MITTEILUNGEN

aus dem

MATHEM. SEMINAR GIESSEN

Herausgegeben von den Professoren
des Mathematischen Instituts der Universität Giessen

Geschäftsführung: D. Gaier, G. Pickert

Heft 132

GIESSEN 1978

SELBSTVERLAG DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS
ISSN 0373 - 8221 CODEN: MMUGAU

BEMERKUNGEN ZUR AXIOMATIK AFFINER RÄUME

Rudolf Fritsch

Während sich die inzidenzgeometrische Charakterisierung projektiver Räume mit Hilfe des Veblen-Young-Axioms durchgesetzt hat, gibt es kein allgemein anerkanntes inzidenzgeometrisches Axiomensystem für die affinen Räume. Das mag an den Schwierigkeiten liegen, die eine "rein" inzidenzgeometrische Beschreibung der affinen Räume mit Hilfe von zwei Mengen und einer zweistelligen Relation zwischen diesen bereitet. Diese Probleme sollen unsere folgenden Darlegungen etwas beleuchten.

Im wesentlichen sind zwei synthetische Charakterisierungen der affinen Räume gebräuchlich. Die eine (vgl. [1], [2], [5], [8]) arbeitet mit den Grundbegriffen "Punkt", "Gerade", "Ebene" und "Inzidenz" und den folgenden Axiomen

(VG) Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden zweier Punkte

(VE) Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsebene dreier nicht kollinearer Punkte

(RG) Existenz zweier Punkte auf jeder Geraden (Reichhaltigkeit)

(RE) Existenz dreier nicht kollinearer Punkte in jeder Ebene (Reichhaltigkeit)

(T) Transitivität der Relation "parallel" (Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie entweder gleich sind oder in einer Ebene liegen und keinen Punkt gemeinsam haben).

(SPA) Zu jeder Geraden gibt es durch jeden Punkt genau eine Parallele (Starkes Parallelenaxiom).

Die zweite übliche synthetische Beschreibung der affinen Räume (vgl. [4], [9]) baut stattdessen auf den Grundbegriffen "Punkt", "Gerade", "Inzidenz" und"Parallelität" auf und verwendet die folgenden Axiome

(VG), (RG), (SPA)

(Ä) Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geraden

(D) Das Abtragen ähnlicher Dreiecke ist möglich ([9], S.319).

Nun stellt O. Tamaschke in [9](S.318) die Frage, "ob es grundsätzlich möglich ist, ein rein inzidenzgeometrisches Axiomensystem für die affinen Räume zu finden". In dieser Allgemeinheit ist die Antwort positiv. Eine Inzidenzstruktur (P, B, I), bei der wir ohne wesentliche Einschränkung $B \subset \mathfrak{P} P$ und $I = \in$ annehmen können, charakterisiert genau dann einen affinen Raum, wenn das Quintupel $(P, G, E, \in, \in)$ mit $E = \{b \in B \mid \exists\, g \in B : g \subsetneqq b\}$ und $G = B - E$ den Axiomen des erstgenannten Systems mit P als Punktmenge, G als Geradenmenge und E als Ebenenmenge genügt. Das Unbefriedigende an dieser Antwort ist, daß sie sehr gekünstelt wirkt. Die natürliche Auffassung dieser Situation wäre doch, von mehr als drei Grundbegriffen auszugehen, nämlich von Punkten, Geraden,Ebenen und den zugehörigen Inzidenzen.

