Ein Ordinalzahlensystem für die beweistheoretische Abgrenzung der Π^1_2-Separation und Bar-Induktion

Von **Wilfried Buchholz** und **Kurt Schütte** in München

In der vorliegenden Arbeit wird ein Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen entwickelt, das in einer späteren Arbeit für die beweistheoretische Abgrenzung eines Teilsystems der klassischen Analysis mit Π^1_2-Separation und Bar-Induktion gebraucht wird. Anstelle der θ-Funktionen, auf denen das in [1] behandelte Ordinalzahl-Bezeichnungssystem beruht, wurden in [2] ψ-Funktionen eingeführt, mit denen sich in einfacherer Weise ebenso starke Ordinalzahlsysteme wie mit den θ-Funktionen definieren lassen. Die vorliegende Arbeit liefert eine Erweiterung und Verschärfung des in [2] behandelten Bezeichnungssystems und der dort definierten Kollabierungsfunktionen.

Wir gehen aus von der klassischen Ordinalzahlentheorie, wie sie etwa im Axiomensystem *ZF-C* von Zermelo und Fraenkel mit Auswahlaxiom fixiert ist, wobei wir zusätzlich die Existenz einer kleinsten schwach unerreichbaren Ordinalzahl I voraussetzen. Tatsächlich kann I allerdings auch als die kleinste konstruktiv unerreichbare Ordinalzahl aufgefaßt werden, deren Existenz in *ZF-C* beweisbar ist.

Im Rahmen der klassischen Ordinalzahlentheorie, deren hier gebrauchte Grundbegriffe in § 1 angegeben sind, werden in den §§ 2 und 3 die ψ-Funktionen definiert und ihre Grundeigenschaften bewiesen. Auf der Grundlage dieser ψ-Funktionen wird in § 4 ein konstruktives Ordinalzahl-Bezeichnungssystem $T(I)$ definiert. Die §§ 5 und 6 liefern konstruktive Berechnungsverfahren für die Ordinalzahlen des System $T(I)$. Die für beweistheoretische Untersuchungen benötigten Kollabierungsfunktionen und die hierauf beruhenden Ordnungsrelationen $\leqslant_\tau$ werden in den §§ 7 bis 9 entwickelt. Die ebenfalls in der Beweistheorie gebrauchten Herleitungsfunktionen werden in § 10 bereitgestellt.

§ 1. Grundbegriffe

Die kleinen griechischen Buchstaben α, β, γ, δ, η, ξ (auch mit Indizes) bezeichnen im folgenden immer Ordinalzahlen, Die Addition von Ordinalzahlen sei in üblicher Weise definiert.

P sei die Klasse der *additiven Hauptzahlen*, d.h. es sei $\alpha \in P$ genau dann, wenn $\alpha \neq 0$ ist und $\eta + \alpha = \alpha$ für alle $\eta < \alpha$ gilt.

$\alpha \mapsto \omega^\alpha$ sei die Ordnungsfunktion von P. Dann gilt:

Lemma 1.1.

a) $\omega^\alpha \in P$
b) Zu $\beta \in P$ gibt es eindeutig α mit $\omega^\alpha = \beta$.
c) $\alpha < \beta \Rightarrow \omega^\alpha < \omega^\beta$
d) $\alpha \leq \omega^\alpha$
e) $\omega^0 = 1$, $\omega^1 = \omega$.
f) Ist α eine Limeszahl, so ist $\omega^\alpha = \sup\{\omega^\eta : \eta < \alpha\}$.

Eine Ordinalzahl α heißt eine *ε-Zahl*, wenn $\omega^\alpha = \alpha$ ist. E sei die Klasse der ε-Zahlen, $\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha$ die Ordnungsfunktion vom E.

$\gamma =_{\mathrm{NF}} \omega^\alpha + \beta$ (γ hat die Normalform $\omega^\alpha + \beta$) bedeute, daß $\gamma = \omega^\alpha + \beta$ mit $\alpha < \gamma$ und $\beta < \gamma$ ist. Dann gilt:

Lemma 1.2.

a) Gilt $\gamma =_{\mathrm{NF}} \omega^\alpha + \beta$, so sind α und β eindeutig durch γ bestimmt.
b) Zu γ gibt es α und β mit $\gamma =_{\mathrm{NF}} \omega^\alpha + \beta$ genau dann, wenn $0 < \gamma \notin E$ ist.

Induktive Definition des *Endgliedes* $e(\gamma)$ von γ.

1. Für $\gamma \in \{0\} \cup P$ sei $e(\gamma) := \gamma$.
2. Für $\gamma =_{\mathrm{NF}} \omega^\alpha + \beta$ mit $\beta \neq 0$ sei $e(\gamma) := e(\beta)$.

Folgerungen:

Zu γ gibt es γ_0 mit $\gamma = \gamma_0 + e(\gamma)$.
Ist $\gamma \neq 0$, so ist $e(\gamma) \in P$.

Lemma 1.3.

a) $\alpha < \gamma$, $\beta < e(\gamma) \Rightarrow \alpha + \beta < \gamma$
b) $\alpha < \beta + \gamma$, $\gamma < e(\alpha) \Rightarrow \alpha \leq \beta$

Beweis. a) Man hat $\gamma > 0$, also $\gamma = \gamma_0 + e(\gamma)$ mit $e(\gamma) \in P$. Ist $\alpha \leq \gamma_0$, so folgt $\alpha + \beta \leq \gamma_0 + \beta < \gamma_0 + e(\gamma) = \gamma$. Andernfalls hat man $\alpha = \gamma_0 + \alpha_0$ mit $\alpha_0 < e(\gamma)$. Da auch $\beta < e(\gamma)$ und $e(\gamma) \in P$ ist, folgt $\alpha_0 + \beta < \alpha_0 + e(\gamma) = e(\gamma)$, also $\alpha + \beta = \gamma_0 + \alpha_0 + \beta < \gamma_0 + e(\gamma) = \gamma$.

b) Wäre $\beta < \alpha$, so würde mit $\gamma < e(\alpha)$ nach a) $\beta + \gamma < \alpha$ folgen im Widerspruch zur Voraussetzung.

R sei die Klasse der *regulären Ordinalzahlen* $> \omega$. $\bar{R}$ sei der Abschluß von R bezüglich Limesbildung.

Folgerung: $R \subset \bar{R} \subset E \subset P$

Definitionen.

$\alpha^- := \sup \{\eta \in R : \eta < \alpha\}$
$S\alpha := \sup \{\eta \in R : \eta \leq \alpha\}$
$\alpha^+ := \min \{\eta \in R : \alpha < \eta\}$
$I := \min \{\eta \in R : \eta^- = \eta\}$
Dann gilt folgendes:

Lemma 1.4.

a) $\alpha^-, S\alpha \in \{0\} \cup \bar{R}$
b) $S\alpha \leq \alpha < \alpha^+ = (S\alpha)^+ \in R$
c) $S\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \{0\} \cup \bar{R}$
d) $\alpha \in \{0\} \cup \bar{R} \Rightarrow (\alpha^+)^- = \alpha$
e) $I > \alpha \in R \Rightarrow (\alpha^-)^+ = \alpha$
f) $I > \alpha \in \{0\} \cup \bar{R} \Rightarrow (\alpha \in R \Leftrightarrow \alpha^- < \alpha)$

Induktive Definition von $q\gamma$ und $r\gamma$.

1. Für $\gamma < I$ sei $q\gamma := 0$ und $r\gamma := \gamma$.
2. Für $I \leq \gamma =_{\mathrm{NF}} \omega^\alpha + \beta$ sei $q\gamma := \omega^\alpha + q\beta$ und $r\gamma := r\beta$.
3. Für $I \leq \gamma \in E$ sei $q\gamma := \gamma$ und $r\gamma := 0$.

Folgerungen:

$\gamma = q\gamma + r\gamma$ mit $r\gamma < I$.
Ist $\gamma \geq I$, so ist $e(q\gamma) \geq I$.

Lemma 1.5. $\alpha < \gamma, \beta < I, r\gamma = 0 \Rightarrow \alpha + \beta < \gamma$

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt $\beta < I \leq e(\gamma)$. Nach Lemma 1.3 a) folgt die Behauptung.

Eine Ordinalzahl α heiße eine *Anfangszahl*, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha \in \bar{R}$ ist. $\alpha \mapsto \Omega_\alpha$ sei die Ordnungsfunktion der Klasse $\{0\} \cup \bar{R}$ der Anfangszahlen. Dann gilt:

Lemma 1.6.

a) $\Omega_\alpha \in \{0\} \cup \bar{R}$, also $S(\Omega_\alpha) = \Omega_\alpha$.
b) Zu $\beta \in \{0\} \cup \bar{R}$ gibt es eindeutig α mit $\Omega_\alpha = \beta$.
c) $\alpha < \beta \Rightarrow \Omega_\alpha < \Omega_\beta$
d) $\alpha \leq \Omega_\alpha$
e) $\Omega_0 = 0$, $\Omega_I = I$.
f) $\alpha < I \Leftrightarrow \Omega_\alpha < I$
g) Für $\alpha < I$ ist $\Omega_\alpha \in R$ genau dann, wenn es α_0 mit $\alpha = \alpha_0 + 1$ gibt.
h) Ist α eine Limeszahl, so ist $\Omega_\alpha = \sup\{\Omega_\eta : \eta < \alpha\}$.

§ 2. Die Ordinalzahlen $\Psi\alpha$

Induktive Definition der Ordinalzahlenmengen $C^n(\alpha)$ $(n < \omega)$ und $C(\alpha)$ und der Ordinalzahl $\Psi\alpha$ (durch Hauptinduktion nach α und Nebeninduktion nach n).

(C1) $0, I \in C^n(\alpha)$
(C2) $\gamma =_{\mathrm{NF}} \omega^\xi + \eta;\quad \xi, \eta \in C^n(\alpha) \Rightarrow \gamma \in C^{n+1}(\alpha)$
(C3) $S\gamma < \gamma < I;\quad S\gamma \in C^n(\alpha) \Rightarrow \gamma \in C^{n+1}(\alpha)$
(C4) $\beta < \alpha;\quad \beta \in C^n(\alpha) \Rightarrow \Psi\beta \in C^{n+1}(\alpha)$
(C5) $C(\alpha) := \cup\{C^n(\alpha) : n < \omega\}$
(C6) $\Psi\alpha = \min\{\eta : \eta \notin C(\alpha)\}$

Folgerung: $m < n < \omega \Rightarrow C^m(\alpha) \subseteq C^n(\alpha)$

Lemma 2.1. $\alpha < \beta \Rightarrow C(\alpha) \subseteq C(\beta)$, $\Psi\alpha \leq \Psi\beta$

Dies folgt unmittelbar aus den Definitionsregeln.

Lemma 2.2. $0 < \Psi\alpha < I$

Beweis. Aus (C1), (C5) und (C6) folgt $0 < \Psi\alpha$. Durch Induktion nach n ergibt sich, daß $C^n(\alpha)$ eine Mächtigkeit $< I$ hat. Dann hat aufgrund der Regularität von I auch $C\alpha)$ eine Mächtigkeit $< I$. Nach (C6) folgt $\Psi\alpha < I$.

Lemma 2.3. $\Psi\alpha \in \bar{R}$

Beweis. Wäre $\Psi\alpha \notin \bar{R}$, so hätte man nach Lemma 2.2 $S(\Psi\alpha) < \Psi\alpha < I$. Dann wäre nach $(C6)$ $S(\Psi\alpha) \in C\alpha)$ und nach $(C3)$ $\Psi\alpha \in C\alpha)$ im Widerspruch zu $(C6)$.

Lemma 2.4. $\gamma \in C^n(\alpha)$, $\gamma < I \Rightarrow \gamma < \Psi\alpha$

Beweis durch Induktion nach n.

1. $\gamma \in C^n(\alpha)$ gelte nach $(C1)$. *Dann ist* $\gamma = 0 < \Psi\alpha$.
2. $\gamma \in C^n(\alpha)$ gelte nach $(C2)$ oder $(C3)$. Dann folgt die Behauptung aus der I.V. (Induktions-Voraussetzung), da nach Lemma 2.3 $\Psi\alpha \in \bar{R} \in E$ ist.
3. $\gamma \in C^n(\alpha)$ gelte nach $(C4)$. Dann hat man $\gamma = \Psi\beta$ mit $\beta < \alpha$. Nach Lemma 2.1 folgt $\gamma \leq \Psi\alpha$. Da $\Psi\alpha \notin C(\alpha)$ ist, folgt $\gamma < \Psi\alpha$.

Corollar 2.4. Die Menge derjenigen Elemente von $C(\alpha)$, die $< I$ sind, ist gleich dem Abschnitt aller Ordinalzahlen $< \Psi\alpha$.

Beweis. Dies folgt aus $(C6)$ und Lemma 2.4.

Lemma 2.5.

a) $\beta < \gamma < I,\ \gamma \in C(\alpha) \Rightarrow \beta \in C(\alpha)$
b) $\gamma =_{NF} \omega^{\xi} + \eta \in C(\alpha) \Rightarrow \xi, \eta \in C(\alpha)$

Beweis. a) folgt aus Corollar 2.4.
b) folgt im Fall $\gamma < I$ aus a). Andernfalls kann $\gamma =_{NF} \omega^{\xi} + \eta \in C(\alpha)$ nur nach $(C2)$ gelten, also nur mit $\xi, \eta \in C(\alpha)$.

Lemma 2.6.

a) $\alpha < \beta,\ \alpha \in C(\beta) \Rightarrow \Psi\alpha < \Psi\beta$
b) $\alpha, \beta \in C(\alpha) \cup C(\beta),\ \Psi\alpha = \Psi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

Beweis. a) Aus $\alpha < \beta$ und $\alpha \in C(\beta)$ folgt nach $(C4)$ $\Psi\alpha \in C(\beta)$. Nach den Lemmata 2.2 und 2.4 folgt $\Psi\alpha < \Psi\beta$.
b) Wäre $\alpha < \beta$, so würde aus $\alpha \in C(\alpha) \cup C(\beta)$ nach Lemma 2.1 $\alpha \in C(\beta)$ und nach a) $\Psi\alpha < \Psi\beta$ folgen. Ebenso führt die Annahme $\beta < \alpha$ zum Widerspruch zur Voraussetzung $\Psi\alpha = \Psi\beta$.

Lemma 2.7. Ist $\alpha < \beta$ und gibt es kein $\delta \in C(\alpha)$ mit $\alpha \leq \delta < \beta$, so gilt: $\gamma \in C^n(\beta) \Rightarrow \gamma \in C(\alpha)$.
Beweis durch Induktion nach n.

1. $\gamma \in C^n(\beta)$ gelte nach $(C1)$. Dann gilt auch $\gamma \in C(\alpha)$.

2. $\gamma \in C^n(\beta)$ gelte nach $(C2)$ oder $(C3)$. Dann folgt die Behauptung aus der I.V.

3. $\gamma \in C^n(\beta)$ gelte nach $(C4)$. Dann hat man $\gamma = \Psi\delta$ mit $\delta < \beta$ und nach I.V. $\delta \in C\alpha)$. Daher kann nach Voraussetzung nicht $\alpha \leq \delta < \beta$ sein. Da $\delta < \beta$ ist, folgt $\delta < \alpha$. Nach $(C4)$ folgt $\gamma = \Psi\delta \in C(\alpha)$.

