„Syntaktische Abgrenzungen von formalen Systemen der Π^1_1-Analysis und Δ^1_2-Analysis"

von **Wilfried Buchholz** und **Kurt Schütte** in München

Einleitung

A_2 sei die Arithmetik 2. Ordnung mit den Axiomen und Schlußregeln der klassischen Prädikatenlogik 2. Ordnung und der rekursiven Zahlentheorie. Wir betrachten Teilsysteme der klassischen Analysis, die sich aus A_2 durch Hinzunahme von gewissen Komprehensionsaxiomen oder Komprehensionsregeln mit oder ohne Bar-Induktion ergeben,

T_1 sei A_2 mit dem Axiomenschema der Π^1_1-Komprehension:

$(\Pi^1_1\text{-}CA) \qquad \exists Y \forall x\, (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{F}[x])$

für jede Π^1_1-Formel $\mathcal{F}[a]$. T_2 sei T_1 mit Bar-Induktion.

T_3 sei A_2 mit der Schlußregel der Δ^1_2-Komprehension:

$(\Delta^1_2\text{-}CR) \qquad \forall x\, (\mathcal{A}[x] \leftrightarrow \mathcal{B}[x]) \vdash \exists Y \forall x\, (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{A}[x])$

für Σ^1_2-Formeln $\mathcal{A}[a]$ und Π^1_2-Formeln $\mathcal{B}[a]$. T_4 sei T_3 mit Bar-Induktion.

T_5 sei A_2 mit dem Axiomenschema der Δ^1_2-Komprehension:

$(\Delta^1_2\text{-}CA) \qquad \forall x\, (\mathcal{A}[x] \leftrightarrow \mathcal{B}[x]) \rightarrow \exists Y \forall x\, (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{A}[x])$

ebenfalls für Σ^1_2-Formeln $\mathcal{A}[a]$ und Π^1_2-Formeln $\mathcal{B}[a]$.

Als *Grenzzahl* $|T_i|$ einer solchen Theorie T_i bezeichnen wir die kleinste Ordinalzahl γ_i mit der Eigenschaft, daß keine rekursive Wohlordnung vom Ordnungstyp γ_i in T_i als wohlgeordnet beweisbar ist. Die Grenzzahlen aller fünf genannten Teilsysteme der Analysis sind bekannt. Wir bezeichnen sie durch Ordinalterme des Bezeichnungssystems $\bar{\Theta}(\Omega)$ (gemäß [10], § 25).

Nach J. Zucker [12] hat T_1 dieselbe Grenzzahl wie ein schwaches System $W\text{-}ID_\omega$ von ω-fach iterierten induktiven Definitionen. Nach S. Feferman [5] haben T_2 und T_3 (ebenso T_4) dieselben Grenzzahlen wie Systeme ID_ω und $ID_{<\omega^\omega}$ von ω-fach und weniger als ω^ω-fach iterierten induktiven Definitionen. Nach H. Friedman [6] hat T_5 dieselbe Grenzzahl wie $ID_{<\varepsilon_0}$. Durch

1 München Ak. Sb. 1980

Nachweise der Grenzzahlen für die betreffenden Systeme induktiver Definitionen ergaben sich nach [2] und [3] $|T_1| = \bar{\Theta}(\Omega_\omega \cdot \varepsilon_0)0$, nach [4], [8] und [9] $|T_2| = \bar{\Theta}\varepsilon_{\Omega_\omega+1}0$, $|T_3| = |T_4| = \bar{\Theta}\,\Omega_{\omega^\omega}0$ und $|T_5| = \bar{\Theta}\,\Omega_{\varepsilon_0}0$. Die diesen Grenzzahlen von T_3 bis T_5 entsprechenden ordinal diagrams von G. Takeuti wurden vorher in [11] aufgewiesen.

Wir beweisen in dieser Arbeit $|T_i| \leq \gamma_i$ für die betreffenden Grenzzahlen γ_i direkt in syntaktischer Weise ohne Bezugnahme auf Systeme induktiver Definitionen. Dies gelingt unter Verwendung der in [2] eingeführten $\Omega_{\sigma+1}$-Schlußregel und für T_5 unter zusätzlicher Verwendung einer $<$-Relation zwischen Prädikaten, wie sie in [7] für die syntaktische Abgrenzung der schwächeren $(\Delta^1_1\text{-}CA)$-Analysis benutzt wurde.

Die Theorien T_1 bis T_5 formalisieren wir durch Systeme P_1CA, GP_1CA, D_2CR, GD_2CR, D_2CA in einer Weise, wie es für die syntaktischen Untersuchungen technisch vorteilhaft ist.

Das formale System P_1CA wird eingebettet in ein halbformales System P_1^*, in dem sich die starken Schnitte der Herleitungen von Π^1_1-Formeln eliminieren lassen. Die Systeme P_1^*, GP_1CA und GD_2CR werden in einem geschichteten halbformeln System RP_1^* (mit $\Omega_{\sigma+1}$-Regel) interpretiert. Hiermit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
|P_1CA| &= |T_1| \leq \bar{\Theta}(\Omega_\omega \cdot \varepsilon_0)0 \\
|GP_1CA| &= |T_2| \leq \bar{\Theta}\varepsilon_{\Omega_\omega+1}0 \\
|D_2CR| &= |T_3| \leq |GD_2CR| = |T_4| \leq \bar{\Theta}\,\Omega_{\omega^\omega}0
\end{aligned}
$$

Das formale System D_2CA betten wir ein in ein halbformales System D_1^*, das sich aus P_1^* durch Hinzunahme der $<$-Relation ergibt. Hierbei wird $(\Delta^1_2\text{-}CA)$ auf ein schwaches Komprehensionsaxiom und eine Σ^1_2-Reflexion zurückgeführt. Für D_2^* wird ähnlich wie in [7] (für ein schwächeres System D_1^*) ein schwacher Schnitt-Eliminationssatz bewiesen. D_2^* wird interpretiert in einem geschichteten halbformalen System RD_2^*, das sich aus RP_1^* durch Hinzunahme der $<$-Relation ergibt. Hiermit erhält man

$$|D_2CA| = |T_5| < \bar{\Theta}\,\Omega_{\varepsilon_0}0$$

In § 1 werden die benötigten Eigenschaften der Ordinalterme des Bezeichnungssystems $\bar{\Theta}(\Omega)$ zusammengestellt. In den §§ 2–4 werden die stärksten hier betrachteten Systeme D_2CA, D_2^* und

RD_2^* behandelt. Mit den hierfür bewiesenen Sätzen erhält man in § 5 die beweistheoretische Abgrenzung des formalen Systems D_2CA. Als gewisse Spezialfälle ergeben sich in § 6 die entsprechenden Sätze für P_1CA, in § 7 für GP_1CA und in § 8 für GD_2CR.

§ 1. Ordinalterme des Systems $\bar{\Theta}(\Omega)$

Die kleinen griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \xi, \sigma, \tau$ (auch mit Indizes) bezeichnen im folgenden immer Ordinalterme des in [10], § 25 entwickelten Ordinalzahl-Bezeichnungssystems $\bar{\Theta}(\Omega)$. Mit m, n bezeichnen wir natürliche Zahlen und die entsprechenden Ordinalterme $<\omega$. Wie in [10], § 25 sind die *Koeffizientenmengen* $K_\nu^*\gamma$, $K_\nu\gamma$, die *Stufe* $S\gamma$ eines Ordinalterms γ und folgende Verknüpfungen von Ordinaltermen definiert:

$$\alpha + \beta,\ \alpha \# \beta,\ \omega^\alpha,\ \omega_m(\alpha),\ \varepsilon_\alpha,\ \Omega_\alpha \text{ (mit } \Omega_0 := 0)$$

sowie $\bar{\Theta}\alpha\beta$, falls $K_{S\beta}^*\alpha < \alpha$ ist. Dabei ist

$$S(\alpha + \beta) = S(\alpha \# \beta) = \max\{S\alpha, S\beta\},\ S\omega^\alpha = S\omega_m(\alpha) = S\varepsilon_\alpha = $$
$$= S\alpha,\ S\Omega_\alpha = \alpha \text{ und } S\bar{\Theta}\alpha\beta = S\beta.$$

Für beliebige Ordinalterme α, β sei (α, β) wie in [1], S. 91 definiert. Entsprechend wie in [2] definieren wir

$$D_\sigma\alpha := \begin{cases} \alpha, \text{ wenn } S\alpha \leq \sigma \text{ ist,} \\ (\alpha, \Omega_\sigma), \text{ wenn } \sigma < S\alpha \text{ ist.} \end{cases}$$

D_σ ist die *Kollabierungsfunktion* mit der Eigenschaft $SD_\sigma\alpha \leq \sigma$.

Für $0 < \nu \leq \varepsilon_0$ ergibt sich

$$D_0\Omega_\nu = \bar{\Theta}\Omega_\nu 0,\ D_0(\Omega_\nu + \varepsilon_0) = \bar{\Theta}(\Omega_\nu \cdot \varepsilon_0)0,\ D_0\varepsilon_{\Omega_\nu + 1} = \bar{\Theta}\varepsilon_{\Omega_\nu + 1}0.$$

Definitionen.

1. $\alpha \ll_\sigma \beta$ gelte genau dann, wenn $\alpha < \beta$ und $K_\tau\alpha < D_\tau\beta$ für alle $\tau \geq \sigma$ gilt.

2. $\alpha \ll \beta$ (*α ist wesentlich kleiner als β*) gelte genau dann, wenn $\alpha \ll_0 \beta$ gilt.

3. $\alpha \underline{\ll} \beta$ gelte genau dann, wenn $\alpha \ll \beta$ oder $\alpha = \beta$ gilt.

Aus diesen Definitionen folgt:

Lemma 1.

a) $\alpha \ll_\sigma \beta,\ \sigma < \tau \Rightarrow \alpha \ll_\tau \beta$
b) $\alpha < \beta < \Omega_{\sigma+1} \Rightarrow \alpha \ll_\sigma \beta$
c) $\alpha \ll_\sigma \beta,\ \sigma \leq \tau \Rightarrow D_\tau \alpha \ll_\sigma D_\tau \beta$
d) $\alpha \ll_\sigma \beta,\ \beta \ll_\sigma \gamma \Rightarrow \alpha \ll_\sigma \gamma$
e) $\alpha \ll \beta,\ \beta \ll \gamma \Rightarrow \alpha \ll \gamma$
f) $\sigma < \tau < S\alpha \Rightarrow D_\sigma \alpha < D_\sigma(D_\tau \alpha)$
g) $\alpha \underline{\ll} \alpha \# \beta,\ \alpha \underline{\ll} \omega^\alpha,\ \alpha \underline{\ll} \varepsilon_\alpha,\ \alpha \ll \Omega_\alpha$
h) $\alpha \ll \beta \Rightarrow \alpha \# \gamma \ll \beta \# \gamma,\ \omega^\alpha \ll \omega^\beta,\ \varepsilon_\alpha \ll \varepsilon_\beta,\ \Omega_\alpha \ll \Omega_\beta$

Lemma 2. Für $\alpha_i < \alpha \leq \varepsilon_0$ $(i = 1, 2)$, $\mu < \sigma \leq \varepsilon_0$ und $\nu < \sigma$ gilt

a) $\omega_m (\Omega_\nu + n) \ll \Omega_\sigma$
b) $\omega_m \left(D_\mu (\Omega_\sigma + \alpha_1) \# \Omega_\nu\right) \ll \Omega_\sigma + \alpha$
c) $\omega_m \left(D_\mu (\Omega_\sigma + \alpha_1) \# D_\nu (\Omega_\sigma + \alpha_2)\right) \ll \Omega_\sigma + \alpha$.

Mit $\bar{\tau}$ bezeichnen wir eine endliche, eventuell leere Folge von Ordinaltermen. Wir setzen

$$D_{\bar{\tau}} \alpha := \begin{cases} \alpha, \text{ wenn } \bar{\tau} \text{ leer ist,} \\ D_{\tau_1} (\ldots (D_{\tau_n} \alpha) \ldots), \text{ wenn } \bar{\tau} = \tau_1, \ldots, \tau_n \text{ ist.} \end{cases}$$

$\sigma < \bar{\tau}$ gelte genau dann, wenn entweder $\bar{\tau}$ leer ist oder $\sigma < \tau_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ im Fall $\bar{\tau} = \tau_1, \ldots, \tau_n$ gilt.

Definition (entsprechend wie in [2]).

$\varphi \ll_{\sigma+1} \alpha$ gelte genau dann, wenn φ eine Abbildung von der Menge aller Ordinalterme $< \Omega_{\sigma+1}$ in $\bar{\Theta}(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften ist:

1) $\Omega_{\sigma+1} \underline{\ll} \alpha$
2) $\xi < \Omega_{\sigma+1} \Rightarrow \varphi\xi \ll_{\sigma+1} \alpha$
3) $\xi < \Omega_{\sigma+1},\ \sigma < \bar{\tau},\ \xi \ll \gamma,\ D_{\bar{\tau}} \alpha \underline{\ll} \gamma \Rightarrow D_{\bar{\tau}}(\varphi\xi) \ll \gamma$.

Offenbar gilt dann:

Lemma 3. $\varphi \ll_{\sigma+1} \alpha,\ \alpha \ll \beta \Rightarrow \varphi \ll_{\sigma+1} \beta$.

