Finanzmärkte und Mathematik

Prof. Dr. Georg Schlüchtermann
Ludwig-Maximilians Universität München
und
Hochschule München

03.04.2008

Inhalt

- Bewertung von Finanzprodukten
- Welche mathematischen Modelle werden verwendet?
- Was kann die Mathematik leisten?
- Kurzer Abriss der geschichtliche Entwicklung

Inhalt

Beispiel Versicherungsprinzip

- Abschluss Lebensversicherung Summe 100000 € einer 40zig jährige Person.
- Maß dafür, dass Person im nächsten Jahr stirbt.
- Einfluss der Sterbetafel: q_{40} Wahrscheinlichkeit, dass Person im nächsten Jahr stirbt
- Prämie $p = q_{40} \cdot 100000€ = 0.0012 \cdot 100000 = 120€$
- p ist nicht anderes als der “Erwartungswert”.
- Prämie am Anfang gezahlt, daher Abzinsung durch Rechnungszins 4%: $P = 1/1.04 \cdot 120€ = 112{,}04€$.
- Mathematische Grund für die Verwendung der Sterbetafel bzw. des Erwartungswertes: Gesetz der großen Zahl.

Starkes Gesetz der großen Zahl

Es seien $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *identisch verteilte und unabhängige Zufallsvariable mit existierendem Erwartungswert. Dann gilt*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \longrightarrow \mathbb{E}(\xi) \textit{ fast sicher.}$$

No-Arbitrage

Beispiel: Euro kostet in New York 1.46 $; dann sollte er auch in Frankfurt 1,46 $ wert sein. Denn bei 1,4599 $ in Frankfurt kommen *Arbitrageure* auf den Plan.

Damit Preis eines Vermögenswertes (Bond, Aktie, Option etc.) fair bewertet ist, sollte es keine Arbitrage geben.

Außerdem: Annahme, dass sich Arbitragemöglichkeiten nach einer Zeit ausgleichen.

No-Arbitrage bedeutet: Es gib keine Strategie, die einen sicheren Gewinn verspricht.

Forward Kontrakt

1. Grundidee: Man schießt heute (t=0) einen Kontrakt ab, mit dem das Recht *und* der Pflicht, in der Zukunft (Zeitpunkt t=T) einen Vermögenswert zu einem festen Preis zu erwerben.
2. Dazu braucht man einen weiteren Vertragspartner um den zukünftigen Preis zu vereinbaren.
3. Klassischer No-Arbitrage-Vertrag.

Bewertung von Derivaten (I)

1. Grundidee: Versicherungsprinzip
2. Zur Zeit $t=0$ kauft jemand das Recht, einen Vermögenswert (Aktie) zum *Ausübungszeitpunkt* $t=T>0$ zum vereinbarten *Ausübungspreis* K (Strikepreis) zu erwerben.
3. Da der Vertrag keine Pflicht beinhaltet, kann dieser Kontrakt nicht umsonst sein.
4. Eine derartige Option nennt man (europäische) *Call-Option*.
5. Wenn man eine Aktie verkaufen will, wird sie *Put-Option* genannt.
6. Wert zur Zeit T: $f(S_T)=\max(S_T-K,0)$. Denn hat man die Aktie mit dem Preis K erworben, kann man sie mit S_T veräußern. Wenn der aktuelle Preis S_T niedriger liegt, lässt man das Recht verfallen (Aktie ist auf dem Markt billiger zu haben!).

Bewertung von Derivaten (II)

1. Analog erhält man für eine Put-Option: $f(S_T)=\max(K-S_T,0)$
2. Auszahlungsfunktionen bzw. Auslösebedingungen sind unterschiedlich: z.B *Amerikanische Optionen.* Hier kann der Käufer der Option sie zu jedem Zeitpunkt vor dem Ausübungszeitpunkt auslösen.
3. Mathematisch führt dies zu den *Stoppzeiten* und Optimalitätsbetrachtung
4. Bei zugrunde liegenden Assets, die keine Dividende zahlen, ist der optimale Auslösezeitpunkt bei einem amerikanischen Call mit dem Ausübungszeitpunkt identisch. Dies gilt nicht für einen Put!
5. Entscheidung zum Abschluss bzw. ob die angebotene Option fair bewertet ist, wird zum ist zur Zeit t=0 interessant.
6. Außerdem: wie jeder Vermögenswert, hat eine Option einen Preis V_t zur Zeit $t, 0 \leq t \leq T$.

