

ABHANDLUNGEN
AUS DEM
MATHEMATISCHEN SEMINAR
DER
UNIVERSITÄT HAMBURG

Herausgegeben von

R. Ansorge · W. Benz · H. Braun · W. Burau · S. S. Chern
L. Collatz · R. Halin · H. Hasse · K. Hinderer · E. Kähler
O. Riemenschneider · B. Schoeneberg
E. Sperner · E. Witt

Schriftleitung

W. Benz · E. Sperner

Band 45



April 1976

VANDENHOECK & RUPRECHT IN GÖTTINGEN

ABHANDLUNGEN

aus dem Mathematischen Seminar
der Universität Hamburg

Herausgegeben von

R. Ansorge · W. Benz · H. Braun · W. Burau · S. S. Chern
L. Collatz · R. Halin · H. Hasse · K. Hinderer · E. Kähler
O. Kraft · O. Riemenschneider · B. Schoeneberg
E. Sperner · E. Witt

Schriftleitung

W. Benz · E. Sperner

Band 45



GÖTTINGEN · VANDENHOECK & RUPRECHT · 1976

BAND 45

Inhalt

H.-J. Arnold, Eine relationstheoretische Algebraisierung angeordneter affiner u. projektiver Geometrien	3
A. Barlotti/G. Nicoletti, On a geometric procedure for the construction of Sperner spaces	251
P. L. Butzer/R. L. Stens, Chebyshev Transform Methods in the Theory of Best Algebraic Approximation	165
W. Degen, Projektive Schiebungen in Räumen ungerader Dimensionen ...	121
L. Dubikajtis, Orientability of affine spaces	256
G. Ewald, Kombinatorische Klassifikation symmetrischer Polytope	191
Ky Fan, Orbits of Semi-Groups of Contractions and Groups of Isometries ..	245
R. Fritsch, Mehrtafelprojektionen in der Inzidenzgeometrie	61
E. Glässner, Ein Translationssatz für berandete Untermannigfaltigkeiten des R^{n+m}	110
V. Havel, Über die Bestimmung eines Gewebeerismorphismus durch das Urbild eines nicht-singulären Punktes	100
H. Hotje, Geometrische Bewertungen in affinen Räumen	82
H. Kühlbrandt, Halbdrehungsebenen u. Fortsetzung von Ordnungsfunktionen auf punktiert-affine Inzidengruppen	68
D. Laugwitz, Euler und das Cauchysche Konvergenzkriterium	91
W. Leißner, n -Inzidenzräume mit Ähnlichkeitsrelation	225
H. Mäurer, Ovoide mit Symmetrien an den Punkten einer Hyperebene ...	237
H. Rund, Bäcklund Transformations Associated with 4-Dimensional Generalized Wave Equations	207
N. K. Stephanidis, Über spezielle Geradenkongruenzen	156
K. Strambach, Liesche Hjelmslevgruppen	134
J. Strommer, Konstruktionen mit dem Zirkel allein in der elliptischen Ebene	96
R. Walter, Some Analytical Properties of Geodesically Convex Sets	263
R. Wille, Über freie Produkte endlicher modularer Verbände	218

Mehrtafelprojektionen in der Inzidenzgeometrie

RUDOLF FRITSCH

Herrn Professor E. SPERNER zum 70. Geburtstag gewidmet

E. SPERNER hat in [S] das Prinzip der Mehrtafelprojektionen: Grundriß, Aufriß und Seitenriß benutzt, um verallgemeinerte affine Räume zu konstruieren. Sein Vorgehen legt es nahe, ein anderes inzidenzgeometrisches Problem mit der gleichen Methode anzupacken: Die Einbettung eines affinen Raumes in einen affinen Raum mit der Codimension 1 unter Benutzung von rein synthetischen Hilfsmitteln, was insbesondere den Verzicht auf die Einführung eines Koordinatenkörpers bedeutet. Ein solches Verfahren ist nicht nur für sich selbst interessant, sondern spielt auch, wie A. FRÖLICHER kürzlich zeigen konnte, eine gewisse Rolle für die synthetische Charakterisierung quasilinear Abbildungen. Diese Aufgabe wurde in [F I] und [F II] unter Bezug auf ein anderes darstellungsgeometrisches Verfahren, nämlich die kotierte Projektion, behandelt. Wir wollen hier nun zeigen, wie man sie von den SPERNERSchen Ideen ausgehend lösen kann.