Mit $\mathrm{id}(\Omega_{\sigma+1})$ bezeichnen wir die identische Abbildung aller Ordinalterme $< \Omega_{\sigma+1}$ auf sich. Unter der Voraussetzung $\varphi \ll_{\sigma+1} \alpha$ bezeichnen wir mit $\varphi \# \beta$, ω^{φ} und $D_\tau \varphi$ die durch

$$\xi \mapsto \varphi\xi \# \beta,\ \xi \mapsto \omega^{\varphi\xi} \text{ und } \xi \mapsto D_\tau(\varphi\xi)$$

definierten Abbildungen von der Menge aller Ordinalterme $< \Omega_{\sigma+1}$ in $\Theta(\Omega)$. Dann gilt:

Lemma 4.

a) $\mathrm{id}(\Omega_{\sigma+1}) \# n \ll_{\sigma+1} \Omega_{\sigma+1}$

b) $\varphi \ll_{\sigma+1} \alpha \Rightarrow \varphi \# \beta \ll_{\sigma+1} \alpha \# \beta,\ \omega^{\varphi} \ll_{\sigma+1} \omega^{\alpha}$

c) $\varphi \ll_{\sigma+1} \alpha,\ \sigma < \tau \Rightarrow D_\tau \varphi \ll_{\sigma+1} D_\tau \alpha$

§ 2. Das formale System D_2CA

2.1. Die formale Sprache des Systems D_2CA

Das System D_2CA hat dieselben *Grundzeichen* wie das in [7] angegebene System D_1CA. *Terme*, *Ziffern* und *Primformeln* seien wie in D_1CA definiert. *Nennformen* werden in üblicher Weise verwendet und mit großen Skriptbuchstaben bezeichnet.

Induktive Definition der *Formeln* des Systems D_2CA, des *Grades* $\mathrm{gr}(F)$ einer Formel F und der Menge $\mathrm{Var}(F)$ von freien Prädikatenvariablen, die in einer Formel F im Bereich eines Prädikatenquantors auftreten.

1. Jede Primformel F ist eine Formel mit $\mathrm{gr}(F) := 0$ und leerer Menge $\mathrm{Var}(F)$.

2. Sind A und B Formeln, so ist $(A \to B)$ eine Formel mit $\mathrm{gr}(A \to B) := \max\{\mathrm{gr}(A), \mathrm{gr}(B)\} + 1$ und $\mathrm{Var}(A \to B) := \mathrm{Var}(A) \cup \mathrm{Var}(B)$.

3. Ist $\mathcal{F}[0]$ eine Formel und x eine gebundene Zahlenvariable, die in $\mathcal{F}$ nicht auftritt, so ist $\forall x\, \mathcal{F}[x]$ eine Formel mit $\mathrm{gr}(\forall x\, \mathcal{F}[x]) := \mathrm{gr}(\mathcal{F}[0]) + 1$ und $\mathrm{Var}(\forall x\, \mathcal{F}[x]) := \mathrm{Var}(\mathcal{F}[0])$.

4. Ist U eine freie Prädikatenvariable, $\mathcal{F}[U]$ eine Formel und X eine gebundene Prädikatenvariable, die in $\mathcal{F}$ nicht auftritt, so ist $\exists X \mathcal{F}[X]$ eine Formel. $\mathrm{Var}(\exists X \mathcal{F}[X])$ ist dann die Menge der in $\mathcal{F}$ auftretenden freien Prädikatenvariablen. Der Quantor $\exists X$ der Formel $\exists X \mathcal{F}[X]$ ist ein *schwacher Prädikatenquantor*, falls $U \notin \mathrm{Var}(\mathcal{F}[U])$ ist und in $\mathcal{F}[U]$ kein starker Prädikatenquantor auftritt. In diesem Fall ist $\mathrm{gr}(\exists X \mathcal{F}[X]) := 0$. Andernfalls ist $\exists X$ ein *starker Prädikatenquantor* der Formel $\exists X \mathcal{F}[X]$ und $\mathrm{gr}(\exists X \mathcal{F}[X]) := \mathrm{gr}(\mathcal{F}[U]) + 1$.

Eine Formel heißt *schwach*, wenn sie keinen starken Prädikatenquantor enthält. Andernfalls heißt sie *stark*.

Positivteile und *Negativteile* der Formeln, *P-Formen*, *N-Formen*, *NP-Formen*, $F \overset{s}{\vdash} G$ (*aus F folgt struturell G*), die *Gleichwertigkeit* von Formeln, $(A \vee B)$ und $(A \leftrightarrow B)$ seien entsprechend wie in D_1CA definiert. Wir verwenden auch die entsprechenden Mitteilungszeichen und lassen im allgemeinen die äußeren Klammern um Formeln der Gestalt $(A \to B)$ oder $(A \vee B)$ fort.

Induktive Definition der Σ_1^1-*Formeln* und Π_2^1-*Formeln* des Systems D_2CA.

1. Jede Formel vom Grad 0 ist eine Σ_2^1-Formel und eine Π_2^1-Formel.

2. Eine Formel $(A \to B)$ ist genau dann eine Σ_2^1-Formel (Π_2^1-Formel), wenn A eine Π_2^1-Formel (Σ_2^1-Formel) und B eine Σ_2^1-Formel (Π_2^1-Formel) ist.

3. Eine Formel $\forall x \mathcal{F}[x]$ ist genau dann eine Σ_2^1-Formel (Π_2^1-Formel), wenn $\mathcal{F}[0]$ eine Σ_2^1-Formel (Π_2^1-Formel) ist.

4. Eine starke Formel $\exists X \mathcal{F}[X]$ ist genau dann eine Σ_2^1-Formel, wenn $\mathcal{F}[U]$ eine Σ_2^1-Formel ist. Sie ist keine Π_2^1-Formel.

Folgerung. Eine Formel des Systems D_2CA ist genau dann sowohl eine Σ_2^1-Formel als auch eine Π_2^1-Formel, wenn sie eine schwache Formel ist.

Anmerkung. Die vorstehende Definition der Σ_2^1-Formeln und Π_2^1-Formeln ist eine Verallgemeinerung der üblichen Definition dieser Formeln.

2.2. Das Herleitungsverfahren des Systems D_2CA

Axiome des Systems D_2CA:

(Ax 1) $\mathcal{P}[A]$, wenn A eine wahre konstante Primformel ist.

(Ax 2) $\mathcal{N}[A]$, wenn A eine falsche konstante Primformel ist.

(Ax 3) $Q[A, B]$, wenn A und B gleichwertige Formeln vom Grad 0 sind.

(Ax 4) $\mathcal{F}[a_1, \ldots, a_n]$, wenn $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschiedene freie Zahlenvariablen sind, die in $\mathcal{F}$ nicht auftreten, und $\mathcal{F}[m_1, \ldots, m_n]$ für je n Ziffern $m_1, \ldots, m_n$ eines der Axiome (Ax 1)–(Ax 3) ist.

(V. I.) $\forall x\,(\mathcal{F}[x] \to \mathcal{F}[x']) \to (\mathcal{F}[0] \to \forall x\, \mathcal{F}[x])$

(Δ^1_2-CA) $\forall x\,(\mathcal{A}[x] \leftrightarrow \mathcal{B}[x]) \to \exists Y \forall x\,(Y(x) \leftrightarrow \mathcal{A}[x])$,

wenn $\mathcal{A}[0]$ eine Σ^1_2-Formel und $\mathcal{B}[0]$ eine Π^1_2-Formel ist.

Hauptschlüsse des Systems D_2CA:

(S 1) $\mathcal{N}[(A \to \perp)], \mathcal{N}[B] \vdash \mathcal{N}[(A \to B)]$,

wenn B nicht die Formel $\perp$ ist.

(S 2.0) $\mathcal{P}[\mathcal{F}[a]] \vdash \mathcal{P}[\forall x\, \mathcal{F}[x]]$,

wenn a nicht in der Konklusion auftritt.

(S 2.1) $\mathcal{N}[\mathcal{F}[U]] \vdash \mathcal{N}[\exists X\, \mathcal{F}[X]]$,

wenn U nicht in der Konklusion auftritt.

(S 3.0) $\mathcal{F}[t] \to \mathcal{N}[\forall x\, \mathcal{F}[x]] \vdash \mathcal{N}[\forall x\, \mathcal{F}[x]]$

(S 3.1) $\mathcal{F}[U] \vee \mathcal{P}[\exists X\, \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{P}[\exists X\, \mathcal{F}[X]]$.

Der bezeichnete minimale Positiv- oder Negativteil in der Konklusion eines Hauptschlusses heißt der *Hauptteil* des betreffenden Schlusses.

Schnitte des Systems D_2CA:

$A \vee B,\ A \to B \vdash B$

Die mit A bezeichnete Formel in den Prämissen eines Schnittes heißt die *Schnittformel* des betreffenden Schnittes.

Induktive Definition von $D_2CA \overset{n}{\vdash} F$.

1. Ist F ein Axiom des Systems D_2CA, so gelte $D_2CA \overset{n}{\vdash} F$ für jede natürliche Zahl n.

2. Gilt $D_2CA \overset{n_i}{\vdash} F_i$ mit $n_i < n$ für jede Prämisse F_i eines Hauptschlusses oder Schnittes des Systems D_2CA, so gelte $D_2CA \overset{n}{\vdash} F$ für die zugehörige Konklusion F.

3. Gilt $D_2CA \overset{n}{\vdash} F$ und $F \overset{s}{\vdash} G$, so gelte $D_2CA \overset{n+1}{\vdash} G$.

Folgerung $D_2CA \overset{m}{\vdash} F,\ m < n \Rightarrow D_2CA \overset{n}{\vdash} F$.

Eine Formel F heißt *herleitbar* im System D_2CA, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß $D_2CA \overset{n}{\vdash} F$ gilt.

§ 3. Das halbformale System D_2^*

3.1. Die formale Sprache des Systems D_2^*

Grundzeichen des Systems D_2^*:

1. Die Grundzeichen des Systems D_2CA unter Ausschluß der freien Zahlenvariablen.

2. Das Symbol $<$.

Terme, *Ziffern* und *Primformeln* seien wie in D_2CA definiert, jedoch unter Ausschluß der freien Zahlenvariablen. Jeder Term des Systems D_2^* ist numerisch, hat also einen berechenbaren Wert, der eine Ziffer ist.

Induktive Definition der *Formeln* des Systems D_2^*, des *Grades* $\mathrm{gr}(F)$ einer Formel F und der Menge $\mathrm{Var}(F)$ von freien Prädikatenvariablen, die in einer Formel F im Bereich eines Prädikatenquantors oder des Symbols $<$ auftreten.

1.–3. entsprechend wie für D_2CA.

4. Sind U und V freie Prädikatenvariablen, so ist $U < V$ eine Formel mit $\mathrm{gr}(U < V) := 0$ und $\mathrm{Var}(U < V) := \{U, V\}$.

5. Ist U eine freie Prädikatenvariable, $F[U]$ eine Formel und X eine gebundene Prädikatenvariable, die in $\mathcal{F}$ nicht auftritt, so gelte:

5.1. $\exists X < U \mathcal{F}[X]$ ist eine Formel mit einem *beschränkten Prädikatenquantor* $\exists X$ und $\mathrm{gr}(\exists X < U \mathcal{F}[X]) := \mathrm{gr}(\mathcal{F}[U]) + 1$. $\mathrm{Var}(\exists X < U \mathcal{F}[x])$ ist die Menge der in der Formel auftretenden freien Prädikatenvariablen.

5.2. $\exists X \mathcal{F}[X]$ ist eine Formel. $\mathrm{Var}(\exists X \mathcal{F}[X])$ ist die Menge der in $\mathcal{F}$ auftretenden freien Prädikatenvariablen. $\exists X$ ist ein *schwacher Prädikatenquantor* der Formel $\exists X \mathcal{F}[X]$, wenn $U \notin \mathrm{Var}(\mathcal{F}[U])$ ist und in $\mathcal{F}$ weder ein beschränkter noch ein starker Prädikatenquantor auftritt. In diesem Fall ist $\mathrm{gr}(\exists X \mathcal{F}[X]) := 0$. Andernfalls ist $\exists X$ ein *starker Prädikatenquantor* der Formel $\exists X \mathcal{F}[X]$ und $\mathrm{gr}(\exists X \mathcal{F}[X]) := \mathrm{gr}(\mathcal{F}[U]) + 1$.

Eine Formel des Systems D_2^* heißt *schwach*, wenn sie keinen starken Prädikatenquantor enthält. Andernfalls heißt sie *stark*.

Induktive Definition der Σ_2^1-*Formeln* und Π_2^1-*Formeln* des Systems D_2^*.

1.–4. entsprechend wie für D_2CA.

5. Eine Formel $\exists X < U \mathcal{F}[X]$ ist genau dann eine Σ_2^1-Formel (Π_2^1-Formel), wenn $\mathcal{F}[U]$ eine Σ_2^1-Formel (Π_2^1-Formel) ist.

Folgerung. Eine Formel des Systems D_2^* ist genau dann zugleich eine Σ_2^1-Formel und eine Π_2^1-Formel, wenn sie eine schwache Formel ist.

Induktive Definition des *Komplexitätsgrades* $\mathrm{kg}(F)$ einer Formel F des Systems D_2^*.

1. Ist F eine Formel vom Grad 0, so sei $\mathrm{kg}(F) := 0$.

2. $\mathrm{kg}(A \to B) := \max\{\mathrm{kg}(A), \mathrm{kg}(B)\} + 1$.

3. $\mathrm{kg}(\forall x \mathcal{F}[x]) := \mathrm{kg}(\mathcal{F}[0]) + 1$.

4. $\mathrm{kg}(\exists X < U \mathcal{F}[X]) := \mathrm{kg}(\mathcal{F}[U]) + 1$.

5. Ist $\exists X \mathcal{F}[X]$ eine Formel mit einem starken Prädikatenquantor $\exists X$, so sei

$$\mathrm{kg}(\exists X \mathcal{F}[X]) := \left| \begin{array}{l} 0, \text{ wenn } \mathcal{F}[U] \text{ eine schwache Formel ist,} \\ \mathrm{kg}(\mathcal{F}[U]) + 1, \text{ wenn } \mathcal{F}[U] \text{ eine starke Formel ist.f} \end{array} \right.$$

Bezeichnung. Ist A eine Formel des Systems D_2^*, so sei A_U diejenige Formel, die sich aus A ergibt, wenn jeder in A auftretende starke Prädikatenquantor $\exists X$ durch $\exists X < U$ ersetzt wird. A_U ist dann eine schwache Formel des Systems D_2^*.

