



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Présentée et soutenue par :

Julien Bouyssier

Le Lundi 17 Décembre 2012

Titre :

Transports couplés en géométries complexes

École doctorale et spécialité :

ED MEGEP : Dynamique des Fluides

Unité de recherche :

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)

Directeurs de Thèse :

Franck Plouraboué (DR, CNRS, IMFT) : Directeur

Charles Pierre (IR, UPPA, Pau) : Co-directeur

Rapporteurs :

Mejdi Azaiez (Prof., TREFLE, Bordeaux)

Patrice Flaud (Prof., LMSC, Paris)

Membres du jury :

Alain Bergeon (Prof., IMFT, UPS) : Examineur

Jérôme Fehrenbach (MdC, UPS) : Invité

Frédéric de Gournay (MdC, INSA, UPS) : Invité

Aziz Hamdouni (Prof., LEPTIAB, La Rochelle) : Président

Shihe Xin (Prof., CETHIL, INSA, Lyon) : Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier en premier Franck et Charles. Tout d'abord sur l'aspect scientifique, pour m'avoir fait découvrir et partager leur vision du monde de la recherche, pour tout ce qu'ils m'ont transmis et enseigné. Ensuite sur l'aspect humain où il a été agréable de travailler avec eux, toujours dans une bonne ambiance et de m'avoir fait confiance, dans les bons comme les mauvais moments.

Je remercie les enseignants du département de Mécanique de l'UPS. Ce sont eux qui m'ont donné l'envie de continuer en thèse. Je pense que nous avons la chance d'avoir une bonne formation (oui oui, une bonne formation à la fac!) et j'espère que cela continuera. Je remercie aussi le personnel du département pour leur disponibilité et leur bonne humeur permanente : Catherine Bouteillier et Patrick Huelmo (Mr Moustache).

Je remercie les gens du groupe PSC pour m'avoir aussi bien accueilli et pour la bonne ambiance qui y règne : Adrien numéro 1 et numéro 3, Ali, Amine, Blaise, Mr Creppy, Daniel, Enrica, Jorge, Laurent, Olivier, Romain, Thomas, Zafer. Mention spéciale au groupe des coincheurs pour m'avoir initié à cet noble art!

Merci aussi à mes collègues de bureau : Adrien numéro 2/La Mascotte (ne change rien!), Anne, Alexis Le Viel, Eric, Mehdi, Hakim. Merci à Romain pour son aide et ses conseils ainsi que d'avoir mis de l'animation avec ses colères!

Merci aux secrétaires et autre personnel de l'IMFT : Suzy Bernard, Florence Colombies, Céline Perles-Picotto, Sandrine Chupin et Muriel Sabater.

Je remercie, dans un premier temps, la machine à café de l'IMFT et, dans un second temps et quand cette dernière a commencé à me revenir trop chère, la cafetière du groupe PSC!

Je remercie Bob Lennon et Fanta pour m'avoir fait autant rire pendant la rédaction, à Mr Goz pour sa French touch **** madre!

Je remercie les gens de l'ASL pour les moments et les matchs à leurs côtés. J'espère qu'il y en aura de nouveau.

Je remercie mes amis qui m'ont rappelé qu'il n'y avait pas que la thèse quand j'étais en thèse (!) : Cédric, Benoit, Benjamin, David, Paul, Marie Charlotte, Gerardo, Bafétigué, Aurore, Sabine, Aude, Raphael, Richard, Fanny, Aurianne, Laurence, Cécile, Cécilia, Rémi.

Je remercie Mélanie pour m'avoir supporté. Merci pour tout.

Enfin je remercie ma famille pour leurs soutiens permanents : Papa, Maman, Emilie, Lazreg, Mémé Chameau, et avec une mention spéciale là aussi (sinon je vais me faire tuer!) à Lucile/Lutile/Util et Sylvain. Là aussi merci pour tout.

Enfin je dédie ce manuscrit à la mémoire de Réné, Odette et Michel.

No pain, no gain.

Résumé

Ces travaux s'intéressent aux questions de transports non stationnaires et de transferts stationnaires de chaleur et de masse par convection-diffusion au sein de géométries complexes.

Par complexe, nous entendons d'une part pour le transport que le fluide est convecté au sein d'une cavité de section quelconque lentement variable dans la direction longitudinale, c'est à dire ayant des variations longitudinales grandes devant hauteur et largeur moyennes. Nous considérons d'autre part le transfert au sein de domaines non-axisymétriques dans lesquels sont plongés un ou plusieurs tubes où le fluide porteur s'écoule .

Pour ce qui concerne le transfert, ce travail a consisté à montrer comment étendre le principe, valider l'utilisation, et illustrer l'efficacité d'une décomposition en mode de Graetz pour la prédiction des échanges dans des configurations réalistes d'échangeurs. Cette décomposition permet de formuler le problème initial 3D comme un problème aux valeurs propres généralisées en 2D dont la résolution numérique est drastiquement moins coûteuse.

Nous généralisons la notion de mode de Graetz à des conditions aux limites latérales quelconques et, en particulier pour le cas d'échangeurs équilibrés où nous avons mis en évidence un nouveau mode linéairement variables dans la direction longitudinale.

Nous mettons en oeuvre le calcul de ces modes de Graetz dans le cas de configurations semi-infinies pour traiter, par exemple, des configurations transversalement périodiques (types plancher chauffant) et montrons qu'un faible nombre de modes suffit pour donner une très bonne approximation des transferts.

Dans le cas d'échangeurs finis couplé avec des tubes en entrée/sortie, nous montrons comment déterminer les amplitudes des modes de Graetz dans les différents domaines par la minimisation d'une fonctionnelle associée aux conditions d'entrée sorties retenues. Ces modes permettent l'étude paramétrique systématique des champs de température, des flux de chaleurs entre les domaines fluides et solides ainsi que des rendements thermiques d'un échangeur à deux tubes. Nos résultats indiquent que la longueur d'échange caractéristique est gouvernée par le premier mode de Graetz généralisé à grand nombre de Péclet. Nous montrons aussi, en particulier, qu'un échangeur symétrique possède un spectre symétrique, et une évolution amont/aval symétrique.

Dans le cas de la dispersion de Taylor, nous avons établi une forme conservative 3D des équations de dispersion de Taylor en géométrie variable généralisant le cas 2D déjà connu. Nous avons ensuite implémenté en éléments finis puis validé numériquement ces équations de dispersion en 2D et 3D. Nous montrons que les variations longitudinales 3D de la cavité peuvent considérablement augmenter la dispersion longitudinale.

Abstract

This work interest is about stationary transfer and non-stationary transport by convection-diffusion onto complex geometries.

For transport issues, complex refers to convection into flattened cavity of arbitrary transverse shape, slowly varying along the longitudinal direction. In the context of transfer, complex refers to non-axisymmetric domains of arbitrary transverse shape along which one or several parallel tubes convect heat or mass.

For the transfer problem, this work extends the principle, validates the use, and illustrates the efficiency of Graetz modes decompositions for exchanges prediction in realistic exchangers configurations. This decomposition permits to formulate the initial 3D problem as a generalised 2D eigenvalue problem, the numerical evaluation of which is drastically reduced.

We generalize Graetz modes solutions for arbitrary applied lateral boundary conditions. In the particular case of balanced exchangers, we bring to the fore a new neutral mode whose longitudinal variations are linear as opposed to classical Graetz modes displaying exponential decay. The numerical computation of those modes for semi-infinite configurations with lateral periodic boundary conditions shows that a few number of those provides a very good approximation for exchanges.

In the case of finite exchangers coupled with inlet/outlet tubes, we show how to evaluate the amplitudes of Graetz modes in the various domains (inlet, exchanger, outlet) from functional minimization associated with input/output boundary conditions. The evaluation of these amplitudes permit a systematic parametric study of temperature fields, heat fluxes between fluid and solid, and hot/cold performance of a couple-tube exchanger. Our results indicate that the typical exchange length is governed by the first Graetz mode at large Péclet number. We also show that a symmetric exchanger has a symmetric spectrum and a upward/backward symmetric evolution.

In the case transport we elaborate theoretically the conservative form of 3D Taylor dispersion equations into variable cavities which generalizes the framework already known in 2D. We numerically implement these averaged dispersion equations with finite element, and validate in 2D the obtained results. We show that 3D longitudinal variations of a cavity has a strong impact on the longitudinal dispersion.

Table des matières

1	Introduction générale	13
1.1	Introduction générale	13
1.2	Contexte bibliographique du transfert couplé stationnaire	15
1.3	Contexte bibliographique du transport instationnaire et de la dispersion de Taylor	18
1.4	Organisation du manuscrit	19
	Bibliographie	21
2	État de l'art et méthodologie	25
2.1	Introduction au problème de Graetz classique	25
2.2	Le problème physique	28
2.3	Le problème de Graetz généralisé	29
2.3.1	Reformulation	29
2.3.2	Application : cas d'un tube infini, condition latérale Dirichlet de type saut	31
2.4	Tubes semi-infinis et finis avec condition d'entrée/sortie Dirichlet	32
2.4.1	Tubes semi-infinis	32
2.4.2	Tubes finis	33
2.4.3	Calcul des modes de Graetz généralisés	35
	Bibliographie	37
3	Extension à des condition limites latérales générales	39
3.1	Introduction	39
3.1.1	Problème physique et état de l'art	39
3.1.2	Analyse spectrale	40
3.1.3	Principe de résolution dans le cas Neumann	42
3.2	Cas Neumann avec $Q \neq 0$	44
3.2.1	Tube infini	44
3.2.2	Tube semi-infini	45
3.3	Cas Neumann avec $Q = 0$	47
3.3.1	Tube infini	47
3.3.2	Tube semi-infini	49
3.4	Résultats numériques	50
3.4.1	Configuration axisymétrique	50
3.4.2	Configuration périodique	53
3.4.3	Configuration contre-courant	55
3.5	Article en cours de soumission	57
	Bibliographie	58

4	Extensions à des conditions aux limites entrée/sortie générales	93
4.1	Introduction	93
4.2	Méthode de résolution	95
4.2.1	Conditions d'entrée/sortie prescrites : domaine semi-infini	96
4.2.2	Conditions d'entrée/sortie prescrites : domaine fini	98
4.2.3	Échangeur fini couplé en aval avec un tube semi-infini	100
4.2.4	Échangeur fini couplé en aval et en amont avec un tube semi-infini	103
4.2.5	Cas général	106
4.2.6	Convergence spectrale	107
4.3	Illustrations numériques	109
4.3.1	Formulation du problème discret	110
4.3.2	Tube fini couplé avec un tube semi-infini aval	110
4.3.3	Tube fini couplé avec un tube semi-infini en amont et en aval	113
4.3.4	Échangeur couplé	114
	Bibliographie	128
5	Dispersion de Taylor en domaine confiné 3D	129
5.1	Introduction	129
5.2	Dérivation théorique des équations	130
5.2.1	Champs de vitesse : hypothèse de lubrification	130
5.2.2	Étude de l'influence de la variation des parois : canal $2D$ de hauteur variable	132
5.2.3	Problème tridimensionnel	136
5.3	Modélisation numérique et validation	140
5.3.1	Modélisation numérique	140
5.3.2	Validation	143
5.4	Résultats et perspectives	145
5.4.1	Canal bidimensionnel	146
5.4.2	Canal tridimensionnel	149
5.4.3	Conclusions et perspectives	151
	Bibliographie	153
6	Conclusions et perspectives	155

Chapitre 1

Introduction générale

Contents

1.1	Introduction générale	13
1.2	Contexte bibliographique du transfert couplé stationnaire . .	15
1.3	Contexte bibliographique du transport instationnaire et de la dispersion de Taylor	18
1.4	Organisation du manuscrit	19
	Bibliographie	21

1.1 Introduction générale

Dans ces travaux de thèse nous allons nous intéresser aux problèmes de transports de chaleur et de masse par couplage de phénomènes convecto-diffusifs en régime stationnaire et instationnaire dans des géométries complexes. Pour cela, nous avons partagé notre travail en deux parties. La première, plus importante, constituant la majeure partie de ma thèse, porte sur le problème de Graetz généralisé qui concerne le transfert de chaleur en régime stationnaire. La seconde partie, plus réduite, fait suite à mon travail en Master 2 Recherche et porte sur le phénomène de dispersion de Taylor qui traite des problèmes de transports en régime instationnaire.

Ces deux problèmes sont différents, mais ils ont cependant des points communs. Tout d’abord, ceux sont tous les deux des problèmes de transport qui font intervenir un couplage entre les phénomènes convectifs et diffusifs. De plus pour ces deux problèmes, les configurations géométriques sont complexes.

En effet, d’une part, dans le cas du problème de Graetz nous allons considérer des géométries tridimensionnelles tubulaires dans lesquels des transferts couplés s’effectuent entre un solide et un fluide, dans des configurations non-axisymétriques, possiblement compliquées et de contour quelconque.

D’autre part, pour le transport instationnaire associé au phénomène de dispersion de Taylor, nous considérons des cavités tridimensionnelles de forme quelconque et pas forcément invariantes dans la direction de l’écoulement moyen, comme cela a souvent été le cas dans la littérature et comme nous le discuterons plus loin. Cette complexité géométrique appelle des méthodologies adaptées pour simplifier, modéliser et approximer les phénomènes de transfert.

La méthodologie que nous allons utiliser, dans les deux cas, consiste à rechercher une réduction de dimensions spatiales permettant de ramener l’étude de problèmes tridimen-

sionnels à des formulations bidimensionnelles. Cette réduction de dimensionnalité permet, dans les deux cas, de mener des études paramétriques systématiques *via* la résolution numérique de problèmes implémentés en éléments finis avec le code FreeFem++, avec une grande souplesse et un coût de calcul modeste.

Cependant cette réduction de dimension n'est pas effectuée avec les mêmes méthodes et les mêmes conséquences dans les deux cas.

Dans le cas du transport stationnaire en géométries parallèles, les modes de Graetz, qui sont des solutions exactes de problèmes invariants dans la direction longitudinale, permettent d'établir analytiquement la dépendance longitudinale de la solution. Par exemple, dans le problème initial de Graetz dans un tube, qui considère le transfert stationnaire dans un tube isolé dont le profil de vitesse est parabolique et en négligeant la diffusion longitudinale, nous verrons que la solution du champ de température possède une dépendance exponentiellement décroissante suivant la coordonnée longitudinale. Cette caractéristique permet de traiter ce problème d'une façon bidimensionnelle, puisque l'étude des fonctions propres se restreint alors à une coupe dans la géométrie tubulaire considérée.

De manière générale, nous allons voir que cette réduction bidimensionnelle est possible dans le cadre d'une représentation mathématique complète de la solution même si, en pratique, seul un nombre de modes fini peut être considéré. Il y aura donc une approximation de la solution théorique par troncature des modes spatiaux.

Dans le cas de la dispersion de Taylor, une large littérature (que nous détaillerons plus loin) a montré que les équations moyennes que nous établissons au chapitre 5 ne sont valables qu'aux temps longs. Des travaux récents [1], dont la discussion détaillée dépassent largement le cadre de cette introduction, ont cependant montré que dans des configurations simples (un tube), la description aux temps longs utilisée par Taylor [2] peut être justifiée dans le cadre des théories de la réduction à la variété centrale, impliquant la troncature de modes rapides "esclaves" pour décrire préférentiellement l'évolution lente d'un mode "maître". Cette troncature des modes temporels est une justification récente de la dérivation initiale de Taylor qui apporte un lien méthodologique aux deux approches distinctes présentées dans cette thèse. Elle permet de mieux appréhender la validité, souvent évoquée, rarement justifiée, de l'approximation "aux temps longs" des équations de dispersion de Taylor.

Cependant, nous ne développerons pas plus loin ce parallèle, et travaillerons, sur les deux problèmes avec deux approches distinctes, chacune adaptée au contexte considéré.

Concernant le problème de dispersion, nous allons ainsi utiliser l'approximation de Taylor qui consiste à décomposer les grandeurs physiques (vitesse, concentration) en moyenne (suivant la coordonnée qui décrit la hauteur de la cavité dans laquelle se disperse le traceur) et fluctuation. Les équations moyennes dérivées "à la Taylor" portent sur des quantités qui ne dépendent plus que des coordonnées transversales, et peuvent permettre de déterminer l'évolution spatio-temporelle 2D+temps de la concentration moyenne. Cette réduction 3D+temps \rightarrow 2D+temps permet un gain de temps important lors de la résolution numérique. En effet, les équations moyennes obtenues présentent un caractère générique, de sorte que différentes configurations géométriques, conditions limites, régimes hydrodynamiques peuvent être explorés par le balayage systématique des différentes gammes de paramètres.

La suite de cette introduction détaille le contexte bibliographique précis de ce travail sur chacun de ces deux sujets. En dernière partie de cette introduction, nous aborderons l'organisation du manuscrit.

1.2 Contexte bibliographique du transfert couplé stationnaire

Une grande partie de ces travaux de thèse concerne l'étude du problème de Graetz dans le but de la modélisation des échangeurs thermiques convectifs. Les échangeurs thermiques sont omniprésents dans de nombreux processus industriels où la chaleur doit être récupérée, ou bien inversement, transférée d'un fluide à un autre. Les applications associées sont le chauffage ou le refroidissement de systèmes, mais aussi d'autres procédés tels que la pasteurisation, la cristallisation, la distillation, l'agrégation ou la séparation de substances [3–5]. De façon similaire, les échangeurs de matières et de chaleurs sont importants au sein d'organes biologiques comme les reins et les muscles mais aussi pour des applications biotechnologiques telles que les appareils d'hémodialyses [6], d'hémofiltrations ou bien dans les systèmes d'oxygénation extra-corporelle.

Autant pour les échangeurs de matière que dans le contexte thermique, les échanges sont le résultat d'un processus qui couple les phénomènes de convection et de diffusion n'impliquant aucun contact direct entre le fluide entrant et le fluide sortant pour des raisons évidentes de contaminations. Il est possible de trouver de nombreux exemples industriels de tels appareils comme les radiateurs, les condensateurs, les évaporateurs, les appareils de préchauffage de l'air, les cellules de refroidissement telles que les membranes d'oxygénation extra-corporelle et les micro-filtres pour le sang [7]. On trouve dans les échangeurs une configuration générique, bien que non systématique, qui est celle des écoulements parallèles. C'est cette classe d'échangeurs que nous allons considérer, avec l'hypothèse où il n'y a pas de variations longitudinales de la vitesse le long de l'échangeur.

Ce type d'échangeurs a été étudié depuis longtemps par la communauté des thermiciens. Un important corpus de modélisation existe sur l'élaboration et le design des échangeurs thermiques basée sur des bilans locaux permettant de dériver des modèles uni-(ou parfois multi)-dimensionnels, comme longuement détaillé dans le livre [3]. Ce type de méthodes qui sont des généralisations multidimensionnelles de modèles de résistances thermiques locales n'ont cependant pas d'assise théorique forte, bien qu'ils permettent des dimensionnements utiles pour les applications et relativement efficaces. Ces modèles, sont a priori valides lorsque les parois solides entre les sections fluides convectives sont peu épaisses et sont parfois appelés "fin analysis method" dans la littérature. La précision médiocre de leurs prédictions peut souvent être compensée par le calage expérimental de certains paramètres [8, 9].

En dehors des prédictions proposées dans ces modèles, des travaux expérimentaux ont aussi permis d'évaluer directement l'effet des couplages transverses entre fluide et solide. Dans le cadre de l'analyse du transfert dans les microcanaux avec différents éléments chauffants, des dimensions variées ainsi que des fluides porteurs différents ont été fabriqués et testés expérimentalement, comme détaillé en [8] ou dans les travaux de [10–15].

Depuis la fin des années 1980 d'autres approches ont pris le relais, basées sur le calcul numérique des systèmes complets parmi lesquels on peut par exemple citer [16–18]. Ces travaux de simulations sont parfois menés en parallèle avec des validations expérimentales [19, 20]. Wesberg et al. [16] ont, par exemple, considéré une simulation numérique 2D pleinement développée thermiquement et hydrodynamiquement, dans un microcanal. Fedorov and Viskanta [17] ont effectué des calculs 3D sans l'approximation d'un régime pleinement

développé. Plus récemment, des simulations 3D par différences finies ont été menées [19] afin de modéliser les échanges pour un canal de section rectangulaire. Le chauffage par le bas du solide dans lequel est plongé ce canal est modélisé par un flux uniforme. Les autres conditions aux limites sont un flux latéralement adiabatique, un profil de température imposé en entrée fluide, et des conditions de diffusions longitudinales nulles imposées en sortie fluide. Ces simulations ont été comparées avec succès à des mesures expérimentales en [19], ce qui valide a posteriori l'intérêt et la validité des conditions aux limites choisies. Des hypothèses et résultats similaires ont aussi été obtenus dans des canaux parallèles [14, 20]. Dans les deux cas [14, 19, 20], les profils de température, le flux et le nombre de Nusselt (le flux adimensionné par la température moyenne) calculés montrent une variation rapide en entrée qui relaxe sur quelques sections des canaux fluides, dans la direction longitudinale, vers une valeur constante. Ces résultats indiquent, par analogie avec le modèle de Graetz, qu'il semble aussi exister une distance longitudinale typique sur laquelle les principaux échanges se produisent dans ce type de configuration.

En effet, dans le modèle de Graetz, il existe une infinité de modes de relaxation exponentielle de la température. Cependant, au bout d'une certaine distance de l'entrée, seul le premier mode de relaxation exponentielle de la température persiste : c'est ce que l'on appelle le régime pleinement développé de Graetz. On peut alors montrer que les échanges, dans le tube, vont aussi principalement s'effectuer sur une distance ℓ de l'ordre de l'inverse de la première valeur propre de Graetz $\ell \sim 1/\lambda_1$. En présence d'un chauffage uniforme comme dans [19, 20], un transfert constant (et faible vis à vis de qu'il peut être dans la région d'entrée) va persister, dans la direction longitudinale, au-delà de $\ell \sim 1/\lambda_1$. Ainsi, si l'analogie avec le problème de Graetz est correcte, la performance d'un échangeur, sera fortement reliée au rapport entre la longueur longitudinale de celui-ci et une certaine longueur caractéristique qu'il faudrait être capable de calculer.

Un des principaux buts de ce travail de thèse est de montrer que cette analogie est parfaitement justifiée, de détailler les raisons mathématiques qui justifient une telle extension, de proposer les formulations numériques et d'implémenter les méthodes qui permettent de calculer ces modes de Graetz généralisés dans des configurations complexes d'échangeurs. Bien que des solutions numériques alternatives à la décomposition spectrale en modes de Graetz proposées dans ce travail soient aujourd'hui possibles par des calculs 3D en différences finies ou éléments finis, il y a un avantage certain à une telle approche. En premier lieu, elle permet de réduire la dimension du problème de 3D à 2D. En second lieu, elle apporte des informations clés sur les modes et longueurs caractéristiques qui permettent a priori de beaucoup mieux anticiper les dimensionnements et optimiser des échangeurs complexes.

La recherche de configurations optimales pour les échangeurs parallèles est un problème qui a attiré l'attention de nombreux auteurs [3–6, 21–28] car elle a un intérêt applicatif fort. Cependant, la plupart de ces travaux recherchent des configurations optimales par des études paramétriques systématiques, et pas par une optimisation numérique à partir du calcul de déformations infinitésimales des configurations. L'étude paramétrique que nous menons dans le chapitre 4 se fait d'ailleurs dans cet esprit. Mais il est intéressant de mentionner que la décomposition en modes de Graetz généralisés offre d'autres perspectives pour l'élaboration de stratégies de déformations plus modernes et performantes, comme cela a été récemment étudié dans [29].

Dans des travaux précédents, une décomposition similaire à la décomposition de Graetz a été utilisée pour résoudre des transferts stationnaires dans des échangeurs [22, 30–32]. Ap-

plier la décomposition de Graetz permet d'obtenir des solutions élégantes et compactes. De plus, la famille de modes exponentiellement décroissants obtenue permet d'établir une hiérarchie de ces modes dans le cas de configurations pleinement développées [30]. Cependant, il existe un certain nombre de limitations qui empêchent l'utilisation systématique et intensive d'une telle décomposition dans le cas de configurations plus réalistes :

1. Il est plus simple d'utiliser cette décomposition dans le cas de situations où les effets convectifs dominant (le nombre de Péclet est élevé) [22, 30]
2. L'utilisation de cette décomposition a été restreinte à des configurations bidimensionnelles [22, 33] ou concentriques [30, 32, 33]
3. Cette configuration a été utilisée seulement pour des conditions aux limites latérales imposées de type Dirichlet constantes ou constantes par morceaux [31, 32] ou de type Neumann homogène adiabatique [30].
4. Les conditions d'entrée/sortie sont généralement considérées comme des champs de température uniforme [22, 30–32] sans pour autant considérer le possible couplage entre les conditions d'entrée et sortie.

La limitation (1) peut être dépassée en considérant le "jeu" approprié de modes orthogonaux comme l'a noté en premier [34], si bien que la diffusion axiale peut être incluse dans le cas de problèmes co-courant ou contre-courant. Néanmoins, la limitation (2) a été dépassée seulement récemment par [35] pour des échangeurs infinis avec des conditions latérales de type Dirichlet ou bien encore dans le cas d'échangeurs de taille finie par [36], là encore pour des conditions limites de type Dirichlet homogène sur la surface externe solide.

Nous voulons par ces travaux contribuer à surmonter la restriction (3). Dans le chapitre 3, nous allons fournir la théorie mathématique nécessaire pour permettre l'utilisation de la décomposition de Graetz généralisée pour des conditions latérales quelconques. Pour comprendre que la restriction (3) est importante pour les applications, il est intéressant de mentionner que la littérature sur les "heat-pipes" a considéré un certain nombre de conditions aux limites latérales [32–34, 37–39].

Parmi celles-ci citons, un profil uniforme de température dans les directions transverses et longitudinales, ou bien un profil uniforme le long de la direction longitudinale seulement, des conditions aux limites radiatives, un flux uniforme ou exponentiellement décroissant suivant la coordonnée longitudinale. Il est intéressant de mentionner que cette dernière condition au limite permet de prendre en compte une partie du couplage convecto-diffusif entre le fluide et le solide, décrit par les modes de Graetz pleinement développés qui sont justement des solutions exponentiellement décroissantes [40, 41].

Par conséquent, chacune des conditions nécessite un traitement théorique au cas par cas sans aucun cadre théorique généraliste qui puisse décrire le couplage complet entre la convection au sein du fluide et la diffusion dans la partie solide.

Dans ce travail, nous tâchons de fournir un tel cadre théorique pour n'importe quel "jeu" de profil de température prescrit ou de flux appliqué sur la frontière externe solide de l'échangeur. Ces travaux sont l'extension de deux précédentes contributions qui ont permis de généraliser la décomposition standard de Graetz des modes propres à n'importe quelle configuration possible suivant la direction transverse, tandis qu'il y a invariance longitudinale, et qui sont détaillées au chapitre 2.

1.3 Contexte bibliographique du transport instationnaire et de la dispersion de Taylor

Le mélange d'un traceur dans un écoulement fluide confiné au sein d'une cavité est régi par le phénomène de dispersion de Taylor. Ce mécanisme de mélange est le plus commun pour ce genre de configurations. Il résulte de la combinaison des effets de la convection longitudinale du fluide avec la diffusion moléculaire du traceur par rapport à la direction transversale à l'écoulement. Comprendre et quantifier ce phénomène est important dans la mesure où les applications faisant intervenir la dispersion d'une substance dans un écoulement au sein d'un canal ou d'une autre géométrie sont nombreuses et importantes : micromélangeurs, micropompes, processus de séparation tel que la chromatographie et séquençage de l'ADN [42], convection de chaleur dans des canaux confinés, transport de nutriments dans les vaisseaux sanguins, dispersion dans les milieux poreux, propagation d'un contaminant dans les nappes phréatiques, écoulement au sein de fracture...

G.I. Taylor fut l'un des premiers à étudier le phénomène de dispersion d'un soluté dans un écoulement stationnaire au sein d'un tube, mettant ainsi en évidence le phénomène portant son nom [2]. De ces travaux ont émergé un grand nombre d'études balayant différentes configurations hydrodynamiques visant à montrer l'impact sur la dispersion du traceur au travers de son coefficient de dispersion effectif. Cette littérature est tellement abondante qu'il serait utopique de viser à l'exhaustivité bibliographique mais nous tenterons plutôt de cibler notre attention sur les références les plus directement reliées à nos préoccupations. Ainsi, Aris ajouta à l'écoulement de base stationnaire utilisé par Taylor un écoulement pulsé, et montre que l'oscillation change faiblement le coefficient de dispersion [43]. Smith [44] considère, quand à lui, l'influence de plusieurs modes oscillants. Il montre que le coefficient de dispersion apparent peut devenir négatif quand le temps de diffusion moléculaire transverse est plus faible qu'une période d'oscillation. Chatwin [45] traite également le cas d'écoulements oscillants. Il montre que le coefficient effectif de diffusion est une fonction qui comprend des termes harmoniques en temps. Ces derniers peuvent avoir un effet notable sur la dispersion dans des cas particuliers. Bowden [46] s'intéresse aux écoulements cisailés en milieu ouvert dans le cas des mers et océans. Il montre que les courants de marée génèrent une diffusion effective horizontale par combinaison des gradients verticaux des champs de vitesse et de la turbulence verticale. Suivant les gradients de densité mis en jeu, cette dispersion peut être importante. D'autres auteurs se sont intéressés à l'influence de la géométrie du domaine sur la dispersion du traceur. Ainsi on retrouve de nombreux travaux portant sur des tubes [2, 43, 47, 48], des canaux invariants longitudinalement [49, 50], [51] des canaux rectangulaires [52, 53] ou des canaux longitudinalement variables [1]. Rosencrans [51] montre qu'il existe des configurations de canaux plats à bord variables qui diminuent la dispersion effective plutôt qu'ils ne l'augmentent, contrairement à l'effet souhaité de la dispersion de Taylor. On trouve aussi nombre d'études sur des milieux poreux périodiques parmi lesquelles [54, 55] ainsi que sur des canaux convergents et divergents [1, 56, 57].

Certains travaux [49, 51] ont montré que des variations, mêmes faibles, des bords extérieurs du domaine transverses à l'écoulement pouvaient modifier fortement le coefficient effectif de dispersion dans le cas d'un canal longitudinalement invariant. Cela peut être expliqué par les variations de la vitesse au sein des couches limites qui se développent près des parois. Comme le traceur est piégé dans ces zones de stagnation, il peut fortement aug-

menter la queue de distribution de la concentration aux temps longs, donc influencer la variance et donc la dispersion apparente.

Il apparaît donc que les variations de l'épaisseur d'un canal peut influer dans la dispersion du traceur et donc jouer un rôle dans la dispersion de Taylor.

C'est dans ce cadre que s'inscrit cette contribution à la dispersion de Taylor. Notre but est de comprendre comment la dispersion longitudinale, et éventuellement la dispersion transverse, peuvent être affectées par la forme variable d'un canal dont la section transverse, et la hauteur varient dans la direction longitudinale.

1.4 Organisation du manuscrit

Dans ce document, nous allons privilégier, dans la rédaction, la description des résultats théoriques et leurs applications numériques plutôt que la dérivation mathématique complète de ces résultats. Nous renvoyons le lecteur à consulter les différents travaux établissant ces preuves qui sont rédigés dans les publications soumises où en cours de soumission en fin des chapitres trois et quatre.

Le second chapitre a pour but de préparer les concepts et les outils qui seront utilisés dans les chapitres ultérieurs. Nous traitons, pour commencer, le problème de transfert stationnaire dans un tube cylindrique que l'on appelle le problème de Graetz par une discussion précise de l'état de l'art sur lequel ce travail est fondé. Ceci nous permettra de mettre en place le formalisme mathématique donnant, entre autre, l'expression du champ de température et les flux de chaleurs échangés dans des configurations tubulaires infinies, semi-infinies et finies à l'aide de ce que nous appellerons, par la suite, une représentation par décomposition sur les modes de Gaetz généralisés. A la fin de ce second chapitre, nous décrirons la formulation variationnelle associée que nous avons implémentée avec l'outil éléments finis FreeFem++.

Dans le troisième chapitre, nous montrons comment étendre l'utilisation des modes de Graetz généralisés à des conditions latérales générales imposées à la périphérie des tubes, en fixant des conditions de Dirichlet en entrée/sortie. Des expressions théoriques sont établies pour des conditions de Dirichlet et Neumann non homogènes. Une attention particulière est portée sur le cas Neumann homogène. Ces études sont menées pour des tubes infinis, semi-infinis et finis. La convergence numérique des solutions est étudiée.

Dans le chapitre quatre nous étendons l'étude à des conditions d'entrée/sortie beaucoup plus générales. Une nouvelle stratégie pour le calcul des modes de Graetz généralisés est proposée à partir de la minimisation d'une fonctionnelle associée aux conditions d'entrée/sortie. On considère alors les configurations dans un ordre croissant de complexité, de la plus simple pour un échangeur fini avec conditions aux limites imposées au bord, à des couplages multiples avec des tubes amonts et aval. Le formalisme proposé et les systèmes linéaires qui en découlent sont détaillés à chaque étape. La convergence numérique est testée sur des cas de référence axisymétrique. La fin du chapitre montre l'application de la méthode à un échangeur contre-courant équilibré pour lequel nous mettons en évidence la dominance du premier mode de Graetz généralisé sur les variations longitudinales. Enfin, une étude paramétrique systématique est menée à la fois pour montrer l'efficacité de la méthode et pour explorer les caractéristiques complètes de l'échangeur

vis-à-vis des conditions d'entrées, des conditions hydrodynamiques, et des caractéristiques physiques considérées.

Le dernier chapitre aborde le phénomène de dispersion de Taylor dans des géométries complexes. Nous dérivons les équations aux temps longs par l'approche classique de Taylor, et discutons le cas 2D dans le cadre des précédentes contributions de la littérature. Nous implémentons ensuite les équations moyennes par une formulation éléments finis dotée d'un schéma en temps du premier ordre. Nous validons le choix de discrétisation spatio-temporelle pour des géométries bidimensionnelles. Enfin, nous montrons des résultats pour le cas tridimensionnel.

Bibliographie

- [1] G. Mercer and A. Roberts. A centre manifold description of contaminant dispersion in channels with varying flow properties. *SIAM J. Appl. Math.*, **50**(6) :1547–1565, 1990.
- [2] G. I. Taylor. Dispersion of a solute matter in solvent flowing slowly through a pipe. *Proc. R. Soc. London A*, **219** :186–203, 1953.
- [3] R. K. Shah and P. D. Sekulić. *Fundamentals of heat exchanger design*. John Wiley and Sons, New Jersey, 2003.
- [4] C. D. Ho, H. M. Yeh, and W. Y. Yang. Improvement in performance on laminar counterflow concentric circular heat exchangers with external refluxes. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **45** :3559–3569, 2002.
- [5] C. D. Ho, H. M. Yeh, and W. Y. Yang. Double-pass flow heat transfer in a circular conduit by inserting a concentric tube for improved performance. *Chem. Eng. Comm.*, **192** :237–255, 2005.
- [6] C. Gostoli and A. Gatta. Mass transfer in a hollow fiber dialyzer. *Journal of Membrane Science*, **6**(0) :133 – 148, 1980.
- [7] X. Chen, D. F. Cui, C. Chun Liu, and H. Li. Microfluidic chip for blood cell separation and collection based on crossflow filtration. *Sensors and Actuators B : Chemical*, **130**(1) :216 – 221, 2008.
- [8] R. J. Phillips. *Microchannel heat sinks*, volume **2**, pages 109–184. ASME Press, New York, 1990.
- [9] Y. Peles, A. Kosar, C. Mishra, C.-J. Kuo, and B. Schneider. Forced convective heat transfer across a pin fin micro heat sink. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **48**(17) :3615 – 3627, 2005.
- [10] T. M. Harms, M. J. Kazmierczak, F. M. Cernerand, A. Holkeand, H. T. Henderso-nand, J. Pilchowskiand, and K. Baker. Experimental investigation of heat transfer and pressure drop through deep microchannels in a silicon substrate. In *Proceedings of the ASME Heat Transfer Division*, pages 347–357. ASME Heat Transfer Division, 1997.
- [11] M. M. Rahman and F. Gui. Experimental measurements of fluid flow and heat transfer in microchannel cooling passages in a chip substrate. *Adv. Electron. Packaging ASME EEP-4*, **54**(12) :495–506, 1993.
- [12] M. M. Rahman. Measurements of heat transfer in microchannel heat sinks. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **27**(4) :495 – 506, 2000.
- [13] K. Kawano, K. Minakami, H. Iwasaki, and M. Ishizuka. Micro channel heat exchanger for cooling electrical equipment. *Appl. Heat Transfer Equip.Syst. Educ.*, ASMEHTD :173–180, 1998.
- [14] P.-X. Jiang, M.-H. Fan, G.-S. Si, and Z.-P. Ren. Thermal-hydraulic performance of small scale micro-channel and porous-media heat-exchangers. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **44**(12) :1039–1051, 2001.
- [15] I. Tiselj, G. Hetsroni, B. Mavko, A. Mosyak, and E. Pogrebnyak. Effect of axial conduction on the heat transfer in micro-channels. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **47** :2551–2565, 2004.
- [16] A. Weisberg, H. H. Bau, and J. N. Zemel. Analysis of microchannels for integrated cooling. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **35** :2465–2474, 1992.

- [17] A.G. Fedorov and R. Viskanta. Three-dimensional conjugate heat transfer in the microchannel heat sink for electronic packaging. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **43** :399–415, 2000.
- [18] C. Hong, Y. Asako, and K. Suzuki. Convection heat transfer in concentric micro annular tubes with constant wall temperature. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **54**, number = 12, pages = "5242-5252", year = 2011,.
- [19] W. Qu and I. Mudawar. Experimental and numerical study of pressure drop and heat transfer in a single-phase micro-channel heat sink. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **45**(12) :2549–2565, 2002.
- [20] W. Qu and I. Mudawar. Analysis of three-dimensional heat transfer in microchannel heat sinks. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **45**(19) :3973–3985, 2005.
- [21] J. Kragh, J. Rose, T.R. Nielsen, and S. Svendsen. New counter flow heat exchanger designed for ventilation systems in cold climates. *Energy and Buildings*, **39** :1151–1158, 2007.
- [22] M. Vera and A. Li nán. Laminar counter flow parallel-plate heat exchangers : Exact and approximate solutions. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **53** :4885–4898, 2010.
- [23] R. J. Nunge and W. N. Gill. An analytical study of laminar counter flow double-pipe heat exchangers. *AIChE J.*, **12** :279–289, 1966.
- [24] R. J. Nunge and W. N. Gill. Analysis of heat or mass tranfer in some contercurrent flows. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **8** :873–886, 1965.
- [25] H. M. Yeh. Numerical analysis of mass transfer in double-pass parallel-plate dialyzers with external recycle. *Chem. Eng. Comm.*, **33** :815–821, 2009.
- [26] J.-W. Tu, C.-D. Ho, and C.-J. Chuang. Effect of ultrafiltration on the mass-transfer efficiency improvement in a parallel-plate countercurrent dialysis system. *Desalination*, **242** :70 – 83, 2009.
- [27] H. M. Yeh. Mass transfer in cross-flow parallel-plate dialyzer with internal recycle for improved performance. *Chem. Eng. Comm.*, **198** :1366–1379, 2011.
- [28] A. Iga, S. Nishiwaki, K. Izui, and M. Yoshimura. Topology optimization for thermal conductors considering design-dependent effects, including heat conduction and convection. *int.*
- [29] F. De Gournay, J. Ferhenbach, and F. Plouraboué. Shape optimization for the generalized graetz problem. *Submitted to ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2012.
- [30] C. D. Ho. An analytical study of laminar counterflow double-pass heat exchangers with external refluxes. *Chem. Eng. Comm.*, **43** :3263–3274, 2000.
- [31] B. Weigand, M. Kanzamar, and H. Beer. The extended Graetz problem with piecewise constant wall heat flux for pipe and channel flows. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **44** :3941–3952, 2001.
- [32] B. Weigand and F. Wrona. The extended Graetz problem with piecewise constant wall heat flux for laminar and turbulent flows inside concentric. *Heat and Mass Transfer*, **39** :1432–1181, 2003.
- [33] A. S. Telles and E.M. Queiroz. Solutions of the extended Graetz problem. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **44** :471–483, 2000.
- [34] E. Papoutsakis, D. Ramkrishna, and H-C. Lim. The extended Graetz problem with Dirichlet wall boundary conditions. *Appl. Sci. Res.*, **36** :13–34, 1980.

- [35] C. Pierre and F. Plouraboué. Numerical analysis of a new mixed-formulation for eigenvalue convection-diffusion problems. *SIAM J. Appl. Math*, **70**(3) :658–676, 2009.
- [36] J. Fehrenbach, F. De Gournay, C. Pierre, and F. Plouraboué. The generalized graetz problem in finite domains. *SIAM J. Appl. Math*, **72**(1) :99–123, 2012.
- [37] R. K. Shah and A. L. London. *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. Academic Press Inc., New York, 1978.
- [38] B. Weigand and G. Gassner. The effect of wall conduction for the extended Graetz problem for laminar and turbulent channel flows. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **50** :1097–1105, 2007.
- [39] S. P. Mahulikar and C. P. Tso. A new classification for thermal development of fluid flow in a circular tube. *Proc. R. Soc. London A*, **458** :669–682, 2002.
- [40] L. Graetz. Über die wärmeleitungsfähigkeit von flüssigkeiten. *Annalen der Physik*, **261** :337–357, 1885.
- [41] W. Nusselt. Die abhängigkeit der wärmeübergangszahl von der rohrlänge. *Z. Ver. Deut. Ing.*, **54** :1154–1158, 1910.
- [42] H. Bruss. *Theoretical Microfluidics*. Oxford University Press, 2008.
- [43] R. Aris. On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube. *Proc. R. Soc. London A*, **235** :67–77, 1956.
- [44] R. Smith. Longitudinal dispersion coefficients for varying channels. *J. Fluid Mech.*, **130** :299–314, 1983.
- [45] P. C. Chatwin. On the longitudinal dispersion of passive contaminant in oscillatory flows in tubes. *J. Fluid Mech.*, **71** :513–527, 1975.
- [46] K. F. Bowden. Horizontal mixing in the sea due to a shearing current. *J. Fluid Mech.*, **21** :83–95, 1965.
- [47] R. Aris. On the dispersion of a solute in pulsating flow through a tube. *Proc. R. Soc. London A*, **259** :370–376, 1960.
- [48] P. C. Chatwin. The initial development of longitudinal dispersion in straight tubes. *J. Fluid Mech.*, **80**(01) :33–48, 1977.
- [49] A. Ajdari, N. Bontoux, and H. A. Stone. Hydrodynamic dispersion in shallow microchannels : the effect of cross-sectional shape. *Anal. Chem.*, **78** :387–392, 2006.
- [50] S. D. Watt and A. Roberts. The accurate dynamics modelling of contaminant dispersion in channel. *SIAM J. Appl. Math*, **55** :1016–1038, 1995.
- [51] S. Rosencrans. Taylor dispersion in curved channels. *SIAM J. Appl. Math*, **57** :1216–1241, 1997.
- [52] P. C. Chatwin and P. J. Sullivan. The effect of aspect ratio on longitudinal diffusivity in rectangular channels. *J. Fluid Mech.*, **120** :347–358, 1982.
- [53] M. R. Doshi, P. M. Daiya, and W. N. Gill. Three dimensional laminar dispersion in open and closed rectangular conduits. *Chemical Engineering Science*, **33**(7) :795 – 804, 1978.
- [54] J. Rubinstein and R. Mauri. Dispersion and convection in periodic porous media. *SIAM J. Appl. Math*, **46** :1018–1023, 1986.
- [55] J. L. Auriault and P. M. Adler. Taylor dispersion in porous media : Analysis by multiple scale expansions. *Advances in Water Resources*, **18** :217–226, 1995.

- [56] M. D. Bryden and H. Brenner. Multiple timescale analysis of taylor dispersion in converging and diverging flows. *J. Fluid Mech.*, **311** :343–359, 1986.
- [57] K. P. Selverov and H. Stone. Taylor dispersion in channels with constrictions. *Preprint*, 2002.

Chapitre 2

État de l'art et méthodologie

Contents

2.1	Introduction au problème de Graetz classique	25
2.2	Le problème physique	28
2.3	Le problème de Graetz généralisé	29
2.3.1	Reformulation	29
2.3.2	Application : cas d'un tube infini, condition latérale Dirichlet de type saut	31
2.4	Tubes semi-infinis et finis avec condition d'entrée/sortie Dirichlet	32
2.4.1	Tubes semi-infinis	32
2.4.2	Tubes finis	33
2.4.3	Calcul des modes de Graetz généralisés	35
	Bibliographie	37

2.1 Introduction au problème de Graetz classique

L'origine du problème de Graetz est l'étude de transferts de chaleur et l'établissement de profils de température d'un écoulement fluide laminaire en convection forcée dans une conduite/tube en régime stationnaire [1], [2]. La température de la paroi du tube est différente de celle à laquelle le fluide rentre, engendrant ainsi des échanges thermiques entre le fluide et la paroi. De plus, dans l'approximation historique de Graetz, la diffusion de la chaleur dans la direction de l'écoulement est négligée. Dans cette configuration on parle alors du problème de Graetz classique, relatif à des géométries axisymétriques (plans parallèles, tubes).

Il existe deux déclinaisons de cette forme classique, permettant ainsi de modéliser des problèmes de transferts de chaleur dans des cas applicatifs plus complexes.

La première est celle où l'on ne peut plus négliger la conduction thermique axiale. Le nombre de Péclet de l'écoulement est alors modeste (typiquement de l'ordre de l'unité), et les effets conductifs ne peuvent plus être négligés comparés aux effets convectifs dans les transferts thermiques. C'est par exemple le cas de métaux liquides, employés dans l'industrie sidérurgique durant les processus de formages, qui sont fortement visqueux et donc peu convectés. On parle alors de problème de Graetz étendu [3] [4] [5].

La seconde est celle où l'on juxtapose plusieurs tubes les uns à côté des autres, séparés par

un domaine solide, dans lesquels s'écoulent des fluides qui peuvent aller dans le même sens ou dans des directions opposées. On parle alors du problème de Graetz conjugué [6] [7] [8]. Cette situation est celle que l'on rencontre le plus souvent en pratique. Une des applications les plus importantes est celle des échangeurs thermiques que nous avons déjà abordés dans l'introduction.

Considérons le cas classique du problème de Graetz. On note r la coordonnée radiale et z la coordonnée longitudinale toutes deux adimensionnées par le rayon R d'un tube, $T(r, z)$ le champ de température adimensionné par une température de référence en entrée, et U la vitesse moyenne de convection qui sert à adimensionner la vitesse $v(r)$ dans la direction longitudinale z . L'équation de l'énergie s'écrit alors :

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r T) = Pe v(r) \partial_z T$$

où $Pe = 2UR/D$ est le nombre de Péclet de notre problème (le rapport entre le temps de diffusion thermique et le temps de convection thermique) et $v(r) = 2(1 - r^2)$ est la vitesse du fluide qui est, dans le cas choisi par Graetz, celle d'un profil parabolique de Poiseuille. Une méthode souvent utilisée pour décrire le champ de température dans la formulation classique du problème de Graetz est de chercher une solution à variables séparables, qui conduit à un champ de température exponentiellement variable dans la direction longitudinale :

$$T(r, z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda T_\lambda(r) e^{\lambda z} \quad (2.1)$$

Il faut alors déterminer les valeurs propres λ (qui appartiennent à \mathbb{R}^- pour conduire aux seules exponentielles décroissantes admissibles) et les fonctions propres T_λ pour pouvoir ensuite calculer classiquement [9] les coefficients associés aux amplitudes des modes c_λ .

Les modes T_λ vérifient alors :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_\lambda}{dr} \right) = \lambda v T_\lambda \quad (2.2)$$

ce qui permet la définition des fonctions propres et des valeurs propres. Les propriétés mathématiques du problème 2.2 justifient l'écriture sous la forme d'une somme du champ de température vu dans 2.1. Les coefficients c_λ peuvent être facilement déterminés en projetant la condition d'entrée en $z = 0$ notée $T_0(r)$ sur chacun des modes T_λ via le produit scalaire dans \mathcal{L}^2 :

$$c_\lambda = \int_0^R T_0 T_\lambda r dr \quad (2.3)$$

rendu possible par l'axisymétrie de T_0 .

Cependant ces différentes étapes ne sont plus réalisables lorsque l'on passe aux extensions du problème de Graetz. Si l'on considère le problème conjugué, il faut également prendre en compte l'équation de l'énergie au sein de la partie solide. Nous avons deux équations liées par des conditions de couplage aux interfaces des domaines fluides/solides. La première concerne la partie fluide :

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r T_\lambda) = \lambda Pe v \partial_z T_\lambda$$

et la seconde concerne la partie solide :

$$\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r T_\lambda) = -\lambda^2\partial_z T_\lambda$$

On voit donc apparaître une forme quadratique concernant les valeurs propres pour cette dernière équation. Le problème conjugué n'est alors plus un problème aux valeurs propres sur tout le domaine.

Concernant le problème étendu de Graetz, certaines propriétés mathématiques ne sont plus exactes, si bien que l'écriture de la solution (2.1) n'est plus possible. En effet, la conduction axiale permet la diffusion de chaleur pour $z < 0$ ce qui doit alors entraîner l'apparition de valeurs propres positives.

Nous avons donc dans les deux cas un problème pour trouver et définir les bonnes valeurs/fonctions propres qui permettent de décrire une solution du type (2.1).

De nombreux travaux sur les extensions du problème de Graetz s'affranchissent de cette difficulté et continuent de chercher des solutions à variables séparables [10, 11]. Ils rencontrent alors des difficultés pour calculer les coefficients c_λ et les fonctions propres qu'ils obtiennent ne sont plus orthogonales [3].

Certains choisissent alors de ré-orthogonaliser les fonctions propres obtenues lors du calcul numérique [12–14], mais cela peut conduire à des problèmes de convergence. Il se pose également la question de la condition d'entrée imposée T_0 . Elle est souvent considérée comme uniforme, ce qui n'est plus envisageable dans le cas du problème de Graetz étendu [15].

Les travaux de Papoutsakis and Ramakrishna [16–18] ont permis de lever certaines difficultés mentionnées ici dans le cas particulier d'un tube possédant une paroi solide. La méthode employée ajoute une inconnue au problème, le flux de température, permettant de définir un système de deux équations différentielles couplées du premier ordre. L'opérateur qui s'en dégage est auto-adjoint vis-à-vis d'un certain produit scalaire, ce qui a permis aux auteurs de justifier la présence d'un spectre discret sur \mathcal{R} dont les valeurs propres négatives et positives permettent de décrire des modes amonts et aval. Bien que cette méthode ait été employée dans différents travaux ultérieurs [19–21], il n'en reste pas moins que certaines propriétés mathématiques n'ont toujours pas été établies, pour pleinement justifier la décomposition du champ de température en (2.1), ce qui, dans la pratique, n'est cependant pas rédhibitoire. De plus, les solutions proposées prennent seulement en compte que des configurations géométriques symétriques et le cas conjugué reste lourd à traiter.

Ces points épineux ont été traités dans le travail de Pierre et Plouraboué [22]. Ces derniers utilisent en effet une idée proche de celle initialement proposée par Papoutsakis *et al.*, en rajoutant une inconnue au problème de Graetz généralisé pour le ramener à une équation du premier ordre écrite sur un nouvel opérateur. Cependant, le cadre théorique proposé par [22] est beaucoup plus large et permet d'envisager toute géométrie (suffisamment régulière), par exemple non-axisymétrique. Le grand avantage pratique de cette formulation est de permettre un calcul analytique de la dépendance longitudinale de la solution, sous forme d'exponentielles décroissantes dans le cas de conditions de Dirichlet aux bords latéraux considérés par [22]. Le problème numérique à traiter est alors ramené à un calcul

bidimensionnel. C'est dans ce cadre que nous allons nous placer par la suite pour étendre cette approche à des situations plus complexes et plus proches des applications, tout en permettant de réduire le problème 3D complet à une formulation 2D semi-analytique.

2.2 Le problème physique

Nous définissons dans cette section le problème physique général qui sera l'objet d'étude des chapitres 3 et 4.

Nous considérerons ici le problème du transport stationnaire de température T (ou de chaleur) dans un échangeur thermique par convection/diffusion.

La géométrie de l'échangeur sera du type $\Omega \times I$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ représente la section de l'échangeur (son extension transverse) tandis que $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle égal à son extension longitudinale. L'intervalle I sera soit borné, $I = (0, L)$, soit $I = (0, +\infty)$ soit $I = \mathbb{R}$ et l'on parlera respectivement de cas fini, semi-infini et infini.

Un point $M \in \Omega \times I$ a pour coordonnées $M = (\xi, z)$: la coordonnée longitudinale sera notée $z \in I$ alors que la coordonnée transverse sera notée par le vecteur $\xi = (x, y) \in \Omega$. Le gradient transverse ∇_ξ ainsi que la divergence transverse div_ξ seront simplement notés $\nabla = \nabla_\xi$ et $\text{div} = \text{div}_\xi$.

