Arch. math. Logik 17 (1976), 179—190

DIE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN ORDINALZAHLSYSTEMEN Σ UND $\bar{\Theta}(\omega)$*

Von Wilfried Buchholz und Kurt Schütte, München

In [9] wurde ein wohlgeordnetes System $\Sigma(N)$ von Ordinaltermen für jede natürliche Zahl N eingeführt. Die Ordinalterme der Systeme $\Sigma(N)$ repräsentieren nach H. Levitz [4], [5] (und nach [6]) dieselben Ordinalzahlen wie die ordinal diagrams of finite order von G. Takeuti [10]. Die Vereinigung aller $\Sigma(N)$ ist zwar linear geordnet, aber nicht wohlgeordnet. H. Pfeiffer hat in [7] ein wohlgeordnetes Teilsystem Σ von $\bigcup_{N<\omega} \Sigma(N)$ angegeben, dessen Ordnungstyp größer als das Supremum der Ordnungstypen aller $\Sigma(N)$ ist.

In [3] wurden gewisse von S. Feferman and P. Aczel stammende Normalfunktionen untersucht und zur Festlegung von Bezeichnungssystemen für bestimmte Ordinalzahlenabschnitte verwendet. Dabei wurde u. a. ein System $\bar{\Theta}(\omega)$ eingeführt, das nach [2] dieselben Ordinalzahlen wie das System Σ bezeichnet.

Die Ordinalterme des Systems $\bar{\Theta}(\omega)$ sind als natürliche Ordinalzahlbezeichnungen zu erkennen, da sie auf Normalfunktionen beruhen, die sich in der klassischen Ordinalzahlentheorie verhältnismäßig einfach definieren lassen. Die ordinal diagrams und die Ordinalterme des Systems Σ haben keine so natürliche Erklärung in der klassischen Ordinalzahlentheorie. Sie haben sich aber als geeignet für beweistheoretische Untersuchungen erwiesen (vgl. z. B. G. Takeuti [11] und W. Pohlers [8]). Es hat sich nun gezeigt, daß sich die ordnungstreuen bijektiven Abbildungen zwischen Σ und $\bar{\Theta}(\omega)$ recht einfach beschreiben lassen. Diese Abbildungen sollen in der vorliegenden Arbeit entwickelt werden.

Wir verwenden für $\Sigma(N)$ und Σ dieselben Definitionen und Bezeichnungen wie in [9] und [7] mit folgender unwesentlicher Modifikation: Das Grundzeichen 1 wird durch 0 ersetzt. [Die Zahl 1 wird dann durch den Term (0, 0) dargestellt.] Die Bildung von Termen $a \# b$ wird nur für von 0 verschiedene Terme a, b zugelassen. Beide Systeme Σ und $\bar{\Theta}(\omega)$ sind dann wohlgeordnete Teilsysteme[1] des linear geordneten, aber nicht wohlgeordneten Systems $\mathscr{T} := \bigcup_{N<\omega} \Sigma(N)$.

In § 1 werden die Grundbegriffe der Systeme $\mathscr{T}$, Σ und $\bar{\Theta}(\omega)$ zusammengestellt und einige vorbereitende Lemmata bewiesen. In § 2 werden ordnungstreue Abbildungen zwischen Teilsystemen von $\bar{\Theta}(\omega)$ eingeführt, die in § 3 für die ordnungstreuen Abbildungen zwischen Σ und $\bar{\Theta}(\omega)$ gebraucht werden.

* Eingegangen am 24. 10. 1974.

[1] Das hier im folgenden eingeführte System $\bar{\Theta}(\omega)$ ist eine geringfügig modifizierte Version des in [3] definierten Systems $\bar{\Theta}(\omega)$.

§ 1. Die Systeme $\mathcal{T}$, Σ und $\bar{\Theta}(\omega)$

Induktive Definition der Terme des Systems $\mathcal{T}$ und der Stufe Sa eines Terms $a \in \mathcal{T}$

1. $0 \in \mathcal{T}$, $S0 := 0$,
2. $0 < n < \omega \Rightarrow \Omega_n \in \mathcal{T}$, $S\Omega_n := n$,
3. $a, b \in \mathcal{T} \Rightarrow (a, b) \in \mathcal{T}$, $S(a, b) := Sb$,
4. $a, b \in \mathcal{T}$, $a \neq 0$, $b \neq 0 \Rightarrow a \# b \in \mathcal{T}$, $S(a \# b) := \max(Sa, Sb)$.

Die Terme Ω_n und (a, b) heißen *Hauptterme*. Der *Grad* Ga eines Terms $a \in \mathcal{T}$ sei die Anzahl der in a auftretenden Zeichen $(,)$ und $\#$.

Die Buchstaben a, b, c, d (auch mit Indizes) sollen im folgenden immer Terme des Systems $\mathcal{T}$ bezeichnen. Natürliche Zahlen teilen wir durch i, j, k, m, n, N mit.

$\Sigma(N)$ sei die Menge derjenigen Terme aus $\mathcal{T}$, die keinen Term Ω_n mit $n > N$ enthalten. Es gilt also $\mathcal{T} = \bigcup_{N < \omega} \Sigma(N)$.