3.2. Das Herleitungsverfahren des Systems D_2^*

Axiome des Systems D_2^*:

$(Ax\ 1)$ — $(Ax\ 3)$ entsprechend wie für D_2CA.

$(W\text{-}CA)$ $\mathcal{P}[\exists Y \forall x (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{F}[x])]$,

wenn $\mathcal{F}[0]$ eine schwache Formel ist.

Hauptschlüsse des Systems D_2^*:

(S 1), (S 2.1), (S 3.0), (S 3.1) entsprechend wie für D_2CA.

(S 2.0*) $\mathcal{P}[\mathcal{F}[n]]$ für jede Ziffer $n \vdash \mathcal{P}[\forall x\, \mathcal{F}[x]]$

(S 2.2) $U < V \rightarrow \mathcal{N}[\mathcal{F}[U]] \vdash \mathcal{N}[\exists X < V\, \mathcal{F}[X]]$,

wenn U nicht in der Konklusion auftritt.

(S 3.2) $U < V \vee \mathcal{P}[\exists X < V\, \mathcal{F}[X]]$, $\mathcal{F}[U] \vee \mathcal{P}[\exists X < V\, \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{P}[\exists X < V\, \mathcal{F}[X]]$

$(\Sigma_2^1\text{-Ref})$ $A \vee \mathcal{P}[\exists Y A_Y] \vdash \mathcal{P}[\exists Y A_Y]$,

wenn A eine Σ_2^1-Formel ist (Σ_2^1-*Reflexion*).

Schnitte des Systems D_2^* entsprechend wie für D_2CA.

Der *Komplexitätsgrad eines Schnittes* ist der Komplexitätsgrad $\mathrm{kg}(A)$ seiner Schnittformel A.

Induktive Definition von $D_2^* \overset{\alpha}{\underset{m}{\vdash}} F$.

1. Ist F ein Axiom des Systems D_2^*, so gelte $D_2^* \overset{\alpha}{\underset{m}{\vdash}} F$ für jeden Ordinalterm α aus $\bar{\Theta}(\Omega)$ und jede natürliche Zahl m.

2. Gilt $D_2^* \overset{\alpha_i}{\underset{m}{\vdash}} F_i$ mit $\alpha_i < \alpha$ für jede Prämisse F_i eines Hauptschlusses des Systems D_2^* oder eines Schnittes, dessen Komplexitätsgrad $< m$ ist, so gelte $D_2^* \overset{\alpha}{\underset{m}{\vdash}} F$ für die zugehörige Konklusion F.

Folgerung. $D_2^* \vdash^{\alpha}_{m} F,\ \alpha < \beta,\ m \leq n \Rightarrow D_2^* \vdash^{\beta}_{n} F.$

3.3. Deduktive Eigenschaften des Systems D_2^*

$F \vdash G$ heißt ein *schwacher Schluß*, wenn

$$D_2^* \vdash^{\alpha}_{m} F \Rightarrow D_2^* \vdash^{\alpha}_{m} G$$

für jeden Ordinalterm α und für jede natürliche Zahl m gilt.

Umsetzungsregel. Sind F und G gleichwertige Formeln, so ist $F \vdash G$ ein schwacher Schluß.

Substitutionsregel. $\mathcal{F}[U] \vdash \mathcal{F}[V]$ ist ein schwacher Schluß, wenn U nicht in $\mathcal{F}$ auftritt.

Beweise durch Herleitungsinduktion.

Inversionsregeln. Schwache Schlüsse sind:

a) $\mathcal{N}\,[(A \to B)] \vdash \mathcal{N}\,[(A \to \bot)]$
b) $\mathcal{N}\,[(A \to B)] \vdash \mathcal{N}\,[B]$
c) $\mathcal{P}\,[\forall x\, \mathcal{F}[x]] \vdash \mathcal{P}\,[\mathcal{F}[t]]$
d) $\mathcal{N}\,[\exists X\, \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{N}\,[\mathcal{F}[U]]$
e) $\mathcal{N}\,[\exists X < V\, \mathcal{F}[X]] \vdash U < V \to \mathcal{N}\,[\mathcal{F}[U]]$

Beweis durch Herleitungsinduktion unter Benutzung der Umsetzungsregel für c) und der Substitutionsregel für d) und e).

Strukturschlußregel. Gilt $F \stackrel{s}{\vdash} G$, so ist $F \vdash G$ ein schwacher Schluß.

Beweis durch Herleitungsinduktion unter Benutzung der Inversionsregeln.

Tautologiesatz. Ist F eine Formel vom Grad m, so gilt $D_2^* \vdash^{2m}_{0} Q\,[F, F]$ für jede NP-Form Q.

Beweis durch Induktion nach m.

Eine Formel F heiße *endlich herleitbar*, wenn es $\alpha < \omega$ und eine natürliche Zahl m gibt, so daß $D_2^* \vdash^{\alpha}_{m} F$ gilt.

Beschränkungslemma. Endlich herleitbare Formeln sind:

a) $F_U \to F$, wenn F eine Σ_2^1-Formel ist.

b) $F \to F_U$, wenn F eine Π_2^1-Formel ist.

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(F)$ mit dem Tautologiesatz.

Schwacher Reduktionssatz. Aus $D_2^* \mid\frac{\alpha}{m+2} F$ folgt $D_2^* \mid\frac{\omega\alpha}{m+1} F$.

Beweis durch Induktion nach α (wie für D_1^* in [7]).

Schwacher Schnitt-Eliminationssatz. Gilt $D_2^* \mid\frac{\alpha}{m} F$, mit $\alpha < \varepsilon_0$, so gibt es $\beta < \varepsilon_0$ mit $D_2^* \mid\frac{\beta}{1} F$.

Beweis mit dem schwachen Reduktionssatz durch Induktion nach m.

3.4. Einbettung von D_2CA in D_2^*

(V.I.)-**Lemma.** Für jede Formel $\mathcal{F}[0]$ des Systems D_2^* gilt $D_2^* \mid\frac{\omega}{0} \forall x(\mathcal{F}[x] \to \mathcal{F}[x']) \to (\mathcal{F}[0] \to \forall x\, \mathcal{F}[x])$.

Beweis wie in [7] für D_1^*.

(Δ_2^1-CA)-**Lemma.** Ist $\mathcal{A}[0]$ eine Σ_2^1-Formel und $\mathcal{B}[0]$ eine Π_2^1-Formel, so ist die Formel

$$\forall x(\mathcal{A}[x] \leftrightarrow \mathcal{B}[x]) \to \exists Y \forall x\,(Y(x) \leftrightarrow \mathcal{A}[x])$$

endlich herleitbar.

Beweis mit dem Beschränkungslemma, der Hauptschlußregel (Σ_2^1-Ref) und dem Axiomenschema (W-CA) entsprechend wie in [7] für das (Δ_1^1-CA)-Lemma des Systems D_1^*.

Eine Formel F^* des Systems D_2^* heiße eine *numerische Spezialisierung* einer Formel F des Systems D_2CA, wenn F^* durch Einsetzungen von Ziffern für freie Zahlenvariablen aus F hervorgeht.

Einbettungssatz. Gilt $D_2CA \mid\frac{n}{} F$, so gibt es eine natürliche Zahl m, so daß

$$D_2^* \mid\frac{\omega\cdot n}{m} F^*$$

für jede numerische Spezialisierung F^* von F gilt.

Beweis durch Induktion nach n mit dem (V. I.)-Lemma, dem (Δ_2^1-CA)-Lemma und der Strukturschlußregel.

§ 4. Das geschichtete halbformale System RD_2^*

4.1. Die formale Sprache des Systems RD_2^*

Grundzeichen des Systems RD_2^*:

1. Die Grundzeichen des Systems D_2^*.

2. Das Symbol λ.

3. Ordinalterme des Systems $\bar{\Theta}(\Omega)$ (als obere Indizes von freien und gebundenen Prädikatenvariablen).

Terme, *Ziffern* und *konstante Primformeln* seien wie in D_2^* definiert.

Induktive Definition der *Formeln* und *Prädikatoren* des Systems RD_2^*, des *Grades* $\mathrm{gr}(F)$ einer Formel F und der Mengen $\mathrm{Var}(F)$ und $\mathrm{Var}(P)$ von freien Prädikatenvariablen, die in einer Formel F und in einem Prädikator P im Bereich eines Prädikatenquantors oder eines Symbols $<$ oder λ auftreten.

1. Jede konstante Primformel F ist eine Formel mit $\mathrm{gr}(F) := 0$ und leerer Menge $\mathrm{Var}(F)$.

2. Ist U eine freie Prädikatenvariable und σ aus $\bar{\Theta}(\Omega)$, so ist U^σ ein Prädikator mit leerer Menge $\mathrm{Var}(U^\sigma)$.

3. Ist P ein Prädikator und t ein numerischer Term, so ist $P(t)$ eine Formel mit $\mathrm{gr}(P(t)) := 0$ und $\mathrm{Var}(P(t)) := \mathrm{Var}(P)$.

4. Sind P und Q Prädikatoren, so ist $P < Q$ eine Formel mit $\mathrm{gr}(P < Q) := 0$. $\mathrm{Var}(P < Q)$ ist dann die Menge der freien Prädikatenvariablen, die in P oder Q auftreten.

5. Sind A und B Formeln, so ist $(A \to B)$ eine Formel mit $\mathrm{gr}(A \to B) := \max\{\mathrm{gr}(A), \mathrm{gr}(B)\} + 1$ und $\mathrm{Var}(A \to B) := \mathrm{Var}(A) \cup \mathrm{Var}(B)$.

6. Ist $\mathcal{F}[0]$ eine Formel und x eine gebundene Zahlenvariable, die in $\mathcal{F}$ nicht auftritt, so ist $\forall x\, \mathcal{F}[x]$ eine Formel und $\lambda x\, \mathcal{F}[x]$ ein Prädikator mit $\mathrm{gr}(\forall x\, \mathcal{F}[x]) := \mathrm{gr}(\mathcal{F}[0]) + 1$ und $\mathrm{Var}(\forall x$

$\mathcal{F}[x]) := \mathrm{Var}(\mathcal{F}[0])$. $\mathrm{Var}(\lambda x \, \mathcal{F}[x])$ ist dann die Menge der in $\mathcal{F}$ auftretenden freien Prädikatenvariablen.

7. Ist U eine freie Prädikatenvariable, $\mathcal{F}[U^0]$ eine Formel, X eine gebundene Prädikatenvariable, die in $\mathcal{F}$ nicht auftritt, und σ ein Ordinalterm > 0 aus $\bar{\Theta}(\Omega)$, so ist $\exists X^\sigma \mathcal{F}[X]$ eine Formel mit einem *geschichteten Quantor* $\exists X^\sigma$ und $\mathrm{gr}(\exists X^\sigma \mathcal{F}[X]) := \mathrm{gr}(\mathcal{F}[U^0]) + 1$. $\mathrm{Var}(\exists X^\sigma \mathcal{F}[X])$ ist dann die Menge der in $\mathcal{F}$ auftretenden freien Prädikatenvariablen.

8. Ist U eine freie Prädikatenvariable, $\mathcal{F}[U^0]$ eine Formel, P ein Prädikator und X eine gebundene Prädikatenvariable, die weder in P noch in $\mathcal{F}$ auftritt, so ist $\exists X < P \mathcal{F}[X]$ eine Formel mit einem *beschränkten Quantor* $\exists X$ und $\mathrm{gr}(\exists X < P \mathcal{F}[X]) := = \mathrm{gr}(\mathcal{F}[U^0]) + 1$. $\mathrm{Var}(\exists X < P \, \mathcal{F}[X])$ ist dann die Menge der freien Prädikatenvariablen, die in P oder $\mathcal{F}$ auftreten.

9. Ist U eine freie Prädikatenvariable, $\mathcal{F}[U^0]$ eine Formel mit $U \notin \mathrm{Var}(\mathcal{F}[U^0])$ und X eine gebundene Prädikatenvariable, die in $\mathcal{F}$ nicht auftritt, so ist $\exists X \mathcal{F}[X]$ eine Formel mit einem *unbeschränkten Quantor* $\exists X$ und $\mathrm{gr}(\exists X \mathcal{F}[X]) := 0$. $\mathrm{Var}(\exists X \mathcal{F}[X])$ ist dann die Menge der in $\mathcal{F}$ auftretenden freien Prädikatenvariablen.

Wir verwenden die entsprechenden Mitteilungszeichen wie in D_2^* und außerdem P, Q, R für Prädikatoren.

Gradlemma.

a) Je zwei Formeln $\mathcal{F}[0]$ und $\mathcal{F}[t]$ haben gleichen Grad.
b) Je zwei Formeln $\mathcal{F}[U^0]$ und $\mathcal{F}[P]$ haben gleichen Grad.
c) A und B haben kleinere Grade als $(A \to B)$.
d) $\mathcal{F}[t]$ hat kleineren Grad als $\forall x \mathcal{F}[x]$.
e) $\mathcal{F}[P]$ hat kleineren Grad als $\exists X^\sigma \mathcal{F}[X]$ und als $\exists X < Q \mathcal{F}[X]$.

Induktive Definition des *positiven* und *negativen Auftretens* eines geschichteten Quantors in einer Formel des Systems RD_2^*.

1. In einer Formel vom Grad 0 tritt kein geschichteter Quantor positiv oder negativ auf.

2. In einer Formel $(A \to B)$ tritt ein geschichteter Quantor genau dann positiv (negativ) auf, wenn er in A negativ (positiv) oder in B positiv (negativ) auftritt.

3. In einer Formel $\forall x\, \mathcal{F}[x]$ tritt ein geschichteter Quantor genau dann positiv (negativ) auf, wenn er in $\mathcal{F}[0]$ positiv (negativ) auftritt.

