ist aber genau dann der Fall, wenn dieses Parallelogramm eine Raute ist, d. h. wenn $\mathrm{l}\,x = \mathrm{l}\,y$ gilt.

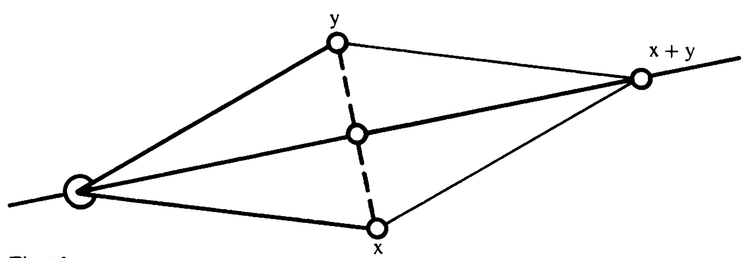

Fig. 10

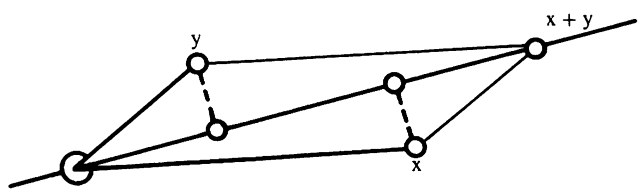

Fig. 11

Die Ableitung aus den „Axiomen" ist einfach: Wegen $2 \neq 0$ und (L 1) ist $\mathrm{l}\,x = \mathrm{l}\,y$ gleichwertig mit $\mathrm{l}(2x) = \mathrm{l}(2y)$. Diese Gleichung läßt sich aber verkomplizieren zu

$$\mathrm{l}\big((x + y) + (x - y)\big) = \mathrm{l}\big((x + y) - (x - y)\big),$$

was definitionsgemäß besagt

$$x + y \perp x - y.$$

Nach (S 0) ist dies äquivalent zu $s(x + y, x - y) = 0$ und die Additivität von s in der 2. Variablen (S 1) gestattet die Umformung zu

$$s(x + y, x) = s(x + y, y). \quad \text{qed.}$$

Damit können wir eine gewisse Symmetrie-Eigenschaft der Längenfunktion herleiten:

(S5) Für alle $x, y \in \mathscr{V}$ mit $\mathrm{l}\,x = \mathrm{l}\,y$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt (Fig. 12)

$$\mathrm{l}\,(\lambda x - y) = \mathrm{l}\,(\lambda y - x).$$

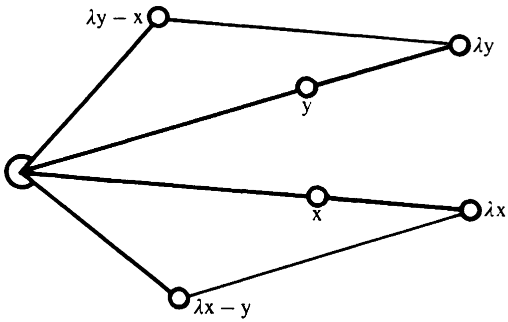

Fig. 12

Elementargeometrisch ist das eine Konsequenz aus der Kongruenz der Dreiecke

$$(\mathbf{0}, \lambda x, \lambda x - y) \quad \text{und} \quad (\mathbf{0}, \lambda y, \lambda y - x),$$

die sich nach sws aus dem Z-Winkelsatz ergibt. Die axiomatische Methode erfordert hier eine kleine Rechnung: Nach (S4) genügt es zu zeigen

$$\mathrm{s}(\lambda x - y + \lambda y - x, \lambda x - y) = \mathrm{s}(\lambda x - y + \lambda y - x, \lambda y - x).$$

Das aber gleichbedeutend mit

$$\mathrm{s}\big((\lambda - 1)(x + y), \lambda x - y\big) = \mathrm{s}\big((\lambda - 1)(x + y), \lambda y - x\big).$$