Lemma 2.8. Ist $\beta = \min\{\eta : \alpha \leq \eta \in C(\alpha)\}$, so ist $C(\alpha) = C(\beta)$, also $\Psi\alpha = \Psi\beta$ und $\beta \in C(\beta)$.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt nach Lemma 2.1 $C(\alpha) \subseteq C(\beta)$ und nach Lemma 2.7 $C(\beta) \subseteq C(\alpha)$.

Lemma 2.9. Ist $\gamma \in C^n(\alpha)$, so gibt es $\delta = \min\{\eta : \gamma \leq \eta \in C(\beta)\}$ mit $\delta \in C^n(\alpha)$.

Beweis durch Induktion nach n.

1. Es sei $\gamma \leq I$. Ist $\gamma \in C(\beta)$, so gilt die Behauptung für $\delta = \gamma$. Andernfalls gilt sie aufgrund von Corollar 2.4 für $\delta = I$.

2. Es sei $I < \gamma$. Dann kann $\gamma \in C^n(\alpha)$ nur nach $(C2)$ gelten.

Man hat also $n > 0$ und $\gamma =_{\mathrm{NF}} \omega^{\gamma_1} + \gamma_2$ mit $\gamma_1, \gamma_2 \in C^{n-1}(\alpha)$. Für $i = 1, 2$ gibt es nach I.V. $\delta_i = \min\{\eta : \gamma_i \leq \eta \in C(\beta)\}$ mit $\delta_i \in C^{n-1}(\alpha)$. Ist $\gamma_l \in C(\beta)$, so gilt die Behauptung für $\delta =_{\mathrm{NF}} \omega^{\gamma_1} + \delta_2$. Andernfalls gilt sie für $\delta = \omega^{\delta_1}$.

Lemma 2.10. Gilt $\gamma \in C(\alpha)$ nach $(C4)$, so gibt es genau ein $\beta < \alpha$ mit $\gamma = \Psi\beta$ und $\beta \in C(\beta)$.

Beweis. Aufgrund der Voraussetzung hat man $\gamma = \Psi\beta_0$ mit $\beta_0 < \alpha$ und $\beta_0 \in C(\alpha)$. Dann gibt es nach Lemma 2.9 $\beta = \min\{\eta : \beta_0 \leq \eta \in C(\beta_0)\}$. Nach Lemma 2.8 folgt $C(\beta_0) = C(\beta)$, $\gamma = \Psi\beta$ und $\beta \in C(\beta)$. Nach Lemma 2.6 b) ist β eindeutig durch γ bestimmt. Ist $\beta_0 = \beta$, so hat man $\beta < \alpha$. Andernfalls ist $\beta_0 \notin C(\beta_0)$, also $\beta_0 \notin C(\beta)$. Da $\beta_0 \in C(\alpha)$ ist, folgt auch in diesem Fall $\beta < \alpha$.

Lemma 2.11. $\beta \in C(\beta)$, $\gamma < \Psi(\beta + I) \Rightarrow \beta + \gamma \in C(\beta + \gamma)$

Beweis. Aus $\gamma < \Psi(\beta + I)$ folgt $I > \gamma \in C(\beta + I)$. Angenommen, es sei $\gamma \notin C(\beta + \gamma)$. Dann ist $C(\beta + \gamma) \neq C(\beta + I)$. Folglich gibt es nach Lemma 2.7 $\delta \in C(\beta + \gamma)$ mit $\beta + \gamma \leq \delta < \beta + I$. Es folgt $\delta = \beta + \delta_0$ mit $\gamma \leq \delta_0 < I$ und $\delta_0 \in C\beta + \gamma)$ Nach Lemma 2.5 a) folgt $\gamma \in C(\beta + \gamma)$. Mit $\beta \in C(\beta) \subseteq C(\beta + \gamma)$ folgt $\beta + \gamma \in C(\beta + \gamma)$.

Lemma 2.12. $\alpha \in C(\alpha),\ \beta \leq r\alpha \Rightarrow q\alpha + \beta \in C(q\alpha + \beta)$

Beweis. Aus $\alpha \in C(\alpha)$ folgt $q\alpha \in C(\alpha)$. Angenommen, es sei $q\alpha \notin C(q\alpha)$. Dann ist $C(q\alpha) \neq C(\alpha)$. Folglich gibt es nach Lemma 2.7 $\delta \in C(q\alpha)$ mit $q\alpha \leq \delta < \alpha$. Es folgt $q\delta \in C(q\alpha)$ und $q\alpha = q\delta$. Man hat also

(1) $\quad q\alpha \in C(q\alpha)$

Aus $\alpha \in C(\alpha)$ folgt auch $r\alpha \ \in C\alpha)$. Nach Lemma 2.4 folgt $r\alpha < \Psi\alpha$. Da $\beta \leq r\alpha$ und $\alpha < q\alpha + I$ ist, folgt

(2) $\quad \beta < \Psi(q\alpha + I)$.

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung $q\alpha + \beta \in C(q\alpha + \beta)$ nach Lemma 2.11.

Lemma 2.13. $\alpha < \Psi I \Rightarrow \alpha \in C(\alpha),\ 1 + \alpha < \Psi\alpha = \Omega_{1+\alpha}$

Beweis. Aus $\alpha < \Psi I$ folgt nach Lemma 2.11 (für $\beta = 0$ und $\gamma = \alpha$) $\alpha \in C(\alpha)$. Durch Induktion nach α folgt $\Psi\alpha = \Omega_{1+\alpha}$. Aus $I > \alpha \in C(\alpha)$ folgt nach Lemma 2.4 $\alpha < \Psi\alpha$. Dann ist auch $1 + \alpha < \Psi\alpha$.

Lemma 2.14. $\Psi I \leq \alpha \in C(\alpha) \Rightarrow I \leq \alpha,\ \Psi\alpha = \Omega_{\psi(q\alpha)+r\alpha}$

Beweis. Wäre $\alpha < I$, so würde aus $\alpha \in C(\alpha)$ nach den Lemmata 2.4 und 2.1 $\alpha < \Psi\alpha < \Psi I$ folgen. Im vorliegenden Fall ist also $I \leq \alpha$. Dann ist $q\alpha$ eine Limeszahl. Da $\Psi(q\alpha) \in \bar{R}$ ist, gibt es η mit $\Psi(q\alpha) = \Omega_\eta$. Angenommen, es sei $\eta < \Omega_\eta$. Dann hat man $S\eta < \Psi(q\alpha)$, folglich $S\eta \in C(q\alpha)$. Dies kann nur nach (C1) oder (C4) gelten. Man hat also entweder $S\eta = 0$ oder nach Lemma 2.10 $S\eta = \Psi\delta$ mit $\delta < q\alpha$ und $\delta \in C(\delta)$. Im ersten Fall sei $\beta = 0$, im zweiten Fall $\beta = \delta + 1$. Dann ist in jedem Fall $\eta < \eta^+ = \Psi\beta$ mit $\beta \in C(\beta)$. Da $q\alpha$ eine Limeszahl ist, ist auch $\beta < q\alpha$. Für alle $\gamma \leq \Psi\beta$ hat man $\gamma < \Psi(\beta + I)$ und nach Lemma 2.11 $\beta + \gamma \in C(\beta + \gamma)$. Durch Induktion nach γ folgt $\Omega_\gamma \leq \Psi(\beta + \gamma)$ für alle $\gamma \leq \Psi\beta$, also insbesondere $\Omega_{\psi\beta} \leq \Psi(\beta + \Psi\beta)$. Aus $\beta < q\alpha$, $\Psi\beta < I$ und $r(q\alpha) = 0$ folgt nach Lemma 1.5 $\beta + \Psi\beta < q\alpha$. Hiermit ergibt sich

$$\Omega_{\psi\beta} \leq \Psi(\beta + \Psi\beta) < \Psi(q\alpha) = \Omega_\eta$$

im Widerspruch zu $\eta < \Psi\beta$. Somit ist $\eta = \Omega_\eta$. Es folgt

(1) $\quad \Psi(q\alpha) = \Omega_{\psi(q\alpha)}$

Aus $\alpha \in C(\alpha)$ folgt nach Lemma 2.12

(2) $\quad q\alpha + \beta \in C(q\alpha + \beta) \quad$ für alle $\beta \leq r\alpha$.

Aus (1) und (2) folgt durch Induktion nach β

$$\Psi(q\alpha + \beta) = \Omega_{\psi(q\alpha)+\beta} \quad \text{für alle } \beta \leq r\alpha,$$

also insbesondere $\Psi\alpha = \Psi(q\alpha + r\alpha) = \Omega_{\psi(q\alpha)+r\alpha}$.

Lemma 2.15. Ist $I \leq \beta \in C(\beta)$ mit $r\beta = 0$ und $\alpha = \Psi\beta + \gamma < \Psi(\beta + I)$, so ist $\Omega_\alpha = \Psi(\beta + \gamma)$.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt nach Lemma 2.11 $\beta + \gamma \in C(\beta + \gamma)$. Man hat $q(\beta + \gamma) = \beta \geq I$ und $r(\beta + \gamma) = \gamma$. Nach Lemma 2.14 folgt $\Psi(\beta + \gamma) = \Omega_{\psi\beta+\gamma} = \Omega_\alpha$.

§ 3. Die Ordinalzahlen $\psi\sigma\alpha$

Im folgenden bezeichnen π, σ, τ immer Anfangszahlen $< I$.

Induktive Definition der Ordinalzahlenmenngen $C_\sigma^n(\alpha)$ $(n < \omega)$ und $C_\sigma(\alpha)$ und der Ordinalzahl $\psi\sigma\alpha$ (durch Hauptinduktion nach α und Nebeninduktion nach n).

(C_σ1) Ist $\gamma \leq \sigma$ oder $\gamma = I$, so sei $\gamma \in C_\sigma^n(\alpha)$.

(C_σ2) $\gamma =_{\mathrm{NF}} \omega^\xi + \eta$; $\xi, \eta \in C_\sigma^n(\alpha) \Rightarrow \gamma \in C_\sigma^{n+1}(\alpha)$

(C_σ3) $\beta \in C_\sigma^n(\alpha) \Rightarrow \Psi\beta \in C_\sigma^{n+1}(\alpha)$

(C_σ4) $\beta < \alpha$; $\pi^+, \beta \in C_\sigma^n(\alpha \Rightarrow \psi\pi\beta \in C_\sigma^{n+1}(\alpha)$

(C_σ5) $C_\sigma(\alpha) := \cup \{C_\sigma^n(\alpha) : n < \omega\}$

(C_σ6) $\psi\sigma\alpha := \min \{\eta : \eta \notin C_\sigma(\alpha)\}$

Folgerung: $m < n < \omega \Rightarrow C_\sigma^m(\alpha) \subseteq C_\sigma^n(\alpha)$

Lemma 3.1. $\sigma \leq \pi$, $\alpha \leq \beta \Rightarrow C_\sigma(\alpha) \subseteq C_\pi(\beta)$, $\psi\sigma\alpha \leq \psi\pi\beta$

Dies folgt unmittelbar aus den Definitionsregeln.

Lemma 3.2. $\sigma < \psi\sigma\alpha < \sigma^+$, also $S(\psi\sigma\alpha) = \sigma$.

Beweis. Aus (C_σ1), (C_σ5) und (C_σ6) folgt $\sigma < \psi\sigma\alpha$. Durch Induktion nach n ergibt sich, daß $C_\sigma^n(\alpha)$ eine Mächtigkeit $< \sigma^+$ hat. Dann hat aufgrund der Regularität von σ^+ auch $C_\sigma(\alpha)$ eine Mächtigkeit $< \sigma^+$. Nach (C_σ6) folgt $\psi\sigma\alpha < \sigma^+$.

Lemma 3.3. $\psi\sigma\alpha \in E$

Beweis. Nach Lemma 3.2 ist $\psi\sigma\alpha \neq 0$. Wäre $\psi\sigma\alpha \notin E$, so hätte man daher $\psi\sigma\alpha =_{\mathrm{NF}} \omega^\xi + \eta$, folglich nach ($C_\sigma$6) $\xi, \eta \in C_\sigma(\alpha)$ und nach (C_σ2) $\psi\sigma\alpha \in C_\sigma(\alpha)$ im Widerspruch zu (C_σ6).

Lemma 3.4. $\gamma \in C_\sigma^n(\alpha)$. $\gamma < \sigma^+ \Rightarrow \gamma < \psi\sigma\alpha$.

Beweis durch Induktion nach n.

1. $\gamma \in C_\sigma^n(\alpha)$ gelte nach $(C_\sigma 1)$. Dann ist $\gamma \leq \sigma < \psi\sigma\alpha$.

2. $\gamma \in C_\sigma^n(\alpha)$ gelte nach $(C_\sigma 2)$. Dann folgt die Behauptung aus der I.V., da nach Lemma 3.3 $\psi\sigma\alpha \in E$ ist.

3. $\gamma \in C_\sigma^n(\alpha)$ gelte nach $(C_\sigma 3)$. Dann ist nach Lemma 2.3 $\gamma \in \bar{R}$. Aus $\gamma < \sigma^+$ folgt daher $\gamma \leq \sigma < \psi\sigma\alpha$.

4. $\gamma \in C_\sigma^n(\alpha)$ gelte nach $(C_\sigma 4)$. Dann hat man $\gamma = \psi\pi\beta$ mit $\beta < \alpha$. Aus $\gamma < \sigma^+$ folgt nach Lemma 3.2 $\pi \leq \sigma$. Nach Lemma 3.1 folgt $\gamma \leq \psi\sigma\alpha$. Da $\psi\sigma\alpha \notin C_\sigma(\alpha)$ ist, folgt $\gamma < \psi\sigma\alpha$.

Corollar 3.4. Die Menge derjenigen Elemente von $C_\sigma(\alpha)$, die $< \sigma^+$ sind, ist gleich dem Abschnitt aller Ordinalzahlen $< \psi\sigma\alpha$.

Beweis. Dies folgt aus $(C_\sigma 6)$ und Lemma 3.4.

Lemma 3.5.

a) $\beta < \gamma < \sigma^+$, $\gamma \in C_\sigma(\alpha) \Rightarrow \beta \in C_\sigma(\alpha)$

b) $\gamma =_{\mathrm{NF}} \omega^\xi + \eta \in C_\sigma(\alpha) \Rightarrow \xi, \eta \in C_\sigma(\alpha)$

Beweis. a) folgt aus Corollar 3.4.

b) folgt im Fall $\gamma < \sigma^+$ aus a). Andernfalls kann $\gamma =_{\mathrm{NF}} \omega^\xi + \eta \in C_\sigma(\alpha)$ nur nach $(C_\sigma 2)$ gelten, also nur mit $\xi, \eta \in C_\sigma(\alpha)$.