4. In einer Formel $\exists X < P\, \mathcal{F}[X]$ tritt ein geschichteter Quantor genau dann positiv (negativ) auf, wenn er in $\mathcal{F}[U^0]$ positiv (negativ) auftritt.

5. In einer Formel $\exists X^\sigma\, \mathcal{F}[X]$ tritt der geschichtete Quantor $\exists X^\sigma$ positiv auf. Außerdem tritt in dieser Formel ein geschichteter Quantor genau dann positiv (negativ) auf, wenn er in $\mathcal{F}[U^0]$ positiv (negativ) auftritt.

Induktive Definition der *Stufen* $\mathrm{st}(F)$ und $\mathrm{st}(P)$ einer Formel F und eines Prädikarors P des Systems RD_2^*.

1. Für jede konstante Primformel F sei $\mathrm{st}(F) = \mathrm{st}(F \to \bot) := 0$.

2. $\mathrm{st}(U^\sigma) = \mathrm{st}\,(U^\sigma(t)) = \mathrm{st}\,(U^\sigma(t) \to \bot) := \sigma$.

3. $\mathrm{st}(P < Q) = \mathrm{st}(P < Q \to \bot) := \max\{\mathrm{st}(P), \mathrm{st}(Q)\}$.

4. $\mathrm{st}(A \to B) := \max\{\mathrm{st}(A \to \bot), \mathrm{st}(B)\}$,
$\mathrm{st}\,((A \to B) \to \bot) := \max\{\mathrm{st}(A), \mathrm{st}(B \to \bot)\}$.

5. $\mathrm{st}(\forall x\, \mathcal{F}[x]) := \mathrm{st}(\mathcal{F}[0])$,
$\mathrm{st}(\forall x\, \mathcal{F}[x] \to \bot) := \mathrm{st}(\mathcal{F}[0] \to \bot)$.

6. $\mathrm{st}(\exists X^\sigma\, \mathcal{F}[X]) := \max\{\sigma, \mathrm{st}(\mathcal{F}[U^0])\}$,
$\mathrm{st}(\exists X^\sigma\, \mathcal{F}[X] \to \bot) := \max\{\sigma, \mathrm{st}(\mathcal{F}[U^0] \to \bot)\}$.

7. $\mathrm{st}(\exists X < P\, \mathcal{F}[X]) := \max\{\mathrm{st}(P), \mathrm{st}(\mathcal{F}[U^0])\}$,
$\mathrm{st}(\exists X < P\, \mathcal{F}[X] \to \bot) := \max\{\mathrm{st}(P), \mathrm{st}(\mathcal{F}[U^0] \to \bot)\}$

8. $\mathrm{st}(\exists X\, \mathcal{F}[X]) := \mathrm{st}(\mathcal{F}[U^0] \to \bot) + 1$,
$\mathrm{st}(\exists X\, \mathcal{F}[X] \to \bot) := \mathrm{st}(\mathcal{F}[U^0] \to \bot)$.

9. $\mathrm{st}\,(\lambda x\, \mathcal{F}[x]\,(t)) := \mathrm{st}(\mathcal{F}[0] \to \bot) + 1$,
$\mathrm{st}(\lambda x\, \mathcal{F}[x]) = \mathrm{st}\,(\lambda x\, \mathcal{F}[x]\,(t) \to \bot) := \mathrm{st}(\mathcal{F}[0] \to \bot)$.

1. Stufenlemma.

a) Je zwei Formeln $\mathcal{F}[0]$ und $\mathcal{F}[t]$ haben gleiche Stufe.

b) Tritt U^σ in $\mathcal{F}[U^\sigma]$ auf, so ist
$\mathrm{st}(\mathcal{F}[U^\sigma]) = \max\{\sigma, \mathrm{st}(\mathcal{F}[U^0])\}$.

c) Ist $\mathrm{st}(P) \leq \sigma$, so ist $\mathrm{st}(\mathcal{F}[P]) \leq \mathrm{st}(\mathcal{F}[U^\sigma])$.

d) Ist $\mathrm{st}(P) < \sigma$, so ist $\mathrm{st}(\mathcal{F}[P]) \leq \mathrm{st}(\exists X^\sigma\, \mathcal{F}[X])$ und
$\mathrm{st}(\mathcal{F}[P] \to \bot) \leq \mathrm{st}(\exists X^\sigma\, \mathcal{F}[X] \to \bot)$.

e) Ist $\mathrm{st}(P) < \mathrm{st}(Q)$, so ist $\mathrm{st}(\mathcal{F}[P]) \leq \mathrm{st}(\exists X < Q\, \mathcal{F}[X])$ und $\mathrm{st}(\mathcal{F}[P] \to \perp) \leq \mathrm{st}(\exists X < Q\, \mathcal{F}[X] \to \perp)$.

f) Ist $\mathrm{st}(\exists X\, \mathcal{F}[X]) = \sigma + 1$, so ist $\mathrm{st}(\mathcal{F}[U^\sigma] \to \perp) = \mathrm{st}(\exists X\, \mathcal{F}[X] \to \perp) = \sigma$.

g) Ist $\mathrm{st}\,(\lambda x\, \mathcal{F}[x]\, (t)) = \sigma + 1$, so ist $\mathrm{st}(\mathcal{F}[t] \to \perp) = \mathrm{st}\,(\lambda x\, \mathcal{F}[x]\, (t) \to \perp) = \sigma$.

Beweis. a)–c) folgen induktiv aus der Definition der Stufen.

d) Aus b) folgt $\mathrm{st}(\mathcal{F}[U^\sigma]) \leq \mathrm{st}(\exists X^\sigma\, \mathcal{F}[X])$ und $\mathrm{st}(\mathcal{F}[U^\sigma] \to \perp) \leq \mathrm{st}(\exists X^\sigma\, \mathcal{F}[X] \to \perp)$. Mit c) folgt die Behauptung.

e) Ist $\mathrm{st}(Q) = \sigma$, so folgt aus b) $\mathrm{st}(\mathcal{F}[U^\sigma]) \leq \mathrm{st}(\exists X < Q\, \mathcal{F}[X])$ und $\mathrm{st}(\mathcal{F}[U^\sigma] \to \perp) \leq \mathrm{st}(\exists X < Q\, \mathcal{F}[X] \to \perp)$. Mit c) folgt die Behauptung.

f) folgt aus b).

g) folgt aus a).

2. Stufenlemma. Für jede P-Form $\mathcal{P}$ und jede N-Form $\mathcal{N}$ gilt:

a) $\mathrm{st}(\mathcal{P}[A]) = \max\{\mathrm{st}(A), \mathrm{st}(\mathcal{P}[\perp])\}$

b) $\mathrm{st}(\mathcal{N}[A]) = \max\{\mathrm{st}(A \to \perp), \mathrm{st}(\mathcal{N}[\perp])\}$.

Beweis durch Induktion nach den Längen von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{N}$. Man beachte dabei, daß $\mathcal{P}[A]$ eine Formel A oder $B \to \mathcal{P}_0[A]$ oder $(\mathcal{P}_0[A] \to \perp) \to B$ und $\mathcal{N}[A]$ eine Formel $A \to B$ oder $B \to \mathcal{N}_0[A]$ oder $(\mathcal{N}_0[A] \to \perp) \to B$ ist.

Streichung von Negativteilen. Tritt A in einer Formel F als Negativteil auf, so ist F eine Formel $\mathcal{P}[(A \to B)]$. Dann sei $\mathcal{P}[B]$ diejenige Formel, die sich aus F durch Streichung ihres Negativteils A ergibt. In dieser Weise lassen sich in einer Formel F beliebig viele Negativteile streichen. Das Ergebnis solcher Streichungen ist immer eine Formel F_0 mit $F_0 \overset{s}{\vdash} F$.

4.2. Das Herleitungsverfahren des Systems RD_2^*

Axiome des Systems RD_2^*:

$(Ax\, R1)$ $\mathcal{P}[A]$, wenn A eine wahre konstante Primformel oder eine Formel $P < Q$ mit $\mathrm{st}(P) < \mathrm{st}(Q)$ ist.

$(Ax\ R2)$ $\mathcal{G}\mathcal{V}\ [A]$, wenn A eine falsche konstante Primformel oder eine Formel $P < Q$ mit $\mathrm{st}(Q) \leq \mathrm{st}(P)$ oder eine Formel $\exists\, X < P\ \mathcal{F}[X]$ mit $\mathrm{st}(P) = 0$ ist.

$(Ax\ R3)$ $Q[A, B]$, wenn A und B gleichwertige Formeln vom Grad 0 sind.

Hauptschlüsse des Systems RD_2^*:

(S 1), (S 2.0*), (S 3.0) entsprechend wie für D_2^*.

(RS 2.1*) $\mathcal{G}\mathcal{V}\ [\mathcal{F}[P]]$ für alle P mit $\mathrm{st}(P) < \sigma \vdash \mathcal{G}\mathcal{V}\ [\exists\, X^\sigma\, \mathcal{F}[X]]$

(RS 2.2*) $\mathcal{G}\mathcal{V}\ [\mathcal{F}[P]]$ für alle P mit $\mathrm{st}(P) < \mathrm{st}(Q)$ $\vdash \mathcal{G}\mathcal{V}\ [\exists\, X < Q\ \mathcal{F}[X]]$, wenn $\mathrm{st}(Q) > 0$ ist.

(RS 2.3) $\mathcal{G}\mathcal{V}_0[\mathcal{F}[U^\sigma]] \vdash \mathcal{G}\mathcal{V}\ [\exists\, X\, \mathcal{F}[X]]$, wenn $\mathrm{st}(\exists\, X\, \mathcal{F}[X]) = \sigma + 1$ ist, $\mathcal{G}\mathcal{V}_0[\mathcal{F}[U^\sigma]]$ aus $\mathcal{G}\mathcal{V}\ [\mathcal{F}[U^\sigma]]$ durch Streichung aller darin auftretenden Negativteile $\exists\, X\, \mathcal{F}[X]$ hervorgeht und U nicht in der Konklusion auftritt.

(RS 3.1) $\mathcal{F}[P] \vee \mathcal{P}[\exists\, X^\sigma\, \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{P}[\exists\, X^\sigma\, \mathcal{F}[X]]$, wenn $\mathrm{st}(P) < \sigma$ ist.

(RS 3.2) $\mathcal{F}[P] \vee \mathcal{P}[\exists\, X < Q\ \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{P}[\exists\, X < Q\ \mathcal{F}[X]]$, wenn $\mathrm{st}(P) < \mathrm{st}(Q)$ ist.

(RS 4) $\mathcal{G}\mathcal{V}_0[\mathcal{F}[t]] \vdash \mathcal{G}\mathcal{V}\ [\lambda x\, \mathcal{F}[x]\, (t)]$, wenn $\mathcal{G}\mathcal{V}_0[\mathcal{F}[t]]$ aus $\mathcal{G}\mathcal{V}\ [\mathcal{F}[t]]$ durch Streichung aller darin auftretenden Negativteile $\lambda x\, \mathcal{F}[x]\, (t)$ hervorgeht.

Anmerkung. Die Invarianz dieser Hauptschlüsse gegenüber Strukturschlüssen ergibt sich für (S 1), (S 2.0*), (RS 2.1*) und (RS 2.2*) mit Hilfe der entsprechenden Inversionsregeln, für (RS 2.3) und (RS 4) durch die Wahl von $\mathcal{G}\mathcal{V}_0$ anstatt $\mathcal{G}\mathcal{V}$ in den Prämissen und für (S 3.0), (RS 3.1) und (RS 3.2) durch die Aufnahme der Hauptteile in den Prämissen.

Schnitte des Systems RD_2^* entsprechend wie für D_2^*.

Der *Grad eines Schnittes* ist der Grad $\mathrm{gr}(A)$ seiner Schnittformel A.

3. Stufenlemma. Hat die Konklusion eines Hauptschlusses des Systems RD_2^* die Stufe σ, so hat jede Prämisse dieses Schlusses eine Stufe $\leq \sigma$.

Beweis mit Hilfe des 1. und 2. Stufenlemmas.

Induktive Definition von $RD_2^* \frac{\alpha}{m} F$.

1. Ist F ein Axiom des Systems RD_2^*, so gelte $RD_2^* \mid\frac{\alpha}{m} F$ für jeden Ordinalterm α aus $\Theta(\Omega)$ und jede natürliche Zahl m.

2. Gilt $RD_2^* \mid\frac{\alpha_i}{m} F_i$ mit $\alpha_i \ll \alpha$ für jede Prämisse F_i eines Hauptschlusses des Systems RD_2^* oder eines Schnittes vom Grad $< m$, so gelte $RD_2^* \mid\frac{\alpha}{m} F$ für die zugehörige Konklusion F.

3. $\Omega_{\sigma+1}$-*Regel.* Voraussetzungen:

a) A sei eine Formel $\exists X \mathcal{F}[X]$ oder $\lambda x \mathcal{F}[x](t)$ der Stufe $\sigma + 1$.

b) $\varphi \ll_{\sigma+1} \alpha$.

c) $RD_2^* \mid\frac{\varphi 0}{m} A \to F$.

d) Für alle $\xi < \Omega_{\sigma+1}$ und jede Formel B mit $\mathrm{st}(B) \leq \sigma$ gelte $RD_2^* \mid\frac{\xi}{0} A \to B \Rightarrow RD_2^* \mid\frac{\varphi\xi}{m} F \vee B$

Schlußfolgerung: $RD_2^* \mid\frac{\alpha}{m} F$

Folgerung. $RD_2^* \mid\frac{\alpha}{m} F$, $\alpha \underline{\ll} \beta$, $m \leq n \Rightarrow RD_2^* \mid\frac{\beta}{n} F$.
Beweis mit den Lemmata 1 e) und 3.

Anmerkungen.