Dazu berechnen wir im Fall $\lambda \neq 1$

$$\mathrm{s}\big((\lambda - 1)(x + y), \lambda x - y\big) \underset{(\mathrm{S1})}{=}$$

$$\underset{(\mathrm{S1})}{=} \quad \lambda \cdot \mathrm{s}\big((\lambda - 1)(x + y), x\big) - \mathrm{s}\big((\lambda - 1)(x + y), y\big) \underset{(\mathrm{S2})}{=}$$

$$\underset{(\mathrm{S2})}{=} \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}\,\mathrm{s}(x + y, x) - \frac{1}{\lambda - 1}\,\mathrm{s}(x + y, y) \underset{(\mathrm{S3})}{=}$$

$$\underset{(\mathrm{S3})}{=} \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}\,\mathrm{s}(x + y, y) - \frac{1}{\lambda - 1}\,\mathrm{s}(x + y, x) \underset{(\mathrm{S2})}{=} \cdots \underset{(\mathrm{S1})}{=}$$

$$\underset{(\mathrm{S1})}{=} \quad \mathrm{s}\big((\lambda - 1)(x + y), \lambda y - x\big).$$

Im Fall $\lambda = 1$ ergibt sich die Behauptung aus (L 1′). qed.

Nun stellen wir die Frage nach der Symmetrie der Funktion s, also nach einem Vergleich von $\mathrm{s}(x, y)$ und $\mathrm{s}(y, x)$. Aus der Elementargeometrie (s. Fig. 13) entnehmen wir zunächst die Ähnlichkeit der Dreiecke $(\mathbf{0}, \alpha x, y)$ und $(\mathbf{0}, \beta y, x)$, woraus folgt

$$\mathrm{l}(\alpha x) : \mathrm{l}(\beta y) = \mathrm{l}\, y : \mathrm{l}\, x$$

oder

$$\mathrm{l}(\alpha x) \cdot \mathrm{l}\, x = \mathrm{l}(\beta y) \cdot \mathrm{l}\, y\,.$$

Aus (L 1) folgt dann

$$|\alpha|(\mathrm{l}\, x)^2 = |\beta| \cdot (\mathrm{l}\, y)^2\,.$$

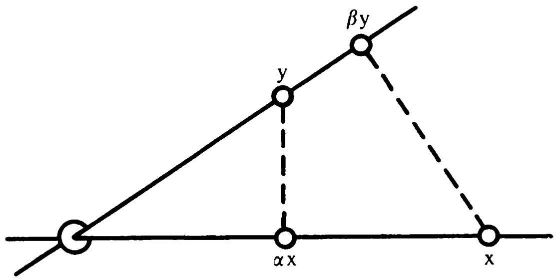

Fig. 13

Entnehmen wir der Anschauung (Fig. 14 u. 15), daß $\mathrm{s}(x,y)$ und $\mathrm{s}(y,x)$ immer gleiches Vorzeichen haben (positiv, falls das Dreieck $(\mathbf{0},x,y)$ bei $\mathbf{0}$ einen spitzen Winkel hat, sonst negativ), so ergibt sich

$$\mathrm{s}(x,y) \cdot (\mathrm{l}\, x)^2 = \mathrm{s}(y,x) \cdot (\mathrm{l}\, y)^2\,.$$