Lemma 3.6.

a) σ^+, $\alpha \in C_\sigma(\beta)$, $\alpha < \beta \Rightarrow \psi\sigma\alpha < \psi\sigma\beta$

b) σ^+, α, $\beta \in C_\sigma(\alpha) \cup C_\sigma(\beta)$, $\psi\sigma\alpha = \psi\sigma\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

Beweis. a) Aus σ^+, $\alpha \in C_\sigma(\beta)$ und $\alpha < \beta$ folgt nach $(C_\sigma 4)$ $\psi\sigma\alpha \in C_\sigma(\beta)$. Nach den Lemmata 3.2 und 3.4 folgt $\psi\sigma\alpha < \psi\sigma\beta$.

b) Wäre $\alpha < \beta$, so würde aus $\sigma^+, \alpha \in C_\sigma(\alpha) \cup C_\sigma(\beta)$ nach Lemma 3.1 σ^+, $\alpha \in C_\sigma(\beta)$ und nach a) $\psi\sigma\alpha < \psi\sigma\beta$ folgen. Ebenso führt die Annahme $\beta < \alpha$ zum Widerspruch zur Voraussetzung $\psi\sigma\alpha = \psi\sigma\beta$.

Lemma 3.7. Ist $\gamma \in C_\sigma^n(\alpha)$, so gibt es $\delta = \min\{\eta : \gamma \leq \eta \in C(\beta)\}$ mit $\delta \in C_\sigma^n(\alpha)$.

Beweis durch Induktion nach n entsprechend wie für Lemma 2.9.

Lemma 3.8. Gilt $\gamma \in C_\sigma^{n+1}(\alpha)$ nach $(C_\sigma 3)$, so gibt es genau ein $\beta \in C_\sigma^n(\alpha)$ mit $\gamma = \Psi\beta$ und $\beta \in C(\beta)$.

Beweis. Aufgrund der Voraussetzung hat man $\gamma = \Psi\beta_0$ mit $\beta_0 \in C_\sigma^n(\alpha)$. Dann gibt es nach Lemma 3.7 $\beta = \min\{\eta : \beta_0 \leq \eta \in C(\beta_0)\}$ mit $\beta \in C_\sigma^n(\alpha)$. Nach Lemma 2.8 folgt $\gamma = \Psi\beta$ und $\beta \in C(\beta)$. Nach Lemma 2.6 b) ist β eindeutig durch γ bestimmt.

Lemma 3.9. $\gamma \in C^n(\beta) \Rightarrow \gamma \in C_{\psi\beta}(\alpha)$

Beweis durch Induktion nach n.

1. Es sei $\gamma < I$. Dann folgt aus $\gamma \in C(\beta)$ nach Lemma 2.4 $\gamma < \Psi\beta$. Nach $(C_{\psi\beta}1)$ folgt $\gamma \in C_{\psi\beta}(\alpha)$.
2. Es sei $\gamma = I$. Dann gilt $\gamma \in C_{\psi\beta}(\alpha)$.
3. Es sei $I < \gamma$. Dann kann $\gamma \in C(\beta)$ nur nach $(C2)$ gelten. In diesem Fall folgt die Behauptung aus der I.V.

Lemma 3.10. $\beta \in C(\beta)$, $\Psi\beta \in C_\sigma(\alpha) \Rightarrow \beta \in C_\sigma(\alpha)$.

Beweis. Aus $\beta \in C(\beta)$ folgt nach Lemma 3.9 $\beta \in C_{\psi\beta}(\alpha)$. Ist $\Psi\beta \leq \sigma$, so folgt $\beta \in C_\sigma(\alpha)$. Es sei nun $\sigma < \Psi\beta$. Dann kann $\Psi\beta \in C_\sigma(\alpha)$ nur nach $(C_\sigma 3)$ gelten. In diesem Fall hat man nach Lemma 2.8 $\Psi\beta = \Psi\beta_0$ mit $\beta_0 \in C(\beta_0)$ und $\beta_0 \in C_\sigma(\alpha)$. Nach Lemma 2.6 b) folgt $\beta = \beta_0$, also $\beta \in C_\sigma(\alpha)$.

Lemma 3.11. Ist $\alpha < \beta$ und gibt es kein $\delta \in C_\sigma(\alpha)$ mit $\alpha \leq \delta < \beta$, so gilt $\gamma \in C_\sigma^n(\beta) \Rightarrow \gamma \in C_\sigma(\alpha)$

Beweis durch Induktion nach n entsprechend wie für Lemma 2.7.

Lemma 3.12. Ist $\beta = \min\{\eta : \alpha \leq \eta \in C_\sigma(\alpha)\}$, so ist $C_\sigma(\alpha) = C_\sigma(\beta)$, also $\psi\sigma\alpha = \psi\sigma\beta$ und $\beta \in C_\sigma(\beta)$.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt nach Lemma 3.1 $C_\sigma(\alpha) \subseteq C_\sigma(\beta)$ und nach Lemma 3.11 $C_\sigma(\beta) \subseteq C_\sigma(\alpha)$.

Lemma 3.13. Ist $\gamma \in C_\sigma^n(\alpha)$, $\sigma \leq \pi$ und $\beta \leq \alpha$, so gibt es $\delta = \min\{\eta : \gamma \leq \eta \in C_\pi(\beta)\}$ mit $\delta \in C_\sigma^n(\alpha)$.

Beweis durch Induktion nach n.

1. $\gamma \in C_\sigma^n(\alpha)$ gelte nach $(C_\sigma 1)$. Da $\sigma \leq \pi$ ist, folgt $\gamma \in C_\pi(\beta)$. Die Behauptung gilt daher für $\delta = \gamma$.
2. $\gamma \in C_\sigma^n(\alpha)$ gelte nach $(C_\sigma 2)$. Dann hat man $n > 0$ und $\gamma =_{\mathrm{NF}} \omega^{\gamma_1} + \gamma_2$ mit $\gamma_1, \gamma_2 \in C_\sigma^{n-1}(\alpha)$. Für $i = 1, 2$ gibt es nach I.V.

$\delta_i = \min\{\eta : \gamma_i \leq \eta \in C_\pi(\beta)\}$ mit $\delta_i \in C_\sigma^{n-1}(\alpha)$. Ist $\gamma_1 \in C_\pi(\beta)$, so gilt die Behauptung für $\delta =_{\mathrm{NF}} \omega^{\gamma_1} + \delta_2$. Andernfalls gilt sie für $\delta = \omega^{\delta_1}$.

3. $\gamma \in C_\sigma^n(\alpha)$ gelte nach $(C_\sigma 3)$. Dann hat man $n > 0$ und $\gamma = \Psi\gamma_0$ mit $\gamma_0 \in C_\sigma^{n-1}(\alpha)$. Nach I.V. gibt es $\delta_0 = \min\{\eta : \gamma_0 \leq \eta \in C_\pi(\beta)\}$ mit $\delta_0 \in C_\sigma^{n-1}(\alpha)$. Die Behauptung folgt für $\delta = \Psi\delta_0$.

4. $\gamma \in C_\sigma^n(\alpha)$ gelte nach $(C_\sigma 4)$. Dann hat man $n > 0$ und $\gamma = \psi\gamma_1\gamma_2$ mit $\gamma_1^+, \gamma_2 \in C_\sigma^{n-1}(\alpha)$. Nach I.V. gibt es $\delta_1 = \min\{\eta : \gamma_1^+ \leq \eta \in C_\pi(\beta)\}$ und $\delta_2 = \min\{\eta : \gamma_2 \leq \eta \in C_\pi(\beta)\}$ mit $\delta_{1,2} \in C_\sigma^{n-1}(\alpha)$.

4.1. Es sei $\gamma_1^+ \in C_\pi(\beta)$ und $\delta_2 < \beta$, also auch $\delta_2 < \alpha$. Dann gilt die Behauptung für $\delta = \psi\gamma_1\delta_2$.

4.2. Es sei $\gamma_1^+ \in C_\pi(\beta)$ und $\beta \leq \delta_2$. Dann gilt die Behauptung für $\delta = \gamma_1^+$.

4.3. Es sei $\gamma_1^+ \notin C_\pi(\beta)$. Dann gilt die Behauptung für $\delta = \delta_1$.

Lemma 3.14. Ist $\sigma < \gamma$ und gilt $\gamma \in C_\sigma^{n+1}(\alpha)$ nach $(C_\sigma 4)$, so gibt es genau ein $\pi \geq \sigma$ und genau ein $\beta < \alpha$ mit $\gamma = \psi\pi\beta$, $\beta \in C_\pi(\beta)$ und $\pi^+, \beta \in C_\sigma^n(\alpha)$.

Beweis. Aufgrund der Voraussetzung hat man $\gamma = \psi\pi\beta_0$ mit $\beta_0 < \alpha$ und $\pi^+, \beta_0 \in C_\sigma^n(\alpha)$. Aus $\sigma < \gamma$ folgt nach Lemma 3.2, daß $\pi \geq \sigma$ und π eindeutig durch γ bestimmt ist. Dann gibt es nach Lemma 3.13 $\beta = \min\{\eta : \beta_0 \leq \eta \in C_\pi(\beta_0)\}$ mit $\beta \in C_\sigma^n(\alpha)$. Nach Lemma 3.12 folgt $C_\pi(\beta_0) = C_\pi(\beta)$, $\gamma = \psi\pi\beta$ und $\beta \in C_\pi(\beta)$. Nach Lemma 3.6 b) ist β eindeutig durch γ bestimmt. Ist $\beta = \beta_0$, so hat man $\beta < \alpha$. Andernfalls ist $\beta_0 \notin C_\pi(\beta_0)$, also $\beta_0 \notin C_\pi(\beta)$. Da $\pi \geq \sigma$ ist, folgt $\beta_0 \notin C_\sigma(\beta)$. Da $\beta_0 \in C_\sigma(\alpha)$ ist, folgt auch in diesem Fall $\beta < \alpha$.

§ 4. Die Ordinalzahlenmenge $T(I)$

Induktive Definition der Ordinalzahlenmenge $T(I)$ und des *Grades* $\mathrm{gr}(\gamma)$ einer Ordinalzahl $\gamma \in T(I)$.

$(T1)$ $\quad 0, I \in T(I)$, $\mathrm{gr}(0) = \mathrm{gr}(I) := 0$.

$(T2)$ $\quad \gamma =_{\mathrm{NF}} \omega^\alpha + \beta;\ \alpha, \beta \in T(I) \Rightarrow \gamma \in T(I)$,
$\mathrm{gr}(\gamma) := \max\{\mathrm{gr}(\alpha), \mathrm{gr}(\beta)\} + 1$

$(T3)$ $\quad \alpha \in C(\alpha);\ \alpha \in T(I) \Rightarrow \Psi\alpha \in T(I)$, $\mathrm{gr}(\Psi\alpha) := \mathrm{gr}(\alpha) + 1$

$(T4)$ $\quad \alpha \in C_\sigma(\alpha);\ \sigma, \alpha \in T(I) \Rightarrow \psi\sigma\alpha \in T(I)$,
$\mathrm{gr}(\psi\sigma\alpha) := \max\{\mathrm{gr}(\sigma), \mathrm{gr}(\alpha)\} + 1$

Lemma 4.1. $\sigma \in T(I) \Rightarrow \sigma^+ \in C_\sigma(\alpha)$

Beweis. Für $\sigma \in T(I)$ kommen folgende zwei Fälle in Betracht.

1. $\sigma = 0$. Dann folgt nach $(C_\sigma 1)$ und $(C_\sigma 3)$ $\sigma^+ = \Psi 0 \in C_\sigma(\alpha)$.

2. $\sigma = \Psi\beta$ mit $\beta \in C(\beta)$. Dann hat man nach $(C_\sigma 1)$ $\Psi\beta \in C_\sigma(\alpha)$ und nach Lemma 3.10 $\beta \in C_\sigma(\alpha)$. Es folgt $\beta + 1 \in C_\sigma(\alpha)$ und nach $(C_\sigma 3)$ $\sigma^+ = \Psi(\beta + 1) \in C_\sigma(\alpha)$.

Lemma 4.2.
a) $\alpha \in C(\alpha)$, $\beta \in C(\beta)$, $\Psi\alpha = \Psi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$
b) $\sigma \in T(I)$, $\alpha \in C_\sigma(\alpha)$, $\beta \in C_\sigma(\beta)$, $\psi\sigma\alpha = \psi\sigma\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

Beweis. a) folgt aus Lemma 2.6 b).
b) folgt aus den Lemmata 3.6 b) und 4.1.

Anmerkung. Jede Ordinalzahl aus $T(I)$ hat eine Normalform, die gemäß den Definitionsregeln $(T1)$ bis $(T4)$ aus den Symbolen 0, I, ω, $+$, Ψ und ψ zusammengesetzt ist. Diese Normalformen nennen wir *Ordinalterme*. Aus den Lemmata 2.2, 2.3, 3.2, 3.3 und 4.2 folgt, daß je zwei verschiedene Ordinalterme verschiedene Ordinalzahlen bezeichnen. Daher ist der Grad $\mathrm{gr}(\gamma)$ einer jeden Ordinalzahl $\gamma \in T(I)$ eindeitig bestimmt.

Lemma 4.3. $\pi \in T(I) \Leftrightarrow \pi^+ \in T(I)$

Beweis. 1. Es sei $\pi \in T(I)$. Ist $\pi = 0$, so hat man $\pi^+ = \Psi 0 \in T(I)$. Andernfalls ist $\pi = \Psi\beta$ mit $\beta \in C(\beta) \cap T(I)$. Es folgt $\beta + 1 \in C(\beta + 1 \cap T(I)$ und $\pi^+ = \Psi(\beta + 1) \in T(I)$.

2. Es sei $\pi^+ \in T(I)$. Ist $\pi^+ = \psi 0$, so hat man $\pi = 0 \in T(I)$. Andernfalls ist $\pi^+ = \psi(\beta + 1)$ mit $\beta + 1 \in C(\beta + 1) \cap T(I)$. Es folgt $\beta \in C(\beta + 1)$. Ist $C(\beta) = C(\beta + 1)$, so hat man $\beta \in C(\beta)$. Ist $C(\beta) \neq C(\beta + 1)$, so folgt $\beta \in C(\beta)$ nach Lemma 2.7. Man hat also in jedem Fall $\beta \in C(\beta) \cap T(I)$ und $\pi = \Psi\beta \in T(I)$.

Lemma 4.4. Für $\pi \in T(I)$ gilt:
$\pi \in C_\sigma(\alpha) \Leftrightarrow \pi^+ \in C_\sigma(\alpha)$

Beweis mit Hilfe der Lemmata 3.10 und 4.3.

Lemma 4.5. $\gamma \in T(I) \Rightarrow \gamma < \varepsilon_{I+1}$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$.

Lemma 4.6. $\gamma \in T(I) \Rightarrow \gamma \in C_\sigma(\varepsilon_{I+1})$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$ mit Hilfe der Lemmata 4.3 bis 4.5.

Lemma 4.7. $\gamma \in C_\sigma^n(\alpha) \Rightarrow \gamma \in T(I)$

Beweis durch Induktion nach n mit Hilfe der Lemmata 3.8, 3.14 und 4.3.

Lemma 4.8. γ ist genau dann eine Ordinalzahl $< \Psi 0$ aus $T(I)$, wenn $\gamma < \psi 0 \varepsilon_{I+1}$ ist.