1. Das System RD_2^* hat keine Hauptschlüsse zur Einführung von unbeschränkten Quantoren $\exists X$ und λ-Ausdrücken in Positivteilen von Formeln. Die Herleitung von Formeln

$$\mathcal{F}[P] \to \exists X \mathcal{F}[X] \quad \text{und} \quad \mathcal{F}[t] \to \lambda x \mathcal{F}[x](t)$$

erfolgt hier mit Hilfe der $\Omega_{\sigma+1}$-Regel, wie im folgenden die Beweise der beiden Hauptsätze zeigen. Im 1. Hauptsatz kommt die Imprädikativität der Prädikatenquantifizierung zum Ausdruck. Diese wird also durch die $\Omega_{\sigma+1}$-Regel gewonnen.

2. Für die Herleitungsreduktionen hat es sich als zweckmäßig erwiesen, in der $\Omega_{\sigma+1}$-Regel einen Schnitt aufzunehmen, nämlich in folgender Weise: Die Voraussetzung d) der $\Omega_{\sigma+1}$-Regel bedeutet, daß die Formel $A \vee F$ herleitbar ist. Mit der Voraussetzung c) folgt durch einen Schnitt die Herleitbarkeit von F. Der in der $\Omega_{\sigma+1}$-Regel enthaltene Schnitt wird aber formal nicht zu den Schnitten hinzugerechnet. Er wird erst bei der Kollabierung einer Herleitung zugleich mit Anwendungen der $\Omega_{\sigma+1}$-Regel eliminiert.

4.3. Deduktive Eigenschaften des Systems RD_2^*

Schwache Schlüsse sind entsprechend wie in D_2^* zu verstehen. In RD_2^* gilt die

Umsetzungsregel entsprechend wie in D_2^*.
Außerdem hat man hier folgende schwache Schlußregeln:

Inversionsregeln. Schwache Schlüsse sind:

a)–c) wie für D_2^*.
d) $\mathcal{G}\,[\exists\, X^\sigma\, \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{G}\,[\mathcal{F}[P]]$, wenn $\mathrm{st}(P) < \sigma$ ist.
e) $\mathcal{G}\,[\exists\, X < Q\, \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{G}\,[\mathcal{F}[P]]$, wenn $\mathrm{st}(P) < \mathrm{st}(Q)$ ist.

Strukturschlußregel wie für D_2^*.

Verumregel. Ist A eine wahre konstante Primformel oder eine Formel $P < Q$ mit $\mathrm{st}(P) < \mathrm{st}(Q)$, so ist

$$A \to F \vdash F$$

ein schwacher Schluß.

Falsumregel. Ist A eine falsche konstante Primformel oder eine Formel $P < Q$ mit $\mathrm{st}(Q) \leq \mathrm{st}(P)$ oder $\exists\, X < P\, \mathcal{F}[X]$ mit $\mathrm{st}(P) = 0$, so ist

$$A \vee F \vdash F$$

ein schwacher Schluß.

$<$-Einführung. Entsteht G aus einer Formel F dadurch, daß gewisse geschichtete Quantoren $\exists\, X^\sigma$, die in F positiv oder negativ auftreten, durch $\exists\, X < U^\sigma$ ersetzt werden, so ist $F \vdash G$ ein schwacher Schluß.

Σ-Persistenz. Entsteht G aus einer Formel F dadurch, daß gewisse geschichtete Quantoren $\exists\, X^\tau$, die in F positiv auftreten, durch $\exists\, X^\sigma$ mit $\sigma > \tau$ ersetzt werden, so ist $F \vdash G$ ein schwacher Schluß.

Die Beweise der vorstehenden Sätze erfolgen durch Herleitungsinduktion.

Substitutionsregeln.

a) $\mathcal{F}[U^\sigma] \vdash \mathcal{F}[V^\sigma]$ ist ein schwacher Schluß, wenn U nicht in $\mathcal{F}$ auftritt.

b) Gilt $RD_2^* \overset{\xi}{\underset{0}{|}} \mathcal{F}[U^\sigma]$ mit $\xi < \Omega_{\sigma+1}$, wobei U nicht in $\mathcal{F}$ auftritt und $U \notin \mathrm{Var}(\mathcal{F}[U^\sigma])$ ist, so folgt $RD_2^* \overset{\xi}{\underset{0}{|}} \mathcal{F}[P]$ für jeden Prädikator P.

Beweis von a) durch Herleitungsinduktion.

Beweis von b) folgendermaßen durch Induktion nach ξ.

1. $\mathcal{F}[U^\sigma]$ sei ein Axiom. Dann ist auch $\mathcal{F}[P]$ ein Axiom.

2. $RD_2^* \overset{\xi}{\underset{0}{|}} \mathcal{F}[U^\sigma]$ sei durch einen Hauptschluß erschlossen. Aufgrund von $U \notin \mathrm{Var}(\mathcal{F}[U^\sigma])$ folgt dann die Behauptung aus der I.V. (Induktionsvoraussetzung).

3. $RD_2^* \overset{\xi}{\underset{0}{|}} \mathcal{F}[U^\sigma]$ sei durch eine $\Omega_{\tau+1}$-Regel erschlossen. Aus $\xi < \Omega_{\sigma+1}$ folgt dann $\tau < \sigma$. Nach dem 1. Stufenlemma b) tritt U^σ in keiner Formel einer Stufe $\leq \tau$ auf. Die Behauptung folgt daher aus der I.V.

Spezielle Inversionsregeln. Sind $\exists X\, \mathcal{F}[X]$ und $\lambda x\, \mathcal{G}[x](t)$ Formeln der Stufe $\sigma + 1$, ist $\xi < \Omega_{\sigma+1}$ und $\mathrm{st}(B) \leq \sigma$, so gilt

a) $RD_2^* \overset{\xi}{\underset{0}{|}} \exists X\, \mathcal{F}[X] \to B \Rightarrow RD_2^* \overset{\xi}{\underset{0}{|}} \mathcal{F}[U^\sigma] \to B$,

b) $RD_2^* \overset{\xi}{\underset{0}{|}} \lambda x\, \mathcal{G}[x](t) \to B \Rightarrow RD_2^* \overset{\xi}{\underset{0}{|}} \mathcal{G}[t] \to B$.

Beweis von a) durch Induktion nach ξ.

1. $\exists X\, \mathcal{F}[X] \to B$ sei ein Axiom. Nach dem 2. Stufenlemma tritt $\exists X\, \mathcal{F}[X]$ nicht als Positivteil in B auf. Daher ist auch $\mathcal{F}[U^\sigma] \to B$ ein Axiom.

2. $RD_2^* \overset{\xi}{\underset{0}{|}} \exists X\, \mathcal{F}[X] \to B$ sei durch einen Hauptschluß erschlossen. Ist dies kein Hauptschluß (RS 2.3) mit Hauptteil $\exists X\, \mathcal{F}[X]$, so folgt die Behauptung aufgrund des 3. Stufenlemmas und der Strukturschlußregel aus der I.V. Andernfalls hat man $\xi_0 \ll \xi$ und $B_0 \overset{s}{|} B$ mit $RD_2^* \overset{\xi_0}{\underset{0}{|}} \mathcal{F}[V^\sigma] \to B_0$, wobei V weder in $\mathcal{F}$ noch in B auftritt. Dann folgt die Behauptung mit der Strukturschlußregel und Substitutionsregel a).

3. $RD_2^* \overset{\xi}{\underset{0}{|}} \exists X\, \mathcal{F}[X] \to B$ sei durch eine $\Omega_{\tau+1}$-Regel erschlossen. Aus $\xi < \Omega_{\sigma+1}$ folgt dann $\tau < \sigma$. In diesem Fall tritt $\exists X\, \mathcal{F}[X]$ in keiner Formel einer Stufe $\leq \tau$ auf. Die Behauptung folgt daher aus der I.V.

Beweis von b) entsprechend wie von a).

1. Hauptsatz. Ist $\exists X\, \mathcal{F}[X]$ eine Formel der Stufe $\sigma + 1$, so gilt

$$RD_2^* \mathrel{\substack{\Omega_\sigma + 1 \\ | \\ 0}} \mathcal{F}[P] \to \exists X\, \mathcal{F}[X]$$

für jeden Prädikator P.

Beweis. Für $\xi < \Omega_{\sigma+1}$ und $\mathrm{st}(B) \leq \sigma$ folgt aus $RD_2^* \mathrel{\substack{\xi \\ | \\ 0}} \exists X\, \mathcal{F}[X] \to B$ nach der speziellen Inversionsregel a) $RD_2^* \mathrel{\substack{\xi \\ | \\ 0}} \mathcal{F}[U^\sigma] \to B$. Dabei sei U so gewählt, daß es weder in $\mathcal{F}$ noch in B auftritt. Dann gilt $U \notin \mathrm{Var}(\mathcal{F}[U^\sigma])$ aufgrund der Voraussetzungen zur Bildung der Formel $\exists X\, \mathcal{F}[X]$. Nach der Substitutionsregel b) folgt $RD_2^* \mathrel{\substack{\xi \\ | \\ 0}} \mathcal{F}[P] \to B$. Mit der Strukturschlußregel folgt

$$RD_2^* \mathrel{\substack{\xi \\ | \\ 0}} \exists X\, \mathcal{F}[X] \to B \Rightarrow RD_2^* \mathrel{\substack{\xi \\ | \\ 0}} (\mathcal{F}[P] \to \exists X\, \mathcal{F}[X]) \vee B$$

für alle $\xi < \Omega_{\sigma+1}$ und jede Formel B mit $\mathrm{st}(B) \leq \sigma$. Als (Ax R 3) gilt auch

$$RD_2^* \mathrel{\substack{0 \\ | \\ 0}} \exists X\, \mathcal{F}[X] \to (\mathcal{F}[P] \to \exists X\, \mathcal{F}[X])$$

Nach Lemma 4a) gilt $\mathrm{id}\,(\Omega_{\sigma+1}) \ll_{\sigma+1} \Omega_{\sigma+1}$. Die Behauptung ergibt sich daher mit der $\Omega_{\sigma+1}$-Regel.

2. Hauptsatz. Ist $\lambda x\, F[x]\,(t)$ eine Formel der Stufe $\sigma + 1$, so gilt

$$RD_2^* \mathrel{\substack{\Omega_\sigma + 1 \\ | \\ 0}} \mathcal{F}[t] \to \lambda x\, \mathcal{F}[x]\,(t)$$

Beweis mit Hilfe der speziellen Inversionsregel b) entsprechend wie für den 1. Hauptsatz.

Tautologiesatz. Ist F eine Formel vom Grad m, so gilt $RD_2^* \mathrel{\substack{2m \\ | \\ 0}} Q\,[F.\, F]$ für jede NP-Form Q.

Beweis durch Induktion nach m.

4.4. Herleitungsreduktionen in RD_2^*

Schnittlemma. Ist A eine Formel vom Grad m, die nicht die Gestalt $A_1 \to A_2$ hat, so gilt

$$RD_2^* \mathrel{\substack{\alpha \\ | \\ m}} A \vee F,\ RD_2^* \mathrel{\substack{\beta \\ | \\ m}} A \to F \Rightarrow RD_2^* \mathrel{\substack{\alpha \# \beta \\ | \\ m}} F$$

Beweis. 1. Es sei $m = 0$. Dann führen wie den Beweis folgendermaßen durch Induktion nach χ.

1.1. $A \vee F$ sei ein Axiom. Ist F kein Axiom, so ist A eine wahre konstante Primformel oder eine Formel $P < Q$ mit $\mathrm{st}(P) < \mathrm{st}(Q)$ oder F eine Formel $\mathcal{G}\!\mathcal{V}\ [A_0]$, wobei A und A_0 gleichwertig sind. In diesen Fällen folgt die Behauptung aus der 2. Voraussetzung mit der Verumregel oder mit der Umsetzungsregel und Strukturschlußregel.

1.2. $RD_2^* \,|\frac{\alpha}{0}\, A \vee F$ sei durch einen Hauptschluß erschlossen. Der Hauptteil eines solchen Schlusses liegt in F. Daher hat jede Prämisse die Gestalt $\mathcal{T}_i[A]$. Hierfür hat man $\alpha_i \ll \alpha$ mit $RD_2^* \,|\frac{\alpha_i}{0}\, \mathcal{T}_i[A]$. Mit der Strukturschlußregel und nach I.V. folgt $RD_2^* \,|\frac{\alpha_i \# \beta}{0}\, \mathcal{T}_i[F]$. Hieraus folgt mit einem entsprechenden Hauptschluß $RD_2^* \,|\frac{\alpha \# \beta}{0}\, F \vee F$ und nach der Strukturschlußregel $RD_2^* \,|\frac{\alpha \# \beta}{0}\, F$.

1.3. $RD_2^* \,|\frac{\alpha}{0}\, A \vee F$ sei durch die $\Omega_{\sigma+1}$-Regel erschlossen unter Benutzung von $\varphi \ll_{\sigma+1} \alpha$. Nach Lemma 4b) folgt $\varphi \# \beta \ll_{\sigma+1} \alpha \# \beta$. Hiermit ergibt sich die Behauptung aus der I.V.

2. A sei eine Formel $\forall x\, \mathcal{F}[x]$. Dann erfolgt der Beweis durch Induktion nach β mit der Strukturschlußregel und Inversionsregel c).

3. A sei eine Formel $\exists X^\sigma\, \mathcal{F}[X]$ oder $\exists X < P\, \mathcal{F}[X]$. Dann erfolgt der Beweis durch Induktion nach α mit der Strukturschlußregel und Inversionsregel d) oder e).

Reduktionssatz. Aus $RD_2^* \,|\frac{\alpha}{m+1}\, F$ folgt $RD_2^* \,|\frac{\omega^\alpha}{m}\, F$.

Beweis durch Induktion nach α.