Nous faisons les hypothèses physiques suivantes sur la convection et la diffusion :

- La géométrie de l'échangeur est $\Omega \times I$. La section transverse Ω sera arbitraire, potentiellement composée de plusieurs phases fluides et solides, pouvant ainsi prendre en considération des écoulements co- ou contre-courant. L'extension longitudinale pourra soit être un intervalle fini $I = (0, L)$, soit semi-infini $I = (0, +\infty)$: on parlera respectivement de configuration finie et semi-infinie.
- La convection est décrite par le champ de vitesse $\mathbf{v} = v(\xi)\mathbf{e}_z$: nous considérons donc des écoulements laminaires pleinement établis et invariants dans la direction longitudinale. Ceci est compatible avec des configurations générales portant sur des écoulements de gaz ou de fluides dans des conduites de forme arbitraire (du type $\Omega \times I$). Par convention on prendra $v = 0$ dans les parties solides de l'échangeur. Mathématiquement, la seule restriction imposée à $v(\xi)$ sera d'être bornée. Par exemple pour un écoulement laminaire dans un tube cylindrique, et pour une large gamme du nombre de Reynolds, le champ de vitesse a une forme parabolique dite de Poiseuille. Pour des tubes de géométrie plus complexe, par exemple hexagonale comme dans [23], le champ de vitesse est prescrit par une simple équation elliptique décrivant le forçage de la vitesse longitudinale par le gradient de pression longitudinal, tel que présenté dans [24] :

$$\text{div}(\nabla v) = C$$

avec $C = \partial_z p / \mu$.

- La conductivité thermique k sera supposée isotrope (k est donc scalaire) et indépendante de z . Cependant k pourra varier dans la direction transverse, $k = k(\xi)$, avec pour seule contrainte mathématique que la fonction $k : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ soit bornée avec $k(\xi) \geq k_m > 0$. Typiquement k sera prise constante dans chacun des différents matériaux composant l'échangeur (conductivités des parties fluides et solides) mais sera possiblement discontinue à l'interface entre ces matériaux.

Sous ces hypothèses, l'équation constitutive pour le problème de convection diffusion stationnaire dans l'échangeur est la suivante :

$$\operatorname{div}(k\nabla T) + k\partial_z^2 T = v\partial_z T \quad (2.4)$$

Nous rappelons les deux hypothèses mathématiques sur les données :

$$v \in L^\infty(\Omega), \quad k \in L^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad 0 < k_m \leq k(x) \leq k_M, \quad x \in \Omega, \quad (2.5)$$

aucune hypothèse de régularité supplémentaire ne sera nécessaire.

Les conditions limites que l'on devra ajouter à (2.4) seront spécifiées par la suite, nous ferons la distinction entre les conditions latérales (sur la partie du bord $\partial\Omega \times I$) et les conditions d'entrée/sortie (sur $\Omega \times \{0\}$ et $\Omega \times \{L\}$).

2.3 Le problème de Graetz généralisé

Comme dans l'approche classique de la section 2.1, nous cherchons des solutions à l'équation (2.4) sous la forme (2.1) que nous rappelons :

$$T(\xi, z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda T_\lambda(\xi) e^{\lambda z}$$

où Λ est un spectre dont les éléments λ sont les modes propres, les T_λ des fonctions propres associées à ces modes et les coefficients c_λ des scalaires. La coordonnée radiale r est ici remplacée par la coordonnée transverse notée ξ . On parlera de modes de Graetz généralisés pour parler du couple λ, T_λ .

En injectant (2.1) dans (2.4) on obtient l'équation satisfaite par les modes de Graetz généralisés :

$$\lambda^2 T_\lambda + \operatorname{div}(k\nabla T_\lambda) = \lambda v T_\lambda \quad (2.6)$$

2.3.1 Reformulation

Les modes de Graetz généralisés ne sont donc pas solutions d'un problème spectral au sens classique. Les fonctions propres n'ont pas de propriétés d'orthogonalités évidentes contrairement aux fonctions de Graetz dans le cas classique. En particulier, il n'est pas aisé de définir simplement les coefficients c_λ ici, alors que dans le cas du problème de Graetz classique ils étaient donnés par un simple produit scalaire (2.3). Ces questions sont détaillées dans le chapitre d'introduction 1.

Nous rappelons brièvement la reformulation de ce problème introduite dans [22] dans le but de définir des solutions à variables séparées. Elle se base sur l'étude de l'opérateur non borné \bar{A} sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^2$$

muni du produit scalaire (équivalent au produit L^2 standard), $\forall \Psi_i = (f_i, \mathbf{p}_i) \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$:

$$(\Psi_1 | \Psi_2)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f_1 f_2 k(x) dx + \int_{\Omega} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 k^{-1}(x) dx \quad (2.7)$$

Cet opérateur \bar{A} ayant pour domaine $D(\bar{A})$:

$$\bar{A} : D(\bar{A}) \subset \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}, \quad D(\bar{A}) = H^1(\Omega) \times H_{\operatorname{div}}(\Omega)$$

et est défini ainsi :

$$\forall (s, \mathbf{q}) \in D(\bar{A}), \quad \bar{A}(s, \mathbf{q}) = (k^{-1}vs - k^{-1} \operatorname{div} \mathbf{q}, k\nabla s)$$

En notation matricielle, l'opérateur \bar{A} s'écrit :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} k^{-1}v & -k^{-1} \operatorname{div} \\ k\nabla & 0 \end{bmatrix}$$

L'opérateur \bar{A} permet de reformuler (2.4) de la façon suivante :

Soit $z \in I \mapsto \psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z)) \in \mathcal{H}$ une fonction différentiable selon z telle que $\forall z \in I, \psi(z) \in D(\bar{A})$ et :

$$\frac{d}{dz}\psi(z) = \bar{A}\psi(z) \quad (2.8)$$

alors T est une solution de (2.4) avec $k\nabla T = \partial_z \mathbf{q}$.

L'équivalence entre la formulation (2.4) et sa reformulation (2.8) est détaillée dans [25]. Notamment, si $\psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z))$ est solution de (2.8) alors $z \mapsto T(z)$ n'est dérivable qu'une fois en norme L^2 (qui est la norme de \mathcal{H}), de sorte que $\partial_z^2 T$ a un sens faible (sens des distributions) et que T n'est aussi qu'une solution faible de (2.4).

Cette reformulation (2.8) permet la définition de solutions à variables séparées (2.1). La définition du spectre Λ dans (2.1) se fait relativement à une condition aux limites sur le bord $\partial\Omega$ de la composante transverse.

Dans les articles [22] et [26], où est introduite cette reformulation, une condition de Dirichlet est considérée et l'on définit une restriction A de l'opérateur \bar{A} :

$$A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \text{ avec } D(A) \subset D(\bar{A})$$

et on a donc $A = \bar{A}$ sur $D(A)$.

Pour une condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$ on considère :

$$D(A) = H_0^1(\Omega) \times H_{\operatorname{div}}(\Omega)$$

($H_0^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulle au bord).

Dans [22] il est montré que l'opérateur A est auto adjoint et de résolvante compacte.

Il est de plus montré que le spectre Λ de l'opérateur A se décompose en un double ensemble de valeurs propres positives et négatives : $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$,

$$-\infty \xleftarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 < 0 < \lambda_{-1} \leq \dots \leq \lambda_{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (2.9)$$

les valeurs propres négatives étant qualifiées de modes avals et les positives de modes amonts.

Les fonctions propres associées $\Psi_n = (T_n, k\nabla T_n/\lambda_n)$, par conséquent définies par le problème spectral :

$$A\Psi_n = \lambda_n \Psi_n$$

forment un système orthogonal complet (base de Hilbert) de l'image de A . Les T_n associés aux fonctions propres Ψ_n sont précisément les modes propres de Graetz généralisés dans (2.6).

Ces propriétés spectrales ont été ensuite étendues au cas Neumann dans [25]. Ces résultats sont détaillés en section 3.1.2.

On adoptera par la suite les notations suivantes pour distinguer clairement les modes amonts et avals :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n^+ = T_n, \quad \lambda_n^+ = \lambda_n \quad \text{et} \quad T_n^- = T_{-n}, \quad \lambda_n^- = \lambda_{-n} \quad (2.10)$$

2.3.2 Application : cas d'un tube infini, condition latérale Dirichlet de type saut

Une première application pratique de l'utilisation des modes de Graetz généralisés est présentée dans [22]. Elle concerne un problème en domaine infini $\Omega \times \mathbb{R}$ pour une condition limite sur $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ de saut de température.

Nous reprenons le problème (2.4) en se plaçant cette fois-ci dans un domaine semi-infini $\Omega \times \mathbb{R}$ avec une condition latérale de saut de la température en $z = 0$:

$$\forall z \in \partial\Omega : \quad T(\xi, z) = 1 \quad \text{si} \quad z < 0 \quad \text{et} \quad T(\xi, z) = 0 \quad \text{si} \quad z > 0,$$

et avec la condition supplémentaire :

$$T(\xi, z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} 1 \quad \text{et} \quad T(\xi, z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 0$$

Le principe de résolution est d'utiliser la propriété suivante de l'opérateur \bar{A} :

$$\forall \Psi_i = (s_i, \mathbf{q}_i) \in D(\bar{A}), \quad i = 1, 2 :$$

$$(\bar{A}\Psi_1 | \Psi_2)_{\mathcal{H}} = (\Psi_1 | \bar{A}\Psi_2)_{\mathcal{H}} + \int_{\partial\Omega} s_1 \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n} dl - \int_{\partial\Omega} s_2 \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n} dl \quad (2.11)$$

avec \mathbf{n} le vecteur normal unité $\partial\Omega$ se dirigeant en dehors de Ω .

On recherche une solution $z \rightarrow \Psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z))$ à $d\Psi/dz = \bar{A}\Psi$ sous la forme :

$$\Psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} d_n(z) \Psi_n$$

On peut calculer à l'aide de (2.11) le produit $(\bar{A}\Psi | \Psi_n)_{\mathcal{H}}$ (où les Ψ_n sont les vecteurs propres de A tels que $\Psi_n = \Psi_n(\xi)$) :

$$(\bar{A}\Psi(z) | \Psi_n)_{\mathcal{H}} = \lambda_n (\Psi(z) | \Psi_n)_{\mathcal{H}} + \alpha_n w(z) = \lambda_n d_n(z) + \alpha_n w(z)$$

avec $w(z) = 0$ pour $z > 0$ et $w(z) = 1$ pour $z < 0$ et avec les coefficients α_n donnés par :

$$\alpha_n = \frac{1}{\lambda_n^2} \int_{\partial\Omega} k \nabla T_n \cdot \mathbf{n} ds, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*$$

Comme $d\Psi/dz = \bar{A}\Psi$, on en déduit les équations satisfaites par les fonctions $d_n(z)$: $d_n'(z) = \lambda_n d_n(z) + \alpha_n w(z)$.

Cette technique de résolution de (2.4) pour des conditions latérales fixées sera détaillée et étendue dans le chapitre suivant précisément en section 3.1.3.

Dans le cas présentement étudié, la solution à notre problème est présentée dans [22] comme :

$$\Psi(z) = \begin{cases} -\sum_{n<0} \alpha_n \psi_n + \sum_{n<0} \alpha_n e^{\lambda_n z} \psi_n & z \leq 0 \\ -\sum_{n>0} \alpha_n e^{\lambda_n z} \psi_n & z \geq 0 \end{cases}$$

En se restreignant à la première composante de Ψ , on a :

$$T(z) = \begin{cases} 1 + \sum_{n<0} \alpha_n e^{\lambda_n z} T_n & z \leq 0 \\ -\sum_{n>0} \alpha_n e^{\lambda_n z} T_n & z \geq 0 \end{cases}$$

Cette formulation permet de ramener l'étude d'un problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel par l'évaluation des valeurs et fonctions propres sur une coupe du domaine considéré. On remarque également que ce sont les modes amonts qui constituent la solution pour $z \leq 0$ et les modes avals pour $z \geq 0$. De plus, les coefficients des amplitudes sont facilement calculables par leur expression qui est simple et facile à implémenter numériquement.

2.4 Tubes semi-infinis et finis avec condition d'entrée/sortie Dirichlet

Dans cette partie nous étendons dans un premier temps la discussion au cas de tubes semi-infinis puis, dans un second temps aux tubes finis. Pour cela nous allons nous appuyer sur les travaux de Fehrenbach *et al.* [26]. Le cadre théorique de départ est celui de [22]. L'apport de [26] est double. D'une part, il fixe un cadre théorique rigoureux afin de traiter les conditions d'entrée/sortie Dirichlet d'une part. D'autre part, il introduit les outils numériques pour l'approximation de ces problèmes. Toujours sur le plan numérique, une meilleure méthode d'estimation numérique des modes de Graetz généralisés T_n/λ_n y est développée. Ces développements sont détaillés dans les trois sections suivantes.

2.4.1 Tubes semi-infinis

Nous reprenons le problème (2.4) en domaine infini $\Omega \times (0, +\infty)$ avec condition latérale de Dirichlet homogène :

$$T = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0, +\infty)$$

et avec une condition d'entrée également de type Dirichlet :

$$T(\xi, 0) = E(\xi) \quad \text{pour} \quad \xi \in \Omega$$

Dans toute la suite, on notera les modes propres avals (T_n^+, λ_n^+) et les modes propres amonts (T_n^-, λ_n^-) selon les notations (2.10) introduites plus haut.

Nous chercherons une solution sous la forme :

$$T(\xi, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n^+ T_n^+(\xi) e^{\lambda_n^+ z}$$

on retrouve le formalisme employé dans la section précédente à ceci près que seuls les modes T_n associés aux valeurs propres λ_n avals sont considérés.

En recherchant la température T sous cette forme on doit avoir à l'entrée :

$$E = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n^+ T_n^+$$

Les travaux de Fehrenbach *et al.* [26] montrent précisément qu'il existe une unique suite scalaire $X = (x_n^+)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $E = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n^+ T_n^+$.

Ces travaux présentent également un mode opératoire pour le calcul des coefficients $(x_n^+)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Dans la pratique on calcule des approximations des N premiers coefficients (x_n^+) avec $1 \leq n \leq N$. Pour établir cette approximation on ne considère que les N premiers modes avals T_n^+/λ_n^+ de l'opérateur A . On forme alors la matrice K_{++} de taille $N \times N$ et dont les coefficients $k_{++}(i, j)$ sont donnés pour $1 \leq i, j \leq N$ par :

$$k_{++}(i, j) = \int_{\Omega} T_i^+ T_j^+ dx$$

qui correspondent à la projection des modes T_i^+ les uns sur les autres.

On forme aussi le vecteur \mathbf{b} dont les N composantes sont les :

$$b(i) = \int_{\Omega} E T_i^+ dx, \quad 1 \leq i \leq N$$

qui correspondent à la projection de la condition d'entrée sur les différents modes avals.

L'approximation X_N de X est définie comme l'unique solution du système (symétrique et défini positif) :

$$\mathbf{K}_{++} X_N = \mathbf{b} \tag{2.12}$$

Il est enfin prouvé dans [26] que l'on a convergence $X_N \rightarrow X$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. Pareillement, si l'on considère l'approximation T_N du champ de température T définie par :

$$T_N = \sum_{i=1}^{n=N} X_N(i)^+ e^{\lambda_i z} T_i^+$$

alors on a aussi convergence de T_N vers T quand $N \rightarrow +\infty$.

On retrouve évidemment la même formulation pour un tube semi-infini dans \mathbb{R}^- , en remplaçant $+$ par $-$ dans les formules précédentes.

Pour terminer, nous avons présenté la méthode en faisant comme si les modes de Graetz généralisés T_n/λ_n étaient connus, ce qui n'est pas le cas. Pour construire les approximations X_N il nous faut à la base disposer d'approximations numériques des valeurs propres λ_n et des fonctions propres T_n associées, pour $1 \leq n \leq N$. Cette approximation est présentée dans la section 2.4.3.

2.4.2 Tubes finis

Nous reprenons le problème (2.4) en domaine infini $\Omega \times (0, +\infty)$ avec une condition latérale de Dirichlet homogène :

$$T = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0, L)$$

et avec condition d'entrée également de type Dirichlet :

$$\begin{aligned} T(\xi, 0) &= E(\xi) \text{ pour } \xi \in \Omega \\ T(\xi, L) &= S(\xi) \text{ pour } \xi \in \Omega \end{aligned}$$

Dans leurs travaux, Fehrenbach *et al.* [26] démontrent que la solution à ce problème s'écrit :

$$T(\xi, z) = \sum_{n>0} x_n^+ e^{\lambda_n^+ z} T_n^+ + x_n^- e^{\lambda_n^-(z-L)} T_n^- \quad (2.13)$$

et les deux suites $X^\pm = (x_n^\pm)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ sont uniquement déterminées par les conditions d'entrée/sortie :

$$E = \sum_{n>0} x_n^+ T_n^+ + x_n^- e^{-\lambda_n^- L} T_n^- \quad (2.14)$$

$$S = \sum_{n>0} x_n^+ e^{\lambda_n^+ L} T_n^+ + x_n^- T_n^- \quad (2.15)$$

L'approximation de ces deux suites se fait dans un cadre très semblable au cas semi-infini. On suppose que l'on dispose des N premiers modes de Graetz généralisés avals et amonts (en réalité on ne disposera que d'approximations de ces derniers).

On projette alors :

- la condition d'entrée sur les modes avals T_1^+, \dots, T_N^+ ,
- la condition de sortie sur les modes amonts T_1^-, \dots, T_N^- .

On en déduit un système matriciel de taille $2N$ donné par blocs comme :

$$MX = \mathbf{b}, \quad X = \begin{pmatrix} X^+ \\ X^- \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^+ \\ \mathbf{b}^- \end{pmatrix}$$

avec la matrice M ayant la forme :

$$M = \begin{bmatrix} K_{++} & K_{+-} D_+ \\ D_- K_{+-} & K_{--} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Les 4 matrices $K_{\pm\pm}$ (de taille $N \times N$) ont pour coefficients les $k_{\pm\pm}(i, j)$ pour $1 \leq i, j \leq N$:

$$k_{\pm\pm}(i, j) = \int_{\Omega} T_i^\pm T_j^\pm dx$$

tandis que les 2 matrices D_\pm (également de tailles $N \times N$) sont diagonales :

$$D_+ = \text{Diag} \left(e^{\lambda_1^+ L}, \dots, e^{\lambda_N^+ L} \right), \quad D_- = \text{Diag} \left(e^{-\lambda_1^- L}, \dots, e^{-\lambda_N^- L} \right)$$

Les vecteurs \mathbf{b}_\pm ont pour coefficients les $b_\pm(i)$ pour $1 \leq i \leq N$:

$$b_+(i) = \int_{\Omega} T_i^+ E dx \quad \text{et} \quad b_-(i) = \int_{\Omega} T_i^- S dx$$

2.4.3 Calcul des modes de Graetz généralisés

Deux méthodes ont été introduites pour le calcul des valeurs propres λ_n dans (2.9) et des fonctions propres associées $\Psi_n = (T_n, k\nabla T_n/\lambda_n)$, définies par le problème spectral $A\Psi_n = \lambda_n\Psi_n$. On rappelle que les T_n sont alors les modes de Graetz recherchés et solutions de (2.6).

La première méthode présentée dans [22] est basée sur une formulation éléments finis mixtes et a l'inconvénient de faire intervenir un noyau. Une méthode alternative développée dans [26] a l'avantage de se débarrasser de ce problème de noyau en travaillant directement dans l'orthogonal de $\text{Ker}(A)$. C'est cette dernière méthode qui sera utilisée par la suite.

On recherche les valeurs propres non nulles de A . Comme A est auto-adjoint, celles-ci sont associées à des vecteurs propres Ψ_n dans l'orthogonal du noyau de A . Celui-ci est égal à l'image de A et l'on peut montrer que cette image $\text{Ran}(A)$ est donnée par :

$$\text{Ran}(A) = \{(f, k\nabla s), f \in L^2(\Omega), s \in H_0^1(\Omega)\}$$

Cette identité fournit en somme une paramétrisation de $\text{Ran}(A)$ et l'on cherche directement le vecteur propre Ψ (l'inconnue ici) sous la forme $\Psi = (u, k\nabla s)$.

Le problème spectral initial que l'on cherche à résoudre : trouver $\Psi \in \text{Ran}(A) \cap D(\bar{A})$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\forall \psi \in \text{Ran}(A), \quad (\bar{A}\Psi|\psi)_{\mathcal{H}} = \lambda(\Psi|\psi)_{\mathcal{H}},$$

est alors équivalent à : trouver $(u, s) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(\tilde{u}, \tilde{s}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ nous avons :

$$S[(u, s), (\tilde{u}, \tilde{s})] = \lambda M[(u, s), (\tilde{u}, \tilde{s})]$$

avec,

$$S[(u, s), (\tilde{u}, \tilde{s})] = \int_{\Omega} (vu\tilde{u} + k\nabla s \cdot \nabla \tilde{u} + k\nabla \tilde{s} \cdot \nabla u) d\Omega$$

$$M[(u, s), (\tilde{u}, \tilde{s})] = \int_{\Omega} (ku\tilde{u} + k\nabla s \cdot \nabla \tilde{s}) d\Omega$$

où $d\Omega$ est l'élément d'intégration surfacique dans Ω . Ce problème est approximé en considérant un maillage du domaine Ω avec des éléments finis $P1$. Le problème discret associé se lit :

$$S_h X = \lambda M_h X$$

avec S_h avec la matrice de la restriction de la forme bilinéaire S sur l'espace discret aux éléments finis de Lagrange $P1 \times P1$. Cette matrice est symétrique et positive. M_h est la matrice de la restriction de la forme bilinéaire M qui est symétrique définie positive.

En pratique, le maillage ainsi que ces deux matrices sont construites en utilisant la librairie d'éléments finis *FreeFem++* [27]. La résolution du problème spectrale $S_h X = \lambda M_h X$ est faite en utilisant la librairie *arpack++* [28].

Dans la suite nous allons être amenés à faire de nombreuses intégrations $\int_{\Omega} T_i T_j d\Omega$. Nous allons utiliser une méthode d'éléments finis pour exprimer ces quantités sur un maillage du domaine Ω . Les T_i, T_j sont donc des vecteurs avec autant de composantes que de sommets de points de maillage. Afin de faciliter leur multiplication, nous pouvons

définir facilement une formulation variationnelle de la forme $varf(u, v) = \int_{\Omega} uv \, d\Omega$ où u et v sont des fonctions définies sur Ω , à laquelle on associera une matrice de masse M_{varf} . Cette matrice permettra alors d'effectuer le calcul de $\int_{\Omega} T_i T_j \, d\Omega$ simplement par les multiplications matricielles $(T_i)^T \times (M_{varf} \times T_j)$, où $(T_i)^T$ est le transposé du vecteur (T_i) , ce qui est beaucoup plus rapide et moins coûteux numériquement.

Bibliographie

- [1] L. Graetz. Über die wärmeleitungsfähigkeit von flüssigkeiten. *Annalen der Physik*, **261** :337–357, 1885.
- [2] W. Nusselt. Die abhängigkeit der wärmeübergangszahl von der rohrlänge. *Z. Ver. Deut. Ing.*, **54** :1154–1158, 1910.
- [3] M. L. Michelsen and J. Villadsen. The Graetz problem with axial heat conduction. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **17**(11) :1391–1402, November 1974.
- [4] B. Weigand, M. Kanzamar, and H. Beer. The extended Graetz problem with piecewise constant wall heat flux for pipe and channel flows. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **44** :3941–3952, 2001.
- [5] M. A. Ebadian and H. Y. Zhang. An exact solution of extended Graetz problem with axial heat conduction. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **82** :1709–1717, 1989.
- [6] V. A. Aleksashenko. Conjugate stationary problem of heat transfer with a moving fluid in a semi-infinite tube allowing for viscous dissipation. *J. Eng. Physics and Thermophysics*, **14** :55–58, 1968.
- [7] N. M. Belyaev, O. L. Kordyuk, and A. A. Ryadno. Conjugate problem of steady heat exchange in the laminar flow of an incompressible fluid in a flat channel. *J. Eng. Physics and Thermophysics*, **30** :339–344, 1976.
- [8] A.V. Luikov, V.A. Aleksashenko, and A.A. Aleksashenko. Analytical methods of solution of conjugated problems in convective heat transfer. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **14** :1047–1056, 1971.
- [9] W. Deen. *Analysis of transport phenomena*. Oxford University press, 1998.
- [10] E. J. Davis and W. N. Gill. The effects of axial conduction in the wall on heat transfer with laminar flow. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **13** :459–470, 1970.
- [11] E. J. Davis and S. Venkatesh. The solution of conjugated multiphase heat and mass transfer problems. *Chem. Eng. Sci.*, **34** :775–787, 1978.
- [12] C.-J. Hsu. Theoretical solutions for low Peclet number thermal-entry- region heat transfer in laminar flow through concentric annuli. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **13** :1907–24, 1970.
- [13] C-W. Tan and C-J. Hsu. Mass Transfer of Decaying Products with Axial Diffusion in Cylindrical Tubes. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **13** :1887–1905, 1970.
- [14] C-W. Tan and C-J. Hsu. Low Peclet number mass transfer in laminar flow through circular tubes. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **15** :2187–2201, 1972.
- [15] A. S. Telles and E.M. Queiroz. Solutions of the extended Graetz problem. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **44** :471–483, 2000.
- [16] E. Papoutsakis, D. Ramkrishna, and H-C. Lim. The extended Graetz problem with Dirichlet wall boundary conditions. *Appl. Sci. Res.*, **36** :13–34, 1980.
- [17] E. Papoutsakis, D. Ramkrishna, and H-C. Lim. Conjugated Graetz problems. Pt.1 : general formalism and a class of solid-fluid problems. *Chem. Eng. Sci.*, **36** :1381–1391, 1980.
- [18] E. Papoutsakis, D. Ramkrishna, and H-C. Lim. Conjugated Graetz problems. Pt.2 : fluid-fluid problems. *Chem. Eng. Sci.*, **36** :1392–1399, 1981.

- [19] B. Weigand. An extract analytical solution for the extended turbulent Graetz problem with Dirichlet wall boundary conditions for pipe and channel flows. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **39** :1625–1637, 1996.
- [20] B. Weigand and F. Wrona. The extended Graetz problem with piecewise constant wall heat flux for laminar and turbulent flows inside concentric. *Heat and Mass Transfer*, **39** :1432–1181, 2003.
- [21] B. Weigand and G. Gassner. The effect of wall conduction for the extended Graetz problem for laminar and turbulent channel flows. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, **50** :1097–1105, 2007.
- [22] C. Pierre and F. Plouraboué. Numerical analysis of a new mixed-formulation for eigenvalue convection-diffusion problems. *SIAM J. Appl. Math*, **70**(3) :658–676, 2009.
- [23] J. B. Aparecido and R. M. Cotta. Laminar flow inside hexagonal ducts. *J. Comp. Mech.*, In press :93–100, 1990.
- [24] F. De Gournay, J. Ferhenbach, and F. Plouraboué. Shape optimization for the generalized graetz problem. *Submitted to ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2012.
- [25] J. Bouyssier, C. Pierre, and F. Plouraboué. Mathematical analysis of parallel convective exchangers. *Preprint HAL : hal-00667657*, 2012.
- [26] J. Fehrenbach, F. De Gournay, C. Pierre, and F. Plouraboué. The generalized graetz problem in finite domains. *SIAM J. Appl. Math*, **72**(1) :99–123, 2012.
- [27] O. Pironneau, F. Hecht, A. Le Hyaric, and J. Morice. Freefem++. <http://www.freefem.org/ff++/>.
- [28] F. Magalhaes Gomes and D. Sorensen. Arpack++. <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK/>.

Chapitre 3

Extension à des condition limites latérales générales

Contents

3.1	Introduction	39
3.1.1	Problème physique et état de l'art	39
3.1.2	Analyse spectrale	40
3.1.3	Principe de résolution dans le cas Neumann	42
3.2	Cas Neumann avec $Q \neq 0$	44
3.2.1	Tube infini	44
3.2.2	Tube semi-infini	45
3.3	Cas Neumann avec $Q = 0$	47
3.3.1	Tube infini	47
3.3.2	Tube semi-infini	49
3.4	Résultats numériques	50
3.4.1	Configuration axisymétrique	50
3.4.2	Configuration périodique	53
3.4.3	Configuration contre-courant	55
3.5	Article en cours de soumission	57
	Bibliographie	58

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons généraliser les approches précédentes à des conditions limites latérales générales de types Dirichlet ou Neumann. Nous présenterons des résultats dans le cas Neumann, cas pour lequel il existe deux classes distinctes de problèmes qui émergent par leurs propriétés mathématiques. Le premier cas est celui où le flux total du fluide convecté est différent de zéro (rencontré par exemple dans le cas des “heat pipes”). Le second est celui où le flux total est zéro (cas des échangeurs contre-courant équilibrés).

3.1.1 Problème physique et état de l'art

Nous considérons ici le problème physique de convection-diffusion stationnaire dans un échangeur $\Omega \times I$ avec I infini ou semi-infini tel que présenté au chapitre 2.

Nous rappelons l'équation constitutive (2.4) :

$$\operatorname{div}(k\nabla T) + k\partial_z^2 T = v\partial_z T$$

ainsi que sa reformulation sous la forme $\frac{d}{dz}\Psi = \bar{A}\Psi$ à l'aide de l'opérateur non borné :

$$\bar{A} : D(\bar{A}) \subset \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} k^{-1}v & -k^{-1}\operatorname{div} \\ k\nabla & 0 \end{bmatrix}$$

les espaces \mathcal{H} et $D(\bar{A})$ étant défini en 2.2.

Lemme 3.1.1. *Soit $z \in I \mapsto \psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z)) \in \mathcal{H}$ une fonction différentiable telle que :*

$$\forall z \in I, \quad \psi(z) \in D(\bar{A}) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dz}\psi(z) = \bar{A}\psi(z)$$

alors T est une solution de (2.4) et $k\nabla T = \partial_z \mathbf{q}$.

Ici $z \mapsto T(z)$ est une fois différentiable avec norme L^2 , alors que T est une solution de (2.4) au sens faible des distributions.

Une solution forte de (2.4) est établie si de plus $z \mapsto \mathbf{q}(z)$ est différentiable dans $H_{\operatorname{div}}(\Omega)$.

Le lemme 3.1.1 est le point de départ dans [1–4] pour établir les solutions de (2.4) en utilisant les propriétés du spectre de \bar{A} .

Dans toute la suite Q correspondra au flux total à travers Ω :

$$Q = \int_{\Omega} v(x) dx$$

Le configuration $Q = 0$ est singulière pour le cas Neumann. En effet, il existe un élément non trivial dans le noyau de \bar{A} noté Ψ_0 :

$$\Psi_0 = (1, k\nabla u_0), \quad \operatorname{div}(k\nabla u_0) = v \quad \text{et} \quad k\nabla u_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad (3.1)$$

Quand $Q = 0$, $u_0 \in H^1(\Omega)$ est bien défini (à une constante près) au vu de la condition de compatibilité $\int_{\Omega} \operatorname{div}(k\nabla u_0) dx = \int_{\partial\Omega} k\nabla u_0 \cdot \mathbf{n} dl = 0 = \int_{\Omega} v dx$. Ceci induit l'existence d'une solution spéciale T_0 satisfaisant la condition de flux nul sur $\partial\Omega$:

$$T_0(x, z) = C_1(u_0(x) + z) + C_2,$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Analyse spectrale

Dans toute la suite, nous allons traiter les cas Dirichlet et Neumann. Une fois les formulations établies, nous présenterons des résultats principalement dans le cas Neumann.

L'espace de Hilbert \mathcal{H} est doté du produit scalaire : $\forall \Psi_i = (f_i, \mathbf{p}_i) \in \mathcal{H}, i = 1, 2$,

$$(\Psi_1 | \Psi_2)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f_1 f_2 k(x) dx + \int_{\Omega} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 k^{-1}(x) dx,$$

qui est équivalent au produit scalaire canonique sur \mathcal{H} (c'est-à-dire pour $k = 1$) grâce à la propriété (2.5) sur k .

Définition 3.1.1. On introduit respectivement A_D and A_N qui sont les deux restrictions de l'opérateur \bar{A} relatives à des conditions aux limites de Dirichlet homogène (D) ou Neumann homogène (N) et avec les domaines $D(A_D)$ et $D(A_N)$:

$$D(A_D) = H_0^1(\Omega) \times H_{\text{div}}(\Omega), \quad D(A_N) = H^1(\Omega) \times H_{\text{div}}^0(\Omega)$$

avec

$$H_{\text{div}}^0(\Omega) = \{\mathbf{q} \in H_{\text{div}}(\Omega), \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

Les opérateurs A_D et A_N sont de domaines denses dans \mathcal{H} . En utilisant la propriété (2.11), ils sont aussi symétriques :

$$\forall \Psi_1, \Psi_2 \in D(A) : (A\Psi_1 | \Psi_2)_{\mathcal{H}} = (\Psi_1 | A\Psi_2)_{\mathcal{H}}$$

avec $A = A_D$ ou bien $A = A_N$.

Théorème 3.1.2. *Les deux opérateurs A_D et A_N dans la définition 3.1.1 sont auto-adjoints :*

Avec le théorème 3.1.2 nous avons :

$$\mathcal{H} = \text{Ker}(A_D) \oplus \text{Ran}(A_D) = \text{Ker}(A_N) \oplus \text{Ran}(A_N)$$

Caractérisons maintenant ces deux espaces.

Corollaire 3.1.3. *Dans le cas Dirichlet*

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A_D) &= \{(0, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in H_{\text{div}}(\Omega) \text{ et } \text{div } \mathbf{q} = 0\} \\ \text{Ran}(A_D) &= \{(f, k\nabla s), \quad f \in L^2(\Omega), \quad s \in H_0^1(\Omega)\} \end{aligned}$$

Dans le cas Neumann, considérons

$$\begin{aligned} K_N &= \{(0, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in H_{\text{div}}^0(\Omega) \text{ et } \text{div } \mathbf{q} = 0\} \\ R_N &= \{(f, k\nabla s), \quad f \in L^2(\Omega), \quad s \in H^1(\Omega)\} \end{aligned}$$

si $Q \neq 0$: $\text{Ker}(A_N) = K_N$ et $\text{Ran}(A_N) = R_N$,

si $Q = 0$: considérons Ψ_0 défini dans (3.1),

$$\text{Ker}(A_N) = K_N \oplus \text{Span}(\Psi_0), \quad R_N = \text{Ran}(A_N) \oplus \text{Span}(\Psi_0)$$

Nous aurons toujours alors $\mathcal{H} = K_N \oplus R_N$.

En plus de ces propriétés de *symétries*, le spectre des opérateurs A_D et A_N peut être complètement caractérisé. Notons :

$$\text{Sp}^*(A) := \text{Sp}(A) - \{0\}$$

le spectre de l'opérateur A sans le singleton $\{0\}$. Que ce soit pour $A = A_D$ ou bien $A = A_N$, $\text{Sp}^*(A)$ présente la même structure de double séquence $\text{Sp}^*(A) = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ avec :

$$-\infty \xleftarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 < 0 < \lambda_{-1} \leq \dots \leq \lambda_{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (3.2)$$

Les valeurs négatives de $\lambda \in \text{Sp}^*(A)$ seront appelées modes avals alors que les valeurs positives seront appelées modes amonts.

Théorème 3.1.4. *Les deux opérateurs $A_D^{-1} : \text{Ran}(A_D) \mapsto \mathcal{H}$ et $A_N^{-1} : \text{Ran}(A_N) \mapsto \mathcal{H}$ sont compacts.*

On a $\text{Sp}^(A_D) = (\lambda_n^D)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ et $\text{Sp}^*(A_N) = (\lambda_n^N)_{n \in \mathbb{Z}^*}$, et ces deux séquences satisfont (3.2). Les éléments de $\text{Sp}^*(A_D)$ et de $\text{Sp}^*(A_N)$ sont des valeurs propres de dimension finie, associées aux vecteurs propres $(\Psi_n^D)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ et $(\Psi_n^N)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ qui forment une base de Hilbert (avec des vecteurs orthogonaux et de norme 1) respectivement de $\text{Ran}(A_D)$ et $\text{Ran}(A_N)$. Nous noterons $\Psi_n^D = (T_n^D, \mathbf{q}_n^D)$ et $\Psi_n^N = (T_n^N, \mathbf{q}_n^N)$, avec $\mathbf{q}_n^{D,N} = k \nabla T_n^{D,N} / \lambda_n^{D,N}$.*

On rappelle que les T_n / λ_n ainsi définis (dans les deux cas Dirichlet et Neumann) sont les modes de Graetz généralisés introduits en section 2.3 et solutions de (2.6).

Une importante conséquence est que A , que ce soit pour A_D ou bien A_N :

$$\psi \in \text{Ran}(A) \quad \text{ssi} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |(\psi | \Psi_n)_{\mathcal{H}}|^2 < +\infty \quad (3.3)$$

$$\psi \in D(A) \cap \text{Ran}(A) \quad \text{ssi} \quad \|\psi\|_{D(A)}^2 := \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\lambda_n (\psi | \Psi_n)_{\mathcal{H}}|^2 < +\infty \quad (3.4)$$

et $\|\psi\|_{D(A)}$ est une norme équivalente à la norme de $H^1(\Omega) \times H_{\text{div}}(\Omega)$

3.1.3 Principe de résolution dans le cas Neumann

Dans cette section, nous définissons le problème que nous étudions ainsi qu'un certain nombre de paramètres nécessaires à la résolution.

On considère le cas où $I = \mathbb{R}$. Soit f une fonction que l'on connaît telle que $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, et nous cherchons une solution T de (2.4) sur $\Omega \times \mathbb{R}$ pour le problème suivant :

$$\text{Problème de Neumann} : \quad k \nabla T(x, z) \cdot \mathbf{n} = f(z) \quad \text{for} \quad x \in \partial\Omega \quad (3.5)$$

A partir du lemme 3.1.1, on cherche une solution $\psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z))$ de $d\psi/dz = \bar{A}\psi$ sous la forme :

$$\psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} d_n(z) \Psi_n^N$$

En injectant ces sommes dans $d\psi/dz = \bar{A}\psi$, nous obtenons :

$$\frac{d}{dz} \psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} d'_n(z) \Psi_n^N$$

tel que $d'_n = (\bar{A}\psi | \Psi_n^N)_{\mathcal{H}}$. En utilisant (2.11) nous obtenons :

$$d'_n = \lambda_n^N d_n - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}(z) \cdot \mathbf{n} T_n^N dl$$

Nous avons $f = k \nabla T = \partial_z \mathbf{q}$ tel que $\mathbf{q}(z) \cdot \mathbf{n} = F(z)$ avec F une primitive de f sur $\partial\Omega$. Introduisons les coefficients α_n donnés par :

$$\alpha_n^N = \frac{1}{\lambda_n^N} \int_{\partial\Omega} T_n^N dl \quad (3.6)$$

Au final, les fonctions d_n satisfont :

$$d'_n = \lambda_n^N d_n - \lambda_n^N \alpha_n^N F(z)$$

Par la suite, les fonctions d_n sont cherchées sous la forme :

$$d_n(z) = \alpha_n^N F(z) + \alpha_n^N c_n(z)$$

Grâce au lemme suivant sur les coefficients α_n^N , on écrira la température sous la forme :

$$T = \varphi^N F(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^N c_n(z) \Psi_n^N$$

où les fonctions c_n sont solutions de :

$$c_n' = \lambda_n^N c_n - f$$

Nous allons maintenant revenir aux coefficients α_n .

Lemme 3.1.5. *Les coefficients α_n définis en (3.6) vérifient :*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^N \Psi_n^N = \varphi^N \quad (3.7)$$

avec $\varphi^N \in \text{Ran}(A_N) \cap D(\bar{A})$ définie de façon unique par :

$$\varphi^N = (s^N, k \nabla u^N), \quad k \nabla u^N \cdot \mathbf{n} = 1 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (3.8)$$

$$\text{et } \bar{A}\varphi^N = \begin{cases} 0 & \text{si } Q \neq 0 \\ a\Psi_0 & \text{si } Q = 0, \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

pour Ψ_0 définie par (3.1). Dans le cas $Q = 0$, la contrainte $\varphi^N \in \text{Ran}(A_N)$ implique que $(\varphi^N | \Psi_0)_{\mathcal{H}} = 0$.

L'inégalité de Bessel (3.3) assure que $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\alpha_n^N|^2 < +\infty$. Dans un même temps $\varphi^N \notin D(A_N)$, ce qui nous donne aussi à l'aide de la relation (3.4) que $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\lambda_n^N \alpha_n^N|^2 = +\infty$.

Remarque 3.1.1. Apportons des précisions sur la fonction particulière φ^N :

- Pour le cas $Q \neq 0$, $\varphi^N = (s^N, k \nabla u^N)$ et s^N est une constante, valant P/Q avec P le périmètre de Ω . La seconde composante est définie par $Q \text{div}(k \nabla u^N) = Pv$ et $k \nabla u^N \cdot \mathbf{n} = 1$ sur $\partial\Omega$. Tant que $Q \neq 0$ cette équation est valable et u^N est définie à une constante près. Nous fixerons par la suite cette constante en imposant :

$$Q \int_{\Omega} v u^N dx = p \int_{\Omega} k dx \quad (3.9)$$

- Pour le cas $Q = 0$, considérons les deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$: 3.1.5 :

$$a \int_{\Omega} (v u_0 - k) dx = P, \quad P = \int_{\partial\Omega} dl \quad (3.10)$$

$$b \int_{\Omega} (v u_0 - k) dx = a \int_{\Omega} u_0 (2k - v u_0) dx + \int_{\partial\Omega} u_0 dl \quad (3.11)$$

avec P le périmètre du domaine Ω et u_0 définie par (3.1). Dans ce cas, la fonction $\varphi^N = (s^N, k \nabla u^N)$ vérifie $s^N = a u_0 + b$.

La fonction u^N satisfait l'équation elliptique $v(a u_0 + b) - \text{div}(k \nabla u^N) = ak$ avec la condition limite $k \nabla u^N \cdot \mathbf{n} = 1$ sur $\partial\Omega$.

Pour la suite nous allons établir les solutions dans le cas de conditions aux limites latérales quelconques de type Neumann pour des tubes infinis, semi-infinis et enfin des tubes de taille finie. Nous dissocierons les cas $Q = 0$ et $Q \neq 0$. Des résultats seront présentés pour le cas où la condition de Neumann appliquée est homogène. Enfin nous établirons les solutions dans le cas de conditions de type Dirichlet.

3.2 Cas Neumann avec $Q \neq 0$

3.2.1 Tube infini

Pour simplifier, notons $\lambda_n = \lambda_n^N$, $\Psi_n = \Psi_n^N$ et $\alpha_n = \alpha_n^N$. Les fonctions $c_n(z)$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ sont définies par :

$$c_n(z) = \int_z^{+\infty} f(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi \quad \text{si } n < 0, \quad c_n(z) = - \int_{-\infty}^z f(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi \quad \text{si } n > 0 \quad (3.12)$$

Si f est bornée, ces fonctions sont bien définies, bornées, différentiables et vérifient $c'_n = \lambda_n c_n - f$.

Proposition 3.2.1. *Nous imposons que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et que f et f' soient bornées. Soit F une primitive de f .*

Considérons la fonction telle que $z \in \mathbb{R} \mapsto \psi(z) \in \text{Ran}(A_N)$:

$$\psi(z) = F(z)\varphi^N + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n \quad (3.13)$$

nous avons :

$$\psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap C^1(\mathbb{R}, D(\bar{A})) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dz} \psi = \bar{A} \psi \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

et T est alors une solution forte du problème de Neumann (2.4) (3.5).

La régularité de cette solution est augmentée d'un degré comparé à un problème où l'on considérerait une condition limite latérale de type Dirichlet. Ceci vient des fonctions c_n qui sont définies à l'aide des fonctions f (équation (3.12)) alors que, dans le cas Dirichlet, on peut montrer que c'est à l'aide des fonctions f' .

De plus, remarquons que la température est définie à une constante additive près, ce qui produit un nombre infini de solutions T . A l'aide de (3.1.1), la température T peut être écrite :

$$T(z, x) = \frac{P}{Q} F(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) T_n(x) \quad (3.14)$$

où F est définie à une constante additive près. Ceci était attendu puisque n'importe qu'elle constante C est solution de (2.4) avec des conditions aux limites Neumann homogènes sur $\mathbb{R} \times \partial\Omega$. Cependant, il y a unicité du gradient de la température T qui décrit les échanges de chaleur. Afin d'avoir unicité de la température, il faut fixer la constante F . Ceci signifie que nous devons ajouter une condition de normalisation sur la température (condition implicitement présente dans le cas Dirichlet). Une telle normalisation peut être faite en considérant le champ lointain de température avec une condition appropriée sur f ($f \rightarrow 0$ à une des extrémités du tube au moins). Ceci est précisé dans la suite :

Corollaire 3.2.2. *Nous imposons comme dans la proposition (3.2.1) que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et f et f' soient bornées.*

Si $\int_0^{+\infty} |f| dz < +\infty$, alors F a une limite en $+\infty$ et :

$$T(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} F(+\infty) \frac{P}{Q} \quad \text{dans } \mathcal{H}$$

La constante $F(+\infty)$ peut être fixée par une condition de normalisation sur T à $z = +\infty$.

Si $\int_0^{+\infty} |f'| dz < +\infty$, alors f a une limite en $+\infty$ et :

$$\partial_z T(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} f(+\infty) \frac{P}{Q}, \quad T(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} F(z) + f(+\infty) u^N \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

avec u^N définie dans la remarque (3.1.1) : $Q \operatorname{div}(k \nabla u^N) = Pv$ et $k \nabla u^N \cdot \mathbf{n} = 1$ sur $\partial\Omega$ avec la condition de normalisation (3.9).

La solution peut être encore obtenue avec une régularité plus faible sur f : plus précisément avec $f' = g + \delta$ où g est continue et bornée et avec δ une distribution de type Dirac. Dans ce cas, les fonctions $c_n(z)$ de (3.12) peuvent être définies aussi bien que les fonctions ψ dans (3.13). Avec une telle condition sur f , ψ reste C^1 in \mathcal{H} sur \mathbb{R} mais n'est seulement C^2 dans \mathcal{H} et C^1 dans $D(\bar{A})$ en dehors du support de δ . Ces propriétés sont détaillées dans le corollaire suivant 3.2.3 :

Corollaire 3.2.3. *Nous posons $f(z) = \omega(z)$ avec $\omega(z) = 1$ si $z < 0$ et $\omega(z) = 0$ sinon, telle que $f' = -\delta_0$. Le calcul des fonctions $c_n(z)$ de (3.12) se fait dans ce cas par la définition suivante de $\psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z))$:*

$$\psi(z) = \begin{cases} A_N^{-1} \varphi^N + z \varphi^N - \sum_{n < 0} \alpha_n e^{\lambda_n z} \Psi_n / \lambda_n & \text{if } z < 0 \\ \sum_{n > 0} \alpha_n e^{\lambda_n z} \Psi_n / \lambda_n & \text{if } z > 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

où $A_N^{-1} \varphi^N = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n \Psi_n / \lambda_n$ est bien définie puisque $\varphi^N \in \operatorname{Ran}(A_N)$.

Nous avons :

$$\psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap C^0(\mathbb{R}, D(\bar{A})) \cap C^\infty(\mathbb{R}^*, D(\bar{A}))$$

et T est une solution du problème de Neumann (2.4) (3.5) avec $f = \omega$.

Nous avons les propriétés de régularités suivantes : $z \mapsto T(z)$ est C^∞ sur \mathbb{R}^* dans $H^1(\Omega)$ et $z \mapsto k \nabla T(z)$ est C^∞ sur \mathbb{R}^* avec la norme de H_{div} . A l'origine $z = 0$, T est C^1 dans $L^2(\Omega)$ et $k \nabla T$ est continue dans $L^2(\Omega)$.

3.2.2 Tube semi-infini

Nous considérons maintenant le cas où $I = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. Soit une fonction donnée $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$, nous cherchons une solution T de (2.4) associée avec le problème de Neumann (3.5) sur $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ et avec une condition d'entrée en $z = 0$ de type Dirichlet ou Neumann : pour $E \in L^2(\Omega)$,

$$\text{Condition d'entrée Dirichlet :} \quad T(x, 0) = E(x) \quad \text{for } x \in \Omega \quad (3.16)$$

$$\text{Condition d'entrée Neumann :} \quad k \nabla T(x, 0) \cdot \mathbf{n} = E(x) \quad \text{for } x \in \Omega \quad (3.17)$$

Pour déterminer les solutions dans le cas d'un domaine semi-infini, nous avons besoin d'un résultat supplémentaire. Ce dernier est le sujet principal de [2] par J. Fehrenbach *et al.* Il porte sur des conditions limites latérales de type Dirichlet. On peut le résumer par :

- nous savons déjà que $(\Psi_n^D)_{n \in \mathbb{Z}^*} = (T_n^D, \mathbf{q}_n^D)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ forme une base de Hilbert de $\operatorname{Ran}(A_D)$
- de plus, $(T_n^D)_{n > 0}$ forme une base complète de $L^2(\Omega)$ (seuls les indices positifs n ont été gardés), mais ce n'est plus une base orthogonale.

Plus précisément, nous considérons les coefficients $\kappa_{ij} = \int_{\Omega} kT_i^D T_j^D dx$ pour $i, j \in \mathbb{Z}^*$ ainsi que les matrices $K = (\kappa_{ij})_{i,j>0}$, $K_n = (\kappa_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Soit $E \in L^2(\Omega)$ et considérons les coefficients $v_i = \int_{\Omega} kET_i^D dx$. Nous définissons les vecteurs $V = (v_i)_{i>0}$, $V_n = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Théorème 3.2.4 (J. Fehrenbach et al). *Il existe une unique suite $B = (\beta_i)_{i>0}$ telle que :*

$$E = \sum_{i>0} \beta_i T_i^D, \quad \sum_{n>0} |\beta_n|^2 < +\infty$$

C'est l'unique solution de $KB = V$. De plus, pour chaque $n > 0$, $K_n B_n = V_n$ possède une unique solution. En notant $B_n = (\beta_i^n)_{1 \leq i \leq n}$, nous avons $\sum_{i=1}^n \beta_i^n T_i^D \rightarrow E$ muni de la norme L^2 .

La seconde partie du théorème fournit un algorithme pour approximer E en utilisant une décomposition sur les n -premiers modes avals T_n^D . La première partie est l'élément dont on a besoin pour obtenir les solutions sur les domaines semi-infinis.

Ce résultat est énoncé dans le cas Dirichlet et a été prouvé seulement dans cette configuration. Nous allons supposer que ceci est également valable pour le cas Neumann. En particulier pour $Q = 0$, le vecteur supplémentaire Ψ_0 , pour lequel $T_0(x) = 1$, a été pris en compte.

Nous allons noter $\lambda_n = \lambda_n^N$, $\Psi_n = \Psi_n^N$ et $\alpha_n = \alpha_n^N$. Nous posons que $f \in C^1(0, +\infty)$ avec f et f' bornées.

Les fonctions $c_n(z)$ sont définies maintenant pour $n \in \mathbb{Z}^*$ par :

$$c_n(z) = \int_z^{+\infty} f(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi \quad \text{si } n < 0, \quad c_n(z) = - \int_0^z f(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi \quad \text{si } n > 0$$

Ces fonctions sont bien définies, bornées, différentiables et satisfont $c'_n = \lambda_n c_n - f$. Elles diffèrent seulement de celles de l'équation (3.12) quand $n > 0$, en particulier nous avons $c_n(0) = 0$ pour $n > 0$.

Considérons la fonction $z \in \mathbb{R}^+ \mapsto \psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z)) \in \text{Ran}(A_N)$:

$$\psi(z) = F(z)\varphi^N + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n + \sum_{n>0} \beta_n e^{\lambda_n z} \Psi_n \quad (3.18)$$

pour $F' = f$ et pour tout suite $(\beta_n)_{n>0}$ satisfaisant $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\beta_n|^2 < +\infty$.

La fonction ψ vérifie : $\psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap C^1(\mathbb{R}, D(\bar{A}))$ et $\partial_z \psi = \bar{A}\psi$. De plus, la température T est une solution du problème de Neumann (2.4) (3.5). A l'aide de la remarque 3.1.1, nous pouvons écrire la température :

$$T = \frac{P}{Q} F(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) T_n + \sum_{n>0} \beta_n e^{\lambda_n z} T_n$$

telle qu'à l'entrée en $z = 0$ nous avons :

$$\begin{aligned} T(0) &= \frac{P}{Q} F(0) + \sum_{n<0} \alpha_n c_n(0) T_n + \sum_{n>0} \beta_n T_n \\ \partial_z T(0) &= \sum_{n<0} \lambda_n \alpha_n c_n(0) T_n + \sum_{n>0} \lambda_n \beta_n T_n \end{aligned}$$

Proposition 3.2.5. *Considérons $(\beta_n)_{n>0}$ l'unique suite donnée par le théorème 3.2.4 telle que :*

$$\sum_{n>0} \beta_n T_n = E - PF(0)/Q - \sum_{n<0} \alpha_n c_n(0) T_n$$

alors $T(z)$ est la solution du problème de Neumann (2.4) (3.5) avec une condition d'entrée de type Dirichlet (3.16).

Considérons maintenant $(\beta_n)_{n>0}$ l'unique suite donnée par le lemme 3.2.4 telle que :

$$\sum_{n>0} \lambda_n \beta_n T_n = E - \sum_{n<0} \lambda_n \alpha_n c_n(0) T_n$$

alors $T(z)$ est la solution du problème de Neumann (2.4) (3.5) avec une condition d'entrée de type Neumann (3.17).

