

## Die Homöomorphie der geometrischen Realisierungen einer semisimplizialen Menge und ihrer Normalunterteilung

Von

RUDOLF FRITSCH UND DIETER PUPPE

Für eine semisimpliziale Menge (= CSS-Komplex)  $X$  bezeichne  $\text{Sd } X$  die (baryzentrische) Normalunterteilung (vgl. [1] oder [3], 7) und  $|X|$  die geometrische Realisierung ([4] oder [5], §2).  $dX : \text{Sd } X \rightarrow X$  sei die in [3], 7 definierte natürliche semisimpliziale Abbildung.

**Satz.** *Für jede semisimpliziale Menge  $X$  gibt es einen Homöomorphismus  $h : |\text{Sd } X| \rightarrow |X|$ , der zu  $|dX|$  homotop ist.*

Wir behaupten nicht, daß  $h$  in Abhängigkeit von  $X$  eine natürliche Transformation ist. Eine solche gibt es nicht einmal für simpliziale Komplexe: Bezeichnet  $\Delta[q]$  das  $q$ -dimensionale Standardsimplex ([3], 2), so gibt es keine Homöomorphismen  $h_q : |\text{Sd } \Delta[q]| \rightarrow |\Delta[q]|$ ,  $q = 1, 2$ , die mit den beiden surjektiven semisimplizialen Abbildungen  $\Delta[2] \rightarrow \Delta[1]$  verträglich sind.

Die Behauptung des obigen Satzes ist schon in [1] enthalten. Sie ist aber dort nicht bewiesen, da das Lemma 3.1 falsch ist. Unseres Wissens wird der Satz zum ersten Mal in [2] bewiesen, und zwar als Spezialfall eines allgemeineren Ergebnisses über eine ganze Klasse von Unterteilungen. Wir geben hier einen kurzen expliziten Beweis für die Normalunterteilung, der durch [2] angeregt wurde.

In [1] wird eine simpliziale Zerlegung von  $|\text{Sd } X|$  angegeben (Th. 4<sup>1</sup>) und Lemma 4.1). Aus unserem Satz folgt daher

**Korollar.** *Die geometrische Realisierung einer semisimplizialen Menge ist triangulierbar.*

**Beweis des Satzes.** Wir verwenden die Bezeichnungen von [3]. Die monotonen Abbildungen  $\alpha : [q] \rightarrow [p]$  nennen wir auch Operatoren und lassen sie von rechts auf  $X$  wirken. Als geometrische Realisierung von  $\Delta[q]$  und  $\Delta'[q] = \text{Sd } \Delta[q]$  nehmen wir

$$\Delta_q = \{u = (u_0, \dots, u_q) \mid u_i \geq 0 \text{ für alle } i, \sum_{i=0}^q u_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{q+1}.$$

Dann entsteht  $|X|$  aus der topologischen Summe

$$FX = \sum_{q=0}^{\infty} X_q \times \Delta_q$$

<sup>1</sup>) Die Abschätzung von  $\|f(x) - f(y)\|$  auf S. 14 von [1] ist zwar nicht richtig, aber die Stetigkeit dieser Abbildung  $f$  läßt sich unabhängig davon verifizieren.

( $X_q$  diskret) durch die Identifizierungen

$$(y\alpha, u) \sim (y, |\Delta\alpha|u)$$

für alle  $y \in X_p, u \in \Delta_q, \alpha: [q] \rightarrow [p]$  monoton. Entsprechend entsteht  $|\text{Sd } X|$  aus  $FX$  durch

$$(y\alpha, u) \sim (y, |\Delta'\alpha|u).$$

Wir werden nun für jedes  $x \in X_q$  und jedes  $q$  eine stetige Abbildung  $h_x$  von  $\Delta_q$  in sich angeben, so daß gilt:

(A) Ist  $\alpha: [q] \rightarrow [p]$  monoton und  $x = y\alpha$ , so ist das Diagramm

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \Delta_q & \xrightarrow{h_x} & \Delta_q \\ |\Delta'\alpha| \downarrow & & \downarrow |\Delta\alpha| \\ \Delta_p & \xrightarrow{h_y} & \Delta_p \end{array}$$

kommutativ.