1. F sei ein Axiom. Dann ist die Behauptung erfüllt.

2. $RD_2^* \,|\frac{\alpha}{m+1}\, F$ sei durch einen Hauptschluß oder einen Schnitt vom Grad $< m$ erschlossen. Dann folgt die Behauptung aus der I.V., denn aus $\alpha_i \ll \alpha$ folgt $\omega^{\alpha_i} \ll \omega^\alpha$.

3. $RD_2^* \,|\frac{\alpha}{m+1}\, F$ sei durch einen Schnitt vom Grad m erschlossen. Dann hat man nach I.V.

(1) $$RD_2^* \,|\frac{\omega^{\alpha_1}}{m}\, A \vee F$$

(2) $$RD_2^* \,|\frac{\omega^{\alpha_2}}{m}\, A \rightarrow F$$

mit $\alpha_i \ll \alpha$ $(i = 1, 2)$ und $\mathrm{gr}(A) = m$.

3.1. A habe nicht die Gestalt $A_1 \rightarrow A_2$. Dann folgt die Behauptung aus (1) und (2) nach dem Schnittlemma, da

$\omega^{\alpha_1} \# \omega^{\alpha_2} \ll \omega^{\alpha}$ ist.

3.2. A sei eine Formel $A_1 \to A_2$. Dann folgt aus (1) nach der Strukturschlußregel

(3) $$RD_2^* \overset{\omega^{\alpha_1}}{\underset{m}{\vdash}} A_1 \to (A_2 \vee F)$$

und aus (2) nach den Inversionsregeln a) und b)

(4) $$RD_2^* \overset{\omega^{\alpha_2}}{\underset{m}{\vdash}} A_1 \vee F$$

(5) $$RD_2^* \overset{\omega^{\alpha_2}}{\underset{m}{\vdash}} A_2 \to F$$

Aus (4) und (3) folgt mit der Strukturschlußregel und einem Schnitt vom Grad $< m$

(6) $$RD_2^* \overset{\omega^{\alpha_1} \# \omega^{\alpha_2}}{\underset{m}{\vdash}} A_2 \vee F$$

Aus (6) und (5) folgt die Behauptung mit einem Schnitt vom Grad $< m$.

4. $RD_2^* \overset{\alpha}{\underset{m}{\vdash}}{}_{\sigma+1} F$ sei durch die $\Omega_{\sigma+1}$-Regel erschlossen unter Benutzung von $\varphi \ll_{\sigma+1} \alpha$. Nach Lemma 4b folgt $\omega^{\varphi} \ll_{\sigma+1} \omega^{\alpha}$. Hiermit ergibt sich die Behauptung aus der I.V.

Starker Schnitt-Eliminationssatz. Aus $RD_2^* \overset{\alpha}{\underset{m}{\vdash}} F$ folgt $RD_2^* \overset{\omega_{m}(\alpha)}{\underset{0}{\vdash}} F$.

Beweis mit dem Reduktionssatz durch Induktion nach m.

Kollabierungssatz. Aus $RD_2^* \overset{\alpha}{\underset{0}{\vdash}} F$ mit $\mathrm{st}(F) \leq \sigma$ folgt $RD_2^* \overset{D_\sigma \alpha}{\underset{0}{\vdash}} F$.

Beweis durch Induktion nach α.

1. F sei ein Axiom. Dann ist die Behauptung erfüllt.

2. $RD_2^* \overset{\alpha}{\underset{0}{\vdash}} F$ sei durch einen Hauptschluß erschlossen. Dann folgt die Behauptung aufgrund des 3. Stufenlemmas aus der I.V., da aus $\alpha_i \ll \alpha$ nach Lemma 1c) $D_\sigma \alpha_i \ll D_\sigma \alpha$ folgt.

3. $RD_2^* \overset{\alpha}{\underset{0}{\vdash}} F$ sei durch eine $\Omega_{\tau+1}$-Regel erschlossen. Dann hat man

(1) $$\varphi \ll_{\tau+1} \alpha$$

und eine Formel A der Gestalt $\exists X \mathcal{F}[X]$ oder $\lambda x \mathcal{F}[x](t)$ mit $\mathrm{st}(A) = \tau + 1$ und

(2) $$RD_2^* \overset{\varphi 0}{\underset{0}{\vdash}} A \to F$$

(3) $\xi < \Omega_{\tau+1}$, $\mathrm{st}(B) \le \tau$, $RD_2^* \,\frac{|\xi}{|0}\, A \to B \Rightarrow RD_2^* \,\frac{|\varphi\xi}{|0}\, F \vee B$.

3.1. Es sei $\tau < \sigma$. Aus (1) folgt dann nach Lemma 4c) $D_\sigma \varphi \ll_{\tau+1} D_\sigma \alpha$. Mit (2) und (3) folgt die Behauptung aus der I.V. nach der $\Omega_{\tau+1}$-Regel.

3.2. Es sei $\sigma \le \tau$. Aus (2) folgt dann nach I.V.

$$RD_2^* \,\frac{|D_\tau(\varphi 0)}{|0}\, A \to F$$

Da $D_\tau(\varphi 0) < \Omega_{\tau+1}$ ist, folgt nach (3) und der Strukturschlußregel

$$RD_2^* \,\frac{|\varphi(D_\tau(\varphi 0))}{|0}\, F$$

Aus (1) folgt

$$\varphi(D\ (\varphi 0)) \ll \alpha$$

Nach der I.V. und Lemma 1c) folgt die Behauptung.

4.5. Interpretation von D_2^* in RD_2^*

Definition. Für einen Limesterm σ aus $\bar{\Theta}(\Omega)$. Eine Formel F^σ des Systems RD_2^* heißt eine σ-*Interpretation* einer Formel F des Systems D_2^*, wenn F^σ durch folgende Ersetzungen aus F hervorgeht:

1. Für jede in F auftretende freie Prädikatenvariable wird ein Prädikator des Systems RD_2^* einer Stufe $< \sigma$ eingesetzt.

2. Jeder in F auftretende starke Prädikatenquantor $\exists X$ wird durch $\exists X^\sigma$ ersetzt.

Folgerungen. Für jede σ-Interpretation F^σ einer Formel F des Systems D_2^* gilt:

a) $\mathrm{gr}(F^\sigma) = \mathrm{gr}(F)$

b) Ist F eine schwache Formel, so ist $\mathrm{st}(F^\sigma) < \sigma$.

c) Ist F eine starke Formel, so ist $\mathrm{st}(F^\sigma) = \sigma$.

d) Ist F eine Σ_2^1-Formel, so tritt jeder in F^σ vorkommende geschichtete Quantor $\exists X^\sigma$ positiv in F^σ auf.

Interpretationssatz. Gilt $D_2^* \,\frac{|\alpha}{|1}\, F$ mit $\alpha < \varepsilon_0$ für eine Σ_2^1-Formel F und ist $\sigma = \omega^{1+\alpha} \cdot \beta$ mit $0 < \beta < \varepsilon_0$, so folgt

$$RD_2^* \,\frac{|\Omega_{\sigma+\omega^{+2\alpha}}}{|0}\, F^\sigma$$

für jede σ-Interpretation F^σ von F.

Beweis durch Induktion nach α.

1. F sei ein Axiom des Systems D_2^*.

1.1. Ist F eines der Axiome (Ax 1)–(Ax 3), so ist F^σ eines der Axiome (Ax R 1)–(Ax R 3).

1.2. Ist F ein Axiom (W-CA), so ist F^σ eine Formel

$$\mathcal{P}\,[\exists\, Y\, \forall\, x\, (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{F}[x])],$$

wobei $\mathcal{F}[0]$ eine Stufe $< \sigma$ hat. Aus dem Tautologiesatz des Systems RD_2^* folgt mit einem Hauptschluß (RS 4)

$$(1) \qquad RD_2^* \mathrel{\vert\!\frac{\omega}{0}} \lambda\, z\, \mathcal{F}[z](n) \to \mathcal{F}[n]$$

für jede Ziffer n. Die Formel $\lambda\, z\, \mathcal{F}\,[z]\,(n)$ hat eine Stufe $< \sigma$. Nach dem 2. Hauptsatz gilt daher

$$(2) \qquad RD_2^* \mathrel{\vert\!\frac{\Omega_\sigma}{0}} \mathcal{F}[n] \to \lambda\, z\, \mathcal{F}[z]\,(n)$$

Aus (1) und (2) folgt mit der Strukturschlußregel und Hauptschlüssen (S 1) und (S 2.0*)

$$(3) \qquad RD_2^* \mathrel{\vert\!\frac{\Omega_\sigma + 2}{0}} \forall\, x\, (\lambda\, z\, \mathcal{F}[z]\,(x) \leftrightarrow \mathcal{F}[x]).$$

Die Formel $\exists\, Y\, \forall\, x\, (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{F}[x])$ hat ebenfalls eine Stufe $< \sigma$. Nach dem 1. Hauptsatz gilt daher

$$(4) \quad RD_2^* \mathrel{\vert\!\frac{\Omega_\sigma}{0}} \forall\, x\, (\lambda\, z\, \mathcal{F}[z]\,(x) \leftrightarrow \mathcal{F}[x]) \to \exists\, Y\, \forall\, x\, (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{F}[x]).$$

Aus (3) und (4) folgt mit der Strukturschlußregel und einem Schnitt

$$RD_2^* \mathrel{\vert\!\frac{\Omega_\sigma + 3}{m}} \exists\, Y\, \forall\, x\, (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{F}[x])$$

für eine geeignete natürliche Zahl m. Mit der Strukturschlußregel und dem starken Schnitt-Eliminationssatz folgt die Behauptung, denn nach Lemma 2a) ist $\omega_m\, (\Omega_\sigma + 3) \ll \Omega_{\sigma + \omega}$.

2. $D_2^* \mathrel{\vert\!\frac{\alpha}{1}} F$ sei durch einen Hauptschluß des Systems D_2^* erschlossen. Dann ist auch jede Prämisse dieses Schlusses eine Σ_2^1-Formel.

2.1. Es handle sich um einen Hauptschluß (S 1), (S 2.0*), (S 2.1), (S 2.2), (S 3.0) oder (S 3.2). Dann folgt die Behauptung aus der I.V., wobei im Fall von (S 3.2) auch die Falsumregel heranzuziehen ist.

2.2. Es handle sich um einen Hauptschluß (S 3.1). Ist der Hauptteil dieses Schlusses eine starke Formel, so folgt die Behauptung unmittelbar aus der I.V. Andernfalls ist F^σ eine Formel

$$\mathcal{P}\,[\exists\, X\, \mathcal{F}[X]],$$

und man hat nach I.V.

$$(1) \qquad RD_2^* \mid\!\frac{\Omega_{\sigma+\omega+2\alpha_0}}{0}\; F[P] \vee [\exists\, X\, \mathcal{F}[X]]$$

mit $\alpha_0 < \alpha$. Die unter (1) angegebene Formel hat eine Stufe $\mu \leq \sigma$. Aus (1) folgt daher nach dem Kollabierungssatz

$$(2) \qquad RD_2^* \;\frac{D_\mu(\Omega_{\sigma+\omega+2\alpha_0})}{0}\; \mathcal{F}[P] \vee \mathcal{P}\,[\exists\, X\, \mathcal{F}[X]].$$

Die Formel $\exists\, X\, \mathcal{F}[X]$ hat eine Stufe $\tau + 1 < \sigma$. Nach dem 1. Hauptsatz hat man

$$(3) \qquad RD_2^* \;\frac{\Omega_{\tau+1}}{0}\; \mathcal{F}[P] \rightarrow \exists\, X\, \mathcal{F}[X].$$

Aus (2) und (3) folgt mit der Strukturschlußregel und einem Schnitt

$$RD_2^* \mid\!\frac{\gamma}{m}\; \mathcal{P}\,[\exists\, X\, \mathcal{F}\, X]]$$

für $\gamma := D_\mu\,(\Omega_{\sigma+\omega} + 2\,\alpha_0) \,\#\, \Omega_{\tau+1}$ und eine geeignete natürliche Zahl m. Nach dem starken Schnitt-Eliminationssatz folgt die Behauptung, da nach Lemma 2 b) $\omega_m\,(\gamma) \ll \Omega_{\sigma+\omega} + 2\,\alpha$ ist.

2.3. Es handle sich um einen Hauptschluß (Σ_2^1-Ref). Dann ist F eine Formel $\mathcal{P}[\exists\, Y\, A_Y]$, und man hat $\alpha_0 < \alpha$ mit

$$(1) \qquad D_2^* \mid\!\frac{\alpha_0}{1}\; A \vee \mathcal{P}\,[\exists\, Y\, A_Y]$$

Ist $\exists\, Y\, A_Y$ eine schwache Formel, so ist $U \notin \mathrm{Var}(A_U)$, folglich Y nicht in A_Y enthalten. In diesem Fall ergibt sich die Behauptung ähnlich wie im Fall 2.2. Andernfalls ist F^σ eine Formel

$$\mathcal{P}^\sigma\,[\exists\, Y^\sigma \mathcal{A}[\,Y]],$$

wobei $\mathcal{A}[U^0]$ eine Stufe $< \sigma$ hat. Dann gibt es $\sigma_0 < \sigma$ derart, daß bei der Bildung von F^σ nur Prädikatoren von Stufen $< \sigma_0$ für die in F auftretenden freien Prädikatenvariablen eingesetzt sind. Hierzu gibt es β_0 mit

$$\sigma_0 < \tau := \omega^{1+\alpha_0} \cdot \beta_0 < \sigma = \omega^{1+\alpha} \cdot \beta$$

A^τ sei diejenige τ-Interpretation von A, bei der für die in A auftretenden freien Prädikatenvariablen dieselben Prädikatoren wie bei der Bildung von F^σ in F eingesetzt sind. Aus $\mathcal{P}^\sigma$ bilden wir $\mathcal{P}^\tau$, indem wir jeden geschichteten Quantor $\exists\, X^\sigma$ durch $\exists\, X^\tau$ ersetzen. Aus (1) folgt nach I.V.

$$RD_2^* \,\frac{|\Omega\tau + \omega + 2\alpha_0}{|0}\, A^\tau \vee \mathcal{P}^\tau [\exists\, Y^\tau \mathcal{A}[Y]]$$

Nach Voraussetzung ist F eine Σ_2^1-Formel. Daher folgt aufgrund der Σ-Persistenz

(2) $$RD_2^* \,\frac{|\Omega\tau + \omega + 2\alpha_0}{|0}\, A^\tau \vee \mathcal{P}^\sigma [\exists\, Y^\sigma \mathcal{A}[Y]]$$

$\mathcal{A}[U^\tau]$ ist diejenige Formel, die sich aus A^τ ergibt, wenn jeder darin auftretende geschichtete Quantor $\exists\, X^\tau$ durch $\exists\, X < U^\tau$ ersetzt wird. Aus (2) folgt daher durch $<$-Einführung

$$RD_2^* \,\frac{|\Omega\tau + \omega + 2\alpha_0}{|0}\, \mathcal{A}[U^\tau] \vee \mathcal{P}^\sigma [\exists\, Y^\sigma \mathcal{A}[Y]]$$

Mit einem Hauptschluß (RS 3.1) folgt die Behauptung.