Unsere affinen Räume sind hierbei desarguessche affine Ebenen und affine Räume im Sinne von H. LENZ [L]. Wir gehen von einem affinen Raum A mit Punktmenge P und Geradenmenge G aus. Die Geraden, also die Elemente von G , sollen Teilmengen von P sein. Als Variable für Punkte und Geraden in A verwenden wir kleine Buchstaben p, q, r, \dots bzw. g, h, k, \dots ¹⁾ in kursiver Antiqua. Die Bestandteile des gesuchten Raumes \mathfrak{A} bezeichnen wir in entsprechender Weise durch Fraktur-Buchstaben. Für die in § 2 zu konstruierende affine Ebene sehen wir schließlich noch Schreibschrift vor.

§ 1. Die Punkte und die Geraden erster Art in \mathfrak{A}

In A wählen wir eine feste Hyperebene Z und eine Parallelprojektion π von A auf Z ; mit z bezeichnen wir die Parallelschar der Geraden, die durch π auf einen Punkt abgebildet werden.

Die Punktmenge \mathfrak{P} von \mathfrak{A} definieren wir durch

$$\mathfrak{P} = \{(p_1, p_2) \in P \times P \mid \pi p_1 = \pi p_2\}.$$

¹⁾ An den Buchstaben können zusätzlich Indizes und sonst übliche Verzierungen wie —, ', ", ... angebracht sein.

Eine Einbettung von A in \mathfrak{A} wird dann zum Beispiel durch die Abbildung $P \rightarrow \mathfrak{P}$, $p \mapsto (p, \pi p)$ geliefert.

Als Geraden erster Art (vgl. [S]) nehmen wir die Elemente von

$$\mathfrak{G}^1 = \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid \pi g_1 = \pi g_2; g_1, g_2 \notin \mathbf{z}\}.$$

Ist $p = (p_1, p_2) \in \mathfrak{P}$, so nennen wir p_1 den Grundriß, p_2 den Aufriß und $\pi p_1 = \pi p_2$ die Spur von p ; analog verwenden wir die Begriffe Grundriß, Aufriß und Spur auch für Geraden erster Art. Nun gilt

Satz 1. *Zwei verschiedene Punkte von \mathfrak{A} lassen sich genau dann durch eine Gerade erster Art verbinden, wenn ihre Spuren verschieden sind. Ist das der Fall, so gibt es genau eine Verbindungsgerade.*

Wir beschränken uns auf den Nachweis der Existenz einer Verbindungsgeraden im Fall zweier Punkte mit verschiedenen Spuren. Dazu sei g_1 die Verbindungsgerade der Grundrisse und g_2 die Verbindungsgerade der Aufrisse. Offensichtlich gilt: $g_1, g_2 \notin \mathbf{z}$; da πg_1 und πg_2 zwei verschiedene Punkte gemeinsam haben, folgt: $\pi g_1 = \pi g_2$. Also ist (g_1, g_2) die gesuchte Verbindungsgerade. q.e.d.

Zwei Geraden erster Art nennen wir parallel, wenn ihre Grundrisse und ihre Aufrisse parallel sind:

$$(g_1, g_2) \parallel (h_1, h_2) \Leftrightarrow g_e \parallel h_e \text{ für } e = 1, 2.$$

Diese Parallelität ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation \mathfrak{G}^1 und auch das starke Parallelenaxiom ist erfüllt, d. h. wir haben den folgenden

Satz 2. *Zu jedem Punkt $p \in \mathfrak{P}$ und jeder Geraden $g \in \mathfrak{G}^1$ gibt es genau eine Gerade \bar{g} in \mathfrak{G}^1 , die p enthält und parallel zu g ist.*

Zum Beweis genügt es zu bemerken, daß die Parallelprojektion π parallele Geraden in parallele Geraden abbildet. q.e.d.

§ 2. Die Konstruktion einer Seitenrißebene

Um nun fortfahren zu können, benötigen wir noch den Seitenriß. Hier wollen wir etwas vom SPERNERSchen Konzept abweichen, in dem wir nicht einen vorgegebenen Raum als Tafel für den Seitenriß benutzen, sondern aus den bisher erarbeiteten Daten eine geeignete Ebene konstruieren.