.

Bewertung von Derivaten (III)

Auch hier ist der Erwartungswert die Grundlage:

$\mathbf{E}(f(S_T))=\mathbf{E}(\max(S_T\text{-}K,0))$ für einen Call bzw

$\mathbf{E}(f(S_T))=\mathbf{E}(\max(K\text{-}S_T,0))$ für einen Put.

Allerdings muss der Rechnungszins r berücksichtigt werden, da der Preis bzw. Zahlung am Anfang fällig wird. Damit muss man erneut diskontieren

$V_0=e^{-(rT)}\ \mathbf{E}(\max(S_T\text{-}K,0))$ für einen Call

Prinzip des No-Arbitrage

Prinzip nach K. Arrow/ G. Debreu:

1. Portfolio bestehend aus risikolosem Bond B mit Verzinsung von R·B und Aktie S_0.
2. Zwei Handelszeitpunkte t=0 und t=T
3. S_T hat Wert US_0 mit Wahrscheinlichkeit p oder DS_0 mit Wahrscheinlichkeit (1-p).

$$\text{Bond } \frac{1}{1+R} \rightarrow \quad 1$$

$$\begin{array}{lcl} & & US_0 \\ \text{Aktie:} \quad S_0 & \begin{array}{c}\nearrow \\ \searrow\end{array} & \\ & & DS_0 \end{array}$$

4. Es zeigt sich aber, dass für die faire Preisgestaltung nicht p bzw. 1-p zur Bewertung herangezogen werden muss.

Bewertung anhand des Einperiodenmodells

Nehmen wir an, wir schließen jetzt (t=0) einen Forward ab, der zur Zeit T $f(S_T)$ auszahlen (Forwardpreis) würde, abhängig vom Wert der Aktie S_T.

Erwartungswertprinzip ergibt:

Wert zur Zeit t=0 = $V(0,S_T) = 1/(1+R)\, \mathbf{E}_Q(f(S_T))$. Q ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, wie sieht es aus?

Aus der No-Arbitrage-Annahme erhält man:

$$Q_D = \frac{U-(1+R)}{U-D}$$

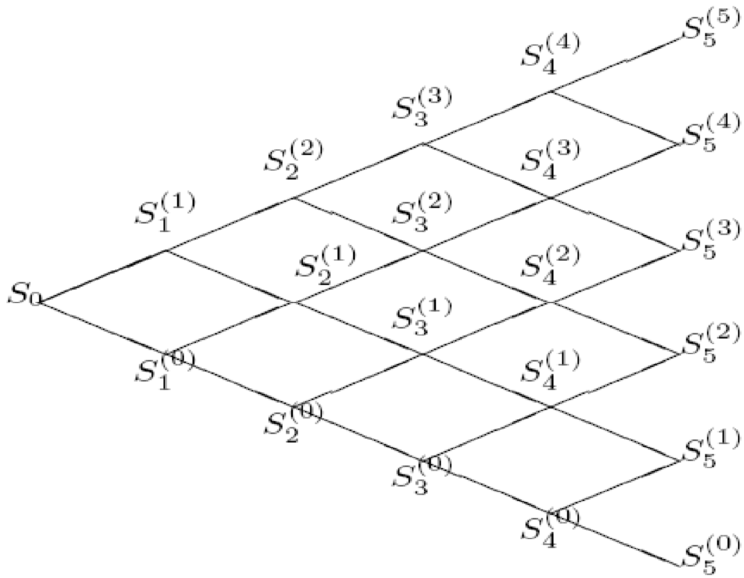
$$Q_U = \frac{(1+R)-D}{U-D}$$

Dann folgt: $V(0,S_T)=\dfrac{Q_D f(S_0 D) + Q_U f(S_0 U)}{1+R} = 1/(1+R)\, \mathbf{E}_Q(f(S_T))$.

Mehrperiodenmodell

1. Unterteilung des Zeitintervalls in n Teilintervalle – Einführung der Zeiten $t_0=0<t_1<\ldots<t_n=T$
2. An jedem Knoten kann die Aktie den Wert US_i oder DS_i annehmen. Dabei wird die Unabhängigkeit von der vorausgehenden Entwicklung angenommen.
3. Es ergibt einen binomialen

   Baum.