Beweis. Nach Corollar 3.4 ist γ genau dann eine Ordinalzahl $< 0^+ = \Psi 0$ aus $C_0(\varepsilon_{I+1})$, wenn $\gamma < \psi 0 \varepsilon_{I+1}$ ist. Nach den Lemmata 4.6 und 4.7 ist $T(I) = C_0(\varepsilon_{I+1})$. Hiermit ergibt sich die Behauptung.

Anmerkung. Nach Lemma 4.8 bilden diejenigen Ordinalzahlen aus $T(I)$, die $< \Psi 0$ sind, einen Ordinalzahlenabschnitt.

Lemma 4.9. $\gamma \in T(I) \Rightarrow S\gamma \in T(I)$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$.

Lemma 4.10. Für $\alpha < I$ gilt: $\alpha \in T(I) \Leftrightarrow \Omega_\alpha \in T(I)$

Beweis. Für $\alpha < \Psi I$ folgt die Behauptung aus Lemma 2.13. Im folgenden sei nun $\Psi I \leq \alpha < I$.

1. Es sei $\alpha \in T(I)$. Dann hat man nach Lemma 4.9 $S\alpha = \Psi\beta \in T(I)$ mit $I \leq \beta \in C(\beta) \cap T(I)$. Es folgt $I \leq q\beta \in T(I)$ und nach Lemma 2.12 $q\beta \in C(q\beta)$. Man hat

$$\Psi(q\beta) \leq S\alpha \leq \alpha < \alpha^+ \leq \Psi q\beta + I)$$

Daher gibt es $\gamma \in T(I)$ mit $\alpha = \Psi(q\beta) + \gamma < \Psi(q\beta + I)$. Nach Lemma 2.15 folgt $\Omega_\alpha = \Psi(q\beta + \gamma) \in T(I)$.

2. Es sei $\Omega_\alpha \in T(I)$. Dann hat man $\Omega_\alpha = \Psi\beta \in T(I)$ mit $I \leq \beta \in C(\beta) \cap T(I)$. Nach Lemma 2.14 folgt $\Omega_\alpha = \psi\beta = \Omega_{\psi(q\beta)+r\beta}$, also $\alpha = \psi(q\beta) + r\beta \in T(I)$.

Im folgenden bezeichnen die kleinen griechischen Buchstaben α, β, γ, δ, η, ξ (auch mit Indizes) immer Ordinalzahlen aus $T(I)$. π, σ, τ bezeichnen im folgenden immer Anfangszahlen $< I$ *aus* $T(I)$.

Bezeichnet M eine Menge von Ordinalzahlen, so bedeute $M < \beta$ (oder $M \leq \beta$), daß $\alpha < \beta$ (oder $\alpha \leq \beta$) für alle $\alpha \in M$ gilt. $\alpha \leq M$ bedeute, daß es $\beta \in M$ *mit* $\alpha \leq \beta$ gibt.

§ 5. Die Koeffizientenmengen $G\gamma$ und $K\gamma$

Induktive Definition der *Koeffizientenmenge* $G\gamma$.
1. $G0$ und GI seien leer.
2. Für $\gamma =_{NF} \omega^{\xi} + \eta$ sei $G\gamma := G\xi \cup G\eta$.
3. Für $\beta \in C(\beta)$ sei $G(\Psi\beta) := G\beta^{\xi} \cup \{\beta\}$.
4. Für $\beta \in C_{\pi}(\beta)$ sei $G(\psi\pi\beta) := G\pi$.

Folgerungen:

$G\gamma$ ist eine endliche Menge von Ordinalzahlen aus $T(I)$. $G\beta \subseteq G(\alpha+\beta) \subseteq G\alpha \cup G\beta$

Lemma 5.1. $\gamma \in C(\alpha) \Leftrightarrow G\gamma < \alpha$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$ unter Benutzung der Lemmata 2.5 b), 2.10 und 3.2.

Corollar 5.1. $\Psi\alpha$ ist genau dann ein Ordinalterm aus $T(I)$, wenn α ein Ordinalterm aus $T(I)$ ist und $G\alpha < \alpha$ gilt.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 5.1, weil ein Ordinalterm $\Psi\alpha$ aus $T(I)$ der Bedingung $\alpha \in C(\alpha)$ zu genügen hat.

Definition. $G(G\gamma) := \cup \{G\alpha : \alpha \in G\gamma\}$

Lemma 5.2. $G(G\gamma) \subseteq G\gamma)$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$

Definitionen.

$g\alpha := \max(G\alpha \cup \{0\})$
$h\alpha := g\alpha + \omega^{\alpha}$

Lemma 5.3. $h\alpha \in C(h\alpha)$

Beweis. Aus dem Lemma 5.2 folgt
$$G(h\alpha) = G(g\alpha + \omega^{\alpha}) = G\alpha < g\alpha + \omega^{\alpha} = h\alpha$$
Nach Lemma 5.1 folgt $h\alpha \in C(h\alpha)$.

Induktive Definition der *Koeffizientenmenge* $K\gamma$.
1. $K0$ und KI seien leer.
2. Für $\gamma =_{NF} \omega^{\xi} + \eta$ sei $K\gamma := K\xi \cup K\eta$.
3. Für $I > \gamma \in E$ sei $K\gamma := \{\gamma\}$.

Folgerungen:

$K\gamma$ ist eine unendliche Menge von Ordinalzahlen $< I$ aus $E \cap T(I)$.
$K\beta \subseteq K(\alpha + \beta) \subseteq K\alpha \cup K\beta$

Lemma 5.4. $\gamma \in C(\alpha) \Leftrightarrow K\gamma \subset C(\alpha)$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$.

Lemma 5.5. $\alpha \in C(\alpha) \Rightarrow K\alpha < \Psi\alpha$

Beweis. Aus $\alpha \in C(\alpha)$ folgt nach Lemma 5.4 $K\alpha \subset C(\alpha)$. Nach Lemma 2.4 folgt $K\alpha < \Psi\alpha$, da $K\alpha < I$ ist.

Definition der *Kollabierungsfunktion* d.

$$d\alpha := \begin{cases} \alpha, & \text{wenn } \alpha < I \text{ ist} \\ \Psi(h\alpha), & \text{wenn } I \leq \alpha \text{ ist.} \end{cases}$$

(Nach Lemma 5.3 ist $h\alpha \in C(h\alpha)$.)

Folgerung: $d\alpha < I$

Lemma 5.6.
a) $\alpha < I \Rightarrow K\alpha \leq d\alpha$
b) $I \leq \alpha \Rightarrow K\alpha < d\alpha$

Beweis. a) gilt, weil in diesem Fall $d\alpha = \alpha$ ist.
b) Für $I \leq \alpha$ hat man nach den Lemmata 5.3 und 5.5

$$K\alpha \subseteq K(h\alpha) < \Psi(h\alpha) = d\alpha$$

Lemma 5.7. $\alpha < \beta,\ K\alpha < d\beta \Rightarrow d\alpha < d\beta$

Beweis. Ist $\beta < I$, so hat man $d\alpha = \alpha < \beta = d\beta$. Ist $\alpha < I \leq \beta$, so ist $d\beta \in E$. Aus $K\alpha < d\beta$ folgt dann $d\alpha = \alpha < d\beta$. Es sei schließlich $I \leq \alpha$. Aus $K\alpha < d\beta = \Psi(h\beta)$ folgt dann $K\alpha \subset C(h\beta)$ und nach Lemma 5.4 $\alpha \in C(h\beta)$. Nach Lemma 5.1 folgt

(1) $\qquad g\alpha < h\beta$

Aus $\alpha < \beta$ folgt $\omega^{\alpha} < \omega^{\beta} = e(h\beta)$. Mit (1) folgt nach Lemma 1.3 a)

(2) $\qquad h\alpha = g\alpha + \omega^{\alpha} < h\beta$

Aus (2) folgt nach den Lemmata 2.6 a) und 5.3

$$d\alpha = \Psi(h\alpha) < \Psi h\beta) = d\beta$$

§ 6. Die Koeffizientenmengen $G_\sigma\gamma$ und $K_\sigma\gamma$

Induktive Definition der *Koeffizientenmenge* $G_\sigma\gamma$.

1. $G_\sigma 0$ und $G_\sigma I$ seien leer.
2. Für $\gamma =_{NF} \omega^\xi + \eta$ sei $G_\sigma\gamma := G_\sigma\xi \cup G_\sigma\eta$.
3. Für $\beta \in C(\beta)$ sei $G_\sigma\Psi\beta := G_\sigma\beta$.
4. Für $\beta \in C_\pi(\beta)$ sei

$$G_\sigma\psi\pi\beta := \begin{cases} \emptyset, & \text{wenn } \pi < \sigma \text{ ist,} \\ G_\sigma\pi \cup G_\sigma\beta \cup \{\beta\}, & \text{wenn } \sigma \leq \pi \text{ ist.} \end{cases}$$

Folgerungen:

$G_\sigma\gamma$ ist eine endliche Menge von Ordinalzahlen aus $T(I)$.
$G_\sigma\beta \subseteq G_\sigma(\alpha + \beta) \subseteq G_\sigma\alpha \cup G_\sigma\beta$

Lemma 6.1. $\gamma \in C_\sigma(\alpha) \Leftrightarrow G_\sigma\gamma < \alpha$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$ unter Benutzung der Lemmata 3.5 b), 3.10, 3.14 und 4.4.

Corollar 6.1. $\psi\sigma\alpha$ ist genau dann ein Ordinalterm aus $T(I)$, wenn σ und α Ordinalterme aus $T(I)$ sind und $G_\sigma\alpha < \alpha$ gilt

Beweis. Dies folgt aus Lemma 6.1, weil ein Ordinalterm $\psi\sigma\alpha$ aus $T(I)$ der Bedingung $\alpha \in C_\sigma(\alpha)$ zu genügen hat.

Anmerkung. Mit Hilfe der Corollare 5.1 und 6.1 ergibt sich:

1. Es ist entscheidbar, ob eine Zeichenreihe einen Ordinalterm des Systems $T(I)$ bezeichnet.
2. Für je zwei Ordinalterme α und β aus $T(I)$ ist entscheidbar, ob $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ oder $\beta < \alpha$ gilt.

Lemma 6.2. Ist $\gamma \leq \sigma$ oder $\gamma = \sigma^+$, so ist $G_\sigma\gamma$ leer.

Beweis. In diesen Fällen gilt nach $(C_\sigma 1)$ und Lemma 4.1 $\gamma \in C_\sigma(0)$. Nach Lemma 6.1 folgt $G_\sigma\gamma < 0$. Dann ist $G_\sigma\gamma$ leer.

Lemma 6.3. $\pi < \sigma \Rightarrow G_\sigma\gamma \subseteq G_\pi\gamma$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$.

Induktive Definition der Ordinalzahlenmenge $U\gamma$.

1. $U0$ und UI seien leer.

2. Für $\gamma =_{NF} \omega^{\xi} + \eta$ sei $U\gamma := U\xi \cup U\eta$.
3. Für $\beta \in C(\beta)$ sei $U(\Psi\beta) := U\beta$.
4. Für $\beta \in C_{\pi}(\beta)$ sei $U(\psi\pi\beta) := \{\pi^{+}\} \cup U\pi \cup U\beta$.

Folgerungen:

$U\gamma$ ist eine endliche Menge von Ordinalzahlen $< I$ aus $R \cap T(I)$.
$U\beta \subseteq U(\alpha + \beta) \subseteq U\alpha \cup U\beta$

Lemma 6.4. Ist $U\gamma \leq \sigma$, so ist $G_{\sigma}\gamma$ leer.

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$.

Lemma 6.5. Ist $\sigma < \tau$ und gibt es kein $\eta \in U\gamma$ mit $\sigma < \eta \leq \tau$, so ist $G_{\sigma}\gamma = G_{\tau}\gamma$.

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$. Die Behauptung gilt trivialerweise oder folgt unmittelbar aus der I.V., wenn γ nicht die Gestalt $\psi\pi\beta$ hat. Es sei nun $\gamma = \psi\pi\beta$ mit $\beta \in C_{\pi}(\beta)$. Dann ist $U\gamma = \{\pi^{+}\} \cup U\pi \cup U\beta$, folglich nach Voraussetzung entweder $\pi^{+} \leq \sigma$ oder $\tau < \pi^{+}$.

1. Es sei $\pi^{+} \leq \sigma$. Dann ist $\pi < \sigma$. In diesem Fall sind $G_{\sigma}\gamma$ und $G_{\tau}\gamma$ leer.

2. Es sei $\tau < \pi^{+}$. Dann ist $\tau \leq \pi$. In diesem Fall ist $G_{\sigma}\gamma = G_{\sigma}\pi \cup G_{\sigma}\beta \cup \{\beta\}$ und $G_{\tau}\gamma = G_{\tau}\pi \cup G_{\tau}\beta \cup \{\beta\}$. Nach I.V. ist $G_{\sigma}\pi = G_{\tau}\pi$ und $G_{\sigma}\beta = G_{\tau}\beta$. Es folgt $G_{\sigma}\gamma = G_{\tau}\gamma$.

Lemma 6.6. Zu γ gibt es $\tau = \min\{\pi : G_{\pi}\gamma < \gamma\} \in \{0\} \cup U\gamma$.

Beweis. Die Existenz der Ordinalzahl $\tau = \min\{\pi : G_{\pi}\gamma < \gamma\}$ folgt aus Lemma 6.4. Ist $\tau \neq 0$, so folgt aus der Minimalität von τ, daß $G_{\sigma}\gamma \neq G_{\tau}\gamma$ für alle $\sigma < \tau$ gilt. Dann gibt es nach Lemma 6.5 zu jedem $\sigma < \tau$ ein $\eta \in U\gamma$ mit $\sigma < \eta \leq \tau$. Es folgt $\tau \in U\gamma$.

Induktive Definition der *Koeffizientenmenge* $K_{\sigma}\gamma$.

1. $K_{\sigma}0$ und $K_{\sigma}I$ seien leer.
2. Für $\gamma =_{NF} \omega^{\xi} + \eta$ sei $K_{\sigma}\gamma := K_{\sigma}\xi \cup K_{\sigma}\eta$.
3. Für $\beta \in C(\beta)$ sei

$$K_{\sigma}\Psi\beta := \begin{cases} \{\Psi\beta\}, & \text{wenn } \Psi\beta \leq \sigma \text{ ist,} \\ K_{\sigma}\beta, & \text{wenn } \sigma < \Psi\beta \text{ ist.} \end{cases}$$

4. Für $\beta \in C_\pi(\beta)$ sei

$$K_\sigma \psi\pi\beta := \begin{cases} \{\psi\pi\beta\}, & \text{wenn } \pi \leq \sigma \text{ ist,} \\ K_\sigma\pi \cup K_\sigma\beta, & \text{wenn } \sigma < \pi \text{ ist.} \end{cases}$$

Folgerungen:

$K_\sigma\gamma$ ist eine endliche Menge von Ordinalzahlen $< \sigma^+$ aus $E \cap T(I)$.
$K_\sigma\beta \subseteq K_\sigma(\alpha + \beta) \subseteq K_\sigma\alpha \cup K_\sigma\beta$

Lemma 6.7. $\gamma \in C_\sigma(\alpha) \Rightarrow K_\sigma\gamma \subset C_\sigma(\alpha)$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$.