3. $D_2^* \,\frac{|\alpha}{|1}\, F$ sei durch einen Schnitt erschlossen. Dann hat man $\alpha_i < \alpha$ $(i = 1, 2)$ mit

(1) $$D_2^* \,\frac{|\alpha_1}{|1}\, A \vee F$$

(2) $$D_2^* \,\frac{|\alpha_2}{|1}\, A \rightarrow F$$

Die Schnittformel A ist entweder eine schwache Formel oder eine starke Formel $\exists\, X \mathcal{A}[X]$, wobei $\mathcal{A}[U]$ eine schwache Formel ist. Im zweiten Fall folgt aus (2) nach der Inversionsregel d) des Systems D_2^*

(3) $$D_2^* \,\frac{|\alpha_2}{|1}\, \mathcal{A}[U] \rightarrow F$$

Dabei sei U so gewählt, daß es weder in $\mathcal{A}$ noch in F auftritt. Bei (1) und (3) handelt es sich um Σ_2^1-Formeln. Nach I.V. folgt daher

(4) $$RD_2^* \,\frac{|\Omega\sigma + \omega + 2\alpha_1}{|0}\, A^\sigma \vee F^\sigma$$

(5) $$RD_2^* \,\frac{|\Omega\sigma + \omega + 2\alpha_2}{|0}\, \mathcal{A}^\sigma [P] \rightarrow F^\sigma$$

für jeden Prädikator P mit $\mathrm{st}(P) < \sigma$. Aus (5) folgt durch einen Hauptschluß (RS 2.1*)

(6) $$RD_2^* \mathrel{|\!\!\frac{\ \Omega_{\sigma+\omega+2\alpha_2+1}\ }{0}} A^\sigma \to F^\sigma$$

(4) und (6) gelten auch im ersten Fall, in dem A eine schwache Formel ist. Man hat $\mu := \mathrm{st}(A^\sigma \vee F^\sigma) \leq \sigma$ und $\nu := \mathrm{st}(A^\sigma \to F^\sigma) \leq \sigma$. Aus (4) und (6) folgt nach dem Kollabierungssatz

$$RD_2^* \mathrel{|\!\!\frac{\ D_\mu(\Omega_{\sigma+\omega+2\alpha_1})\ }{0}} A^\sigma \vee F^\sigma$$

$$RD_2^* \mathrel{|\!\!\frac{\ D_\nu(\Omega_{\sigma+\omega+2\alpha_2+1})\ }{0}} A^\sigma \to F^\sigma$$

Durch einen Schnitt folgt

$$RD_2^* \mathrel{|\!\!\frac{\ \gamma\ }{m}} F^\sigma$$

für

$$\gamma := D_\mu(\Omega_{\sigma+\omega} + 2\,\alpha_1) \# D_\nu(\Omega_{\sigma+\omega} + 2\,\alpha_2 + 1)$$

und $m := \mathrm{gr}(A) + 1$. Nach dem starken Schnitt-Eliminationssatz folgt die Behauptung, da nach Lemma 2c) $\omega_m(\gamma) \ll \Omega_{\sigma+\omega} + 2\,\alpha$ ist.

§ 5. Beweistheoretische Abgrenzung des Systems D_2CA

Eine Formel des Systems D_2CA heiße *geschlossen*, wenn sie keine freie Zahlenvariable enthält. Jede geschlossene Formel des Systems D_2CA ist zugleich eine Formel des Systems D_2^*.

Ist σ ein Limestern aus $\bar{\Theta}(\Omega)$ und F eine Formel des Systems D_2^*, so verstehen wir unter der *einfachen σ-Interpretation* von F diejenige σ-Interpretation von F, bei der für jede in F auftretende freie Prädikatenvariable U der Prädikator U^0 eingesetzt ist. Die einfache σ-Interpretation einer schwachen Formel des Systems D_2^* ist eine von σ unabhängige Formel einer Stufe $< \omega$. Diese Stufe bezeichnen wir als die *Stufe der schwachen Formel* des Systems D_2^*.

Abgrenzungssatz. Ist F eine in D_2CA herleitbare geschlossene schwache Formel der Stufe 0, so gibt es $\gamma < \bar{\Theta}\,\Omega_{\varepsilon_0}\,0$, so daß $RD_2^* \mathrel{|\!\!\frac{\ \gamma\ }{0}} F^\sigma$ für die (von σ unabhängige) einfache σ-Interpretation F^σ von F gilt.

Beweis. Nach dem Einbettungssatz des § 3 gibt es $\alpha < \omega \cdot 2$ und eine natürliche Zahl m, so daß $D_2^* \mathrel{|\!\!\frac{\ \alpha\ }{m}} F$ gilt. Dann gibt es nach dem schwachen Schnitt-Eliminationssatz des § 3 $\beta < \varepsilon_0$ mit $D_2^* \mid\!\frac{\beta}{1} F$. Für $\sigma := \omega^{1+\beta}$ folgt nach dem Interpretationssatz des § 4

$$RD_2^* \mid\!\frac{\Omega_{\sigma+\omega+2\beta}}{0} F^\sigma$$

Da F^σ die Stufe o hat, folgt nach dem Kollabierungssatz des § 4 $RD_2^* \mid\!\frac{\gamma}{0} F^\sigma$ für

$$\gamma := D_0(\Omega_{\sigma+\omega} + 2\beta) < D_0\Omega_{\varepsilon_0} = \bar{\Theta}\,\Omega_{\varepsilon_0}\,0.$$

Folgerung. In D_2CA ist die formalisierte tranfinite Induktion nicht bis $\bar{\Theta}\,\Omega_{\varepsilon_0}\,0$ herleitbar, d. h. es gilt $|D_2CA| \leq \bar{\Theta}\,\Omega_{\varepsilon_0}\,0$.

§ 6. Beweistheoretische Abgrenzung des Systems P_1CA

Das formale System P_1CA hat dieselbe formale Sprache wie das System D_2CA. Es unterscheidet sich von D_2CA nur dadurch, daß es anstelle des Axiomenschemas (Δ_2^1-CA) das schwächere Axiomenschema (W-CA) hat (wie D_2^* in § 3, jedoch auf die formale Sprache von P_1CA bezogen).

Das halbformale System P_1^* unterscheidet sich von dem System D_2^* dadurch, daß hier das Symbol $<$ und somit auch die beschränkten Prädikatenquantoren fortfallen. Hiermit entfallen auch die Hauptschlüsse (S 2.2), (S 3.2) und (Σ_2^1-Ref). Außerdem wird in P_1^* der Komplexitätsgrad $\mathrm{kg}(F)$ durch den Grad $\mathrm{gr}(F)$ ersetzt.

Entsprechend wie in § 3 ergeben sich die folgenden zwei Sätze.

Einbettungssatz. Gilt $P_1CA \mid^{n} F$, so gibt es eine natürliche Zahl m, so daß

$$P_1^* \mid\!\frac{\omega\cdot n}{m} F^*$$

für jede numerische Spezialisierung F^* von F gilt.

Schwacher Schnitt-Eliminationssatz. Gilt $P_1^* \mid\!\frac{\alpha}{m} F$ mit $\alpha < \varepsilon_0$, so gibt es $\beta < \varepsilon_0$ mit $P_1^* \mid\!\frac{\beta}{1} F$.

Das geschichtete halbformale System RP_1^* unterscheidet sich von dem System RD_2^* ebenfalls nur dadurch, daß hier das Symbol $<$ und die beschränkten Quantoren fortfallen. Hiermit entfallen auch die Hauptschlüsse (RS 2.2*) und (RS 3.2).

Entsprechend wie in § 4 ergeben sich die folgenden drei Sätze:

Starker Schnitt-Eliminationssatz. Aus $RP_1^* \vdash^{\alpha}_{m} F$ folgt $RP_1^* \vdash^{\omega_m(\alpha)}_{0} F$.

Kollabierungssatz. Aus $RP_1^* \vdash^{\alpha}_{0} F$ mit $\mathrm{st}(F) \leq \sigma$ folgt $RP_1^* \vdash^{D_\sigma \alpha}_{0} F$.

Interpretationssatz. Gilt $P_1^* \vdash^{\alpha}_{1} F$ mit $\alpha < \varepsilon_0$ für eine schwache Formel F, so folgt

$$RP_1^* \vdash^{\Omega_\omega + \alpha}_{0} F^\omega$$

für jede ω-Interpretation F^ω von F.

Ist nämlich $P_1^* \vdash^{\alpha}_{1} F$ für eine schwache Formel F durch einen Hauptschluß oder Schnitt des Systems P_1^* erschlossen, so ist auch jede Prämisse dieses Schlusses eine schwache Formel. Ihre ω-Interpretationen haben Stufen $< \omega$. Daher ergibt sich der Interpretationssatz für P_1^* entsprechend wie in § 4 für D_2^*.

Entsprechend wie in § 5 folgt der

Abgrenzungssatz. Ist F eine in P_1CA herleitbare geschlossene schwache Formel der Stufe 0, so gibt es $\gamma < \Theta(\Omega_\omega \cdot \varepsilon_0)0$, so daß $RP_1^* \vdash^{\gamma}_{0} F^\omega$ für die einfache ω-Interpretation F^ω von F gilt.

Beweis. Nach dem Einbettungssatz und dem schwachen Schnitt-Eliminationssatz gibt es $\beta < \varepsilon_0$ mit $P_1^* \vdash^{\beta}_{1} F$. Nach dem Interpretationssatz und Kollabierungssatz folgt $RP_1^* \vdash^{\gamma}_{0} F^\omega$ für

$$\gamma := D_0(\Omega_\omega + \beta) < D_0(\Omega_\omega + \varepsilon_0) = \bar{\Theta}(\Omega_\omega \cdot \varepsilon_0)0$$

Folgerung. $|P_1CA| \leq \bar{\Theta}(\Omega_\omega) \cdot \varepsilon_0)0$.

§ 7. Beweistheoretische Abgrenzung des Systems GP_1CA

Das formale System GP_1CA hat dieselbe formale Sprache wie die Systeme D_2CA und P_1CA. Sind $\mathcal{F}[U]$ und $\mathcal{G}[0]$ Formeln dieses Systems, wobei U nicht in $\mathcal{F}$ auftritt, so bezeichnen wir mit $\mathcal{F}[\mathcal{G}]$ diejenige Formel des Systems GP_1CA, die sich aus $\mathcal{F}[U]$ ergibt, wenn jeder darin auftretende Bestandteil der Gestalt $U(u)$ durch $\mathcal{G}[u]$ ersetzt wird (eventuell unter Umbenennung von gebundenen Variablen zur Vermeidung von Variablenkollisionen). GP_1CA sei P_1CA mit der zusätzlichen Hauptschlußregel

$$\text{(S 3.1')} \quad \mathcal{F}[\mathcal{G}] \vee \mathcal{P}[\exists X\, \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{P}[\exists X\, \mathcal{F}[X]],$$

wenn $\exists X\, \mathcal{F}[X]$ eine schwache Formel und $\mathcal{G}[0]$ eine beliebige Formel ist. (Durch diese zusätzliche Schlußregel wird die *Bar-Induktion* für arithmetische Prädikate gewonnen.)

Wir interpretieren GP_1CA direkt in dem geschichteten halbformalen System RP_1^* des § 6, ohne eine Einbettung in P_1^* zwischenzuschalten. Als *σ-Interpretationen* einer Formel F des Systems GP_1CA erklären wir die σ-Interpretationen (gemäß § 4) der numerischen Spezialisierungen von F. Diese σ-Interpretationen sind Formeln des Systems RP_1^*.

Das System RP_1^* hat die entsprechenden deduktiven Eigenschaften wie das System RD_2^*. Insbesondere gelten in RP_1^* die *Inversionsregeln* a)–d), die *Strukturschlußregel*, die *Substitutionsregeln* a) und b), die *speziellen Inversionsregeln* a) und b), der 1. und 2. *Hauptsatz*, der *Tautologiesatz* und das (V.I.)-*Lemma* entsprechend wie in RD_2^*. In Ergänzung zur Substitutionsregel b) und zum 1. Hauptsatz brauchen wir noch die folgenden zwei Sätze.

Substitutionsregel. c). Gilt $RP_1^* \overset{\xi}{\underset{0}{|}} \mathcal{F}[U^\sigma]$ mit $\xi < \Omega_{\sigma+1}$, wobei U nicht in $\mathcal{F}$ auftritt und $U \notin \mathrm{Var}(\mathcal{F}[U^\sigma])$ ist, so folgt $RP_1^* \overset{\xi \# 2m}{\underset{0}{|}} \mathcal{F}[\mathcal{G}]$ für jede Formel $\mathcal{G}[0]$ vom Grad m.

Beweis durch Induktion nach ξ.