Übergang zu mehreren Handelsperioden

1. Auch hier wird statt dem Maß **P** das Maß **Q** verwendet.

   Der Preis zur Zeit t_j lautet $S_j^{(i)} = U^i D^{j-i} S_0$ wenn die Aktie

   i-mal gestiegen und (j-i)-mal gefallen ist

2. Durch die Auswahl der Wahrscheinlichkeit Q_U oder Q_D in jedem Knoten ist die Verteilung der Aktie S gegeben gemäß

   der *Binomialverteilung.* Diskontierter Erwartungswert ergibt

$$\binom{\ell}{m} = \frac{\ell!}{m!(l-m)!} \qquad \frac{1}{(1+R)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Q_U^k Q_D^{n-k} f(S_n^{(k)})$$

Beispiel 1.4.4 Wir wollen den Wert einer Option europäischen Stils auf eine Aktie ohne Dividendenzahlung für eine Laufzeit von 6 Monaten ausrechnen. Dazu betrachten wir eine Aktie zum Preis $S_0 := 130$ Euro. Wir nehmen $D = 0,95$ und $U = 1.05$ und eine halbjährige Zinsrate von $R = 1.5\%$. Dann ergibt sich für die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten:

$$Q_D = \frac{U - (1+R)}{U - D} = 0.35 \qquad Q_U = \frac{(1+R) - D}{U - D} = 0.65.$$

Wir gehen von einen Ausübungspreis von $K := 135$ Euro aus und betrachten 4 Perioden, d.h. $n = 4$. Als Ausübungsfunktion für eine Option erhalten wir $f(S) := \max(S - K, 0)$. Dies ergibt die Tabelle

	U^j	D^{n-j}	Q_U^j	Q_D^{n-j}	$f(S_0 U^j D^{n-j})$
$j = 0$	1	0.81	1	0.02	0
$j = 1$	1.05	0.86	0.65	0.04	0
$j = 2$	1.1	0.9	0.42	0.12	0
$j = 3$	1.16	0.95	0.27	0.35	8.26
$j = 4$	1.22	1	0.18	1	23.6

Somit berechnet sich der Erwartungswert unserer Option:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(S)) = 4 \cdot 8.26 \cdot 0.27 \cdot 0.35 + 23.6 \cdot 0.18 = 3.122 + 4.248 = 7.37.$$

Als diskontierten Wert unserer Option notieren wir:

$$F_0 = \frac{1}{(1+R)^4} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(S)) = 0.942 \cdot 7.37 = 6.94.$$

Übergang zum zeitstetigen Modell

1. Da man annimmt, jeder Zeit handeln zu können, kann man die Zeitdifferenz Δt gegen Null, d.h. n gegen Unendlich gehen lassen.
2. Frage: Konvergiert das binomiale Modell gegen ein zeitstetiges?
3. Mathematische Grundlage hierfür ist der *Zentrale Grenzwertsatz:*

