Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie

Organ der Deutschen Gesellschaft für Psychologie

4. Jahrgang, Band 4, 1983

Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie

Manuskripte sind zu senden an:
Redaktion und Geschäftsführender Herausgeber:
Prof. Dr. H. Häcker, Universität-GH Wuppertal, Gauß-Str. 20,
Gebäude S-.12.05, D-5600 Wuppertal 1

Verlag: Julius Beltz GmbH & Co. KG Weinheim
Geschäftsführender Gesellschafter der Beltz GmbH: Dr. Manfred Beltz Rübelmann

Anzeigenverwaltung: Heidi Steinhaus Werbung GmbH, Maximilianstraße 52, 8000 München 22, Tel. 089/227378

Druck: Offsetdruckerei Beltz, 6944 Hemsbach

Vertrieb: Beltz Verlag, Postfach 1120, 6940 Weinheim, Tel.: 06201-63071. Für die Schweiz und das gesamte Ausland Beltz Verlag & Co., Postfach 227, CH-4002 Basel.

Erscheinungsweise: Vier Ausgaben pro Jahrgang

Bezugspreis: Abonnement (vier Ausgaben) DM 60,–, Einzelheft DM 18,–, jeweils incl. Mehrwertsteuer zuzügl. Versandkosten. Mitglieder der Deutschen Gesellschaft für Psychologie können die Zeitschrift durch Nachweis der Mitgliedschaft (Mitglieds-Nr.) zum ermäßigten Abonnementspreis von DM 48,– incl. MWSt zuzügl. Versandkosten beziehen. Abbestellungen spätestens acht Wochen vor Ablauf des Abonnements.

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie.
– Weinheim, Basel : Beltz.
ISSN 0170-1789
Erscheint jährl. viermal.
1980,1 ff.

ISSN 0170-1789

INHALTSVERZEICHNIS

Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie

Organ der
Deutschen Gesellschaft für Psychologie

Band 4, 1983, Heft 1

Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie 1983, 4, Heft 2, S. 151 – 164

Zur Faktorstruktur des KFT 4-13
Eine hypothesentestende Untersuchung unter Verwendung der konfirmatorischen Maximum Likelihood Faktorenanalyse

Karl Steffens, Charlotte Hospelt & Kurt A. Heller Päd. Seminar der Univ. Köln, Inst. f. Angew. Sozialforschung der Univ. Köln und Inst. f. Päd. Psychol. der Univ. München

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit soll mit Hilfe der Maximum Likelihood Faktorenanalyse (MLFA) die Faktorstruktur des Kognitiven Fähigkeitstests für 4. bis 13. Klassen (KFT 4-13) von HELLER, GAEDIKE & WEINLÄDER (1976) in verschiedenen Stichproben untersucht werden. Im ersten Teil werden die Grundlagen der explorativen und konfirmatorischen Maximum Likelihood Faktorenanalyse (MLFA) dargestellt, während wir im zweiten Teil zunächst mit Hilfe der explorativen MLFA aus den Daten einer Stichprobe eine KFT-spezifische Faktorstruktur gewinnen, die dann in vier weiteren Stichproben unter Verwendung der konfirmatorischen MLFA überprüft wird.

Abstract

In this paper, we are concerned with the factor structure of the Cognitive Abilities Test for grades 4 to 13 (Kognitiver Fähigkeitstest für 4. bis 13. Klassen; KFT 4 – 13) by HELLER, GAEDIKE & WEINLÄDER (1976) in different samples. In the first part of our paper, we describe the basic concepts of exploratory and confirmatory maximum likelihood factor analysis (MLFA), while in the second part, we first obtain a factor structure specific to the KFT by factor analysing the data of one sample exploratorily and then proceed by testing this structure in four other samples using confirmatory MLFA.

Die vorliegende Arbeit verfolgt im wesentlichen zwei Ziele: Zum einen soll die Faktorstruktur des Kognitiven Fähigkeitstests für 4. bis 13. Klassen (KFT 4 – 13) von HELLER, GAEDIKE & WEINLÄDER (1976) bestimmt und geklärt werden, wie stabil diese Struktur über verschiedene Stichproben hinweg ist. Zum anderen soll an dieser inhaltlichen Fragestellung die Anwendung der Faktorenanalyse nach der *Maximum Likelihood Methode* (MLFA) demonstriert werden. Die MLFA hat gegenüber der herkömmlichen Faktorenanalyse nach der *Hauptachsenmethode* (PAFA) den Vorteil, daß sie sowohl modellimplizite als auch vom jeweiligen Forscher im Hinblick auf bestimmte Faktorstrukturen explizit aufgestellte Hypothesen inferenzstatistisch zu überprüfen gestattet.

Beim KFT 4-13, der auf dem LORGE-THORNDIKE Intelligence Test bzw. auf dem Cognitive Abilities Test von THORNDIKE & HAGEN basiert, handelt es sich um einen differentiellen Intelligenztest, der nach den Angaben seiner Autoren vor allem jene kognitiven Fähigkeitsdimensionen erfaßt, die für das schulische Lernen relevant sind. Die 11 Untertests des KFT 4-13 sind zu drei Testteilen zusammengefaßt:

Verbaler Teil:
Wortschatz (V_1), Satzergänzen (V_2), Wortklassifikation (V_3), Wortanalogien (V_4);
Quantitativer Teil:
Textrechenaufgaben (Q_1), Mengenvergleiche (Q_2), Zahlenreihen (Q_3), Gleichungenbilden (Q_4);
Nonverbaler Teil:
Figurenklassifikation (N_1), Figurenanalogien (N_2), Figurensynthese (N_3).

Die Faktorstruktur des KFT 4-13 ist in der Vergangenheit in verschiedenen Stichproben von Schülern und Studenten untersucht worden (GAEDIKE 1975; RENNETTE 1980). Dabei hat sich nicht nur herausgestellt, daß sich die Interkorrelationen der 11 KFT-Untertests im allgemeinen durch eine 3-Faktoren-Lösung befriedigend erklären lassen; vielmehr läßt sich auch über verschiedene Stichproben hinweg ein bestimmtes Muster von hohen und niedrigen Ladungen auf diesen drei Faktoren beobachten. Wir wollen daher in dieser Arbeit der Frage nachgehen, ob sich dieses Muster mit Hilfe der konfirmatorischen MLFA statistisch absichern läßt.

Die Maximum Likelihood Faktorenanalyse zählt – im Gegensatz zu der immer noch ausgesprochen populären Faktorenanalyse nach der Hauptachsenmethode – nicht zu den häufig eingesetzten Methoden zur Faktorenanalyse psychologischer Daten. Das zeigt zum Beispiel das Übersichtsreferat von LUKESCH & KLEITER (1974), das nur die Arbeit von STEINHAGEN (1970) als Untersuchung nennt, in der eine MLFA angewendet wird. STEINHAGEN selbst geht aber auf die MLFA als Methode nicht ein. Wir halten es daher für sinnvoll, zunächst die ML Faktorenanalyse soweit darzustellen, wie es uns für ihr Verständnis als hypothesentestendes Verfahren notwendig erscheint.