Induktive Definition der Koeffizientenmengen $K_m a$ und $K_m^* a$

1. $K_m 0 := \emptyset$, $K_m^* 0 := \emptyset$,
2. $0 < n \leqq m \Rightarrow K_m \Omega_n := \{\Omega_n\}$, $K_m^* \Omega_n := \emptyset$,
3. $m < n \Rightarrow K_m \Omega_n := \emptyset$, $K_m^* \Omega_n := \emptyset$,
4. $Sb \leqq m \Rightarrow K_m(a, b) := \{(a, b)\}$, $K_m^*(a, b) := \emptyset$,
5. $m < Sb \Rightarrow K_m(a, b) := K_m a \cup K_m b$, $K_m^*(a, b) := \{a\} \cup K_m^* a \cup K_m^* b$,
6. $K_m(a \# b) := K_m a \cup K_m b$, $K_m^*(a \# b) := K_m^* a \cup K_m^* b$.

Die *Gleichheit* von Termen wird in üblicher Weise so definiert, daß für jede Permutation π von $\{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$a_1 \# \cdots \# a_n = a_{\pi(1)} \# \cdots \# a_{\pi(n)}.$$

Induktive Definition von $a < b$

1. Nicht $a < 0$,
2. $0 < b \Leftrightarrow b \neq 0$,
3. $\Omega_m < \Omega_n \Leftrightarrow 0 < m < n$,
4. $\Omega_m < (b_1, b_2) \Leftrightarrow 0 < m \leqq Sb_2$,
5. $(a_1, a_2) < \Omega_n \Leftrightarrow Sa_2 < n$,
6. $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$ in genau folgenden drei Fällen:

6.1. $a_1 < b_1$ und $a_0 < (b_1, b_2)$ für alle $a_0 \in K_{Sa_2} a_1 \cup \{a_2\}$,
6.2. $a_1 = b_1$ und $a_2 < b_2$,
6.3. $b_1 < a_1$ und $(a_1, a_2) \leqq b_0$ für mindestens ein $b_0 \in K_{Sb_2} b_1 \cup \{b_2\}$.

7. Für $a = a_1 \# \cdots \# a_m (m \geqq 1)$ und $b = b_1 \# \cdots \# b_n$ $(n \geqq 1)$ mit Haupttermen $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n (m + n > 2)$ gelte $a < b$ in genau folgenden zwei Fällen:

7.1. Es gibt $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_i < b_j$ für alle $i = 1, \ldots, m$.
7.2. $n > 1$, und es gibt $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_i = b_j$ und $a' < b'$, wobei a', b' durch Streichung von a_i, b_j aus a, b hervorgehen. (Im Fall $m = 1$ sei $a' = 0$.)

Wie in [9] ergibt sich: *$\mathscr{T}$ ist bezüglich der Relation $<$ linear geordnet, aber nicht wohlgeordnet. Für jede natürliche Zahl N ist $\Sigma(N)$ bezüglich $<$ wohlgeordnet.*

Für $A \subset \mathscr{T}$ bedeute $A < b$, daß $a < b$ für alle $a \in A$ gilt, und $b \leqq A$, daß es $a \in A$ mit $b \leqq a$ gibt. Wir setzen auch $K_m A := \bigcup_{a \in A} K_m a$ und $K_m^* A := \bigcup_{a \in A} K_m^* a$. Nach [9] gilt allgemein:

$$K_{Sb} a \cup \{b\} < (a, b).$$

Die *Summe* $a + b$ von Termen a, b wird in üblicher Weise so definiert, daß sie streng monoton bezüglich b ist, $a \leqq a + b$ gilt und es für $a \leqq c$ einen (bis auf Gleichheit) eindeutig bestimmten Term b mit $a + b = c$ gilt. Diesen Term b bezeichnen wir mit $-a + c$. Es gilt also

$$b < c \Rightarrow a \leqq a + b < a + c,$$

$$a \leqq c \Rightarrow a + (-a + c) = c,$$

$$K_m b \subset K_m(a + b) \subset K_m a \cup K_m b,$$

$$K_m^* b \subset K_m^*(a + b) \subset K_m^* a \cup K_m^* b.$$

Definition der Teilsysteme Σ und $\bar{\Theta}(\omega)$ von $\mathscr{T}$

$c \in \Sigma$ genau dann, wenn für jeden in c auftretenden Term (a, b) gilt: $a < \Omega_{Sb+2}$.
$c \in \bar{\Theta}(\omega)$ genau dann, wenn für jeden in c auftretenden Term (a, b) gilt: $K_{Sb}^* a < a$.
Nach [7] und [3] sind Σ und $\bar{\Theta}(\omega)$ bezüglich der Relation $<$ wohlgeordnet.

Lemma 1. *Für $m \leqq n$ gilt:*
a) $K_m^* a = K_n^* a \cup K_m^* K_n a$,
b) $K_m K_n^* a \subset K_m a$ *und* $K_m^* K_n^* a \subset K_m^* a$.

Beweise durch Induktion nach Ga.

Lemma 2.
a) $a < \Omega_{n+2},\ K_n^* a < b \Rightarrow a < (b, \Omega_{n+1})$,
b) $a \in \bar{\Theta}(\omega),\ K_n^* b < b,\ a < (b, \Omega_{n+1}) \Rightarrow K_n^* a < b$,
c) $a \in \bar{\Theta}(\omega),\ K_n^* a < b + \Omega_{n+2} \Rightarrow K_n^* a < b + a$.