Comme dans le cas infini, F est déterminée seulement à une constante près, si bien que nous avons une infinité de solutions :

- Pour une condition d'entrée de type Neumann, deux solutions T_1 et T_2 différeront seulement d'une constante additive : $T_1 - T_2 = 0$ si bien que le gradient de température est déterminé de façon unique. Il n'est pas nécessaire de déterminer cette constante pour caractériser les échanges thermiques. Afin de caractériser la température, une condition de normalisation est nécessaire. Une telle condition peut être imposée à la fin du tube $z = +\infty$ avec des hypothèses raisonnables sur f , présentées ci-dessous.
- Pour une condition d'entrée de type Dirichlet, deux solutions T_1 et T_2 ne différeront pas d'une constante. Elles satisfont précisément pour toute constante $C \in \mathbb{R}$:

$$T_1 - T_2 = C + \sum_{n>0} \gamma_n e^{\lambda_n z} T_n \quad \text{avec} \quad \sum_{n>0} \gamma_n T_n = -C$$

Nous pouvons dire que $T_1 - T_2$ diffèrent *asymptotiquement* d'une constante, et que $\nabla T_1 - \nabla T_2$ est *asymptotiquement* zéro. Dans ce cas, les échanges thermiques ne sont pas complètement déterminés si la constante $F(0)$ n'est pas fixée. De nouveau, une condition de normalisation est nécessaire pour ceci, et comme nous l'avons vu, une telle normalisation n'est possible à l'entrée en $z = 0$. Nous devons plutôt chercher à la fin du tube en $z = +\infty$, ce qui n'est possible que pour un choix raisonnable de f .

Si on regarde ce qui se passe en champs lointains, nous avons :

- si $\int_0^{+\infty} |f| dz < +\infty$, alors $T(z) \rightarrow F(+\infty)P/Q$ pour $z \rightarrow +\infty$. Dans ce cas la constante sur F ne peut être fixée par une condition de normalisation sur T en $+\infty$.
- si $\int_0^{+\infty} |f'| dz < +\infty$, alors $\partial_z T(z) \rightarrow f(+\infty)P/Q$ and $T(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} F(z)P/Q + f(+\infty)u^N$ pour $z \rightarrow +\infty$ dans $L^2(\Omega)$ (avec u^N définie dans la remarque 3.1.1). Dans ce cas, aucune condition de normalisation est possible pour fixer F .

3.3 Cas Neumann avec $Q = 0$

3.3.1 Tube infini

Nous allons adapter les résultats précédents au cas $Q = 0$: les notations restent inchangées par rapport au problème de Neumann $Q \neq 0$.

Nous rappelons que la définition de $\varphi^N = (s^N, k\nabla u^N) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n \Psi_n$ est singulière dans ce cas. Comme il est établi dans le lemme 3.1.5 et la remarque 3.1.1, $s^N = au_0 + b$ avec a et b deux constantes données par (3.10) (3.11) et u_0 définie par (3.1). Nous avons $\varphi^N \in \text{Ran}(A_N)$, si bien que $(\varphi^N | \Psi_0)_{\mathcal{H}} = 0$, et $\overline{A}\varphi^N = a\Psi_0$. Nous rappelons également que $\Psi_0 = (1, k\nabla u_0)$ et la définition de $\text{Ran}(A_N)$ dans le corollaire 3.1.3 : $R_N = \text{Ran}(A_N) \oplus \text{Span}(\Psi_0)$.

Proposition 3.3.1. *On peut étendre les résultats de la proposition 3.2.1 au cas $Q = 0$. En utilisant la définition alternative de $\psi : z \in \mathbb{R} \mapsto R_N$, nous obtenons :*

$$\psi(z) = aG(z)\Psi_0 + F(z)\varphi^N + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z)\Psi_n$$

avec $G : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ satisfaisant $G' = F$.

Le cas $Q = 0$ présente une caractéristique singulière qui mérite notre attention. La température s'écrit :

$$T(z) = aG(z) + F(z)(au_0 + b) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z)T_n$$

Quand on compare à (3.14), nous observons que le terme dominant dans la température quand $z \rightarrow \pm\infty$ est différent : si $Q \neq 0$ c'est le terme $F(z)P/Q$ alors que quand $Q = 0$ c'est le terme $aG(z)$. Posons par exemple que $f = 0$ au voisinage de $+\infty$: dans ce cas $T(z)$ va converger vers une limite si $Q \neq 0$ alors que pour $Q = 0$ elle va croître linéairement. De façon similaire, si $f = L \neq 0$ au voisinage de $+\infty$: alors dans ce cas $T(z)$ va croître linéairement si $Q \neq 0$ alors que pour $Q = 0$ cette croissance sera plutôt parabolique. Ces deux propriétés sont des conséquences du corollaire (3.2.2).

La seconde différence importante est que, maintenant, la solution est définie à deux constantes près, ce qui était attendu puisque n'importe quelle fonction de la forme $C_1(z + u_0) + C_2$ est solution du problème de Neumann homogène. Ainsi deux solutions du problème peuvent avoir des gradients de température différents et ainsi correspondre à des échanges thermiques différents. Afin de clarifier ceci, réécrivons la température :

$$T(z) = C_1(z + u_0) + C_2 + aG(z) + F(z)(au_0 + b) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z)T_n \quad (3.19)$$

$$\partial_z T(z) = C_1 + aF(z) + f(z)(au_0 + b) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c'_n(z)T_n$$

en imposant que $F(0) = G(0) = 0$ et avec C_1, C_2 deux constantes.

Faisons l'hypothèse que $\int_0^{+\infty} |f| dz < +\infty$ et $\int_0^{+\infty} |f'| dz < +\infty$ (ce qui physiquement voudrait dire que $f = 0$ à au moins une des extrémité du tube). Si l'on regarde alors les estimations de ce qui se passe en champ lointain comme dans le corollaire (3.2.2), nous avons :

$$\partial_z T(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} C_1 + a \int_0^{+\infty} f dz$$

Ceci est une autre importante différence avec le cas $Q \neq 0$ où la limite serait alors fixée et vaudrait $f(+\infty)P/Q$. Dans le cas $Q \neq 0$ cette limite reste libre. Nous pouvons imposer le flux de chaleur en $+\infty$: une telle condition supplémentaire établit C_1 . Avec cette condition supplémentaire, nous conservons un "jeu" infini de solutions qui dépendent de C_2 : ces solutions ont des gradients de température identiques et ont donc des échanges thermiques identiques.

3.3.2 Tube semi-infini

Nous introduisons la primitive F de f et G la primitive de F . Nous considérons la fonction $z \in \mathbb{R}^+ \mapsto \psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z)) \in R_N$:

$$\psi(z) = aG(z)\Psi_0 + F(z)\varphi^N + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z)\Psi_n + \sum_{n > 0} \beta_n e^{\lambda_n z} \Psi_n$$

avec a définie dans l'équation (3.10) et pour toute suite $(\beta_n)_{n > 0}$ satisfaisant $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\beta_n|^2 < +\infty$.

Avec les mêmes justifications vues dans le cas $Q = 0$, si $f \in C^1(0, +\infty)$ avec f et f' bornées alors $\psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap C^1(\mathbb{R}, D(\bar{A}))$ et $\partial_z \psi = \bar{A}\psi$. De plus, la température T est une solution du problème de Neumann (2.4) (3.5).

Tout comme dans l'équation (3.19), en imposant $F(0) = G(0) = 0$, nous avons, avec les deux constantes C_1 et C_2 :

$$T = C_1(z + u_0) + C_2 + aG(z) + F(z)(au_0 + b) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z)T_n + \sum_{n > 0} \beta_n e^{\lambda_n z} T_n \quad (3.20)$$

et à l'entrée en $z = 0$ nous avons :

$$\begin{aligned} T(0) &= C_1 u_0 + C_2 + \sum_{n < 0} \alpha_n c_n(0)T_n + \sum_{n > 0} \beta_n T_n \\ \partial_z T(0) &= C_1 + \sum_{n < 0} \lambda_n \alpha_n c_n(0)T_n + \sum_{n > 0} \lambda_n \beta_n T_n \end{aligned}$$

Proposition 3.3.2. *Dans le cas $Q = 0$, le contexte du théorème (3.2.4) possède une version particulière : notons $T_0 = 1 \in L^2(\Omega)$ la fonction constante, alors la suite $(T_n)_{n \geq 0}$ constitue une base complète de $L^2(\Omega)$.*

Posons que $C_1 \in \mathbb{R}$ est connue, et considérons $(\beta_n)_{n \geq 0}$ l'unique suite telle que :

$$E = C_1 u_0 + \sum_{n < 0} \alpha_n c_n(0)T_n + \sum_{n \geq 0} \beta_n T_n$$

alors $T(z)$ dans (3.20) avec $C_2 := \beta_0$ est une solution du problème de Neumann (2.4) (3.5) avec une condition d'entrée de type Dirichlet (3.16).

Considérons maintenant que $(\beta_n)_{n \geq 0}$ est l'unique suite telle que :

$$E = \sum_{n < 0} \lambda_n \alpha_n c_n(0)T_n + \beta_0 T_0 + \sum_{n > 0} \lambda_n \beta_n T_n$$

alors $T(z)$ de (3.20) avec $C_1 := \beta_0$ est une solution du problème de Neumann (2.4) (3.5) avec une condition d'entrée de type Neumann (3.17) (et ceci pour n'importe quelle valeur de C_2).

La structure de la solution dans le cas particulier $Q = 0$ est assez singulière. La solution générale (3.20) dépend des deux constantes C_1 et C_2 .

Considérer le cas d'une condition d'entrée de type Neumann permet de déterminer la constante C_1 . Ainsi, toutes les solutions du problème diffèrent seulement d'une constante et les échanges thermiques sont complètement déterminés.

Considérer le cas d'une condition d'entrée de type Dirichlet est plus délicat. La constante C_1 est libre. La seconde constante C_2 est déterminée via la condition d'entrée : cela dépend à la fois de C_1 et de $T(z = 0)$. Nous avons une solution pour chaque choix de C_1 et

deux solutions non identiques ne diffèrent pas simplement d'une constante additive. Plus précisément, (comme cela est détaillé dans le cas fini) deux solutions diffèrent asymptotiquement d'une constante quand $z \rightarrow +\infty$. En conséquence, deux solutions différentes induisent des échanges de chaleur différents, bien qu'asymptotiquement leur gradient soit égal.

Afin de fixer la constante C_1 , une condition portant sur le flux doit être imposée en $z = +\infty$, comme cela a été fait dans le cas de domaine infini. Si nous posons que $\int_0^{+\infty} |f| dz < +\infty$ et $\int_0^{+\infty} |f'| dz < +\infty$ (plus simplement on pourrait dire que $f = 0$ en $+\infty$), alors :

$$\partial_z T(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} C_1 + a \int_0^{+\infty} f dz$$

3.4 Résultats numériques

L'objectif initial de nos travaux est de décrire les échanges thermiques dans les "tubes chauffants" et les échangeurs thermiques. Dans les sections précédentes, nous avons établi les solutions analytiques pour la température et le flux de chaleur pour de tels appareils. Dans cette section, nous allons reprendre la démarche adoptée à la fin du chapitre 2 2.4.3. Nous allons considérer trois cas tests. Le premier est une configuration axisymétrique qui nous permet de comparer les résultats numériques obtenus avec les solutions analytiques. Le second est une configuration périodique qui décrit une juxtaposition de canaux circulaires. Enfin le dernier est un cas contre-courant où $Q = 0$.

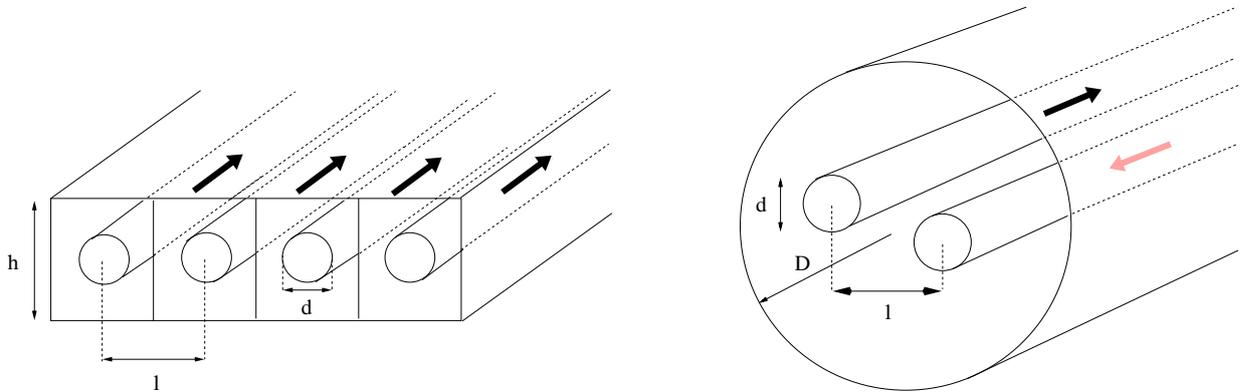


FIGURE 3.1 – Configurations géométriques : le cas test périodique est représenté sur la gauche, le cas contre-courant sur la droite.

3.4.1 Configuration axisymétrique

Nous considérons une configuration axisymétrique : le domaine Ω est le cercle unité et la partie fluide est un cercle centré en 0 avec un rayon $1/2$. Pour cette géométrie, la définition analytique des valeurs et fonctions propres est connue en suivant la technique introduite par [5]. Ces solutions analytiques peuvent être calculées à l'aide d'un code Maple avec une précision arbitraire élevée. Dans la section 2.4.3, nous avons présenté notre stratégie pour approximer les λ_n et les Ψ_n sur un domaine quelconque Ω en utilisant un maillage sur Ω et un solveur aux éléments finis. Le but de ce cas test est d'évaluer l'efficacité de ce solveur. Nous comparons les solutions calculées avec leurs définitions analytiques. Nous utilisons une condition limite latérale de type Neumann. Nous analysons

dans un premier temps la convergence des valeurs propres calculées : les résultats sont représentés par la figure 3.2.

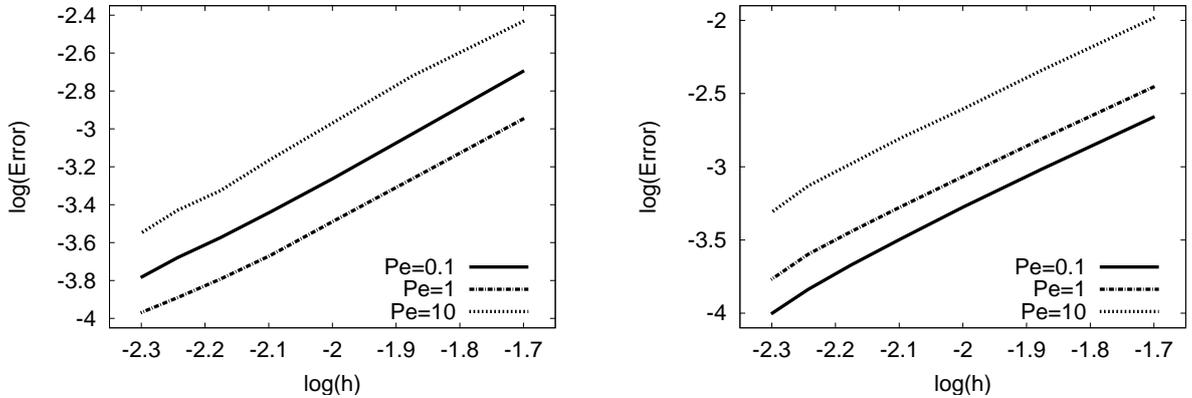


FIGURE 3.2 – Convergence des valeurs propres. La convergence de la première valeur propre aval (respectivement amont) calculée par rapport à sa valeur exacte λ_1 (resp. λ_{-1}) en fonction du pas du maillage h est représentée à gauche (respectivement à droite) pour trois valeurs du nombre de Péclet ($Pe = 0.1, 1$ et 10). L'erreur relative est représentée comme une fonction du pas du maillage h en utilisant une échelle Log/Log décimale. Chaque figure présente le même comportement linéaire avec une pente de 2.

Une série de 7 maillages a été considérée avec un pas de maillage variant entre 0.08 à 0.02. L'erreur relative sur la première valeur propre amont et aval en fonction de leur valeur exacte λ_1 and λ_{-1} a été calculée sur chacun de ces maillages. Nous considérons trois valeurs du nombre de Péclet : $Pe = 0.1$ (la diffusion est dominante), $Pe = 1$ et $Pe = 10$ (régime dominé par la convection). Dans tous les cas, l'erreur décroît vers zéro avec un ordre deux de convergence en h .

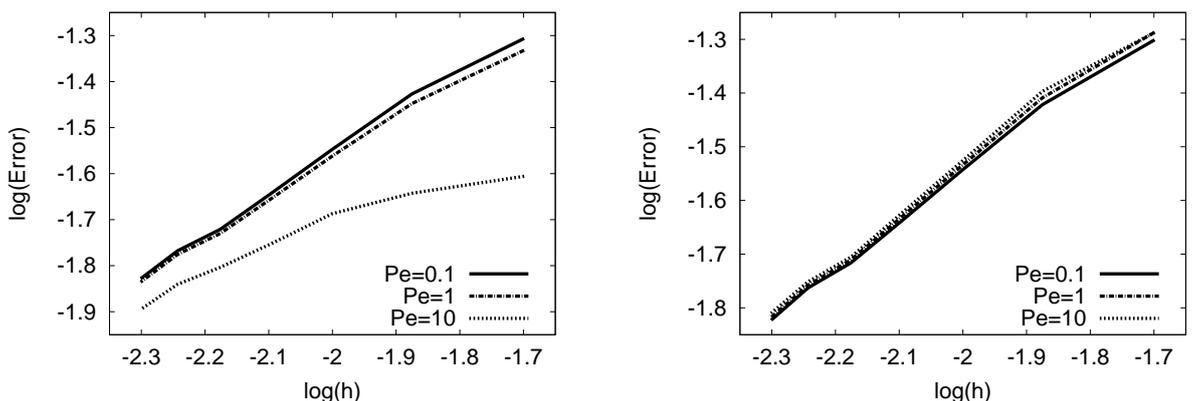


FIGURE 3.3 – Convergence des coefficients α_n . La convergence du premier coefficient aval (respectivement amont) calculé par rapport à sa valeur exacte α_1 (respectivement α_{-1}) en fonction du pas du maillage est représentée ici à gauche (respectivement à droite) pour trois valeurs du nombre de Péclet ($Pe = 0.1, 1$ et 10). L'erreur relative est représentée comme une fonction du pas du maillage h en utilisant une échelle Log/Log décimale.

Avec les mêmes paramètres nous analysons la convergence des coefficients correspondant $\alpha_{\pm 1}$, ce qui implique l'intégrale sur la frontière du domaine de $T_{\pm 1}$. Les résultats sont

représentés par la figure 3.3. La convergence pour les coefficients α_n est d'ordre 1 avec le pas du maillage. Maintenant nous considérons les deux configurations suivantes :

- le problème de Neumann sur un domaine infini avec la condition latérale $f(z) = \omega(z)$ dont la solution est donnée par le corollaire 3.2.3,
- le problème de Neumann sur un domaine semi-infini avec une condition de flux nul sur la surface externe de la partie solide $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ et avec une condition d'entrée de type Neumann $\partial_z T(z=0) = 1$ dans la partie fluide et $\partial_z T(z=0) = 0$ dans la partie solide.

Pour ces deux configurations nous évaluons l'échange thermique fluide/solide. En notant O la région fluide (le cercle de centre 0 et de rayon 1/2), celui-ci s'écrit :

$$\text{Flux}_{\text{fluide/solide}} := \int_0^{+\infty} \int_{\partial O} k \nabla T \cdot \mathbf{n} dl dz$$

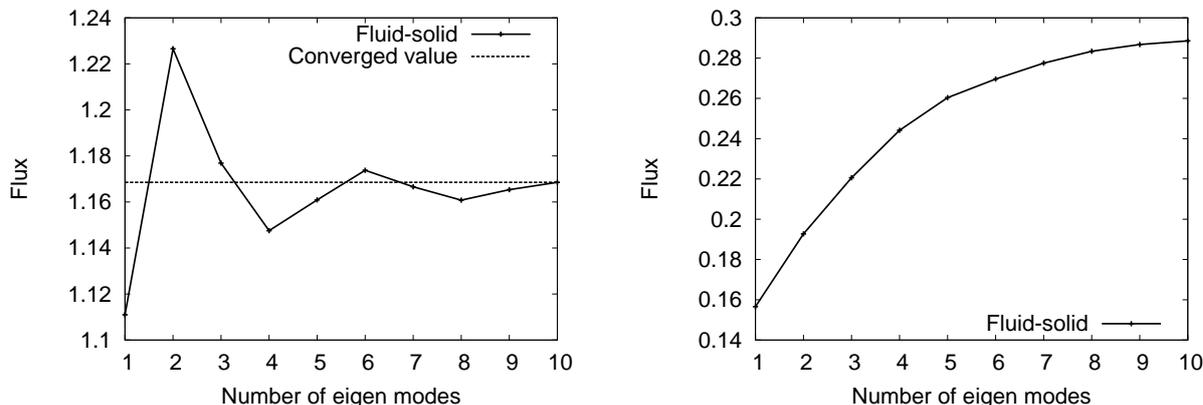


FIGURE 3.4 – Évaluation de $\text{Flux}_{\text{fluide/solide}}$ en fonction du nombre de modes considérés pour un domaine infini à gauche et semi-infini à droite, avec pour les deux cas $Pe = 10$.

pas maillage	N. sommets	N. modes	$\text{Flux}_{\text{fluide/solide}}$	Erreur rel.
0.083	557	3	1.313 1	13 %
0.042	2 083	3	1.208 8	4.1 %
0.021	8 694	4	1.162 4	0.07 %
0.011	32 411	6	1.180 3	1.6 %
0.005 2	133 454	9	1.165 0	0.23 %
0.003 5	295 250	11	1.166 0	0.38 %

TABLE 3.1 – Convergence de $\text{Flux}_{\text{fluide/solide}}$ calculé en fonction du pas du maillage h . Le nombre de sommets du maillage est indiqué dans la deuxième colonne. La troisième colonne correspond au nombre de modes considérés. Le flux calculé et les erreurs relatives correspondantes sont reportés dans les deux dernières colonnes.

Pour les deux configurations, le maillage utilisé est le plus raffiné. Les solutions pour les deux configurations (équations (3.15) ou (3.18) pour respectivement les configurations infini et semi-infini) ne font seulement intervenir que les λ_n et les Ψ_n pour $n > 0$. Nous

considérons uniquement les N -premiers modes (c'est-à-dire pour $1 \leq n \leq N$) et nous approximations $\text{Flux}_{\text{fluide/solide}}$ à l'aide de ces N -modes. Ensuite nous analysons la dépendance de $\text{Flux}_{\text{fluide/solide}}$ en fonction de N : les résultats sont présentés sur la figure 3.4. Dans les deux cas, avec assez peu de modes nous obtenons avec une bonne précision une approximation du flux : 1% (respectivement 3%) d'erreur relative avec $N = 5$ (respectivement $N = 7$) pour la configuration infinie (respectivement semi-infinie). La précision est plus grande pour le cas infini, ce qui est probablement dû à la non régularité de la condition d'entrée pour le cas semi-infini. Nous pouvons regarder de façon plus approfondie comment se comporte la convergence du flux fluide/solide calculé par rapport à sa valeur exacte dans le cas du domaine infini, cas pour lequel une évaluation précise de la valeur exacte du flux peut être obtenue avec la méthode analytique qui a été explicitée auparavant : cette valeur exacte est 1.161549 avec une tolérance de $\pm 1.10^{-6}$. Nous la considérerons comme la valeur de référence. La comparaison des valeurs calculées du flux avec la valeur référence est représentée dans le tableau 3.1. Dans ce tableau sont reportés le pas du maillage avec le nombre de sommets du maillage. Pour chaque calcul est également indiqué le nombre de modes significatifs utilisés : parmi les valeurs/vecteurs propres calculés, la plupart d'entre-eux sont associés à une structure non-axisymétrique (c'est-à-dire périodique de la forme $f(r) \exp(ip\theta)$) et ne sont pas alors considérés ici. Le flux calculé avec le nombre de modes significatifs est reporté avec l'erreur relative associée. Nous observons alors que la convergence des flux calculés oscille autour de la valeur de référence du flux. Un faible nombre de modes propres est utilisé pour déterminer avec une assez bonne précision une approximation du flux : pour avoir une approximation avec une précision de 1 % nous avons besoin de 5-6 modes, et seulement de 1-2 modes pour une approximation avec une précision de 5 %.

3.4.2 Configuration périodique

Nous considérons dans ce cas test une géométrie périodique représentée par la figure 3.1. La géométrie est infinie mais périodique dans la direction horizontale. Elle consiste en une série de canaux circulaires parallèles, dans lesquels un fluide s'écoule, entouré d'une partie solide. Le nombre de Péclet pour chaque canal est constant et vaut $Pe = 10$. Un domaine élémentaire est un carré avec un canal en son centre. Sur un carré, nous imposons une condition limite de type Neumann sur la frontière supérieure et inférieure alors que des conditions périodiques sur T et $\partial_x T$ sont imposées sur les frontières de gauche et de droite. Dans ce cas, le problème étudié n'est plus axisymétrique, tout comme les modes propres.

Ici, nous nous concentrons sur une donnée pertinente pour des cas applicatifs : le flux échangé entre la partie fluide et solide. Nos préoccupations vont concerner la contribution des modes aux échanges, et dans quelle mesure la troncature sur le nombre de modes permet d'approximer les performances d'échanges. Cela va donc également concerner la convergence numérique associée en fonction du raffinement du maillage aux éléments finis utilisés. La figure 3.5 illustre la contribution des dix premiers modes qui contribuent le plus au flux d'échanges. Nous pouvons noter avec cette figure que dans cette configuration, plus la contribution est importante et plus le degré de symétrie azimutale est faible. Le premier mode qui contribue a un degré de symétrie azimutale nul, et l'ordre de la décomposition de Fourier de la symétrie azimutale apparente augmente avec le nombre de modes contribuant. Pour ce cas, où la convection est le régime dominant ($Pe = 10$), nous pouvons voir que quatre modes sont suffisants pour obtenir une bonne estimation du flux total à une précision de quelques pourcents. C'est une observation intéressante,

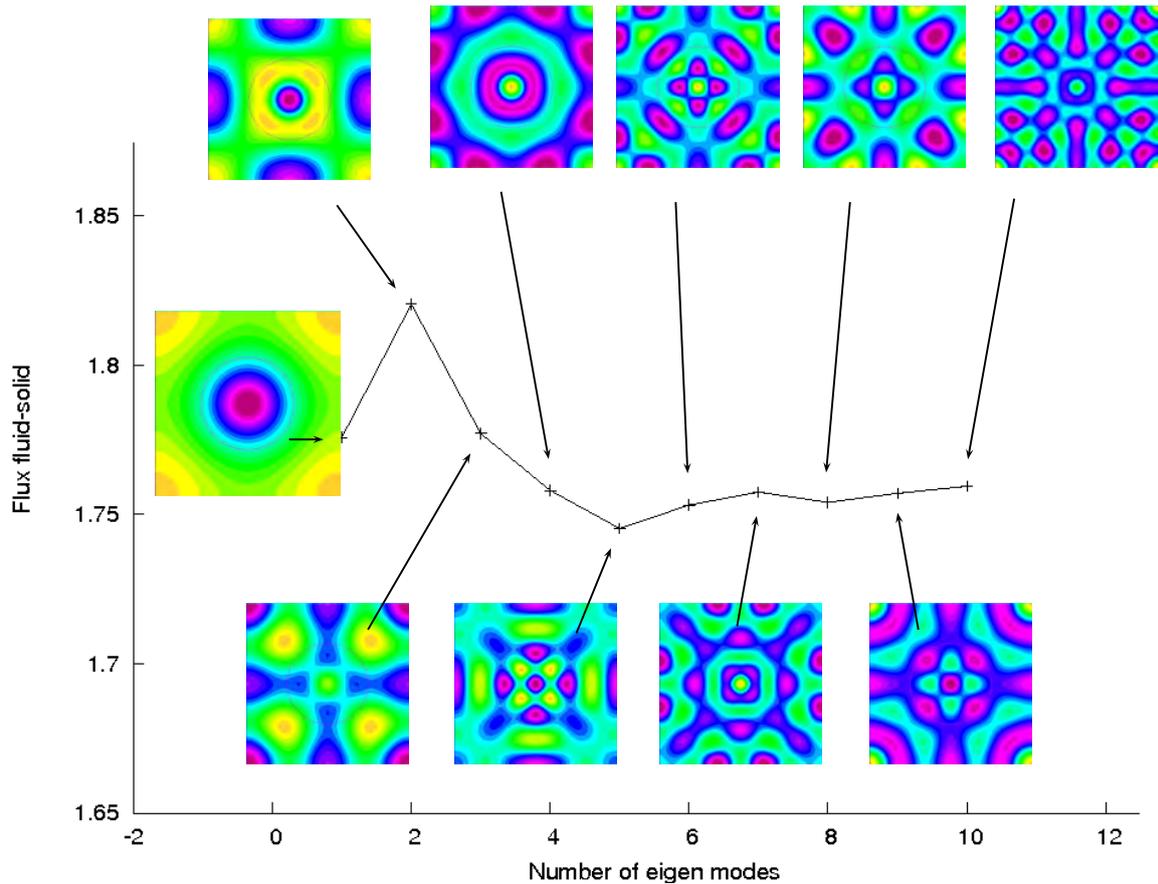


FIGURE 3.5 – Configuration périodique. On représente le flux fluide/solide calculé avec les dix premiers modes propres et leurs visualisations

à savoir que les configurations où la convection domine fournissent de bons résultats pour la décomposition modale généralisée que nous proposons. Cela l'est d'autant plus qu'il est assez facile d'obtenir rapidement et avec une estimation précise les performances d'échanges en utilisant cette formulation.

pas maillage	Nombre de sommets	Flux fluide-solide	Taux de convergence
1/20	1255	1.95895	–
1/40	4820	1.88159	–
1/80	18829	1.84777	2.29
1/160	74473	1.83051	1.96
1/320	298207	1.82017	1.67

TABLE 3.2 – Configuration périodique. On porte la convergence du flux en fonction du pas du maillage h

Dans le tableau 3.2 est reportée la convergence du flux de chaleur fluide/solide en fonction du pas du maillage : la figure précédente 3.5 correspondant au maillage le plus raffiné. Le flux décroît vers sa valeur de référence. Le taux de convergence est évalué en calculant le ratio $(\phi_{n-2} - \phi_{n-1})/(\phi_{n-1} - \phi_n)$ avec ϕ_n le flux calculé sur le $n^{\text{ième}}$ maillage. Les résultats présentés suggèrent un ordre un de convergence du flux avec h . Avec une telle hypothèse, l'erreur relative sur le flux induite par la discrétisation doit être de l'ordre de 1% pour le maillage le plus fin.

3.4.3 Configuration contre-courant

Pour finir, nous considérons la configuration suivante : un cas contre-courant pour lequel le débit total $Q = 0$. Cette configuration est représentée sur la partie de droite de la figure 3.1 et comporte deux canaux circulaires parallèles où dans lesquels un fluide s'écoule dans des directions opposées. Les deux canaux sont nichés au sein d'un domaine solide circulaire. Sur la figure 3.6 est portée l'évaluation du flux d'échange fluide/solide sur les frontières du tube de gauche et de droite. Nous utilisons une configuration de

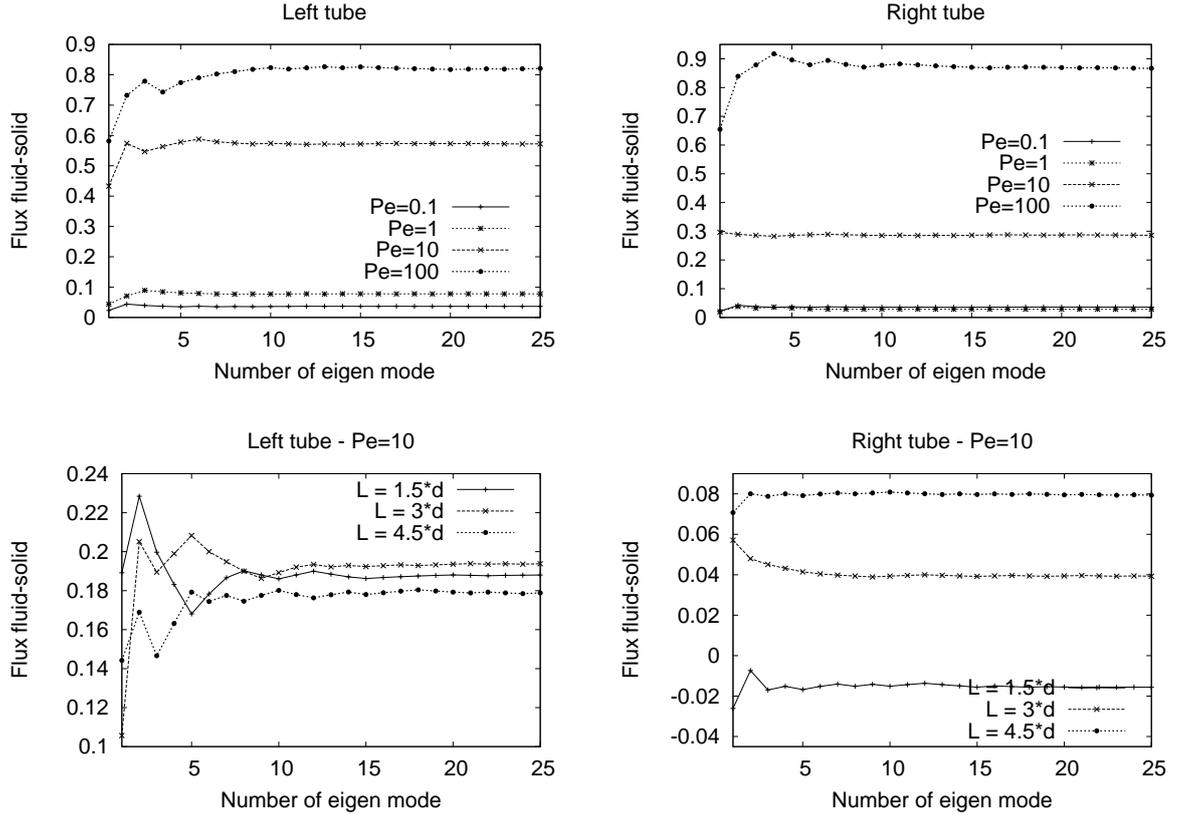


FIGURE 3.6 – Configuration contre-courant. Le flux thermique d'échange fluide/solide sur les frontières des tubes gauche et droit est représenté. Ce flux est calculé avec un nombre croissant de modes propres N . La dépendance du flux calculé en fonction de N est représentée ici pour plusieurs valeurs du nombre de Péclet (figures en haut), et pour plusieurs distances L entre les deux tubes (figures du bas).

domaine infinie où la partie solide est chauffée pour $z < 0$ et vérifie une condition de flux nul pour $z > 0$ (situation présentée par le corollaire 3.2.3). Nous nous concentrons sur les flux de chaleur internes des deux canaux internes pour $z > 0$. Les rôles des deux canaux ne sont pas symétriques. Le fluide dans le tube de gauche s'écoule en direction de la région $z > 0$. Ce fluide est chauffé dans la partie $z < 0$ par un processus de diffusion thermique dans le solide. L'écoulement ensuite convecte la chaleur dans la zone $z > 0$: on peut considérer ce tube comme étant le canal d'entrée. A l'inverse, le fluide dans le tube de droite s'écoule en direction de la région $z < 0$ et évacue la chaleur par convection depuis la zone $z > 0$: on peut considérer ce tube comme le canal de sortie. Ceci signifie que le flux d'échange est différent pour le tube de gauche et de droite, comme cela est observé dans la partie de gauche et de droite de la figure 3.6. Il est aussi intéressant de noter que le taux de convergence en fonction du nombre de modes propres considérés est sensible

aux paramètres géométriques choisis aussi bien que le nombre de Péclet. Qualitativement, on peut noter que plus les tubes sont proches et plus rapidement la troncature modale converge vers une valeur du flux d'échange. D'un autre côté, augmenter le nombre de Péclet fournit une convergence modale plus lente, comme cela est observé sur la partie supérieure de la figure 3.6. Néanmoins, une estimation précise à quelques pourcents du flux d'échange est obtenue dans chaque configuration quand on utilise la contribution de moins de dix modes.

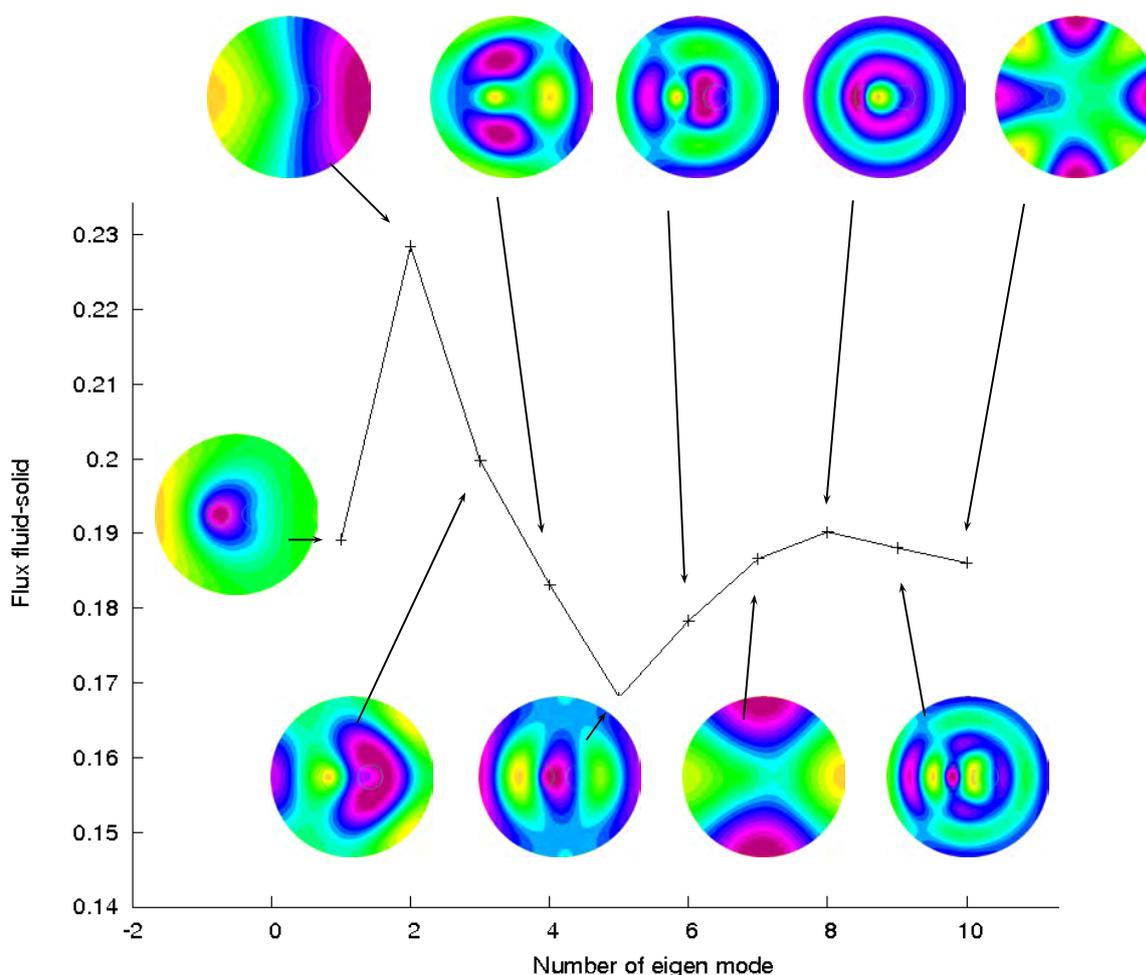


FIGURE 3.7 – Configuration contre-courant. Le flux fluide/solide sur la frontière du tube de gauche pour $z > 0$ calculé avec les dix premiers modes contribuant ainsi que leur visualisation sont représentés (pour $Pe=10$ et $L = 1.5d$).

Une autre observation intéressante est fournie sur la figure 3.7 où l'on peut voir la structure spatiale de la plupart des modes contribuant au flux d'échange. Comme pour la figure 3.5, on peut observer que la structure spatiale des modes augmente en complexité avec la diminution de leur contribution au flux d'échange. Par exemple, le premier mode est quasiment d'ordre azimutal zéro, le second et le troisième modes sont d'ordre azimutal un, le quatrième jusqu'au sixième sont principalement d'ordre azimutal trois, etc ... Cependant, cette observation n'est pas systématique car le septième mode a un ordre azimutal un avec une symétrie horizontale, contrairement au second mode qui a le même ordre azimutal mais avec une symétrie verticale. Cette observation indique que la configuration choisie favorise certaines symétries pour lesquelles l'échange est plus favorable.

3.5 Article en cours de soumission

Ce chapitre a fait l'objet d'un article en cours de soumission dans *SIAM Journal on Applied Mathematics*. Il est présenté à la suite de la bibliographie.

Bibliographie

- [1] C. Pierre and F. Plouraboué. Numerical analysis of a new mixed-formulation for eigenvalue convection-diffusion problems. *SIAM J. Appl. Math.*, **70**(3) :658–676, 2009.
- [2] J. Fehrenbach, F. De Gournay, C. Pierre, and F. Plouraboué. The generalized graetz problem in finite domains. *SIAM J. Appl. Math.*, **72**(1) :99–123, 2012.
- [3] J. Bouyssier, C. Pierre, and F. Plouraboué. Mathematical analysis of parallel convective exchangers. *Preprint HAL : hal-00667657*, 2012.
- [4] C. Pierre and F. Plouraboué. Generalised graetz problem : analytical solutions for concentric or parallel configurations. *Preprint HAL ;*, 2012.
- [5] C. Pierre, F. Plouraboué, and M. Quintard. Convergence of the generalized volume averaging method on a convection-diffusion problem : a spectral perspective. *Chem. Eng. Comm.*, **66** :122–152, 2005.

MATHEMATICAL ANALYSIS OF PARALLEL CONVECTIVE EXCHANGERS I : GENERAL LATERAL BOUNDARY CONDITIONS

JULIEN BOUYSSIER, CHARLES PIERRE, AND FRANCK. PLOURABOUÉ

ABSTRACT. We propose a mathematical analysis of parallel convective exchangers for any general but longitudinally invariant domains. We analyse general Dirichlet or Neumann prescribed boundary conditions at the outer solid domain. Our study provides general mathematical expressions for the solution of convection/diffusion problems. Explicit form of generalised solutions along longitudinal coordinate are found from convoluting elementary base Graetz mode with the applied sources at the boundary. In the case of adiabatic zero flux counter-current configuration we recover the longitudinally linearly varying solution associated with the zeroth eigenmode which can be considered as the fully developed behaviour for heat-exchangers. We also provide general expression for the infinite asymptotic behaviour of the solutions which depends on simple parameters such as total convective flux, outer domain perimeter and the applied boundary conditions. Practical considerations associated with the numerical precision of truncated mode decomposition is also analysed in various configurations for illustrating the versatility of the formalism. Numerical quantities of interest are investigated, such as fluid/solid internal and external fluxes.

1. INTRODUCTION

1.1. Applicative context. Heat exchangers are ubiquitous in many industrial processes where heat is to be recovered or, on the contrary, disposed, from one fluid onto another. Applications might be associated with heating or cooling systems, but can also involve other processes such as pasteurisation, crystallisation, distillation, concentration or separation of some substances [17, 7, 9]. Similarly mass exchangers are also important either in natural biological organs such as kidney and/or biotechnological applications such as devices for continuous extra corporeal blood purification associated with hemo-dialysis [2], hemo-filtration or extracorporeal oxygenation.

For both mass or heat exchangers, the exchange takes place from coupled convection/diffusion processes without any direct contact between the input and the output fluids, for obvious contamination purposes. Many industrial examples of such devices are possible to find such as radiators, condensers, evaporators, air pre-heaters, cooling towers as well as extra corporeal membrane oxygenation and blood micro-filters [3]. Also found in exchangers as a generic, although not systematic, common feature, is parallel flow design configuration. This is the class of exchangers that we are going to consider in this paper, with the hypothesis that there is no longitudinal variation of the fluid-velocity along the exchanger axis.

Date: February, 2012.

Key words and phrases. Heat and mass transfer, convection diffusion, variational formulation, Graetz mode decomposition, mixed formulation, convective exchangers.

In previous contributions a similar Graetz decompositions for solving exchange configurations has already been used [22, 8, 24, 25]. Graetz decomposition applied to stationary convective exchanges problems provides elegant and compact solutions. Furthermore, the obtained family of exponentially decaying modes also permits to set up a hierarchy of modes in fully developed configurations [8]. Nevertheless, there is a number of limitations that have preclude the systematic and intensive use of such decomposition in more realistic configurations

- (1) It is much straightforward to used them to convective dominated situations (where the Péclet number is large) [22, 8]
- (2) Their used has been restricted to two dimensional [11, 12, 22, 21] or possibly concentric [21, 8, 25] configurations.
- (3) They have been used only for constant or piecewise constant prescribed Dirichlet lateral temperature profiles [24, 25] or homeneous Neumann adiabatic lateral boundary conditions [8].
- (4) Input/output conditions where generally considered as prescribed uniform temperature [22, 8, 24, 25] whitout considering the possible coupling with Inlet/Outlet conditions in realistic configurations.

Limitation (1) can be overcome from considering the proper set of orthogonal modes as first noticed by [14], so that axially diffusion can also be included in coupled co-current or counter-current problems. Nevertheless, limitation (2) has only been overcome recently in [15] for longitudinally infinite exchangers with homogeneous lateral Dirichlet boundary conditions or for finite exchangers [4], again for the homogeneous Dirichlet boundary condition at the outer solid surface.

In a effort to obtain general formulation to reach realistic applicative configurations, limitations (3) and (4) are still pending. The contribution of this work is to remove restriction (3). In the following we provide the necessary mathematical theory and numerical implementation to permit the use of generalised Graetz decomposition for any general lateral boundary conditions. The goal of a next paper will be to remove restriction (4).

In order to realise that restriction (3) is important in application, it is interesting to mention that the heat pipes literature has considered a number of different lateral boundary conditions [20, 14, 21, 10, 23, 25].

As described in [20] one finds, in heat pipes, lateral boundary conditions with uniform profile (uniform Dirichlet) in transverse and longitudinal directions, uniform profile along longitudinal direction only, radiative boundary conditions, prescribed uniform flux (uniform Neumann), or exponentially varying profile along longitudinal direction. It is interesting to mention that exponentially varying lateral boundary conditions in the longitudinal direction permits to take into account some convection/diffusion coupling between the fluid and the solid, as described by fully developed Graetz modes which are indeed exponentially decaying solutions [5, 13].

Hence, each operating conditions thus necessitates a case-specific theoretical treatment without any generally theoretical framework which could describe the complete coupling between convection arising inside the fluid coupled with the diffusion inside the solid.

The purpose of this contribution is to provide such theoretical framework for any general set of prescribed temperature profile or applied flux around the exterior solid boundary of the exchanger. This work is an extension of two previous contributions

which have permitted to generalise standard Graetz eigenmodes decomposition to any, possibly complicated, configuration in the transverse direction, whilst longitudinally invariant. One considerable advantage of the developed formalism is to provide a two-dimensional formulation of a fully tri-dimensional problem.

In [15] longitudinally infinite exchangers are considered with homogeneous Dirichlet boundary conditions. In a second contribution, the extension of two-dimensional formulation to finite configurations [4] has also been considered, again for the homogeneous Dirichlet boundary condition at the outer solid surface.

In this paper, we generalise previous approaches for the very general case of any applied Dirichlet or Neumann boundary condition. Of particular interest is the Neumann case for which, two distinct class of problems emerges from its mathematical properties, as discussed in [22]. Given the fluid density ρ_i , the heat capacity c_i and the flux \tilde{Q}_i of a fluid i , one should distinguish the case where the total heat capacity flow rate $\sum_i \rho_i \tilde{Q}_i c_i$ over all fluid i involved in the exchanger is equal or distinct from zero. It is, for exemple, distinct from zero for convective heat pipes for which convection is driving the heat from inlet to outlet, and in that case, any generalised Graetz mode is exponentially varying in the longitudinal direction. In the case where the total heat capacity flow rate $\sum_i \rho_i \tilde{Q}_i c_i = 0$ as encountered in balanced counterflow heat exchangers, we show that an additional linearly longitudinally varying mode has to be considered as already discussed in two-dimensional convection-dominated configurations [22].

1.2. Physical problem and state of the art. This paper considers stationary convection diffusion in a *tube*, i.e. in a domain $\Omega \times I$ with $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a smooth bounded domain and $I \subset \mathbb{R}$ an interval (possibly unbounded). A point $M \in \Omega \times I$ has for coordinates $M = (\tilde{x}, \tilde{z})$ with $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \Omega$ and $\tilde{z} \in I$.

Inside the tube a moving fluid convects a passive tracer, whilst it diffuses inside the immobile solid part. Two physical assumptions are considered. Firstly the fluid velocity $\tilde{\mathbf{v}}$ in the tube is independent of z and directed along the z -direction: $\tilde{\mathbf{v}}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \tilde{v}(\tilde{x})\mathbf{e}_z$. Moreover we adopt the natural convention that $\tilde{v} = 0$ in the solid part of the domain Ω . Secondly the thermal conductivity \tilde{k} is assumed to be isotropic and independent of \tilde{z} : $\tilde{k} = \tilde{k}(\tilde{x}) \in \mathbb{R}$ (anisotropic conductivity however could be considered with the condition that \mathbf{e}_z is one principal direction of the conductivity tensor).

In this setting, the stationary convection-diffusion equation for the temperature \tilde{T} on $\Omega \times I$ reads

$$(1) \quad \tilde{\text{div}}(\tilde{k}\tilde{\nabla}\tilde{T}) + \tilde{k}\partial_{\tilde{z}}^2\tilde{T} = \rho c\tilde{v}\partial_{\tilde{z}}\tilde{T},$$

where $\tilde{\text{div}} = \text{div}_{\tilde{x}}$ and $\tilde{\nabla} = \nabla_{\tilde{x}}$, ρ the fluid density, c the heat capacity, \tilde{v} the fluid velocity and \tilde{k} the conductivity.

In the following, we discuss a dimensionless form of this convection/diffusion equation. Following previous conventions in the heat exchanger litterature, considering fluid pipes of radius R , the dimensionless coordinates (x, z) are defined as $x = (\tilde{x}_1/R, \tilde{x}_2/R)$ and $z = \tilde{z}/R$ so that the pipe radius is unity. Furthermore, the conductivity \tilde{k} is non-dimensionalised by the fluid conductivity \tilde{k}_f so that $k = \tilde{k}/\tilde{k}_f$ is unity in the fluid. The dimensionless temperature T is obtained from considering a reference temperature T_0 , $T = \tilde{T}/T_0$. The fluid non-dimensional velocity is defined

such that,

$$(2) \quad v = \frac{Pe \tilde{v}}{2V}$$

where V is the average fluid velocity in the fluid pipe, and Pe is the Péclet number usually considered as

$$(3) \quad Pe = \frac{\rho c V (2R)}{k_f} = \frac{V(2R)}{\alpha},$$

where $\alpha = k_f/\rho c$ is the fluid thermal diffusivity. For notation simplification we will only consider in the following one fluid type and only one pipe radius R . This is nevertheless not a restriction of the presented results, which can easily be generalised to more complex configurations involving tubes of different diameters and different fluids. Note also that we have included the Pe number in the definition of dimensionless velocity v for notation simplification. Using dimensionless formulation Equation (1) then reads

$$(4) \quad \operatorname{div}(k\nabla T) + k\partial_z^2 T = v\partial_z T,$$

where similarly $\operatorname{div} = \operatorname{div}_x$ and $\nabla = \nabla_x$. The dimensionless velocity v and conductivity k satisfy mandatorily the two following properties:

$$(5) \quad v \in L^\infty(\Omega) \quad \text{and} \quad 0 < k_m \leq k(x) \leq k_M, \quad x \in \Omega,$$

no additional regularity assumptions on v and k are needed.

Problem (4) has been reformulated in [15], as briefly stated below. On the Hilbert space

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^2$$

we consider the unbounded operator \bar{A}

$$(6) \quad \begin{aligned} \bar{A} : D(\bar{A}) \subset \mathcal{H} &\mapsto \mathcal{H}, \quad D(\bar{A}) = H^1(\Omega) \times H_{\operatorname{div}}(\Omega) \\ \forall (s, \mathbf{q}) \in D(\bar{A}), \quad \bar{A}(s, \mathbf{q}) &= (k^{-1}vs - k^{-1}\operatorname{div} \mathbf{q}, k\nabla s). \end{aligned}$$

In matricial notation, the operator \bar{A} display the form:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} k^{-1}v & -k^{-1}\operatorname{div} \\ k\nabla & 0 \end{bmatrix}$$

Lemma 1.1. *Let $z \in I \mapsto \psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z)) \in \mathcal{H}$ be a differentiable function so that*

$$\forall z \in I, \quad \psi(z) \in D(\bar{A}) \quad \text{and} \quad \frac{d}{dz}\psi(z) = \bar{A}\psi(z),$$

then T is a solution of (4) and $k\nabla T = \partial_z \mathbf{q}$.

Here $z \mapsto T(z)$ is once differentiable in L^2 -norm, so $\partial_z^2 T$ only has a weak (distribution) sense and T is a solution to (4) in the same weak sense.