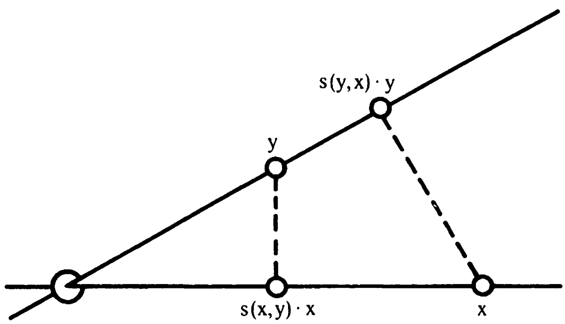

Fig. 14

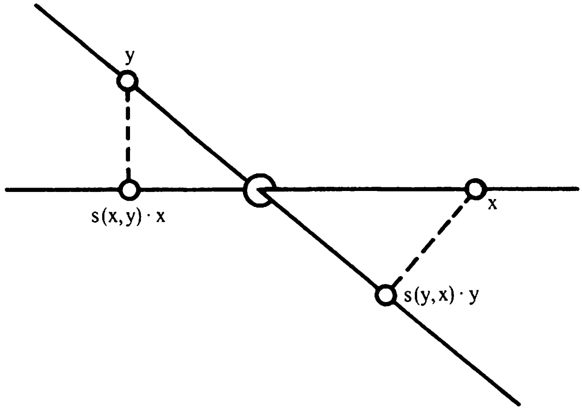

Fig. 15

Das führt uns zu

(S6) Sind $x, y \in \mathscr{V}$ mit $s(x,y) \neq 0$ gegeben, so ist genau dann

$$s(x,y) = s(y,x), \quad \text{wenn} \quad l\,x = l\,y \quad \text{ist.}$$

Der formale Bezug dieser Aussage zu den vorhergehenden erfordert etwas Aufwand: Sei zunächst $l\,x = l\,y$; dann gilt für $\alpha = s(x,y)$

$$x \perp y - \alpha x\,,$$

d.h. nach Definition der Orthogonalität

$$l\,(x + y - \alpha x) = l\,(x - y + \alpha x)\,.$$

Nach (L 1') ist diese Aussage äquivalent zu

$$l\,((\alpha - 1)x - y) = l\,((\alpha + 1)x - y)\,.$$

Mit (S5) folgt nun $(\lambda = (\alpha - 1))$ bzw. $\lambda = (\alpha + 1)$

$$l\,((\alpha - 1)y - x) = l\,((\alpha + 1)y - x)\,,$$

d.h. (wiederum unter Benutzung von L 1')

$$y \perp x - \alpha y\,.$$

Also ist

$$s(y,x) = \alpha = s(x,y)\,.$$

Zum Beweis der Umkehrung sei $s(x,y) = s(y,x) \neq 0$. Dann sind nach (S0) x und y von $\mathbf{0}$ verschieden. Nach (L0) können wir nun $\lambda = \dfrac{lx}{l\,y}$ bilden und erhalten

$$l\,x = l\,(\lambda y)$$

mit $\lambda > 0$. Aus dem bereits Bewiesenen folgt nun

$$s(x, \lambda y) = s(\lambda y, x).$$

Wegen der Linearität von s in der 2. Variablen (S2) und des reziproken Verhaltens von s in der 1. Variablen (S3) ist dies äquivalent zu

$$\lambda \cdot s(x,y) = \frac{1}{\lambda}\, s(y,x).$$

Aus der Voraussetzung folgt nun

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{d.h.} \qquad \lambda^2 = 1\,.$$

Wegen $\lambda > 0$ ergibt das

$$\lambda = 1\,,$$

also nach der Definition von

$$1x = 1y. \qquad \text{qed.}$$

Da es in einem vom Nullraum verschiedenen Vektorraum nun aber immer Vektoren verschiedener Länge gibt, falls nur die zugrundegelegte Längenfunktion die Eigenschaft (L 1) besitzt, wird die von uns betrachtete Funktion s i.a. nicht symmetrisch sein. Unsere Analyse des Symmetrieproblems zeigt aber, daß die auch auf $\mathscr{V} \times \mathscr{V}$ definierte Funktion

$$\langle , \rangle : (x,y) \rightarrow \langle x,y \rangle = s(x,y) \cdot (1x)^2$$

symmetrisch sein sollte. Damit sind wir auf die Funktion gestoßen, die es uns erlauben wird, Fragen der Länge und der Orthogonalität rechnerisch zu behandeln. Zunächst kann man nachprüfen:

(P 1) Die Funktion $\langle , \rangle$ ist symmetrisch, d.h. es gilt

$$\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle \quad \text{für alle} \quad x,y \in \mathscr{V}$$

(natürlich unter der Voraussetzung, daß die angenommene Längenfunktion die Eigenschaften (L 0) bis (L 4) erfüllt).

Dazu können wir o.w.E. $x \neq 0 \neq y$ annehmen und die positive reelle Zahl $\lambda = \frac{1x}{1y}$ definieren. Dann gilt $1x = 1(\lambda y)$ und wir finden:

$$\langle x,y \rangle = s(x,y) \cdot (1x)^2 = \frac{1}{\lambda} s(x,\lambda y) \cdot (1x)^2 = \frac{1}{\lambda} s(\lambda y,x) \cdot (1x)^2 =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} s(y,x) \cdot (1x)^2 = s(y,x) \cdot (1y)^2 = \langle y,x \rangle . \qquad \text{qed.}$$

Unsere neue Funktion hat aber noch weitere schöne Eigenschaften, die wir gleich herausarbeiten wollen.