Beweise durch Induktion nach Ga.

a) Für $a \leqq \Omega_{n+1}$ ist die Behauptung trivial. Für $a = a_1 \# a_2$ folgt sie aus der I.V. *(Induktionsvoraussetzung)*. Es bleibt der Fall $a = (a_1, a_2)$ mit $Sa_2 = n + 1$. Nach Lemma 1a) ist dann

$$\{a_1\} \cup K_n^* K_{n+1} a_1 \cup K_n^* a_2 \subset K_n^* a.$$

Aus $K_n^* a < b$ folgt also $a_1 < b$ und $K_n^*(K_{n+1} a_1 \cup \{a_2\}) < b$. Dabei ist $K_{n+1} a_1 \cup \{a_2\} < \Omega_{n+2}$. Nach I.V. folgt

$$K_{n+1} a_1 \cup \{a_2\} < (b, \Omega_{n+1}).$$

Mit $a_1 < b$ folgt $(a_1, a_2) < (b, \Omega_{n+1})$.

b) *und* c) Ist $a \leqq \Omega_{n+1}$, so ist $K_n^* a = \emptyset$. Dann sind die Behauptungen trivial. Im Fall $a = a_1 \# a_2$ folgen sie aus der I.V. Der Fall $\Omega_{n+2} \leqq a$ ist für b) ausgeschlossen und für c) trivial. Es bleibt der Fall $a = (a_1, a_2)$ mit $S a_2 = n+1$. Dann ist nach Lemma 1a)

$$K_n^* a = \{a_1\} \cup K_{n+1}^* a_1 \cup K_n^* (K_{n+1} a_1 \cup \{a_2\}).$$

Dabei ist $K_{n+1} a_1 \cup \{a_2\} < a$. Nach I.V. folgt

$$K_n^* (K_{n+1} a_1 \cup \{a_2\}) < b \quad \text{bzw.} \quad b + a.$$

Aus $a \in \bar{\Theta}(\omega)$ folgt $K_{n+1}^* a_1 < a_1$. Es ist also nur noch $a_1 < b$ bzw. $a_1 < b + a$ zu beweisen.
Zu b). Wäre $b \leqq a_1$, so würde aus $K_n^* b < b$ nach Lemma 1a) $K_n^* K_{n+1} b < a_1$ und nach Lemma 2a) $K_{n+1} b < (a_1, \Omega_{n+1})$ folgen. Dann wäre $(b, \Omega_{n+1}) \leqq (a_1, \Omega_{n+1}) \leqq a$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich ist $a_1 < b$.
Zu c). Aus $K_n^* a < b + \Omega_{n+2}$ folgt $a_1 < b + \Omega_{n+2}$. Im Fall $a_1 < b$ gilt die Behauptung. Andernfalls gibt es $a_0 < \Omega_{n+2}$ mit $a_1 = b + a_0$. Dann ist $K_{n+1} a_0 \subset K_{n+1} a_1 < (a_1, a_2)$. Da $a_0 < \Omega_{n+2}$ ist, folgt $a_0 < (a_1, a_2) = a$, also $a_1 < b + a$.

Definition von $q_n a$ und $r_n a$

1. $q_n 0 := 0$, $r_n 0 := 0$.
2. Ist $a = a_1 \# \cdots \# a_k (k \geqq 1)$ mit Haupttermen $a_1 \geqq \cdots \geqq a_k$, so sei

$$q_n a := \begin{cases} 0 & , \quad \text{wenn } a_1 < \Omega_{n+2} \text{ ist,} \\ a_1 \# \cdots \# a_i, & \quad \text{wenn } i \text{ größter Index mit } \Omega_{n+2} \leqq a_i \text{ ist.} \end{cases}$$

$$r_n a := \begin{cases} 0 & , \quad \text{wenn } \Omega_{n+2} \leqq a_k \text{ ist.} \\ a_j \# \cdots \# a_k, & \quad \text{wenn } j \text{ kleinster Index mit } a_j < \Omega_{n+2} \text{ ist.} \end{cases}$$

Folgerungen:

$a = q_n a + r_n a \quad \textit{mit} \quad r_n a < \Omega_{n+2}$,
$q_n a \neq 0 \Leftrightarrow \Omega_{n+2} \leqq a$,
$b < q_n a \Rightarrow b + \Omega_{n+2} \leqq q_n a$,
$K_m a = K_m q_n a \cup K_m r_n a$,
$K_m^* a = K_m^* q_n a \cup K_m^* r_n a$.

Definition von $k_n^* a$

$$k_n^* a := \begin{cases} \max(K_n^* a), & \text{wenn } K_n^* a \neq \emptyset \text{ ist,} \\ 0 & , \quad \text{wenn } K_n^* a = \emptyset \text{ ist.} \end{cases}$$

Lemma 3.

a) $K_n^* k_n^* a < k_n^* a$,
b) $K_n^* a < a \Rightarrow K_n^* q_n a < q_n a$.

Beweis. a) Nach Lemma 1b) ist $K_n^* k_n^* a \subset K_n^* a$. Außerdem gilt $k_n^* a \notin K_n^* k_n^* a$. Es folgt $K_n^* k_n^* a < k_n^* a$.
b) Ist $K_n^* a < q_n a$, so ist auch $K_n^* q_n a < q_n a$. Andernfalls folgt aus $K_n^* a < a$, daß es einen Term b minimalen Grades mit $q_n a \leqq K_n^* b < a$ gibt. Aus der Minimalität von Gb folgt $b = (b_1, b_2)$ mit $K_n^* b_1 < q_n a \leqq b_1 < a$. Dann ist $q_n a = q_n b_1$. Es folgt $K_n^* q_n a \subset K_n^* b_1 < q_n a$.