Das Prinzip der Maximum Likelihood Schätzung ist von LAWLEY (1940) in die Faktorenanalyse eingeführt worden. Die weitere Entwicklung der MLFA ist zum großen Teil das Ergebnis seiner Arbeiten und der von MAXWELL und JÖRESKOG (LAWLEY 1942, 1943, 1967; LAWLEY & MAXWELL 1971; MAXWELL 1961; JÖRESKOG 1963, 1966, 1967a, 1969, 1974; JÖRESKOG & LAWLEY 1968), in denen auch die Praktikabilität dieser Methode demonstriert wurde (z. B. MAXWELL 1972a, b). Andere wichtige Beiträge zu diesem Thema stammen von HEMMERLE (1965) und DERFLINGER (1968, 1969). WEEDE & JAGODZINSKI (1977) kommt das Verdienst zu, das Konzept der konfirmatorischen Faktorenanalyse im deutschen Sprachraum vorgestellt zu haben. Die Autoren diskutieren auch ausführlich deren Beziehung zur explorativen Faktorenanalyse und zur Pfadanalyse; sie gehen jedoch auf die Maximum Likelihood Methode und die damit verbundenen Möglichkeiten des Hypothesentestens nicht ein und stellen das Modell der konfirmatorischen Faktorenanalyse nur relativ kurz und weitgehend nicht-technisch dar.

1. Maximum Likelihood Faktorenanalyse

Das allgemeine Modell der Faktorenanalyse läßt sich durch

$$x = \Lambda f + e \qquad (1)$$

darstellen. In dieser Gleichung steht x für die im Hinblick auf p Merkmale einer Person erhobenen Daten, f enthält die Faktorwerte für k gemeinsame Faktoren, Λ ist die $p \times k$ Matrix der Faktorladungen und e der Vektor der p Residualwerte (es wird nicht weiter zwischen spezifischer und Fehlervarianz unterschieden).

Unter der Annahme, daß die Residualwerte untereinander und von den Faktorwerten unabhängig sind und sich x, f und e normal um Null verteilen mit Kovarianzmatrizen $E(ff') = \Phi$ und $E(ee') = \Psi$ (Diagonalmatrix) gilt für $E(xx') = \Sigma$ die Beziehung

$$\Sigma = \Lambda \Phi \Lambda' + \Psi . \qquad (2)$$

Die Elemente von Λ (Faktorladungen), Φ (Kovarianzen der Faktoren bzw. Korrelationen bei standardisierten Faktoren) und Ψ (Residualvarianzen) sind die Parameter des Modells, die aufgrund der Stichprobenkovarianzmatrix S (bzw. Korrelationsmatrix) mit Hilfe der Maximum Likelihood Methode geschätzt werden, wobei die Anzahl der Faktoren k vorzugeben ist. Die entsprechenden Schätzwerte werden so bestimmt, daß sie die Likelihood Funktion

$$\log L = -\frac{1}{2}n[\log|\Sigma| + \operatorname{tr}(S\Sigma^{-1})] \qquad (3)$$

maximieren ($n = N - 1$). Dies wird iterativ und über die Minimierung von

$$F(\Lambda,\Phi,\Psi) = \log|\Sigma| + \operatorname{tr}(S\Sigma^{-1}) - \log|S| - p \qquad (4)$$

erreicht. Entsprechende Computerprogramme liegen vor (JÖRESKOG 1967b; JÖRESKOG & GRUVAEUS 1967).

Da die Gleichungen (1) bis (4) auch dann erfüllt sind, wenn wir f durch Mf, Λ durch ΛM^{-1} und Φ durch $M\Phi M'$ ersetzen, wobei M eine beliebige nicht-singuläre $k \times k$-Matrix ist, müssen bei den Parametern in Λ und Φ mindestens k^2 Einschränkungen (restrictions) eingeführt werden, um die Eindeutigkeit der ML Schätzungen zu gewährleisten. Dies geschieht bei der explorativen MLFA in der Regel durch die Bedingungen $\Phi = I$ und $\Lambda'\Psi^{-1}\Lambda$ = Diagonalmatrix, d. h. modellimplizit, während bei der konfirmatorischen MLFA mindestens k^2 Parameter in Λ und Φ vom jeweiligen Forscher explizit zu fixieren sind.

Hat man die Parameterschätzungen, d. h. eine Faktorlösung mit k Faktoren vorliegen, dann läßt sich für diese ein Modelltest durchführen. Dabei wird von der Nullhypothese H_k ausgegangen, daß k die „richtige“ Anzahl der Faktoren ist, die Gültigkeit der eingangs gemachten Annahmen und des durch Gleichung (2) definierten Modells vorausgesetzt.

Zur Überprüfung der Nullhypothese wird das Verhältnis zweier Likelihood Funktionen verwendet. Eine Likelihood Funktion bezieht sich auf die Menge Ω aller (d. h. beliebiger) symmetrischen, positiv definiten Matrizen Σ der Ordnung p; diese Funktion erreicht ihr Maximum L_Ω, wenn $\Sigma = S$, so daß gilt

$$\log L_\Omega = -\frac{1}{2}n(\log|S| + p)\,. \qquad (5)$$

Die andere Likelihood Funktion bezieht sich auf die Untermenge ω jener Matrizen Σ aus Ω, für die Gleichung (2) mit k Faktoren zutrifft; deren Maximum bezeichnen wir mit L_ω, und es gilt

$$\log L_\omega = -\frac{1}{2}n[\log|\Sigma| + \operatorname{tr}(S\Sigma^{-1})]\,. \qquad (6)$$

Die genaue Verteilung des Likelihood Verhältnisses $\lambda = L_\omega/L_\Omega$ ist nicht bekannt; man weiß jedoch, daß sich der Ausdruck

$$-2\log\lambda = U_k = n[\log|\Sigma| + \operatorname{tr}(S\Sigma^{-1}) - \log|S| - p] \qquad (7)$$

unter Geltung der Nullhypothese und für große Stichproben ungefähr wie χ^2 verteilt (vgl. z. B. LAWLEY & MAXWELL 1971, 35). Ist dieser bei entsprechenden Freiheitsgraden signifikant, dann muß H_k verworfen werden. In diesem Fall bietet es sich an, das durch die Hypothese H_k implizierte Modell zu modifizieren und die modifizierte Version erneut zu überprüfen.

1.1 Explorative MLFA

Bei der explorativen MLFA wird die Eindeutigkeit der ML Schätzungen durch die Einführung der Bedingungen $\Phi = I$ und $\Lambda'\Psi^{-1}\Lambda$ = Diagonalmatrix erreicht. Die erste Bedingung vereinfacht das Modell (2) zu

$$\Sigma = \Lambda\Lambda' + \Psi, \qquad (8)$$

d. h. zu einem Modell mit orthogonalen bzw. nicht-korrelierenden Faktoren. Durch die zweite Bedingung werden zusätzlich $k(k-1)/2$ Parameter fixiert. Da die Gesamtzahl der Parameter in Λ und Ψ $pk + p$ ist, verbleiben

$$p(k+1) - k(k-1)/2$$

freie Parameter. Diese Zahl muß kleiner sein als $p(p+1)/2$, die Anzahl der Elemente in S; andernfalls ist das Modell nicht oder nur gerade identifiziert und damit statistisch nicht überprüfbar (zum Problem der Identifizierbarkeit vgl. WERTS et al. 1973; WILEY 1973). Zur Überprüfung der Hypothese H_k bzw. des durch diese implizierten Faktormodells (8) mit k orthogonalen Faktoren wird die Größe U_k aus (7) verwendet, die sich bei genügend großem Stichprobenumfang annähernd wie χ^2 mit

$$\mathrm{d}f_k = \frac{1}{2}[(p-k)^2 - (p+k)] \tag{9}$$

Freiheitsgraden verteilt. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist gleich der Anzahl der Varianzen/Kovarianzen in S minus der Anzahl der unter H_k zu schätzenden Parameter. In Anlehnung an Vorschläge von BOX (1949) und BARTLETT (1954) für die Korrektur entsprechender Prüfgrößen wird n in (7) in der Regel durch $n - (2p + 5)/6$ bzw. durch $n - (2p + 5)/6 - 2k/3$ ersetzt. Ist U_k signifikant, dann sind mindestens $k + 1$ gemeinsame Faktoren notwendig.