Dazu führen wir zunächst eine Äquivalenzrelation in \mathfrak{P} ein. Wir nennen zwei Punkte *seitengleich*, wenn sie entweder

(a) gleich sind

oder

(b) verschiedene Spuren haben und Grundriß, Aufriß und Spur der Verbindungsgeraden parallel sind.

Satz 3. Die Seitengleichheit ist eine Äquivalenzrelation auf \mathfrak{P} .

Reflexivität und Symmetrie ergeben sich unmittelbar aus der Definition. Die Transitivität folgt mit Hilfe des kleinen Desargues²⁾. q.e.d.

Mit \mathcal{P} bezeichnen wir die Menge der Äquivalenzklassen von \mathfrak{P} bezüglich der Seitengleichheit und mit $\varrho : \mathfrak{P} \rightarrow \mathcal{P}$ die kanonische Projektion. Das Bild eines Elementes oder einer Teilmenge von \mathfrak{P} bezüglich der Abbildung ϱ nennen wir den Seitenriß dieses Elements bzw. dieser Teilmenge.

Für jeden Punkt p in Z sei nun

$$\mathfrak{M}_p = \{p \in \mathfrak{P} \mid p = \text{Spur } p\}.$$

Dann gilt

Satz 4. Für jeden Punkt p in Z ist die von ϱ induzierte Abbildung $\mathfrak{M}_p \rightarrow \mathcal{P}$ bijektiv.

Die Injektivität ist klar. Die Surjektivität ergibt sich mit Hilfe des Parallelogrammaxioms ([L] Axiom 4b). q.e.d.

In der Menge \mathcal{P} führen wir nun Geraden ein: Eine Teilmenge \mathcal{G} von \mathcal{P} nennen wir Gerade, wenn sie mindestens zwei Punkte enthält und Seitenriß einer Geraden erster Art ist. Bezeichnet nun \mathcal{G} die Menge dieser Geraden, so gilt

Satz 5. $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ ist eine affine (Inzidenz-)Ebene.

Die Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden zweier Punkte ergibt sich durch mehrfache Anwendung von

Hilfssatz 1. p, q^1, q^2 seien Punkte in \mathfrak{A} mit

$$\text{Spur } p \neq \text{Spur } q^e \text{ für } e = 1, 2.$$

Sind q^1 und q^2 seitengleich, so haben pq^1 und pq^2 den gleichen Seitenriß (formal: $\varrho q^1 = \varrho q^2 \Rightarrow \varrho(pq^1) = \varrho(pq^2)$).

Ohne wesentliche Einschränkung können wir annehmen, daß sich pq^1 und pq^2 in Grund- und Aufriß unterscheiden. Dann gibt es auf Grund des Trapezaxioms in \mathfrak{A} zu jedem von $p = (p_1, p_2)$ verschiedenen Punkt $r^1 = (r_1^1, r_2^1)$ auf pq^1 Punkte r_1^2, r_2^2 im Grund- bzw. Aufriß von pq^2 , derart daß die Geraden $r_e^1 r_e^2$ für $e = 1, 2$ parallel zur Spur von $q^1 q^2$ sind. Es bleibt $\pi r_1^2 = \pi r_2^2$ zu zeigen.

Eine leichte Überlegung, bei der der kleine Desargues benutzt wird, führt zur Reduktion des Problems auf die beiden folgenden Spezialfälle:

(a) $p_1 = p_2$

(b) Grund- und Aufriß von pq^e sind zueinander parallel (für $e = 1, 2$).

²⁾ „Desargues“ steht in dieser Arbeit immer zur Abkürzung für „affiner Satz von Desargues“.

Fall (a) wird durch zweifache Anwendung des großen, Fall (b) durch zweifache Anwendung des kleinen Desargues erledigt. Dann ist der Hilfssatz bewiesen.