Lemma 4.

a) $K_n^* q_n k_n^* a < q_n k_n^* a$,
b) *Für* $a \in \bar{\Theta}(\omega)$ *mit* $(\Omega_{n+2}, \Omega_{n+1}) \leqq a < \Omega_{n+2}$ *gilt* $\Omega_{n+2} \leqq q_n k_n^* a$ *und* $(q_n k_n^* a, \Omega_{n+1}) \leqq a$.
c) *Für* $a_1, a_2 \in \bar{\Theta}(\omega)$ *mit* $(\Omega_{n+2}, \Omega_{n+1}) \leqq a_1 < a_2 < \Omega_{n+2}$ *gilt* $q_n k_n^* a_1 \leqq q_n k_n^* a_2$.

Beweis. a) folgt aus Lemma 3.
b) Aus $(\Omega_{n+2}, \Omega_{n+1}) \leqq a < \Omega_{n+2}$ folgt nach Lemma 2a) $\Omega_{n+2} \leqq K_n^* a$. Dann ist $\Omega_{n+2} \leqq q_n k_n^* a$. Wäre $a < (q_n k_n^* a, \Omega_{n+1})$, so würde aus $a \in \bar{\Theta}(\omega)$ mit den Lemmata 4a) und 2b) $K_n^* a < q_n k_n^* a$ folgen. Dies ergibt aber einen Widerspruch zu $K_n^* a \neq \emptyset$. Folglich ist $(q_n k_n^* a, \Omega_{n+1}) \leqq a$.
c) Nach b) ist $(q_n k_n^* a_1, \Omega_{n+1}) \leqq a_1 < a_2 < \Omega_{n+2}$. Nach Lemma 2a) folgt $q_n k_n^* a_1 \leqq K_n^* a_2$. Hieraus folgt $q_n k_n^* a_1 \leqq q_n k_n^* a_2$.

§ 2. Die Abbildungen h_n und h_n^{-1}

Definition von $h_n a$ für $a \in \bar{\Theta}(\omega)$, $a < \Omega_{n+2}$

$$h_n a := \begin{cases} a & , \text{ wenn } a < (\Omega_{n+2}, \Omega_{n+1}) \text{ ist,} \\ q_n k_n^* a + (-(q_n k_n^* a, \Omega_{n+1}) + a), & \text{ wenn } (\Omega_{n+2}, \Omega_{n+1}) \leqq a \text{ ist.} \end{cases}$$

(Nach Lemma 4b) ist im 2. Fall $(q_n k_n^* a, \Omega_{n+1}) \leqq a$.)

Definition von $h_n^{-1} a$ für $a \in \bar{\Theta}(\omega)$, $K_n^* a < a$

$$h_n^{-1} a := \begin{cases} a & , \text{ wenn } a < \Omega_{n+2} \text{ ist,} \\ (q_n a, \Omega_{n+1}) + r_n a, & \text{ wenn } \Omega_{n+2} \leqq a \text{ ist.} \end{cases}$$

Satz 1. h_n *ist eine ordnungstreue bijektive Abbildung von* $\{a \in \bar{\Theta}(\omega) \mid a < \Omega_{n+2}\}$ *auf* $\{a \in \bar{\Theta}(\omega) \mid K_n^* a < a\}$ *mit der Umkehrabbildung* h_n^{-1} *und* $K_m h_n a = K_m a$ *für* $m \leqq n$, $a \in \bar{\Theta}(\omega)$, $a < \Omega_{n+2}$.

Beweis. 1) Es sei $a \in \bar{\Theta}(\omega)$ und $a < \Omega_{n+2}$. Wir beweisen, daß dann $h_n a \in \bar{\Theta}(\omega)$, $K_n^* h_n a < h_n a$, $h_n^{-1} h_n a = a$ und $K_m h_n a = K_m a$ für $m \leqq n$ gilt.

1.1) $a<(\Omega_{n+2},\Omega_{n+1})$. Dann ist $h_n a=a$, also auch $K_m h_n a=K_m a$. Aus $a\in\bar{\Theta}(\omega)$ und $a<(\Omega_{n+2},\Omega_{n+1})$ folgt nach Lemma 2b) $K_n^* a<\Omega_{n+2}$ und nach Lemma 2c) $K_n^* a<a$. In unserem Fall ist also $K_n^* h_n a<h_n a$ und $h_n^{-1} h_n a=h_n^{-1} a=a$.
1.2) $(\Omega_{n+2},\Omega_{n+1})\leqq a$. Dann ist $h_n a=q_n k_n^* a+b$ mit $b:=-(q_n k_n^* a,\Omega_{n+1})+a$. Aus $a\in\bar{\Theta}(\omega)$ folgt $q_n k_n^* a\in\bar{\Theta}(\omega)$ und $b\in\bar{\Theta}(\omega)$, also auch $h_n a\in\bar{\Theta}(\omega)$. Nach Lemma 4a) ist

$$K_n^* q_n k_n^* a<q_n k_n^* a\leqq h_n a\,.$$

Aus $K_n^* b\subset K_n^* a<q_n k_n^* a+\Omega_{n+2}$ folgt nach Lemma 2c)