Neben der inferenzstatistischen Überprüfung läßt sich die Angemessenheit des MLFA Modells auch durch den von TUCKER & LEWIS (1971; vgl. auch HEELER & WHIPPLE 1976) entwickelten Index

$$\hat{\rho} = \frac{M_0 - M_k}{M_0 - 1} \tag{10}$$

bewerten. Dabei ist $M_0 = \chi_0^2/\mathrm{d}f_0$ und $M_k = \chi_0^2/\mathrm{d}f_k$; d.h. der $\hat{\rho}$-Index verwendet χ^2-Werte und Freiheitsgrade für ML Lösungen mit 0 und k gemeinsamen Faktoren.

$\hat{\rho}$ wird in Analogie zu Varianzkomponenten in der Varianzanalyse interpretiert; er gibt an, in welchem Maße das in Frage stehende Modell die Variation in den Daten erklärt, und kann daher auch als Maß der praktischen Signifikanz im Sinne BREDENKAMPS (1970, 1972) aufgefaßt werden.

Im übrigen ist die Berechnung einer MLFA Lösung mit 0 Faktoren auch deshalb sinnvoll, weil so die Signifikanz der Stichprobenkorrelationsmatrix R relativ leicht überprüft werden kann.

Unter Geltung des Modells (8) ist

$$\mathrm{tr}(S\Sigma^{-1}) = \mathrm{tr}(I_p) = p\,. \tag{11}$$

Für $k = 0$ ist außerdem $\Sigma = \mathrm{diag}(S)$, so daß sich U_k in (7) zu

$$U_0 = -n \log(|S|/|\Sigma|) = -n \log|R| \tag{12}$$

vereinfacht (LAWLEY & MAXWELL 1971, 35). Ist das Ergebnis dieses auf BARTLETT (1950; s.a. MAXWELL 1959) zurückgehenden Tests mit $\mathrm{d}f_0 = p(p-1)/2$ signifikant, dann kann man davon ausgehen, daß es sich bei R nicht nur um eine Ansammlung von Nullkorrelationen handelt.

1.2 Konfirmatorische MLFA

Im Gegensatz zur explorativen MLFA, bei der die Fixierung von Parametern als Voraussetzung für die Eindeutigkeit der ML Schätzungen modellimplizit erfolgt, werden bei der konfirmatorischen MLFA einige der Parameter durch den jeweiligen Forscher festgelegt. Es wird dabei davon ausgegangen, daß dieser mit seinem Forschungsgegenstand soweit vertraut ist, daß er in dem durch (2) definierten Modell

$$\Sigma = \Lambda\Phi\Lambda' + \Psi$$

einige Werte für Λ, Φ und möglicherweise auch für Ψ fixieren kann, wenngleich letzteres in der Praxis nur selten der Fall sein dürfte. In der Regel wird für entsprechende Elemente in Λ und für nichtdiagonale Elemente in Φ der Wert Null spezifiziert, so daß sich auf diese Weise eine Einfachstruktur im Sinne THURSTONES hypostasieren läßt. Allerdings sind hier auch von Null verschiedene Werte zulässig.

Bezeichnet man die Anzahl der fixierten Parameter in Λ, Φ und Ψ mit n_Λ, n_Φ und n_Ψ, dann ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit der ML Schätzungen, daß gilt

$$n_\Lambda + n_\Phi \geqq k^2 \tag{13}$$

(hinreichende Bedingungen diskutiert JÖRESKOG 1979).

Werden mehr als k^2 Parameter festgelegt, dann gilt die Lösung als eingeschränkt (restricted), da man zu einer solchen Lösung nicht mehr durch Rotation bzw. Transformation einer uneingeschränkten Lösung kommen kann. In der Regel verwendet man bei der explorativen MLFA uneingeschränkte, bei der konfirmatorischen MLFA eingeschränkte Modelle.

Da die Gesamtzahl der fixierten Parameter

$$m = n_{\Lambda} + n_{\Phi} + n_{\Psi} \tag{14}$$

ist und die Anzahl aller Parameter in Λ, Φ und Ψ

$$pk + \frac{1}{2}k(k+1) + p =$$
$$\frac{1}{2}(2p+k)(k+1)\,,$$

ergibt sich für die Anzahl der freien Parameter

$$\frac{1}{2}(2p+k)(k+1) - m\,.$$

Diese muß kleiner sein als $p(p+1)/2$, die Anzahl der Elemente in S; andernfalls ist das Modell nicht identifiziert.

Die Überprüfung der Hypothese erfolgt wie bei der explorativen MLFA unter Verwendung der Prüfgröße U_k in (7), wobei Σ allerdings durch Λ, Φ und Ψ in (2) bestimmt wird, mit Freiheitsgraden

$$\mathrm{d}f_k = p^2 - \frac{1}{2}(p+k)(p+k+1) + \mathrm{m}\,. \tag{15}$$

Ein signifikantes Ergebnis kann sowohl bedeuten, daß die Anzahl der im Modell (2) verwendeten gemeinsamen Faktoren unzureichend ist, als auch, daß die Parameterspezifikation, z. B. die Fixierung von Nulladungen in Λ, modifiziert werden muß.

Neben der inferenzstatistischen Überprüfung kann man aber, wie auch bei der explorativen MLFA, den $\hat{\rho}$-Index von TUCKER & LEWIS (1971) als Maß der praktischen Signifikanz berechnen.

2. Datenanalyse und Hypothesenüberprüfung

RENNETTE (1980) hat in ihrer Arbeit zur faktoriellen Struktur des KFT 4–13 Daten bei Schülern allgemein- und berufsbildender Schulen und bei Studenten verschiedener Fakultäten erhoben, die zum Zeitpunkt der Erhebung (SS 1979) überwiegend im Grundstudium studierten. In 5 ihrer 10 Stichproben lag N über 100, in 4 Stichproben unter 30 und in einer Stichprobe betrug N 51. Wegen der geringen Größe der letzten Stichproben wollen wir in unserer Arbeit nur auf die erstgenannten fünf Stichproben zurückgreifen (vgl. Tab. 1).

Nun wird man auch diese nicht als „große" Stichproben bezeichnen können; LAWLEY & MAXWELL (1971, 35) sind aber der Ansicht, daß sich U_k auch noch in kleineren Stichproben $(n - p \geqq 50)$ ungefähr wie χ^2 verteilt, während GEWEKE & SINGLETON (1980) aufgrund eigener Untersuchungen sogar $N \geqq 30$ für vertretbar halten.