(B) Ist  $x$  nicht entartet, so bildet  $h_x$  das Innere

$$\overset{\circ}{\Delta}_q = \{u \mid u \in \Delta_q, u_i > 0 \text{ für alle } i\}$$

von  $\Delta_q$  bijektiv auf sich ab.

Das System  $(h_x)$  liefert eine Selbstabbildung von  $FX$ , die wegen (A) eine stetige Abbildung  $h: |\text{Sd } X| \rightarrow |X|$  induziert. Wegen (B) ist  $h$  bijektiv. Für jedes nicht-entartete  $x$  ist  $h_x$  wegen (B) surjektiv, also eine Identifizierung. Daraus folgt leicht, daß  $h$  ein Homöomorphismus ist.

Um  $|h| \simeq |dX|$  zu zeigen, braucht man nur zu bemerken, daß  $|dX|$  aus den Abbildungen  $d_x = |\delta(q)|: \Delta_q \rightarrow \Delta_q$  (vgl. [3], 2 und 7) ebenso gewonnen wird, wie  $h$  aus  $(h_x)$ . Die Abbildungen

$$(u, t) \longmapsto (1-t)h_x(u) + td_x(u)$$

liefern die gesuchte Homotopie.

**Konstruktion von  $h_x$ .** Jeder Punkt  $u \in \Delta_q = |\Delta'[q]|$  läßt sich in der Form

$$(2) \quad u = \sum_{j=0}^n t_j \langle \mu_j \rangle$$

darstellen. Dabei gilt  $t_j \geq 0, \sum t_j = 1$ , und die  $\mu_j$  sind injektive Operatoren mit dem Ziel  $[q]$ , die ein  $n$ -Simplex  $(\mu_0, \dots, \mu_n)$  von  $\Delta'[q]$  bilden.  $\langle \mu_j \rangle$  bezeichnet den Schwerpunkt der Seite  $|\mu_j| = \text{Bild } |\Delta\mu_j|$  von  $\Delta_q$ . (Das ist zugleich die 0-Zelle, die dem 0-Simplex  $(\mu_j)$  von  $\Delta'[q]$  entspricht.) Durch die Formeln

$$(3) \quad \begin{aligned} x\mu_j &= z_j\varrho_j, \\ \mu_j &= \mu_k\mu_{kj}, & j \leq k, \\ \varrho_k\mu_{kj} &= \overline{\mu}_{kj}\varrho_{kj} \end{aligned}$$

definieren wir injektive Operatoren  $\mu_{kj}, \overline{\mu}_{kj}$ , surjektive Operatoren  $\varrho_j, \varrho_{kj}$  und nicht-entartete Simplex  $z_j$  von  $X$ . Für jeden surjektiven Operator  $\varrho: [p] \rightarrow [r]$  legen wir ein bestimmtes Rechtsinverses  $\hat{\varrho}: [r] \rightarrow [p]$  durch

$$\hat{\varrho}(i) = \text{Max } \varrho^{-1}(i)$$

fest. Nun wird definiert

$$(4) \quad h_x(u) = \sum_{0 \leq j \leq n} t_j (1 - t_n - \dots - t_{j+1}) \langle \mu_j \hat{\varrho}_{jj} \rangle + \sum_{0 \leq j < k \leq n} t_j t_k \langle \mu_j \hat{\varrho}_{kj} \rangle.$$

(Man beachte  $\varrho_{jj} = \varrho_j$ . Für  $j = n$  ist  $(1 - t_n - \dots - t_{j+1}) = 1$  zu setzen.)

Hat man zwei verschiedene Darstellungen von  $u \in \Delta_q$  in der Form (2), so kann man durch folgende Abänderungen und ihre Inversen von der einen zur anderen gelangen:

- (a) Weglassen von  $t_j \langle \mu_j \rangle$ , wenn  $t_j = 0$ .
- (b) Ersetzen von  $t_j \langle \mu_j \rangle + t_{j+1} \langle \mu_{j+1} \rangle$  durch  $(t_j + t_{j+1}) \langle \mu_j \rangle$ , wenn  $\mu_j = \mu_{j+1}$ .