A strong solution to (4) is recovered if additionally $z \mapsto \mathbf{q}(z)$ is differentiable in $H_{\operatorname{div}}(\Omega)$.

Lemma 1.1 is the starting point in [15, 4] to derive solutions to (4) using the spectral properties of \bar{A} .

In all the sequel Q will denote the total flow flux across Ω

$$Q = \int_{\Omega} v(x) dx.$$

The case where no net flux arises, i.e. $Q = 0$, is singular for the Neumann case. Note that, given the definition of the dimensionless velocity v in (2) this condition also reads in dimensional form as a zero total heat capacity flow rate $\sum_i \rho_i \tilde{Q}_i c_i = 0$ for different fluid i flowing in different pipes with flux \tilde{Q}_i . Hence, in the following we will consider the “zero flux” dimensionless condition $Q = 0$ without mentioning any more that it corresponds, in fact, to an adiabatic zero flux countercurrent configuration, as discussed in [22] for convection dominated regimes.

This case is singular because of the existence of a non trivial element in the kernel of \bar{A} denoted Ψ_0 :

$$(7) \quad \Psi_0 = (1, k\nabla u_0), \quad \text{div}(k\nabla u_0) = v \quad \text{and} \quad k\nabla u_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega.$$

When $Q = 0$, $u_0 \in H^1(\Omega)$ is well defined (up to a constant) since the compatibility condition $\int_{\Omega} \text{div}(k\nabla u_0) dx = \int_{\partial\Omega} k\nabla u_0 \cdot \mathbf{n} dl = 0 = \int_{\Omega} v dx$. This induces the existence of a special solution T_0 satisfying zero flux condition on $\partial\Omega$,

$$T_0(x, z) = C_1(u_0(x) + z) + C_2,$$

with $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

1.3. Summary of the paper. This paper is organised in two main parts. In the first part, we present theoretical results and derive analytical solutions to problem (4). The second part provides numerical illustration of the obtained results of the first part whilst the efficiency of the analytical solutions here derived to describe heat exchanges in tubes.

In the first theoretical part we start in section 2 with a spectral analysis of the operator \bar{A} in (6) either considering a Dirichlet or Neumann type boundary condition on $\partial\Omega$. We provide an extension of the results in [15] dedicated to the Dirichlet case. This extension in particular shows that in the Neumann case the physics of the problem depends on the value of the total flux $Q = \int_{\Omega} v dx$. The case $Q = 0$ is quite singular and moreover of great interest in our applicative context: it corresponds to counter-current configuration heat exchanger devices. In all cases our main result in theorem 2.3 states that \bar{A} is diagonal over a (complete) orthogonal basis. The spectrum moreover is made of a double infinite sequence of eigenvalues going both to $+\infty$ and $-\infty$, each sequence corresponding either to the upstream ($z < 0$) or downstream ($z > 0$) region descriptions.

Using these results we derive the solutions to problem (4) for non-homogeneous boundary conditions of Dirichlet and Neumann type. These solutions are studied both for an infinite ($\Omega \times \mathbb{R}$) or a semi infinite ($\Omega \times \mathbb{R}^+$) domain in sections 3 and 4 respectively. These solutions are obtained as separate variable series: the variation in the transverse (i.e. Ω) direction is given by the operator \bar{A} eigenfunctions and the longitudinal variation is explicitly given by a simple integral transformation involving both the boundary data (treated as a source term) and the eigenvalues of \bar{A} .

Numerical results are given in the last section 5. The analytical solutions in the two previous sections can be approximated by truncating their series expansion and by approximating the eigenvalues and eigenfunctions. This approximation is performed with two-dimensional finite element setting as presented in section 5.1. A first axy-symmetric test case is presented in section 5.2 whose purpose is to validate

the method. Finally the method is developed to describe the fluid/solid heat exchange for two more complex configurations: a periodic set of parallel pipes and a counter current heat exchanger.

2. SPECTRAL ANALYSIS

The Hilbert space \mathcal{H} is equipped with the scalar product: $\forall \Psi_i = (f_i, \mathbf{p}_i) \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$,

$$(\Psi_1 | \Psi_2)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f_1 f_2 k(x) dx + \int_{\Omega} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 k^{-1}(x) dx,$$

that is equivalent with the canonical scalar product on \mathcal{H} (i.e. taking $k=1$) thanks to property (5) on k .

With this definition the operator \bar{A} satisfies: $\forall \Psi_i = (s_i, \mathbf{q}_i) \in D(\bar{A})$, $i = 1, 2$,

$$(8) \quad (\bar{A}\Psi_1 | \Psi_2)_{\mathcal{H}} = (\Psi_1 | \bar{A}\Psi_2)_{\mathcal{H}} + \int_{\partial\Omega} s_1 \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n} dl - \int_{\partial\Omega} s_2 \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n} dl,$$

with \mathbf{n} the unit normal on $\partial\Omega$ pointing outwards Ω .

Definition 2.1. We respectively introduce two restrictions A_D and A_N of the operator \bar{A} relatively to a homogeneous Dirichlet (D) or homogeneous Neumann (N) boundary condition with domains $D(A_D)$ and $D(A_N)$:

$$D(A_D) = H_0^1(\Omega) \times H_{\text{div}}(\Omega), \quad D(A_N) = H^1(\Omega) \times H_{\text{div}}^0(\Omega),$$

with

$$H_{\text{div}}^0(\Omega) = \{\mathbf{q} \in H_{\text{div}}(\Omega), \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

The operators A_D and A_N clearly have dense domains in \mathcal{H} . Using the property (8) they also are symmetric:

$$\forall \Psi_1, \Psi_2 \in D(A) : (A\Psi_1 | \Psi_2)_{\mathcal{H}} = (\Psi_1 | A\Psi_2)_{\mathcal{H}},$$

either with $A = A_D$ or $A = A_N$.

Theorem 2.1. *The two operators A_D and A_N in definition 2.1 are self adjoint.*

With theorem 2.1 We have:

$$\mathcal{H} = \text{Ker}(A_D) \oplus \text{Ran}(A_D) = \text{Ker}(A_N) \oplus \text{Ran}(A_N),$$

we now characterise these spaces.

Corollary 2.2. *In the Dirichlet case*

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A_D) &= \{(0, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in H_{\text{div}}(\Omega) \text{ and } \text{div } \mathbf{q} = 0\}, \\ \text{Ran}(A_D) &= \{(f, k\nabla s), \quad f \in L^2(\Omega), \quad s \in H_0^1(\Omega)\}. \end{aligned}$$

In the Neumann case let us consider

$$\begin{aligned} K_N &= \{(0, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in H_{\text{div}}^0(\Omega) \text{ and } \text{div } \mathbf{q} = 0\}, \\ R_N &= \{(f, k\nabla s), \quad f \in L^2(\Omega), \quad s \in H^1(\Omega)\}. \end{aligned}$$

if $Q \neq 0$: $\text{Ker}(A_N) = K_N$ and $\text{Ran}(A_N) = R_N$,

if $Q = 0$: let us consider Ψ_0 defined in (7),

$$\text{Ker}(A_N) = K_N \oplus \text{Span}(\Psi_0), \quad R_N = \text{Ran}(A_N) \oplus \text{Span}(\Psi_0).$$

We always have $\mathcal{H} = K_N \oplus R_N$.

In addition to these *symmetry* properties, the spectrum of the operators A_D and A_N can be fully characterised. Let us denote

$$\mathrm{Sp}^*(A) := \mathrm{Sp}(A) - \{0\},$$

the spectrum of the operator A without the singleton $\{0\}$. Either for $A = A_D$ or $A = A_N$, $\mathrm{Sp}^*(A)$ displays the same double sequence structure $\mathrm{Sp}^*(A) = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ with:

$$(9) \quad -\infty \xleftarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 < 0 < \lambda_{-1} \leq \dots \leq \lambda_{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Negative values of $\lambda \in \mathrm{Sp}^*(A)$ will be referred to as downstream modes whereas positive values will be referred to as upstream modes.

Theorem 2.3. *The two operators $A_D^{-1} : \mathrm{Ran}(A_D) \mapsto \mathcal{H}$ and $A_N^{-1} : \mathrm{Ran}(A_N) \mapsto \mathcal{H}$ are compact.*

We have $\mathrm{Sp}^(A_D) = (\lambda_n^D)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ and $\mathrm{Sp}^*(A_N) = (\lambda_n^N)_{n \in \mathbb{Z}^*}$, these two sequences satisfy (9).*

Elements of $\mathrm{Sp}^(A_D)$ and of $\mathrm{Sp}^*(A_N)$ are eigenvalues of finite order, the associated eigenvectors $(\Psi_n^D)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ and $(\Psi_n^N)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ form a Hilbert basis (with orthogonal vectors of norm 1) of $\mathrm{Ran}(A_D)$ and $\mathrm{Ran}(A_N)$ respectively.*

We will denote $\Psi_n^D = (T_n^D, \mathbf{q}_n^D)$ and $\Psi_n^N = (T_n^N, \mathbf{q}_n^N)$ the eigenfunctions for the Dirichlet and Neumann cases respectively. We have the relation $\mathbf{q}_n^{D,N} = k \nabla T_n^{D,N} / \lambda_n^{D,N}$.

Two important consequences are (skipping the indexes D and N):

$$(10) \quad \psi \in \mathrm{Ran}(A) \quad \text{iff} \quad \|\psi\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |(\psi | \Psi_n)_{\mathcal{H}}|^2 < +\infty,$$

$$(11) \quad \psi \in D(A) \cap \mathrm{Ran}(A) \quad \text{iff} \quad \|\psi\|_{D(A)}^2 := \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\lambda_n (\psi | \Psi_n)_{\mathcal{H}}|^2 < +\infty,$$

and $\|\psi\|_{D(A)}$ is a norm equivalent to the $H^1(\Omega) \times H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ norm.

Proof of theorem 2.1. The Dirichlet case has already been proved in [15]. The proof in the Neumann case follows the same arguments and is detailed here.

We have $A_N = A_0 + V$ with $A_0 : (s, \mathbf{q}) \in D(A_N) \mapsto (-k^{-1} \mathrm{div} \mathbf{q}, k \nabla s)$ and $V : (f, \mathbf{p}) \mapsto (k^{-1} v f, 0)$. Both A_N and A_0 are symmetric with dense domains and V is bounded on \mathcal{H} . Using the Kato-Rellich theorem (see e.g. [19] p. 163), the self-adjointness of A_0 implies the self-adjointness of A_N . To prove the self-adjointness of A_0 , let us show that $A_0 + i$ has range \mathcal{H} (see e.g. [18]).

Let $(f, \mathbf{p}) \in \mathcal{H}$. Using the Lax Milgram theorem, there exists a unique $\mathbf{q} \in H_{\mathrm{div}}^0(\Omega)$ so that for all $\chi \in H_{\mathrm{div}}^0(\Omega)$:

$$(12) \quad \int_{\Omega} (\mathbf{q} \cdot \chi + \mathrm{div} \mathbf{q} \mathrm{div} \chi) k^{-1} dx = \int_{\Omega} (-i \mathbf{p} \cdot \chi k^{-1} - f \mathrm{div} \chi) dx.$$

More precisely the bilinear form on the left is clearly coercive on $H_{\mathrm{div}}^0(\Omega)$ thanks to property (5) and the linear form on the right is continuous on $H_{\mathrm{div}}^0(\Omega)$.

We introduce the function s so that $is - k^{-1} \mathrm{div} \mathbf{q} = f$. Let us prove that $\Psi = (s, \mathbf{q}) \in D(A_N)$. With $\mathrm{div} \mathbf{q} = k(is - f)$ we get with (12):

$$\forall \chi \in H_{\mathrm{div}}^0(\Omega), \quad - \int_{\Omega} s \mathrm{div} \chi dx = \int_{\Omega} k^{-1} (\mathbf{p} - i \mathbf{q}) \cdot \chi dx,$$

so that in distribution sense $\nabla s = k^{-1}(\mathbf{p} - i\mathbf{q}) \in [L^2(\Omega)]^2$. It follows that $s \in H^1(\Omega)$ and therefore $\Psi \in D(A_N)$. Finally we have $is - k^{-1} \operatorname{div} \mathbf{q} = f$ and $k\nabla s + i\mathbf{q} = \mathbf{p}$ which means that $(f, \mathbf{p}) = A_0\Psi + i\Psi$ and so $\operatorname{Ran}(A_0 + i) = \mathcal{H}$. \square

Proof of corollary 2.2. We prove the Neumann case only. If $\Psi = (s, \mathbf{q}) \in D(A_N)$ satisfies $A_N\Psi = 0$ then $k\nabla s = 0$ and therefore s is a constant. Now we have $sv - \operatorname{div}(q) = 0$ with $s \in \mathbb{R}$.

In case $Q \neq 0$, by integrating $sv - \operatorname{div}(q) = 0$ over Ω and using the divergence formula we get $s \int_{\Omega} v dx = sQ = 0$ and so $s = 0$. It follows that $\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$, as a result $\operatorname{Ker}(A_N) = K_N$ in this case.

In case $Q = 0$, s can be a non zero constant and in this case $\Psi \in \operatorname{Span}(\Psi_0)$ with Ψ_0 defined in (7). Thus $\operatorname{Ker}(A_N) = K_N \oplus \operatorname{Span}(\Psi_0)$ in this case.

we clearly have $R_N \subset K_N^{\perp}$. Since $\mathcal{H} = \operatorname{Ker}(A_N) \oplus \operatorname{Ran}(A_N)$, to end the proof of corollary 2.2 it suffices to show that $\mathcal{H} = K_N \oplus R_N$.

Let $(f, \mathbf{p}) \in \mathcal{H}$. Let $s \in H^1(\Omega)$ so that,

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} k\nabla s \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi dx$$

The function $s \in H^1(\Omega)$ is defined up to an additive constant by the Lax Milgram theorem. Let $\mathbf{q} = \mathbf{p} - k\nabla s$: for all $\varphi \in H^1(\Omega)$ we then have $\int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \varphi dx = 0$ and so $\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$ in distribution sense. Thus $\mathbf{q} \in H_{\operatorname{div}}(\Omega)$ and with the Green formula we get for all $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dl = 0$ and finally $\mathbf{q} \in H_{\operatorname{div}}^0(\Omega)$.

We eventually can decompose $(f, \mathbf{p}) = (f, k\nabla s) + (0, \mathbf{q})$ so that $\mathcal{H} = K_N \oplus R_N$ which ends the proof. \square

Proof of theorem 2.3. The compactness has already been proved in the Dirichlet case with additional regularity assumptions on k in [15]. We here give the proof for $k \in L^{\infty}(\Omega)$ and for the Neumann case only, the proof in the Dirichlet case is similar and a bit simpler. We simply denote $A_N = A$ along this proof.

We consider $(f_n, \mathbf{p}_n) \in \operatorname{Ran}(A)$ a bounded sequence in \mathcal{H} -norm. We consider the unique $(s_n, \mathbf{q}_n) \in D(A) \cap \operatorname{Ran}(A)$ so that $A(s_n, \mathbf{q}_n) = (f_n, \mathbf{p}_n)$, one has to prove that the sequence (s_n, \mathbf{q}_n) is compact. Compactness is in \mathcal{H} -norm, equivalent with the L^2 -norm.

Let us first prove that the sequence (s_n) is compact in $L^2(\Omega)$

We firstly have that $k\nabla s_n = \mathbf{p}_n$ and thus $\|\nabla s_n\|_{L^2}$ is bounded. The Poincaré Wirtinger inequality then ensures that $\|s_n - c_n\|_{L^2}$ is bounded with $c_n = \int_{\Omega} s_n dx$ the mean value of s_n . If we prove that (c_n) is bounded, we obtain that $\|s_n\|_{L^2}$ is also bounded and then that (s_n) is bounded in $H^1(\Omega)$: this will prove that (s_n) is compact in $L^2(\Omega)$ using the Rellich-Kondrachev compactness theorem.

If $Q \neq 0$, we have $vs_n - \operatorname{div}(\mathbf{q}_n) = kf_n$ and integrating over Ω we get that

$$\int_{\Omega} v(s_n - c_n) dx + c_n \int_{\Omega} v dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}_n) dx = \int_{\Omega} v(s_n - c_n) dx + c_n Q = \int_{\Omega} kf_n dx,$$

because \mathbf{q}_n satisfies a zero flux condition on $\partial\Omega$. Since f_n and $s_n - c_n$ are bounded in L^2 -norm, we get that c_n is bounded.

If $Q = 0$, with corollary 2.2 we have the additional constraint here that $((s_n, \mathbf{q}_n)|\Psi_0)_{\mathcal{H}} = 0 = \int_{\Omega} ks_n dx + \int_{\Omega} \mathbf{q}_n \cdot \nabla u_0 dx$. With $vs_n - \operatorname{div}(\mathbf{q}_n) = kf_n$ we have $\int_{\Omega} \mathbf{q}_n \cdot \nabla u_0 dx = \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\mathbf{q}_n)u_0 dx = \int_{\Omega} (kf_n - vs_n)u_0 dx$. The orthogonality constraint then gives

$\int_{\Omega} ((k - vu_0)s_n + kf_n) dx = 0$. From this last equality we get,

$$c_n \int_{\Omega} (k - vu_0) dx = \int_{\Omega} (s_n - c_n)(vu_0 - k) dx - \int_{\Omega} ku_0 f_n dx.$$

The right hand side is bounded. Using that $\operatorname{div}(k\nabla u_0) = v$, the pre-factor satisfies $\int_{\Omega} (k - vu_0) dx = \int_{\Omega} k(1 + \nabla u_0 \cdot \nabla u_0) dx$ and is non zero. It follows that c_n is bounded.

Let us now prove that (\mathbf{q}_n) is compact in $[L^2(\Omega)]^2$.

With corollary 2.2 we firstly have that $\mathbf{q}_n = k\nabla u_n$ with $u_n \in H^1(\Omega)$. We can moreover impose that $\int_{\Omega} u_n dx = 0$. We have that $\|k\nabla u_n\|_{L^2}$ is bounded and with the Poincaré-Wirtinger inequality it follows that u_n is bounded in $H^1(\Omega)$ thus compact in $L^2(\Omega)$. We also have that $g_n := \operatorname{div}(k\nabla u_n) = vs_n - kf_n$ is bounded in $L^2(\Omega)$.

Up to sub-sequence extractions, we then can assume that:

$$\begin{aligned} s_n &\longrightarrow s \text{ strongly in } L^2(\Omega), & u_n &\longrightarrow u \text{ strongly in } L^2(\Omega), \\ \mathbf{q}_n &\longrightarrow \mathbf{q} \text{ weakly in } [L^2(\Omega)]^2, & g_n &\longrightarrow g \text{ weakly in } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

We have to prove that indeed $\mathbf{q}_n \longrightarrow \mathbf{q}$ strongly in $[L^2(\Omega)]^2$.

Let us first prove that $u \in H^1(\Omega)$ with $k\nabla u = \mathbf{q}$ and that $\mathbf{q} \in H_{\operatorname{div}}^0(\Omega)$ with $\operatorname{div} \mathbf{q} = g$.

For all test function $\chi \in [C_c^\infty(\Omega)]^2$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k^{-1} \mathbf{q} \cdot \chi dx &= \lim_n \int_{\Omega} k^{-1} \mathbf{q}_n \cdot \chi dx = \lim_n \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \chi dx = - \lim_n \int_{\Omega} u_n \operatorname{div} \chi dx \\ &= - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \chi dx, \end{aligned}$$

in the distribution sense, this means that $\nabla u = k^{-1} \mathbf{q} \in L^2(\Omega)$ i.e. $u \in H^1(\Omega)$ and $k\nabla u = \mathbf{q}$.

Now for all $\varphi \in H^1(\Omega)$, since $\mathbf{q}_n \in H_{\operatorname{div}}^0(\Omega)$, we have

$$\int_{\Omega} \varphi g dx = \lim_n \int_{\Omega} \varphi g_n dx = \lim_n \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \mathbf{q}_n dx = - \lim_n \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{q}_n dx = - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{q} dx.$$

This first ensures that $\operatorname{div} \mathbf{q} = g \in L^2(\Omega)$ in the sense of distributions, so that $\mathbf{q} \in H_{\operatorname{div}}(\Omega)$. Now that we have $\mathbf{q} \in H_{\operatorname{div}}(\Omega)$, using the Green formula we moreover have for all $\varphi \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \varphi g dx = - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{q} dx = \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \mathbf{q} dx - \int_{\partial\Omega} \varphi \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dl = \int_{\Omega} \varphi g dx - \int_{\partial\Omega} \varphi \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dl..$$

The boundary integral is always equal to zero and thus $\mathbf{q} \in \mathbf{H}_{\operatorname{div}}^0(\Omega)$.

Finally, we now can conclude than $\|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}\|_{L^2} \rightarrow 0$:

$$\|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} kk^{-1}(\mathbf{q}_n - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{q}_n - \mathbf{q}) dx \leq k_M \int_{\Omega} k^{-1}(k\nabla u_n - k\nabla u) \cdot (\mathbf{q}_n - \mathbf{q}) dx,$$

using inequality (5). With the Green formula it follows that,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}\|_{L^2}^2 &\leq k_M \int_{\Omega} \nabla(u_n - u) \cdot (\mathbf{q}_n - \mathbf{q}) dx = -k_M \int_{\Omega} (u_n - u)(g_n - g) dx \\ &\leq k_M \|u_n - u\|_{L^2} \|g_n - g\|_{L^2}, \end{aligned}$$

with the Cauchy-Schwartz inequality. We conclude to $\|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}\|_{L^2} \rightarrow 0$ because $\|u_n - u\|_{L^2} \rightarrow 0$ and $\|g_n - g\|_{L^2}$ is bounded.

We proved that $A^{-1} : \text{Ran}(A) \rightarrow \text{Ran}(A)$ is compact. It is moreover self adjoint by theorem 2.1 and injective by construction. By Hilbert Schmidt theorem there exists an orthogonal Hilbert basis of $\text{Ran}(A)$ made of eigenvectors of A^{-1} , moreover 0 is the only limit points of the associated sequence of (non-zero) eigenvalues.

This proves the remaining part of theorem 2.3 excepted the particular structure (9) displayed by the eigenvalues. To prove this we have to show that the Rayleigh coefficients $(\psi, A\psi)$ are bounded neither above nor below for $\psi \in D(A)$ and $\|\psi\|_{\mathcal{H}} = 1$, we already know that they are unbounded. We have with $\psi = (s, \mathbf{q})$,

$$(\psi, A\psi) = \int_{\Omega} vs^2 dx + 2 \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla s dx.$$

The first term on the right is clearly bounded, then the second one is unbounded and moreover changes of sign when performing the transformation $(s, \mathbf{q}) \rightarrow (-s, \mathbf{q})$. This second term then is unbounded above and below. \square

3. SOLUTIONS ON INFINITE DOMAINS

We here consider the case $I = \mathbb{R}$.

Being given a function $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, we look for a solution T to (4) on $\Omega \times \mathbb{R}$ for the two following problems.

$$(13) \quad \textit{Dirichlet problem:} \quad T(x, z) = f(z) \quad \text{for } x \in \partial\Omega,$$

$$(14) \quad \textit{Neumann problem:} \quad k\nabla T(x, z) \cdot \mathbf{n} = f(z) \quad \text{for } x \in \partial\Omega.$$

We firstly draw the basic ideas to derive solutions to these two problems. Rigorous statements of the solutions are given in the following sub-sections, they follow from these preliminary formal results given below.

With lemma 1.1, we search for a solution $\psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z))$ to $d\psi/dz = \bar{A}\psi$ under the form,

$$\psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} d_n(z) \Psi_n^D \quad \text{or} \quad \psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} d_n(z) \Psi_n^N,$$

for the Dirichlet or Neumann cases respectively.

Formally differentiating the sums we get,

$$\frac{d}{dz} \psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} d'_n(z) \Psi_n^D \quad \text{or} \quad \frac{d}{dz} \psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} d'_n(z) \Psi_n^N,$$

so that $d'_n = (\bar{A}\psi | \Psi_n^D)_{\mathcal{H}}$ or $d'_n = (\bar{A}\psi | \Psi_n^N)_{\mathcal{H}}$ respectively. Using (8) we obtain,

$$d'_n = \lambda_n^D d_n + \int_{\partial\Omega} T(z) \mathbf{q}_n^D \cdot \mathbf{n} dl \quad \text{or} \quad d'_n = \lambda_n^N d_n - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}(z) \cdot \mathbf{n} T_n^N dl.$$

For the Dirichlet problem $T(z) = f(z)$ on $\partial\Omega$. For the Neumann problem we have $k\nabla T = \partial_z \mathbf{q}$ so that $\mathbf{q}(z) \cdot \mathbf{n} = F(z)$ with F a primitive of f on $\partial\Omega$.

Let us introduce the coefficients α_n given either for the Dirichlet or the Neumann problems by:

$$(15) \quad \alpha_n^D = -\frac{1}{\lambda_n^D} \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}_n^D \cdot \mathbf{n} dl, \quad \alpha_n^N = \frac{1}{\lambda_n^N} \int_{\partial\Omega} T_n^N dl.$$

Finally the functions d_n satisfy,

$$d'_n = \lambda_n^D d_n - \lambda_n^D \alpha_n^D f(z) \quad \text{or} \quad d'_n = \lambda_n^N d_n - \lambda_n^N \alpha_n^N F(z),$$

respectively for the Dirichlet or Neumann cases.

In the sequel the function d_n are sought under the form,

$$d_n(z) = \alpha_n^D f(z) + \alpha_n^D c_n(z) \quad \text{or} \quad d_n(z) = \alpha_n^N F(z) + \alpha_n^N c_n(z),$$

thus with the function c_n solution of,

$$c'_n = \lambda_n^D c_n - f' \quad \text{or} \quad c'_n = \lambda_n^N c_n - f,$$

respectively for the Dirichlet or Neumann cases.

In the Dirichlet case, the solution Ψ is then sought under the form,

$$\Psi(z) = f(z) \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^D \Psi_n^D + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^D c_n(z) \Psi_n^D,$$

whereas in the Neumann case it reads,

$$\Psi(z) = F(z) \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^N \Psi_n^N + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^N c_n(z) \Psi_n^N.$$

Let us first characterise the functions $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^D \Psi_n^D$ and $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^N \Psi_n^N$.

3.1. The coefficients α_n .

Lemma 3.1. *The coefficients α_n defined in (15) satisfy:*

$$(16) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^D \Psi_n^D = \varphi^D, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^N \Psi_n^N = \varphi^N,$$

with $\varphi^D \in \text{Ran}(A_D) \cap D(\bar{A})$ uniquely determined by,

$$(17) \quad \varphi^D = (1, k \nabla u^D), \quad u^D \in H_0^1(\Omega) \quad \text{and} \quad \bar{A} \varphi^D = 0,$$

and with $\varphi^N \in \text{Ran}(A_N) \cap D(\bar{A})$ uniquely defined by,

$$(18) \quad \varphi^N = (s^N, k \nabla u^N), \quad k \nabla u^N \cdot \mathbf{n} = 1 \quad \text{on} \quad \partial \Omega$$

$$\text{and} \quad \bar{A} \varphi^N = \begin{cases} 0 & \text{if } Q \neq 0 \\ a \Psi_0 & \text{if } Q = 0, \quad a \in \mathbb{R} \end{cases},$$

for Ψ_0 defined in (7). In the particular case $Q = 0$, the constraint $\varphi^N \in \text{Ran}(A_N)$ implies that $(\varphi^N | \Psi_0)_{\mathcal{H}} = 0$.

The Bessel inequality (10) ensures that $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\alpha_n^D|^2 < +\infty$ and $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\alpha_n^N|^2 < +\infty$. Meanwhile, $\varphi^D \notin D(A_D)$ and $\varphi^N \notin D(A_N)$, we also have with relation (11) $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\lambda_n^D \alpha_n^D|^2 = +\infty$ and $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\lambda_n^N \alpha_n^N|^2 = +\infty$.

Remark 3.1. Let us precise the definition of the particular functions φ^D and φ^N .

- For the Dirichlet case $\varphi^D = (1, k \nabla u^D)$, the function u^D is determined by the equation $\text{div}(k \nabla u^D) = v$ and $u^D = 0$ on the boundary $\partial \Omega$.
- For the Neumann case when $Q \neq 0$, $\varphi^N = (s^N, k \nabla u^N)$ and s^N is a constant, equal to P/Q with P the perimeter of Ω . The second component is defined by $Q \text{div}(k \nabla u^N) = Pv$ and $k \nabla u^N \cdot \mathbf{n} = 1$ on $\partial \Omega$. This equation is well posed as long as $Q \neq 0$ and u^N is defined up to an additive constant. In the sequel we will fix this constant by imposing that:

$$(19) \quad Q \int_{\Omega} v u^N dx = P \int_{\Omega} k dx.$$

- For the Neumann case when $Q = 0$, let us consider the two constants $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(20) \quad a \int_{\Omega} (vu_0 - k) dx = P,$$

$$(21) \quad b \int_{\Omega} (vu_0 - k) dx = a \int_{\Omega} u_0(2k - vu_0) dx + \int_{\partial\Omega} u_0 dl,$$

with P the perimeter of the domain Ω and u_0 defined in (7). In this case the function $\varphi^N = (s^N, k\nabla u^N)$ satisfies $s^N = au_0 + b$.

The function u^N satisfies the elliptic equation $v(au_0 + b) - \operatorname{div}(k\nabla u^N) = ak$ together with the boundary condition $k\nabla u^N \cdot \mathbf{n} = 1$ on $\partial\Omega$.

The justification of the well posedness of a, b and u^N is detailed in the following proof.

Proof. We first prove that there exists a unique $\varphi^D \in \operatorname{Ran}(A_D) \cap D(\bar{A})$ satisfying (17). The condition $\bar{A}\varphi^D = 0$ imposes $\operatorname{div}(k\nabla u^D) = v$ which equation has a unique solution $u^D \in H_0^1(\Omega)$.

We now prove that there exists a unique $\varphi^N \in \operatorname{Ran}(A_N) \cap D(\bar{A})$ satisfying (18). Let first $Q \neq 0$. The condition $\bar{A}\varphi^N = 0$ imposes $s^N \in \mathbb{R}$ and $\operatorname{div}(k\nabla u^N) = s^N v$. With $k\nabla u^N \cdot \mathbf{n} = 1$ on $\partial\Omega$ the compatibility condition has the form $\int_{\Omega} dl = P = s^N Q$ and sets the constant $s^N = P/Q$. The equation $Q \operatorname{div}(k\nabla u^N) = Pv$ with boundary condition $k\nabla u^N \cdot \mathbf{n} = 1$ on $\partial\Omega$ is well posed and defines u^N up to an additive constant.

Let now $Q = 0$. The condition $\bar{A}\varphi^N = a\Psi_0$ first imposes that $k\nabla s^N = ak\nabla u_0$ and so $s^N = au_0 + b$ with $b \in \mathbb{R}$. It secondly imposes the equation,

$$v(au_0 + b) - \operatorname{div}(k\nabla u^N) = ak.$$

With $k\nabla u^N \cdot \mathbf{n} = 1$ on $\partial\Omega$ the compatibility condition for this equation is independent on b and reads:

$$\int_{\Omega} (avu_0 + bv - \operatorname{div}(k\nabla u^N)) dx = a \int_{\Omega} vu_0 dx - P = a \int_{\Omega} k dx.$$

This relation uniquely determines the value of a as stated in (20): note that a is well defined since $\int_{\Omega} (vu_0 - k) dx = \int_{\Omega} (\operatorname{div}(k\nabla u_0)u_0 - k) dx = - \int_{\Omega} (k\nabla u_0 \cdot \nabla u_0 + k) dx \neq 0$. Setting a to this value characterises (for any given value of b) the function u^N up to an additive constant. We got $\varphi^N = (au_0 + b, k\nabla u^N) \in D(\bar{A}) \cap R_N$ satisfying $\bar{A}\varphi^N = a\Psi_0$. We still have to fulfill the constraint $\varphi^N \in \operatorname{Ran}(A_N)$, in the present case $Q = 0$ (see corollary 2.2) we only have to impose $(\varphi^N | \Psi_0)_{\mathcal{H}} = 0$:

$$\begin{aligned} (\varphi^N | \Psi_0)_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} k(au_0 + b) dx + \int_{\Omega} k\nabla u^N \cdot \nabla u_0 dx \\ &= \int_{\Omega} k(au_0 + b) dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(k\nabla u^N)u_0 dx + \int_{\partial\Omega} u_0 dl \\ &= \int_{\Omega} k(au_0 + b) dx + \int_{\Omega} (ka - (au_0 + b)v)u_0 dx + \int_{\partial\Omega} u_0 dl \\ &= b \int_{\Omega} (k - vu_0) dx + a \int_{\Omega} u_0(2k - vu_0) dx + \int_{\partial\Omega} u_0 dl = 0 \end{aligned}$$

This sets the value of b to (21).

With φ^D and φ^N so defined, let us prove (16). For this, since $\varphi^D \in \text{Ran}(A_D)$ and $\varphi^N \in \text{Ran}(A_N)$, it suffices to prove that $(\varphi^D|\Psi_n^D)_{\mathcal{H}} = \alpha_n^N$ and $(\varphi^N|\Psi_n^D)_{\mathcal{H}} = \alpha_n^N$. We do it in the Neumann case only. Using property (8) we get,

$$\lambda_n^N (\varphi^N|\Psi_n^N)_{\mathcal{H}} = (\varphi^N|\bar{A}\Psi_n^N)_{\mathcal{H}} = (\bar{A}\varphi^N|\Psi_n^N)_{\mathcal{H}} + \int_{\partial\Omega} T_n^N k \nabla u^N \cdot \mathbf{n} dl.$$

We always have $(\bar{A}\varphi^N|\Psi_n^N)_{\mathcal{H}} = 0$: either $\bar{A}\varphi^N = 0$ if $Q \neq 0$ or $\bar{A}\varphi^N = a\Psi_0 \in \text{Ran}(A_N)^\perp$ if $Q = 0$. With $k \nabla u^N \cdot \mathbf{n} = 1$ on $\partial\Omega$ we obtain the result: $(\varphi^N|\Psi_n^N)_{\mathcal{H}} = \int_{\partial\Omega} T_n^N dl / \lambda_n^N = \alpha_n^N$. \square

3.2. The Dirichlet problem. We simply denote here $\lambda_n = \lambda_n^D$, $\Psi_n = \Psi_n^D$ and $\alpha_n = \alpha_n^D$. We introduce the functions $c_n(z)$ for $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$(22) \quad c_n(z) = \int_z^{+\infty} f'(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi \quad \text{if } n < 0, \quad c_n(z) = - \int_{-\infty}^z f'(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi \quad \text{if } n > 0.$$

If we assume that f' is bounded, these functions are well defined (because $\lambda_n < 0$ for $n > 0$ and vice versa), they also are bounded, differentiable and verify $c'_n = \lambda_n c_n - f'$.

Proposition 3.2. *We assume that $f \in C^1(\mathbb{R})$ with f' bounded and we consider the mapping $z \in \mathbb{R} \mapsto \psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z)) \in \text{Ran}(A_D)$,*

$$(23) \quad \psi(z) = f(z)\varphi^D + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n,$$

We have,

$$(24) \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap C^0(\mathbb{R}, D(\bar{A})), \quad \frac{d}{dz} \psi = \bar{A} \psi \quad \text{on } \mathbb{R},$$

and T is the solution to the Dirichlet problem (4) (13).

The regularity estimate above simply means that $z \mapsto T(z)$ is C^1 in $L^2(\Omega)$ and continuous in $H^1(\Omega)$: T is a weak solution to equation (4), as stated in lemma, 1.1.

If we moreover assume that $f \in C^2(\mathbb{R})$ with f'' bounded we get the additional regularity,

$$(25) \quad \psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap C^1(\mathbb{R}, D(\bar{A})).$$

This means that $z \mapsto T(z)$ is C^2 in $L^2(\Omega)$, C^1 in $H^1(\Omega)$ and that $z \mapsto k \nabla T(z)$ is continuous in $H_{\text{div}}(\Omega)$. With this assumption T is a strong solution to equation (4), as stated in lemma, 1.1.

The definition of the temperature $T(z)$ associated to ψ in (23) can be precised thanks to remark 3.1. We have,

$$T(z, x) = f(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) T_n(x).$$

Moreover far-field estimates on the temperature can be derived from this expression under suitable assumptions on f . Roughly speaking, if $f(z) \rightarrow f(+\infty)$ as $z \rightarrow +\infty$ then we also have $T(z) \rightarrow f(+\infty)$. If we instead have a linear growth of f at $+\infty$, then $T(z)$ verifies a similar asymptote. This is precised in the following corollary.

Corollary 3.3. *We assume $f \in C^1(\mathbb{R})$ with f' bounded.*

If $\int_0^{+\infty} |f'| dz < +\infty$, then f has a limit in $+\infty$ and:

$$T(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} f(+\infty) \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

We moreover assume $f \in C^2(\mathbb{R})$ with f'' bounded.

If $\int_0^{+\infty} |f''| dz < +\infty$, then f' has a limit in $+\infty$ and:

$$\partial_z T(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} f'(+\infty), \quad T(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} f(z) + f'(+\infty)u^D \quad \text{in } L^2(\Omega),$$

with u^D defined in remark 3.1: $\operatorname{div}(k\nabla u^D) = v$ and $u^D \in H_0^1(\Omega)$.

The regularity assumption on f can be weakened. In particular jumps of f can be taken into account. We still can derive solutions when $f' = g + \delta$ with g continuous and bounded and δ a Dirac-type distribution. The functions $c_n(z)$ in (22) can be defined in this framework as well as the mapping ψ in (23). With such a boundary data ψ remains continuous in \mathcal{H} but is only differentiable outside the support of δ . These properties are detailed in the corollary 3.4

Similarly jumps on f' can be taken into account. Taking now $f'' = g + \delta$ as previously, then $T(z)$ remains C^2 in $L^2(\Omega)$, C^1 in $H^1(\Omega)$ and $k\nabla T(z)$ remains C^0 in $H_{\operatorname{div}}(\Omega)$ outside the support of δ . These properties are detailed in the corollary 3.7.

Corollary 3.4. *Assume that $f(z) = \omega(z)$ with $\omega(z) = 1$ if $z < 0$ and $\omega(z) = 0$ otherwise, so that $f' = -\delta_0$. The computation of the functions $c_n(z)$ in (22) leads to the following definition of $\psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z))$:*

$$(26) \quad \psi(z) = \omega(z)\varphi^D - \omega(z) \sum_{n<0} \alpha_n e^{\lambda_n z} \Psi_n + (1 - \omega(z)) \sum_{n>0} \alpha_n e^{\lambda_n z} \Psi_n.$$

We have,

$$\psi \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap C^\infty(\mathbb{R}^*, D(\bar{A})) \quad \text{and} \quad \frac{d}{dz} \psi = \bar{A} \psi \quad \text{on } \mathbb{R}^*,$$

and T is the solution to the Dirichlet problem (4) (13) with $f = \omega$.

It has the following regularity: $z \mapsto T(z)$ is C^∞ on \mathbb{R}^ in $H^1(\Omega)$ and $z \mapsto k\nabla T(z)$ is C^∞ on \mathbb{R}^* in $H_{\operatorname{div}}(\Omega)$. It then is a strong solution on \mathbb{R}^* .*

At the origin $z = 0$, T is continuous in $L^2(\Omega)$.

Proof of proposition 3.2. Let us first prove the regularity estimates for ψ in equation (23). The regularity for $z \mapsto f(z)\varphi^D$ is clear. From (10) (11), it suffices to prove that the two series $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\lambda_n \alpha_n c_n(z)|^2$ and $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\alpha_n c'_n(z)|^2$ are uniformly converging. We already have from lemma 3.1 that $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\alpha_n|^2 < +\infty$. The uniform convergence then follows from the upper bounds $|\lambda_n c_n(z)| \leq \|f'\|_{L^\infty}$ and $|c'_n| = |\lambda_n c_n - f'| \leq 2\|f'\|_{L^\infty}$.

The boundary condition (13) follows from $\psi(z) - f(z)\varphi^D = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n \in D(A_D) = H_0^1(\Omega) \times H_{\operatorname{div}}(\Omega)$. This implies $T(z) - f(z) \in H_0^1(\Omega)$ by definition (17) of φ^D and therefore $T|_{\partial\Omega} = f(z)$.

Let us now prove that $d\psi/dz = \bar{A}\psi$. On one hand, since $\bar{A}\varphi^D = 0$ we have

$$\bar{A}\psi = \bar{A} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \lambda_n \alpha_n c_n(z) \Psi_n.$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\psi &= f'(z)\varphi^D + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c'_n(z) \Psi_n = f'(z)\varphi^D + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n (-f'(z) + \lambda_n c_n(z)) \Psi_n \\ &= f'(z)(\varphi^D - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n \Psi_n) + \bar{A}\psi. \end{aligned}$$

This gives $d\psi/dz = \bar{A}\psi$ with (16).

Now assume that $f \in C^2(\mathbb{R})$ with f'' bounded. By integrating by part we get for $n < 0$:

$$c_n(z) = \frac{1}{\lambda_n} f'(z) + \frac{1}{\lambda_n} \int_z^{+\infty} f''(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi.$$

With $c'_n = \lambda_n c_n - f'$ we get,

$$c'_n(z) = \int_z^{+\infty} f''(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi.$$

It follows that $|\lambda_n c'_n(z)| \leq \|f''\|_{L^\infty}$. Since $c''_n = \lambda_n c'_n - f''$ we also get the second upper bound $|c''_n(z)| \leq 2\|f''\|_{L^\infty}$.

We have the same upper bounds for $n > 0$, they imply that the two series $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\lambda_n \alpha_n c'_n(z)|^2$ and $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\alpha_n c''_n(z)|^2$ are uniformly converging. With (10) (11), this respectively ensures that $z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n$ is C^1 in $D(\bar{A})$ and C^2 in \mathcal{H} . \square

Proof of corollary 3.3. We assume that $\int_0^{+\infty} |f'| dz < +\infty$. It implies that $\varepsilon(z) = \sup_{[z, +\infty)} |f'| \rightarrow 0$ as $z \rightarrow +\infty$.

Let us prove that the $c_n(z)$ uniformly converges towards 0 as $z \rightarrow +\infty$. With $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\alpha_n|^2 < +\infty$ this will ensure that,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 0 \text{ in } \mathcal{H},$$

which implies that $T(z) \rightarrow f(+\infty)$ in $L^2(\Omega)$.

First for $n < 0$ (and so $\lambda_n > 0$), we have:

$$|c_n(z)| \leq e^{\lambda_n z} \int_z^{+\infty} |f'(\xi)| e^{-\lambda_n \xi} d\xi \leq \varepsilon(z) e^{\lambda_n z} \left[\frac{e^{-\lambda_n \xi}}{-\lambda_n} \right]_z^{+\infty} = \varepsilon(z) / \lambda_n,$$

that implies uniform convergence to 0 for $n < 0$.

Now for $n > 0$ (and so $\lambda_n < 0$), we have for any $z_0 < z$:

$$|c_n(z)| \leq e^{\lambda_n z} \int_{-\infty}^{z_0} |f'(\xi)| e^{-\lambda_n \xi} d\xi + e^{\lambda_n z} \int_{z_0}^z |f'(\xi)| e^{-\lambda_n \xi} d\xi.$$

The second integral is easy to bound: since $-\lambda_n > 0$, we have $0 < e^{-\lambda_n \xi} < e^{-\lambda_n z}$ on $[z_0, z]$ and so:

$$e^{\lambda_n z} \int_{z_0}^z |f'(\xi)| e^{-\lambda_n \xi} d\xi \leq \int_{z_0}^z |f'(\xi)| d\xi \leq \int_{z_0}^{+\infty} |f'(\xi)| d\xi.$$

We now bound the first integral,

$$e^{\lambda_n z} \int_{-\infty}^{z_0} |f'(\xi)| e^{-\lambda_n \xi} d\xi \leq \|f'\|_\infty e^{\lambda_n z} \left[\frac{e^{-\lambda_n \xi}}{-\lambda_n} \right]_{-\infty}^{z_0} = \|f'\|_\infty \frac{e^{\lambda_n(z-z_0)}}{|\lambda_n|} \leq \|f'\|_\infty \frac{e^{\lambda_1(z-z_0)}}{|\lambda_1|},$$

using $\lambda_n < \lambda_1 < 0$ for $n > 0$ and $z - z_0 > 0$. For a given $\varepsilon > 0$, we can find z_0 so that $\int_{z_0}^{+\infty} |f'(\xi)| d\xi < \varepsilon$ and we can find $z_1 > z_0$ so that for all $z > z_1$ we have $\|f'\|_{\infty} e^{\lambda_1(z-z_0)} / |\lambda_1| < \varepsilon$. It follows that $|c_n(z)| < 2\varepsilon$ for all $z > z_1$ and all $n > 0$.

In case $f \in C^2(\mathbb{R})$ with f'' bounded, it has been proved in the proof for proposition 3.2 that,

$$c'_n(z) = \int_z^{+\infty} f''(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi, \quad c'_n(z) = - \int_{-\infty}^z f''(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi,$$

respectively for $n < 0$ and $n > 0$. Thus the same arguments as in the previous case prove that,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c'_n(z) \Psi_n \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 0 \text{ in } \mathcal{H},$$

so that $\partial_z T \rightarrow f'(+\infty)$ as $z \rightarrow +\infty$.

Now we have $c_n = c'_n / \lambda_n + f' / \lambda_n$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n \frac{c'_n(z)}{\lambda_n} \Psi_n + f'(z) \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\alpha_n}{\lambda_n} \Psi_n.$$

The first sum converges to zero as $z \rightarrow +\infty$. The second one towards $f'(+\infty) A_D^{-1} \varphi^D$, with $A_D^{-1} \varphi^D = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n \Psi_n / \lambda_n$ by definition. Let us characterise $A_D^{-1} \varphi^D$. We search for $(s, \mathbf{q}) \in D(A_D)$ so that $\bar{A}(s, \mathbf{q}) = \varphi^D$, it satisfies $s \in H_0^1(\Omega)$ and $k \nabla s = k \nabla u^D$ so that $s = u^D$. Finally we showed that $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) T_n \rightarrow f'(+\infty) u^D$ as $z \rightarrow +\infty$ which ends the proof. \square

Proof of corollary 3.4. The regularity of ψ in equation (26) follows from the observation that, since $\lambda_n \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow -\infty$ and since $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\alpha_n|^2 < +\infty$, then the series $\sum_{n < 0} |\lambda_n^k \alpha_n e^{\lambda_n z}|^2$ is uniformly converging for $z \in (-\infty, -\varepsilon)$ for all $\varepsilon > 0$ and all $k \in \mathbb{N}$. As a result with (11), $z \in (-\infty, 0) \mapsto \sum_{n < 0} \alpha_n e^{\lambda_n z} \Psi_n$ is infinitely differentiable in $D(A_D)$. The same result holds for $z \in (0, +\infty) \mapsto \sum_{n > 0} \alpha_n e^{\lambda_n z} \Psi_n$.

The continuity of ψ at the origin in \mathcal{H} -norm follows from (16).

The proof that $d\psi/dz = \bar{A}\psi$ on \mathbb{R}^* and that $T = w$ on $\partial\Omega$ is identical with the proof of proposition 3.2. \square

3.3. The Neumann problem for $Q \neq 0$. We simply denote here $\lambda_n = \lambda_n^N$, $\Psi_n = \Psi_n^N$ and $\alpha_n = \alpha_n^N$. The functions $c_n(z)$ for $n \in \mathbb{Z}^*$ are alternatively defined as,

$$(27) \quad c_n(z) = \int_z^{+\infty} f(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi \text{ if } n < 0, \quad c_n(z) = - \int_{-\infty}^z f(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi \text{ if } n > 0,$$

For f bounded they are well defined, bounded, differentiable and verify $c'_n = \lambda_n c_n - f$.

Proposition 3.5. *We assume that $f \in C^1(\mathbb{R})$ and that both f and f' are bounded. We introduce F a primitive of f .*

Let us consider the mapping $z \in \mathbb{R} \mapsto \psi(z) \in \text{Ran}(A_N)$,

$$(28) \quad \psi(z) = F(z) \varphi^N + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n,$$

we have

$$\psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap C^1(\mathbb{R}, D(\bar{A})) \text{ and } \frac{d}{dz} \psi = \bar{A} \psi \text{ on } \mathbb{R},$$

and T is a strong solution to the Neumann problem (4) (14).

The regularity of the solution to the Neumann problem is increased of one degree comparatively to the Dirichlet case. This comes from the definition of the function c_n that are defined with respect to f (equation (27)) in the Neumann case whereas they are defined with the help of f' (equation (22)) for the Dirichlet problem.

Another interesting difference with the Dirichlet case is that the temperature now is defined up to an additive constant and we have an infinite set of solutions T . Precisely with remark 3.1, the temperature T can be written as:

$$(29) \quad T(z, x) = \frac{P}{Q}F(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) T_n(x),$$

where F is defined up to an additive constant. This was expected since any constant C is solution to (4) with homogeneous Neumann boundary condition on $\mathbb{R} \times \partial\Omega$. We however have uniqueness for the gradient of T that describes the heat exchanges. To have a unique determination of the temperature, the constant in F has to be set. This means adding some normalisation condition on the temperature (indeed in the Dirichlet case this normalisation also is present but implicitly). Such a normalisation can be done considering the far field temperature with suitable conditions on f (roughly $f \rightarrow 0$ at one end of the duct at least). This is precised in the following corollary

Corollary 3.6. *We assume as in proposition 3.5 that $f \in C^1(\mathbb{R})$ and that both f and f' are bounded.*

If $\int_0^{+\infty} |f| dz < +\infty$, then F has a limit in $+\infty$ and:

$$T(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} F(+\infty) \frac{P}{Q} \quad \text{in } \mathcal{H}.$$

The constant $F(+\infty)$ then can be fixed by a normalisation condition on T at $z = +\infty$.

If $\int_0^{+\infty} |f'| dz < +\infty$, then f has a limit in $+\infty$ and:

$$\partial_z T(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} f(+\infty) \frac{P}{Q}, \quad T(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} F(z) + f(+\infty) u^N \quad \text{in } L^2(\Omega),$$

with u^N defined in remark 3.1: $Q \operatorname{div}(k \nabla u^N) = Pv$ and $k \nabla u^N \cdot n = 1$ on $\partial\Omega$ with the normalisation condition (19).

Similar results could of course also be obtained with asymptotic assumptions on f at $z = -\infty$.

Solution can also be obtained with weaker regularity on the boundary data f : precisely with $f' = g + \delta$ with g continuous and bounded and with δ a Dirac-type distribution. The functions $c_n(z)$ in (27) can be defined in this framework as well as the function ψ in (28). With such a boundary data ψ remains C^1 in \mathcal{H} on \mathbb{R} but is only C^2 in \mathcal{H} and C^1 in $D(\bar{A})$ outside the support of δ . These properties are detailed in the corollary 3.7. Transposed to the Dirichlet context this corresponds to the case $f'' = g + \delta$.

Corollary 3.7. *Assume that $f(z) = \omega(z)$ with $\omega(z) = 1$ if $z < 0$ and $\omega(z) = 0$ otherwise, so that $f' = -\delta_0$. The computation of the functions $c_n(z)$ in (27) in this*

case leads to the following definition of $\psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z))$:

$$(30) \quad \psi(z) = \begin{cases} A_N^{-1}\varphi^N + z\varphi^N - \sum_{n<0} \alpha_n e^{\lambda_n z} \Psi_n / \lambda_n & \text{if } z < 0 \\ \sum_{n>0} \alpha_n e^{\lambda_n z} \Psi_n / \lambda_n & \text{if } z > 0 \end{cases},$$

where $A_N^{-1}\varphi^N = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n \Psi_n / \lambda_n$ is well defined since $\varphi^N \in \text{Ran}(A_N)$.

We have,

$$\psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap C^0(\mathbb{R}, D(\bar{A})) \cap C^\infty(\mathbb{R}^*, D(\bar{A})),$$

and T is a solution to the Neumann problem (4) (14) with $f = \omega$.

The regularity result above means: $z \mapsto T(z)$ is C^∞ on \mathbb{R}^* in $H^1(\Omega)$ and $z \mapsto k\nabla T(z)$ is C^∞ on \mathbb{R}^* in H_{div} -norm. At the origin $z = 0$, T is C^1 in $L^2(\Omega)$ and $k\nabla T$ is continuous in $L^2(\Omega)$.

Proof of proposition 3.5. Let ψ be given by equation (28). The function F in this section plays a symmetric role with f in the previous section (Dirichlet case). Here $F \in C^2(\mathbb{R})$ with F' and F'' bounded: with proposition 3.2, relations (24) and (25) hold for ψ . It only remains to prove that T satisfies (14)

We have $\partial_z \psi = f(z)\varphi^N + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c'_n(z) \Psi_n$. In the proof of proposition 3.2 we showed that $|\lambda_n c'_n(z)| \leq \|F''\|_{L^\infty}$, consequently $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c'_n(z) \Psi_n \in D(A_N)$. It follows that on $\partial\Omega$ we have $\partial_z \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = f(z)k\nabla u^N \cdot \mathbf{n} = f(z)$ using (18). With $\partial_z \mathbf{q} = k\nabla T$ we obtain the desired boundary condition (14). \square

Proof of corollary 3.6. Replacing f by F in the proof of corollary 3.3 gives that:

- if $\int_0^{+\infty} |f| dz < +\infty$ then $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n \rightarrow 0$ as $z \rightarrow +\infty$,
- if $\int_0^{+\infty} |f'| dz < +\infty$ then $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c'_n(z) \Psi_n \rightarrow 0$ and $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n \rightarrow f(+\infty)A_N^{-1}\varphi^N$ as $z \rightarrow +\infty$.