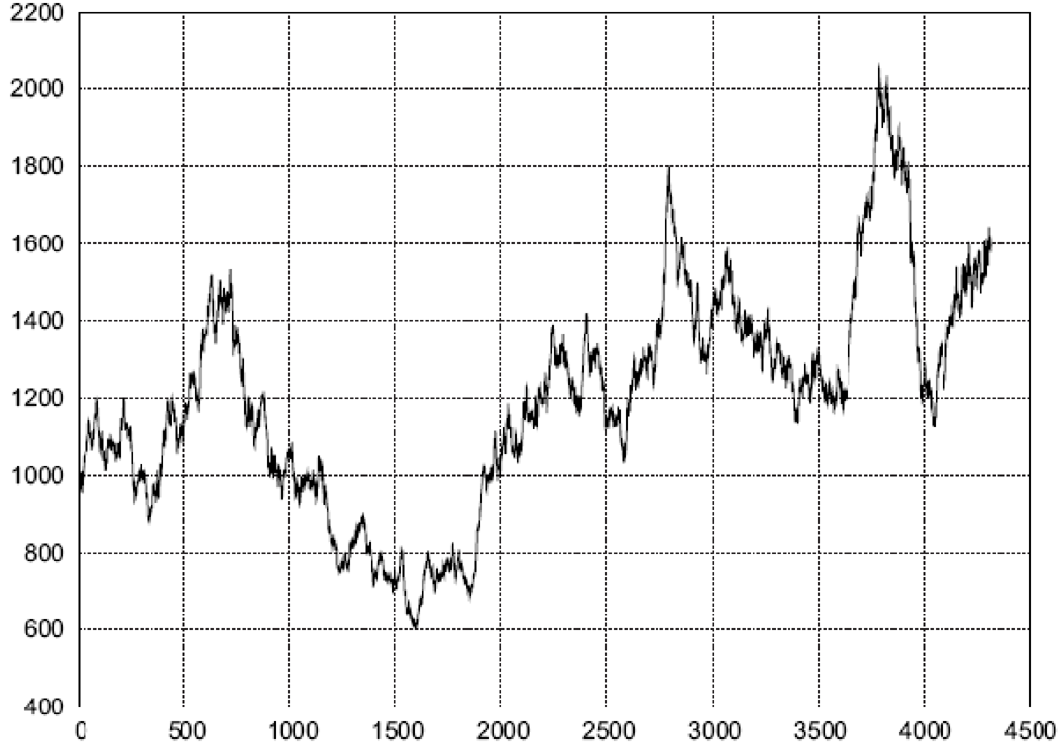
Es ergibt sich

$$S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma t N)$$

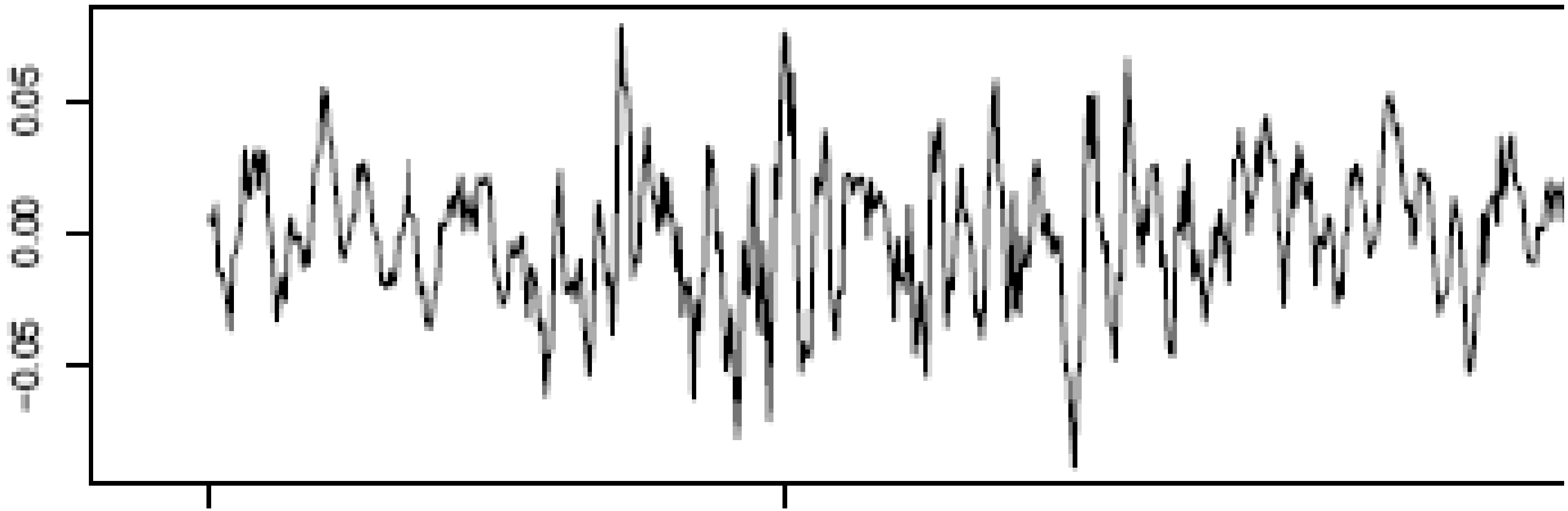
Dabei ist N eine 0-1 – normalverteilte Zufallsvariable. Die Größe μ (Drift) und $\sigma>0$ (Volatilität) sind Zahlen, die sich aufgrund der Werte U und D ergeben.

Weil N eine Zufallsvariable ist, so muss auch S_t für jedes t eine sein. Also erhält man, abhängig von der Realisierung ω, einen Pfad. Die Familie $(S_t)_{t>0}$ nennt man einen *stochastischen Prozess.*

Pfad des Assetpreises $(S_t)_{t\geq 0}$



Brownsche Bewegung



Einführung der Brownschen Bewegung in die Finanzmathematik

1. 1900: L. Bachelier betrachtete in seiner Dissertation (unter H. Poincaré) zum ersten Mal die Brownsche Bewegung.
2. Er betrachtete Zuwächse S_t-S_s eines Aktienpreises. Seine Beobachtung und Modellannahme

- S_t-S_s verschwinden im Mittel, d.h. $E(S_t-S_s)=0$
- S_t-S_s sind zu $N(0,t-s)$-normalverteilt
- S_t-S_s sind von den Zuwächsen S_v-S_u unabhängig $0<s<t<u<v$.
- $E(S_tS_s)=s=\min(s,t)$

Dies charakterisiert die Brownsche Bewegung.