$$K_n^* b<q_n k_n^* a+b=h_n a\,.$$

Dann ist auch $K_n^* h_n a<h_n a$. Nach Lemma 4b) ist $\Omega_{n+2}\leqq q_n k_n^* a\leqq h_n a$. Es folgt

$$h_n^{-1} h_n a=(q_n k_n^* a,\Omega_{n+1})+b=a\,.$$

Aus der Definition von b folgt

$$K_m b\subset K_m a\subset K_m(q_n k_n^* a,\Omega_{n+1})\cup K_m b\,.$$

Für $m\leqq n$ folgt

$$K_m b\subset K_m a\subset K_m q_n k_n^* a\cup K_m b=K_m h_n a$$

und nach Lemma 1b)

$$K_m q_n k_n^* a\subset K_m K_n^* a\subset K_m a\,.$$

Dann ist $K_m h_n a=K_m a$.
2) Es sei $a_1,\ a_2\in\bar{\Theta}(\omega)$ und $a_1<a_2<\Omega_{n+2}$. Wir beweisen, daß dann $h_n a_1<h_n a_2$ ist.
2.1) $a_2<(\Omega_{n+2},\Omega_{n+1})$. Dann ist $h_n a_1=a_1<a_2=h_n a_2$.
2.2) $a_1<(\Omega_{n+2},\Omega_{n+1})\leqq a_2$. Dann ist nach Lemma 4b) $\Omega_{n+2}\leqq q_n k_n^* a_2\leqq h_n a_2$. Es folgt $h_n a_1=a_1<\Omega_{n+2}\leqq h_n a_2$.
2.3) $(\Omega_{n+2},\Omega_{n+1})\leqq a_1$. Ist $q_n k_n^* a_1=q_n k_n^* a_2$, so folgt aus $a_1<a_2$

$$-(q_n k_n^* a_1,\Omega_{n+1})+a_1<-(q_n k_n^* a_2,\Omega_{n+1})+a_2$$

und hieraus $h_n a_1<h_n a_2$. Andernfalls ist nach Lemma 4c) $q_n k_n^* a_1<q_n k_n^* a_2$. Dann ist

$$h_n a_1<q_n k_n^* a_1+\Omega_{n+2}\leqq q_n k_n^* a_2\leqq h_n a_2\,.$$

3) Es sei $a\in\bar{\Theta}(\omega)$ und $K_n^* a<a$. Wir beweisen, daß dann $h_n^{-1} a\in\bar{\Theta}(\omega)$, $h_n^{-1} a<\Omega_{n+2}$ und $h_n h_n^{-1} a=a$ ist.
3.1) $a<\Omega_{n+2}$. Mit $K_n^* a<a$ folgt nach Lemma 2a) $a<(\Omega_{n+2},\Omega_{n+1})$. Dann ist $h_n^{-1} a=a\in\bar{\Theta}(\omega)$, $h_n^{-1} a<\Omega_{n+2}$ und $h_n h_n^{-1} a=h_n a=a$.
3.2) $\Omega_{n+2}\leqq a$. Aus $a\in\bar{\Theta}(\omega)$ folgt $q_n a\in\bar{\Theta}(\omega)$ und $r_n a\in\bar{\Theta}(\omega)$. Aus $K_n^* a<a$ folgt nach den Lemmata 1a) und 3b)

$$K_{n+1}^* q_n a\subset K_n^* q_n a<q_n a\,.$$

Dann ist $h_n^{-1} a = (q_n a, \Omega_{n+1}) + r_n a \in \bar{\Theta}(\omega)$ mit $h_n^{-1} a < \Omega_{n+2}$ und

$$K_n^* h_n^{-1} a \subset \{q_n a\} \cup K_n^* q_n a \cup K_n^* r_n a.$$

Mit $K_n^* a < a$ folgt $k_n^* h_n^{-1} a \leqq a$. Aus $(q_n a, \Omega_{n+1}) \leqq h_n^{-1} a < \Omega_{n+2}$ folgt nach Lemma 2a) $q_n a \leqq k_n^* h_n^{-1} a$. Dann ist $q_n a = q_n k_n^* h_n^{-1} a$. Da $(\Omega_{n+2}, \Omega_{n+1}) \leqq h_n^{-1} a < \Omega_{n+2}$ ist, folgt

$$h_n h_n^{-1} a = q_n a + (-(q_n a, \Omega_{n+1}) + h_n^{-1} a) = q_n a + r_n a = a.$$

§ 3. Die ordnungstreuen Abbildungen zwischen Σ und $\bar{\Theta}(\omega)$

Induktive Definition von $D_n a$

$$D_n a := \begin{cases} a & , \text{ wenn } a < \Omega_{n+2} \text{ ist,} \\ (D_{n+1} q_n a, \Omega_{n+1}) + r_n a, & \text{ wenn } \Omega_{n+2} \leqq a \text{ ist.} \end{cases}$$

Lemma 5. *Für $a \in \Sigma$ ist $D_n a \in \Sigma$ und $D_n a < \Omega_{n+2}$.*

Beweis durch Induktion nach $Sa - n$. Für $a < \Omega_{n+2}$ sind die Behauptungen trivial. Es sei nun $\Omega_{n+2} \leqq a \in \Sigma$. Dann ist $q_n a \in \Sigma$, $r_n a \in \Sigma$ und nach I.V. $D_{n+1} q_n a \in \Sigma$ mit $D_{n+1} q_n a < \Omega_{n+3}$. Es folgt $D_n a = (D_{n+1} q_n a, \Omega_{n+1}) + r_n a \in \Sigma$ und $D_n a < \Omega_{n+2}$.