It remains to characterise $(s, \mathbf{q}) = A_N^{-1}\varphi^N$. We use the determination of φ^N in remark 3.1: $k\nabla s = k\nabla u^N$ so that $s = u^N + C$ with C a constant. We now have $v(u^N + C) - \text{div}(\mathbf{q}) = kP/Q$. Integrating over Ω and since $\mathbf{q} \in H_{\text{div}}^0(\Omega)$ we get:

$$Q \int_{\Omega} v(u^N + C) dx = P \int_{\Omega} k dx,$$

so that with the chosen normalisation (19) $C = 0$. \square

Proof of corollary 3.7. Since $F' = \omega \in L^\infty(\mathbb{R})$ we can apply the first part of proposition 3.2 so that (24) holds for ψ in equation (30). The regularity estimates on \mathbb{R}^* are identical to the ones in the Dirichlet case.

Let us examine the boundary condition.

$$\frac{d}{dz} \psi = \begin{cases} \varphi^N - \sum_{n<0} \alpha_n e^{\lambda_n z} \Psi_n & \text{if } z < 0 \\ \sum_{n>0} \alpha_n e^{\lambda_n z} \Psi_n & \text{if } z > 0 \end{cases}.$$

We clearly have $d\psi/dz - \omega(z)\varphi^N \in D(A_N)$ for $z \neq 0$. As a result on the boundary $\partial\Omega$, $k\nabla T \cdot \mathbf{n} = \partial_z \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \omega(z)k\nabla u^N \cdot \mathbf{n} = \omega(z)$ with (18). \square

3.4. The Neumann problem for $Q = 0$. Let us adapt the previous results to the particular case $Q = 0$: notations are unchanged as for the Neumann problem with $Q \neq 0$.

We recall that the definition of $\varphi^N = (s^N, k\nabla u^N) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n \Psi_n$ is singular in this case. As stated in lemma 3.1 and in remark 3.1, $s^N = au_0 + b$ with a and b two constants given in (20) (21) and u_0 defined in (7). We have $\varphi^N \in \text{Ran}(A_N)$, so

that $(\varphi^N | \Psi_0)_{\mathcal{H}} = 0$, and $\bar{A}\varphi^N = a\Psi_0$. We also recall that $\Psi_0 = (1, k\nabla u_0)$ and the definition of $\text{Ran}(A_N)$ in corollary 2.2: $R_N = \text{Ran}(A_N) \oplus \text{Span}(\Psi_0)$.

Proposition 3.8. *The results of proposition 3.5 extends to the case $Q = 0$ with the alternative definition of $\psi : z \in \mathbb{R} \mapsto R_N$:*

$$\psi(z) = aG(z)\Psi_0 + F(z)\varphi^N + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z)\Psi_n,$$

with $G : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ satisfying $G' = F$.

The case $Q = 0$ present singular characteristics that deserves our attention. The temperature reads:

$$T(z) = aG(z) + F(z)(au_0 + b) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z)T_n.$$

When compared to (29) we see that the leading term as $z \rightarrow \pm\infty$ in the temperature are different: if $Q \neq 0$ it is $F(z)P/Q$ whereas when $Q = 0$ it is $aG(z)$. Assume for example that $f = 0$ in a neighbourhood of $+\infty$: in this case $T(z)$ will converge to some limit if $Q \neq 0$ whereas for $Q = 0$ it will present a linear growth. Similarly if $f = L \neq 0$ in a neighbourhood of $+\infty$: in this case $T(z)$ will present a linear growth if $Q \neq 0$ whereas for $Q = 0$ this growth will instead be parabolic. These two properties being consequences of corollary 3.6.

A second important difference is that the solution now is defined up to two constants, which was expected since any function of the form $C_1(z + u_0) + C_2$ is solution of the homogeneous Neumann problem. Thus two solutions of the problem may have different gradient and then correspond to different heat exchanges. To clarify this we rewrite the temperature as,

$$(31) \quad T(z) = C_1(z + u_0) + C_2 + aG(z) + F(z)(au_0 + b) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z)T_n,$$

$$\partial_z T(z) = C_1 + aF(z) + f(z)(au_0 + b) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c'_n(z)T_n.$$

imposing $F(0) = G(0) = 0$ and with C_1, C_2 two constants.

Assume that $f(+\infty) = 0$ and $\int_0^{+\infty} |f'| dz < +\infty$: physically we could say $f = 0$ at one end of the duct. As showed in the proof of corollary 3.6, it implies that $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c'_n(z)\Psi_n \rightarrow 0$ as $z \rightarrow +\infty$. Here $F(+\infty) = \int_0^{+\infty} f dz$ and we get the following limit,

$$\partial_z T(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} C_1 + a \int_0^{+\infty} f dz.$$

This is another important difference with the case $Q \neq 0$ where this limit would be fixed here, equal to $f(+\infty)P/Q$. In the case $Q \neq 0$ this limit is free. We can impose the heat flux at $+\infty$: such an additional condition determines C_1 . With this supplementary condition, we conserve an infinite set of solutions depending on C_2 : but two such solutions have equal gradients and now correspond to equal heat exchanges.

Proof of proposition 3.8. All the regularity estimates will still hold in this case: they only depend on the $c_n(z)$ whose definition remained unchanged. The boundary condition (14) will also be satisfied since $\Psi_0 = (1, k\nabla u_0)$ and u_0 satisfies a zero flux condition on $\partial\Omega$.

We then only have to prove that $\partial_z \psi = \bar{A}\psi$. On one hand, since $\bar{A}\varphi^N = a\Psi_0$ and $\bar{A}\Psi_0 = 0$ we have

$$\bar{A}\psi = aF(z)\Psi_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \lambda_n \alpha_n c_n(z) \Psi_n.$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \psi &= aF(z)\Psi_0 + f(z)\varphi^N + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c'_n(z) \Psi_n \\ &= aF(z)\Psi_0 + f(z)\varphi^N + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n (-f(z) + \lambda_n c_n(z)) \Psi_n \\ &= f(z) \left(\varphi^N - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n \Psi_n \right) + \bar{A}\psi. \end{aligned}$$

This gives $d\psi/dz = \bar{A}\psi$ with (16). \square

4. SOLUTIONS ON SEMI-INFINITE DOMAINS

We here consider the case $I = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

Being given a function $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$, we look for a solution T either to the Dirichlet problem (4) (13) or to the Neumann problem (4) (14) on $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$. These two problems need an additional entry condition on $\Omega \times \{0\}$ to be closed. The theoretical and numerical background to deal with Dirichlet entry condition has been developed in [4], they will be used and briefly discussed in the next numerical section 5. A second methodology has been developed in [1] in order to deal with quite general entry condition: a mixed combination of Dirichlet, Neumann and Robin type, moreover allowing the coupling with additional tubes. Since the focus in this paper is on the lateral boundary conditions, entry condition will not be precised in this section.

4.1. The Dirichlet problem. We again simply denote $\lambda_n = \lambda_n^D$, $\Psi_n = \Psi_n^D$ and $\alpha_n = \alpha_n^D$. We assume that f is differentiable and that f' is bounded.

The functions $c_n(z)$ now are defined for $n \in \mathbb{Z}^*$ by,

$$c_n(z) = \int_z^{+\infty} f'(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi \quad \text{if } n < 0, \quad c_n(z) = - \int_0^z f'(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi \quad \text{if } n > 0.$$

They are well defined, bounded, differentiable and satisfy $c'_n = \lambda_n c_n - f'$. These functions only differs from the ones in equation (22) when $n > 0$, in particular we have $c_n(0) = 0$ for $n > 0$.

Consider the mapping $z \in \mathbb{R}^+ \mapsto \psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z)) \in \text{Ran}(A_N)$,

$$(32) \quad \psi(z) = f(z)\varphi^D + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n + \sum_{n > 0} \beta_n e^{\lambda_n z} \Psi_n,$$

for a given sequence $(\beta_n)_{n > 0}$ satisfying $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\beta_n|^2 < +\infty$.

When comparing (32) with the solution on infinite domain (23) we point out that here the functions $c_n(z)$ have an alternative definition for $n > 0$. We also underline that the additional term $\sum_{n > 0} \beta_n e^{\lambda_n z} \Psi_n \in \text{Ran}(A_D)$ is well defined since $\lambda_n < 0$ for $n > 0$.

The results of proposition 3.2 extends in this context.

Proposition 4.1. *If we assume that $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ with f' bounded then,*

$$(33) \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}) \cap C^0(\mathbb{R}^+, D(\bar{A})), \quad \frac{d}{dz}\psi = \bar{A}\psi \quad \text{on } \mathbb{R}^+,$$

and T is a solution to the Dirichlet problem (4) (13) in the weak sense stated in lemma 1.1. With remark 3.1 the temperature T reads:

$$T = f(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) T_n + \sum_{n > 0} \beta_n e^{\lambda_n z} T_n.$$

If we moreover assume that $f \in C^2(\mathbb{R}^+)$ with f'' bounded we get the additional regularity,

$$\psi \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}) \cap C^1(\mathbb{R}^+, D(\bar{A})).$$

and T is a strong solution of the Dirichlet problem (4) (13).

We refer to proposition 3.2 for the translation of these regularity results in term of temperature T and of heat flux $k\nabla T$.

Remark 4.1. The meaning of the supplementary term $\psi_2(z) = \sum_{n > 0} \beta_n e^{\lambda_n z} \Psi_n$ is the following. The function ψ_2 is a solution to the homogeneous Dirichlet problem (4) (13) (ie taking $f = 0$, see the proof below). This is true for any sequence $(\beta_n)_{n > 0}$ satisfying $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\beta_n|^2 < +\infty$. Its role is to satisfy a prescribed entry condition at $z = 0$. Let us for instance consider the Dirichlet entry condition $T|_{z=0} = E \in L^2(\Omega)$. Then the sequence $(\beta_n)_{n > 0}$ must verify, since $c_n(0) = 0$ for $n > 0$:

$$f(0) + \sum_{n < 0} \alpha_n c_n(0) T_n + \sum_{n > 0} \beta_n T_n = E.$$

It has been proven in [4] that such a sequence exists and is unique. A numerical method to approximate $(\beta_n)_{n > 0}$ is also developed in this work: more details will be given in the numerical section 5.1.

As in the infinite domain case, we could weaken the regularity assumptions on f , allowing in particular jumps of f or of f' . Results in corollary 3.4 can easily be adapted here and we will not detail this matter.

Far field estimates can be derived exactly as in corollary 3.3 (because $z \rightarrow \sum_{n > 0} \beta_n e^{\lambda_n z} \Psi_n$ goes to 0 as well as all its derivatives as $z \rightarrow +\infty$). We only recall these estimates:

- if $\int_0^{+\infty} |f'| dz < +\infty$, then $T(z) \rightarrow f(+\infty)$ as $z \rightarrow +\infty$ in $L^2(\Omega)$,
- if $\int_0^{+\infty} |f''| dz < +\infty$, then $\partial_z T(z) \rightarrow f'(+\infty)$ and $T(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} f(z) + f'(+\infty) u^D$ as $z \rightarrow +\infty$ in $L^2(\Omega)$ (with u^D defined in remark 3.1).

Proof. Let us decompose $\psi(z) = \psi_1(z) + \psi_2(z)$ with,

$$\psi_1(z) = f(z) \varphi^D + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n, \quad \psi_2(z) = \sum_{n > 0} \beta_n e^{\lambda_n z} \Psi_n.$$

The first term ψ_1 can be analysed exactly as in the proof of proposition 3.2: in particular $\psi_1 \in C^1([0, +\infty), \mathcal{H}) \cap C^0([0, +\infty), D(\bar{A}))$ and if $f \in C^2([0, +\infty))$ with f'' bounded then $\psi_1 \in C^2([0, +\infty), \mathcal{H}) \cap C^1([0, +\infty), D(\bar{A}))$. Moreover $\partial_z \psi_1 = \bar{A} \psi_1$, and denoting $\psi_1 = (T_1, \mathbf{q}_1)$ then $T_1 = f(z)$ on $\partial\Omega$.

The second term ψ_2 in turn also can be analysed exactly as in the proof of corollary 3.4 (since $\sum_{n > 0} |\beta_n|^2 < +\infty$): $\psi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^+, D(\bar{A}))$ and $\partial_z \psi_1 = \bar{A} \psi_1$. We also have $\psi_2 = (T_2, \mathbf{q}_2) \in D(A_D)$ so that $T_2 = 0$ on $\partial\Omega$. \square

4.2. The Neumann problem for $Q \neq 0$. We simply denote $\lambda_n = \lambda_n^N$, $\Psi_n = \Psi_n^N$ and $\alpha_n = \alpha_n^N$. We assume that $f \in C^1([0, +\infty))$ with both f and f' bounded.

The functions $c_n(z)$ now are defined for $n \in \mathbb{Z}^*$ by,

$$c_n(z) = \int_z^{+\infty} f(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi \text{ if } n < 0, \quad c_n(z) = - \int_0^z f(\xi) e^{\lambda_n(z-\xi)} d\xi \text{ if } n > 0.$$

They are well defined, bounded, differentiable and satisfy $c_n' = \lambda_n c_n - f$. These functions only differs from the ones in equation (27) when $n > 0$, in particular we have $c_n(0) = 0$ for $n > 0$.

We consider the mapping $z \in \mathbb{R}^+ \mapsto \psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z)) \in \text{Ran}(A_N)$,

$$(34) \quad \psi(z) = F(z)\varphi^N + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n + \sum_{n > 0} \beta_n e^{\lambda_n z} \Psi_n,$$

for $F' = f$ and for some sequence $(\beta_n)_{n > 0}$ satisfying $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\beta_n|^2 < +\infty$.

This mapping can be analysed exactly as in the Dirichlet problem: $\psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap C^1(\mathbb{R}, D(\bar{A}))$ and $\partial_z \psi = \bar{A}\psi$. Moreover the temperature T is a strong solution to the Neumann problem (4) (14). With remark 3.1 the temperature T has the form,

$$T = \frac{P}{Q} F(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) T_n + \sum_{n > 0} \beta_n e^{\lambda_n z} T_n,$$

Remark 4.2. As stated in remark 4.1, the role of $\psi_2(z) = \sum_{n > 0} \beta_n e^{\lambda_n z} \Psi_n$ is to satisfy a prescribed entry condition. The function ψ_2 is a solution to the homogeneous Neumann problem (4) (14) (as long as $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\beta_n|^2 < +\infty$).

For instance for the Dirichlet entry condition $T|_{z=0} = E$, the sequence $(\beta_n)_{n > 0}$ must satisfy,

$$\frac{P}{Q} F(0) + \sum_{n < 0} \alpha_n c_n(0) T_n + \sum_{n > 0} \beta_n T_n = E.$$

Solutions can be obtained with weaker regularity assumptions on the boundary data f , as in corollary 3.7. Far field estimates can be derived exactly as in corollary 3.6; because $z \rightarrow \sum_{n > 0} \beta_n e^{\lambda_n z} \Psi_n$ goes to 0 as well as all its derivatives as $z \rightarrow +\infty$.

4.3. The Neumann problem for $Q = 0$. We keep here the notations and definition of the previous section 4.2.

We introduce a primitive F of f and a primitive G of F . We consider the mapping $z \in \mathbb{R}^+ \mapsto \psi(z) = (T(z), \mathbf{q}(z)) \in R_N$,

$$(35) \quad \psi(z) = aG(z)\Psi_0 + F(z)\varphi^N + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) \Psi_n + \sum_{n > 0} \beta_n e^{\lambda_n z} \Psi_n,$$

with a defined in equation (20) and for some sequence $(\beta_n)_{n > 0}$ satisfying $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\beta_n|^2 < +\infty$.

As in section 4.2, if $f \in C^1([0, +\infty))$ with both f and f' bounded then $\psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap C^1(\mathbb{R}, D(\bar{A}))$ and $\partial_z \psi = \bar{A}\psi$. Moreover the temperature T is a strong solution to the Neumann problem (4) (14). The temperature T reads,

$$T = aG(z) + F(z)(au_0 + b) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) T_n + \sum_{n > 0} \beta_n e^{\lambda_n z} T_n,$$

5. NUMERICAL RESULTS

Our original purpose is the description of the heat exchanges in heating pipes and heat exchangers. In the previous two sections we derived analytical solutions for the temperature and the heat flux on such devices. In this section we provide numerical illustrations and we analyse the efficiency for these analytical solutions to describe the heat exchanges between a fluid flowing in a tube and the surrounding solid. We consider a tube-like geometry $\Omega \times I$ either with $I = \mathbb{R}$ or $I = \mathbb{R}^+$. The fluid is assumed to flow in a circular duct. Following adimensionalisation process in section 1.1, the external radius of the duct is taken equal to one. The velocity v has the Poiseuille profile:

$$v(x) = Pe(1 - \|x - x_0\|^2),$$

with x_0 the centre of the circular duct and with Pe the Péclet number. The thermal diffusivity is taken as homogeneous, $k(x) = 1$.

We will consider four test cases. The two first ones have an axisymmetric configuration. The third one is a periodic configuration describing a collection of parallel circular ducts. The last test case is a counter current configuration where $Q = 0$.

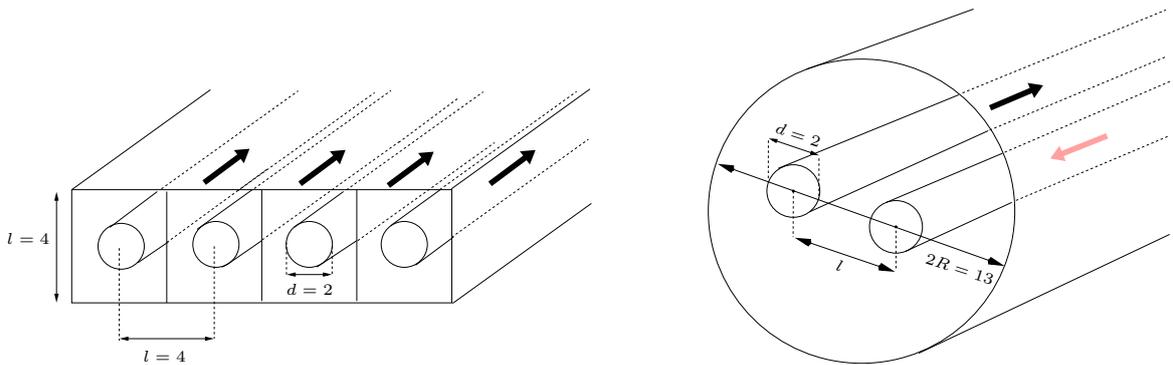


FIGURE 1. Geometrical configurations. On the left, periodic test case: the parallel circular ducts have diameter $d = 2$ and are embedded in square cells of size $l = 4$ and of same centre. On the Right, counter-current test case: two circular ducts of same diameter $d = 2$ are embedded in a solid matrix, also circular, with diameter $2R = 13$. The two ducts are symmetrically located on each side of the matrix center, l denotes their distance that will vary.

5.1. Implementation. For the hereby developed analytical solutions, their numerical approximation follows the same two steps. Firstly truncate the series for $-N \leq n \leq N$. Secondly approximate the N^{th} first eigenvalues λ_n and eigenfunctions Ψ_n (we omitted here the indexes D and N relatively to the Dirichlet or Neumann boundary condition). Once obtained these approximations, the coefficients α_n in (15) (only depending on the Ψ_n) and the functions $c_n(z)$ (that only depend on the λ_n and on the boundary data on $\partial\Omega \times I$) can in turn be approximated.

The numerical approximation of the λ_n and of the Ψ_n already has been studied in [4]. We consider the Neumann case for simplicity. The problem to be solved is, find $(\Psi, \lambda) \in D(A_N) \times \mathbb{R}^*$ so that $A_N \Psi = \lambda \Psi$. The unknown Ψ is replaced by $(u, s) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ so that $\Psi = (u, k \nabla s)$. This is possible because $\Psi \in R_N$ (see corollary 2.2): such a change of variable avoids any problem eventually caused by the

kernel of A_N with the numerical methods. We thus look for $(u, s) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ and $\lambda \in \mathbb{R}^*$ so that for all for all $(\tilde{u}, \tilde{s}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ we have:

$$(\overline{A}(u, k\nabla s)|(\tilde{u}, k\nabla \tilde{s}))_{\mathcal{H}} = \lambda ((u, k\nabla s)|(\tilde{u}, k\nabla \tilde{s}))_{\mathcal{H}}.$$

This problem is approximated considering a mesh of the domain Ω together with P^1 finite element. The discrete problem reads,

$$S_h X = \lambda M_h X,$$

with S_h the stiffness matrix and M_h the mass matrix. The matrix M_h is symmetric positive definite and the matrix S_h as well excepted when $Q = 0$, in this case S_h is only semi definite positive with a one dimensional kernel.

The assembling for these two matrices is done using the finite element library *FreeFem++* [6], being given a mesh of Ω also built using *FreeFem++*. In practice this assembling only involves to build sub-block-matrices that simply are classical mass and stiffness matrices, ie matrices for the L^2 products $(u, v) \mapsto \int_{\Omega} uv dx$ and $(u, v) \mapsto \int_{\Omega} (k\nabla u)(k\nabla v) dx$, which are built by *FreeFem++*. The resolution of the spectral problem $S_h X = \lambda M_h X$ uses the *arpac++* library¹.

Eventually, when considering a semi-infinite problem, we also have to determine the coefficients $(\beta_n)_{n>0}$ in (32) or (34). This question is the topic of [1] for general entry conditions. For Dirichlet entry conditions it has primary been addressed in [4]: we will adopt this strategy here. The sequence $(\beta_n)_{n>0}$ is approximated by a vector $b \in R^N$ solution of a (symmetric positive definite) $K_h b = E_h$. The right hand side E_h depends on the entry condition. The matrix $K_h = [k_{ij}]$ is computed using the eigen functions T_n : simply $k_{ij} = \int_{\Omega} T_i T_j dx$.

5.2. Axisymmetric configuration. We first consider an axisymmetric configuration: the domain Ω is the circle with radius $R = 2$ and centre 0, the fluid part is the circle of radius 1 and same centre 0.

5.2.1. Finite element solver evaluation. For this geometry, both the eigenvalues and the eigenfunctions have an analytical definition following a technique presented in [16]. These analytical solutions can be computed rapidly with an arbitrary small accuracy using a Maple code. This code results will be considered as reference solutions. On the other hand we presented in the previous section our strategy to approximates the λ_n and the Ψ_n on an arbitrary domain Ω using a mesh of Ω and a finite element solver.

The purpose of this sub section is to evaluate the accuracy of this finite element solver by comparing solutions obtained with the finite element solver with the reference ones. We set the boundary condition to the Neumann case. A series of 16 meshes has been considered with a mesh size h varying between 0.157 and 0.0157. We first analyse the convergence of the computed eigenvalues: results are depicted on figure 2. The relative error of the first downstream and upstream eigenvalues with respect to their exact values λ_1 and λ_{-1} has been computed on each of these meshes. We considered three values of the Péclet number: $Pe = 0.1$ (dominant diffusion), $Pe = 1$ and $Pe = 10$ (dominant convection). In all cases, the error goes to zero with an order two convergence with h .

With the same setting we analysed the convergence of the corresponding coefficients $\alpha_{\pm 1}$ that involve the boundary integral of $T_{\pm 1}$. The results are depicted on figure 3.

¹Arpack software: <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK/>

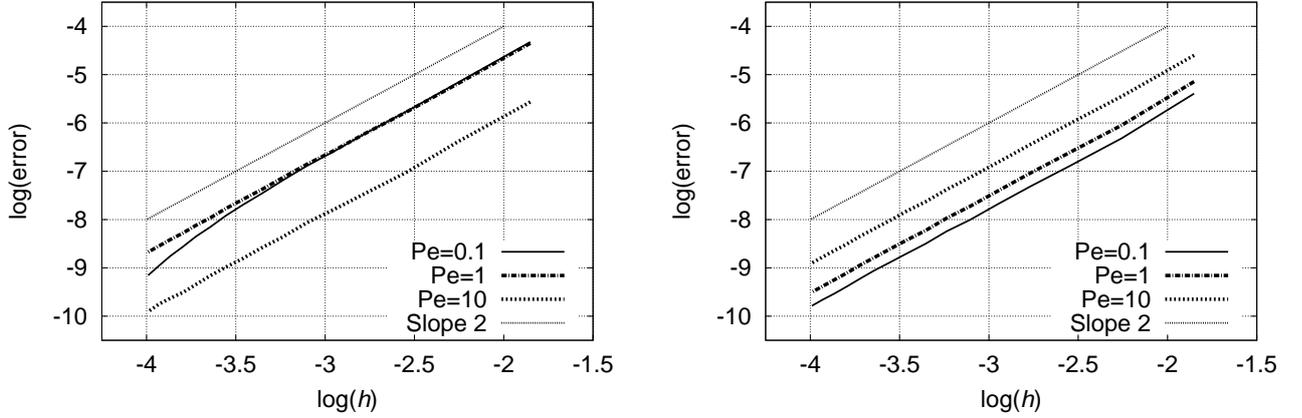


FIGURE 2. Eigenvalue convergence. The convergence of the first downstream (resp. upstream) computed eigenvalue towards its exact value λ_1 (resp. λ_{-1}) with respect to the mesh size h is here depicted on the left (resp. right) for three values of the Péclet number ($Pe = 0.1, 1$ and 10). The relative error is represented as a function of the mesh size h using a (decimal) Log/Log scale. Each plot displays the same linear behaviour with slope 2.

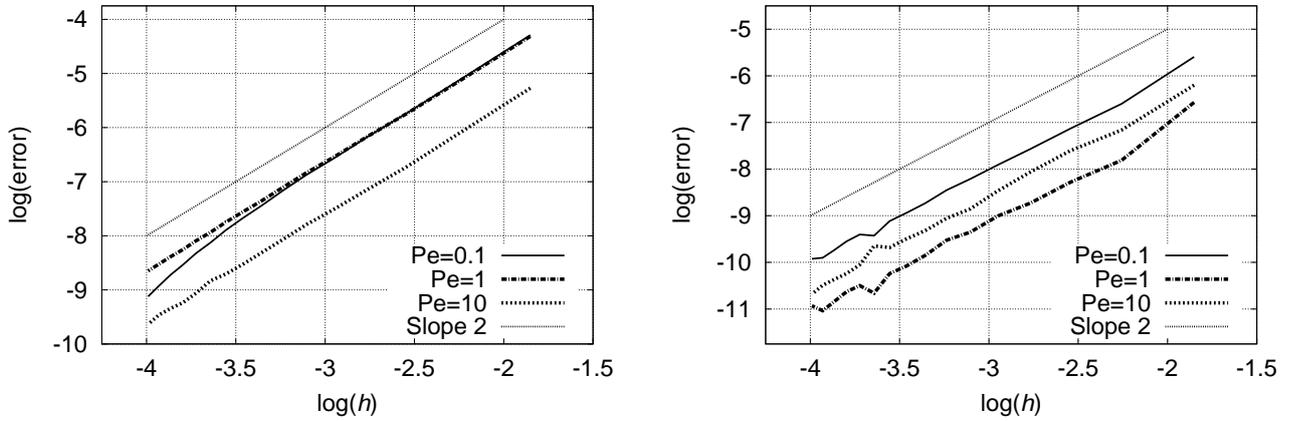


FIGURE 3. Convergence of the coefficients α_n . The convergence of the first downstream (resp. upstream) computed coefficients α_n towards its exact value α_1 (resp. α_{-1}) with respect to the mesh size is here depicted on the left (resp. right) for three values of the Péclet number ($Pe = 0.1, 1$ and 10). The relative error is represented as a function of the mesh size h using a (decimal) Log/Log scale. Each plot displays the same linear behaviour with slope 2.

The convergence for the α_n is of order 2 with the mesh size.

5.2.2. *First axisymmetric test case.* As a first test case we consider the Neumann problem (14) on the infinite domain $\Omega \times \mathbb{R}$. We impose the heat flux $f(z) = 1$ for $z < 0$ and $f(z) = 0$ for $z > 0$ on the boundary $\partial\Omega \times \mathbb{R}$, whose solution is given in

corollary 3.7. The Péclet number is set to $Pe = 10$. We denote by T the solution

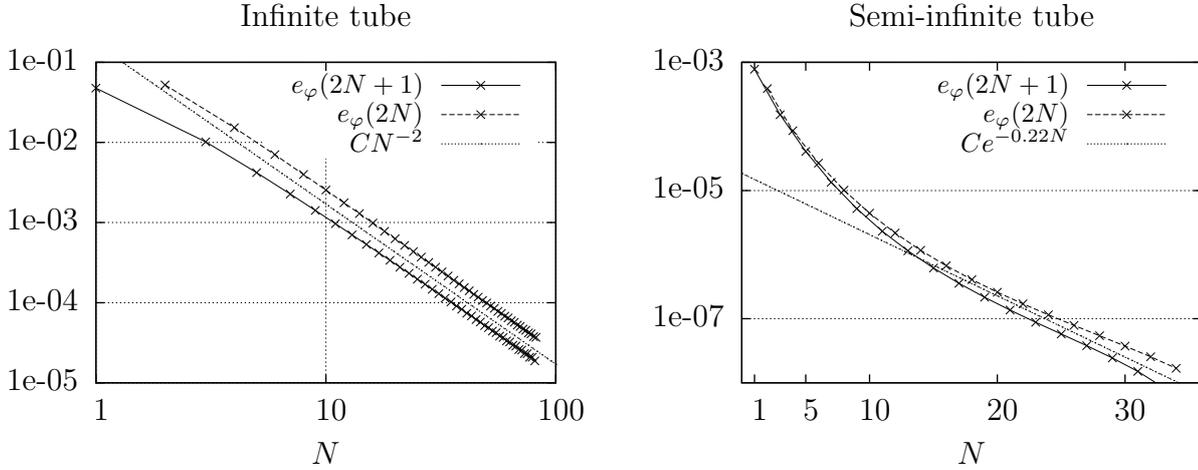


FIGURE 4. Relative error $e_\varphi(N)$ on the computed fluid/solid heat flux $\varphi(N)$ according to the number of considered eigenmodes N . On the left: infinite domain configuration. The odd and even values of the error have been plotted separately. By doing so we observe the same algebraic convergence of order 2 with N of the error: $e_\varphi(N) = O(N^{-2})$. On the right: semi-infinite configuration. Again we distinguished between the odd and even values of the error to observe an exponential convergence $e_\varphi(N) = O(\exp(cN))$ where c has been evaluated to $c \simeq -0.22$.

given by equation (30) and we denote T_N its approximation considering the N^{th} -first computed eigenmodes. We are interested with the computation of the fluid/solid heat flux $\varphi(N)$,

$$(36) \quad \varphi(N) = \int_0^{+\infty} \int_{\partial O} -k \nabla T_N \cdot \mathbf{n} dl dz.$$

with O the fluid domain. So defined the fluid/solid heat flux for the exact solution T is given by $\varphi = \varphi(+\infty)$. This limit value φ has been evaluated using an extrapolation procedure. Using this evaluation of φ we computed the relative error $e_\varphi(N)$ on the fluid/solid heat flux computation,

$$e_\varphi(N) = \left| \frac{\varphi(N) - \varphi}{\varphi} \right|,$$

its behaviour is depicted on figure 4 (on the left). It can be seen on this graph that the error goes to zero with N and that the odd and even values of the error follow two different curves. This two curves however display the same asymptotic behaviour: a geometric convergence towards zero of order 2 with N .

In addition to the convergence asymptotic, it is quite important to notice that one can get very good approximations on the fluid/solid heat flux using very few modes. We always have a prediction with less than 10 % of accuracy and using only 3 modes this accuracy is less than 1 %.

5.2.3. *Second axisymmetric test case.* For the second test case we now consider the Neumann problem (14) on a semi-infinite domain. We impose the heat flux $f(z)$ on the boundary $\partial\Omega \times (0, +\infty)$ with,

$$f(z) = 1 \quad \text{for } z \in [a, b] \quad \text{and} \quad f(z) = 0 \quad \text{otherwise,}$$

which means that we consider here a tube insulated outside the heated region $[a, b]$ and with a homogeneous heating $f(z) = 1$ inside $[a, b]$. We set the heated region defining $a = 2R = 4$ and $b = 3R = 6$. The homogeneous Dirichlet condition $T = 0$ is considered at the entry $z = 0$ modelling a cold fluid injection.

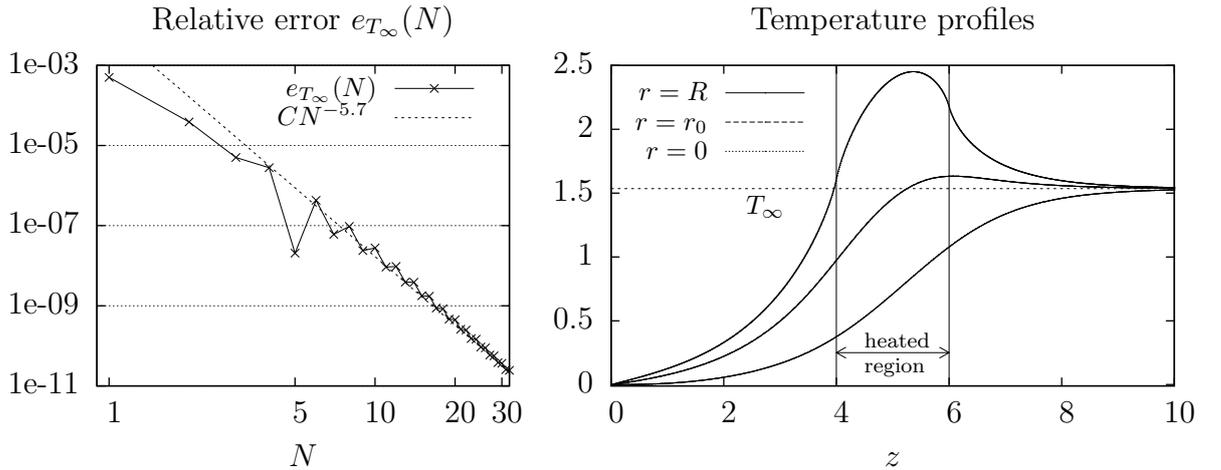


FIGURE 5. Semi infinite test case. Left: relative error $e_{T_\infty}(N)$ on the predicted temperature at $z = +\infty$. We observe a geometric convergence towards zero with a high order evaluated to 5.7. Right: representation of the temperature profiles $z \mapsto T(r, z)$ for three fixed values of r : $r = R$ (boundary), $r = 1$ (fluid/solid interface) and $r = 0$ (duct centre). The heated region (interval $[a, b]$ where $f(z) \neq 0$) is between $z = 2R = 4$ and $z = 3R = 6$. The temperature T_∞ at $z = +\infty$ is also plotted.

The exact solution T is given by equation (34). The function $F(z)$ is any primitive of $f(z)$ and is defined up to a constant. We set $F_0(z)$ the primitive of $f(z)$ so that $F_0(0) = 0$ and we write $F(z) = F_0(z) + \beta_0 Q/P$ with β_0 a constant. By doing so the constant on $F(z)$ is considered as a supplementary unknown β_0 . Introducing the supplementary eigenmode $T_0 = 1$ and $\lambda_0 = 0$, We can rewrite the temperature T as:

$$T = F_0(z)P/Q + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) T_n + \sum_{n \geq 0} \beta_n e^{\lambda_n z} T_n,$$

We approximate T by T_N using a truncation at order N of the series and by computing the N^{th} -first eigenmodes using the maple code. The computation of the constants $(\beta_n)_{0 \leq n \leq N}$ is done following [4] as briefly presented in section 5.1. We numerically observed that the entry condition $T = 0$ ensures the existence and unicity of the constants β_0, \dots, β_N (also depending on N).

With this setting we computed the fluid/solid heat flux $\varphi(N)$ as previously defined in (36). The exact heat flux φ is again computed by extrapolation on the sequence $\varphi(N)$ allowing to compute the relative error $e_\varphi(N)$ on the computed flux. The relative error is depicted on figure 4 on the right. To obtain the asymptotic

regime we again had to distinguish between the odd and even values on the flux. The convergence speed is really fast and is more than algebraic. We observed an exponential convergence $e_\varphi(N) = O(\exp(-cN))$ with $1/5 \leq c \leq 1/4$, precisely c has been evaluated to $c \simeq -0.22$.

An important remark is that we have an easy evaluation of the limit temperature as z goes to $+\infty$. For a given N , we have:

$$T_\infty(N) := \lim_{z \rightarrow +\infty} T_N(z) = \frac{P}{Q} \int_0^{+\infty} f(z) dz + \beta_0.$$

The exact temperature at $+\infty$ $T_\infty := \lim_{z \rightarrow +\infty} T(z)$ is evaluated by extrapolation on the sequence $T_\infty(N)$ and we define the relative error e_{T_∞} on the temperature at infinity as,

$$e_{T_\infty(N)} = \left| \frac{T_\infty(N) - T_\infty}{T_\infty} \right|.$$

Its behaviour is depicted on figure 5 on the left. We observed a extremely fast onvergence of $T_\infty(N)$ towards T_∞ of algebraic type $e_{T_\infty(N)} = O(N^{-c})$ and with order $c \simeq 5.7$. Again, beyond the convergence asymptotic, the important fact is that we already have a precision better than 0.1 % using only one Graetz mode !

It is quite interesting that the high precision and the fast convergence for the far field temperature and the fluid/solid heat flux computation are here obtained even considering a non-regular (discontinuous) boundary heat source term $f(z)$. Eventually, we also plotted the temperature profiles on this configuration. The three profiles $z \mapsto T(r, z)$ for $r = R$, $r = 1$ and $r = 0$ have been plotted on figure 5. They represent the temperature at the solid wall surace, at the fluid/solid interface and at the duct centre. One can check on these profiles that the entry condition $T = 0$ at $z = 0$ is well respected. The temperature secondly increases between the entry $z = 0$ and the strating point of the heated region $z = a$. On the right of the heated region, the temperature reaches fastly the limit temperature T_∞ as $z \rightarrow +\infty$.

5.3. Periodic test case. We consider in this test case a periodic geometry depicted on figure 1. It consists in a series of parallel circular ducts, in which a fluid is flowing, disposed inside a solid. The domain Ω is not bounded but periodic in the horizontal direction. It is composed of a series of squares of size $l = 4$. Each squre is made of a fluid domain: the circle of radius 1 and with centre the square centre, and of a solid matrix. The distance between two successive ducts then also is $l = 4$.

We consider an infinite configuration $\Omega \times \mathbb{R}$ with an imposed boundary flux given by set to $f(z) = 1$ if $z < 0$ and $f(z) = 0$ for $z > 0$. Considering one elementary square, a Neumann boundary condition is considered on its top and bottom edges whereas periodic conditions on T and $\partial_x T$ are imposed on its left and right edges. For symmetry reasons, this boundary condition is equivalent with an homogeneous Neumann one on the whole square cell boundary. The analytical solution for this problem is in corollary 3.7. The Péclet number for each duct is constant $Pe = 10$.

The tentth first Graetz modes are depicted on figure (6). One can note on this figure that the apparent structural complexity of the Graetz modes increases with N .

Our focus concerns the influence of modes truncation on exchanges estimation in order to evaluate exchanger's performance. We computed on this configuration the fluid/solid heat flux $\varphi(N)$ as previously defined in (36). Figure 6 illustrates

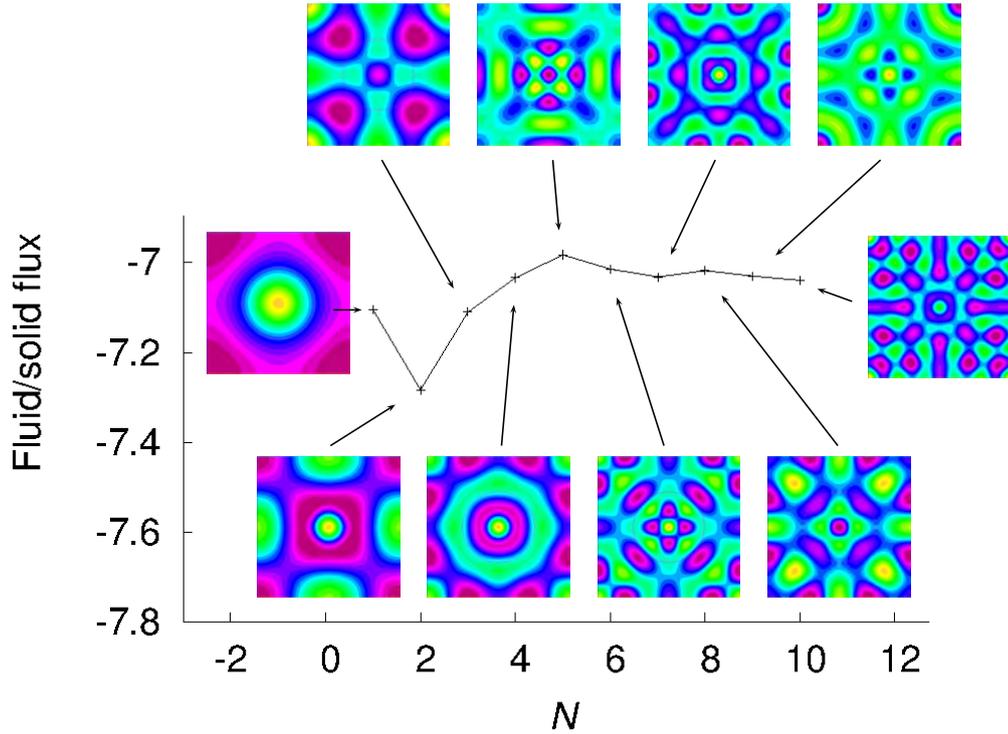


FIGURE 6. Periodic configuration. Fluid-solid flux computed with the ten first eigenmodes and their visualisations

the contribution of the first ten contributing modes to the exchange flux. For the chosen convection dominated examined situation, $Pe = 10$, one can see that few Graetz modes are enough to obtain accurate estimates of the fluid/solid flux. This is more precisely stated in table 1 where the fluxes values $\varphi(N)$ relatively to figure 6 have been reported together with the associated relative error $e_\varphi(N)$. Though these results (on the contrary of the previous computation in section 5.2) might be blurred by some numerical error induced by discretisation, they clearly indicate that with very few Graetz modes one obtains accurate estimations on the fluid/solid flux φ with less than 1% of relative error. This is a very interesting observation, that convection dominated configuration provide an excellent performance for the proposed mode decomposition, so that it is quite easy to get fast and accurate estimate of the exchange performance using the proposed formulation, and this even for a more complex geometrical configuration.

N	1	2	3	5	8	10
$\varphi(N)$	-7.10	-7.28	-7.11	-6.98	-7.02	-7.04
$e_\varphi(N)$	0.011	0.036	0.012	0.007	0.002	0.001

TABLE 1. Periodic configuration. Fluid/solid flux $\varphi(N)$ with respect to N and the associated relative error $e_\varphi(N)$, the reported figures are relative to figure 6.

5.4. Counter current case. We finally consider the counter current configuration, for which the total debit $Q = 0$. It is depicted on the right side of figure 1 and consists of two parallel circular ducts, where a fluid is flowing in opposite directions. The two ducts are encapsulated inside a cylindrical solid with diameter $2R = 13$. The two ducts are symmetrical with the solid centre and their centres distance l is variable. Various values for the Pechlet number will be considered.

We adopt an infinite configuration where the outer solid wall is heated for $z < 0$ and verifies a zero flux condition for $z > 0$ as described in corollary 3.7. The temperature in this case is given by (31): in the $z > 0$ region, the functions F and G are equal to zero. We concentrate on the heat flux on the two internal duct boundaries for $z > 0$, as defined in (36). These fluxes only depend on the constant C_1 in (31), this constant represent the heat flux $\partial_z T$ as $z \rightarrow +\infty$ and is set to $C_1 = 0$ here. The roles of the two ducts is absolutely non symmetric. The fluid in the left tube flows towards the $z > 0$ region. This fluid is heated in the $z < 0$ region by heat diffusion process in the solid. It then brings heat by convection to the $z > 0$ region: then this tube can be considered as the input duct. On the contrary the fluid in the right tube flows towards the $z < 0$ region and it evacuates heat by convection from the $z > 0$ region: it can be considered as the output duct.

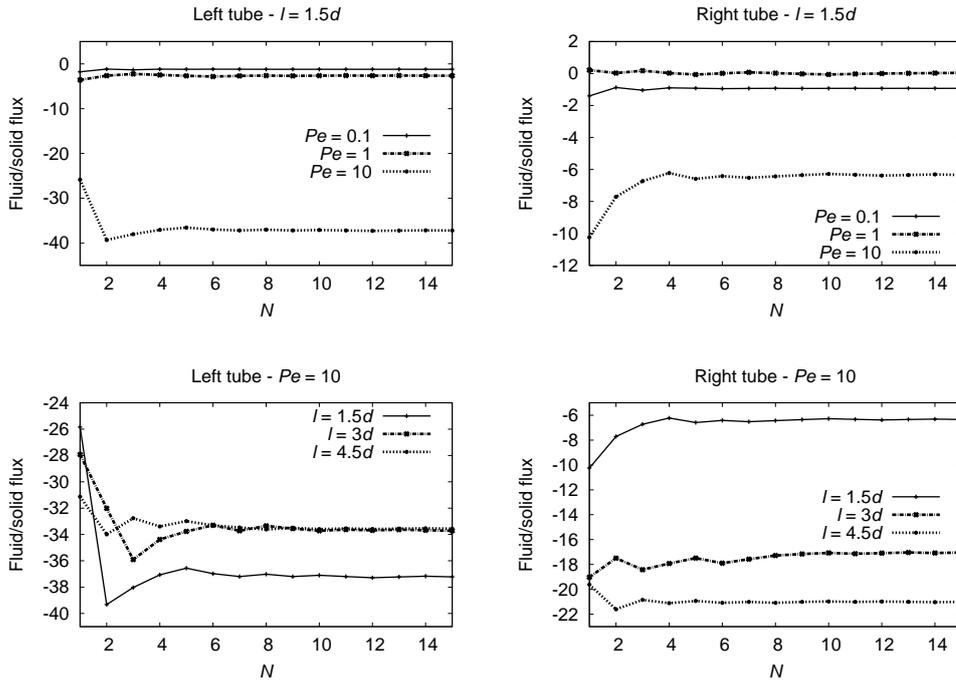


FIGURE 7. Counter current configuration. Fluid/solid heat exchange on the left and right duct boundaries. These fluxes are computed with an increasing number N of eigen modes, the dependence of the computed flux with N is here depicted for various values of the Péclet number (above), and for a varying distance l between the two pipes (below).

On figure 7 is displayed the evaluation of the fluid/solid exchange on both left and right pipe boundaries. These fluxes are computed for three values of the Pechley

number, $Pe = 0.1$, $Pe = 1$ or $Pe = 10$ and for a distance $l = 1.5d = 3$ between the two ducts centres above. Below, the Pechlet number is set to $Pe = 10$ and the distance l between two ducts centres varies from $l = 1.5d = 3$ and $l = 3d = 6$ to $l = 4.5d = 9$. It is interesting to mention that the convergence rate of the flux according to the number of considered eigenmodes is sensitive to the chosen geometrical parameters as well as to the Péclet number. Qualitatively the closer the tubes, the faster mode truncation converges to the exchange flux. On the other hand, increasing the Péclet number provides a slower mode convergence as observed on the upper part of figure 7. Nevertheless, an estimate of the exchange flux accurate within a few percent is obtained in every configurations when aggregating the contribution of less than ten modes.

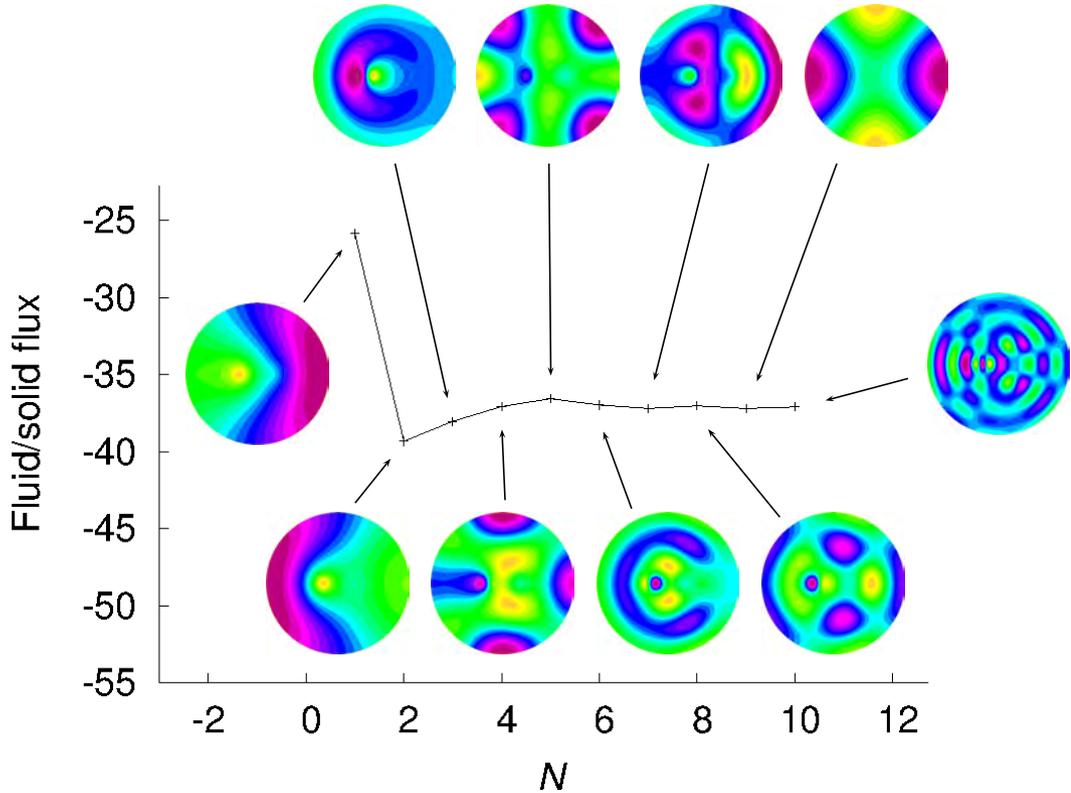


FIGURE 8. Counter current configuration. Fluid/solid flux on the left tube boundary for $z > 0$ computed with the ten first Graetz modes and their visualisations (for $Pe=10$ and $l = 1.5d$).

Another interesting observation is provided on figure 8 where one can observe the spatial structure of the most contributing modes to the exchange flux. We focus for this figure on the case $Pe = 10$, $l = 1.5d$ and on the left tube. The spectral convergence of the fluid/solid flux on this left tube is displayed together with the visualisation of the contributing Graetz modes. As for figure 6, it can be observed that the spatial structure of the modes increases in complexity as their contribution to the exchange flux decreases. For example, the first mode is mostly of zeroth azimuthal order, the second and third modes are of first azimuthal order, the fourth to six modes are principally of azimuthal order three, etc... Nevertheless this observation is not a golden rule since the seventh mode has a azimuthal order one, with an horizontal symmetry as opposed to the second mode which also has a

first azimuthal order but with a vertical symmetry. This observation indicates that the chosen configurations favours some symmetries.

Finally the modal convergence of the flux $\varphi(N)$ displayed on figure 8 is detailed in table 2. It can be observed that considering a few Graetz modes provides an accurate estimation of the fluid/solid flux: 5 to 10 Graetz modes are sufficient to get a 1% accurate evaluation. This confirms the observation made for the periodic test case, even considering a convection dominated configuration and a complex geometry, the Graetz mode decomposition remains efficient to accurately capture the physically important features of the heat transfer.

N	1	2	3	5	8	10
$\varphi(N)$	-25.84	-39.32	-38.03	-36.56	-37.02	-37.10
$e_\varphi(N)$	0.30	0.058	0.024	0.016	0.003	0.001

TABLE 2. Counter current configuration. Fluid/solid flux $\varphi(N)$ for the left tube with respect to N and the associated relative error $e_\varphi(N)$, the reported figures are relative to figure 8.

5.5. Conclusion. This work has permitted to extend the two-dimensional mapping of longitudinally invariant convection/diffusion problems to very general configurations with either prescribed field or fluxes at the outer boundary. In the case of prescribed fluxes, it is necessary to distinguish the case of zero total convective flux (typically encountered in counter-current configurations) from the case of non-zero convective flux. In both cases, we found general analytical expression for the longitudinal variation of the solution, which depends on the applied boundary condition. Those considerations apply to convective exchangers and have been illustrated in some non-trivial configuration to illustrate the versatility and the numerical efficiency of the method for studying complex configurations. This analysis opens new perspective for a systematic and accurate study of convective exchangers and towards their optimisation.

Acknowledgments. The authors thank F. De Gournay and J. Ferhenbach for very fruitful discussions. They led us to a deeper understanding of the physics and of the mathematical properties of the problem, as well as to an efficient implementation to obtain the numerical results.. The authors are indebted to F. De Gournay for insinghful mathematical remarks concerning the extension of the compactness properties.

REFERENCES

- [1] J. Bouyssier, C. Pierre, and F. Plouraboué. Analysis of parallel convective exchangers with versatile inlet/outlet conditions. *Preprint HAL*, 2012.
- [2] Gostoli C. and Gatta A. Mass transfer in a hollow fiber dialyzer. *Journal of Membrane Science*, 6:133–148, 1980.
- [3] Xing Chen, Da Fu Cui, Chang Chun Liu, and Hui Li. Microfluidic chip for blood cell separation and collection based on crossflow filtration. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 2008.
- [4] J. Fehrenbach, F. De Gournay, C. Pierre, and F. Plouraboué. The Generalized Graetz problem in finite domains. *SIAM Appl. Math.*, Accepted manuscript, 2011.
- [5] L. Graetz. Über die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten. *Annalen der Physik*, 261,(7):337–357, 1885.