(P 2) Die Funktion $\langle , \rangle$ ist positiv definit, d.h.

$$\langle x,x \rangle = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \in \mathscr{V}$$
$$\langle x,x \rangle > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathscr{V} \setminus \{0\}.$$

Wir können uns wieder auf den Fall $x \neq 0$, also $1x \neq 0$ beschränken. Dann ist

$$x \perp x - 1 \cdot x, \quad \text{d.h.} \quad s(x,x) = 1 \quad \text{und} \quad \langle x,x \rangle = s(x,x) \cdot (1x)^2 = (1x)^2 > 0. \quad \text{qed.}$$

Schließlich gilt

(P 3) Die Funktion $\langle , \rangle$ ist eine Bilinearform auf $\mathscr{V}$, d.h. eine Funktion $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \rightarrow \mathbb{R}$, die in jeder Variablen linear ist.

Die Funktion $\langle , \rangle$ entsteht aus der Funktion s durch Hinzunahme eines nur von der ersten Variablen abhängigen Multiplikators. Dabei wird die für s gegebene Linearität in der 2. Variablen nicht gestört, also ist auch $\langle , \rangle$ linear in der 2. Variablen. Wegen der Symmetrie (P 1) ist $\langle , \rangle$ dann auch linear in der 1. Variablen, also bilinear. qed.

Bei dieser Gelegenheit kann man bemerken, daß der Multiplikator $(1x)^2$ auch das früher angesprochene Stetigkeitsproblem löst, die Linearität von $\langle , \rangle$ in der ersten Variablen impliziert ja auch die Stetigkeit in dieser Variablen. Die globale Stetigkeit interessiert im Gymnasialunterricht ja sicher nicht.

Man setzt oft zur Abkürzung

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle .$$

Dann folgen aus der Bilinearität die Rechenregeln

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, (x + z) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z ,$$

die die Form von Distributivgesetzen haben. Aus diesem Grund werden solche Funktionen auch als Produkte bezeichnet. Genauer definiert man:

Ein *inneres Produkt* für $\mathscr{V}$ ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform auf $\mathscr{V}$.

Wir haben gesehen, daß jede Längenfunktion für $\mathscr{V}$, die die Axiome (L0) bis (L4) erfüllt, zu einem inneren Produkt für $\mathscr{V}$ führt. Die Längenfunktion ist durch das assoziierte innere Produkt eindeutig bestimmt, denn offensichtlich gilt

$$\mathrm{l}\, x = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathscr{V} .$$

Noch schärfer können wir formulieren:

Ist $\langle , \rangle$ ein inneres Produkt für $\mathscr{V}$, so liefert die Festsetzung

$$\mathrm{l}\, x = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathscr{V}$$

eine Längenfunktion für $\mathscr{V}$, die die Eigenschaften (L0) bis (L4) erfüllt. Dabei gilt für alle $x, y \in \mathscr{V}$

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 .$$

Beweis: (L0), d.h. $\mathrm{l}^{-1}\mathbf{0} = \{0\}$ folgt aus der positiven Definitheit (P2) von $\langle , \rangle$. Die Bilinearität (P3) liefert

$$\mathrm{l}(\lambda x) = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} \underset{(\mathrm{P3})}{=} \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \mathrm{l}\, x, \quad \text{also} \quad (\mathrm{L1}).$$

Nun müssen wir die aus der hier definierten Längenfunktion abgeleitete Orthogonalität studieren. Sie läßt sich erwartungsgemäß durch $\langle , \rangle$ ausdrücken. Die Definition sagt

$$\perp = \{(x, y) \in \mathscr{V} \times \mathscr{V} \mid \mathrm{l}(x + y) = \mathrm{l}(x - y)\} .$$