Tabelle 1: Stichproben der Untersuchung

Stichprobe		N
1	Gymnasiasten	134
2	Berufsschüler	200
3	Studenten mit Fächern in der Philosophischen Fakultät	128
4	Studenten mit Fächern in der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät	101
5	Studenten mit Fächern in beiden Fakultäten	110

Wir werden in der explorativen Phase der Analyse von der Korrelationsmatrix der 11 KFT-Untertests aus Stichprobe 1 ausgehen und die in dieser Phase gewonnene Faktorstruktur des KFT in der konfirmatorischen Phase der Analyse an den Daten der übrigen vier Stichproben überprüfen.

Tabelle 2: Korrelationsmatrix der 11 KFT-Untertests für Stichprobe 1 (Gymnasiasten, $N = 134$) nach RENNETTE (1980)

1.000										
.553	1.000									
.556	.484	1.000								
.453	.405	.434	1.000							
.264	.266	.279	.308	1.000						
.343	.415	.400	.444	.416	1.000					
.294	.444	.377	.276	.444	.580	1.000				
.117	.145	.183	.317	.512	.434	.372	1.000			
.353	.345	.409	.273	.232	.299	.451	.294	1.000		
.429	.464	.446	.474	.406	.482	.513	.389	.522	1.000	
.282	.390	.209	.166	.169	.261	.368	.230	.517	.530	1.000

2.1 Explorative Phase

Die Korrelationsmatrix der 11 KFT-Untertests für Stichprobe 1 (Gymnasiasten) ist in Tabelle 2 wiedergegeben.

RENNETTE hat für diese Korrelationsmatrix aufgrund einer Faktorenanalyse nach der Hauptachsenmethode (PAFA) eine 3-Faktoren-Lösung erhalten (vgl. Tab. 3). Diese drei Faktoren erklären 53% der Gesamtvarianz.

Uns interessierte zunächst die Frage, ob sich 3 Faktoren auch bei einer statistischen Überprüfung als ausreichend erweisen würden. Wir berechneten daher uneingeschränkte ML Faktorenanalysen für 0 bis 3 Faktoren (Programm UMLFA von JÖRESKOG 1967 b) und für jede Lösung den $\hat{\rho}$-Index nach TUCKER & LEWIS (1971). Bei dem Versuch, eine UMLFA-Lösung für $k = 4$ zu berechnen, ergaben sich Schwierigkeiten bei der Minimierung von F; das iterative Verfahren konvergierte nicht zufriedenstellend, so daß wir keine korrekten ML-Schätzungen erhielten (improper solution). Die Ergebnisse für $k = 0 - 3$ sind in Tabelle 4 aufgeführt.

Tabelle 3: Faktormatrix (PAFA, Varimax-Rotation), Stichprobe 1, nach RENNETTE (1980)

	I	II	III	h^2
$V1$	*.749*	.081	.194	.605
$V2$	*.621*	.160	.321	.514
$V3$	*.671*	.204	.169	.520
$V4$	*.534*	.351	.074	.414
$Q1$	.206	*.637*	.090	.450
$Q2$	.388	*.579*	.177	.517
$Q3$	.300	*.515*	.370	.492
$Q4$	.023	*.713*	.161	.535
$N1$	.296	.233	*.565*	.461
$N2$	.415	.427	*.510*	.614
$N3$	.131	.110	*.816*	.695

Da der zur Überprüfung der Angemessenheit des Faktormodells durchgeführte χ^2-Test relativ sensibel auch gegenüber kleineren Abweichungen vom Modell ist, wir aber andererseits bereit sind, ein gewisses Maß an Abweichung zu tolerieren, haben wir uns entschlossen, hier und im folgenden die jeweils zu überprüfende Hypothese H_k erst dann zurückzuweisen, wenn der entsprechende χ^2-Wert auf dem 1%-Niveau signifikant ist.

Tabelle 4: χ^2- und $\hat{\rho}$-Werte für UMLFA-Lösungen mit $k = 0-3$

k	χ^2	df	p	$\hat{\rho}$
0	552.41	55	0.0	–
1	129.74	44	0.000	.78
2	75.66	34	.000	.86
3	33.87	25	.111	.96

Tabelle 4 zeigt, daß die UMLFA-Lösung mit drei Faktoren sowohl im Hinblick auf den χ^2-Wert von 33.87 ($p > .01$) als auch unter Berücksichtigung des $\hat{\rho}$-Indexes ($\hat{\rho} = .97$) annehmbar ist. Auch unter statistischen Gesichtspunkten reichen also drei Faktoren zur Erklärung für die Interkorrelationen der 11 KFT-Untertests in Stichprobe 1 aus.

In der Frage der zu postulierenden Faktorstruktur haben wir uns zunächst wieder der PAFA-Lösung von RENNETTE zugewandt (vgl. Tabelle 5, die zum Vergleich die UMLFA-Lösung für drei Faktoren enthält.)

Tabelle 5: UMLFA-Lösung für $k = 3$ (Stichprobe 1)

	λ_1	λ_2	λ_3	Ψ
1	*.742*	.195	.084	.404
2	*.642*	.321	.163	.481
3	*.686*	.126	.215	.468
4	*.529*	.068	.357	.588
5	.206	.078	*.636*	.548
6	.382	.162	*.585*	.485
7	.313	.320	*.533*	.516
8	.018	.157	*.707*	.474
9	.315	*.517*	.259	.567
10	.418	*.485*	.443	.394
11	.127	*.873*	.116	.207

In der PAFA-Lösung ist für jede Variable die jeweils höchste Ladung kursiv gesetzt. Diese Lösung ist geradezu bilderbuchmäßig; die vier Untertests des Verbalteils laden hoch im ersten Faktor, die vier Untertests des Quantitativen Teils im zweiten Faktor und die drei Untertests des Nonverbalen Teils des KFT im dritten Faktor.

Auffallend ist auch die ausgeprägte Übereinstimmung zwischen PAFA- und UMLFA-Lösung. Wir beschlossen daher, diese Struktur zusammen mit dem durch (2) definierten Faktormodell für $k = 3$ als Hypothese 1 statistisch zu überprüfen. In Tabelle 6 ist angegeben, welche Ladungen Null gesetzt (0) und welche als freie Parameter geschätzt (X) werden sollen. Durch diese Fixierung von Nulladungen wird das Mo-

Tabelle 6: Postuliertes Faktormuster für $k = 3$ (Hypothese 1)

1	X	0	0
2	X	0	0
3	X	0	0
4	X	0	0
5	0	X	0
6	0	X	0
7	0	X	0
8	0	X	0
9	0	0	X
10	0	0	X
11	0	0	X

Tabelle 7: Fixierte und freie Parameter für unkorrelierte und korrelierte Faktoren

1.00			1.00		
0	1.00		X	1.00	
0	0	1.00	X	X	1.00
a) unkorrelierte Faktoren			b) korrelierte Faktoren		

Tabelle 8: RMLFA-Lösungen mit $k = 3$ und unkorrelierten bzw. korrelierten Faktoren zu Hypothese 1