- [6] F. Hecht, A. Le Hyaric, and O. Pironneau. <http://www.freefem.org/ff++/>.
- [7] C-D. Ho, H-M. Yeh, and W-Y. Yang. Improvement in performance on laminar counterflow concentric circular heat exchangers with external refluxes. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 45(17):3559–3569, 2002.
- [8] C.D. Ho. An analytical study of laminar counterflow double-pass heat exchangers with external refluxes. *Chem. Eng. Comm.*, 43:3263–3274, 2000.
- [9] C.D. Ho, H.M. Yeh, and W.Y. Yang. Double-pass Flow Heat Transfer In A Circular Conduit By Inserting A Concentric Tube For Improved Performance. *Chem. Eng. Comm.*, 192(2):237–255, 2005.
- [10] S. P. Mahulikar and C. P. Tso. A new classification for thermal development of fluid flow in a circular tube under laminar forced convection. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 458:669–682, 2002.
- [11] R. J. Nunge and W. N. Gill. Analysis of heat or mass transfer in some countercurrent flows. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, 8:873–886, 1965.
- [12] R. J. Nunge and W. N. Gill. An analytical study of laminar counter flow double-pipe heat exchangers. *AIChE J.*, 12(2):279–289, 1966.
- [13] W. Nusselt. Die abhängigkeit der wärmeübergangszahl von der rohrlänge. *Z. Ver. Deut. Ing.*, 54:1154–1158, 1910.
- [14] E. Papoutsakis, D. Ramkrishna, and H-C. Lim. The extended Graetz problem with Dirichlet wall boundary conditions. *Appl. Sci. Res.*, 36:13–34, 1980.
- [15] C. Pierre and F. Plouraboué. Numerical analysis of a new mixed formulation for eigenvalue convection-diffusion problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 70(3):658–676, 2009.
- [16] C. Pierre and F. Plouraboué. Generalised graetz problem: analytical solutions for concentric or parallel configurations. *Preprint HAL*, 2012.
- [17] Dušan P. Sekulić R. K. Shah. *Fundamentals of heat exchanger design*. John Wiley and Sons, Ne Jersey, 2003.
- [18] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. I. Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1975.
- [19] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press, New York, 1975.
- [20] R.K. Shah and A.L. London. *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. Academic Press Inc., New York, 1978.
- [21] A.S. Telles, E.M. Queiroz, and G.E. Filho. Solutions of the extended Graetz problem. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44(2):471–483, 2001.
- [22] M. and Li'n A. Vera. Laminar counteflow parallel-plate heat exchangers: Exact and approximate solutions. *Int. J. Heat. Mass. Trans.*, 53(21-22):4885–4898, 2010.
- [23] B. Weigand and G. Gassner. The effect of wall conduction for the extended Graetz problem for laminar and turbulent channel flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 50(5-6):1097–1105, 2007.
- [24] B. Weigand, M. Kanzamar, and H. Beer. The extended graetz problem with piecewise constant wall heat flux for pipe and channel flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44(20):3941–3952, 2001.
- [25] B. Weigand and F. Wrona. The extended Graetz problem with piecewise constant wall heat flux for laminar and turbulent flows inside concentric. *Heat and Mass Transfer*, 39(4):1432–1181, 2003.

(Julien Bouyssier)

UNIVERSITÉ DE TOULOUSE, INPT, UPS, IMFT (INSTITUT DE MÉCANIQUE DES FLUIDES DE TOULOUSE), ALLÉS CAMILLE SOULA, F-31400 TOULOUSE, FRANCE, AND CNRS, IMFT, F-31400 TOULOUSE, FRANCE.

E-mail address: `jbouyssi@imft.fr`

(Charles Pierre)

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS
UNIVERSITÉ DE PAU ET DU PAYS DE L'ADOUR
AV. DE L'UNIVERSITÉ BP 1155
64013 PAU CEDEX - FRANCE

E-mail address: `charles.pierre@univ-pau.fr`

(Franck. Plouraboué)

UNIVERSITÉ DE TOULOUSE, INPT, UPS, IMFT (INSTITUT DE MÉCANIQUE DES FLUIDES DE TOULOUSE), ALLÉS CAMILLE SOULA, F-31400 TOULOUSE, FRANCE, AND CNRS, IMFT, F-31400 TOULOUSE, FRANCE.

E-mail address: `fplourab@imft.fr`

Chapitre 4

Extensions à des conditions aux limites entrée/sortie générales

Contents

4.1	Introduction	93
4.2	Méthode de résolution	95
4.2.1	Conditions d'entrée/sortie prescrites : domaine semi-infini	96
4.2.2	Conditions d'entrée/sortie prescrites : domaine fini	98
4.2.3	Échangeur fini couplé en aval avec un tube semi-infini	100
4.2.4	Échangeur fini couplé en aval et en amont avec un tube semi-infini	103
4.2.5	Cas général	106
4.2.6	Convergence spectrale	107
4.3	Illustrations numériques	109
4.3.1	Formulation du problème discret	110
4.3.2	Tube fini couplé avec un tube semi-infini aval	110
4.3.3	Tube fini couplé avec un tube semi-infini en amont et en aval	113
4.3.4	Échangeur couplé	114
	Bibliographie	128

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous concentrerons sur la possibilité de décrire des conditions d'entrée/sortie complexes à l'aide des modes de Graetz généralisés. Nous présenterons une méthodologie permettant de prendre en compte des conditions aux limites standards (Dirichlet, Neumann et Robin) mais aussi des conditions de couplage avec des conduites en entrée et en sortie.

Nous considérons ici le problème physique de convection-diffusion stationnaire dans un échangeur $\Omega \times I$ avec I semi-infini ou fini tel que présenté au chapitre 2. Nous reprendrons la reformulation de ce problème à l'aide de l'opérateur A et adopterons les notations concernant les modes de Graetz généralisés de la section 2.3.

Plus généralement, nous considérerons le cas de plusieurs échangeurs du type précédemment décrit couplés (ou connectés) selon leur direction longitudinale (qui leur sera donc commune).

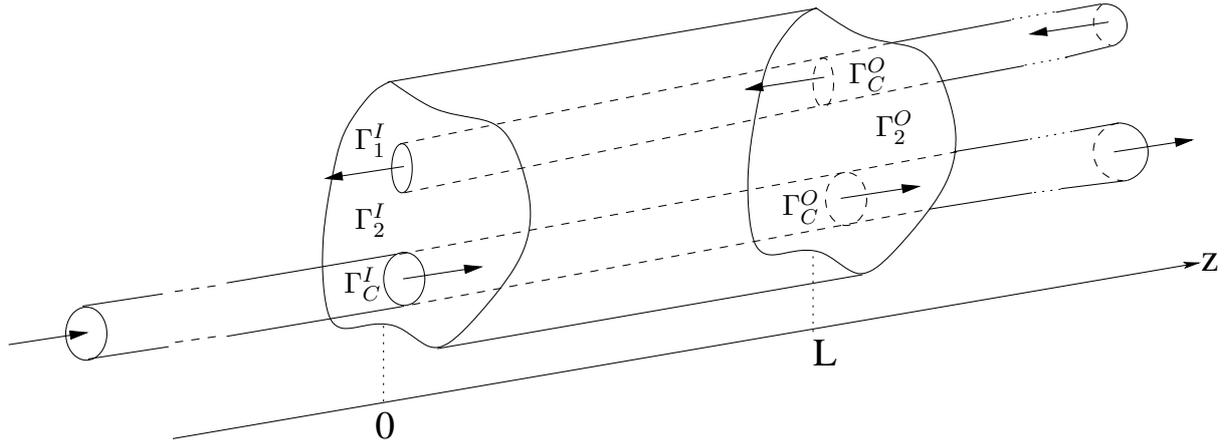


FIGURE 4.1 – Un exemple de configuration d'échangeur. Ici l'échangeur dans la région $\Omega \times (0, L)$ est couplé avec deux tubes en aval et un tube en amont. Les conditions de couplage (4.3) sont imposées sur l'interface entre ces trois tubes et l'échangeur : soit Γ_C^I à l'entrée I (I pour Inlet) et Γ_C^O à la sortie O (O pour Outlet). La température sera prescrite sur Γ_1^I (Dirichlet) et un flux nul imposé sur Γ_2^I et Γ_2^O (Neumann homogène).

Précisons ces conditions d'entrée/sortie générales. Sur l'entrée $\Omega \times \{0\}$ de l'échangeur et sur sa sortie $\Omega \times \{L\}$ (la sortie n'étant considérée que si l'échangeur est fini), ces conditions pourront être de deux types :

- soit une combinaison de conditions de type Dirichlet, Neumann ou Robin,
- soit un couplage avec des tubes semi-infinis (voir figure 4.1) et dans ce cas la continuité de la température et du flux de chaleur seront prescrites sur l'interface entre l'échangeur et le tube.

De telles conditions d'entrée/sortie sont pertinentes en vue des applications étudiées dans [1].

Comme nous nous concentrerons ici essentiellement sur les conditions d'entrée/sortie, pour plus de simplicité nous imposerons une condition de Dirichlet homogène sur le bord latéral de l'échangeur :

$$T = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times I \quad (4.1)$$

Cependant, des conditions latérales plus élaborées pourraient aussi être traitées avec la même approche : par exemple une condition de flux nul sur $\partial\Omega \times I$, à condition de considérer en plus des modes de Graetz généralisés un mode constant ainsi qu'un mode variant linéairement en z , comme présenté dans [2].

Nous considérons donc un échangeur thermique de géométrie $\Omega \times I$, avec soit $I = (0, L)$, soit $I = \mathbb{R}^+$. L'entrée sera notée $\Gamma^I = \Omega \times \{0\}$ et dans le cas fini la sortie sera notée $\Gamma^O = \Omega \times \{L\}$, de sorte que la zone d'entrée/sortie sera Γ avec $\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^O$ dans le cas fini et $\Gamma = \Gamma^I$ dans le cas semi-infini (avec les indices I et O pour *Inlet* et *Outlet* respectivement).

L'entrée et la sortie sont partitionnées en quatre sous domaines :

$$\Gamma^{I,O} = \Gamma_1^{I,O} \cup \Gamma_2^{I,O} \cup \Gamma_3^{I,O} \cup \Gamma_C^{I,O}$$

de sorte qu'également :

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_C$$

et l'on imposera respectivement des conditions de Dirichlet, Neumann et Robin sur les sous domaines 1, 2 et 3 :

$$\begin{aligned} T(\xi) &= f(\xi) & \text{sur} & \Gamma_1 \\ -k\partial_n T(\xi) &= g(\xi) & \text{sur} & \Gamma_2 \\ -k\partial_n T(\xi) &= aT(\xi) + h(\xi) & \text{sur} & \Gamma_3 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Chacune des données f , g , h et α sont des fonctions L^2 , la dérivée $\partial_n T(\xi)$ est égale à $+\partial_z T$ sur la sortie et à $-\partial_z T$ sur l'entrée.

Le sous domaine Γ_C est associé à un éventuel couplage avec un tube semi-infini (couplé à l'entrée et/ou à la sortie, voir figure 4.1). Sur l'interface entre l'échangeur et un de ces tubes semi-infinis seront imposés la continuité de la température et du flux de chaleur :

$$\begin{aligned} T_{\text{left}} &= T_{\text{right}} & \text{sur} & \Gamma_C \\ k\partial_n T_{\text{left}} &= k\partial_n T_{\text{right}} & \text{sur} & \Gamma_C \end{aligned} \quad (4.3)$$

avec k correspondant ici à la conductivité du domaine fluide.

Précisément, on aura à l'entrée Γ^I , où $z = 0$:

$$T_{\text{left}} = T(\xi, 0^-), \quad T_{\text{right}} = T(\xi, 0^+)$$

et à la sortie Γ^O , où $z = L$:

$$T_{\text{left}} = T(\xi, L^-), \quad T_{\text{right}} = T(\xi, L^+)$$

La méthode numérique générale est présentée en section 4.2. Elle est ensuite déclinée dans divers cas spécifiques de conditions d'entrée/sortie, avec à chaque fois une présentation explicite et opérationnelle de l'implémentation. Ces cas sont présentés du plus simple au plus général. La convergence spectrale de la méthode est présentée en section 4.2.6 pour plusieurs configurations simples. La mise en oeuvre de la méthode à l'aide d'éléments finis est présentée en section 4.3 pour des configurations réalistes.

4.2 Méthode de résolution

Nous proposons de résoudre le problème (2.4) pour la configuration décrite dans la section précédente, c'est-à-dire avec les conditions latérales (4.1) et les conditions générales sur l'entrée Γ^I et la sortie Γ^O soit de type condition prescrite (4.2) soit de type couplage (4.3). Le principe général est celui de la minimisation de la fonctionnelle J :

$$\begin{aligned} J(T) &= \int_{\Gamma_1} |T - f|^2 ds + \int_{\Gamma_2} |k\partial_n T + g|^2 ds + \int_{\Gamma_3} |k\partial_n T + aT + h|^2 ds \\ &+ \int_{\Gamma_C} |T_{\text{left}} - T_{\text{right}}|^2 ds + \int_{\Gamma_C} |\partial_z T_{\text{left}} - \partial_z T_{\text{right}}|^2 ds \end{aligned} \quad (4.4)$$

sur un espace V de fonctions T toutes solutions de (2.4). L'espace V sera défini à partir des modes de Graetz généralisés dans l'échangeur $\Omega \times I$ ainsi que des modes de Graetz généralisés associés aux tubes amonts et avals éventuellement couplés à l'échangeur. En pratique, on minimisera J sur des sous espaces V_N de dimensions finis, typiquement définis à l'aide des N premiers modes de Graetz. Pour plus de simplicité, la définition de V sera faite au cas par cas dans les sections qui suivent : dans le cas de conditions prescrites (4.2) d'abord, puis dans le cas du couplage (4.3) ensuite.

Il est à noter que la résolution de (2.4) (4.1) (4.2) (4.3) revient exactement à :

$$\text{trouver } T \in V \text{ tel que } \min_V J = J(T) = 0 \quad (4.5)$$

On le résout en pratique en recherchant une suite $T_N \in V_N$ avec V_N de dimension croissante avec N telle que :

$$\min_{V_N} J = J(T_N) \text{ et } J(T_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (4.6)$$

la décroissance vers 0 de $J(T_N)$ étant vérifiée numériquement et a posteriori à partir des minimiseurs T_N calculés.

La définition de V à l'aide des modes de Graetz en fournira une représentation paramétrique. Sur l'espace V_N , la paramétrisation à l'aide des N premiers modes de Graetz permet de représenter la température T à l'aide d'un vecteur \mathbf{x} , de sorte que V_N sera identifié à \mathbb{R}^M , où M sera typiquement un multiple de N . La fonctionnelle J est convexe et quadratique (par définition (4.4)), elle s'écrira simplement comme :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^M, \quad J(\mathbf{x}) = {}^T \mathbf{x} M \mathbf{x} - 2 {}^T \mathbf{b} \mathbf{x} + c$$

où :

- M est une matrice symétrique définie positive, c'est la matrice du produit scalaire associée à J dans (4.4) pour $f = g = h = a = 0$ écrite sur la base des modes de Graetz
- \mathbf{b} est un vecteur de même dimension que \mathbf{x} , associé aux données f, g, h et a dans (4.4)
- c est un scalaire aussi associé aux données f, g, h et a dans (4.4)

La résolution de (4.6) est donc ramenée à la résolution d'un système linéaire (symétrique défini positif),

$$\text{trouver } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^M \equiv V_N \text{ tel que } M \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (4.7)$$

Il est important de noter que ce système linéaire sera de très petite taille, typiquement de l'ordre de 10 à 20, et que sa résolution ne posera aucun problème numérique. La raison pour cela est que l'essentiel de l'information est contenu dans les modes de Graetz généralisés préalablement calculés et qui *codent* la physique de (2.4) (4.1).

Dans les trois sections suivantes, la définition de l'espace V_N et l'assemblage de la matrice M et du vecteur \mathbf{b} dans (4.7) seront posés : dans le cas des conditions prescrites (4.2) en domaine fini ou semi-infini en sections 4.2.1 et 4.2.2, pour des conditions de couplage (4.3) avec un tube couplé en aval en section 4.2.3 et plusieurs tubes couplés en amont et en aval en section 4.2.4. Le cas général est donné en 4.2.5.

4.2.1 Conditions d'entrée/sortie prescrites : domaine semi-infini

Nous considérons le cas le plus simple d'un échangeur semi-infini $\Omega \times (0, +\infty)$. Nous considérons les conditions d'entrée prescrites (4.2) sur l'entrée $\Gamma^I = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Sous ces hypothèses, l'espace V dans lequel nous chercherons une solution à (2.4) (4.1) (4.2) sera défini ainsi :

$$V = \left\{ T(\xi, z) = \sum_{\mathbb{N}^*} x_n T_n(\xi) e^{\lambda_n z}, \text{ avec } \sum_{\mathbb{N}^*} |x_n \lambda_n|^2 < +\infty \right\}$$

où les T_n sont les modes de Graetz avals définis en section 2.3 et les λ_n les valeurs propres associées ($\lambda_n < 0$ pour $n > 0$). Ainsi défini, V est un sous espace fermé de $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^-)$ dont les éléments sont dans $H^1(\Omega \times \mathbb{R}^-)$ et sont solutions de (2.4) (4.1), comme développé dans [3].

Dans ce cas V_N est défini comme :

$$V_N = \left\{ T(\xi, z) = \sum_{n=1}^N x_n T_n(\xi) e^{\lambda_n z} \right\} \equiv \mathbb{R}^N$$

et V_N sera naturellement identifié à \mathbb{R}^N , précisément selon :

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \longrightarrow T_{\mathbf{x}} = \sum_{n=1}^N x_n T_n(\xi) e^{\lambda_n z} \in V_N \quad (4.8)$$

et V_N est donc de dimension N .

La matrice M dans (4.7) est donnée par $M = M_1 + M_2 + M_3$ où M_i est respectivement la matrice associée au produit $(\cdot, \cdot)_i$ sur V_N :

$$\begin{aligned} (T_a, T_b)_1 &= \int_{\Gamma_1} T_a(\xi, 0) T_b(\xi, 0) ds \\ (T_a, T_b)_2 &= \int_{\Gamma_2} k(\xi) \partial_z T_a(\xi, 0) k(\xi) \partial_z T_b(\xi, 0) ds \\ (T_a, T_b)_3 &= \int_{\Gamma_3} (k(\xi) \partial_z T_a(\xi, 0) + a(\xi) T_a(\xi, 0)) (k(\xi) \partial_z T_b(\xi, 0) + a(\xi) T_b(\xi, 0)) ds \end{aligned}$$

Les coefficients de ces matrices se calculent directement à partir de l'identification de V_N avec $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ en (4.8). La matrice M_1 a pour coefficients les m_{ij}^1 , pour $1 \leq i, j \leq N$:

$$m_{ij}^1 = \int_{\Gamma_1} T_i T_j ds$$

faisant intervenir le produit intégral des modes de Graetz T_i et T_j sur la zone d'entrée Dirichlet Γ_1 . Pareillement, les coefficients m_{ij}^2 et m_{ij}^3 pour les matrices M_2 et M_3 sont donnés par :

$$m_{ij}^2 = \int_{\Gamma_2} (\lambda_i k T_i) (\lambda_j k T_j) ds \quad \text{et} \quad m_{ij}^3 = \int_{\Gamma_3} (\lambda_i k + a) T_i (\lambda_j k + a) T_j ds$$

De la même façon, on définit le vecteur \mathbf{b} dans (4.7) par $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$. Les \mathbf{b}_i sont les vecteurs associés aux formes linéaires sur V_N :

$$\begin{aligned} T &\mapsto \int_{\Gamma_1} T(\xi, 0) f(\xi) ds \\ T &\mapsto \int_{\Gamma_2} -k(\xi) \partial_z T(\xi, 0) g(\xi) ds \\ T &\mapsto \int_{\Gamma_3} (-k(\xi) \partial_z T(\xi, 0) - a(\xi) T(\xi, 0)) h(\xi) ds \end{aligned}$$

Leurs composantes b_i^1 , b_i^2 et b_i^3 , pour $1 \leq i \leq N$, sont calculées à l'aide des modes de Graetz respectivement par :

$$b_i^1 = \int_{\Gamma_1} T_i f ds, \quad b_i^2 = \int_{\Gamma_2} -\lambda_i k T_i g ds \quad \text{et} \quad b_i^3 = \int_{\Gamma_3} (-\lambda_i k + a) T_i h ds$$

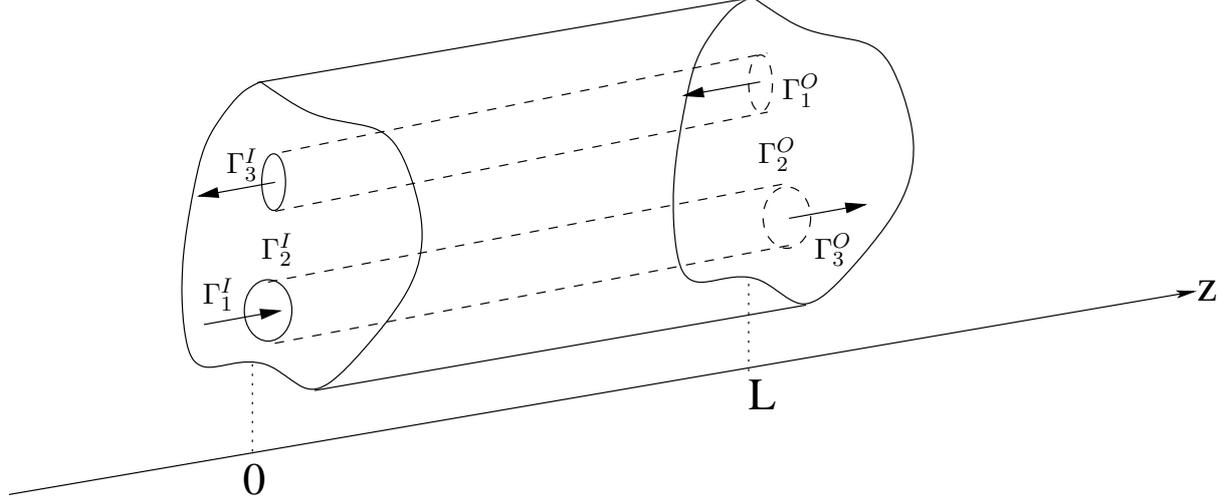


FIGURE 4.2 – Exemple d'échangeur en domaine fini avec conditions d'entrée/sortie spécifiées (4.2). Les écoulements dans les deux tubes sont à contre-courant. Dans cet exemple, les parties solides de l'entrée et de la sortie $\Gamma_2^{I,O}$ sont associées à une condition adiabatique (Neumann homogène). La température est prescrite sur les arrivées de fluide $\Gamma_1^{I,O}$ (Dirichlet), et une condition de Robin est posée sur les sorties de fluide $\Gamma_3^{I,O}$.

4.2.2 Conditions d'entrée/sortie prescrites : domaine fini

On considère désormais un échangeur en domaine fini $\Omega \times (0, L)$ pour les conditions d'entrée/sortie spécifiées en (4.2) sur Γ^I et Γ^O . Un cas particulier de ces conditions limites est illustré en figure 4.2.

Conformément à la théorie développée dans [4], la solution à (2.4) (4.1) (4.2) fera intervenir et les modes de Graetz avals $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et les modes de Graetz amonts $(T_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$. On reprendra par la suite les notations T_n^\pm et λ_n^\pm définies en (2.10) distinguant les modes amonts des modes avals.

L'espace V^f dans lequel sera cherchée la solution à (2.4) (4.1) (4.2) sera défini selon :

$$V^f = \left\{ T(\xi, z) = \sum_{\mathbb{N}^*} x_n^+ T_n^+(\xi) e^{\lambda_n^+ z} + x_n^- T_n^-(\xi) e^{\lambda_n^-(z-L)} \right. \quad (4.9)$$

$$\left. \text{avec } \sum_{\mathbb{N}^*} |x_n^+ \lambda_n^+|^2 + |x_n^- \lambda_n^-|^2 < +\infty \right\}$$

Ainsi défini, V^f est un sous espace fermé de $L^2(\Omega \times (0, L))$ dont les éléments sont dans $H^1(\Omega \times (0, L))$ et sont solutions de (2.4) (4.1).

Pour $T \in V^f$, sa restriction T^I à l'entrée et T^O sur la sortie sont données par :

$$T^I(\xi) = \sum_{\mathbb{N}^*} x_n^+ T_n^+(\xi) + x_n^- T_n^-(\xi) e^{-\lambda_n^- L} \quad (4.10)$$

$$T^O(\xi) = \sum_{\mathbb{N}^*} x_n^+ T_n^+(\xi) e^{\lambda_n^+ L} + x_n^- T_n^-(\xi). \quad (4.11)$$

Le sous espace $V_N^f \subset V^f$ dans lequel sera numériquement cherché un minimiseur de la fonctionnelle J dans (4.4) est défini comme :

$$V_N^f = \left\{ T(\xi, z) = \sum_{n=1}^N x_n^+ T_n^+(\xi) e^{\lambda_n^+ z} + x_n^- T_n^-(\xi) e^{\lambda_n^-(z-L)} \right\} \equiv \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^N \quad (4.12)$$

et V_N^f sera naturellement identifié à $\mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^N$, précisément selon :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-) \in \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^N \longrightarrow T_{\mathbf{x}}^f \in V_N^f \\ \text{avec} \quad T_{\mathbf{x}}^f &= \sum_{n=1}^N x_n^+ T_n^+(\xi) e^{\lambda_n^+ z} + x_n^- T_n^-(\xi) e^{\lambda_n^-(z-L)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

et V_N^f est de dimension $2N$.

La recherche de $T_N \in V_N^f$ satisfaisant (4.6) se fait en résolvant (4.7). Dans ce cas :

- l'inconnue \mathbf{x} ainsi que le second membre \mathbf{b}^f sont deux vecteurs dans $\mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^N$ que l'on notera blocs par blocs :

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}^+ \\ \mathbf{x}^- \end{vmatrix}, \quad \mathbf{b}^f = \begin{vmatrix} \mathbf{b}^+ \\ \mathbf{b}^- \end{vmatrix}$$

- la matrice M est de taille $2N \times 2N$ et sera notée aussi par blocs de tailles $N \times N$. On la notera M^f .

La matrice M^f se décompose en :

$$M^f = M^I + M^O \quad (4.14)$$

où les $M^{I,O}$ sont respectivement les matrices associées aux formes bilinéaires $(\cdot, \cdot)^{I,O}$ sur V_N^f :

$$\begin{aligned} (T_a, T_b)^I &= \int_{\Gamma_1^I} T_a(\xi, 0) T_b(\xi, 0) ds + \int_{\Gamma_2^I} k \partial_z T_a(\xi, 0) k \partial_z T_b(\xi, 0) ds \\ &+ \int_{\Gamma_3^I} (k \partial_z T_a(\xi, 0) + a T_a(\xi, 0)) (k \partial_z T_b(\xi, 0) + a T_b(\xi, 0)) ds \\ (T_a, T_b)^O &= \int_{\Gamma_1^O} T_a(\xi, L) T_b(\xi, L) ds + \int_{\Gamma_2^O} k \partial_z T_a(\xi, L) k \partial_z T_b(\xi, L) ds \\ &+ \int_{\Gamma_3^O} (k \partial_z T_a(\xi, L) + a T_a(\xi, L)) (k \partial_z T_b(\xi, L) + a T_b(\xi, L)) ds \end{aligned}$$

Les coefficients de ces matrices se calculent directement à partir de l'identification de V_N^f avec $\mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^N$ en (4.13), et grâce à l'écriture (4.10) de $T \in V_N^f$ en entrée et (4.11) de $T \in V_N^f$ en sortie.

Introduisons les matrices K^I et K^O s'écrivant par blocs :

$$K^{I,O} = \begin{bmatrix} K_{++}^{I,O} & K_{+-}^{I,O} \\ K_{-+}^{I,O} & K_{--}^{I,O} \end{bmatrix}$$

et dont les coefficients $k_{\pm\pm}^{I,O}(i, j)$, $0 \leq i, j \leq N$, sont définis par :

$$\begin{aligned} k_{\pm\pm}^{I,O}(i, j) &= \int_{\Gamma_1^{I,O}} T_i^\pm T_j^\pm ds + \int_{\Gamma_2^{I,O}} \lambda_i^\pm k T_i^\pm \lambda_j^\pm k T_j^\pm ds \\ &+ \int_{\Gamma_3^{I,O}} (\lambda_i^\pm k + a) T_i^\pm (\lambda_j^\pm k + a) T_j^\pm ds \end{aligned}$$

Les matrices K^I et K^O sont symétriques car $K_{+-}^{I,O} = K_{-+}^{I,O}$.
Alors les matrices M^I et M^O sont données par :

$$M^I = \begin{bmatrix} K_{++}^I & K_{+-}^I D_- \\ D_- K_{+-}^I & D_- K_{--}^I D_- \end{bmatrix}$$

$$M^O = \begin{bmatrix} D_+ K_{++}^O D_+ & D_+ K_{+-}^O \\ K_{+-}^O D_+ & K_{--}^O \end{bmatrix}$$

où les matrices D_{\pm} sont diagonales :

$$D_+ = \text{Diag} \left(e^{\lambda_1^+ L}, \dots, e^{\lambda_N^+ L} \right), \quad D_- = \text{Diag} \left(e^{-\lambda_1^- L}, \dots, e^{-\lambda_N^- L} \right) \quad (4.15)$$

Ainsi l'assemblage de la matrice $M^f = M^I + M^O$ en (4.14) nécessite :

- le calcul des coefficients $k_{ij}^{I,O}$ des matrices K^I et K^O
- la distribution de ces coefficients dans les matrices M^I et M^O avec des pondérations selon les coefficients des deux matrices diagonales D_+ et D_-

Le vecteur \mathbf{b}^f se décompose également en :

$$\mathbf{b}^f = \mathbf{b}^I + \mathbf{b}^O \quad (4.16)$$

où les vecteurs \mathbf{b}^{IO} sont respectivement les représentations des formes linéaires suivantes sur V_N^f :

$$T \in V_N^f \mapsto \int_{\Gamma_1^I} T f ds + \int_{\Gamma_2^I} -k \partial_z T g ds + \int_{\Gamma_3^I} (k \partial_z T + a T) h ds$$

$$T \in V_N^f \mapsto \int_{\Gamma_1^O} T f ds + \int_{\Gamma_2^O} -k \partial_z T g ds + \int_{\Gamma_3^O} (k \partial_z T + a T) h ds$$

Introduisons les vecteurs $\beta^I = \begin{vmatrix} \beta_+^I \\ \beta_-^I \end{vmatrix}$ et $\beta^O = \begin{vmatrix} \beta_+^O \\ \beta_-^O \end{vmatrix}$ dont les composantes $\beta_{\pm}^{IO}(i)$, pour $1 \leq i \leq N$, sont données par :

$$\beta_{\pm}^{IO}(i) = \int_{\Gamma_1^{IO}} T_i^{\pm} f ds + \int_{\Gamma_2^{IO}} \lambda_i^{\pm} k T_i^{\pm} g ds + \int_{\Gamma_3^{IO}} (\lambda_i^{\pm} k + a) T_i^{\pm} h ds$$

Alors β^I et β^O sont définis selon :

$$\mathbf{b}^I = \begin{vmatrix} \beta_+^I \\ D_- \beta_-^I \end{vmatrix}, \quad \mathbf{b}^O = \begin{vmatrix} D_+ \beta_+^O \\ \beta_-^O \end{vmatrix}$$

où D_{\pm} sont les matrices diagonales définies en (4.15).

4.2.3 Échangeur fini couplé en aval avec un tube semi-infini

Nous considérons ici un échangeur fini $\Omega \times (0, L)$ couplé avec un tube en sortie $\omega \times (L, +\infty)$. Le domaine ω associé au tube est un sous domaine de Ω : $\omega \subset \Omega$. On suppose que l'écoulement dans ce tube se fait dans la direction des $z > 0$, de sorte que ce couplage modélise une condition limite libre sur ce tube en sortie. Les conditions d'entrée/sortie (4.2) (4.3) seront les suivantes :

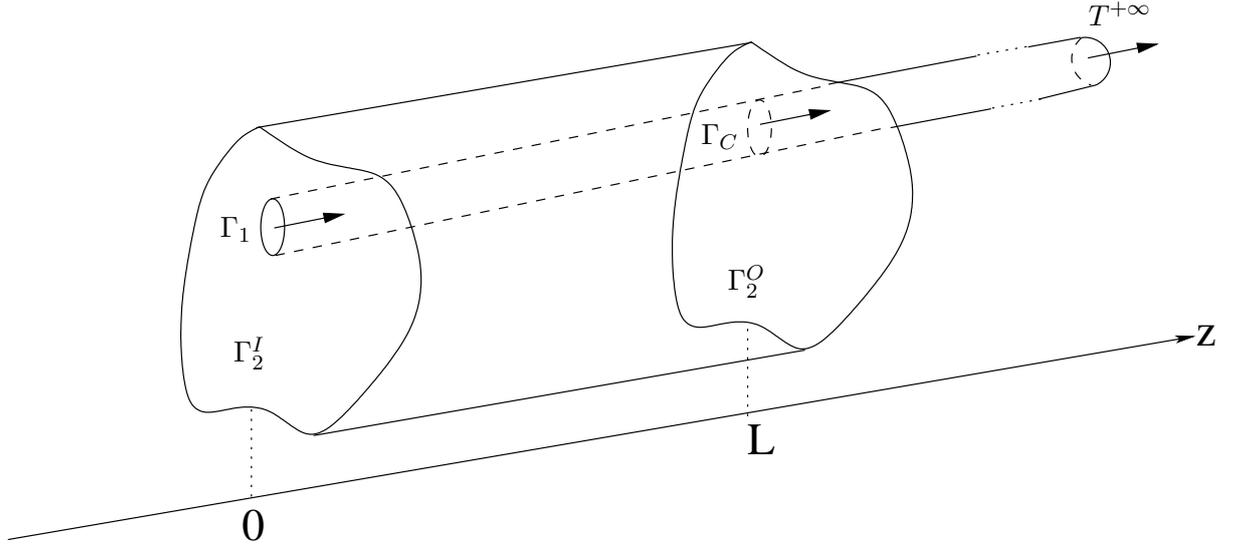


FIGURE 4.3 – Exemple de configuration impliquant un échangeur fini $\Omega \times (0, L)$ couplé en sortie avec un tube semi-infini. L'écoulement dans le tube se fait dans le sens des $z > 0$. Dans cet exemple, les conditions prescrites (4.2) sont imposées à l'entrée fluide (température imposée sur Γ_1) et sur la partie solide (conditions adiabatiques sur Γ_2^I), tandis que les conditions de couplage (4.3) sont appliquées à la sortie fluide $\Gamma_C = \omega \times \{L\}$: couplage entre l'échangeur et le tube semi-infini $\omega \times (L, +\infty)$. La température à l'infini $T^{+\infty}$ dans le tube semi-infini est une inconnue du problème à déterminer.

- conditions de couplage (4.3) à la sortie du tube $\Gamma_C = \omega \times \{L\}$
- conditions prescrites (4.2) sur l'entrée Γ^I et sur le reste de la sortie $\Gamma^O - \Gamma_C$
- la température en $+\infty$, $T^{+\infty}$ est libre et est une inconnue du problème

Un exemple de configuration de ce type est illustré en figure 4.3.

L'équation constitutive dans chacun des domaines $\Omega \times (0, L)$ et $\omega \times (L, +\infty)$ est la même équation (2.4). Au sein de l'échangeur $\Omega \times (0, L)$ la condition latérale est inchangée : condition de Dirichlet homogène (4.1). La condition latérale sur le tube semi-infini est fixée à une condition adiabatique (Neumann homogène) :

$$\nabla_{\xi} T \cdot \mathbf{n} = \partial_n T = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega \times (L, +\infty) \quad (4.17)$$

En plus des modes de Graetz généralisés T_n^{\pm} , λ_n^{\pm} définis en (2.10) associés à (2.4) (4.1) sur Ω , nous considérerons les modes de Graetz généralisés t_n^{\pm} , μ_n^{\pm} associés à (2.4) (4.1) sur ω afin de décrire le champ de température dans le tube aval. Les t_n^+ sont les modes de Graetz avals associés aux valeurs propres $\mu_n^+ < 0$ et seront utilisés ici pour représenter la température dans $\omega \times (L, +\infty)$. On considérera l'espace V^O :

$$V^O = \left\{ T(\xi, z) = x_0 + \sum_{\mathbb{N}^*} x_n t_n^+(\xi) e^{\mu_n^+(z-L)}, \quad \text{avec} \quad \sum_{\mathbb{N}^*} |x_n \mu_n^+|^2 < +\infty \right\} \quad (4.18)$$

Il est à noter que la définition de $T \in V^O$ fait intervenir la constante x_0 , cette constante représente la température à l'infini $x_0 = T^{+\infty}$ qui n'est pas fixée ici du fait de la condition de Neumann homogène sur le bord latéral du tube aval. Cette constante est une des inconnues du problème.

Une solution à notre problème couplé est cherchée dans l'espace V :

$$V = \left\{ T, \quad T|_{\Omega \times (0,L)} \in V^f \quad \text{et} \quad T|_{\omega \times (L,+\infty)} \in V^O \right\}$$

avec V^f défini en (4.9).

Définissons V_N^O comme :

$$V_N^O = \left\{ T(\xi, z) = x_0 + \sum_{n=1}^N x_n t_n^+(\xi) e^{\mu_n^+(z-L)} \right\} \equiv \mathbb{R}^{N+1} \quad (4.19)$$

qui sera identifié à \mathbb{R}^{N+1} par,

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow T_{\mathbf{x}}^O = x_0 + \sum_{n=1}^N x_n t_n^+(\xi) e^{\mu_n^+(z-L)} \in V_N^O, \quad (4.20)$$

et est de dimension $N + 1$.

Nous chercherons une solution approchée au problème de minimisation (4.5) à partir d'une suite $T_n \in V_n$ qui minimise J (4.6), avec :

$$V_N = \left\{ T, \quad T|_{\Omega \times (0,L)} \in V_N^f \quad \text{et} \quad T|_{\omega \times (L,+\infty)} \in V_N^O \right\} \equiv X$$

avec V_N^f défini en (4.12) et avec $X = \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^{N+1}$. Un élément $\mathbf{x} \in X$ sera noté comme $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, \mathbf{x}^O)$. L'identification entre X et V_N se fait selon :

$$\mathbf{x} \in X \longrightarrow T_{\mathbf{x}} \in V_N, \quad T_{\mathbf{x}}|_{\Omega \times (0,L)} = T_{(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-)}^f \quad \text{et} \quad T_{\mathbf{x}}|_{\omega \times (L;+\infty)} = T_{\mathbf{x}^O}^O$$

avec les identifications T^f et T^O définies en (4.13) et en (4.20).

La recherche de $T_N \in V_N$ satisfaisant (4.6) se fait en résolvant (4.7).

La matrice M du système linéaire à inverser se décompose d'abord comme :

$$M = \begin{bmatrix} M^f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + M_C^O$$

où M^f définie en (4.14) est associée à la première partie de la fonctionnelle J en (4.4) dédiée aux conditions prescrites (4.2) (M^f est de taille $2N \times 2N$ et est complétée avec trois blocs nuls).

La matrice M_C^O est associée au couplage sur Γ_C et est la matrice de la forme bilinéaire :

$$(T_a, T_b) \in V_N \times V_N \mapsto \int_{\omega \times \{L\}} |T_a|_{\text{left}} - T_b|_{\text{right}}|^2 + |\partial_z T_a|_{\text{left}} - \partial_z T_b|_{\text{right}}|^2 ds \quad (4.21)$$

Elle s'assemble à l'aide des coefficients suivants :

$$\begin{aligned} q_{\pm\pm}(i, j) &= (1 + \lambda_i^\pm \lambda_j^\pm) \int_{\omega} T_i^\pm T_j^\pm ds \quad \text{pour} \quad 1 \leq i, j \leq N \\ r_{\pm\pm}(i, j) &= (1 + \lambda_i^\pm \mu_j^\pm) \int_{\omega} T_i^\pm t_j^\pm ds \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq N \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq N \\ s_{\pm\pm}(i, j) &= (1 + \mu_i^\pm \mu_j^\pm) \int_{\omega} T_i^\pm t_j^\pm ds \quad \text{pour} \quad 0 \leq i, j \leq N \end{aligned} \quad (4.22)$$

avec la convention que $t_0^\pm = 1$ est la fonction constante égale à un sur ω et $\mu_0^\pm = 0$. Ces coefficients définissent trois types de matrices respectivement :

- les 4 matrices $Q_{\pm\pm}$ de taille $N \times N$
- les 2 matrices $R_{\pm+}$ de taille $N \times (N + 1)$
- la matrice S_{++} de taille $(N + 1) \times (N + 1)$

La matrice M^C est alors définie comme :

$$M^C = \begin{bmatrix} M_+ & C_+ \\ {}^T C_+ & S_{++} \end{bmatrix}$$

avec M_+ de taille $2N \times 2N$, C_+ de taille $2N \times (N + 1)$ définies par bloc comme :

$$M_+ = \begin{bmatrix} D_+ Q_{++} D_+ & D_+ Q_{+-} \\ Q_{+-} D_+ & Q_{--} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_+ = \begin{bmatrix} -R_{++} \\ -R_{-+} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

avec D_+ la matrice diagonale définie en (4.15). Au final la matrice M s'écrit :

$$M = \begin{bmatrix} M^f + M_+ & C_+ \\ {}^T C_+ & S_{++} \end{bmatrix}$$

L'assemblage du second membre n'est pas modifié par les conditions de couplage qui sont ici purement homogènes, précisément le second membre \mathbf{b} est donné par :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^f \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec \mathbf{b}^f associé aux conditions prescrites et défini en (4.16) de taille N et auquel on adjoint un bloc nul de taille $N + 1$.

4.2.4 Échangeur fini couplé en aval et en amont avec un tube semi-infini

Nous considérons maintenant un échangeur fini $\Omega \times (0, L)$ couplé avec un tube en entrée $\omega \times (-\infty, L)$ et en sortie $\omega \times (L, +\infty)$. Nous reprenons ici les notations de la section précédente, on suppose de nouveau que l'écoulement dans ce tube se fait dans la direction des $z > 0$. Les conditions d'entrée/sortie (4.2) (4.3) seront les suivantes :

- conditions de couplage (4.3) à l'entrée du tube $\Gamma_C^I = \omega \times \{0\}$
- conditions de couplage (4.3) à la sortie du tube $\Gamma_C^O = \omega \times \{L\}$
- conditions prescrites (4.2) sur le reste de l'entrée $\Gamma^I - \Gamma_C^I$ et de la sortie $\Gamma^O - \Gamma_C^O$
- la température en $-\infty$ est imposée égale à $T^{-\infty}$, c'est une contrainte du problème alors que la température en $+\infty$ $T^{+\infty}$ est libre et est une inconnue du problème.

Un exemple de cette configuration est illustré en figure 4.4 .

Nous reprenons les hypothèses et notations de la section précédente. L'équation constitutive dans chacun des domaines $\Omega \times (0, L)$, $\omega \times (-\infty, 0)$ et $\omega \times (L, +\infty)$ est la même équation (2.4). Les conditions latérales sont : Dirichlet homogène (4.1) sur l'échangeur $\Omega \times (0, L)$, Neumann homogène (4.17) sur $\partial\omega \times (L, +\infty)$ ainsi que sur le tube amont :

$$\nabla_\xi T \cdot \mathbf{n} = \partial_n T = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega \times (-\infty, 0)$$

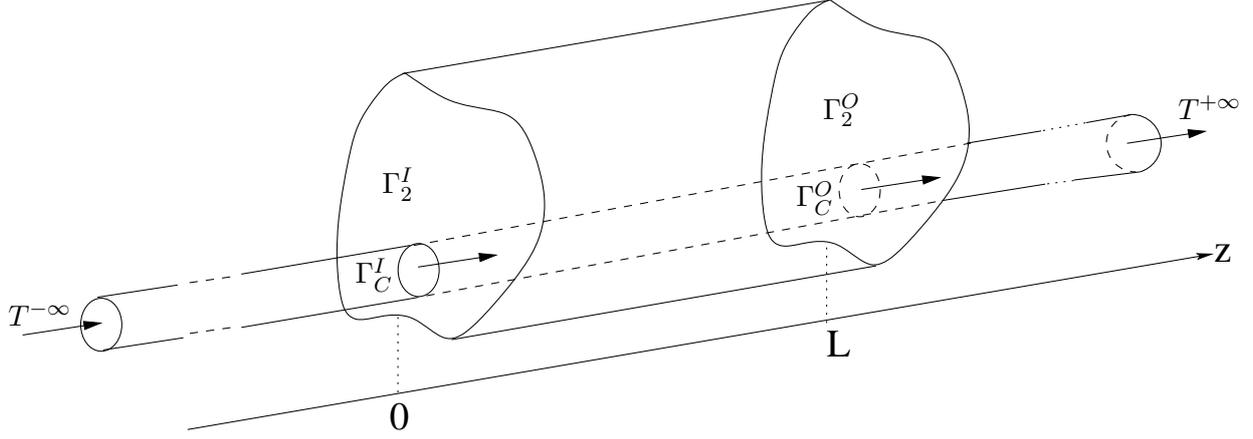


FIGURE 4.4 – Exemple de configuration impliquant un échangeur fini $\Omega \times (0, L)$ couplé en entrée et en sortie avec un tube semi-infini. L'écoulement dans le tube se fait dans le sens des $z > 0$. Dans cet exemple les conditions prescrites (4.2) sont imposées uniquement à la partie solide (conditions adiabatiques sur Γ_2^{IO}), tandis que les conditions de couplage (4.3) sont appliquées à l'entrée fluide $\Gamma_C^I = \omega \times \{0\}$ et à la sortie fluide $\Gamma_C^O = \omega \times \{L\}$. Il s'agit respectivement de coupler l'échangeur avec les tubes amont $\omega \times (-\infty, 0)$ et aval $\omega \times (L, +\infty)$. La température avale à l'infini $T^{+\infty}$ dans le tube aval est une inconnue du problème à déterminer, tandis que la température amont à l'infini $T^{-\infty}$ dans le tube amont est une donnée.

La description de la température dans le tube aval se fera à l'aide de l'espace V^I :

$$V^I = \left\{ T(\xi, z) = T^{-\infty} + \sum_{\mathbb{N}^*} x_n t_n^-(\xi) e^{\mu_n^- z}, \quad \text{avec} \quad \sum_{\mathbb{N}^*} |x_n \mu_n^-|^2 < +\infty \right\}$$

et l'on rappelle qu'ici $T^{-\infty}$ est une contrainte imposée.

Une solution à notre problème couplé est cherchée dans l'espace V :

$$V = \{T, \quad T|_{\Omega \times (0, L)} \in V^f, \quad T|_{\omega \times (-\infty, 0)} \in V^I \quad \text{et} \quad T|_{\omega \times (L, +\infty)} \in V^O\}$$

avec V^f défini en (4.9) et V^O défini en (4.18).

Définissons V_N^I comme :

$$V_N^I = \left\{ T(\xi, z) = T^{+\infty} + \sum_{n=1}^N x_n t_n^-(\xi) e^{\mu_n^- z} \right\} \equiv \mathbb{R}^N \quad (4.24)$$

qui sera identifié à \mathbb{R}^N par :

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \longrightarrow T_{\mathbf{x}}^I = T^{+\infty} + \sum_{n=1}^N x_n t_n^-(\xi) e^{\mu_n^- z} \in V_N^I \quad (4.25)$$

et est de dimension N .

Nous chercherons une solution approchée au problème de minimisation (4.5) à partir d'une suite $T_n \in V_n$ qui minimise J (4.6), avec :

$$V_N = \left\{ T, \quad T|_{\Omega \times (0, L)} \in V_N^f, \quad T|_{\omega \times (-\infty, 0)} \in V_N^I \quad \text{et} \quad T|_{\omega \times (L, +\infty)} \in V_N^O \right\} \equiv X$$

avec V_N^f et V_N^O définis en (4.12) (4.19) respectivement et avec $X = \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^{N+1} \oplus \mathbb{R}^N$. Un élément $\mathbf{x} \in X$ sera noté comme $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, \mathbf{x}^O, \mathbf{x}^I)$. L'identification entre X et V_N se fait selon :

$$\mathbf{x} \in X \longrightarrow T_{\mathbf{x}} \in V_N, \quad T_{\mathbf{x}}|_{\Omega \times (0,L)} = T_{(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-)}^f, \quad T_{\mathbf{x}}|_{\omega \times (-\infty), 0} = T_{\mathbf{x}^I}^I, \quad \text{et} \quad T_{\mathbf{x}}|_{\omega \times (L, +\infty)} = T_{\mathbf{x}^O}^O$$

avec les identifications T^f , T^I et T^O prédéfinies en (4.13) (4.20) (4.25).

La recherche de $T_N \in V_N$ satisfaisant (4.6) se fait en résolvant (4.7).

La matrice M du système linéaire à inverser est de taille $(2N + (N + 1) + N) \times (2N + (N + 1) + N)$ et se décompose par blocs comme :

$$M = \begin{bmatrix} M^f + M_+ & C_+ & 0 \\ {}^T C_+ & S_{++} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + M_C^I$$

où :

- la matrice de gauche correspond et à la première partie de la fonctionnelle J en (4.4) dédiée aux conditions prescrites (données par M^f en (4.14)) et au couplage en aval (précisément à la forme bilinéaire (4.21)). Cette matrice est exactement celle décrite dans la section précédente plus des blocs nuls
- la matrice de droite M_C^I est associée au couplage en amont, précisément à la forme bilinéaire suivante :

$$(T_a, T_b) \in V_N \times V_N \mapsto \int_{\omega \times \{0\}} |T_{a|left} - T_{b|right}|^2 + |\partial_z T_{a|left} - \partial_z T_{b|right}|^2 ds$$

La matrice M_C^I a une définition similaire à M_C^O , elle s'écrit par blocs comme :

$$M_C^I = \begin{bmatrix} M_- & 0 & C_- \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^T C_- & 0 & S_{--} \end{bmatrix}$$

avec M_- de taille $2N \times 2N$, C_- de taille $2N \times N$ définis par bloc comme :

$$M_- = \begin{bmatrix} Q_{++} & Q_{+-} D_- \\ D_- Q_{+-} & D_- Q_{--} D_- \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_- = \begin{bmatrix} -R_{+-} \\ -R_{--} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

avec D_- la matrice diagonale définie en (4.15) et où les matrices $Q_{\pm\pm}$, $R_{\pm\pm}$ et $S_{\pm\pm}$ sont celles introduites dans la section précédente à l'aide des coefficients $q_{\pm\pm}(i, j)$, $r_{\pm\pm}(i, j)$ et $s_{\pm\pm}(i, j)$ en (4.22).

Au final la matrice M s'écrit :

$$M = \begin{bmatrix} M^f + M_+ + M_- & C_+ & C_- \\ {}^T C_+ & S_{++} & 0 \\ {}^T C_- & 0 & S_{--} \end{bmatrix}$$

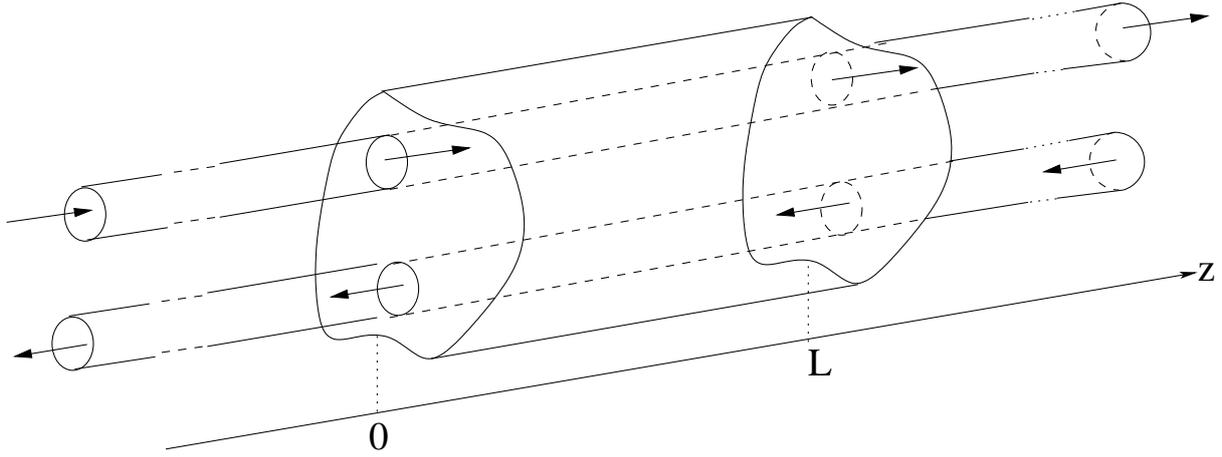


FIGURE 4.5 – Exemple d'échangeur en domaine fini couplé avec deux tubes. Les deux tubes sont à contre courant, chacun d'eux est couplé en $z = 0$ et en $z = L$ avec l'échangeur via les conditions (4.3). La partie solide de l'entrée et de la sortie de l'échangeur est associée aux conditions prescrites (4.2).