In beiden Fällen ändert sich der Wert auf der rechten Seite von (4) nicht. Also ist  $h_x(u)$  eindeutig definiert. Offenbar ist  $h_x(u) \in \Delta_q$  und die Abbildung  $h_x: \Delta_q \rightarrow \Delta_q$  stetig.

**Beweis von (A).** Sei  $u \in \Delta_q$  durch (2) dargestellt und

$$(\Delta' \alpha)(\mu_0, \dots, \mu_n) = (\nu_0, \dots, \nu_n) \in \Delta' [p].$$

Das bedeutet

$$\alpha \mu_j = \nu_j \tau_j$$

mit gewissen surjektiven Operatoren  $\tau_j$  ( $\nu_j$  injektiv). Wird nun  $\sigma_{kj}$  aus  $y$  und  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$  ebenso gebildet wie  $\varrho_{kj}$  aus  $x$  und  $(\mu_0, \dots, \mu_n)$  gemäß (3), so ergibt sich

$$\varrho_{kj} = \sigma_{kj} \tau_j, \quad j \leq k.$$

Daraus erhält man

$$\alpha \mu_j \hat{\varrho}_{kj} = \alpha \mu_j \hat{\tau}_j \hat{\sigma}_{kj} = \nu_j \hat{\sigma}_{kj}.$$

Insbesondere ist dieser Operator injektiv, und es folgt weiter

$$(5) \quad |\Delta \alpha| \langle \mu_j \hat{\varrho}_{kj} \rangle = \langle \nu_j \hat{\sigma}_{kj} \rangle.$$

Da andererseits

$$|\Delta' \alpha| \sum_{j=0}^n t_j \langle \mu_j \rangle = \sum_{j=0}^n t_j \langle \nu_j \rangle$$

ist, folgt die behauptete Kommutativität von (1) aus (5) und der Tatsache, daß  $|\Delta \alpha|$  linear ist.

**Beweis von (B).** Wir stellen jetzt  $u \in \Delta_q$  so in der Form (2) dar, daß  $n = q$  ist und  $\mu_j$  für jedes  $j$  die Quelle  $[j]$  hat, insbesondere also  $\mu_q$  die Identität von  $[q]$  ist. (Das ist immer möglich, wenn man zuläßt, daß gewisse  $t_j$  verschwinden.) Dann gibt es eine Permutation  $\varphi$  von  $[q]$ , so daß

$$\text{Bild } \mu_j = \{\varphi(0), \dots, \varphi(j)\}.$$

Sei  $x \in X_q$  nicht entartet. Dann sind  $\varrho_{qj}$  und  $\hat{\varrho}_{qj}$  für alle  $j$  gleich der Identität von  $[j]$ . Bezeichnen wir die  $i$ -te Koordinate eines Punktes von  $\mathbb{R}^{q+1}$  (Zählung von 0 bis  $q$ ) immer durch Anhängen von  $i$  als unteren Index, so gilt

$$h_x(u)_i \geq t_q \langle \mu_q \hat{\varrho}_{qq} \rangle_i = \frac{t_q}{q+1}$$

für alle  $i = 0, \dots, q$ . Aus  $u \in \overset{\circ}{\Delta}_q$  folgt  $t_q > 0$ , also auch  $h_x(u) \in \overset{\circ}{\Delta}_q$ .