Lemma 6.8. $\alpha \in C_\sigma(\alpha) \Rightarrow K_\sigma\alpha < \psi\sigma\alpha$

Beweis. Aus $\alpha \in C_\sigma(\alpha)$ folgt nach Lemma 6.7 $K_\sigma\alpha \subset C_\sigma(\alpha)$. Nach Lemma 3.4 folgt $K_\sigma\alpha < \psi\sigma\alpha$, da $K_\sigma\alpha < \sigma^+$ ist.

Lemma 6.9. $\pi < \sigma \Rightarrow K_\pi\sigma = K_\pi\sigma^+$

Beweis. Man hat $\sigma = \Psi\alpha$ und $\sigma^+ = \Psi(\alpha + 1)$ mit

$$K_\pi\sigma = K_\pi\alpha = K_\pi(\alpha + 1) = K_\pi\sigma^+$$

Lemma 5.10. $\pi < S\gamma \Rightarrow K_\pi S\gamma \subseteq K_\pi\gamma$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$.

Definitionen. Für eine Menge M von Ordinalzahlen aus $T(I)$ sei $G_\sigma M := \cup \{G_\sigma\alpha : \alpha \in M\}$, $K_\sigma M := \cup \{K_\sigma\alpha : \alpha \in M\}$ und $UM := \cup \{U\alpha : \alpha \in M\}$.

Lemma 6.11.

a) $\pi \leq \sigma \Rightarrow G_\pi G_\sigma\gamma \subseteq G_\pi\gamma$
b) $\pi < \sigma \Rightarrow K_\pi G_\sigma\gamma \subseteq K_\pi\gamma$
c) $\pi \leq \sigma \Rightarrow K_\pi K_\sigma\gamma = K_\pi\gamma$
d) $U(G_\sigma\gamma) \subseteq U\gamma$
e) $U(U\gamma) \subseteq U\gamma$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$. Für e) ist zu beachten, daß $U(\pi^+) = U\pi$ ist.

Lemma 6.12. $\sigma^+ = \tau \Rightarrow G_\sigma\gamma = G_\tau\gamma \cup G_\sigma K_\sigma\gamma$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$.

Lemma 6.13. $\sigma^+ = \tau,\ G_\sigma\gamma \neq G_\tau\gamma,\ \pi < \sigma \Rightarrow K_\pi\sigma \subseteq K_\pi\gamma$

Beweis. Aus $G_\sigma\gamma \neq G_\tau\gamma$ folgt nach Lemma 6.12, daß $G_\sigma K_\sigma\gamma$ nicht leer ist. Es gibt also $\alpha \in K_\sigma\gamma$, so daß $G_\sigma\alpha$ nicht leer ist. Dann ist $S\alpha = \sigma$. Nach den Lemmata 6.10 und 6.11 c) folgt für $\pi < \sigma$

$$K_\pi\sigma \subseteq K_\pi\alpha \subseteq K_\pi K_\sigma\gamma = K_\pi\gamma$$

§ 7. Hilfsfunktionen für die Kollabierung

Definition. $g_\sigma\gamma := \max(G_\sigma\gamma \cup \{0\})$

Induktive Definition von $S_n\alpha$ und $H_n\alpha$ für $\alpha < I$ und $n < \omega$.

1. $S_0\alpha := \min\{\pi \in R : S\alpha \leq \pi\}$
2. Für $\sigma = (S_0\alpha)^-$ sei $H_0\alpha = g_\sigma\alpha + \omega^\alpha$.
3. $S_{n+1}\alpha := \min\{\pi : G_\pi H_n\alpha < H_n\alpha\}$
4. Ist $S_{n+1}\alpha = \sigma^+ = \tau$, so sei $H_{n+1}\alpha := g_\sigma H_n\alpha + \psi\tau(H_n\alpha)$.

Ist $S_{n+1}\alpha \notin R$, so sei $H_{n+1}\alpha = H_n\alpha$. (Im ersten Fall ist $G_\tau H_n\alpha < H_n\alpha$, also nach Lemma 6.1 $H_n\alpha \in C_\tau(H_n\alpha)$.)

Nach dieser Definition ist

$$S_0\alpha = \begin{cases} (S\alpha)^+, & \text{wenn } S\alpha \notin R \text{ ist,} \\ S\alpha, & \text{wenn } S\alpha \in R \text{ ist.} \end{cases}$$

Lemma 7.1. Ist $\alpha < I$ und $S_{n+1}\alpha \neq 0$, so hat man $S_{n+1}\alpha = \sigma^+$ mit $H_n\alpha \leq G_\sigma H_n\alpha < H_{n+1}\alpha$.

Beweis. Ist $S_{n+1}\alpha \neq 0$, so folgt aus der Definition von $S_{n+1}\alpha$ nach Lemma 6.6, daß $I > S_{n+1}\alpha \in R$ ist. Man hat also $S_{n+1}\alpha = \sigma^+ = \tau$. Es folgt nach der Definition von $S_{n+1}\alpha$

$$H_n\alpha \leq G_\sigma H_n\alpha$$

und nach der Definition von $H_{n+1}\alpha$

$$G_\sigma H_n\alpha < g_\sigma H_n\alpha + \psi\tau(H_n\alpha) = H_{n+1}\alpha$$

Lemma 7.2. Ist $\alpha < I$ und $S_n\alpha \neq 0$, so hat man $S_n\alpha = \sigma^+$ mit $G_\sigma H_n\alpha < H_n\alpha$ und $S_{n+1}\alpha < S_n\alpha$.

Beweis. 1. $n = 0$. Man hat definitionsgemäß $S_0\alpha = \sigma^+$ und $H_0\alpha = g_\sigma\alpha + \omega^\alpha$. Nach Lemma 6.11 a) folgt

$$G_\sigma H_0\alpha = G_\sigma\alpha < g_\sigma\alpha + \omega^\alpha = H_0\alpha$$

2. $n > 0$. Dann hat man nach Lemma 7.1 $S_n\alpha = \sigma^+ = \tau$ und

$$H_{n-1}\alpha \leq G_\sigma H_{n-1}\alpha < H_n\alpha = g_\sigma H_{n-1}\alpha + \psi\tau(H_{n-1}\alpha)$$

Nach den Lemmata 6.2 und 6.11 a) folgt

$$G_\sigma H_n \alpha \leq g_\sigma H_{n-1} \alpha < H_n \alpha$$

Man hat also in jedem Fall $G_\sigma H_n \alpha < H_n \alpha$. Nach der Definition von $S_{n+1}\alpha$ folgt $S_{n+1}\alpha \leq \sigma < S_n \alpha$.

Lemma 7.3. Für $\alpha < I$ gilt:

a) $U(H_0\alpha) = U\alpha$.

b) Ist $S_{n+1}\alpha \neq 0$, so ist $S_{n+1}\alpha \in U\alpha$ und $U(H_{n+1}\alpha) = U\alpha \cup \{(S_1\alpha)^+, \ldots, (S_{n+1}\alpha)^+\}$.

Beweis von a). Man hat $S_0\alpha = \sigma^+$ und $H_0\alpha = g_\sigma\alpha + \omega^\alpha$. Nach Lemma 6.11 d) folgt $U(H_0\alpha) = U\alpha$.

Beweis von b) durch Induktion nach n. M sei im Fall $n = 0$ leer und im Fall $n > 0$ die Menge $\{(S_1\alpha)^+, \ldots (S_n\alpha)^+\}$. Dann ist nach a) und der I.V. $U(H_n\alpha) = U\alpha \cup M$. Ist $S_{n+1}\alpha \neq 0$, so folgt aus der Definition von $S_{n+1}\alpha$ nach Lemma 6.6

$$S_{n+1}\alpha \in U(H_n\alpha) = U\alpha \cup M$$

Da $S_{n+1}\alpha$ kleiner als jedes Element von M ist, folgt $S_{n+1}\alpha \in U\alpha$ und nach Lemma 6.11 e) $U(S_{n+1}\alpha) \subseteq U\alpha$. Man hat nun $S_{n+1}\alpha = \sigma^+$ und

$$H_{n+1}\alpha = g_\sigma H_n\alpha + \psi(S_{n+1}\alpha)(H_n\alpha)$$

Nach Lemma 6.11 a) folgt

$$U(H_{n+1}\alpha) = \{(S_{n+1}\alpha)^+\} \cup U(S_{n+1}\alpha) \cup U(H_n\alpha)$$

Aufgrund von $U(S_{n+1}\alpha) \subseteq U\alpha$ und $U(H_n\alpha) = U\alpha \cup M$ folgt

$$U(H_{n+1}\alpha) = U\alpha \cup \{(S_1\alpha)^+, \ldots, (S_{n+1}\alpha)^+\}$$

Anmerkung. Nach Lemma 7.3 b) sind für jeden Ordinalterm $\alpha < I$ alle $S_n\alpha$ und somit auch alle $H_n\alpha$ berechenbar.

Lemma 7.4. Für $\alpha < I$ gilt:

a) $e(H_0\alpha) \geq S\alpha$

b) $e(H_{n+1}\alpha) \geq S_{n+1}\alpha$

Beweis. a) Man hat $e(H_0\alpha) = \omega^\alpha \geq S\alpha$.

b) Ist $S_{n+1}\alpha = 0$, so gilt die Behauptung. Andernfalls ist $e(H_{n+1}\alpha) = \psi(S_{n+1}\alpha)(H_n\alpha) > S_{n+1}\alpha$.

Lemma 7.5. $\alpha < I,\ \pi^+ < S_n\alpha \Rightarrow K_\pi H_n\alpha = K_\pi\alpha$

Beweis durch Induktion nach n.

1. $n = 0$. Man hat $S_0\alpha = \sigma^+$, $\pi < \sigma$ und nach Lemma 6.11 b)

$$K_\pi H_0\alpha = K_\pi(g_\sigma\alpha + \omega^\alpha) = K_\pi\alpha$$

2. $n > 0$. Aufgrund von $\pi^+ < S_n\alpha$ hat man $S_n\alpha = \sigma^+ = \tau$, $\pi < \sigma$, $G_\sigma H_{n-1}\alpha \neq G_\tau H_{n-1}\alpha$ und

$$H_n\alpha = g_\sigma H_{n-1}\alpha + \psi\tau(H_{n-1}\alpha)$$

Nach den Lemmata 6.9 und 6.11 b) folgt

$$K_\pi H_n\alpha = K_\pi\sigma \cup K_\pi H_{n-1}\alpha$$

Aus $G_\sigma H_{n-1}\alpha \neq G_\tau H_{n-1}\alpha$ und $\pi < \sigma$ folgt nach Lemma 6.13 $K_\pi\sigma \subseteq K_\pi H_{n-1}\alpha$, und nach I.V. folgt $K_\pi H_{n-1}\alpha = K_\pi\alpha$. Hiermit ergibt sich $K_\pi H_n\alpha = K_\pi\alpha$.

Lemma 7.6. $\alpha < I$, $\pi < S_n\alpha \Rightarrow K_\pi\alpha \subseteq K_\pi H_n\alpha$

Beweis. 1. $n = 0$. Man hat $S_0\alpha = \sigma^+$ und $H_0\alpha = g_\sigma\alpha + \omega^\alpha$, folglich $K_\pi\alpha \subseteq K_\pi H_0\alpha$.

2. $n > 0$. Aufgrund von $\pi < S_n\alpha$ hat man $S_n\alpha = \sigma^+ = \tau$, $\pi < \tau$ und

$$H_n\alpha = g_\sigma H_{n-1}\alpha + \psi\tau(H_{n-1}\alpha)$$

Es folgt $K_\pi H_{n-1}\alpha \subseteq K_\pi H_n\alpha$. Nach Lemma 7.5 ist $K_\pi H_{n-1}\alpha = K_\pi\alpha$. Es folgt $K_\pi\alpha \subseteq K_\pi H_n\alpha$.

Definition von $h_\sigma\alpha$ für $\alpha < I$.

$$h_\sigma\alpha := \begin{cases} \alpha, & \text{wenn } S\alpha < \sigma \text{ ist,} \\ g_\sigma\alpha + \omega^\alpha, & \text{wenn } \sigma = S\alpha = S_0\alpha \text{ ist,} \\ H_n\alpha, & \text{wenn } S_{n+1}\alpha \leq \sigma < S_n\alpha \text{ ist.} \end{cases}$$

Hierdurch ist $h_\sigma\alpha$ nach Lemma 7.2 vollständig und eindeutig definiert. Nach Lemma 7.3 b) sind für jeden Ordinalterm $\alpha < I$ alle $h_\sigma\alpha$ berechenbar.

Lemma 7.7. Für $\alpha < I$ gilt:

a) $G_\sigma h_\sigma\alpha < h_\sigma\alpha$

b) $\pi < \sigma \Rightarrow h_\sigma\alpha \leq h_\pi\alpha$

c) Ist $0 < \sigma \notin R$, so gibt es $\pi < \sigma$ mit $h_\pi\alpha = h_\sigma\alpha$.

d) $\sigma < S\alpha \Rightarrow e(h_\sigma\alpha) \geq \sigma^+$

e) $\pi < \sigma \Rightarrow K_\pi h_\sigma\alpha = K_\pi\alpha$

f) $K_\sigma\alpha \subseteq K_\sigma h_\sigma\alpha$

Beweis mit den Lemmata 7.1 bis 7.6.

Lemma 7.8.

a) $\alpha < \tau^+$, $g_\tau\alpha < \gamma \Rightarrow \alpha < \psi\tau\gamma$

b) $0 < \gamma \leq g_\tau\beta \Rightarrow \psi\tau\gamma \leq \beta$

Beweis. a) Aus $\alpha < \tau^+$ und $g_\tau\alpha < \gamma$ folgt nach den Lemmata 6.1 und 3.4 $G_\tau\alpha < \gamma$, $\alpha \in C_\tau(\gamma)$, $\alpha < \psi\tau\gamma$.

b) Aus $0 < \gamma \leq g_\tau\beta$ folgt nach Lemma 6.1 und $(C_\tau 6)$ $\gamma \leq G_\tau\beta$, $\beta \notin C_\tau(\gamma)$, $\psi\tau\gamma \leq \beta$.

Lemma 7.9. Für $\alpha < \tau^+$ gilt:
a) $g_\tau\alpha < g_\tau\beta \Rightarrow \alpha < \beta$
b) $g_\tau\alpha + \omega^\alpha < g_\tau\beta + \omega^\beta \Rightarrow \alpha < \beta$

Beweis. a) Aus $\alpha < \tau^+$ und $g_\tau\alpha < g_\tau\beta$ folgt nach Lemma 7.8 a) und b) $\alpha < \psi\tau(g_\tau\beta) \leq \beta$.

b) Wäre $\beta \leq \alpha$, so hätte man nach a) $g_\tau\beta \leq g_\tau\alpha$, folglich auch $g_\tau\beta + \omega^\beta \leq g_\tau\alpha + \omega^\alpha$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Lemma 7.10. Ist $\alpha < I$, $\sigma^+ = \tau$ und $h_\sigma\alpha \neq h_\tau\alpha$, so liegt einer der folgenden drei Fälle vor:
a) $\sigma = S\alpha$, $h_\sigma\alpha = g_\sigma\alpha + \omega^\alpha$, $h_\tau\alpha = \alpha$,
b) $\tau = S\alpha$, $h_\sigma\alpha = g_\sigma\alpha + \omega^\alpha$, $h_\tau\alpha = g_\tau\alpha + \omega^\alpha$,
c) $\tau < S\alpha$, $h_\sigma\alpha = g_\sigma h_\tau\alpha + \psi\tau(h_\tau\alpha)$, $h_\tau\alpha \leq G_\sigma h_\tau\alpha$.