L'assemblage du second membre \mathbf{b} n'est modifié par rapport au cas de l'échangeur fini que par l'adjonction de la contrainte $T = T^{-\infty}$ en aval lorsque $z \rightarrow -\infty$. On a :

$$\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{b}^f \\ 0 \\ \mathbf{b}^{-\infty} \end{vmatrix}$$

où $\mathbf{b}^{-\infty}$ est un vecteur de taille N dont les composantes sont les $\mathbf{b}^{-\infty}(i) = T^{-\infty} \int_{\omega} t_i^-(\xi) ds$, et avec \mathbf{b}^f définis en (4.16).

4.2.5 Cas général

A la lumière des cas traités précédemment, on peut donner la forme du système (4.7) à résoudre pour le cas général où un échangeur fini $\Omega \times (0, L)$ est couplé avec p tubes en entrée/sortie. Un exemple est illustré en figure 4.5.

La température dans l'échangeur est cherchée sous la forme (4.12). Dans chacun des tubes elle est cherchée :

- soit sous la forme (4.19) si le tube est en aval
- soit sous la forme (4.24) si le tube est en amont

et considérant à chaque fois les modes $t_i^{\pm}(\xi)$, μ_i^{\pm} associés au tube considéré. La matrice M du système à inverser sera :

$$M = \begin{bmatrix} M^f + M_1 + \dots + M_p & C_1 & \dots & C_p \\ & {}^T C_1 & & \\ & \vdots & \ddots & \\ & {}^T C_p & & S_p \end{bmatrix}$$

avec :

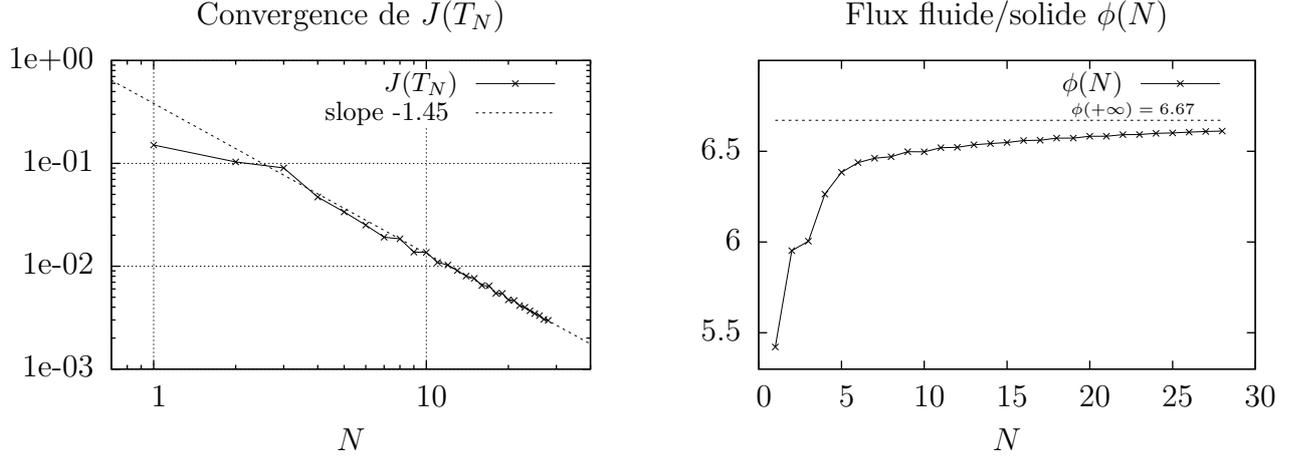


FIGURE 4.6 – Cas test 1 : convergence de $J(T_N)$ vers 0 en échelle logarithmique (à gauche) et convergence du flux fluide/solide prédit $\phi(N)$ (à droite) par rapport à N .

- les matrices M_i de taille $2N \times 2N$ seront soit de la forme M_+ en (4.23) soit de la forme M_- en (4.26) selon que le i^{eme} tube est en aval ou en amont
- les matrices C_i de taille $2N \times N$ seront soit de la forme M_+ en (4.23) soit de la forme C_- en (4.26) selon que le i^{eme} tube est en aval ou en amont
- les matrices S_i de taille $N \times N$ seront soit du type S_{++} soit du type S_{--} selon que le i^{eme} tube est en aval ou en amont

et à chaque fois en utilisant les matrices $Q_{\pm\pm}$, $R_{\pm\pm}$ et $S_{\pm\pm}$. Ces matrices étant assemblées à l'aide des coefficients $q_{\pm\pm}(i, j)$, $r_{\pm\pm}(i, j)$ et $s_{\pm\pm}(i, j)$ en (4.22) calculés relativement aux modes de Graetz généralisés $T_j^\pm(\xi)$, λ_j^\pm de l'échangeur et $t_j^\pm(\xi)$, μ_j^\pm du i^{eme} tube considéré.

4.2.6 Convergence spectrale

L'objectif de cette section est d'analyser numériquement la convergence de $J(T_N)$ vers zéro lorsque $N \rightarrow +\infty$ pour T_N solution de (4.7), c'est-à-dire pour T_N tel que $J(T_N) = \min_{V_N} J$. La définition de la fonctionnelle J est en (4.4), celle de $V_N \subset V$ sera dépendante du cas test considéré.

Trois cas tests seront considérés : respectivement décrits dans les figures 4.2, 4.3 et 4.4. Précisément, pour chacun des trois cas le domaine Ω sera le cercle unité, le sous domaine fluide ω sera le cercle de centre 0 et de rayon $1/2$. La longueur L de l'échangeur sera $L = 2$.

Cette géométrie est axisymétrique. La symétrie du domaine permet le recours à des méthodes analytiques décrites dans [5] pour le calcul des modes de Graetz généralisés. Aucune erreur numérique sur le calcul des modes de Graetz n'interviendra. L'erreur de troncature liée au nombre de modes pris en compte sera ici la seule source d'erreur. L'écoulement sera un écoulement parabolique de Poiseuille : $v(r) = 2Pe(1 - (r/r_0)^2)$ avec $r_0 = 1/2$ le rayon du tube ω , r la coordonnée radiale dans ce tube et $Pe = 10$ le nombre de Péclet. Les conductivités fluides et solides seront égales : $k = 1$.

Les conditions d'entrée/sortie sur la partie solide seront toujours des conditions adiabatiques (Neumann homogène). Les conditions d'entrée/sortie sur la partie fluide pour chacun des trois cas seront :

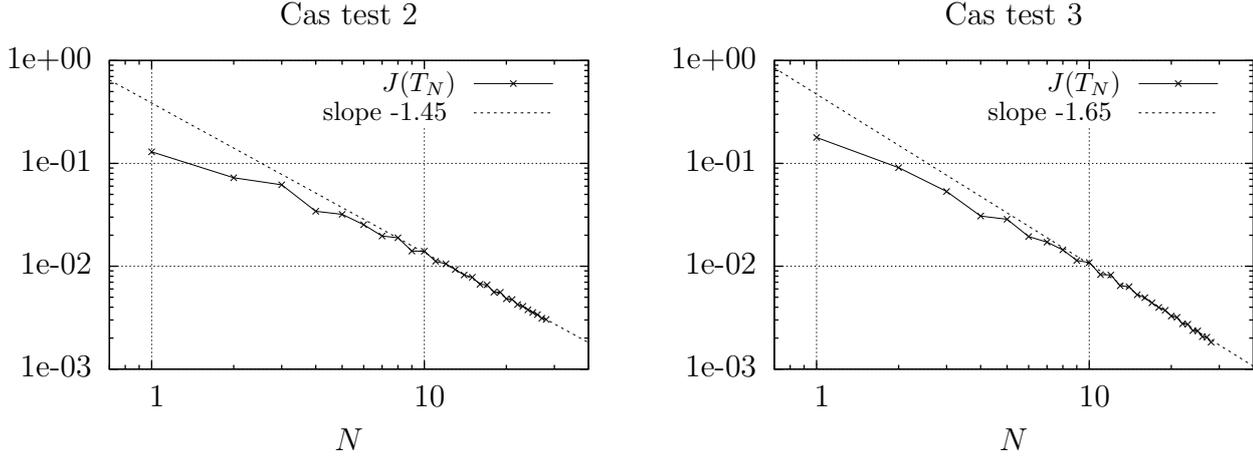


FIGURE 4.7 – Cas tests 2 et 3 : convergence de $J(T_N)$ vers 0 par rapport au nombre de modes N en échelle logarithmique.

- **Cas test 1** : Température prescrite $T = 1$ sur l'entrée $\omega \times \{0\}$ et condition de Robin $\frac{dT}{dz} + av(\xi)T = 0$ sur la sortie $\omega \times \{L\}$. Cette condition modélisant une *condition libre en sortie*, le flux de chaleur étant considéré comme proportionnel au flux convectif, avec un rapport a fixé à $a = 1/10$ ici
- **Cas test 2** : Température prescrite $T = 1$ sur l'entrée $\omega \times \{0\}$, couplage (4.3) avec un tube semi-infini en sortie $\omega \times \{L\}$
- **Cas test 3** : Couplage (4.3) en entrée $\omega \times \{0\}$ et en sortie $\omega \times \{L\}$ avec un tube semi-infini. Dans ce cas, la condition température prescrite $T = 1$ sur l'entrée $\omega \times \{0\}$ est remplacée par la contrainte $T \rightarrow 1$ lorsque $z \rightarrow -\infty$ dans le tube aval

Pour les cas tests 2 et 3, la température $T_{+\infty}$ lorsque $z \rightarrow +\infty$ dans ce tube sera calculée. Pour chacun des trois cas, les espaces V_N sont ceux décrits respectivement en sections 4.2.3 et 4.2.4. La quantité N correspondra au nombre de modes amont et/ou aval considéré dans chaque composante du système : l'échangeur $\Omega \times (0, L)$ et les tubes semi-infinis. Pour chaque cas test, T_N sera calculé pour les valeurs de N comprises entre 1 et 28.

Nous regarderons le comportement de $J(T_N)$ lorsque $N \rightarrow +\infty$ pour chaque cas test ainsi que celui de deux grandeurs physiquement importantes : le flux fluide/solide, noté $\phi(N)$, dans l'échangeur (*i.e.* le flux de chaleur sur l'interface $\omega \times (0, L)$) ainsi que la température en $z = +\infty$ dans le tube aval, notée $T_{+\infty}(N)$. L'examen des 28 premiers modes de Graetz ($1 \leq N \leq 28$) permet de déterminer avec une précision acceptable les valeurs asymptotiques de ces 3 quantités, notamment d'évaluer les limites $\phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \phi(N)$ et $T_{+\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} T_{+\infty}(N)$. Nous regarderons alors les erreurs relatives (en pourcentage) :

$$e_{\phi}(N) = 100 \frac{|\phi(N) - \phi|}{|\phi|}, \quad e_{T_{+\infty}}(N) = 100 \frac{|T_{+\infty}(N) - T_{+\infty}|}{|T_{+\infty}|}$$

La convergence de $J(T_N)$ vers 0 est illustrée en figure 4.6 (à droite) pour le cas test 1 et sur la figure 4.7 pour les cas tests 2 et 3. En échelle logarithmique, on observe pour chaque cas un comportement linéaire semblable indiquant une convergence vers 0 de $J(T_N)$ en $O(N^{-3/2})$. Cependant chacune des composantes de la fonctionnelle a son propre taux de convergence et le taux global observé est celui de la composante ayant la convergence vers

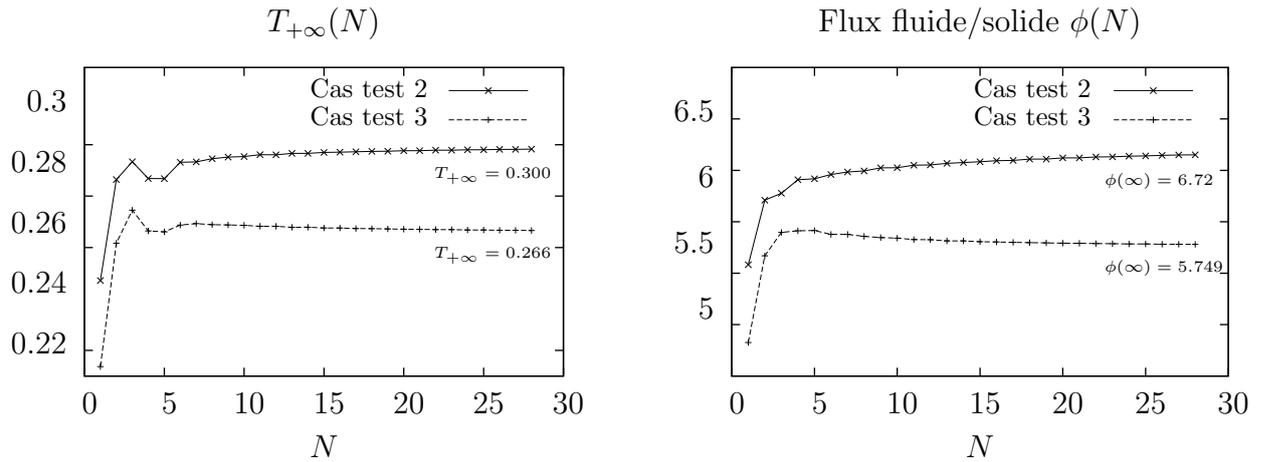


FIGURE 4.8 – Cas tests 2 et 3 : convergence de la température prédite $T_{+\infty}(N)$ en $z = +\infty$ et du flux fluide/solide prédit $\phi(N)$ par rapport à N .

N	cas test 1	cas test 2	cas test 3	N	cas test 2	cas test 3
1		16.9	16.1	1	17.5	19.6
2		7.59	1.39	2	4.42	1.47
3		6.58	2.59	3	2.11	3.36
4		4.53	2.84	4	4.29	0.33
5		4.49	2.90	5	4.31	0.18
6		3.86	2.24	6	2.19	1.18
7		3.51	2.23	7	2.12	1.39
8		3.36	1.90	8	1.71	1.25
9		2.90	1.69	9	1.51	1.20
10		2.90	1.61	10	1.45	1.12

$e_{\phi}(N)$

$e_{T_{+\infty}}(N)$

TABLE 4.1 – Erreurs relatives (en %) commises sur le flux ϕ fluide/solide (à gauche) et sur la température $T_{+\infty}$ en $z = +\infty$ (à droite) prédits en fonction de N

0 la plus lente : les composantes lentes sont associées à la condition de Dirichlet prescrite ou à la composante de continuité de la température pour le couplage.

Les comportements du flux fluide/solide $\psi(N)$ et de la température $T_{+\infty}(N)$ sont illustrés en figures 4.6 et 4.8. Ces quantités convergent dans chaque cas. De plus, l'évaluation de leurs limites permet de déterminer la vitesse de convergence qui est à chaque fois évaluée en $O(1/N)$. Les erreurs relatives en pourcentage sont reportées en table 4.1. Un même constat peut être formulé pour chaque cas : bien que la convergence soit lente, un petit nombre de modes de Graetz (de 5 à 10) permet d'évaluer avec une précision très correcte (de 1 à 2%) les quantités visées.

4.3 Illustrations numériques

Dans cette section nous allons présenter des résultats obtenus avec le solveur aux éléments finis FreeFem++ pour le cas de couplages entre un échangeur fini et un ou plusieurs tubes semi-infinis. Nous allons étudier les cas suivants :

- un échangeur cylindrique fini couplé avec un tube semi-infini en aval
- un échangeur cylindrique couplé avec deux tubes semi-infinis, l'un en amont et l'autre en aval
- un échangeur cylindrique couplé avec quatre tubes semi-infinis, deux en amont et deux en aval.

Les deux premiers cas servent de validation à notre implémentation en comparant avec les solutions analytiques obtenues avec un code Maple. Nous nous attarderons plus précisément sur le dernier cas, celui de l'échangeur, qui est le cas applicatif le plus réaliste. Notons dès maintenant que dans tous ces exemples, la condition limite imposée sur la frontière externe de la partie solide d'un tube fini sera du type Dirichlet homogène. Elle sera en revanche du type Neumann pour un tube semi-infini.

4.3.1 Formulation du problème discret

Nous allons utiliser la démarche employée dans la fin du second chapitre 2.4.3. Nous rappelons que pour déterminer les valeurs et vecteurs propres de l'échangeur, il faut résoudre le problème discret :

$$S_h X = \lambda M_h X$$

sur un maillage du domaine de l'échangeur Ω . Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, nous avons besoin de déterminer les modes de Graetz généralisés du ou des tubes semi-infinis présents. Il est donc également nécessaire de résoudre le même genre de problème discret que 2.4.3 sur un domaine approprié. Pour ceci, il faut d'abord définir le domaine et le maillage associé à ce domaine sur lequel nous allons faire cette résolution. Pour calculer les modes de Graetz généralisés dans les tubes semi-infinis, on restreint le maillage à la partie fluide Γ du domaine Ω qui correspond à la section du ou des tubes semi-infinis. Cette opération est effectuée lors de la résolution numérique au sein du code FreeFem++ utilisé. Ceci permet de garder une continuité sur les noeuds de maillage de la partie fluide. La continuité entre les deux domaines est vérifiée en calculant sur la partie fluide du domaine fini et sur la section fluide du tube semi-infini le débit, qui sont alors identiques. Nous pouvons ensuite utiliser la méthode de résolution en 2.4.3 pour déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres t_n^\pm, μ_n^\pm , ce qui permet de coupler le domaine fini avec un tube aval et amont, selon le cas considéré. Il faut répéter l'opération pour chaque tube semi-infini dans lequel un fluide s'écoule. La suite de l'implémentation consiste à construire la matrice M à inverser et le second membre \mathbf{b} afin de déterminer les coefficients \mathbf{x} du système (4.7) qui minimise la fonctionnelle J correspondante. On pourra alors construire les champs de température ainsi que les flux d'échanges.

4.3.2 Tube fini couplé avec un tube semi-infini aval

Dans cette partie nous allons étudier le cas d'un tube fini couplé avec un tube semi-infini aval. Cette configuration est celle présentée dans 4.2.3 et représentée par la figure 4.3. Dans notre cas, le domaine Ω est composé d'une section fluide représentée par un cercle centré en zéro et de rayon $1/2$ encapsulé dans une section solide cylindrique de centre 0 et de rayon unité. Le domaine fini est compris pour $z \in (0; L)$ où L est la longueur du domaine suivant la coordonnée longitudinale. La surface du tube semi-infini correspond

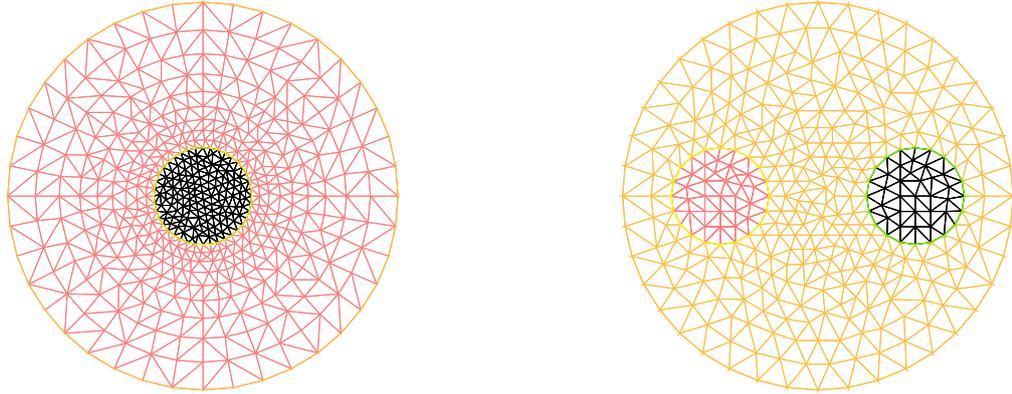


FIGURE 4.9 – Exemples de maillages générés avec FreeFem++ pour mailler le domaine Ω . Les maillages sont volontairement peu raffinés sur cette figure afin de mieux visualiser les éléments utilisés. A gauche est représenté un exemple de maillage utilisé dans le cas axisymétrique. A droite on montre un exemple de maillage utilisé dans le cas de l'échangeur.

à la surface fluide du domaine fini et s'étend pour $z \in (L; +\infty)$. Le champ de vitesse utilisé est un profil de Poiseuille. Le nombre de Péclet de notre problème est ici fixé à $Pe = 10$. Nous imposons une condition de type Dirichlet $T = 1$ sur le domaine fluide et une condition de type Neumann $\partial_z T = 0$ sur le domaine solide en entrée en $z = 0$. En $z = L$, nous avons également $\partial_z T = 0$ pour la partie solide et nous avons des conditions de couplage sur la température et sa dérivée par rapport à z sur la partie fluide. Nous rappelons également que la température prédite à l'infini $x_0 = T_{+\infty}$ est un paramètre libre de notre problème que nous allons évaluer.

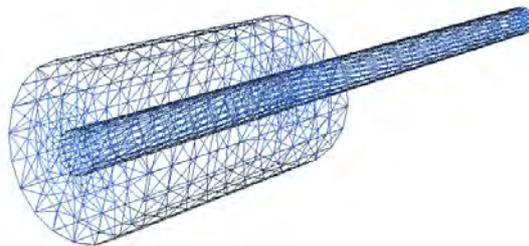


FIGURE 4.10 – Illustration en 3D du problème étudié pour le cas d'un domaine fini couplé avec un tube semi-infini aval par extrusion du maillage 2D de la figure 4.9 gauche.

Nous allons présenter des résultats numériques portant sur la convergence modale de la fonctionnelle minimisée J , le coefficient du champ de température à l'infini $T^{+\infty}$ et le flux d'échange entre la partie fluide et la partie solide du domaine fini ϕ . Nous allons utiliser pour cela des éléments finis $P1$ et $P2$. Nos résultats sont alors comparés avec les solutions analytiques calculées avec un code Maple. De nouveau, le nombre de modes utilisés est noté N .

On observe d'après la figure 4.11 que la fonctionnelle diminue en augmentant le nombre de modes propres utilisés pour les deux types d'éléments finis. Cette décroissance semble

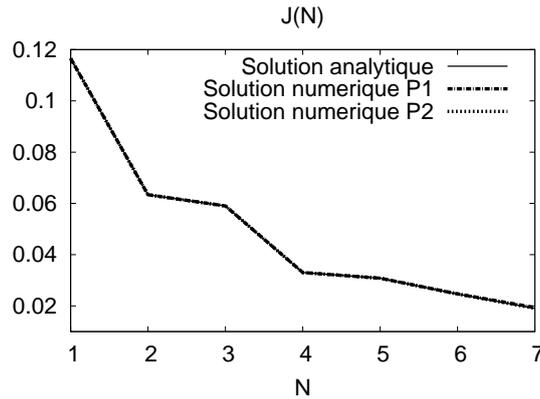


FIGURE 4.11 – Convergence modale pour des éléments finis $P1$ et $P2$ de la fonctionnelle J en fonction du nombre de modes considérés N pour un tube fini couplé avec un tube semi-infini aval.

tendre vers 0. De plus on remarque que les résultats numériques se superposent avec les résultats analytiques. La valeur de la fonctionnelle est faible avec seulement moins de dix modes (ici 7). Rappelons que dans le cas de géométrie axisymétrique, la troncature N porte sur les modes qui ont cette même structure.

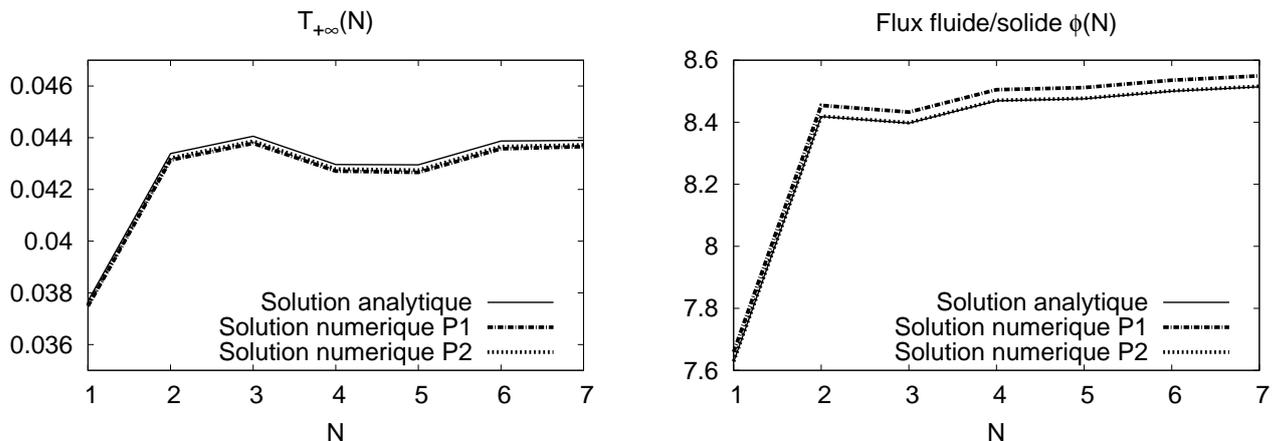


FIGURE 4.12 – Convergence modale pour des éléments finis $P1$ et $P2$ de la température prédite $T_{+\infty}(N)$ ainsi que des échanges thermiques $\phi(N)$ entre partie fluide et partie solide en fonction du nombre de modes N . Le cas considéré est celui du tube fini couplé avec un tube semi-infini en aval.

La température prédite en $+\infty$ observée sur la figure 4.12 semble tendre vers une valeur "limite" avec l'augmentation du nombre de modes propres utilisés. Les résultats numériques sont très proches du résultat analytique, avec seulement une différence qui est inférieure à 1%. Concernant la valeur du flux échangé, les résultats avec des éléments fini $P2$ coïncident avec la courbe analytique et tendent vers une valeur "limite". Nous observons la même chose en $P1$ mais les résultats diffèrent de l'ordre d'un pourcent environ. Que ce soit pour la température ou le flux, on observe que dans les deux cas ces deux quantités subissent une importante variation avec les deux premiers modes pour converger/osciller vers une valeur "limite". Cette valeur est atteinte rapidement : dans les deux cas sept modes suffisent.

4.3.3 Tube fini couplé avec un tube semi-infini en amont et en aval

Dans cette partie nous allons considérer le cas d'un domaine fini couplé en amont et en aval avec un tube semi-infini. C'est la configuration que l'on retrouve en 4.2.4 représentée par la figure 4.4. Tout comme précédemment, le domaine fini s'étend sur $z \in (0; L)$, le domaine semi-infini aval est défini pour $z \in (L; +\infty)$, tandis que le domaine semi-infini amont s'étend pour $z \in (-\infty; 0)$. Le domaine Ω est le même que celui utilisé dans la section précédente. De nouveau, le champ de vitesse est de type Poiseuille. Dans cette configuration il existe une contrainte de température en $-\infty : T_{-\infty}$, et de nouveau une température "libre" en $+\infty : T_{+\infty}$. Nous imposons $T_{-\infty} = 1$. En $z = 0$ et $z = L$ nous avons des conditions de couplage sur T et $\partial_z T$ concernant le domaine fluide et une condition de type Neumann $\partial_z T = 0$ sur le domaine solide. De nouveau, nous allons étudier la convergence modale de la fonctionnelle J , de la température prédite $T_{+\infty}$ et du flux d'échange ϕ entre la partie fluide et la partie solide de l'échangeur fini.

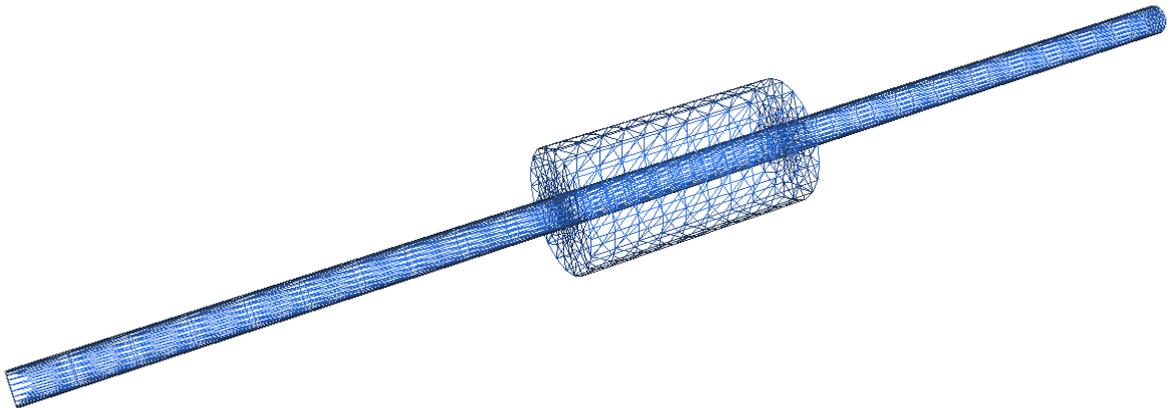


FIGURE 4.13 – Illustration en 3D du problème étudié pour le cas d'un tube fini couplé en amont et en aval avec des tubes semi-infinis par extrusion du maillage 2D de la figure 4.9 gauche.

La figure 4.14 nous montre que les résultats numériques concordent avec la courbe analytique pour les deux types d'éléments finis. La fonctionnelle J décroît vers zéro en augmentant le nombre de modes N utilisés pour la troncature. Cette décroissance est rapide pour les quatre premiers modes, puis plus lente par la suite. Là encore, on observe que la valeur de la fonctionnelle est faible avec seulement sept modes.

La figure 4.15 montre que la température prédite en $+\infty$ et le flux d'échange fluide/solide ϕ obtenus numériquement diffèrent de moins de 1% avec les valeurs analytiques. Dans les deux cas, la quantité observée varie fortement pour les 2-3 premiers modes puis tend/oscille vers une valeur "limite" avec l'augmentation du nombre de modes N . Là encore, un petit nombre modes (sept) permettent d'atteindre une très bonne approximation des quantités auxquelles on s'intéresse.

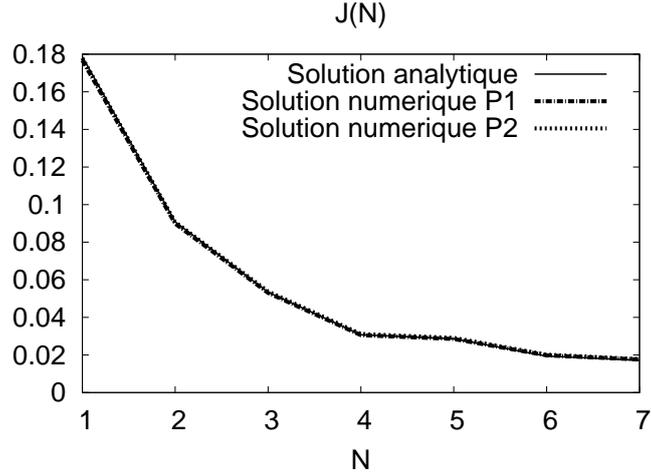


FIGURE 4.14 – Convergence modale pour des éléments finis $P1$ et $P2$ de la fonctionnelle J en fonction du nombre de modes considérés N pour un tube fini couplé avec un tube semi-infini en amont et en aval.

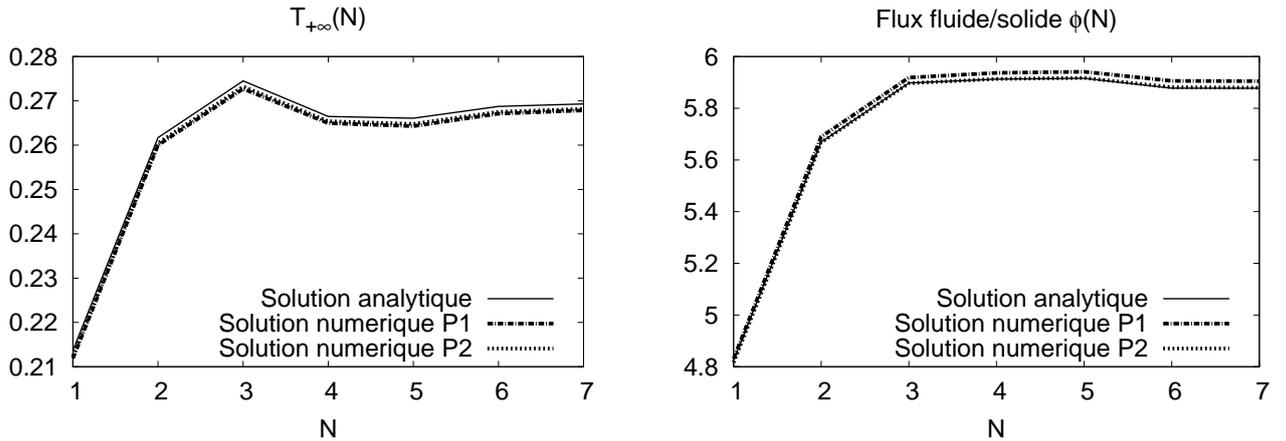


FIGURE 4.15 – Convergence modale pour des éléments finis $P1$ et $P2$ de la température prédite $T_{+\infty}(N)$ ainsi que des échanges thermique $\phi(N)$ entre partie fluide et partie solide en fonction du nombre de modes considérés N . Le cas considéré est celui du tube fini couplé avec un tube semi-infini en amont et en aval.

4.3.4 Échangeur couplé

Dans cette section nous allons considérer un échangeur couplé, c'est-à-dire un domaine fini comportant deux tubes fluides (un exemple de domaine Ω est représenté à droite de la figure 4.9), qui seront couplés à des tubes semi-infinis. C'est le cas considéré en (4.2.4) dont une représentation est illustrée figure 4.5. Pour cette configuration, on se place dans une situation contre-courant. Le tube de gauche, que l'on appellera tube "chaud" car c'est celui dans lequel arrive le fluide chauffé, sera parcouru par un écoulement de Poiseuille dans le sens $0 \rightarrow L$. Le tube de droite, par la suite appelé "froid" sera parcouru par le même champ de vitesse mais dans le sens inverse, c'est-à-dire de $L \rightarrow 0$. On impose des conditions limites de type Neumann $\partial_z T = 0$ sur la partie solide en entrée et sortie et nous avons des conditions de couplage sur T et $\partial_z T$ sur les domaines fluides. Contrairement au cas précédent où il y avait une température imposée en $-\infty$ et une température libre en

$+\infty$, ici il y a deux contraintes imposées et deux inconnues de températures :

- la contrainte de température imposée en $-\infty$ pour le tube de gauche : $T_{-\infty}^G$
- la contrainte de température imposée en $+\infty$ pour le tube de droite : $T_{+\infty}^D$
- la température libre en $+\infty$ pour le tube de gauche : $T_{+\infty}^G$
- la température libre en $-\infty$ pour le tube de gauche : $T_{-\infty}^D$

Les températures imposées sont des données connues que nous allons fixer suivant leur point entrée. Nous nommerons $T_{i,h}$ et $T_{i,c}$ (i pour “input”, h pour “hot”, c pour “cold”) les températures $T_{-\infty}^G$ et $T_{+\infty}^D$. Les températures inconnues sont des températures de sortie. Nous appellerons $T_{o,h}$ et $T_{o,c}$ (o pour “output”) les températures $T_{+\infty}^G$ et $T_{-\infty}^D$. D’un point de vue pratique, la connaissance de ces températures est importante. En effet le but de l’échangeur thermique est de réchauffer le fluide du tube froid par échanges avec le tube chaud et réciproquement. Le fluide du tube chaud va alors sortir en aval avec une température $T_{o,h}$ qui dépendra de ces échanges. De même, le fluide du tube froid va sortir en amont de l’échangeur avec une température $T_{o,c}$. Les termes $T_{o,h}$ et $T_{o,c}$ sont les termes dominants dans l’expression de la température quand on s’éloigne de l’échangeur. Nous pouvons alors, à l’instar de [1], définir les rendements ϵ_h chaud et ϵ_c froid de l’échangeur thermique, comme sa capacité relative à refroidir le tube chaud et à réchauffer le tube froid.

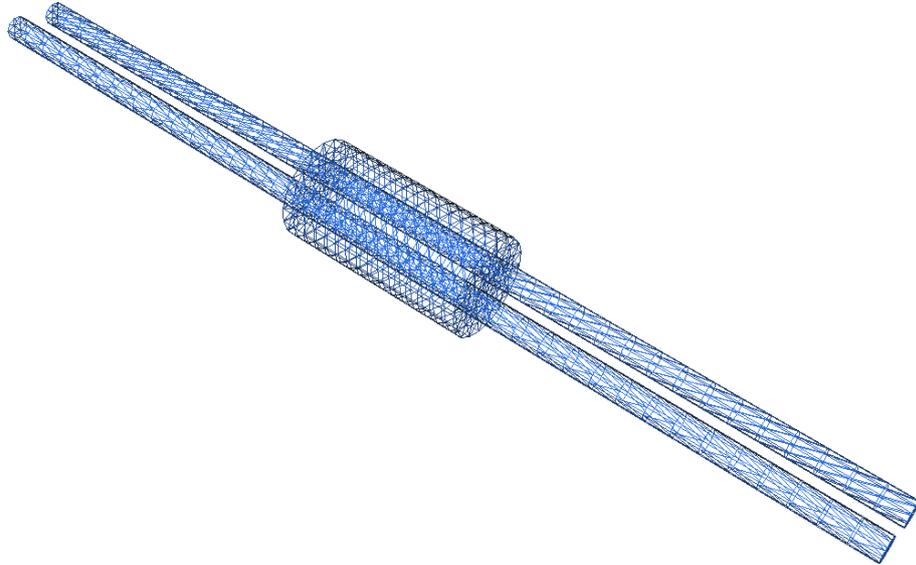


FIGURE 4.16 – Illustration en 3D du problème étudié pour le cas d’un échangeur couplé en amont et en aval avec des tubes semi-infinis par extrusion du maillage 2D de la figure 4.9 droite.

Nous les définissons de la façon suivante :

$$\epsilon_h = \frac{T_{i,h} - T_{o,h}}{T_{i,h} - T_{i,c}} \quad \text{et} \quad \epsilon_c = \frac{T_{o,c} - T_{i,c}}{T_{i,h} - T_{i,c}}$$

Ces rendements permettent de définir l’efficacité de l’échangeur. Il est également intéressant d’étudier l’impact de différents paramètres sur ces rendements et donc de favoriser des configurations qui permettront d’optimiser les échanges. Ces paramètres peuvent

êtres :

- géométriques comme la distance ℓ entre les centres des deux tubes porteurs, la longueur L de l'échangeur
- hydrodynamique avec la variation du nombre de Péclet Pe
- physique en fonction du choix des températures en entrée, à la surface du solide et en sortie, ou encore le rapport des conductivités thermiques

Concernant le dernier point, on peut toujours définir la température à un coefficient multiplicatif près (le problème considéré est invariant par multiplication par un scalaire quelconque). Pour fixer ce facteur, on choisit par convention classique dans ce contexte [1] d'adimensionner la température par la transformation $T = \frac{T^* - T_w^*}{T_{i,h}^* - T_w^*} \cdot T^*$ est la température dimensionnelle et $T_{i,h}^*$ la température injectée. Alors T est solution des équations (2.4) adimensionnées. Cette température adimensionnée peut alors être décrite par un seul paramètre d'entrée $T_{i,c}$ car :

$$\begin{aligned} T_{i,h} &= \frac{T_{i,h}^* - T_w^*}{T_{i,h}^* - T_w^*} = 1 \\ T_{i,c} &= \frac{T_{i,c}^* - T_w^*}{T_{i,h}^* - T_w^*} \end{aligned}$$

Il est alors raisonnable de considérer que les températures de fonctionnement choisies vérifient $T_{i,h}^* \geq T_w^* \geq T_{i,c}^*$, de sorte que le tube froid profite aussi du réchauffement produit par la température imposée sur le solide (on peut faire d'autres choix, mais c'est celui que nous allons retenir par la suite).

Ceci conduit à considérer $0 \geq T_{i,c} \geq -1$, et nous ferons donc varier cette température dans cette gamme de paramètre.

De ce qui précède, on voit qu'il y a cinq paramètres sans dimensions qui décrivent le problème :

1. le rapport distance entre tubes porteurs et diamètre de l'échangeur $\ell^*/D \equiv \ell$
2. le rapport longueur échangeur et diamètre de l'échangeur $L^*/D \equiv L$
3. Le nombre de Péclet Pe
4. le rapport des conductivités thermiques fluide/solide
5. la température de fonctionnement d'entrée $T_{i,c}$

Dans la suite nous restreindrons l'étude à des rapports de conductivités thermiques fluide/solide unité, mais nous ferons varier les quatre autres paramètres.

Validations

Nous ne pouvons, ici, comparer nos résultats avec des résultats analytiques. Nous allons, dans un premier temps, comparer les résultats obtenus avec des éléments finis $P1$ et $P2$ dans le cas de la configuration d'échangeur décrite auparavant. Nous allons fixer $T_{i,c} = 0$ et le nombre de Péclet de notre problème vaut 10. Le champ de vitesse est un profil de Poiseuille. Nous utilisons le même maillage pour les deux types d'éléments et le même nombre N de mode.

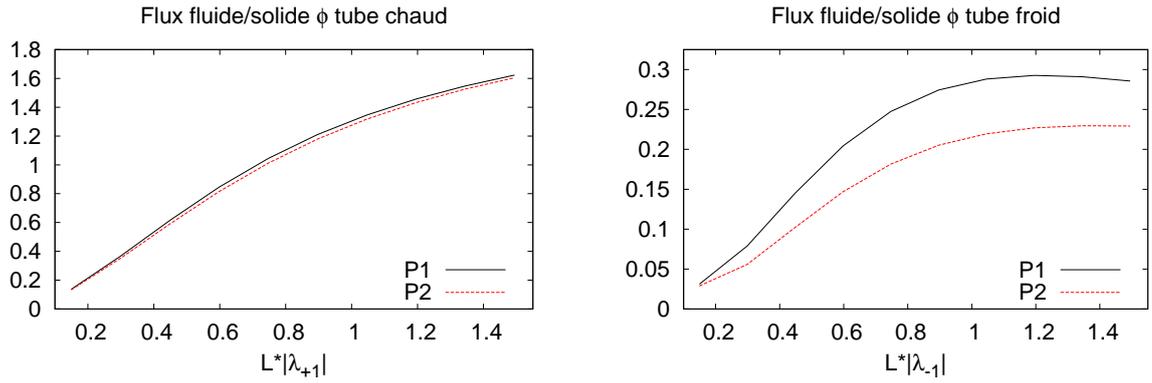


FIGURE 4.17 – Évolution du flux fluide/solide pour le tube chaud représentée à gauche et pour le tube froid représentée à droite. Cette évolution est portée en fonction de la longueur de l'échangeur L multipliée par la première valeur propre aval pour le tube chaud et la première valeur propre amont pour le tube froid, ce qui correspond à la normalisation de la longueur de l'échangeur par la première valeur propre.

Concernant l'évaluation de la première valeur propre amont, nous trouvons que celle-ci vaut 1.49451524 en $P1$ et 1.49422545 en $P2$, soit une erreur relative entre les deux de moins 0.1%. L'erreur reste aussi faible pour la première valeur propre aval. Cependant, la figure 4.17 nous montre qu'il existe des différences entre le cas $P1$ et le cas $P2$ sur l'estimation des flux ainsi que des rendements. L'erreur relative entre les deux cas s'élève à plus de 10%. Nous utiliserons pour la suite des éléments de type $P2$.

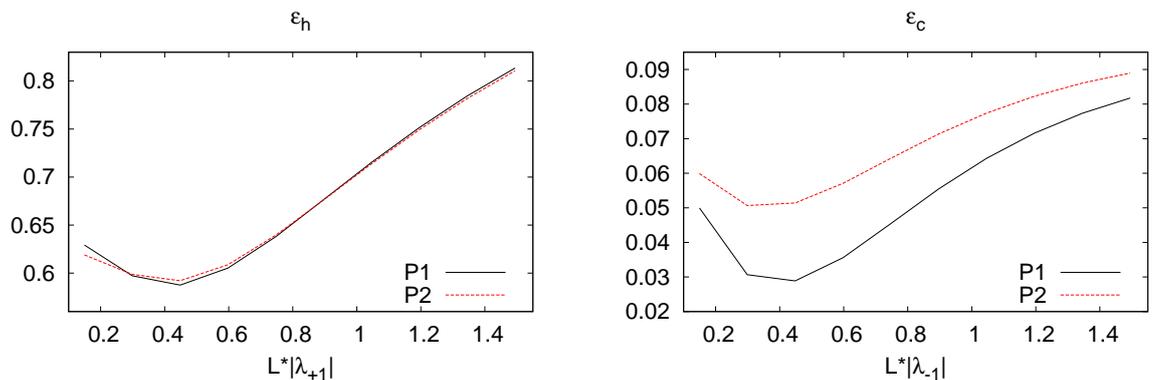


FIGURE 4.18 – Évolution du rendement pour le tube chaud représentée à gauche et pour le tube froid représentée à droite. Cette évolution est portée en fonction de la longueur de l'échangeur L multipliée par la première valeur propre aval pour le tube chaud et la première valeur propre amont pour le tube froid ce qui correspond à la normalisation de la longueur de l'échangeur par la première valeur propre.

Nous allons maintenant faire une étude sur la sensibilité du maillage utilisé. Nous allons comparer deux maillages. Le premier est celui que l'on vient d'utiliser pour les résultats comparatifs entre le $P1$ et le $P2$. Le second comporte le double de points sur la circonférence du domaine maillé. Nous reprenons les mêmes configurations que

précédemment.

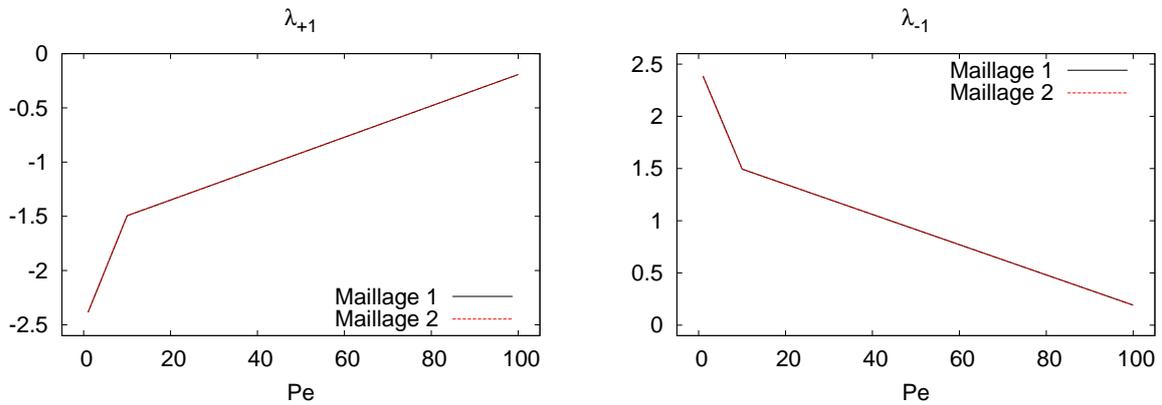


FIGURE 4.19 – Évolution de la première valeur propre aval à gauche et amont à droite. L'évolution est portée en fonction de trois valeurs du nombre de Péclet : 1,10,100.

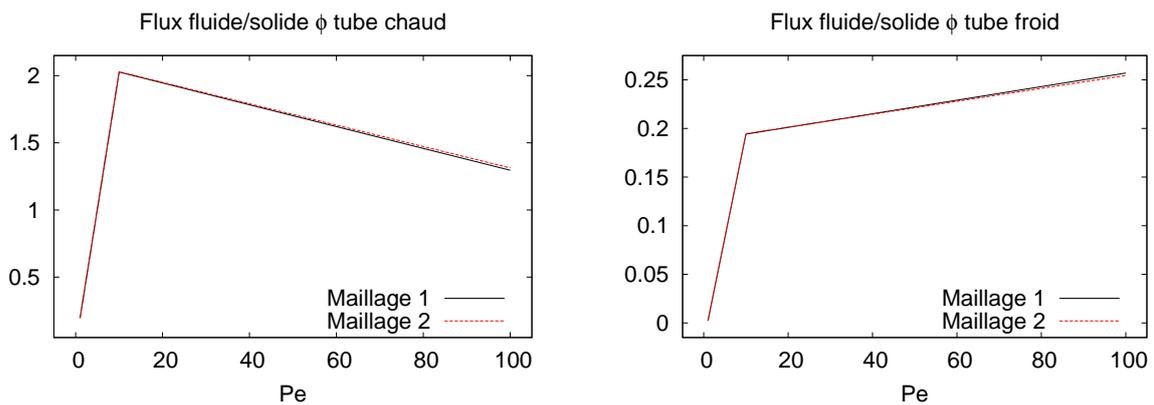


FIGURE 4.20 – Évolution du flux fluide/solide pour le tube chaud à gauche et le tube froid à droite. L'évolution est portée en fonction de trois valeurs du nombre de Péclet : 1,10,100.

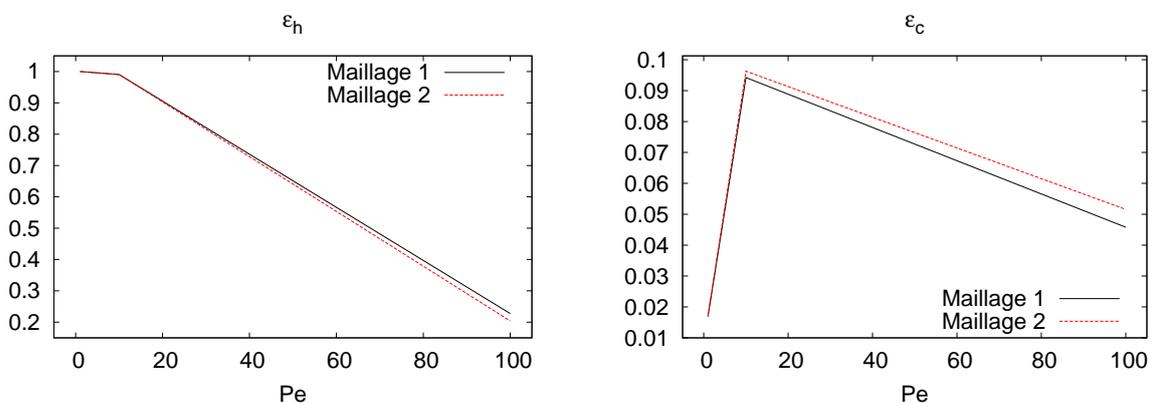


FIGURE 4.21 – Évolution du rendement pour le tube chaud à gauche et le tube froid à droite. L'évolution est portée en fonction de trois valeurs du nombre de Péclet : 1,10,100.

On observe d'après les deux figures 4.19 et 4.20 qu'il y a très peu de différences entre les résultats obtenus avec le premier maillage et le second. Ces différences sont un peu plus importantes concernant les résultats sur les rendements d'après la figure 4.21. Nous pouvons constater des erreurs relatives de l'ordre de 10% pour les plus grandes valeurs du nombre de Péclet. Nous choisirons alors le second maillage pour la suite de nos études.

Nous pouvons également regarder comment se comporte la fonctionnelle ou bien encore des températures de sortie en fonction du nombre de modes N . Ici ce nombre correspond à tous les modes calculés, et plus seulement les modes axisymétriques par rapport aux cas précédents. Nous présentons des résultats pour la configurations d'échangeurs décrite auparavant avec $T_{i,c} = 0$ et le nombre de Péclet valant 10.

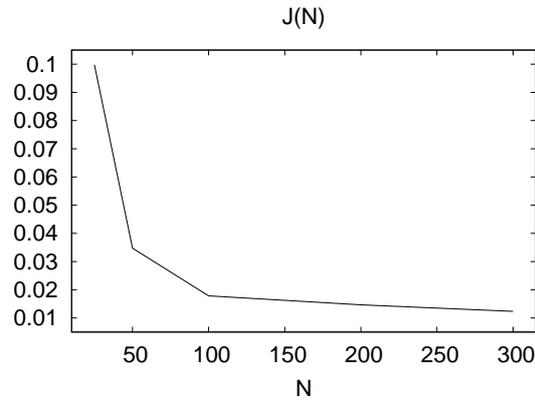


FIGURE 4.22 – Évolution de la fonctionnelle par rapport au nombre N de modes utilisés.

La figure 4.22 nous montre que la fonctionnelle décroît bien vers zéro en fonction du nombre de modes utilisés. La figure 4.23 nous montre que les températures de sortie convergent vers une valeur "limite" en augmentant le nombre de modes utilisés. Ces résultats constituent des éléments de validation de notre méthode.

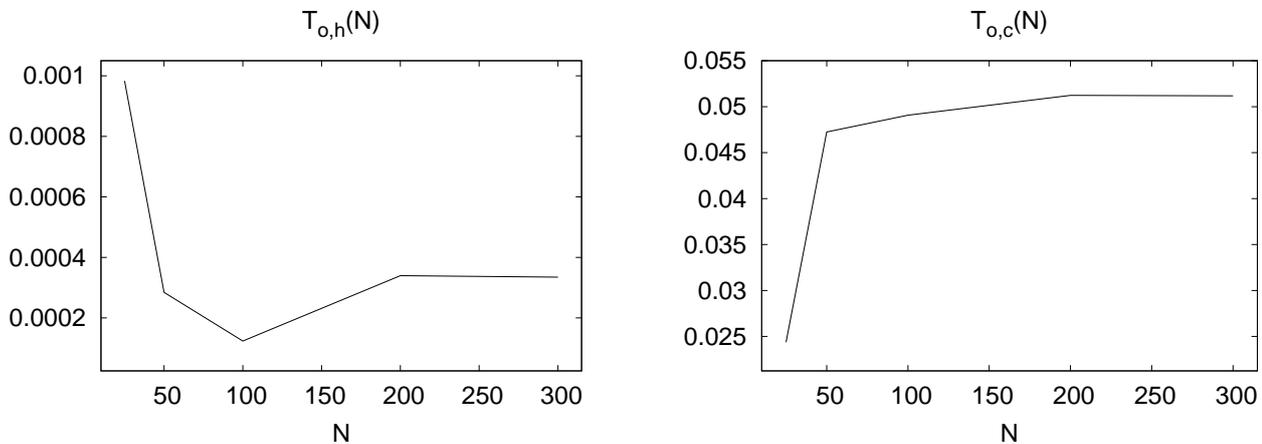


FIGURE 4.23 – Évolution des températures en sortie en fonction du nombre de modes N utilisés. A gauche est représentée $T_{o,h}$ et à droite $T_{o,c}$.