Der Beweis des ebenen Parallelenaxioms ergibt sich daraus, daß man zu jeder Geraden in \mathcal{G} ein Urbild mit nahezu beliebig vorgeschriebenen Grund- oder Aufriß finden kann, genauer:

Hilfssatz 2. *Sei h_1 eine Gerade in A mit $h_1 \notin z$ und $\pi h_1 \nparallel h_1$ ³⁾. Dann gibt es*

- (a) zu jedem $q \in \mathfrak{P}$ genau ein seitengleiches $p \in \mathfrak{P}$ mit Grundriß auf h_1 ,
 (b) zu jedem $g = (g_1, g_2) \in \mathcal{G}^1$ mit $\pi g_1 \nparallel g_1$ genau ein $h \in \mathcal{G}$ mit Grundriß h_1 und Seitenriß qg .

Zum Beweis von (a) sei $q = (q_1, q_2)$ mit $q_1 \notin h_1$ gegeben. Da Z eine Hyperebene in A ist, schneidet die zu Z parallele Hyperebene durch q_1 die Gerade h_1 in einem Punkt p_1 . Ist nun $q_1 = q_2$, so ist (p_1, p_1) der gesuchte Punkt; andernfalls liefert das Parallelogrammaxiom in A einen Punkt p_2 mit $p_1 p_2 \in z$ und $p_2 q_2 \parallel p_1 q_1$. Dann ist aber (p_1, p_2) ein zu q seitengleicher Punkt in \mathfrak{A} .

Zum Beweis von (b) wählen wir nun verschiedene Punkte q^1 und q^2 auf g . Bei Anwendung des im Beweis von (a) beschriebenen Verfahrens auf q^1 und q^2 erhalten wir verschiedene Punkte p_1^1 und p_1^2 auf h_1 , da sonst auf Grund des kleinen Desargues g_1 parallel zu einer Geraden in Z wäre, und damit auch verschiedene Punkte p^1, p^2 in \mathfrak{A} , die durch eine Gerade erster Art mit den geforderten Eigenschaften verbunden sind.

Zum Nachweis des ebenen Reichhaltigkeitsaxioms wählen wir einen Punkt $p \in P$, der nicht in der Hyperebene Z liegt. Die Punkte $(p, \pi p)$, $(\pi p, p)$ und $(\pi p, \pi p)$ in $\mathfrak{M}_{\pi p}$ sind verschieden und haben nach Satz 4 verschiedene Seitenrisse. Daß diese nicht auf einer Geraden liegen, folgt aus

Hilfssatz 3. *Der Aufriß einer Geraden erster Art mit Seitenriß $q(p, \pi p)$ $q(\pi p, p)$ liegt in Z (ebenso der Grundriß einer Geraden mit Seitenriß $q(\pi p, p)$ $q(p, \pi p)$).*

Seien $q = (q_1, q_2)$ und $r = (r_1, r_2)$ die Punkte einer solchen Geraden mit Seitenriß $q(p, \pi p)$ bzw. $q(\pi p, p)$. Dann muß gelten: $q_2 = \pi p$ oder $\pi(q_2 \pi p) \parallel q_2 \pi p$ und damit $q_2 = \pi q_2$. Also liegt q_2 in Z und entsprechend r_2 . Dann gehört aber auch $q_2 r_2$ zu Z , das ist gerade der in Frage stehende Aufriß.

So ist Satz 5 vollständig bewiesen.

q.e.d.

Nun können wir in \mathfrak{A} die noch fehlenden Geraden zweiter Art einführen. Eine Teilmenge von \mathfrak{P} ist eine Gerade zweiter Art, wenn ihr

³⁾ Diese Voraussetzung besagt, daß h_1 nicht parallel zu einer Geraden in Z ist.

Seitenriß eine Gerade in \mathcal{E} ist und sie ganz in einer Menge der Form \mathfrak{M}_p (für einen Punkt p in Z) liegt; in diesem Fall nennen wir den Punkt p die Spur der betrachteten Geraden zweiter Art. Die Parallelität von Geraden zweiter Art definieren wir durch die Parallelität ihrer Seitenrisse. Bezeichnet nun noch \mathfrak{G}^2 die Menge der Geraden zweiter Art, so ist unmittelbar klar, daß

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}^1 \cup \mathfrak{G}^2)$$

ein verallgemeinerter affiner Raum im Sinne von SPERNER [S] ist.