Induktive Definition von fc für $c \in \Sigma$

1. $f0 := 0$, $f\Omega_n := \Omega_n$ für $0 < n < \omega$,
2. $f(a, b) := (h_{Sb} fa, fb)$,
3. $f(a \# b) := fa \# fb$.

Für $A \subset \Sigma$ sei $fA := \{fa \mid a \in A\}$.

Induktive Definition von $f^{-1}c$ für $c \in \bar{\Theta}(\omega)$

1. $f^{-1}0 := 0$, $f^{-1}\Omega_n := \Omega_n$ für $0 < n < \omega$,
2. $f^{-1}(a, b) := (D_{Sb} f^{-1} a, f^{-1} b)$,
3. $f^{-1}(a \# b) := f^{-1} a \# f^{-1} b$.

Lemma 6.

a) *Für $c \in \Sigma$ ist $fc \in \bar{\Theta}(\omega)$, $Sfc = Sc$ und $K_m fc = f K_m c$.*
b) *Für $c \in \bar{\Theta}(\omega)$ ist $f^{-1} c \in \Sigma$ und $Sf^{-1} c = Sc$.*

Beweis durch Induktion nach Gc. Für $c = 0$ und $c = \Omega_n$ sind die Behauptungen trivial. Für $c = a \# b$ folgen sie aus der I.V. Es bleibt der Fall $c = (a, b)$.
a) Es sei $c = (a, b) \in \Sigma$. Dann ist $a < \Omega_{Sb+2}$. Nach I.V. folgt fa, $fb \in \bar{\Theta}(\omega)$, $fa < \Omega_{Sb+2}$ und $Sfb = Sb$. Nach Satz 1 folgt $h_{Sb} fa \in \bar{\Theta}(\omega)$ und $K_{Sb}^* h_{Sb} fa < h_{Sb} fa$. Dann ist $f(a, b) \in \bar{\Theta}(\omega)$ mit $Sf(a, b) = S(a, b)$.

Für $Sb \leqq m$ ist $K_m f(a,b) = \{f(a,b)\}$ und $K_m(a,b) = \{(a,b)\}$, also $f K_m(a,b) = K_m f(a,b)$. Für $m < Sb$ ist nach Satz 1

$$K_m f(a,b) = K_m h_{Sb} fa \cup K_m fb = K_m fa \cup K_m fb.$$

Nach I.V. folgt $f K_m(a,b) = K_m f(a,b)$.
b) Es sei $c = (a,b) \in \bar{\Theta}(\omega)$. Dann ist nach I.V. $f^{-1}a$, $f^{-1}b \in \Sigma$ und $Sf^{-1}b = Sb$. Nach Lemma 5 folgt $D_{Sb} f^{-1} a \in \Sigma$ und $D_{Sb} f^{-1} a < \Omega_{Sb+2}$. Dann ist $f^{-1}(a,b) \in \Sigma$ mit $Sf^{-1}(a,b) = S(a,b)$.

Lemma 7. *Für $a, b \in \Sigma$ mit $a < b$ ist $fa < fb$.*

Beweis durch Induktion nach $Ga + Gb$. Hierbei genügt es, den Fall $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ mit $Sa_2 = Sb_2 = n$ zu betrachten, da sich die Behauptung im übrigen leicht aus der I.V. ergibt. Für $a < b$ kommen dann folgende drei Fälle in Betracht:
1) $a_1 < b_1$ und $K_n a_1 \cup \{a_2\} < (b_1, b_2)$. Nach I.V. folgt $fa_1 < fb_1$ und

$$f K_n a_1 \cup \{fa_2\} < f(b_1, b_2).$$

Nach Satz 1 und Lemma 6a) folgt $h_n fa_1 < h_n fb_1$ und

$$K_n h_n fa_1 \cup \{fa_2\} < f(b_1, b_2).$$

Hieraus folgt

$$f(a_1, a_2) = (h_n fa_1, fa_2) < (h_n fb_1, fb_2) = f(b_1, b_2).$$

2) $a_1 = b_1$ und $a_2 < b_2$. Es folgt $h_n fa_1 = h_n fb_1$ und nach I.V. $fa_2 < fb_2$. Hieraus folgt $f(a_1, a_2) < f(b_1, b_2)$.
3) $b_1 < a_1$ und $(a_1, a_2) \leqq K_n b_1 \cup \{b_2\}$. Wie im Fall 1) folgt $h_n fb_1 < h_n fa_1$ und

$$f(a_1, a_2) \leqq K_n h_n fb_1 \cup \{fb_2\}.$$

Hieraus folgt $f(a_1, a_2) < f(b_1, b_2)$.

Folgerung: *Für $a, b \in \Sigma$ ist $f(a+b) = fa + fb$.*

Lemma 8.

a) $a \in \Sigma$, $K_n^* fa < fa \Rightarrow f D_n a = h_n^{-1} fa$,
b) $a \in \bar{\Theta}(\omega)$, $K_n^* a < a \Rightarrow D_n f^{-1} a = f^{-1} h_n^{-1} a$.