	λ_1	λ_2	λ_3	Ψ	λ_1	λ_2	λ_3	Ψ
1	.785	.0	.0	.383	.737	.0	.0	.458
2	.694	.0	.0	.518	.718	.0	.0	.484
3	.710	.0	.0	.496	.713	.0	.0	.492
4	.588	.0	.0	.654	.618	.0	.0	.618
5	.0	.643	.0	.586	.0	.611	.0	.627
6	.0	.735	.0	.460	.0	.745	.0	.445
7	.0	.716	.0	.487	.0	.757	.0	.426
8	.0	.614	.0	.623	.0	.573	.0	.671
9	.0	.0	.713	.491	.0	.0	.659	.566
10	.0	.0	.731	.465	.0	.0	.849	.279
11	.0	.0	.475	.725	.0	.0	.622	.613
Faktorkorrelationen Φ								
	1.000				1.000			
	.0	1.000			.660	1.000		
	.0	.0	1.000		.733	.750	1.000	
$\chi^2 = 189.70$	$df = 44$	$p = .000$			$\chi^2 = 72.75$	$df = 41$	$p = .002$	

dell eingeschränkt, so daß sich auch die Rotation der Faktormatrix erübrigt. Außerdem legten wir fest, daß die Hypothese zunächst für unkorrelierende und dann für korrelierende Faktoren (vgl. Tab. 7) getestet werden sollte.

Zur Berechnung der eingeschränkten MLFA-Lösungen wurde das Programm RMLFA von JÖRESKOG & GRUVAEUS (1967) verwendet; die Ergebnisse sind in Tabelle 8 wiedergegeben.

Wie aus Tabelle 8 zu ersehen ist, muß Hypothese 1 in beiden Varianten zurückgewiesen werden; sowohl für die RMLFA-Lösung mit korrelierenden als auch für die mit nicht-korrelierenden Faktoren ergeben sich hochsignifikante χ^2-Werte. Trotzdem unterscheiden sich die beiden Lösungen; die zweite mit den frei zu schätzenden Faktorinterkorrelationen ist eindeutig die bessere, sowohl aufgrund des χ^2-Wertes als auch im Hinblick auf den TUCKER-LEWIS-Index ($\hat{\rho}$ = .56 gegenüber $\hat{\rho}$ = .90 bei korrelierenden Faktoren; χ_0^2 = 571.76, df_0 = 67).

Da einerseits die Korrelationen zwischen den Faktoren relativ hoch sind, andererseits aber auch die diesem Modell entsprechende Hypothese 1 zurückgewiesen werden mußte, haben wir uns gefragt, ob es nicht sinnvoll wäre, neben drei korrelierenden gemeinsamen Faktoren einen Generalfaktor anzunehmen. Die dafür hypostasierte Struktur ist in Tabelle 9a wiedergegeben; Tabelle 9b enthält die unter dieser Hypothese 2 berechnete RMLFA-Lösung.

Wie wir erwartet hatten, verbessert die Einführung eines Generalfaktors die Anpassung des Modells; der χ^2-Wert von 42.03 ist mit 30 Freiheitsgraden nicht signifikant, und der $\hat{\rho}$-Index hat sich auf .95 erhöht. Auch bestätigen die nunmehr relativ niedrigen Korrelationen zwischen den gemeinsamen Faktoren unsere Vermutung, daß der Generalfaktor einen Großteil der Kovarianz zwischen den Faktoren erklären könnte. Andererseits korreliert dieser mit den übrigen Faktoren niedriger und anders als erwartet, und der zweite gemeinsame Faktor hat sich fast auf einen Einzelrestfaktor reduziert.

Alles in allem schien uns eine Lösung mit vier Faktoren nicht ökonomisch bzw. „sparsam" genug, so daß wir uns noch einmal mit der Möglichkeit beschäftigten, unter der Beschränkung auf drei gemeinsame Faktoren zu einem angemessenen Faktormuster zu kommen.

In unserer 1. Hypothese, die auf RENNETTES PAFA-Lösung mit drei Faktoren basierte, hatten wir in Λ pro Variable nur eine Ladung schätzen lassen und die übrigen Parameter gleich Null

Tabelle 9: Postuliertes Faktormuster und RMLFA-Lösung für k = 4 (Hypothese 2)

					λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	Ψ
1	X	X	0	0	.560	.673	.0	.0	.354
2	X	X	0	0	.614	.485	.0	.0	.482
3	X	X	0	0	.603	.471	.0	.0	.505
4	X	X	0	0	.586	.279	.0	.0	.631
5	X	0	X	0	.564	.0	.216	.0	.607
6	X	0	X	0	.756	.0	−.009	.0	.431
7	X	0	X	0	.745	.0	−.072	.0	.452
8	X	0	X	0	.494	.0	.786	.0	.050
9	X	0	0	X	.582	.0	.0	.516	.507
10	X	0	0	X	.763	.0	.0	.422	.360
11	X	0	0	X	.503	.0	.0	.644	.454

Faktorkorrelationen Φ

1.0				1.000			
X	1.0			−.159	1.000		
X	X	1.0		.113	−.325	1.000	
X	X	X	1.0	−.187	.376	−.019	1.000

χ^2 = 42.03 df = 30 p = .071

a) Postuliertes Faktormuster b) RMLFA-Lösung

Tabelle 10: Postuliertes Faktormuster und RMLFA-Lösung für $k = 3$ (Hypothese 3)

				λ_1	λ_2	λ_3	Ψ
1	X	0	0	.750	.0	.0	.438
2	X	0	0	.724	.0	.0	.476
3	X	0	0	.716	.0	.0	.488
4	X	X	0	.486	.235	.0	.606
5	0	X	0	.0	.688	.0	.526
6	X	X	0	.279	.558	.0	.471
7	0	X	X	.0	.479	.361	.489
8	0	X	0	.0	.671	.0	.550
9	0	0	X	.0	.0	.747	.443
10	X	X	X	.193	.278	.476	.378
11	0	0	X	.0	.0	.694	.518

Faktorkorrelationen Φ

1.0			1.000		
X	1.0		.450	1.000	
X	X	1.0	.627	.439	1.000

$\chi^2 = 50.76 \quad df = 36 \quad p = .052$

gesetzt, was praktisch darauf hinauslief, alle Ladungen in der PAFA-Lösung kleiner .50 als Nullladungen zu deklarieren. Dieses Kriterium war aber, wie der dazu durchgeführte χ^2-Test zeigte, zu restriktiv. Wir wollen daher für unsere 3. Hypothese nur solche Parameter in Λ gleich Null setzen, deren Entsprechungen in RENNETTEs PAFA-Lösung einen Wert kleiner .35 aufweisen. Tabelle 10 informiert über dieses Faktormuster sowie über die dazu berechneten ML-Schätzungen.

Die für die unter Hypothese 3 postulierte Faktorstruktur berechnete RMLFA-Lösung ist annehmbar; der Modelltest ergibt einen χ^2-Wert von 50.76, der bei 36 Freiheitsgraden nicht signifikant ist. Wie bei der unter Hypothese 2 berechneten RMLFA-Lösung mit vier Faktoren erhalten wir für den $\hat{\rho}$-Index von TUCKER & LEWIS einen Wert von .95, d. h. die Drei-Faktoren-Lösung schneidet trotz größerer Ökonomie bzw. Sparsamkeit in dieser Hinsicht nicht schlechter ab als die Vier-Faktoren-Lösung. Es scheint uns daher sinnvoll, an dieser Stelle die explorative Phase abzuschließen.