Mit Punkten, Geraden und Inzidenzen zwischen solchen kommt man nur aus, wenn man sich auf affine Räume mit einer Ordnung > 2 beschränkt (s.[3], S.53). Für die affinen Räume der Ordnung 2 ist eine solche Beschreibung nicht möglich, weil die Begriffe "Ebene" und "Parallelität" in diesem Fall nicht definierbar sind. Im Fall der Dimension 3 beispielshalber gibt es 30 verschiedene

Parallelitätsrelationen mit denen eine entsprechende Inzidenzstruktur zu einem affinen Raum ergänzt werden könnte. Für die Dimension $d \geq 2$ ergibt sich eine Zahl von $(2^d - 1)! : \prod_{s=0}^{d-1} (2^d - 2^s)$ möglichen Paralletitätsrelationen: Jede Bijektion von einer Menge P mit 2^d Elementen nach $GF(2)^d$ induziert auf A eine Parallelitätsrelation, die Bijektionen $\varphi, \psi : P \to GF(2)^d$ induzieren genau dann die gleiche Parallelitätsrelation, wenn $\psi \circ \varphi^{-1}$ ein affiner Automorphismus von $GF(2)^d$ ist; also ist die Anzahl der möglichen Parallelitätsrelationen gleich der Anzahl der Permutationen von P dividiert durch die Anzahl der affinen Automorphismen von $GF(2)^d$.

Macht man einen Ansatz mit Punkten, Ebenen und Inzidenzen, so gelingt das auch zum Teil [12]; allerdings sind die Einschränkungen noch einschneidender: Offensichtlich kann man damit nur die Räume mit einer Dimension ≥ 3 erhalten, nicht aber die affinen Ebenen.

Auch die Frage, ob man mit Punkten und Parallelität (als vierstelliger Relation auf der Punktmenge) allein auskommt, wurde bereits untersucht ([6], [7]). Nach [11] ist die Kategorie der Parallelogrammräume isomorph zu einer algebraischen Kategorie, der Kategorie der "Kreisel" [10], was für die rechnerische Behandlung große Vorteile bringt. Jeder affine Raum mit einer Dimension ≥ 2 bestimmt einen Parallelogrammraum, aber die affine Struktur, genauer die Kollinearitätsrelation, ist durch den Parallelogrammraum nicht eindeutig festgelegt. Als Beispiel betrachten wir den $\mathbb{R}^2$; die übliche Konstruktion eines affinen Raumes aus einem Vektorraum liefert verschiedene Ergebnisse, wenn wir $\mathbb{R}^2$ einerseits als $\mathbb{R}$ - Vektorraum und andererseits als Q - Vektorraum auffassen. Die zugehörigen Parallelogrammräume hängen aber nur von der additiven Struktur von $\mathbb{R}^2$ ab, sind also isomorph.

Etwas künstlich kann man affine Räume auch mit Hilfe einer dreistelligen Relation beschreiben. Dazu sei P eine Menge und k eine dreistellige Relation auf P, d.h. $k \subset P^3$. Das Paar (P, k) ist ein affiner Raum, wenn gilt:

(1) Existiert zu jedem Paar $(p, q) \in P^2$ mit $p \neq q$ ein $r \in P - \{p,q\}$ mit $(p, q, r) \in k$, so ist $(P, \mathfrak{G})$ ein affiner Raum im Sinne von [3], wobei die Geradenmenge definiert ist durch

$$\mathfrak{G} = \{\{r \in P \mid (p, q, r) \in k\} \mid (p, q) \in P^2, p \neq q\}.$$

(Hierbei erhält man die affinen Räume mit einer Ordnung ≥ 3).

(2) Gibt es dagegen ein $(p, q) \in P^2$ mit $p \neq q$ und $(p, q, r) \notin k$ für alle $r \in P - \{p, q\}$, so ist k eine Abbildung $P \times P \to P$, durch die P mit der Struktur einer abelschen Gruppe versehen wird, in der jedes Element die Ordnung 2 hat. (P wird damit zu einem GF(2)-Vektorraum, dem man in üblicher Weise einen affinen Raum zuordnet; dieser hat die Ordnung 2.)