Beweis von a) *durch Induktion nach $Sa - n$.* Aus Lemma 6a) folgt $fa < \Omega_{n+2} \Leftrightarrow a < \Omega_{n+2}$. Im Fall $a < \Omega_{n+2}$ ist daher $f D_n a = fa = h_n^{-1} fa$. Im Fall $\Omega_{n+2} \leqq a$ ist

$$f D_n a = (h_{n+1} f D_{n+1} q_n a,\ \Omega_{n+1}) + f r_n a.$$

Aus $a \in \Sigma$ und $K_n^* fa < fa$ folgt $q_n a \in \Sigma$ und nach den Lemmata 1a) and 3b)

$$K_{n+1}^* q_n fa \subset K_n^* q_n fa < q_n fa.$$

Aus Lemma 6a) folgt auch $q_n fa = fq_n a$ und $r_n fa = fr_n a$. Dann ist $K_{n+1}^* fq_n a < fq_n a$ und nach I.V.

$$f D_{n+1} q_n a = h_{n+1}^{-1} f q_n a .$$

Mit Satz 1 folgt

$$f D_n a = (f q_n a, \Omega_{n+1}) + f r_n a = (q_n f a, \Omega_{n+1}) + r_n f a = h_n^{-1} f a .$$

Beweis von b). Aus Lemma 6b) folgt $q_n f^{-1} a = f^{-1} q_n a$, $r_n f^{-1} a = f^{-1} r_n a$ und $f^{-1} a < \Omega_{n+2} \Leftrightarrow a < \Omega_{n+2}$. Im Fall $a < \Omega_{n+2}$ ist daher $D_n f^{-1} a = f^{-1} a = f^{-1} h_n^{-1} a$. Im Fall $\Omega_{n+2} \leqq a$ ist

$$\begin{aligned} D_n f^{-1} a &= (D_{n+1} q_n f^{-1} a,\ \Omega_{n+1}) + r_n f^{-1} a \\ &= (D_{n+1} f^{-1} q_n a,\ \Omega_{n+1}) + f^{-1} r_n a \\ &= f^{-1}((q_n a,\ \Omega_{n+1}) + r_n a) = f^{-1} h_n^{-1} a . \end{aligned}$$

Anmerkung. Nach Satz 1 und den Lemmata 5 bis 8 ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} \{a \in \Sigma \mid a < \Omega_{n+2}\} \arrow[r, "f_1"] & \{a \in \bar{\Theta}(\omega) \mid a < \Omega_{n+2}\} \arrow[d, "h_n"] \\ \{a \in \Sigma \mid K_n^* fa < fa\} \arrow[u, "D_n"] \arrow[r, "f_2"] & \{a \in \bar{\Theta}(\omega) \mid K_n^* a < a\} \end{tikzcd}$$

Dabei seien f_1, f_2 die dem Diagramm entsprechenden Beschränkungen der Abbildung f. Nach Satz 1 und dem folgenden Satz 2 sind alle Abbildungen dieses Diagramms ordnungstreu und bijektiv.

Satz 2. *f ist eine ordnungstreue bijektive Abbildung von Σ auf $\bar{\Theta}(\omega)$ mit der Umkehrabbildung f^{-1} und $Sfc = Sc$, $f K_m c = K_m fc$ für alle $c \in \Sigma$.*

Beweis. 1) Es sei $c \in \Sigma$. Nach Lemma 6a) ist dann $fc \in \bar{\Theta}(\omega)$, $Sfc = Sc$ und $f K_m c = K_m fc$. Wir beweisen durch Induktion nach Gc, daß auch $f^{-1} fc = c$ ist. Für $c = 0$ und $c = \Omega_n$ ist die Behauptung trivial. Für $c = a \# b$ folgt sie aus der I.V. Es bleibt der Fall $c = (a, b)$. Dann ist $fc = (h_{Sb} fa, fb)$ und

$$f^{-1} fc = (D_{Sb} f^{-1} h_{Sb} fa,\ f^{-1} fb) .$$

Nach Lemma 6a) und Satz 1 ist $h_{Sb} fa \in \bar{\Theta}(\omega)$ und $K_{Sb}^* h_{Sb} fa < h_{Sb} fa$. Nach Lemma 8b) folgt

$$D_{Sb} f^{-1} h_{Sb} fa = f^{-1} h_{Sb}^{-1} h_{Sb} fa .$$

Mit Satz 1 und der I.V. folgt $f^{-1} fc = (a, b) = c$.

2) Es sei $c \in \bar{\Theta}(\omega)$. Nach Lemma 6b) ist dann $f^{-1} c \in \Sigma$. Wir beweisen durch Induktion nach Gc, daß auch $ff^{-1} c = c$ ist. Für $c = 0$ und $c = \Omega_n$ ist die Behauptung trivial. Für $c = a \# b$ folgt sie aus der I.V. Es bleibt der Fall $c = (a, b)$. Dann ist $f^{-1} c = (D_{Sb} f^{-1} a, f^{-1} b)$ und

$$ff^{-1} c = (h_{Sb} f D_{Sb} f^{-1} a,\ ff^{-1} b) .$$

Aus $(a, b) \in \bar{\Theta}(\omega)$ folgt $K^*_{Sb} a < a$, also nach I.V. $K^*_{Sb} f f^{-1} a < f f^{-1} a$. Nach Lemma 8a) folgt

$$f D_{Sb} f^{-1} a = h_{Sb}^{-1} f f^{-1} a .$$

Mit Satz 1 und der I.V. folgt $ff^{-1} c = (a, b) = c$.
Aus 1), 2) und Lemma 7 folgt die Behauptung.