Um zu zeigen, daß  $h_x$  in  $\overset{\circ}{\Delta}_q$  injektiv ist, betrachten wir  $u, u' \in \overset{\circ}{\Delta}_q$ . Alle für  $u$  durchgeführten Konstruktionen wenden wir entsprechend auf  $u'$  an und unterscheiden sie durch einen Strich. Sei  $h_x(u) = h_x(u')$ . Wir müssen  $u = u'$  nachweisen. Es ist

$$\langle \mu_j \hat{\varrho}_{kj} \rangle_i = 0 \quad \text{für } i \notin \text{Bild } \mu_j.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{t_q}{q+1} = h_x(u)_{\varphi(q)} = h_x(u')_{\varphi(q)} \geq \frac{t'_q}{q+1},$$

also  $t_q \geq t'_q$  und aus Symmetriegründen  $t_q = t'_q$ . In ähnlicher Weise zeigen wir durch absteigende Induktion über  $j = q, \dots, 0$ :

$$(C_j): \text{Entweder gilt } t_j = t'_j = 0, \text{ oder es ist } \mu_j = \mu'_j \text{ und } t_j = t'_j.$$

Beweis.  $(C_q)$  haben wir eben bewiesen. Sei  $l < q$  und  $(C_j)$  richtig für alle  $j > l$ . Dann ist der Ausdruck

$$T = \sum_{0 \leq j \leq l} t_j (1 - t_n - \dots - t_{j+1}) \langle \mu_j \hat{\varrho}_{jj} \rangle + \sum_{\substack{0 \leq j \leq l \\ j < k \leq q}} t_j t_k \langle \mu_j \hat{\varrho}_{kj} \rangle$$

(der aus der rechten Seite von (4) entsteht, indem man alle Summanden mit  $j > l$  wegläßt) gleich dem entsprechenden  $T'$  für  $u'$ .

Ist  $\mu_l \neq \mu'_l$ , so gibt es ein  $i \in \text{Bild } \mu_l$ , das nicht in  $\text{Bild } \mu'_l$  liegt. Dann ist

$$\frac{t_l t_q}{l+1} = t_l t_q \langle \mu_l \hat{\varrho}_{ql} \rangle_i \leq T_i = T'_i = 0,$$

denn die  $i$ -te Komponente aller in  $T'$  vorkommenden Summanden verschwindet. Also ist  $t_l = 0$  und aus Symmetriegründen  $t'_l = 0$ .

Gilt dagegen  $\mu_l = \mu'_l$ , so ist der Ausdruck

$$S = (1 - t_n - \dots - t_{l+1}) \langle \mu_l \hat{\varrho}_{ll} \rangle + \sum_{l < k \leq q} t_k \langle \mu_l \hat{\varrho}_{kl} \rangle$$

gleich dem entsprechenden  $S'$  für  $u'$  (nach Induktionsvoraussetzung). Für  $i = \varphi(l)$  gilt ferner

$$t_l \cdot S_i = T_i = T'_i \geq t'_l \cdot S'_i = t'_l \cdot S_i \quad \text{und} \quad S_i \geq \frac{t_q}{l+1} > 0.$$

Also ist  $t_l \geq t'_l$  und aus Symmetriegründen  $t_l = t'_l$ .

Damit ist  $(C_j)$  bewiesen.  $(C_j)$  gilt also für alle  $j = q, \dots, 0$ , und daraus folgt unmittelbar  $u = u'$ .

Daß  $h_x(\overset{\circ}{\Delta}_q) = \overset{\circ}{\Delta}_q$  ist, ergibt sich nun automatisch: Nach dem Satz von der Gebietsinvarianz ist  $h_x(\overset{\circ}{\Delta}_q)$  offen in  $\overset{\circ}{\Delta}_q$ . Wegen  $h_x(\overset{\circ}{\Delta}_q) = \overset{\circ}{\Delta}_q \cap h_x(\Delta_q)$  ist es aber auch abgeschlossen. Da es nicht leer ist, muß es gleich  $\overset{\circ}{\Delta}_q$  sein.