Beweis aufgrund der Definition von $h_\sigma\alpha$.

Corollar 7.10. Für alle drei Fälle von Lemma 7.10 ist $h_\sigma\alpha = g_\sigma h_\tau\alpha + e(h_\sigma\alpha)$.

Beweis. Dies gilt unmittelbar für die Fälle a) und c) und folgt für den Fall b) aus Lemma 6.11 a).

Lemma 7.11. Ist $\alpha < I$, $\beta < I$, $\sigma^+ = \tau$, $h_\tau\alpha < h_\tau\beta$ und $K_\sigma\alpha < \psi\sigma(h_\sigma\beta)$, so folgt:
a) $h_\sigma\alpha \leq h_\sigma\beta$,
b) $h_\sigma\alpha < h_\sigma\beta$, wenn $\alpha < \beta$ ist.

Beweis. Ist $h_\sigma\alpha = h_\tau\alpha$, so folgt aus der Voraussetzung $h_\tau\alpha < h_\tau\beta$ und Lemma 7.7 b)

$$h_\sigma\alpha = h_\tau\alpha < h_\tau\beta \leq h_\sigma\beta$$

Dann gilt also die Behauptung $h_\sigma\alpha < h_\sigma\beta$. Im folgenden sei nun $h_\sigma\alpha \neq h_\tau\alpha$. Dann hat man nach Corollar 7.10

(1) $\qquad h_\sigma\alpha = g_\sigma h_\tau\alpha + e(h_\sigma\alpha)$

Aus der Voraussetzung $K_\sigma\alpha < \psi\sigma(h_\sigma\beta)$ folgt nach Lemma 7.7 c) $K_\sigma h_\tau\alpha < \psi\sigma(h_\sigma\beta)$. Es folgt $K_\sigma h_\tau\alpha \subseteq C_\sigma(h_\sigma\beta)$ und nach Lemma 6.1

(2) $\qquad G_\sigma K_\sigma h_\tau\alpha < h_\sigma\beta$

Aus Lemma 7.7 a) und b) und der Voraussetzung $h_\tau\alpha < h_\tau\beta$ folgt

(3) $\quad G_\tau h_\tau\alpha < h_\tau\alpha < h_\tau\beta \leq h_\sigma\beta$

Aus (2) und (3) folgt nach Lemma 6.12

(4) $\quad g_\sigma h_\tau\alpha < h_\sigma\beta$

Ist $e(h_\sigma\alpha) < e(h_\sigma\beta)$, so folgt aus (1) und (4) nach Lemma 1.3 a) $h_\sigma\alpha < h_\sigma\beta$. Man hat also

(5) $\quad e(h_\sigma\alpha) < e(h_\sigma\beta) \Rightarrow h_\sigma\alpha < {}_\sigma\beta$

Für $h_\sigma\alpha \neq h_\tau\alpha$ kommen nach Lemma 7.10 folgende drei Fälle in Betracht.

1. $\sigma = S\alpha$, $h_\sigma\alpha = g_\sigma\alpha + \omega^\alpha$, $h_\tau\alpha = \alpha$.

Aus $h_\tau\alpha < h_\tau\beta$ folgt dann $\sigma \leq S\beta$.

1.1 Es sei $\sigma = S\beta$. Dann ist $h_\sigma\beta = g_\sigma\beta + \omega^\beta$ und $h_\tau\beta = \beta$, also nach Voraussetzung $\alpha < \beta$. Es folgt $e(h_\sigma\alpha) = \omega^\alpha < \omega^\beta = e(h_\sigma\beta)$. Nach (5) folgt $h_\sigma\alpha < h_\sigma\beta$.

1.2. Es sei $\sigma < S\beta$. Dann hat man nach Lemma 7.7 d) $e(h_\sigma\beta) \geq \sigma^+ > \omega^\alpha = e(h_\sigma\alpha)$. Nach (5) folgt $h_\sigma\alpha < h_\sigma\beta$.

2. $\tau = S\alpha$, $h_\sigma\alpha = g_\sigma\alpha + \omega^\alpha$, $h_\tau\alpha = g_\tau\alpha + \omega^\alpha$.

Aus $h_\tau\alpha < h_\tau\beta$ folgt dann $\tau \leq S\beta$.

2.1. Es sei $\tau = S\beta$. Dann ist $h_\sigma\beta = g_\sigma\beta + \omega^\beta$ und $h_\tau\beta = g_\tau\beta + \omega^\beta$. Aus $h_\tau\alpha < h_\tau\beta$ folgt in diesem Fall nach Lemma 7.9 b) $\alpha < \beta$. Es folgt $e(h_\sigma\alpha) = \omega^\alpha < \omega^\beta = e(h_\sigma\beta)$. Nach (5) folgt $h_\sigma\alpha < h_\sigma\beta$.

2.2. Es sei $\tau < S\beta$ und $h_\sigma\beta = h_\tau\beta$. Dann hat man nach Lemma 7.7 d) $e(h_\sigma\beta) = e(h_\tau\beta) \geq \tau^+ > \omega^\alpha = e(h_\sigma\alpha)$. Nach (5) folgt $h_\sigma\alpha < h_\sigma\beta$.

2.3. Es sei $\tau < S\beta$ und $h_\sigma\beta \neq h_\tau\beta$. Dann ist $h_\sigma\beta = g_\sigma h_\tau\beta + \psi\tau(h_\tau\beta)$. Aus $g_\tau\alpha < h_\tau\alpha < h_\tau\beta$ folgt in diesem Fall nach Lemma 7.8 a) $\alpha < \psi\tau(h_\tau\beta)$. Es folgt $e(h_\sigma\alpha) = \omega^\alpha < \psi\tau(h_\tau\beta) = e(h_\sigma\beta)$. Nach (5) folgt $h_\sigma\alpha < h_\sigma\beta$.

3. $\tau < S\alpha$, $h_\sigma\alpha = g_\sigma h_\tau\alpha + \psi\tau(h_\tau\alpha)$, $h_\tau\alpha \leq G_\sigma h_\tau\alpha$. Aus $h_\tau\alpha < h_\tau\beta$ folgt dann $\tau \leq S\beta$.

3.1. Es sei $\tau = S\beta$. Dann ist $h_\sigma\beta = g_\sigma\beta + \omega^\beta$ und $h_\tau\beta = g_\tau\beta + \omega^\beta$. In diesem Fall ist $\beta < \alpha$, so daß nur $h_\sigma\alpha \leq h_\sigma\beta$ zu beweisen ist. Nach Lemma 7.7 d) hat man $e(h_\tau\alpha) \geq \tau^+ > \omega^\beta = e(h_\tau\beta)$. Aus $h_\tau\alpha < h_\tau\beta$ folgt daher nach Lemma 1.3 b) $h_\tau\alpha \leq g_\tau\beta$. Nach Lemma 7.8 b) folgt $\psi\tau(h_\tau\alpha) \leq \beta$. Ist $\psi\tau(h_\tau\alpha) < \beta$, so hat man $e(h_\sigma\alpha) = \psi\tau(h_\tau\alpha) < \omega^\beta = e(h_\sigma\beta)$. Nach (5) folgt dann $h_\sigma\alpha < h_\sigma\beta$. Es sei nun $\psi\tau(h_\tau\alpha) = \beta$. Dann ist $\omega^\beta = \beta$ und nach Lemma 6.2 $G_\sigma\beta = G_\sigma h_\tau\alpha \cup \{h_\tau\alpha\}$. Da $h_\tau\alpha \leq G_\sigma h_\sigma\alpha$ ist, folgt $g_\sigma\beta = g_\sigma h_\tau\alpha$. Hiermit ergibt sich $h_\sigma\alpha = h_\sigma\beta$.

3.2. Es sei $\tau < S\beta$ und $h_\sigma\beta = h_\tau\beta$. Dann hat man nach Lemma 7.7 d) $e(h_\sigma\beta) = e(h_\tau\beta) \geq \tau^+ > \psi\tau(h_\tau\alpha) = e(h_\sigma\alpha)$. Nach (5) folgt $h_\sigma\alpha < h_\sigma\beta$.

3.3. Es sei $\tau < S\beta$ und $h_\sigma\beta \neq h_\tau\beta$. Dann ist $h_\sigma\beta = g_\sigma h_\tau\beta + \psi\tau(h_\tau\beta)$. Aus $h_\tau\alpha < h_\tau\beta$ folgt $e(h_\sigma\alpha) = \psi\tau(h_\tau\alpha) < \psi\tau(h_\tau\beta) = e(h_\sigma\beta)$. Nach (5) folgt $h_\sigma\alpha < h_\sigma\beta$.

Lemma 7.12. Ist $\alpha < I$, $\beta < I$, $\sigma^+ = \tau$ und $h_\tau\alpha = h_\tau\beta$, so folgt $h_\sigma\alpha = h_\sigma\beta$.

Beweis. Es kommen folgende drei Fälle in Betracht.

1. $S\alpha \leq \sigma$. Dann hat man $\alpha = h_\tau\alpha = h_\tau\beta \geq \beta$. Es folgt $S\beta \leq \sigma$ und $h_\tau\beta = \beta$, also $\alpha = \beta$ und somit auch $h_\sigma\alpha = h_\sigma\beta$.

2. $S\alpha = \tau$. Dann ist $h_\tau\alpha = g_\tau\alpha + \omega^\alpha$, also $e(h_\tau\beta) = e(h_\tau\alpha) = \omega^\alpha < \tau^+$. Nach Lemma 7.7 d) folgt $S\beta \leq \tau$. Hieraus und aus $\alpha \leq h_\tau\alpha = h_\tau\beta$ folgt $S\beta = \tau$. Dann ist $h_\tau\beta = g_\tau\beta + \omega^\beta$. Aus $h_\tau\alpha = h_\tau\beta$ folgt nun $\alpha = \beta$, also auch $h_\sigma\alpha = h_\sigma\beta$.

3. $\tau < S\alpha$. Dann hat man nach Lemma 7.7 d) $e(h_\tau\beta) = e(h_\tau\alpha) \geq \tau^+$. Hieraus folgt $\tau < S\beta$.

3.1. Es sei $G_\sigma h_\tau\alpha < h_\tau\alpha$. Dann ist auch $G_\sigma h_\tau\beta < h_\tau\beta$. In diesem Fall ist $h_\sigma\alpha = h_\tau\alpha = h_\tau\beta = h_\sigma\beta$.

3.2. Es sei $h_\tau\alpha \leq G_\sigma h_\tau\alpha$. Dann ist auch $h_\tau\beta \leq G_\sigma h_\tau\beta$. In diesem Fall ist $h_\sigma\alpha = g_\sigma h_\tau\alpha + \psi\tau(h_\tau\alpha)$ und $h_\sigma\beta = g_\sigma h_\tau\beta + \psi\tau(h_\tau\beta)$. Aus $h_\tau\alpha = h_\tau\beta$ folgt auch in diesem Fall $h_\sigma\alpha = h_\sigma\beta$.

§ 8. Die Kollabierungsfunktion d_σ

Definition von $d_\sigma\alpha$ für $\alpha < I$.

$$d_\sigma\alpha := \begin{cases} \alpha, & \text{wenn } S\alpha \leq \sigma \text{ ist} \\ \psi\sigma(h_\sigma\alpha), & \text{wenn } \sigma < S\alpha \text{ ist.} \end{cases}$$

(Man hat nach Lemma 7.7 a) $G_\sigma h_\sigma\alpha < h_\sigma\alpha$, folglich nach Lemma 6.1 $h_\sigma\alpha \in C_\sigma(h_\sigma\alpha)$.)

Folgerung. $\alpha < I \Rightarrow d_\sigma\alpha < \sigma^+$

Lemma 8.1. Für $\alpha < I$ gilt:

a) $S\alpha \leq \sigma \Rightarrow K_\sigma\alpha \leq d_\sigma\alpha$

b) $\sigma < S\alpha \Rightarrow K_\sigma\alpha < d_\sigma\alpha$

Beweis. a) gilt, weil in diesem Fall $d_\sigma \alpha = \alpha$ ist.
b) Für $\sigma < S\alpha$ hat man nach Lemmata 7.7 und 6.8

$$K_\sigma \alpha \subseteq K_\sigma h_\sigma \alpha < \psi\sigma(h_\sigma \alpha) = d_\sigma \alpha$$

Definition. $\alpha \ll_\tau \beta$ mit $\beta < I$ bedeute, daß $\alpha < \beta$ und $K_\sigma \alpha < d_\sigma \beta$ für alle $\sigma \geq \tau$ gilt.

Lemma 8.2. $\alpha < \beta < I \Rightarrow \alpha \ll_{Sb} \beta$

Beweis. Für $\sigma \geq S\beta$ hat man $K_\sigma \alpha \leq \alpha < \beta = d_\sigma \beta$.

Lemma 8.3. Aus $\alpha \ll_\tau \beta$ mit $\beta < I$ folgt $K_\sigma \alpha < \psi\sigma(h_\sigma \beta)$ für alle $\sigma \geq \tau$.

Beweis. Man hat

$$K_\sigma \beta \subseteq K_\sigma h_\sigma \beta < \psi\sigma(h_\sigma \beta)$$

Ist $S\beta \leq \sigma$, so folgt $\beta < \psi\sigma(h_\sigma \beta)$. Aus $\alpha < \beta$ folgt dann

$$K_\sigma \alpha \leq \alpha < \beta < \psi\sigma(h_\sigma \beta)$$

Ist $\tau \leq \sigma < S\beta$, so gilt die Behauptung aufgrund der Definition von $\alpha \ll_\tau \beta$, weil dann $d_\sigma \beta = \psi\sigma(h_\sigma \beta)$ ist.

Lemma 8.4. Aus $\alpha \ll_\tau \beta$ mit $\beta < I$ folgt $h_\sigma \alpha < h_\sigma \beta$ für alle $\sigma \geq \tau$.

Beweis. Für $S\beta < \sigma$ hat man $h_\sigma \alpha < \beta = h_\sigma \beta$. Es gibt daher eine kleinste Zahl $\pi \geq \tau$, so daß $h_\sigma \alpha < h_\sigma \beta$ für alle $\sigma \geq \pi$ gilt. Angenommen, es sei $\pi > \tau$. Dann hat man nach Lemma 7.7 c) $\pi = \sigma^+$ mit $h_\pi \alpha < h_\pi \beta$ und $\sigma \geq \tau$, folglich nach Lemma 8.3 $K_\sigma \alpha < \psi\sigma(h_\sigma \beta)$. Nach Lemma 7.11 b) folgt $h_\sigma \alpha < h_\sigma \beta$ im Widerspruch zur Minimalität von π. Somit ist $\pi = \tau$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Lemma 8.5. Aus $\alpha \ll_\tau \beta$ mit $\beta < I$ folgt $d_\sigma \alpha < d_\sigma \beta$ für alle $\sigma \geq \tau$.