In der nachfolgenden konfirmatorischen Phase soll überprüft werden, ob das durch (2) definierte ML-Faktormodell mit 3 Faktoren und dem durch die Faktorstruktur in Tabelle 10 festgelegten Muster von freien und fixierten Parametern auch für andere Stichproben von Schülern und Studenten beibehalten werden kann oder nicht.

Tabelle 11: Korrelationen der KFT-Untertests für Stichprobe 2 (oberhalb der Diagonalen) und Stichprobe 3 (unterhalb der Diagonalen)

1.000	.721	.611	.669	.444	.478	.427	.300	.340	.245	.417
.582	1.000	.560	.589	.397	.399	.357	.241	.315	.413	.369
.413	.363	1.000	.529	.381	.412	.403	.295	.431	.425	.375
.281	.233	.132	1.000	.525	.590	.359	.330	.312	.537	.275
.222	.164	.199	.139	1.000	.608	.403	.378	.309	.453	.286
.031	.041	−.049	.241	.330	1.000	.492	.482	.416	.556	.299
.204	.146	.282	−.032	.370	.391	1.000	.454	.629	.539	.402
.136	.134	.208	.188	.338	.258	.371	1.000	.311	.376	.347
.180	.130	.252	−.021	.188	.199	.457	.265	1.000	.477	.345
.144	.045	.139	.103	.180	.211	.494	.173	.463	1.000	.356
.158	.181	.039	−.079	.176	.213	.391	.054	.415	.513	1.000

Tabelle 12: Korrelationen der KFT-Untertests für Stichprobe 4 (oberhalb der Diagonalen) und Stichprobe 5 (unterhalb der Diagonalen)

1.000	.451	.275	.134	.092	.081	.166	.145	.140	.155	.149
.603	1.000	.346	.206	−.013	.134	.262	.039	.320	.157	.250
.364	.386	1.000	.145	−.041	−.035	.214	.134	.289	.196	.149
.432	.409	.466	1.000	.090	.080	.114	.223	−.033	.162	−.040
.144	.137	.056	.231	1.000	.508	.447	.527	.128	.268	.149
.108	.120	.160	.237	.367	1.000	.431	.462	.253	.422	.180
.139	.185	.075	.086	.392	.376	1.000	.501	.439	.491	.353
.111	.121	.143	.269	.347	.414	.497	1.000	.128	.362	.223
.244	.181	.203	.045	.155	.305	.351	.279	1.000	.668	.508
.255	.149	.315	.314	.272	.311	.352	.282	.536	1.000	.540
.117	.158	.078	.097	.137	.178	.332	.093	.519	.383	1.000

Tabelle 13: Unter Hypothese 3 berechnete RMLFA-Lösungen mit k = 3 für Stichproben 2 bis 5

	λ_1	λ_2	λ_3	Ψ	λ_1	λ_2	λ_3	Ψ
1	.910	.0	.0	.172	.815	.0	.0	.336
2	.792	.0	.0	.373	.707	.0	.0	.500
3	.693	.0	.0	.520	.530	.0	.0	.720
4	.442	.429	.0	.365	.251	.138	.0	.891
5	.0	.712	.0	.494	.0	.598	.0	.643
6	−.069	.891	.0	.285	−.220	.670	.0	.619
7	.0	.037	.799	.320	.0	.405	.460	.438
8	.0	.547	.0	.701	.0	.534	.0	.715
9	.0	.0	.738	.456	.0	.0	.643	.587
10	−.226	.552	.409	.449	−.063	−.038	.801	.410
11	.0	.0	.518	.732	.0	.0	.641	.589

Faktorkorrelationen Φ

1.000			1.000		
.673	1.000		.393	1.000	
.580	.672	1.000	.288	.502	1.000
(Stichprobe 2)			(Stichprobe 3)		

	λ_1	λ_2	λ_3	Ψ	λ_1	λ_2	λ_3	Ψ
1	.513	.0	.0	.736	.758	.0	.0	.426
2	.876	.0	.0	.233	.735	.0	.0	.461
3	.423	.0	.0	.821	.563	.0	.0	.683
4	.195	.182	.0	.922	.563	.170	.0	.606
5	.0	.712	.0	.494	.0	.565	.0	.681
6	.073	.660	.0	.549	.032	.603	.0	.626
7	.0	.521	.363	.485	.0	.577	.188	.539
8	.0	.749	.0	.438	.0	.694	.0	.518
9	.0	.0	.823	.323	.0	.0	.838	.297
10	−.205	.242	.833	.257	.139	.192	.510	.546
11	.0	.0	.637	.594	.0	.0	.623	.612

Faktorkorrelationen Φ

1.000			1.000		
.101	1.000		.256	1.000	
.471	.296	1.000	.287	.427	1.000
(Stichprobe 4)			(Stichprobe 5)		

2.2 Konfirmatorische Phase

Zur Überprüfung unserer 3. Hypothese standen uns die Korrelationsmatrizen der KFT-Untertests aus einer Gruppe von Berufsschülern (Stichprobe 2, $N = 200$) und drei studentischen Gruppen zur Verfügung (Stichprobe 3, $N = 128$, Studenten mit Fächern in der Philosophischen Fakultät; Stichprobe 4, $N = 101$, Studenten mit Fächern in der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät; Stichprobe 5, $N = 110$, Studenten mit Fächern in beiden Fakultäten); diese Korrelationsmatrizen sind in den Tabellen 11 und 12 wiedergegeben.
Die unter Hypothese 3 für die vier Stichproben berechneten RMLFA-Lösungen sind in Tabelle 13 aufgeführt, während in Tabelle 14 die dazu gehörenden χ^2- und $\hat{\rho}$-Werte sowie die χ^2-Werte für RMLFA-Lösungen mit $k = 0$ zusammengefaßt sind.

Tabelle 14: χ^2-Werte und TUCKER & LEWIS $\hat{\rho}$-Index für RMLFA-Lösungen mit $k = 3$ in Stichprobe 2 bis 5

	χ^2_0	df_0	χ^2_3	df_3	p	$\hat{\rho}$
2	1102.28	67	122.34	36	.000	.85
3	355.93	67	54.11	36	.027	.88
4	347.47	67	42.22	36	.220	.96
5	350.03	67	47.62	36	.093	.92

Wenn wir die χ^2-Werte in Tabelle 14 betrachten, sehen wir, daß nur der χ^2-Wert in Stichprobe 2 (Berufsschüler) auf dem 1%-Niveau signifikant ist, während der $\hat{\rho}$-Wert in dieser Stichprobe nur wenig unter den $\hat{\rho}$-Werten in den anderen Stichproben liegt.

Dieses Ergebnis spricht unserer Ansicht nach dafür, daß die Faktorstruktur des KFT 4-13, so wie sie unter unserer Hypothese 3 aufgrund von ML-Schätzungen der freien Parameter in Λ, Φ und Ψ bestimmt wurde, über verschiedene Stichproben hinweg relativ stabil bleibt. Auf Einzelheiten wollen wir im nachfolgenden Diskussionsteil eingehen.