Wir schließen diesen Paragraphen mit dem etwas technischen, aber für das weitere sehr nützlichen

Hilfssatz 4. *Seien $g \in \mathfrak{G}^1$ und $h \in \mathfrak{G}^2$ Geraden in \mathfrak{A} mit gleichen Seitenrissen, die einen Punkt gemeinsam haben. Sind dann $p \in g$ und $q \in h$ seitengleich mit $p \neq q$, so ist*

$$p q \parallel (\text{Spur } g, \text{Spur } g).$$

Es genügt $\text{Spur } p q = \text{Spur } g$ zu zeigen. Die Existenz eines Schnittpunktes von g und h liefert

$$\text{Spur } q = \text{Spur } h = \text{Spur } (h \cap g) \in \text{Spur } g$$

und daraus folgt die Behauptung, denn trivialerweise gilt auch $\text{Spur } p \in \text{Spur } g$ und $p \neq \text{Spur } q$.

§ 3. Trapez- und Parallelogrammaxiom

Da die Existenz von windschiefen Geraden in dem von uns konstruierten Raum \mathfrak{A} trivial ist, haben wir nur noch die Gültigkeit von Trapez- und Parallelogrammaxiom nachzuweisen ([L] Axiome 4a und 4b). Das Trapezaxiom besagt:

Satz 6. *Sind p, q, r, s verschiedene Punkte und ist $p q \parallel r s$, $t \in p r$, $t \neq p$, so existiert ein Punkt $u \in q t \cap r s$.*

Zum Nachweis unterscheiden wir 5 Fälle:

- (Ta) $p q, r s, p r, q t \in \mathfrak{G}^1$,
- (Tb) $p q, r s, p r \in \mathfrak{G}^1, q t \in \mathfrak{G}^2$,
- (Tc) $p q, r s, q t \in \mathfrak{G}^1, p r \in \mathfrak{G}^2$,
- (Td) $p r, q t \in \mathfrak{G}^1, p q, r s \in \mathfrak{G}^2$,
- (Te) $p q, r s, p r, q t \in \mathfrak{G}^2$.

Ohne wesentliche Einschränkung können wir dabei voraussetzen, daß A eine Ordnung größer-gleich 3 hat.

Das Parallelogrammaxiom besagt

Satz 7. *Bilden die Punkte p, q, r ein Dreieck, so gibt es einen Punkt s mit $qs \parallel pr$ und $rs \parallel pq$.*

Hier behandeln wir 3 Fälle:

(Pa) $pq, qr \in \mathbb{G}^1$,

(Pb) $pq \in \mathbb{G}^1, qr \in \mathbb{G}^2$,

(Pc) $pq, qr \in \mathbb{G}^2$.

(Te) und (Pc) sind trivial, da diese Aussagen in jeder affinen Ebene gelten.

Unter Voraussetzung von (Ta) haben wir u. a. die folgende Figur

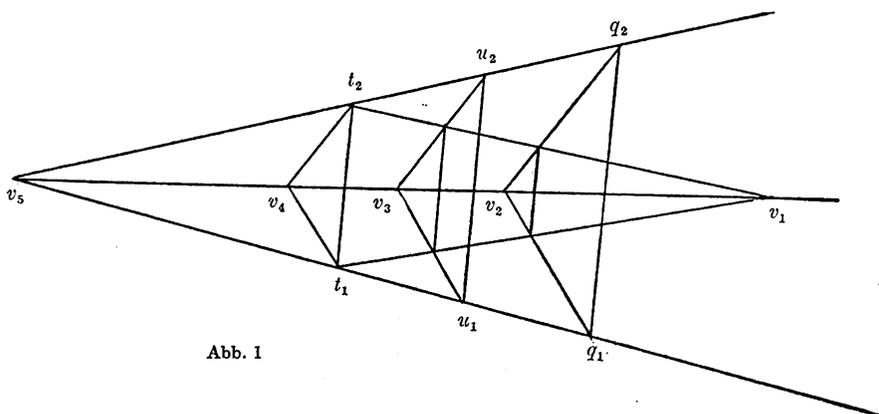


Abb. 1

Die Existenz der Punkte u_e ist für $e = 1, 2$ durch das Trapezaxiom gesichert. Es bleibt $u_1u_2 \in z$ zu zeigen. Der große Desargues liefert der Reihe nach

die Kollinearität von v_1, v_2, v_3 ,

die Kollinearität von v_1, v_2, v_4 , wobei v_4 bestimmt ist durch

$$v_4t_1 \parallel v_3r_1, v_4t_2 \parallel v_3r_2,$$

die Kollinearität von v_2, v_4, v_5 , woraus nun

die Kollinearität von v_3, v_4, v_5 folgt, und schließlich

die Parallelität von u_1u_2 und t_1t_2 .