1. $\mathcal{F}[U^\sigma]$ sei ein Axiom. Dann ist $\mathcal{F}[\mathcal{G}]$ ein Axiom oder eine Formel $Q[\mathcal{G}[s], \mathcal{G}[t]]$ mit numerischen Termen s, t vom gleichen Wert. Im zweiten Fall folgt die Behauptung aus dem Tautologiesatz.

2. $RP_1^* \overset{\xi}{\underset{0}{|}} \mathcal{F}[U^\sigma]$ sei durch einen Hauptschluß erschlossen. Aufgrund von $U \notin \mathrm{Var}(\mathcal{F}[U^\sigma])$ folgt dann die Behauptung aus der I.V.

3. $RP_1^* \overset{\xi}{\underset{0}{|}} \mathcal{F}[U^\sigma]$ sei durch eine $\Omega_{\tau+1}$-Regel erschlossen unter Benutzung von $\varphi \ll_{\tau+1} \xi$. Nach Lemma 4b) folgt $\varphi \# 2m \ll \ll_{\tau+1} \xi \# 2m$. Hiermit ergibt sich die Behauptung aus der I.V. wie im Beweis der Substitutionsregel b).

3. **Hauptsatz.** Ist $\exists X\, \mathcal{F}[X]$ eine Formel der Stufe $\sigma + 1$, so gilt

$$RP_1^* \overset{\Omega_\sigma+1}{\underset{0}{|}} \mathcal{F}[\mathcal{G}] \rightarrow \exists X\, \mathcal{F}[X]$$

für jede Formel $\mathcal{G}[0]$.

Beweis. Es sei $\operatorname{gr}(\mathcal{G}[0]) = m$. Für $\xi < \Omega_{\sigma+1}$ und $\operatorname{st}(B) \leq \sigma$ folgt aus der speziellen Inversionsregel a), der vorstehenden Substitutionsregel c) und der Strukturschlußregel $RP_1^* \,\frac{|\xi}{|0}\, \exists X\, \mathcal{F}[X] \to B \Rightarrow RP_1^* \,\frac{|\xi \# 2m}{|0}\, (\mathcal{F}[\mathcal{G}] \to \exists X\, \mathcal{F}[X]) \vee B$. Hiermit erhält man die Behauptung nach der $\Omega_{\sigma+1}$-Regel, da nach Lemma 4a) $\operatorname{id}(\Omega_{\sigma+1}) \# 2m \ll_{\sigma+1} \Omega_{\sigma+1}$ gilt.

Es folgt nun der

Interpretationssatz. Gilt $GP_1CA \,\frac{|n}{}\, F$, so gibt es eine natürliche Zahl m, so daß

$$RP_1^* \,\frac{|\Omega_\omega + n}{|m}\, F^\omega$$

für jede ω-Interpretation F^ω von F gilt.

Beweis durch Induktion nach n mit dem (V.I.)-Lemma und den drei Hauptsätzen. Hierbei wird die Hauptschlußregel (S 3.1') durch den 3. Hauptsatz berücksichtigt.

Abgrenzungssatz. Ist F eine in GP_1CA herleitbare geschlossene schwache Formel der Stufe 0, so gibt es $\gamma < \bar{\Theta}\, \varepsilon_{\Omega_\omega + 1} 0$, so daß $RP_1^* \,\frac{|\gamma}{|0}\, F^\omega$ für die einfache ω-Interpretation F^ω von F gilt.

Beweis. Nach dem Interpretationssatz gibt es natürliche Zahlen m und n mit

$$RP_1^* \,\frac{|\Omega_\omega + n}{|m}\, F^\omega$$

Nach dem starken Schnitt-Eliminationssatz und Kollabierungssatz folgt $RP_1^* \,\frac{|\gamma}{|0}\, F^\omega$ für

$$\gamma := D_0(\omega_m(\Omega_\omega + n)) < D_0 \varepsilon_{\Omega_\omega + 1} = \bar{\Theta}\, \varepsilon_{\Omega_\omega + 1} 0$$

Folgerung. $|GP_1CA| \leq \bar{\Theta}\, \varepsilon_{\Omega_\omega + 1} 0$.

§ 8. Beweistheoretische Abgrenzung des Systems GD_2CR

Das formale System D_2CR unterscheidet sich von D_2CA dadurch, daß es anstatt des Axiomenschemas $(\Delta_2^1\text{-}CA)$ folgende Hauptschlußregel hat:

$$(\Delta_2^1\text{-}CR)\ \forall x\, (\mathcal{A}[x] \leftrightarrow \mathcal{B}[x]) \vdash \exists Y\, \forall x\, (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{A}[x]),$$

wenn $\mathcal{A}[0]$ eine Σ_2^1-Formel und $\mathcal{B}[0]$ eine Π_2^1-Formel ist.

Das formale System GD_2CR sei D_2CR mit der zusätzlichen Hauptschlußregel (S 3.1′) des § 7. Wie GP_1CA interpretieren wir auch GD_2CR direkt in RP_1^*.

Interpretationssatz. Gilt $GD_2CR \overset{n}{\vdash} F$ und ist $\sigma = \omega^{n+1} \cdot \beta$ mit $0 < \beta < \omega^\omega$, so folgt

$$RP_1^* \left|\frac{\Omega\sigma + \omega + n}{0}\right. F^\sigma$$

für jede σ-Interpretation F^σ von F.

Beweis durch Induktion nach n. Wir betrachten nur den Fall, daß $GD_2CR \overset{n}{\vdash} F$ durch einen Hauptschluß (Δ_2^1-CR) erschlossen ist, da der Beweis in allen anderen Fällen sehr einfach ist. Dann ist F eine Formel

$$\exists\, Y\, \forall\, x\, (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{A}[x])$$

Ist $\mathcal{A}[0]$ eine schwache Formel, so erfolgt der Beweis ähnlich wie für den Interpretationssatz des § 4 im Fall 1.2. $\mathcal{A}[0]$ sei nun eine starke Formel. Dann ist F^σ eine Formel

$$\exists\, Y^\sigma\, \forall\, x\, (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{A}^\sigma[x])$$

Man hat $n_0 < n$ mit

$$GD_2CR \overset{n_0}{\vdash} \forall\, x\, (\mathcal{A}[x] \leftrightarrow \mathcal{B}[x]),$$

wobei $\mathcal{A}[0]$ eine Σ_2^1-Formel und $\mathcal{B}[0]$ eine Π_2^1-Formel ist. Nach I.V. folgt

$$RP_1^* \left|\frac{\Omega\sigma + \omega + n_0}{0}\right. \forall\, x (\mathcal{A}^\sigma\, [x] \leftrightarrow \mathcal{B}^\sigma[x])$$

Mit den Inversionsregeln a)–c), der Falsumregel und Strukturschlußregel folgt

(1) $$RP_1^* \left|\frac{\Omega\sigma + \omega + n_0}{0}\right. \mathcal{A}^\sigma[m] \to \mathcal{B}^\sigma[m]$$

(2) $$RP_1^* \left|\frac{\Omega\sigma + \omega + n_0}{0}\right. \mathcal{B}^\sigma[m] \to \mathcal{A}^\sigma[m]$$

für jede Ziffer m. Es gibt β_0 mit

$$0 < \tau := \omega^{n_0+1} \cdot \beta_0 < \sigma = \omega^{n+1} \cdot \beta$$

derart, daß bei der Bildung von $\mathcal{A}^\sigma$ und $\mathcal{B}^\sigma$ nur Prädikatoren von Stufen $< \tau$ für die in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ auftretenden freien Prädikatenvariablen eingesetzt sind. Aus $\mathcal{A}^\sigma$ und $\mathcal{B}^\sigma$ bilden wir $\mathcal{A}^\tau$

und $\mathcal{B}^\tau$, indem wir jeden geschichteten Quantor $\exists X^\sigma$ durch $\exists X^\tau$ ersetzen. Dann sind $\mathcal{A}^\tau[m]$ und $\mathcal{B}^\tau[m]$ τ-Interpretationen von $\mathcal{A}[m]$ und $\mathcal{B}[m]$. Ebenso wie (2) erhält man

$$(3) \qquad RP_1^* \mid\!\frac{\Omega_\tau + \omega + n_0}{0}\; \mathcal{B}^\tau[m] \to \mathcal{A}^\tau[m]$$

Für $m_1 := \mathrm{gr}(\mathcal{A}^\tau[0])$ und $m_2 := \mathrm{gr}(\mathcal{B}^\tau[0])$ erhält man mit dem Tautologiesatz, einem Hauptschluß (RS 4) und aufgrund der Σ-Persistenz

$$(4) \qquad RP_1^* \mid\!\frac{2m_1 + 1}{0}\; \lambda z\, \mathcal{A}^\tau[z]\,(m) \to \mathcal{A}^\sigma[m]$$

$$(5) \qquad RP_1^* \mid\!\frac{2m_2}{0}\; \mathcal{B}^\sigma[m] \to \mathcal{B}^\tau[m]$$

Nach dem 2. Hauptsatz gilt

$$(6) \qquad RP_1^* \mid\!\frac{\Omega_\tau + \omega}{0}\; \mathcal{A}^\tau[m] \to \lambda z\, \mathcal{A}^\tau[z]\,(m)$$

Für $m_0 := \max\{\mathrm{gr}(\mathcal{A}[0]), \mathrm{gr}(\mathcal{B}[0])\} + 1$ folgt aus (1), (5), (3) und (6) mit der Strukturschlußregel und mit Schnitten

$$(7) \qquad RP_1^* \mid\!\frac{\Omega_\sigma + \omega + n_0 + 2}{m_0}\; \mathcal{A}^\sigma[m] \to \lambda z\, \mathcal{A}^\tau[z]\,(m)$$

Aus (4) und (7) folgt mit der Strukturschlußregel und mit Hauptschlüssen (S 1) und (S 2.0*)

$$RP_1^* \mid\!\frac{\Omega_\sigma + \omega + n_0 + 4}{m_0}\; \forall x\, (\lambda z\, \mathcal{A}^\tau[z]\,(x) \leftrightarrow \mathcal{A}^\sigma[x])$$

Mit der Strukturschlußregel und mit einem Hauptschluß (RS 3.1) folgt

$$RP_1^* \mid\!\frac{\Omega_\sigma + \omega + n_0 + 5}{m_0}\; \exists Y^\sigma \forall x\, (Y(x) \leftrightarrow A^\sigma[x]),$$

da der Prädikator $\lambda z\, \mathcal{A}^\tau[z]$ eine Stufe $< \sigma$ hat. Mit dem starken Schnitt-Eliminationssatz folgt die Behauptung, da $\omega_{m_0}(\Omega_{\sigma + \omega + n_0} + 5) \ll \Omega_{\sigma + \omega + n}$ ist.

Abgrenzungssatz. Ist F eine in GD_2CR herleitbare geschlossene schwache Formel der Stufe 0, so gibt es $\gamma < \bar{\Theta}\, \Omega_{\omega^\omega}\, 0$, so daß $RP_1^* \mid\!\frac{\gamma}{0}\, F^\sigma$ für die (von σ unabhängige) einfache σ-Interpretation F^σ von F gilt.

Beweis. Nach dem Interpretationssatz gibt es eine natürliche Zahl n, so daß

$$RP_1^* \mid\!\frac{\Omega_\sigma + \omega + n}{0}\; F^\sigma$$

für $\sigma := \omega^{n+1}$ gilt. Nach dem Kollabierungssatz folgt $RP_1^* \overset{\gamma}{\underset{0}{|}} F^\sigma$ für

$$\gamma := D_0\, \Omega_{\sigma+\omega+n} < D_0\, \Omega_{\omega^\omega} = \bar{\Theta}\, \Omega_{\omega^\omega}\, 0.$$

Folgerung. $|D_2 CR| \leq |GD_2 CR| \leq \bar{\Theta}\, \Omega_{\omega^\omega}\, 0.$

Literatur

[1] Buchholz, W.: Über Teilsysteme von $\bar{\Theta}(\{g\})$. Arch. f. Math. Logik u. Grundl. 18 (1976), 85–98.

[2] Buchholz, W.: Eine Erweiterung der Schnitt-Eliminationsmethode. Habilitationsschrift München 1977.

[3] Buchholz, W.: Zur Beweisbarkeit der transfiniten Induktion in Π_1^1-CA. Bisher unveröffentlicht.

[4] Buchholz, W. and Pohlers, W.: Provable wellorderings of formal theories for transfinitely iterated inductive definitions. Journal of Symbolic Logic 43 (1978), 118–125.

[5] Feferman, S.: Formal theories for transfinite iterations of generalized inductive definitions and some subsystems of analysis. Intuitionism and Proof Theory. Amsterdam 1970, 303–326.

[6] Friedman, H.: Iterated inductive definitions and Σ_2^1-AC. Intuitionusm and Proof Theory. Amsterdam 1970, 435–442.

[7] Jäger, G. und Schütte, K.: Eine syntaktische Abgrenzung der (Δ_1^1-CA)-Analysis. Sitzungsberichte d. Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-Nat. Kl. 1979, 15–34.

[8] Pohlers, W.: An upper bound for the provability of transfinite induction in systems with n-times iterated inductive definitions. Proof Theory Symposion Kiel 1974. Springer Lecture Notes in Math. 500 (1975), 277–289.

[9] Pohlers, W.: Ordinals connected with formal theories for transfinitely iterated inductive definitions. Journal of Symbolic Logic 43 (1978), 161 bis 182.

[10] Schütte, K.: Proof Theory. Berlin, Heidelberg, New York 1977.

[11] Takeuti, G. and Yasugi, M.: The ordinals of the systems of second order arithmetic with the provably Δ_2^1-comprehension axiom and with the Δ_2^1-comprehension axiom respectively. Jap. J. of Math. 41 (1973), 1–67.

[12] Zucker, J.: Iterated inductive definitions, trees and ordinals. Springer Lecture Notes in Math. 344 (1973), 392–453.