2.3 Diskussion

Wir haben im empirischen Teil dieser Arbeit zum einen demonstriert, wie die Maximum Likelihood Faktorenanalyse dazu verwendet werden kann, Hypothesen über die Anzahl von Faktoren und über deren Struktur zu entwickeln und diese statistisch zu überprüfen. Während in der explorativen Phase sowohl auf die uneingeschränkte als auch auf die eingeschränkte MLFA zurückgegriffen werden kann, erfolgt die Überprüfung der in der explorativen Phase gewonnenen Hypothese in der konfirmatorischen Phase mit Hilfe der eingeschränkten MLFA und – in der Regel – anhand anderer Daten.

Zum anderen haben wir mit Hilfe der dargestellten Maximum Likelihood Faktorenanalyse die inhaltliche Fragestellung untersucht, ob der KFT 4-13 über verschiedene Stichproben hinweg hinsichtlich seiner faktoriellen Struktur invariant bleibt. Wir konnten feststellen, daß die dazu von uns im explorativen Teil der Analyse erarbeitete Hypothese im konfirmatorischen Teil in drei von vier Stichproben nicht zurückgewiesen werden mußte. Diese drei Stichproben (3 – 5) waren aus studentischen Populationen gezogen worden, während die andere (Stichprobe 2) aus einer Population von Berufsschülern stammte.

Ein Vergleich der vier Faktormatrizen zeigt zunächst natürlich große Gemeinsamkeiten; diese sind durch das vorgegebene Muster von freien und mit Null spezifizierten Parametern bedingt, das für alle Stichproben dasselbe war. Relativ ähnlich fallen auch die Parameterschätzungen für die *Kernladungen* aus; darunter verstehen wir die Ladungen der Untertests 1 – 4 (Verbaler Teil des KFT) in Faktor I (Sprachgebundenes Denken), 5 – 8 (Quantitativer Teil) in Faktor II (Zahlengebundenes Denken) und 9 – 11 (Nonverbaler Teil) in Faktor III (Formallogisches Denken), d. h. die jeweils höchste Ladung pro Subtest.

Unterschiede ergeben sich vor allem bei den Parameterschätzungen für die übrigen Ladungen, die wir als *Nebenladungen* bezeichnen wollen. Es handelt sich dabei um solche Ladungen, die zusätzlich zur Kernladung eines Untertests auftreten und damit dessen faktorielle Komplexität erhöhen. Einige Nebenladungen fallen durchweg relativ hoch aus, so etwa die Ladung des Untertests Q_3 (Zahlenreihen) in Faktor III; bei den Berufsschülern wird diese sogar zur Kernladung. Die Parameterschätzungen für andere Nebenladungen sind so niedrig, z. B. die Ladung des Untertests Q_2 (Mengenvergleiche) in Faktor I, daß man sie möglicherweise auch hätte Null setzen können. Das würde zwar die Anzahl der Freiheitsgrade erhöhen, aber natürlich auch die Anpassung des Modells an die Daten wieder etwas verschlechtern. Wir sahen ja bereits im explorativen Teil, daß eine Faktorstruktur, in der nur Kernladungen auftreten (Hypothese 1), den Daten der Gymnasiasten nicht angemessen war, und würden daher für die anderen Stichproben kein anderes Ergebnis erwarten.

Vergleicht man die RMLFA-Lösung für die Berufsschüler mit denen für die studentischen Stichproben (3 – 5), so fallen einem zunächst die im Schnitt etwas höheren Ladungen in der Faktormatrix der Berufsschüler auf. Dementsprechend ist für deren Faktorlösung die Summe der Kommunalitäten auch höher bzw. die Summe der Residualvarianzen, tr(Ψ), kleiner als für die anderen; letztere beträgt hier 4.867 im Gegensatz zu 6.448, 5.922 und 5.995 für Stichprobe 3, 4 und 5. Der Umstand, daß die drei Faktoren bei den Berufsschülern mehr gemeinsame Varianz erklären als in den anderen Stichproben, scheint im Widerspruch mit unserem Ergebnis zu stehen, daß gerade in dieser Stichprobe unsere Hypothese zur Faktorstruktur zurückgewiesen werden mußte. Betrachtet man aber die Korrelationen der 11 KFT-Untertests in den verschiedenen Stichproben, dann sieht man, daß diese bei den Berufsschülern deutlich höher liegen als in den studentischen Gruppen und insgesamt auch einen homogeneren Eindruck machen.

Um die Frage nach einer angemessenen Faktorstruktur für die KFT-Ergebnisse der Berufsschüler noch ein wenig weiterzuverfolgen, haben wir im Nachhinein deren Korrelationsmatrix auch uneingeschränkter ML Faktorenanalysen unterzogen; danach sind für die Korrelationsmatrix der Berufsschüler mindestens vier Faktoren erforderlich ($\chi^2 = 18.30$, $df = 17$, $p = .37$ für $k = 4$).

In diesem Zusammenhang erwähnenswert ist auch die Arbeit von MAXWELL (1972b), der eine Stichprobe von 150 Jungen und Mädchen aufgrund ihrer Ergebnisse in einem Lesetest in zwei Gruppen von guten und schlechten Lesern eingeteilt und für jede Gruppe getrennt Korrelationen für die 10 Untertests des WPPSI berechnet hat. Dabei ergaben sich für die schlechteren Leser höhere und im ganzen homogenere Korrelationen als für die guten. Uneingeschränkte ML Faktorenanalysen dieser beiden Korrelationsmatrizen machten deutlich, daß für die Matrix der schlechten Leser drei Faktoren erforderlich waren, während für die andere Gruppe zwei Faktoren ausreichten.

Faktorisiert man dagegen eine Korrelationsmatrix wie die in Stichprobe 2 mit Hilfe der konventionellen Faktorenanalyse nach der Hauptachsenmethode, dann ergibt sich ein Eigenwertverlauf, der eine Unterschätzung der Anzahl gemeinsamer Faktoren zu begünstigen scheint. So hat RENNETTE (1980) für die Korrelationsmatrix der Berufsschüler eine PAFA-Lösung mit zwei Faktoren berechnet, während sie für die übrigen von uns reanalysierten Korrelationsmatrizen jeweils drei Faktoren bestimmte. GAEDIKE (1975) hat KFT-Interkorrelationen für Haupt-, Realschüler und Gymnasiasten in den Klassen 4 bis 10 faktorisiert und in allen Klassen für die Realschüler und Gymnasiasten PAFA-Lösungen mit drei Faktoren und für die Hauptschüler PAFA-Lösungen mit zwei Faktoren ermittelt. Ähnliche Befunde gibt es im übrigen ja auch zu den verschiedenen Differenzierungshypothesen der Intelligenz.

Im Hinblick auf die Frage, ob man die aus Korrelationsmatrizen mit Koeffizienten ungleicher Höhe und Homogenität resultierende unterschiedliche Differenziertheit von Faktorstrukturen inhaltlich interpretieren kann, wie dies MAXWELL (1972b) in der oben zitierten Arbeit unter Rückgriff auf THOMSONS (1951) Sampling Theorie tut, oder durch „simultane Überlagerung" erklärt und damit als Artefakt abtun sollte (KALVERAM 1965; KALVERAM & MERZ 1965), müßte daher in weiteren Arbeiten geklärt werden, inwieweit solche Ergebnisse abhängig sind von der jeweils verwendeten Methode der Faktorenanalyse.