Zum Beweis im Fall (Tb) wählen wir einen zu p seitengleichen Punkt $p' \neq p$. r' sei der zu r seitengleiche Punkt auf $p't$. Nach (Ta) erhalten wir einen Schnittpunkt u von qt mit der Parallelen zu $p'q$ durch r' . Aus Hilfssatz 4 und dem großen Desargues folgt dann $ru \parallel pq$.

In gleicher Weise verifizieren wir (Tc). Um (Td) zu beweisen, ist es günstig (Pb) zur Verfügung zu haben, was man wiederum am leichtesten mit Hilfe von (Pa) bekommt.

Die in (Pa) genannten Voraussetzungen sind nur im Fall der Ordnung größer-gleich 3 erfüllbar und dann folgt die Behauptung des Parallelogrammaxioms aus den bereits bewiesenen Teilen des Trapezaxioms ([L] § 1, 2. Bemerkung zu den Axiomen⁴).

Damit beweisen wir (Pb): Das Parallelogrammaxiom in A liefert zunächst einen Punkt $\bar{s} \in \mathfrak{A}$ mit $qr \parallel p\bar{s}$ und Spur $\bar{s} = \text{Spur } r$. Zu zeigen bleibt die Parallelität der Geraden pq und $r\bar{s}$, d. h. die Parallelität ihrer Seitenrisse. Liegt Ordnung 2 vor, fallen diese entweder zusammen oder die Seitenrisse der vier in Frage stehenden Punkte sind paarweise verschieden, woraus auch die gewünschte Parallelität folgt. Hat A eine Ordnung größer-gleich 3, so gibt es einen zu p seitengleichen Punkt $p' \neq p$, dessen Spur von den Spuren von q und r verschieden ist. Der bereits bewiesene Teil des Parallelogrammaxioms liefert nun einen Punkt \bar{s}' mit $p'q \parallel r'\bar{s}$ und $p'\bar{s}' \parallel qr$. Aus dem kleinen Desargues folgt dann auch $\bar{s}\bar{s}' \parallel pp'$ und damit die Seitengleichheit von \bar{s} und \bar{s}' . Nach Hilfssatz 1 fallen aber die Seitenrisse von pq und $p'q$, sowie von $r\bar{s}$ und $r\bar{s}'$ zusammen, woraus die Behauptung folgt.

Schließlich ergibt sich (Td) auf die folgende Weise: Das Trapezaxiom in A liefert einen Punkt $u \in qt$ mit Spur $u = \text{Spur } r$. Da wir das Trapezaxiom in der Situation (Tc) bereits als gültig erkannt haben, gibt es einen Punkt q' auf pq mit $uq' \parallel pr$. Auf Grund des Parallelogrammaxioms existiert ein Schnittpunkt von $r\bar{s}$ und uq' . Da dafür nur u in Frage kommt, ist $ru \parallel pq$, also $u \in qt \cap r\bar{s}$. q.e.d.

Literatur

- [F I] RUDOLF FRITSCH, Synthetische Einbettung Desarguesscher Ebenen in Räume, Math.-phys. Semesterber. **21**, 237—249 (1974).
 [F II] RUDOLF FRITSCH, Einbettung affiner Räume, Math.-phys. Semesterber. **22**, 146—157 (1975).
 [L] HANFRIED LENZ, Ein kurzer Weg zur analytischen Geometrie, Math.-phys. Semesterber. **6**, 57—67 (1959).
 [S] EMANUEL SPERNER, Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische Strukturen, J. Reine Angew. Math. **204**, 205—215.

Eingegangen am 17. 4. 1975

⁴) Ein direkter Beweis des Parallelogrammaxioms in der Situation (Pa) — ohne Benutzung des Trapezaxioms — erfordert nur den kleinen Desargues.