**Bemerkung.** Sei  $f_x: \Delta[q] \rightarrow X$  diejenige semisimpliziale Abbildung, die die Identität von  $[q]$  in  $x \in X_q$  überführt. Der Zusammenhang zwischen  $h_x$  und  $h$  im obigen Beweis wird auch durch die Kommutativität von

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} \Delta_q & \xrightarrow{h_x} & \Delta_q \\ | \text{sd } f_x | \downarrow & & \downarrow | f_x | \\ | \text{Sd } X | & \xrightarrow{h} & | X | \end{array}$$

charakterisiert. Bei uns ist  $h_x(u)$  eine *quadratische* Funktion der Koordinaten  $t_j$  in der Darstellung (2). Früher wurde versucht, eine in den  $t_j$  *lineare*<sup>2)</sup> Abbildung  $h_x$  für alle  $x$  oder wenigstens für alle nicht-entarteten Simplizes  $x$  von  $X$  so zu konstruieren, daß durch (6) ein Homöomorphismus  $h$  definiert wird. Das ist nicht möglich, wie folgendes Beispiel zeigt:

$X$  entstehe aus  $\Delta[4]$  durch die Identifizierungen

$$(7) \quad (0, 1, 2, 3) \sim (0, 2, 3)\eta_0,$$

$$(8) \quad (0, 1, 2, 4) \sim (0, 2, 4)\eta_1.$$

Dabei steht  $(\alpha(0), \dots, \alpha(p))$  für den Operator  $\alpha: [p] \rightarrow [4]$  und  $\eta_i: [p+1] \rightarrow [p]$  sind die üblichen Ausartungsoperatoren. Der Kürze halber schreiben wir  $m_{i_0 \dots i_p}$  für  $\langle (i_0, \dots, i_p) \rangle$  und  $z$  für das Bild von  $(0, 1, 2, 3, 4)$  in  $X_4$ . Angenommen, es gibt einen Homöomorphismus  $h$  und zu jedem nicht-entarteten Simplex  $x$  von  $X$  eine in den  $t_j$  lineare Abbildung  $h_x$ , so daß (6) kommutativ ist. Dann muß  $h_z$  jede Seite von  $\Delta_4$  in sich abbilden (Verträglichkeit mit allen  $h_x$ ). Ferner muß der Schwerpunkt jeder Seite in einen inneren Punkt dieser Seite übergehen (sonst könnte man unter Verwendung der Verbindungsstrecken mit  $m_{01234}$  zeigen, daß  $h_z$  in  $\overset{\circ}{\Delta}_4$  nicht topologisch ist). Für alle  $0 \leq t < 1$  gilt

$$|\Delta\eta_0| h_z((1-t)m_{0123} + tm_{012}) = |\Delta\eta_0| h_z((1-t)m_{023} + tm_{02})$$

(wegen (7) und weil  $(0, 2, 3)$  nicht entartet). Durch Grenzübergang  $t \rightarrow 1$  folgt

$$(9) \quad |\Delta\eta_0| h_z(m_{012}) = |\Delta\eta_0| h_z(m_{02}).$$

Analog erhält man aus (8)

$$(10) \quad |\Delta\eta_1| h_z(m_{012}) = |\Delta\eta_1| h_z(m_{02}).$$

Die rechten Seiten von (9) und (10) sind gleich. Da  $h_z(m_{012})$  ein innerer Punkt der Seite  $|(0, 1, 2)|$  ist, können die linken Seiten nicht gleich sein. Das widerlegt unsere Annahme.

#### Literaturverzeichnis

- [1] M. G. BARRATT, Simplicial and semisimplicial complexes. Vervielfältigtes Manuskript, Princeton 1956.
- [2] R. FRITSCH, Zur Unterteilung semisimplizialer Mengen. Erscheint voraussichtlich als Dissertation, Saarbrücken 1967.
- [3] D. M. KAN, On c. s. s. complexes. Amer. J. Math. **79**, 449—476 (1957).
- [4] J. MILNOR, The geometric realization of a semi-simplicial complex. Ann. of Math., II. Ser. **65**, 357—362 (1957).
- [5] D. PUPPE, Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen. I. Math. Z. **68**, 367—406 (1958).

Eingegangen am 15. 6. 1967

Anschrift der Autoren:

Rudolf Fritsch

Dieter Puppe

Mathematisches Institut

Universität des Saarlandes

66 Saarbrücken 15

<sup>2)</sup> d. h.  $h_x$  ist affin auf jedem (geometrischen) Simplex der barzyentrischen Unterteilung von  $\Delta_q$ .