Folgerung aus Satz 2: *Die wohlgeordnete Menge* $\Sigma_0 := \{a \in \Sigma \mid Sa = 0\}$ *hat den Ordnungstyp* $\Theta_{\Omega_\omega}(0)$.

Beweis. Nach [3] hat die wohlgeordnete Menge $\bar{\Theta}_0(\omega) := \{a \in \bar{\Theta}(\omega) \mid Sa = 0\}$ den Ordnungstyp $\Theta_{\Omega_\omega}(0)$. Nach Satz 2 hat Σ_0 denselben Ordnungstyp.
Anmerkung. Die von W. Pohlers [8] angegebene Grenzzahl σ_0 für die Herleitbarkeit der transfiniten Induktion in einem Π_1^1-Fragment der klassischen Analysis ist nach der Folgerung aus Satz 2 gleich der Ordinalzahl $\Theta_{\Omega_\omega}(0)$.

Definitionen

$$\Sigma^*(N) := \Sigma \cap \Sigma(N), \qquad \Sigma_0^*(N) := \{a \in \Sigma^*(N) \mid Sa = 0\},$$

$$\bar{\Theta}(N) := \bar{\Theta}(\omega) \cap \Sigma(N), \qquad \bar{\Theta}_0(N) := \{a \in \bar{\Theta}(N) \mid Sa = 0\}.$$

Lemma 9. $\bar{\Theta}(N)$ *ist die Menge derjenigen* $a \in \bar{\Theta}(\omega)$, *für die* $a < \Omega_{N+1}$, $K_0^* a < \Omega_{N+1}$ *und* $K_0 a < (\Omega_{N+1}, 0)$ *gilt.*

Beweis durch Induktion nach Ga.

Satz 3. *Die wohlgeordnete Menge* $\Sigma_0^*(N)$ *hat den Ordnungstyp* $\Theta_{\Omega_{N+1}}(0)$.

Beweis. Aus Lemma 9 folgt

$$\bar{\Theta}_0(N) = \{a \in \bar{\Theta}(\omega) \mid a < (\Omega_{N+1}, 0)\}.$$

Diese Menge hat nach [3] den Ordnungstyp $\Theta_{\Omega_{N+1}}(0)$. Die Beschränkung von f auf $\Sigma_0^*(N)$ ist eine ordnungstreue bijektive Abbildung von $\Sigma_0^*(N)$ auf $\bar{\Theta}_0(N)$. Daher hat auch $\Sigma_0^*(N)$ den Ordnungstyp $\Theta_{\Omega_{N+1}}(0)$.
Anmerkung. Es sei $\Sigma_0(N) := \{a \in \Sigma(N) \mid Sa = 0\}$. Den Ordnungstyp einer wohlgeordneten Menge M bezeichnen wir mit $\|M\|$. Nach [9] gilt

$$\|\Sigma(N)\| \leqq \|\Sigma_0(N+1)\| .$$

Mit einer geeigneten Abbildung beweist man auch

$$\|\Sigma_0(N)\| \leqq \|\Sigma_0^*(N+1)\| .$$

Es folgt

$$\|\Sigma_0^*(N)\| < \|\Sigma(N)\| \leqq \|\Sigma_0^*(N+2)\| .$$

Hieraus folgt
$$\sup_{N<\omega} \|\Sigma(N)\| = \sup_{N<\omega} \|\Sigma_0^*(N)\| = \Theta_{\Omega_\omega}(0) .$$

LITERATUR

[1] Bridge, J.: Some problems in mathematical logic. Systems of ordinal functions and ordinal notations. Dissertation Oxford 1972.
[2] Buchholz, W.: Rekursive Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen auf der Grundlage der Feferman-Aczelschen Normalfunktionen Θ_α. Dissertation München 1974.
[3] Buchholz, W.: Normalfunktionen und konstruktive Systeme von Ordinalzahlen. Erscheint in Proof Theory Symposium Kiel 1974 Springer Lecture Notes Bd. 500 (1975).
[4] Levitz, H.: On a simplification of Takeuti's ordinal diagrams of finite order. Zeitschr. f. Math. Logik u. Grundl. d. Math. **15**, 141–154 (1969).
[5] Levitz, H.: On the relationsship between Takeuti's ordinal diagrams $O(n)$ und Schütte's system of ordinal notations $\Sigma(n)$. Intuitionism and Proof Theory, edited by J. Myhill. North Holland, Amsterdam 1970.
[6] Levitz, H., Schütte, K.: A characterization of Takeuti's ordinal diagrams of finite order. Archiv f. Math. Logik u. Grundl. **14**, 75–97 (1970).
[7] Pfeiffer, H.: Ein Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen. Archiv f. Math. Logik u. Grundl. **12**, 12–17 (1969).
[8] Pohlers, W.: Eine Grenze für die Herleitbarkeit der transfiniten Induktion in einem schwachen Π_1^1-Fragment der klassischen Analysis. Dissertation München 1973.
[9] Schütte, K.: Ein konstruktives System von Ordinalzahlen I, II. Archiv f. Math. Logik u. Grundl. **11**, 126–137 (1968); **12**, 3–11 (1969).
[10] Takeuti, G.: Ordinal diagrams. J. Math. Soc. Japan **9**, 386–394 (1957).
[11] Takeuti, G.: Consistency proofs of subsystems of classical analysis. Ann. of Math. **86**, 299–348 (1967).