Beweis. Ist $S\beta \leq \sigma$, so hat man $d_\sigma \alpha = \alpha < \beta = d_\sigma \beta$. Ist $S\alpha \leq \sigma < S\beta$ und $\tau \leq \sigma$, so hat man $K_\sigma \alpha < d_\sigma \beta = \psi\sigma(h_\sigma \beta)$, woraus $d_\sigma \alpha = \alpha < d_\sigma \beta$ folgt. Ist schließlich $\tau \leq \sigma < S\alpha$, so hat man

$$d_\sigma \alpha = \psi\sigma(h_\sigma \alpha) < \psi\sigma(h_\sigma \beta) = d_\sigma \beta,$$

weil hierfür nach Lemma 8.4 $h_\sigma \alpha < h_\sigma \beta$ ist.

Lemma 8.6. Aus $\alpha \ll_\tau \beta$ mit $\beta < I$ und $\tau \leq \pi \ll_\tau \beta$ folgt $d_\pi \alpha \ll_\tau \beta$.

Beweis. Ist $S\alpha \leq \pi$, so gilt die Behauptung trivialerweise, weil dann $d_\pi \alpha = \alpha$ ist. Es sei nun $\tau \leq \pi < S\alpha$. Dann ist $d_\pi \alpha = \psi\pi(h_\pi \alpha)$. Aus $\alpha < \beta$ folgt

(1) $d_\pi\alpha < \alpha < \beta$

Aus $\alpha \ll_\tau \beta$ und $\pi \ll_\tau \beta$ folgt

(2) $\tau \leq \sigma < \pi \Rightarrow K_\sigma d_\pi\alpha = K_\sigma\pi \cup K_\sigma h_\pi\alpha = K_\sigma\pi \cup K_\sigma\alpha < d_\sigma\beta$

Aus $\alpha \ll_\tau \beta$ folgt nach Lemma 8.5

(3) $\pi \leq \sigma \Rightarrow K_\sigma d_\pi\alpha = \{d_\pi\alpha\} < d_\pi\beta \leq d_\sigma\beta$

Aus (1) bis (3) folgt die Behauptung $d_\pi\alpha \ll_\tau \beta$.

Lemma 8.7. Für $\pi < S\beta < I$ und $\gamma = d_\pi\beta = \psi\pi(h_\pi\beta)$ gilt:

a) $h_\pi\beta < h_\pi\gamma$

b) $\sigma < \pi \Rightarrow K_\sigma\beta < \psi\sigma(h_\sigma\gamma)$

c) $\sigma < \pi \Rightarrow h_\sigma\beta \leq h_\sigma\gamma$

Beweis. a) Aus Lemma 6.2 folgt

$$G_\pi\gamma = G_\pi h_\pi\beta \cup \{h_\pi\beta\}$$

Nach Lemma 7.7 a) ist $G_\pi h_\pi\beta < h_\pi\beta$. Es folgt $g_\pi\gamma = h_\pi\beta$. Man hat $S\gamma = \pi$, folglich $h_\pi\gamma = g_\pi\gamma + \omega^\gamma$. Hiermit ergibt sich $h_\pi\beta < h_\pi\gamma$.

b) Für $\sigma < \pi$ hat man

$$K_\sigma\beta = K_\sigma h_\pi\beta \subseteq K_\sigma\gamma \subseteq K_\sigma h_\sigma\gamma < \psi\sigma(h_\sigma\gamma)$$

c) Aus a) folgt, daß es eine kleinste Zahl $\tau \leq \pi$ gibt, so daß $h_\sigma\beta \leq h_\sigma\gamma$ für alle σ mit $\tau \leq \sigma \leq \pi$ gilt. Angenommen, es sei $\tau > 0$. Dann hat man nach Lemma 7.7 c) $\tau = \sigma^+$ mit $h_\tau\beta \leq h_\tau\gamma$ und $\sigma < \pi$, folglich nach b) $K_\sigma\beta < \psi\sigma(h_\sigma\gamma)$. Ist $h_\tau\beta < h_\tau\gamma$, so folgt nach Lemma 7.11 a) $h_\sigma\beta \leq h_\sigma\gamma$. Ist $h_\tau\beta = h_\tau\gamma$, so folgt nach Lemma 7.12 $h_\sigma\beta = h_\sigma\gamma$. In jedem Fall ergibt sich ein Widerspruch zur Minimalität von τ. Somit ist $\tau = 0$, womit die Behauptung c) bewiesen ist.

Lemma 8.8. Aus $\alpha \ll_\tau \beta$ mit $\beta < I$ folgt $d_\pi\alpha \ll_\tau d_\pi\beta$ für alle $\pi \geq \tau$.

Beweis. Ist $S\beta \leq \pi$, so gilt die Behauptung nach Voraussetzung, weil dann $d_\pi\alpha = \alpha$ und $d_\pi\beta = \beta$ ist. Es sei nun $\pi < S\beta$ und $\gamma = d_\pi\beta = \psi\pi(h_\pi\beta)$. Da $\pi \geq \tau$ ist, hat man nach Lemma 8.5

(1) $d_\pi\alpha < d_\pi\beta = \gamma$

Es sei $\tau \leq \sigma < \pi$. Ist $S\alpha \leq \pi$, so ist $d_\pi\alpha = \alpha$. Andernfalls ist $d_\pi\alpha = \psi\pi(h_\pi\alpha)$ und

$$K_\sigma d_\pi\alpha = K_\sigma\pi \cup K_\sigma h_\pi\alpha = K_\sigma\pi \cup K_\sigma\alpha$$

Man hat also in jedem Fall

(2) $K_\sigma d_\pi\alpha \subseteq K_\sigma\pi \cup K_\sigma\alpha$

Aufgrund von $\alpha \ll_\tau \beta$ hat man

$$K_\sigma\alpha < d_\sigma\beta = \psi\sigma(h_\sigma\beta)$$

Nach Lemma 8.7 c) folgt

(3) $K_\sigma\alpha < \psi\sigma(h_\sigma\gamma) = d_\sigma\gamma$

Außerdem hat man

(4) $K_\sigma\pi \subseteq K_\sigma\gamma \subseteq K_\sigma h_\sigma\gamma < \psi\sigma(h_\sigma\gamma) = d_\sigma\gamma$

Aus (2) bis (4) folgt

(5) $\tau \leq \sigma < \pi \Rightarrow K_\sigma d_\pi\alpha < d_\sigma\gamma$

Aus $\alpha \ll_\tau \beta$ folgt auch nach Lemma 8.5

(6) $\pi \leq \sigma \Rightarrow K_\sigma d_\pi\alpha \leq d_\pi\alpha < d_\pi\beta = \gamma = d_\sigma\gamma$

Aus (1), (5) und (6) folgt die Behauptung $d_\pi\alpha \ll_\tau \gamma = d_\pi\beta$.

§ 9. Die allgemeine $\ll_\tau$-Relation

Definition. Für beliebige Ordinalzahlen α und β aus $T(I)$ bedeute $\alpha \ll_\tau \beta$, daß folgendes gilt:

(τ.1) $\alpha < \beta$

(τ.2) $K\alpha < d\beta$

(τ.3) $K_\sigma\alpha < d_\sigma d\beta$ für alle $\sigma \geq \tau$.

Im Fall $\beta < I$ ist die Bedingung (τ.2) überflüssig, weil sie dann aus (τ.1) folgt. Die Definition stimmt daher für $\beta < I$ mit der vorher angegebenen Definition von $\alpha \ll_\tau \beta$ überein.

Wir beweisen zunächst, daß $d\alpha \ll_\tau d\beta$ aus $\alpha \ll_\tau \beta$ folgt.

Definitionen für Ordinalzahlenmengen M und N. $M \leq N$ bedeute, daß es zu jedem $\alpha \in M$ ein $\beta \in N$ mit $\alpha \leq \beta$ gibt. $M \sim N$ bedeute, daß $M \leq N$ und $N \leq M$ gilt.

Lemma 9.1. $K_\sigma\gamma \leq K\gamma$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$.

Lemma 9.2.

a) $\beta \in C(\beta) \Rightarrow K_\sigma\beta \leq K_\sigma\Psi\beta$

b) $\beta \in C_\pi(\beta) \Rightarrow K_\sigma\pi \leq K_\sigma\psi\pi\beta$

Beweis. a) Ist $\Psi\beta \leq \sigma$, so ist nach den Lemmata 9.1 und 5.5 $K_\sigma\beta \leq K\beta < \{\Psi\beta = K_\sigma\Psi\beta$. Andernfalls ist $K_\sigma\beta = K_\sigma\Psi\beta$.

b) Ist $\pi \leq \sigma$, so ist $K_\sigma\pi \leq \pi < \{\psi\pi\beta\} = K_\sigma\psi\pi\beta$. Andernfalls ist $K_\sigma\pi \subseteq K_\sigma\pi \cup K_\sigma\beta = K_\sigma\psi\pi\beta$.

Lemma 9.3. $K_\sigma G\gamma \leq K_\sigma\gamma$

Beweis durch Induktion nach $gr(\gamma)$.

1. Für $\gamma = 0$ und für $\gamma = I$ gilt die Behauptung.
2. Für $\gamma =_{NF} \omega^\xi + \eta$ folgt sie aus der I.V.
3. Für $\gamma = \Psi\beta$ mit $\beta \in C(\beta)$ ist $K_\sigma G\gamma = K_\sigma G\beta \cup K_\sigma\beta$, folglich nach I.V. $K_\sigma G\gamma \leq K_\sigma\beta$. Nach Lemma 9.2 a) folgt $K_\sigma G\gamma \leq K_\sigma\gamma$.
4. Für $\gamma = \psi\pi\beta$ mit $\beta \in C_\pi(\beta)$ ist $K_\sigma G\gamma = K_\sigma G\pi$, folglich nach I.V. $K_\sigma G\gamma \leq K_\sigma\pi$. Nach Lemma 9.2 b) folgt $K_\sigma G\gamma \leq K_\sigma\gamma$.

Lemma 9.4. $K_\sigma h\alpha \sim K_\sigma\alpha$

Beweis. Man hat $h\alpha = g\alpha + \omega^\alpha$, folglich

$$K_\sigma\alpha \subseteq K_\sigma h\alpha \subseteq K_\sigma G\alpha \cup K_\sigma\alpha$$

Nach Lemma 9.3. folgt $K_\sigma h\alpha \sim K_\sigma\alpha$.

Lemma 9.5. Aus $\alpha \ll_\tau \beta$ folgt $d\alpha \ll_\tau d\beta$.

Beweis. Man hat $\alpha < \beta$ und $K\alpha < d\beta$. Nach Lemma 5.7 folgt

(1) $\quad d\alpha < d\beta$

Wir haben noch zu beweisen:

(2) $\quad \tau \leq \sigma \Rightarrow K_\sigma d\alpha < d_\sigma d\beta$

Als Voraussetzung (τ.3) haben wir

(3) $\quad \tau \leq \sigma \Rightarrow K_\sigma\alpha < d_\sigma d\beta$

Ist $\alpha < I$, so ist $d\alpha = \alpha$, so daß (2) aufgrund von (3) gilt. Es sei nun $I \leq \alpha$. Dann ist $d\alpha = \Psi(h\alpha)$ und $d\beta = \Psi(h\beta)$.

1. Ist $d\beta \leq \sigma$, so hat man nach (1)
$$K_\sigma d\alpha = \{d\alpha\} < d\beta = d_\sigma d\beta$$
2. Ist $d\alpha \leq \sigma < d\beta$, so hat man
$$K_\sigma d\alpha = \{d\alpha\} \leq \sigma < \psi\sigma(\mathrm{h}_\sigma d\beta) = d_\sigma d\beta$$
3. Ist $\sigma < d\alpha$, so ist $K_\sigma d\alpha = K_\sigma h\alpha$, so daß (2) nach Lemma 9.4 aus (3) folgt.

Hiermit ist (2) allgemein bewiesen. Mit (1) folgt die Behauptung $d\alpha \ll_\tau d\beta$.

Lemma 9.6. Aus $\alpha \ll_\tau \beta$ folgt $d\alpha < d\beta$ und $d_\sigma d\alpha < d_\sigma d\beta$ für alle $\sigma \geq \tau$.

Beweis. Dies folgt aus den Lemmata 9.5 und 8.5.

Lemma 9.7. Aus $\alpha \ll_\tau \beta$ und $\beta \ll_\tau \gamma$ folgt $\alpha \ll_\tau \gamma$.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 9.6.

Lemma 9.8. $I \leq \alpha \Rightarrow K_\sigma\alpha < d_\sigma d\alpha$

Beweis. Man hat $d\alpha = \Psi(h\alpha)$ mit $K_\sigma\alpha \subseteq K_\sigma h\alpha$. Für $\sigma < d\alpha$ folgt

$$K_\sigma\alpha \subseteq K_\sigma h\alpha = K_\sigma d\alpha \subseteq K_\sigma h_\sigma d\alpha < \psi\sigma(h_\sigma d\alpha) = d_\sigma d\alpha$$

Für $d\alpha \leq \sigma$ hat man

$$K_\sigma\alpha \subseteq K_\sigma h\alpha \leq K(h\alpha) < \Psi(h\alpha) = d\alpha = d_\sigma d\alpha$$

Definition. $\alpha \ll \beta$ (α ist *wesentlich kleiner* als β) bedeute, daß $\alpha \ll_0 \beta$ gilt.

Lemma 9.9. $\sigma \ll \sigma^+$

Beweis. Man hat

$\sigma < \sigma^+$

$\pi < \sigma \Rightarrow K_\pi\sigma = K_\pi\sigma^+ \subseteq K_\pi h_\pi\sigma^+ < \psi\pi(h_\pi\sigma^+) = d_\pi\sigma^+$

$K_\sigma\sigma \leq \sigma < \psi\sigma(h_\sigma\sigma^+) = d_\sigma\sigma^+$

$\sigma < \pi \Rightarrow K_\pi\sigma \leq \sigma < \sigma^+ = d_\pi\sigma^+$

Hiermit ergibt sich $\sigma \ll \sigma^+$.

Lemma 9.10. Ist $I \leq \eta$, $\pi < d\eta$ und $K_\sigma\pi < d_\sigma d\eta$ für alle $\sigma < \pi$, so folgt $\pi \ll \eta$.

Beweis. Aufgrund der Voraussetzungen hat man

$$\pi < \eta$$
$$K\pi = \{\pi\} < d\eta$$
$$\pi \leq \sigma < d\eta \Rightarrow K_\sigma\pi \leq \sigma < \psi\sigma(h_\sigma d\eta) = d_\sigma d\eta$$
$$d\eta \leq \sigma \Rightarrow K_\sigma\pi = \{\pi\} < d\eta = d_\sigma d\eta$$

Hiermit und mit den Voraussetzungen ergibt sich $\pi \ll \eta$.