- Nachteil: S_t kann in diesem Modell auch negative Werte annehmen.

Verbesserung

1. Ökonom P. Samuelson betrachtete in den 60ziger Jahren statt Brownscher Bewegung die *geometrische Brownsche Bewegung mit Drift*.
2. Statt den Returns S_t werden die so genannten log-Returns genommen: $\log(S_t / S_0)$
3. Dabei wird angesetzt: $\log(S_t)=\log(S_0)+\mu t+\sigma B_{t,}$ wobei μ die Drift (die mittlere „Verzinsung" und σ die *Volatilität* darstellt.
4. Wendet man die Exponentialfunktion auf beiden Seiten an, erhält man erneut:

$$S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma t N)$$

Black-Scholes-Ansatz

Historisch gesehen ist die Herleitung der Formel $S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma t N)$

nicht der originale Zugang. Es waren F. Black und M. Scholes (Nobelpreis 1997), die 1973 über eine stochastische Differenzialgleichung die Formel herleiteten.

1. Es ergibt sich bei einer Verzinsung zum Satz μ: $S_t=S_0e^{\mu t}$ bzw. in der Differenzialschreibweise $dS_t/dt = \mu S_t$ oder $dS_t= \mu S_t dt$.
2. Führt man eine normalverteilte stochastische Komponente ein, folgt: $dS_t=\mu S_t\, dt+\sigma S_t dB_t$ mit Anfangswert S_0
3. Man kann, wie im deterministischen Fall, auch diese lösen. Hierzu entwickelte K.Itô eine nach ihm benannte Integrationstheorie.
4. Als Lösung erhält man $S_t=S_0\exp((\mu-\sigma^2/2)t+\sigma B_t)$.

Bewertung von Derivaten im Black Scholes Modell

1. Ein Derivat hat zu jedem Zeitpunkt t einen Wert $V(t,S_t)$, abhängig von der Zeit t und dem Wert der Aktie S_t zur Zeit t. Man nimmt an, dass man $V(t,S)$ einmal nach t und zweimal nach S differenzieren kann.
2. Der Wert $\partial V(t,S)/\partial S$ gibt an, wie stark sich der Wert des Derivat ändert, wenn sich der Wert des Underlying (hier Aktie) ändert (z.B. $\partial V(t,S)/\partial S=1/2$ bedeutet, steigt die Aktie um einen Euro, so steigt der Wert der Option um 1/2) .
3. Aus der stochastischen Differenzialgleichung erhält man die *partielle Differenzialgleichung*

   $$\tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\, \partial^2 V(t,S)/\partial S^2 + \mu\, S\, \partial V(t,S)/\partial S + \partial V(t,S)/\partial t - \mu V(t,S)=0$$

   mit Endwert $V(T,S_T)=\max(S_T-K,0)$.

Black-Scholes-Formel für europäische Optionen

Die vorhergehende partielle Differenzialgleichung lässt sich lösen und man erhält zum Zeitpunkt t=0 für das risikoneutrale Maß **Q**:

$$
\begin{aligned}
V(t,S) &= SN(d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \\
d_1 &= \frac{\log(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_2 &= \frac{\log(S/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
\end{aligned}
$$

wobei $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ die Normalverteilung darstellt.

Grenzen

1. Voraussetzung von vielen unabhängigen und gleichberechtigten Händler ist nicht unbedingt erfüllt. Dies ist wichtig für das *Starke Gesetz der der großen Zahl* und den *Zentralen Grenzwertsatz.*
2. Existierendes Insiderwissen.
3. Führt nicht notwendig zur Normalverteilung.
4. Log-Returns sind meist “heavy-tailed”-verteilt (statt Brownscher Bewegung ergeben sich in den Modellen *Lévy-Prozesse*).
5. Statt Unabhängigkeit der Zuwächse existiert ein Memory-Effekt (führt zur *fraktionalen Brownschen Bewegung).*