Sehr nahe einem rein inzidenzgeometrischen Aufbau kommt nun das folgende im Vergleich zum vorigen wesentlich natürlicher erscheinende Axiomensystem, dessen Daten eine Punktmenge P, eine Geradenmenge G und eine dreistellige Relation, genauer eine Abbildung $\underline{p} : P \times G \to G, (p, g) \to pg$, bilden; anschaulich bedeutet "pg" die Parallele zu g durch p. Inzidenz I und Parallelität $\|$ werden definiert

$$I = \{(p,g) \mid pg = g\} \subset P \times G$$
$$\| = \{(g,pg) \mid g \in G \wedge p \in P\} \subset G \times G$$

Zunächst wird ein algebraisches Axiom[1] benötigt

$$\text{(A)} \qquad p(qg) = pg$$

für alle $p, q \in P$ und $g \in G$. Unmittelbare Folgerungen daraus sind (T) und (SPA). Die Reflexivität von $\|$ ist äquivalent dazu, daß jede Gerade mindestens einen Punkt enthält; diese Bedingung zusammen mit (A) impliziert auch die Symmetrie von $\|$. Also ergibt sich der folgende

Satz. $(P, G, I, \|)$ ist genau dann ein affiner Raum, wenn (A), (RG), (VG) und (D) gelten.

Wir fügen noch eine Bemerkung über die zugehörigen Morphismen ein: Ist $(P', G', \underline{p}')$ ein weiteres Tripel aus zwei Mengen und einer Parallelverschiebung, so folgt für ein Paar (f,l) von Abbildungen $f : P \to P'$, $l : G \to G'$ aus der Gültigkeit von

$$l(pg) = (fp)\,(lg)$$

für alle $p \in P$ und $g \in G$ die Erhaltung von Inzidenz und Parallelität. Umgekehrt ergibt sich diese Gleichung aus der Erhaltung von Inzidenz und Parallelität mit Hilfe von (A).

[1] entwickelt von H. Lampert im Zusammenhang mit seiner Staatsexamensarbeit.

Literatur

[1] Mary Katherine Bennett, Coordinatization of affine and projective space, Discrete Math. $\underline{\underline{4}}$, 219 - 231 (1973)

[2] Rudolf Fritsch, Einbettung affiner Räume, Math.-Phys. Semesterber. $\underline{\underline{22}}$, 146 - 157 (1975)

[3] Helmut Karzel - Kay Sörensen - Dirk Windelberg, Einführung in die Geometrie (Studia Mathematica 1), Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1973

[4] Hanfried Lenz, Ein kurzer Weg zur analytischen Geometrie, Math.-Phys. Semesterber. 6, 57 - 67 (1959)

[5] Hanfried Lenz, Grundlagen der Elementarmathematik, 3. überarbeitete Auflage Carl Hanser Verlag, München-Wien 1976

[6] Fritz Ostermann - Jürgen Schmidt, Der baryzentrische Kalkül als axiomatische Grundlage der affinen Geometrie, J. reine angew. Math. 224, 44 - 57 (1966)

[7] Günter Pickert, Affine Räume oder nur Vektorräume, Mitt. Math. Sem. Giessen, 120, 29 - 38 (1976)

[8] Usa Sasaki, Lattice theoretic characterization of an affine geometry of arbitrary dimensions, J. Sci. Hiroshima Univ. 16, 223 - 238 (1952)

[9] Olaf Tamaschke, Projektive Geometrie II mit einer Einführung in die affine Geometrie, B.I. Hochschulskripten 838/a/b, Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich 1972

[10] Gerhard Wolff, "Kreisel", Elem. Math. 31, 141 - 145 (1976)

[11] Gerhard Wolff, Parallelogrammräume und "Kreisel", Mitt. Math. Sem. Giessen, 130, 84-92 (1978)

[12] Oswald Wyler Incidence geometry, Duke Math.J. 20, 601 - 610 (1953)

Fachbereich Mathematik
Universität Konstanz
Postfach 7733
D-7750 Konstanz

Eingegangen 20. Juli 1977