Da l nach Definition nur nichtnegative Werte annimmt, ist die Bedingung $\mathrm{l}(x + y) = \mathrm{l}(x - y)$ gleichbedeutend mit

$$(\mathrm{l}(x + y))^2 = (\mathrm{l}(x - y))^2 ,$$

d.h. $\quad \langle x + y, x + y \rangle = \langle x - y, x - y \rangle .$

Wegen der Bilinearität von $\langle , \rangle$ (P3) läßt sich diese Gleichung mit Hilfe der binomischen Formel transformieren in

$$2\langle x, y \rangle = -2\langle x, y \rangle ,$$

d.h. $\langle x, y\rangle = 0\,.$

Also haben wir

$$\perp = \{(x,y) \in \mathscr{V} \times \mathscr{V} \mid \langle x,y\rangle = 0\}\,.$$

Damit folgt (L 2) aus (P 3)

$$\langle x,y\rangle = 0 \text{ und } \langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle = 0$$

und ebenso (L 3)

$$\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle = 0\,.$$

Schließlich behauptet (L 4), daß die Gleichung

$$\langle x, y - \alpha x\rangle = 0$$

für $x \neq \mathbf{0}$ und beliebiges $y \in \mathscr{V}$ eine eindeutig bestimmte Lösung α hat. Nach (P 3) ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\langle x,y\rangle - \alpha\langle x,x\rangle = 0\,.$$

Wegen der positiven Definitheit und $x \neq \mathbf{0}$ ist aber $\alpha = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}$ die eindeutige Lösung dieser Gleichung. qed.

Längenfunktionen mit den Eigenschaften (L 0) bis (L 4) und innere Produkte entsprechen sich also eindeutig.
Die Beziehung wird durch die Gleichungen

$$\mathrm{l}\,x = \sqrt{\langle x,x\rangle} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathscr{V}$$

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left((\mathrm{l}\,x)^2 + (\mathrm{l}\,y)^2 - \left(\mathrm{l}\,(x-y)\right)^2\right) \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathscr{V}$$

hergestellt. (Die 2. Gleichung ergibt sich aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{l}(x-y)\right)^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \\ &= (\mathrm{l}\,x)^2 - 2\langle x,y\rangle + (\mathrm{l}\,y)^2)\,.\end{aligned}$$

Die Linearitätseigenschaften machen das Hantieren mit inneren Produkten einfacher als mit Längenfunktionen. Zu expliziten Rechnungen genügt es ja die Werte eines inneren Produkts auf Paaren von Vektoren aus einer festgewählten Basis zu kennen – das führt zur Beschreibung der inneren Produkte mit Hilfe von Matrizen und Matrizenmultiplikation. Außerdem hat man ein einfaches, leicht auswertbares Kriterium für die Orthogonalität:

$$x \perp y \quad \text{genau dann, wenn} \quad \langle x,y\rangle = 0\,.$$

Das müßte als Motivation für die inneren Produkte genügen. Hat man die Darstellbarkeit innerer Produkte durch Matrizen gewonnen, so schließt sich die Frage an, welche Matrizen innere Produkte darstellen. Man sollte dazu nicht das Kriterium über die Hauptminoren entwickeln, sondern das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren anwenden.

Der Algorithmus läßt sich genau dann für die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ durchführen, wenn die Matrix ein inneres Produkt beschreibt. Insbesondere in den höheren Dimensionen sind dazu weniger Schritte erforderlich als zur Berechnung der Hauptminoren.

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. Rudolf Fritsch, Werner-Sombart-Str. 4, 7750 Konstanz.

Eingangsdatum: 29. 9. 1979.

Literatur

[1] Drumm, V.: Eine einfache Kennzeichnung der euklidischen Vektorräume. In: Didaktik der Mathematik 6 (1978). S. 272–288.
[2] Führer, L.: Objektstudien in der Vektorgeometrie. In: Didaktik der Mathematik 7 (1979), S. 32–61.
[3] Ostermann, F.: Zur Einführung einer pythagoräischen Metrik im Vektorraum. In: Math.-Phys. Semesterberichte 13 (1966), S. 62–73.
[4] Pickert, G.: Axiomatische Begründung der ebenen euklidischen Geometrie in vektorieller Darstellung. In: Math.-Phys. Semesterberichte 10 (1963), S. 65–85.