Literatur

BARTLETT, M. S.: Tests of significance in factor analysis. *British Journal of Psychology, Statistical Section,* 1950, *3,* 77–85.

BARTLETT, M. S.: A note on the multiplying factor for various χ^2 approximations. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B,* 1954, *16,* 296–298.

BOX, G. E. P.: A general distribution theory for a class of likelihood criteria. *Biometrika,* 1949, *36,* 317–346.

BREDENKAMP, J.: Über Maße der praktischen Signifikanz. *Zeitschrift für Psychologie,* 1970, *177,* 310–318.

BREDENKAMP, J.: *Der Signifikanztest in der psychologischen Forschung.* Frankfurt: Akademische Verlagsgesellschaft, 1972.

DERFLINGER, G.: Neue Iterationsverfahren in der Faktorenanalyse. *Biometrische Zeitschrift,* 1968, *10,* 58–75.

DERFLINGER, G.: Efficient methods for obtaining the MINRES and maximum likelihood solutions in factor analysis. *Metrika,* 1969, *14,* 214–231.

GAEDIKE, A. K.: Untersuchungen zur Validität des kognitiven Fähigkeitstests für die 4. bis 13. Klasse (KFT 4-13). Dissertation. Bonn, 1975.

GEWEKE, J. F. & SINGLETON, K. J.: Interpreting the likelihood ratio statistic in factor models when sample size is small. *Journal of the American Statistical Association,* 1980, *75,* 133–137.

HEELER, R. M. & WHIPPLE, T. W.: A Monte Carlo aid to the evaluation of maximum likelihood factor analysis solutions. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology,* 1976, *29,* 253–256.

HELLER, K., GAEDIKE, A. K. & WEINLÄDER, H.: *KFT 4-13. Kognitiver Fähigkeitstest.* Weinheim: Beltz, 1976.

HEMMERLE, W. J.: Obtaining maximum-likelihood estimates of factor loadings and communalities using an easily implemented iterative computer procedure. *Psychometrika,* 1965, *30,* 291–302.

JÖRESKOG, K. G.: *Statistical estimation in factor analysis.* Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1963.

JÖRESKOG, K. G.: Testing a simple structure hypothesis in factor analysis. *Psychometrika,* 1966, *31,* 165–178.

JÖRESKOG, K. G.: Some contributions to maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika,* 1967, *32,* 443–482 (a).

JÖRESKOG, K. G.: A general approach to confirmatory likelihood factor analysis. *Psychometrika,* 1969, *34,* 183–202.

JÖRESKOG, K. G.: UMLFA: A computer program for unrestricted maximum likelihood factor analysis. Research memorandum RM-66-20, Revised edition. Princeton, N. J.: Educational Testing Service, 1967 (b).

JÖRESKOG, K. G.: Analyzing psychological data by structural analysis of covariance matrices. In: KRANTZ, D. H., ATKINSON, R. C., LUCE, R. D. & SUPPES, P. (Eds.): *Contemporary developments in mathematical psychology.* Vol. II. San Francisco: Freeman, 1974, 1–56.

JÖRESKOG, K. G.: Addendum to: A general approach to confirmatory maximum likelihood factor analysis. In: JÖRESKOG, K. G. & SÖRBOM, D.: *Advances in factor analysis and structural equation models.* Cambridge, Mass.: Abt Books, 1979, 40–43.

JÖRESKOG, K. G. & GRUVAEUS, G.: RMLFA: A computer program for restricted maximum likelihood factor analysis. Research memorandum RM-67-21. Princeton, N. J.: Educational Testing Service, 1967.

JÖRESKOG, K. G. & LAWLEY, D. N.: New methods in maximum likelihood factor analysis. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology,* 1968, *21,* 85–96.

KALVERAM, K. T.: Die Veränderung von Faktorenstrukturen durch „simultane Überlagerung". *Archiv für die gesamte Psychologie,* 1965, *117,* 296–305.

LAWLEY, D. N.: The estimation of factor loadings by the method of maximum likelihood. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A,* 1940, *60,* 64–82.

LAWLEY, D. N.: Further investigations in factor estimation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A,* 1942, *61,* 176–185.

LAWLEY, D. N.: The application of the maximum likelihood method to factor analysis. *British Journal of Psychology,* 1943, *33,* 172–175.

LAWLEY, D. N.: Some new results in maximum likelihood factor analysis. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A,* 1967, *67,* 256–264.

LAWLEY, D. N. & MAXWELL, A. E.: *Factor analysis as a statistical method.* London: Butterworths, 1971².

LUKESCH, H. & KLEITER, G. D.: Die Anwendung der Faktorenanalyse. Darstellung und Kritik der Praxis einer Methode. *Archiv für Psychologie,* 1974, *126,* 265–307.

MAXWELL, A. E.: Statistical methods in factor analysis. *Psychological Bulletin,* 1959, *56,* 228–235.

MAXWELL, A. E.: Recent trends in factor analysis. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A,* 1961, *124,* 49–59.

MAXWELL, A. E.: Factor analysis: Thomson's sampling theory recalled. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology,* 1972, *25,* 1–21. (a)

MAXWELL, A. E.: The WPPSI: A marked discrepancy in the correlations of the subtests for good and poor readers. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology,* 1972, *25,* 283–291. (b)

MERZ, F. & KALVERAM, K. T.: Kritik der Differenzierungshypothese der Intelligenz. *Archiv für die gesamte Psychologie,* 1965, *117,* 287–295.

RENNETTE, Ch.: Der Einsatz des Kognitiven Fähigkeitstests (KFT 4-13) in allgemein- und berufsbildenden Schulen. Unveröffentlichte Diplomarbeit. Köln, 1980.

STEINHAGEN, K.: Untersuchung zur Veränderung von faktoriellen Intelligenzstrukturen im Erwachsenenalter. *Diagnostica,* 1970, *16,* 149–164.

THOMSON, G. H.: *The factorial analysis of human abilities.* London: University of London Press, 1951.

TUCKER, L. R. & LEWIS, C.: A reliability coefficient for maximum likelihood factor analysis. Topics in factor analysis II. Technical report. Office of Naval Research, 1971.

WEEDE, E. & JAGODZINSKI, W.: Einführung in die konfirmatorische Faktorenanalyse. *Zeitschrift für Soziologie,* 1977, *6,* 315–333.

WERTS, C. E., JÖRESKOG, K. G. & LINN, R. L.: Identification and estimation in path analysis with unmeasured variables. *American Journal of Sociology,* 1973, *78,* 1469–1484.

WILEY, D. E.: The identification problem for structural equation models with unmeasured variables. In: GOLDBERGER, A. S. & DUNCAN, O. D. (Eds.): *Structural equation models in the social sciences.* New York: Seminar Press, 1973, 69–83.

Dr. Karl Steffens
Pädagogisches Seminar
Universität Köln
Albertus-Magnus-Platz
5000 Köln 41

Dipl. Päd. Charlotte Hospelt
Institut für Angewandte Sozialforschung
Universität Köln
Greinstr. 2
5000 Köln 41

Prof. Dr. Kurt A. Heller
Institut für Empirische Pädagogik,
Pädagogische Psychologie und Bildungsforschung
Lehrstuhl Psychologie III
Universität München
Am Stadtpark 20
8000 München 60