Lemma 9.11. $\alpha < I \leq \eta,\ \alpha \ll \eta \Rightarrow \Omega_\alpha \ll \eta$

Beweis. 1. $\alpha = 0$. Dann hat man $\Omega_\alpha = 0 \ll \eta$.

2. $0 < \alpha < \Psi I$. Dann hat man $\alpha = 1 + \delta$ und nach Lemma 2.13

(1) $\qquad \Omega_\alpha = \Psi\delta$

Aus $\delta < I \leq h\eta$ folgt

(2) $\qquad \Psi\delta < \Psi(h\eta) = d\eta$

Aus $\alpha \ll \eta$ folgt

(3) $\qquad \sigma < \Psi\delta \Rightarrow K_\sigma\Psi\delta = K_\sigma\delta = K_\sigma\alpha < d_\sigma d\eta$

Aus (1) bis (3) folgt $\Omega_\alpha \ll \eta$ nach Lemma 9.10.

3. $\Psi I \leq \alpha < I$. Dann hat man $S\alpha = \Psi\beta$ mit $I \leq \beta \in C(\beta)$ und nach Lemma 2.15

(4) $\qquad \Omega_\alpha = \Psi(q\beta + \gamma) \quad$ mit $\alpha = \Psi(q\beta) + \gamma$

Aus $\alpha \ll \eta$ folgt

$$\Psi(q\beta) \leq K\alpha < d\eta = \Psi(h\eta)$$

Es folgt $q\beta < h\eta$. Da $\gamma < I \leq \omega^\eta = e(h\eta)$ ist, folgt nach Lemma 1.3 a) $q\beta + \gamma < h\eta$. Hieraus folgt

(5) $\quad \Psi(q\beta + \gamma) < \Psi(h\eta) = d\eta$

Aus $\alpha \ll \eta$ folgt nach Lemma 6.10

(6) $\quad \sigma < \Psi\beta \Rightarrow K_\sigma q\beta \subseteq K_\sigma\beta = K_\sigma S\alpha \subseteq K_\sigma\alpha < d_\sigma d\eta$

Aus $\beta \in C(\beta)$ folgt nach Lemma 3.9 $\beta \in C_{\psi\beta}(0)$. Für $\Psi\beta \leq \sigma$ folgt $\beta \in C_\sigma(0)$, $K_\sigma\beta \subset C_\sigma(0)$ und $K_\sigma\beta < \psi\sigma 0$. Hiermit ergibt sich

(7) $\quad \Psi\beta \leq \sigma < d\eta \Rightarrow K_\sigma q\beta \subseteq K_\sigma\beta < \psi\sigma 0 < \psi\sigma(h_\sigma\eta) = d_\sigma d\eta$

Aus $\alpha \ll \eta$ folgt auch

(8) $\quad K_\sigma\gamma \subseteq K_\sigma\alpha < d_\sigma d\eta$

Aus (6) bis (8) folgt

(9) $\quad \sigma < \Psi(q\beta + \gamma) \Rightarrow K_\sigma\Psi(q\beta + \gamma) = K_\sigma q\beta \cup K_\sigma\gamma < d_\sigma d\eta$

Aus (4), (5) und (9) folgt $\Omega_\alpha \ll \eta$ nach Lemma 9.10.

Induktive Definition der *natürlichen Summe* $\alpha \# \beta$.

1. $\alpha \# 0 := \alpha$.
2. Für $\alpha \geq \beta > 0$ sei

$$\alpha \# \beta :=_{\mathrm{NF}} \begin{cases} \omega^\xi + (\eta \# \beta), & \text{wenn } \alpha =_{\mathrm{NF}} \omega^\xi + \eta \text{ ist,} \\ \omega^\alpha + \beta, & \text{wenn } \alpha \in E \text{ ist.} \end{cases}$$

3. Für $\alpha < \beta$ sei $\alpha \# \beta := \beta \# \alpha$

Folgerungen:

$\alpha \# \beta = \beta \# \alpha$. $(\alpha \# \beta) \# \gamma = \alpha \# (\beta \# \gamma)$,
$K(\alpha \# \beta) = K\alpha \cup K\beta$, $K_\sigma(\alpha \# \beta) = K_\sigma\alpha \cup K_\sigma\beta$

Definition. $\alpha \leqq \beta$ bedeute, daß $\alpha \ll \beta$ oder $\alpha = \beta$ gilt.

Lemma 9.12.

a) $\alpha \leqq \alpha \# \beta$
b) $\alpha \leqq \omega^\alpha$

Beweis mit Hilfe der Lemmata 5.6, 8.1 und 9.8

Lemma 9.13.

a) $\alpha \ll_\tau \gamma$, $\beta \ll_\tau \gamma$, $\alpha \# \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \# \beta \ll_\tau \gamma$
b) $\alpha \ll_\tau \gamma$, $\omega^\alpha < \gamma \Rightarrow \omega^\alpha \ll_\tau \gamma$

Beweis trivial.

Lemma 9.14.

a) $\alpha \ll_\tau \beta \Rightarrow \alpha \# \gamma \ll_\tau \beta \# \gamma$

b) $\alpha \ll_\tau \beta \Rightarrow \omega^\alpha \ll_\tau \omega^\beta$

Beweis mit Hilfe der Lemmata 9.12 und 9.13.

§ 10. Herleitungsfunktionen

Induktive Definition der *Herleitungsfunktionen* und des *Definitionsbereiches* $D(f)$ einer Herleitungsfunktion f.

1. Die identische Funktion id ist eine Herleitungsfunktion mit $D(id) := T(I)$ und $id(\alpha) := \alpha$ für alle $\alpha \in T(I)$.

2. Ist f eine Herleitungsfunktion und $0 < \gamma \in T(I)$, so ist $\gamma \# f$ eine Herleitungsfunktion mit $D(\gamma \# f) := D(f)$ und $(\gamma \# f)(\alpha) := \gamma \# f(\alpha)$ für alle $\alpha \in D(f)$.

3. Ist f eine Herleitungsfunktion, so ist ω^f eine Herleitungsfunktion mit $D(\omega^f) := D(f)$ und $(\omega^f)(\alpha) := \omega^{f(\alpha)}$ für alle $\alpha \in D(f)$.

4. Ist f eine Herleitungsfunktion, so ist df eine Herleitungsfunktion mit $D(df) := \{\alpha \in D(f) : \alpha < I\}$ und $(df)(\alpha) := d(f(\alpha))$ für alle $\alpha \in D(df)$.

5. Ist f eine Herleitungsfunktion, so ist $d_\sigma f$ eine Herleitungsfunktion mit $D(d_\sigma f) := \{\alpha \in D(f) : S\alpha \leq \sigma, f(\alpha) < I\}$ und $(d_\sigma f)(\alpha) := d_\sigma f(\alpha)$ für alle $\alpha \in D(d_\sigma f)$.

Folgerung. Für jede Herleitungsfunktion f gilt:
$\alpha \in D(f) \Rightarrow \alpha, f(\alpha) \in T(I)$

Definition. $\alpha \ll_I \beta$ bedeute nur, daß $\alpha < \beta$ ist.

Lemma 10.1. Für jede Herleitungsfunktion f gilt
$\alpha, \beta \in D(f),\ \alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) \ll_{S\beta} f(\beta)$

Beweis durch Induktion nach der induktiven Definition von f. Ist $f = id$, so gilt die Behauptung im Fall $\beta < I$ nach Lemma 8.2, andernfalls trivialerweise. Ist $f = \gamma \# g$ oder $f = \omega^g$, so folgt die Behauptung nach Lemma 9.14 aus der I. V. Ist $f = dg$, so folgt aus $\beta \in D(f)$, daß $\beta < I$ ist. Dann folgt die Behauptung nach Lemma 9.5 aus der I.V. Ist $f = d_\sigma g$, so folgt aus $\beta \in D(f)$, daß $S\beta \leq \sigma$ und $g(\beta) < I$ ist. Dann folgt die Behauptung nach Lemma 8.8 aus der I.V.

Lemma 10.2. Für jede Herleitungsfunktion f gilt:

$$\alpha < \beta \in D(f) \Rightarrow \alpha \in D(f)$$

Beweis durch Induktion nach der induktiven Definition von f unter Benutzung von Lemma 10.1.

Lemma 10.3. Für jede Herleitungsfunktion f mit $I \in D(f)$ gilt:

$$\alpha < I,\ \beta < I \Rightarrow f(\alpha) \# \beta < f(I)$$

Beweis. Durch Induktion nach γ ergibt sich:

$$\alpha < I,\ \gamma < I \Rightarrow f(\alpha) + \gamma \leq f(\alpha + \gamma) < f(I)$$

Hieraus folgt die Behauptung, da $f(\alpha) \# \beta < f(\alpha) + \omega^{\beta+1}$ ist.

Lemma 10.4. Für jede Herleitungsfunktion f gilt:
$\alpha \in D(f) \Rightarrow \alpha \lessdot f(\alpha)$

Beweis durch Induktion nach der induktiven Definition von f. Für $f = id$ gilt die Behauptung. Für $f = \gamma \# g$ und für $f = \omega^g$ folgt sie mit Lemma 9.12 aus der I.V. Ist $f = dg$, so folgt aus $\alpha \in D(f)$, daß $\alpha < I$ ist. Dann folgt $\alpha = d\alpha \lessdot d(g(\alpha)) = f(\alpha)$ nach Lemma 9.5 aus der I.V. Ist $f = d_\sigma g$, so folgt aus $\alpha \in D(f)$, daß $S\alpha \leq \sigma$ und $g(\alpha) < I$ ist. Dann folgt $\alpha = d_\sigma \alpha \lessdot d_\sigma g(\alpha) = f(\alpha)$ nach Lemma 8.8 aus der I.V.

Mit $\bar{\tau}$ bezeichnen wir im folgenden eine endliche (eventuell leere) Menge von Anfangszahlen $< I$ aus $T(I)$. Ist $\bar{\tau}$ leer, so sei $d_{\bar{\tau}}\alpha := \alpha$. Ist $\bar{\tau} = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ mit $\tau_1 < \ldots < \tau_n$, so sei $d_{\bar{\tau}}\alpha := d_{\tau_1} \ldots d_{\tau_n} \alpha$.

Lemma 10.5.
a) $d_{\bar{\tau}}d(\alpha \# \beta) \lessdot \gamma \Rightarrow d_{\bar{\tau}}d\beta \lessdot \gamma$
b) $d_{\bar{\tau}}d(\omega^\beta) \lessdot \gamma \Rightarrow d_{\bar{\tau}}d\beta \lessdot \gamma$

Beweis. Man hat $\beta \lessdot \alpha \# \beta$. Es folgt $d_{\bar{\tau}}d\beta \lessdot d_{\bar{\tau}}d(\alpha \# \beta)$. Hiermit erhält man a). Entsprechend ergibt sich b).

Lemma 10.6.
a) $d_{\bar{\tau}}d(\alpha \# \beta) \lessdot \gamma,\ \eta < \beta,\ d_{\bar{\tau}}d\eta \ll \gamma \Rightarrow d_{\bar{\tau}}d(\alpha \# \eta) \ll \gamma$
b) $d_{\bar{\tau}}d(\omega^\beta) \lessdot \gamma,\ \eta < \beta,\ d_{\bar{\tau}}d\eta \ll \gamma \Rightarrow d_{\bar{\tau}}d(\omega^\eta) \ll \gamma$

Beweis. $g\eta$ sei $d_{\bar{\tau}}d(\alpha \# \eta)$ oder $d_{\bar{\tau}}d(\omega^\eta)$. Aus den Voraussetzungen folgt $K_\sigma g\eta < d_\sigma d\gamma$ für alls σ. Hiermit ergeben sich die Behauptungen.

Lemma 10.7. Ist f eine Herleitungsfunktion mit $\alpha < \beta \in D(f)$, $\beta < I$ und $S\beta \leq \tau_i$ für alle $\tau_i \in \bar{\tau}$, so gilt:

$$\alpha \ll \gamma,\ d_{\bar{\tau}} d(f(\beta)) \leqq \gamma \Rightarrow d_{\bar{\tau}} d(f(\alpha)) \ll \gamma$$

Beweis durch Induktion nach der induktiven Definition von f.

1. Es sei $f = id$. Dann hat man $d_{\bar{\tau}} d(f(\alpha)) = d_{\bar{\tau}} d\alpha = \alpha \ll \gamma$.

2. f sei $\delta \# g$ oder ω^g. Dann folgt aus $d_{\bar{\tau}} d(f(\beta)) \leqq \gamma$ nach Lemma 10.5 $d_{\bar{\tau}} d(g(\beta) \leqq \gamma$. Nach I.V. folgt $d_{\bar{\tau}} d(g(\alpha)) \ll \gamma$. Da $g(\alpha) < g(\beta)$ ist, folgt nach Lemma 10.6 $d_{\bar{\tau}} d(f(\alpha)) \ll \gamma$.

3. f sei dg oder $d_\alpha g$. Dann folgt die Behauptung aus der I.V.

Lemma 10.8. Für jede Herleitungsfunktion f mit $\alpha < \beta \in D(f)$ gilt:

$$\alpha \ll \gamma, f(\beta) \leqq \gamma \Rightarrow f(\alpha) \ll \gamma$$

Beweis durch Induktion nach der induktiven Definition von f. Im Fall $f = id$ gilt die Behauptung trivialerweise. Ist $f(\beta) < I$, so ist auch $\beta < I$. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 10.7. Es sei schließlich $f \neq id$ und $I \leq f(\beta)$. Dann ist entweder $f = \delta \# g$ oder $f = \omega^g$. In beiden Fällen folgt die Behauptung aus der I.V.

Corollar 10.8. Für jede Herleitungsfunktion f mit $\alpha < \beta \in D(f)$ gilt:

a) $f(\alpha) \ll f(\beta) \# \alpha$

b) $\alpha \ll f(\beta) \Rightarrow f(\alpha) \ll f(\beta)$

Beweis. a) folgt aus Lemma 10.8 aufgrund von $\alpha \ll f(\beta) \# \alpha$ und $f(\beta) \leqq f(\beta) \# \alpha$.

b) gilt nach Lemma 10.8 für $\gamma = f(\beta)$.

Lemma 10.9. Ist f eine Herleitungsfunktion mit $\sigma^+ \in D(f)$ und $f(\sigma^+) < I$, so gilt $f(d_\alpha f(0)) \ll f(\sigma^+)$.

Beweis. Man hat nach Corollar 10.8 a)

(1) $\qquad f(0) \ll f(\sigma^+)$

und nach den Lemmata 9.9 und 10.4

(2) $\qquad \sigma \ll f(\sigma^+)$

Aus (1) und (2) folgt nach Lemma 8.6

$$d_\alpha f(0) \ll f(\sigma^+)$$

Da $d_\alpha f(0) < \sigma^+$ ist, folgt nach Corollar 10.8 b)

$$f(d_\alpha f(0)) \ll f(\sigma^+).$$

Literatur

[1] W. Buchholz: Über Teilsysteme von $\overline{\theta}(\{g\})$. Arch. f. Math. Logik u. Grundl. 18 (1976), 85–98.
[2] W. Buchholz: Collapsing Functions. München 1982, unveröffentlicht.