Le dernier argument de validation que nous allons présenter est basé sur l'existence d'une antisymétrie de notre problème. Cette dernière est par rapport à un point de coordonnées $(x = 0, y = 0, z = \frac{L}{2})$ (puisque notre échangeur est de longueur L). En effet dans ce cas, si on impose que $T_{i,c} = -1$ alors, de part les aspects hydrodynamiques, géométriques et la condition sur $T_{i,c}$, nous avons : $T(x, y, z) = -T(-x, y, -z)$. Si cela est vrai pour T , chaque mode i vérifiera :

$$T_i(x, y)e^{\lambda_i z} = -T_{-i}(-x, y)e^{-\lambda_{-i} z} \quad (4.27)$$

ceci $\forall i$. Étant donné que la valeur du spectre de l'échangeur ne dépend pas de l'orientation des axes des coordonnées x, y et z (puisque les valeurs propres sont scalaires), il faut que $\lambda_i = -\lambda_{-i}$. Pour que l'égalité (4.27) soit respectée il faut alors que $T_i(x, y) = -T_{-i}(-x, y)$. Montrons alors cette dernière égalité à partir du problème aux valeurs propres $2D$ des modes de Graetz généralisés. En effet, si on utilise les notations introduites en (3.1.1), nous avons :

$$\bar{A}\psi_i = \lambda_i v \psi_i \quad (4.28)$$

$$\bar{A}\psi_{-i} = \lambda_{-i} v \psi_{-i} \quad (4.29)$$

Si on applique l'opérateur d'antisymétrie S tel que $S(T_i(x, y)) = T_i(-x, y)$ à la seconde équation, en utilisant l'antisymétrie du champ de vitesse par cette transformation, on obtient :

$$\bar{A}S\psi_{-i} = \lambda_{-i} SvS\psi_{-i} \implies \bar{A}S\psi_{-i} = \lambda_i v(x, y)S\psi_{-i}$$

avec $S\psi_{-i} = \psi_{-i}(-x, y)$ et $SvS\psi_{-i} = v(-x, y)\psi_{-i}(-x, y)$ où v est le champ de vitesse. En utilisant la première équation de 4.28 nous obtenons :

$$\bar{A}(\psi_i - S\psi_{-i}) = \lambda_i v(\psi_i - S\psi_{-i})$$

Puisque $\psi_i - S\psi_{-i}$ est maintenant une solution du problème aux valeurs propres du premier mode, cela conduit à :

$$\psi_i - S\psi_{-i} = \alpha \psi_i \quad (4.30)$$

c'est à dire :

$$(1 - \alpha)\psi_i = S\psi_{-i} \quad (4.31)$$

Puisque les modes sont normés, $\|\psi_i\| = \|\psi_{-i}\| = \|S\psi_{-i}\|$ de sorte qu'en prenant la norme de (4.31) on trouve $|1 - \alpha| = 1$ ou encore $\alpha = 2$ ce qui implique, en utilisant (4.30) que $S\psi_{-i} = -\psi_i$, c'est-à-dire ce que nous voulions montrer sur les modes de la température $T_i(x, y) = -T_{-i}(-x, y)$.

Dans le cas d'une configuration d'échangeur avec $Pe = 10$ et $T_{i,c} = -1$, la valeur de λ_1 est -1.49425. Nous trouvons alors que $-\lambda_{-1}$ vaut -1.494, soit une erreur relative de 0.01% environ. On retrouve bien la propriété d'antisymétrie entre le couple $(\lambda_1, \lambda_{-1})$. La figure 4.24 nous montre que la propriété se répercute sur les flux d'échanges et les températures de sortie, comme on s'y attendait. La figure 4.32 quant à elle nous permet de visualiser cette antisymétrie sur les coupes du champ de température dans le plan $y = 0$.

Études paramétriques

Dans cette partie nous allons présenter quelques résultats obtenus en faisant varier plusieurs paramètres de notre problème : distance entre les tubes, longueur de l'échangeur,

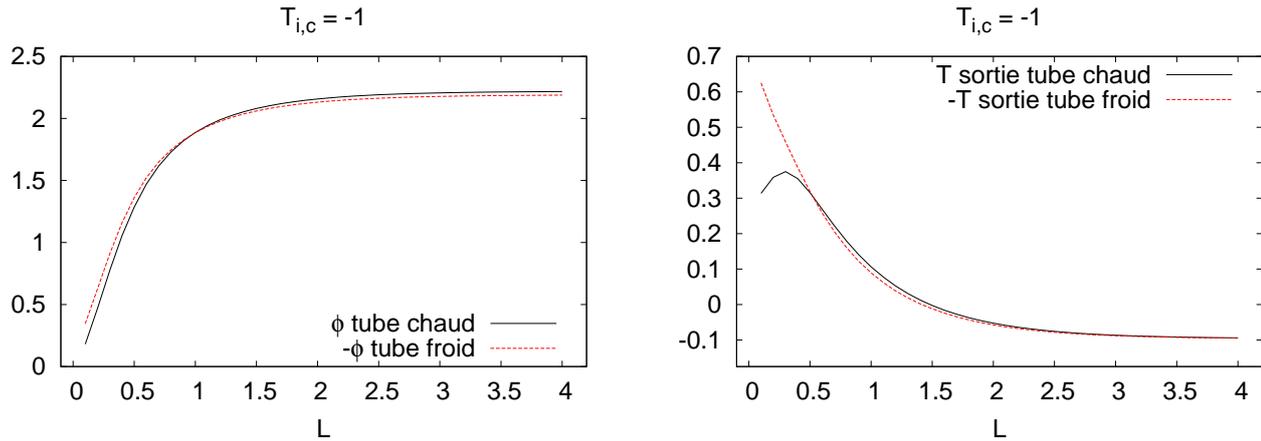


FIGURE 4.24 – Comparaison des flux fluide/solide pour le tube chaud et froid ainsi que les températures de sortie, en fonction de la longueur de l'échangeur L pour $T_{i,c} = -1$ et $Pe = 10$.

nombre de Péclet. Nous introduisons le paramètre $\delta = \frac{r_i}{r_e}$ qui est le rapport entre le rayon d'un tube fluide et le rayon du domaine solide. Étude suivant L

La figure 4.25 nous montre que tant que la distance entre les deux tubes fluides ne dépasse pas une certaine valeur, alors cet écart n'impacte pas trop les échanges thermiques. Des variations plus importantes se font sentir dès que l'on atteint la valeur de $l = 2\delta$, surtout pour le tube froid. On observe également que le flux converge vers une valeur limite dans tous les cas pour environ une longueur caractéristique égale à environ $3/\lambda_{\pm 1}$.

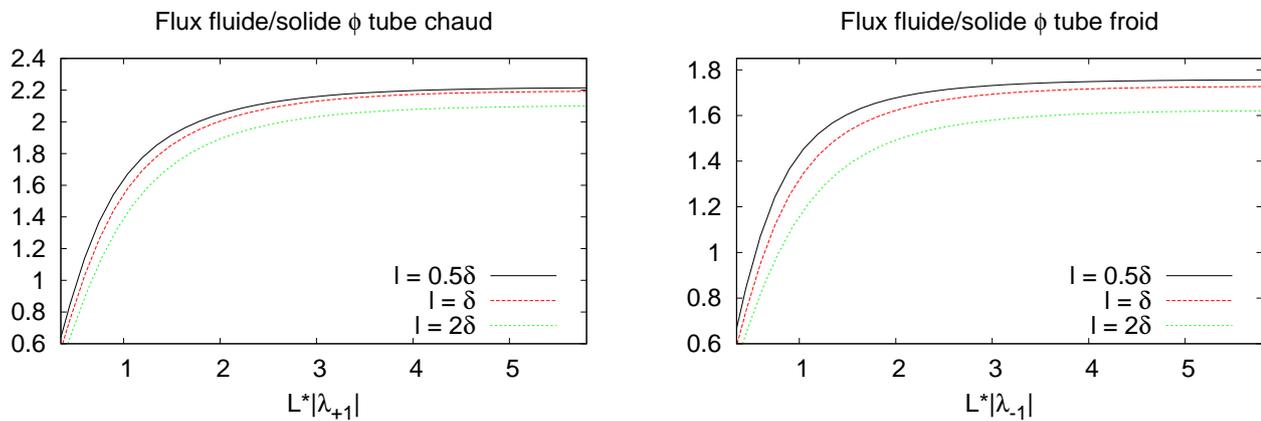


FIGURE 4.25 – Comparaison des flux fluide/solide pour les tubes chaud et froid en fonction de la longueur de l'échangeur L multiplié par la plus petite valeur propre correspondante. On a $T_{i,c} = -3/4$ et $Pe = 10$.

Nous pouvons avec la figure 4.26 observer les mêmes comportements concernant les valeurs des rendements si ce n'est que ces derniers semblent plus sensibles à la variation de la distance l .

Nous présentons maintenant des résultats sur la variation des températures de sortie en fonction de $T_{i,c}$ imposée pour un nombre de Péclet valant 10 et $l = \delta$. On observe d'après

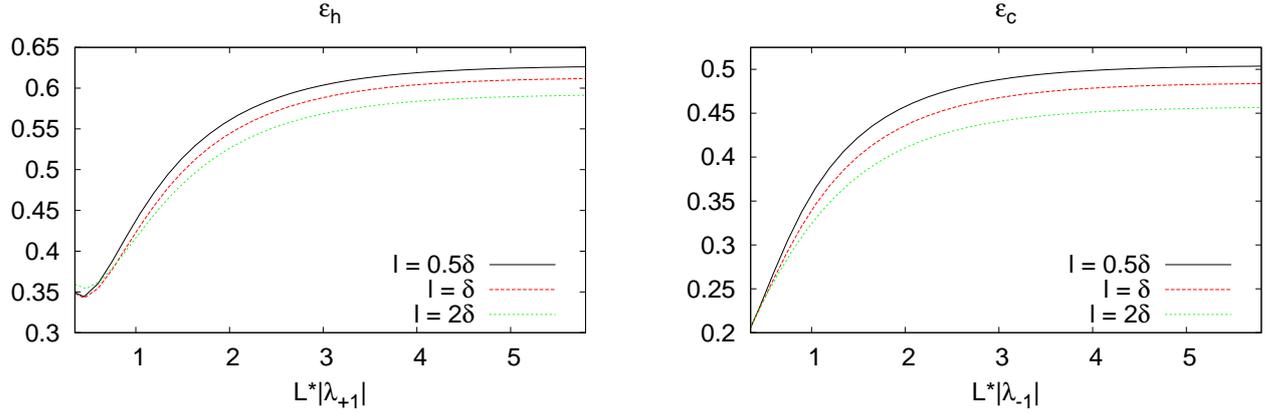


FIGURE 4.26 – Comparaison des rendements pour les tubes chaud et froid en fonction de la longueur de l'échangeur L multiplié par la plus petite valeur propre correspondante. On a $T_{i,c} = -3/4$ et $Pe = 10$.

la figure 4.27 que quelque soit la valeur de $T_{i,c}$, la température de sortie du tube froid semble converger vers une même valeur, proche de zéro. Les valeurs de la température de sortie du tube chaud convergent vers des valeurs sensiblement différentes selon $T_{i,c}$. Ces convergences se font pour une longueur caractéristique égale à environ $3/\lambda_{\pm 1}$. Ainsi il est intéressant de constater que la longueur $1/\lambda_{\pm 1}$ permet d'expliquer les variations longitudinales des rendements quelques soient les valeurs de fonctionnement choisies $T_{i,c}$ car toutes les courbes des figures 4.27 montrent des échelles de variations similaires. De même, on constate qu'il faut une distance $3/\lambda_1$ pour atteindre la limite supérieure du rendement chaud et une longueur $3/\lambda_{-1}$ pour atteindre celle du rendement froid. Ainsi, on voit que si λ_1 et λ_{-1} diffèrent beaucoup, il sera impossible de trouver une longueur d'échangeur qui puisse atteindre au mieux les deux fonctionnalités de réchauffer et refroidir. Selon les modalités d'utilisation de celui-ci, c'est à dire selon la température de fonctionnement de l'entrée froide adimensionnée $T_{i,c}$ (qui dépend des températures d'entrées/sorties et de celle prescrite à la surface de l'échangeur), et selon la longueur L choisie, l'échangeur sera plus efficace pour réchauffer plutôt que refroidir ou réciproquement.

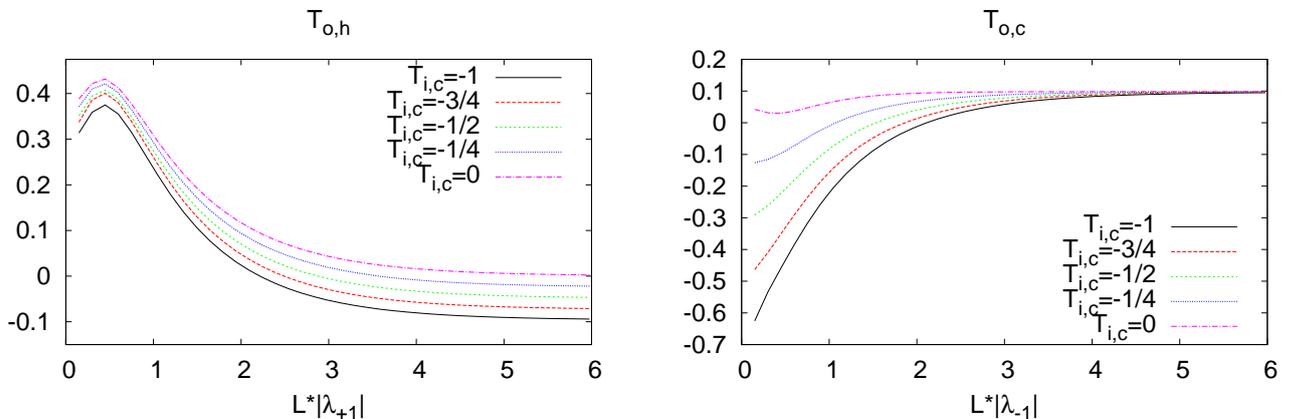


FIGURE 4.27 – Comparaison de la température de sortie pour le tube chaud à gauche, et froid à droite, en fonction de la longueur de l'échangeur L multiplié par la plus petite valeur propre correspondante et pour différentes valeurs de $T_{i,c}$. On a $Pe = 10$ et $l = \delta$.

Étude suivant ℓ

Dans cette partie nous allons brièvement présenter des résultats obtenus en faisant varier la distance ℓ entre les deux domaines fluides pour différentes valeurs de $T_{i,c}$. Nous utilisons un échangeur de longueur $L = 2|\lambda_1|$ et le nombre de Péclet est fixé à 10.

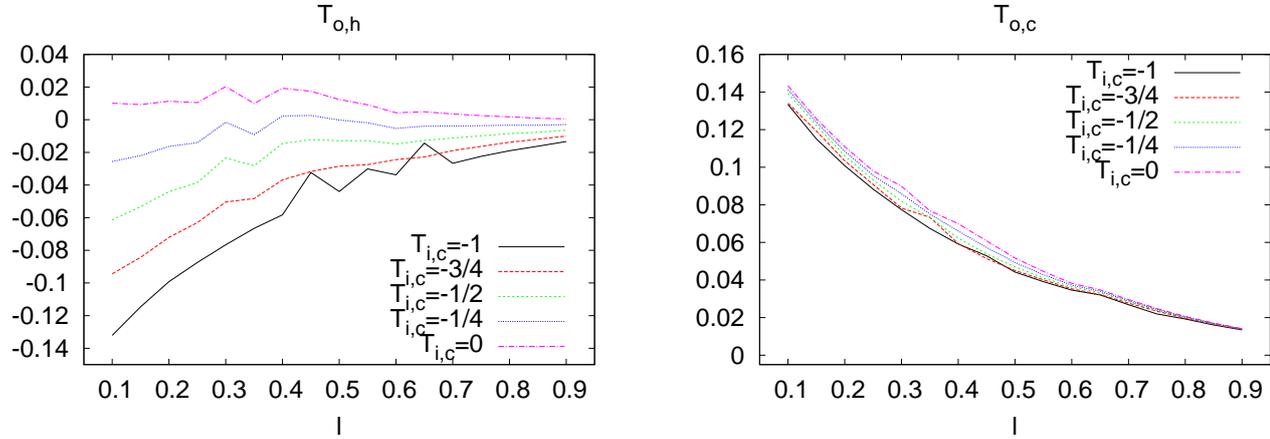


FIGURE 4.28 – Comparaison de la température de sortie pour le tube chaud à gauche, et froid à droite, en fonction de la distance l entre les deux tubes et pour différentes valeurs de $T_{i,c}$. On a $Pe = 10$ et la longueur du domaine est fixée à $L = 2|\lambda_1|$.

On observe d'après 4.28 que la température de sortie du tube froid ne semble pas dépendre de $T_{i,c}$ et ce également quelque soit ℓ . En revanche, la température de sortie du tube chaud dépend fortement de $T_{i,c}$ et cela d'autant plus que les tubes sont proches. Si on les écarte, alors cette température de sortie semble tendre vers une valeur unique quelque soit $T_{i,c}$. D'après la figure 4.29, les comportements des rendements des deux tubes ne semblent pas être fortement impactés par la variation de la distance ℓ . En effet, quelque soit $T_{i,c}$, ϵ_h et ϵ_c diminuent faiblement.

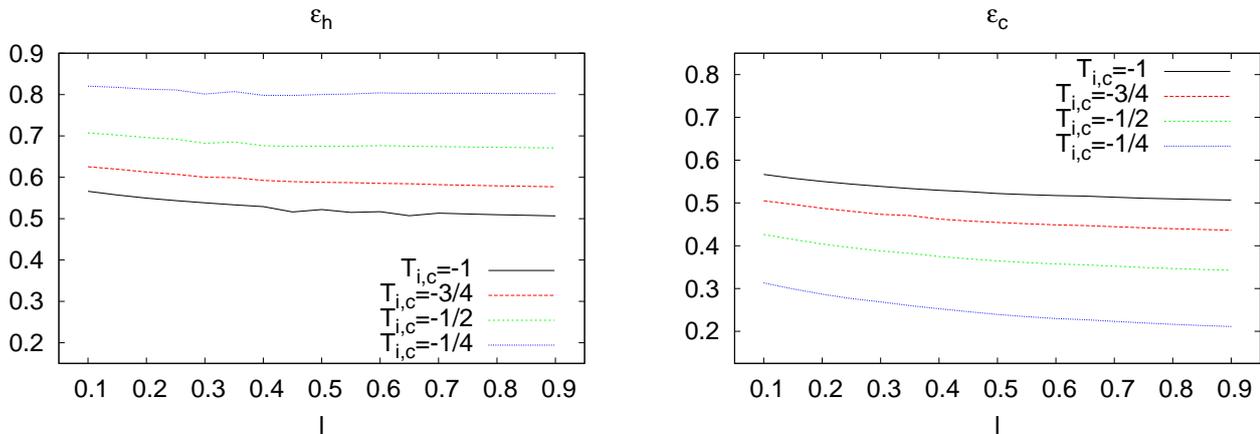


FIGURE 4.29 – Comparaison des rendements pour le tube chaud à gauche, et froid à droite, en fonction de la distance l entre les deux tubes et pour différentes valeurs de $T_{i,c}$. On a $Pe = 10$ et la longueur du domaine est fixée à $L = 2|\lambda_1|$.

Variations du rendement avec le nombre de Péclet

Enfin pour finir, nous présentons des résultats sur l'évolution des rendements du tube chaud et du tube froid. Nous voulons observer qu'elle est la longueur L de l'échangeur pour laquelle ces rendements atteignent une valeur limite. Cette étude est importante d'un point de vue pratique car, en fonction des paramètres géométriques de l'échangeur (par exemple la distance entre les tubes) ainsi qu'hydrodynamiques (le nombre de Péclet de notre problème) employés, elle donne une idée de la longueur L qui sera nécessaire pour atteindre un rendement maximal. Dans toute cette section la condition d'entrée du tube froid est fixée à -1 qui est la configuration antisymétrique que nous avons analysée plus tôt. Pour cette raison de symétrie, tous les rendements chaud et froid atteindront la même valeur plateau en $L \rightarrow \infty$.

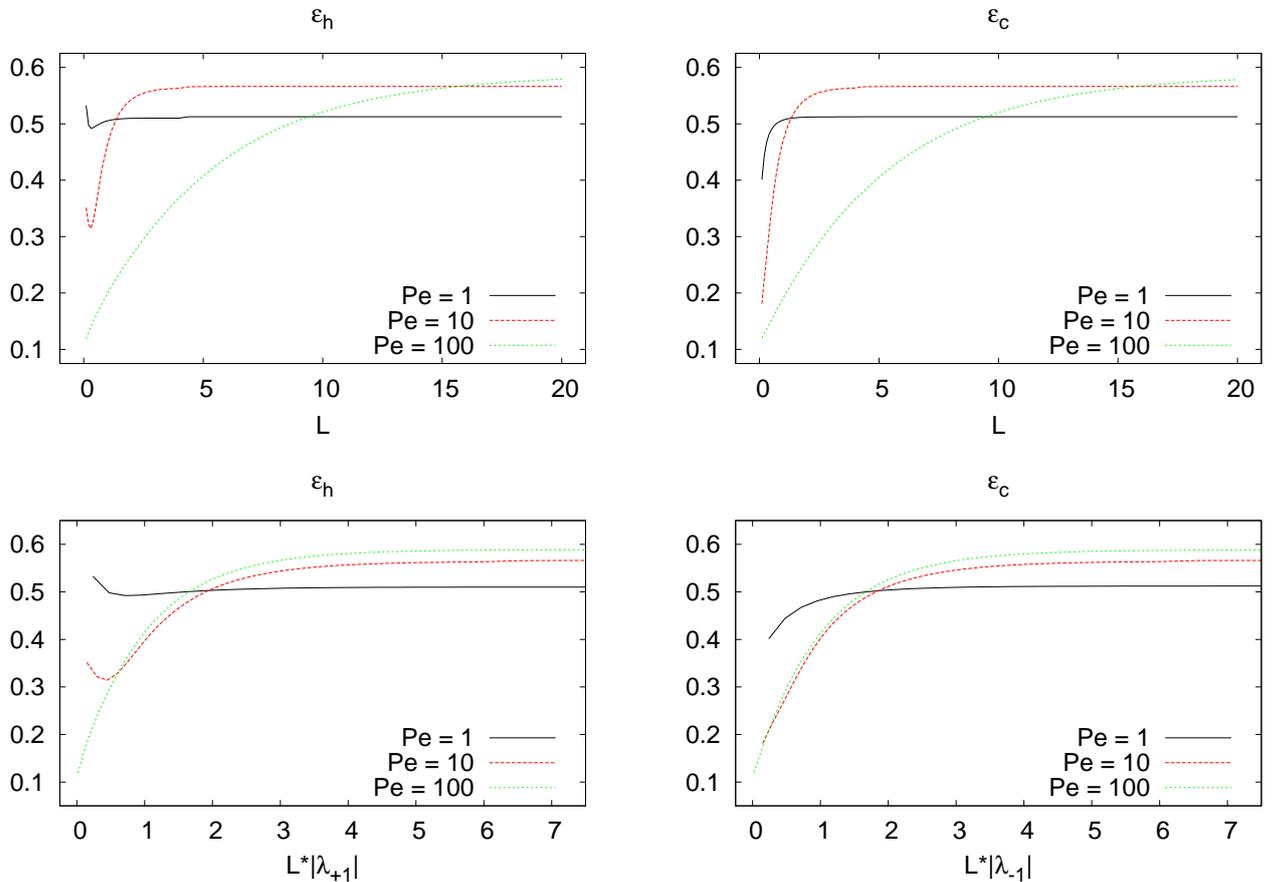


FIGURE 4.30 – Évolution des rendements tube chaud et tube froid en fonction de la longueur L de l'échangeur pour les deux figures en haut et en fonction de L multiplié par la plus petite valeur propre correspondante en bas. La condition d'entrée du tube froid est fixée à -1 et l'écart entre les deux tubes est $l = \frac{\delta}{2}$.

Nous observons d'après la figure 4.30 que plus le nombre de Péclet est grand et plus la longueur L nécessaire pour que les rendements atteignent une valeur plateau doit être grande.

Ceci est notamment dû au fait que plus le nombre de Péclet est grand et plus la première valeur propre amont et aval est grande en valeur absolue. Ainsi, le champ de

température doit être advecté plus loin avant d’être établi. La remise à l’échelle de la longueur de l’échangeur L choisie pour la figure 4.30 haut par la première valeur propre amont/aval (qui est identique dans ce cas antisymétrique) en figure 4.30 bas montre très clairement qu’à grand Péclet la longueur d’établissement du rendement correspond bien à $1/\lambda_1$ puisque les courbes de rendements pour $Pe = 10$ et $Pe = 100$ se stabilisent sur une longueur quasi-identique. Par ailleurs, on observe aussi que plus le nombre de Péclet est grand plus la courbe du rendement est élevée. Cela semble logique, dans la mesure où, grâce à une augmentation de la convection, les échanges sont plus élevés. Néanmoins l’efficacité de la convection à produire de l’échange est de moins en moins visible à mesure que le Pe augmente. En effet, les rendements pour les cas $Pe = 10$ et $Pe = 100$ se rapprochent sensiblement, contrairement au cas $Pe = 1$. Ces résultats suggèrent fortement que, dans le cas où l’on peut négliger la convection longitudinale $Pe \gg 1$, il existe un régime asymptotique pleinement établi produisant une courbe limite de rendement vers laquelle les cas $Pe = 10$ et $Pe = 100$ semblent converger. Ceci est en particulier visible pour la valeur limite du rendement que l’on atteint en $L \rightarrow \infty$ car on remarque que l’écart entre les valeurs ”plateaux” de rendement vers lesquels tendent les cas $Pe = 10$ et $Pe = 100$ est faible, de l’ordre de quelques %. On peut alors reprendre ici la discussion que nous avons esquissée dans l’introduction sur l’existence d’un régime établi du premier mode de Graetz pour lequel les principales grandeurs d’intérêt (flux, température, rendement) sont dominées par ce premier mode. On comprend facilement, d’un point de vue pratique, qu’à partir d’une certaine valeur du débit injecté (correspondant à un Pe élevé) la valeur limite du rendement ne progresse que marginalement, et il n’est alors plus nécessaire d’augmenter la taille de l’échangeur (et on imagine que les coûts de fabrication et d’entretien d’un échangeur sont au moins proportionnels à cette taille..).

Plus précisément, ces résultats nous indiquent que dans la configuration antisymétrique choisie, il est inutile de choisir une longueur plus grande que $3/\lambda_1$. On voit ici de manière claire tout l’intérêt d’une analyse modale pour estimer λ_1 plutôt que des calculs numériques directs qui ne donnent pas cette information (la première valeur propre de Graetz) qui est indépendante des configurations d’entrée choisies pour les températures chaudes et froides.

L’observation des figures 4.31 pour une distance différente entre tube chaud et froid de celle utilisée pour les figures 4.30 renforcent les commentaires précédents. D’une part on observe ici encore l’établissement du rendement sur une longueur de l’ordre de $3/\lambda_1$. On voit aussi qu’augmenter la convection augmente le rendement. Mais on constate ici encore que cela est de moins en moins ”rentable” à mesure que le nombre de Pe augmente, dans la mesure où l’on sait adapter la longueur de l’échangeur.

On constate par ailleurs sur les figures 4.31 qu’écarter les deux tubes d’un facteur quatre par rapport à la configuration précédente n’affecte que très modérément la valeur asymptotique du rendement (de l’ordre de 3%). C’est un effet marginal, et l’on constate, pour le reste des courbes de rendement remis à l’échelle $L\lambda_1$, que la distance géométrique entre tubes a un effet mineur sur le rendement : c’est un constat important qu’il serait intéressant d’étendre à d’autres configurations.

Coupes de température

Dans cette partie nous présentons des coupes du champ de température dans le plan (x, z) pour $y = 0$. Pour ceci, nous avons créé une extrusion du maillage du domaine Ω suivant la coordonnée longitudinale z . Nous réalisons cette opération lors de la résolution avec FreeFem++. Les visualisations sont faites avec le logiciel *Tecplot* [6].

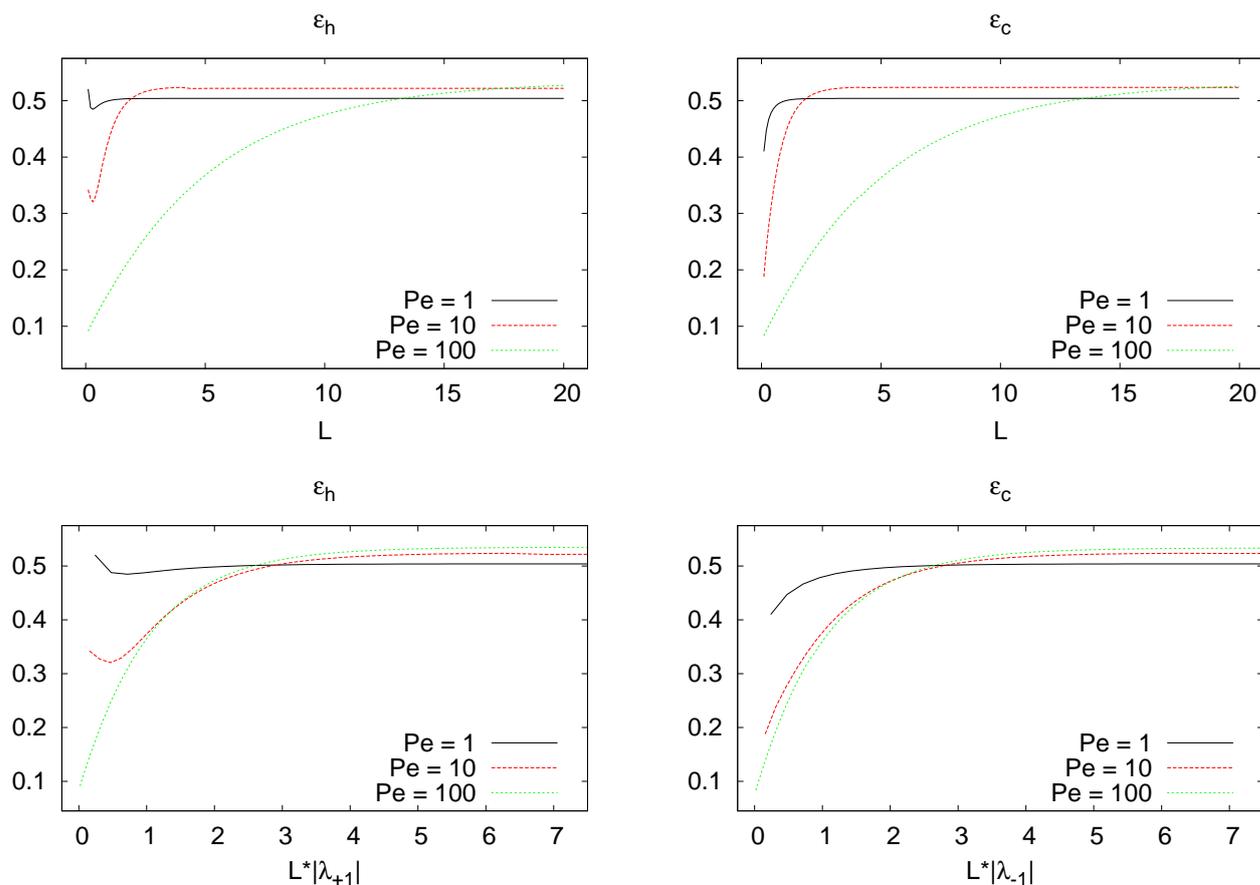


FIGURE 4.31 – Évolution des rendements tube chaud et tube froid en fonction de la longueur L de l'échangeur pour les deux figures en haut et en fonction de L multiplié par la plus petite valeur propre correspondante en bas. La condition d'entrée du tube froid est fixée à -1 et l'écart entre les deux tubes est cette fois ci $l = 2\delta$.

On observe avec la figure 4.32 comment le fluide convecte la température de plus en plus loin avec l'augmentation de l'intensité du champ de vitesse via l'augmentation du nombre de Péclet. On retrouve également la symétrie attendue dans le cas $T_{i,c} = -1$.

Flux fluide/solide en fonction de z : $\Phi(z)$

Nous présentons maintenant des résultats portant sur le flux fluide/solide en fonction de z . En effet, jusqu'ici, nous avons regardé comment se comporte le flux de température ϕ après avoir intégré les gradients de température sur toute la longueur du domaine L . Nous allons regarder ici la valeur des gradients de température avant d'effectuer cette intégration : c'est ce que nous appellerons $\Phi(z)$.

On observe d'après la figure 4.33 que le flux $\Phi(z)$ du tube chaud ne semble pas dépendre pour cette valeur du nombre de Péclet de la condition d'entrée $T_{i,c}$. Cela semble être l'inverse pour le tube froid. Des écarts importants sont observés pour les différentes valeurs de $T_{i,c}$ sur $\Phi(z)$ pour une position proche de la condition d'entrée du tube froid. Cependant plus on s'en éloigne et plus les valeurs du flux ont tendance à converger vers une même valeur. On constate de nouveau que les flux du tube chaud et froid "jouent" des rôles symétriques dans le cas où $T_{i,c} = -1$.

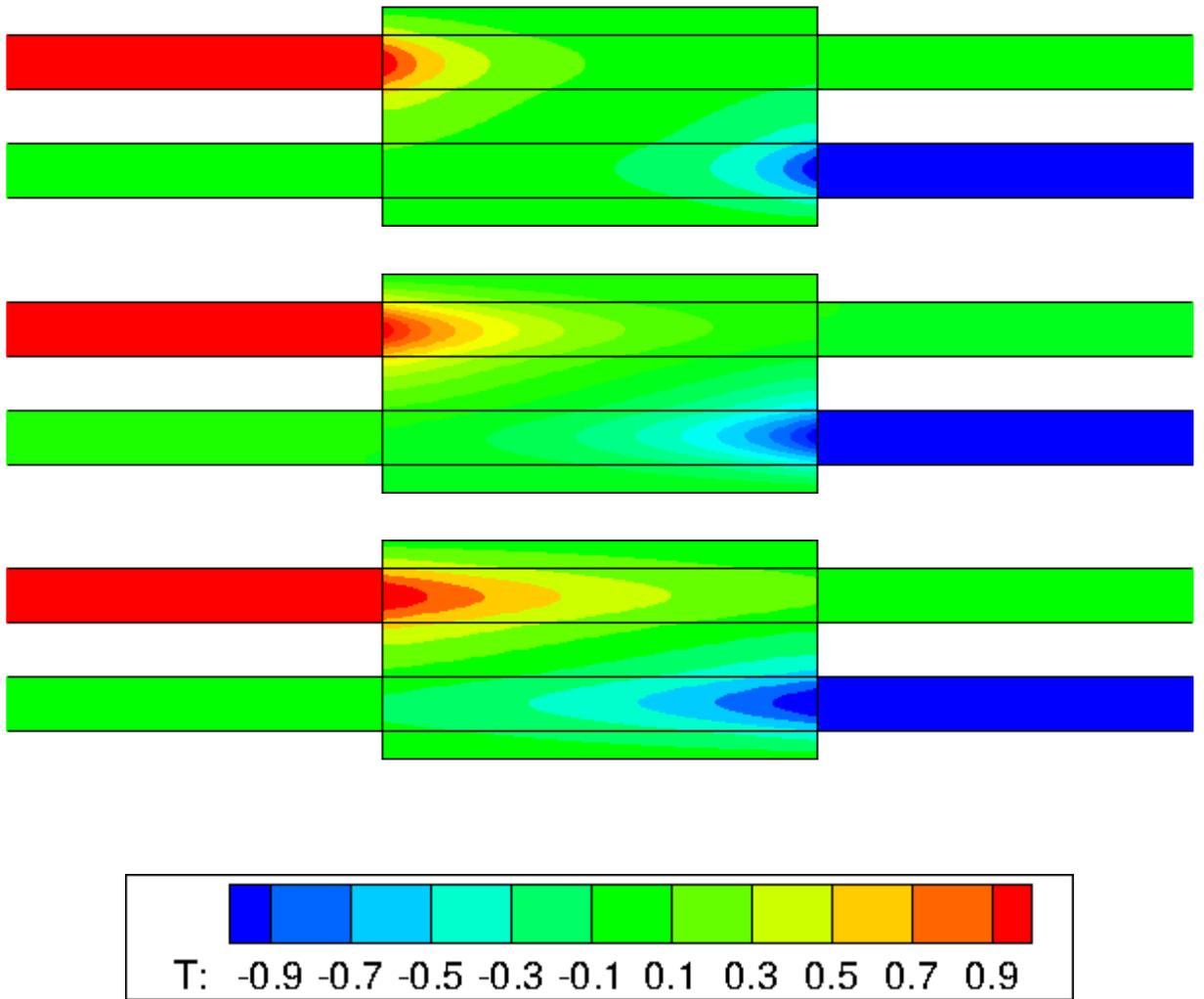


FIGURE 4.32 – Comparaison du champ de température dans l'échangeur pour trois valeurs du nombre de Péclet : 15 (en haut), 30 (au milieu), 45 (en bas). $T_{i,c} = -1$ et la longueur du domaine $L = 4$.

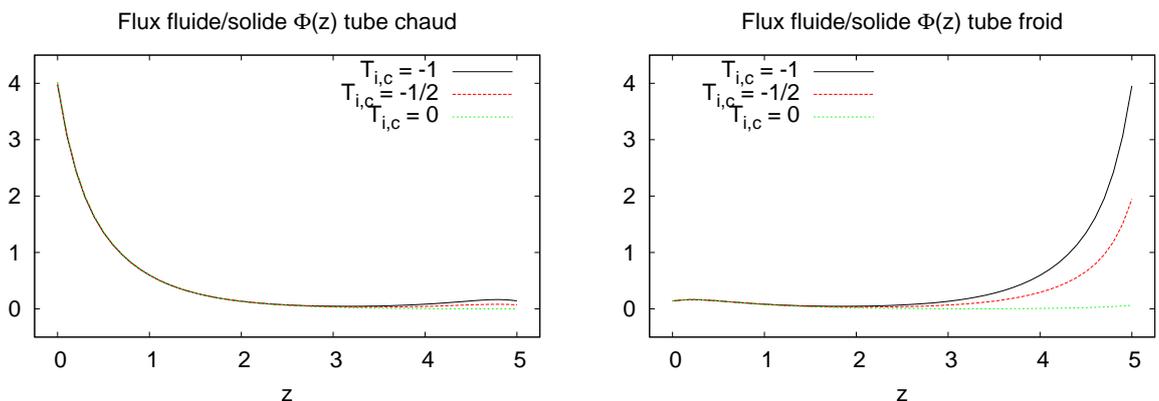


FIGURE 4.33 – Évolution du flux de température fluide/solide $\Phi(z)$ en fonction de la coordonnée longitudinale z pour le tube chaud à gauche et le tube froid à droite. La longueur de l'échangeur est $L = 5$ et $T_{i,c} = -1, -\frac{1}{2}, 0$. Le nombre de Péclet vaut 10 et l'écart entre les deux tubes est $l = \delta$.

Bibliographie

- [1] R. K. Shah and P. D. Sekulić. *Fundamentals of heat exchanger design*. John Wiley and Sons, New Jersey, 2003.
- [2] J. Bouyssier, C. Pierre, and F. Plouraboué. Mathematical analysis of parallel convective exchangers. *Preprint HAL : hal-00667657*, 2012.
- [3] C. Pierre and F. Plouraboué. Numerical analysis of a new mixed-formulation for eigenvalue convection-diffusion problems. *SIAM J. Appl. Math*, **70**(3) :658–676, 2009.
- [4] J. Fehrenbach, F. De Gournay, C. Pierre, and F. Plouraboué. The generalized graetz problem in finite domains. *SIAM J. Appl. Math*, **72**(1) :99–123, 2012.
- [5] C. Pierre and F. Plouraboué. Generalised graetz problem : analytical solutions for concentric or parallel configurations. *Preprint HAL :*, 2012.
- [6] Inc Amtec Engineering. Tecplot. <http://www.tecplot.com/>.

Chapitre 5

Dispersion de Taylor en domaine confiné 3D

Contents

5.1	Introduction	129
5.2	Dérivation théorique des équations	130
5.2.1	Champs de vitesse : hypothèse de lubrification	130
5.2.2	Étude de l'influence de la variation des parois : canal $2D$ de hauteur variable	132
5.2.3	Problème tridimensionnel	136
5.3	Modélisation numérique et validation	140
5.3.1	Modélisation numérique	140
5.3.2	Validation	143
5.4	Résultats et perspectives	145
5.4.1	Canal bidimensionnel	146
5.4.2	Canal tridimensionnel	149
5.4.3	Conclusions et perspectives	151
	Bibliographie	153

Dans le dernier chapitre de ce travail, nous étudions le phénomène de dispersion de Taylor dans un domaine confiné tridimensionnel. Ces travaux ont été commencés lors de mon stage de Master 2 Recherche sous la tutelle de Franck Plouraboué et d'Alain Bergeon. J'ai pu ensuite continuer à travailler sur ce sujet durant ma thèse.

5.1 Introduction

Dans un premier temps, nous dérivons les équations de convection-diffusion moyennes aux temps longs permettant de décrire la dispersion de Taylor dans un canal bidimensionnel longitudinalement variable de demi-hauteur $h(x)$. Pour cela nous utilisons l'approche de Taylor et retrouvons les résultats précédemment obtenus en [1–3].

Nous développons ensuite une étude numérique associée qui nous permet de calculer les variations spatio-temporelles de la concentration moyenne, puis d'estimer ces moments. Nous pouvons ainsi quantifier les effets dûs aux variations de géométries ainsi qu'explorer différentes valeurs du nombre de Péclet dans des configurations similaires à [1] pour

validation.

Nous traiterons ensuite le cas des canaux tridimensionnels, à la fois sur le plan théorique, puis par une étude paramétrique numérique.

Dans l'organisation du chapitre, une première partie permettra d'établir la dérivation théorique des différentes équations de notre problème.

Nous établirons d'abord les champs de vitesse dans le cas de milieux confinés, en utilisant la théorie de la lubrification.

Ensuite nous mettrons en place la dérivation théorique qui détermine le champ de concentration moyen du cas bidimensionnel longitudinalement variable de demi-hauteur $h(x)$.

Enfin, nous ferons l'extension au cas tridimensionnel, qui découle du cas bidimensionnel de façon simple.

La seconde partie correspondra à la modélisation et validation numérique de notre problème.

De nouveau, nous effectuons une implémentation de la formulation faible du problème via le solveur aux éléments finis FreeFem++ [4]. La formulation numérique est validée aux travers de questions portant sur le maillage, le type d'éléments finis, le pas de temps et la condition initiale injectée que nous utilisons.

Enfin une dernière partie nous permettra de présenter différents résultats obtenus pour les configurations $2D$ et $3D$ ainsi que d'évoquer les différentes perspectives. Des études paramétriques portant sur la géométrie des constriction utilisées ainsi que les régimes hydrodynamiques employés sont réalisées afin de voir l'impact sur la dispersion longitudinale de la concentration moyenne.

5.2 Dérivation théorique des équations

5.2.1 Champs de vitesse : hypothèse de lubrification

Dans ce paragraphe, nous déterminons les expressions générales des champs de vitesses, dans le cas d'un canal bidimensionnel longitudinalement variable et de demi-hauteur $h(x)$, en résolvant les équations de la lubrification stationnaire.

Soient x et z les variables qui décrivent respectivement les axes horizontaux et verticaux et (u, w) les composantes des champs de vitesse correspondants. Notons b sa longueur caractéristique longitudinale et h_0 sa longueur caractéristique verticale. De par le confinement spatial de notre géométrie, nous avons : $h_0 \ll b \Rightarrow \epsilon = \frac{h_0}{b} \ll 1$.

Les équations de Navier et Stoke pour un écoulement bidimensionnel, stationnaire plan accompagné de la relation d'imcompressibilité sont :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5.2)$$

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (5.3)$$

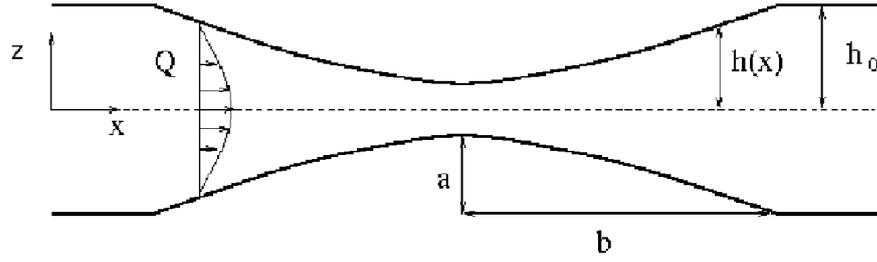


Figure 1 : Canal bidimensionnel non plan

Soit U la vitesse caractéristique longitudinale et W la vitesse suivant z . L'analyse dimensionnelle des différents termes de la relation d'incompressibilité permet de déterminer la vitesse caractéristique verticale comme suivant :

$$W = \frac{Uh_0}{b} = U\epsilon \ll U \quad (5.4)$$

En appliquant le même raisonnement à l'équation 5.2 et en se servant du résultat obtenu avec 5.4, nous obtenons :

$$\underbrace{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}_{O(\frac{\rho U^2}{b})} + \underbrace{\rho w \frac{\partial w}{\partial z}}_{O(\frac{\rho U^2}{b})} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{O(\frac{\mu U}{b^2})} \ll \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{O(\frac{\mu U}{h_0^2})} \quad (5.5)$$

Le rapport effets d'inertie/effets visqueux est $O(\epsilon^2 Re)$, soit très petit devant un. Ainsi, la pression ne dépend que de x et 5.2 se restreint alors à :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5.6)$$

En intégrant deux fois successivement cette dernière équation entre $-h(x)$ et z et en se servant de la condition d'adhérence du fluide à la paroi nous déterminons le champ de vitesse u :

$$u(x, z) = \frac{1}{2\mu}(z^2 - h(x)^2) \frac{dp}{dx} = \varphi \frac{dp}{dx} \quad (5.7)$$

Maintenant que nous connaissons l'expression du champ u et en nous servant de la relation de la conservation du débit, à savoir $h\Delta p + \nabla h \cdot \nabla p = 0$, nous déterminons w en intégrant à deux reprises cette fois ci l'équation d'incompressibilité 5.1 entre $-h(x)$ et z :

$$w(x, z) = \frac{-1}{6\mu} z(z^2 - h(x)^2) \frac{d^2 p}{dx^2} = g \frac{d^2 p}{dx^2} \quad (5.8)$$

Dans le cadre de la lubrification bidimensionnel, pour un écoulement stationnaire, on peut généraliser ces résultats pour les vitesses qui vérifient :

$$\mathbf{u}(x, z) = \varphi(x, z) \nabla \mathbf{p}(x) \quad (5.9)$$

$$w(x, z) = g(x, z) \Delta p(x) \quad (5.10)$$

Il est facile de montrer que cette structure se généralise au cas tridimensionnel stationnaire. De plus, elles sont conservées dans le cas tridimensionnel pulsé [5]. Nous nous permettrons donc d'utiliser cette forme des champs de vitesse dans le cas $3D$.

5.2.2 Étude de l'influence de la variation des parois : canal 2D de hauteur variable

Dans cette section, nous allons déterminer l'équation qui régit l'évolution de la concentration moyenne \bar{C} dans le cas d'un canal bidimensionnel qui varie longitudinalement suivant sa demi-hauteur $h(x)$. Nous reprenons la démarche utilisée par Taylor.

Champs de vitesse

Grâce aux équations de lubrification nous savons que :

$$\begin{aligned} U(x, z) &= \frac{1}{2\mu}(z^2 - h(x)^2) \frac{\partial p}{\partial x} \\ W(x, z) &= \frac{-1}{6\mu}z(z^2 - h(x)^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \end{aligned}$$

donnant :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{-1}{3\mu}h(x)^2 \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{et} \quad u' = \frac{1}{6\mu}(3z^2 - h(x)^2) \frac{\partial p}{\partial x} \\ \bar{W} &= 0 \quad \text{et} \quad w' = \frac{-1}{6\mu}z(z^2 - h(x)^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Équation d'advection-diffusion et décomposition des champs

Notre équation de départ est l'équation classique d'advection diffusion :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)C - D_m \Delta C = 0 \quad (5.11)$$

En utilisant la décomposition en valeur moyenne plus valeur fluctuante des champs de vitesse et de concentration, cette dernière équation 5.11 devient :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{U} \frac{\partial \bar{c}'}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial c'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial c'}{\partial z}} - D_m \left(\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \overline{\Delta c'} \right) = 0 \quad (5.12)$$

On remarque que des termes supplémentaires liés à $h(x)$ sont présent par rapport à l'analyse classique de Taylor entre deux plans parallèles. En effet, la dépendance en x de $h(x)$ empêche de commuter les dérivées spatiales avec l'intégrale de moyenne et ainsi de faire apparaître la moyenne de c' qui est nulle.

Conditions aux limites

Cette équation est munie des conditions aux limites de flux nul de C aux parois :

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla C)_{z=\pm h} = 0 \quad (5.13)$$

où \mathbf{n} est la normale sortante à la paroi. Définissons l'équation de la surface en $z = h$ par $H = z - h = 0$ afin de simplifier ces conditions aux limites aux parois. Si on définit \mathbf{n} à l'aide de H par $\frac{\nabla H}{\|\nabla H\|} = \mathbf{n}$ nous avons :

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla \bar{C})_{z=+h} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}} \left(\frac{\partial \bar{C}}{\partial z} - \frac{dh}{dx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right)_{z=+h} = 0 \quad (5.14)$$

En faisant de même sur l'équation des conditions limites (5.14), nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial c'}{\partial z} - \frac{dh}{dx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} - \frac{dh}{dx} \frac{\partial c'}{\partial x} \right)_{z=\pm h(x)} = 0 \quad (5.15)$$

Il est possible de montrer que $c' \sim O(\epsilon^2 Pe \bar{C})$. Ainsi une analyse de l'ordre de grandeur de ces différents termes nous donne :

$$\frac{\partial c'}{\partial z} \sim O\left(\frac{\epsilon^2 Pe \bar{C}}{h_0}\right), \quad \frac{dh}{dx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \sim O\left(\frac{\bar{C} h_0}{b^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{dh}{dx} \frac{\partial c'}{\partial x} \sim O\left(\frac{h_0}{b^2} \epsilon^2 Pe \bar{C}\right) \quad (5.16)$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial c'}{\partial z} + \frac{dh}{dx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \frac{dh}{dx} \frac{\partial c'}{\partial x} \sim \frac{\bar{C}}{h_0} [O(\epsilon^2 Pe) + O(\epsilon^2) + O(\epsilon^4 Pe)] \quad (5.17)$$

Pour $\epsilon \ll 1$ et des nombres de Péclet tels que $Pe > \epsilon^{-1} > 1$, alors nous pouvons négliger les deux derniers termes devant le premier. Ainsi l'équation portant sur les conditions limites se restreint de nouveau à :

$$\left(\frac{\partial c'}{\partial z} \right)_{z=\pm h(x)} = 0 \quad (5.18)$$

Modèle de fermeture pour c'

Nous cherchons de nouveau l'expression de c' en utilisant l'hypothèse de fermeture de Taylor. A partir de 5.11 nous obtenons l'équation :

$$D_m \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} = g(x, t) + u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \quad (5.19)$$

où on a :

$$g(x, t) = \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} - D_m \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} \quad (5.20)$$

En intégrant une première fois cette équation entre $-h(x)$ et z et en définissant $A(x, t) = gh(x)$ et $U' = \int_{-h}^z u' dz$ nous obtenons :

$$D_m \left(\frac{\partial c'}{\partial z} \right)_z = gz + U' \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + A(x, t)$$

L'utilisation des conditions limites aux parois et $U'(h) = 2h(x)\bar{u}' = U'(-h) = 0$ impliquent que A et g sont nulles. Ainsi, en intégrant l'équation obtenue entre $-h(x)$ et z , nous avons :

$$c' = \frac{U'}{D_m} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + B(x, t)$$

où $B(x, t) = c'(-h)$ et $\mathcal{U}' = \int_{-h}^z U' dz$

En utilisant la propriété $\overline{c'} = 0$ on trouve que $B(x, t) = \frac{\overline{U'} \partial \overline{C}}{D_m \partial x}$. Au final on obtient :

$$c' = \frac{1}{D_m} (\mathcal{U}' - \overline{\mathcal{U}'}) \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} \quad (5.21)$$

Notons dès maintenant que ce résultat se généralise dans le cas tridimensionnel. En effet, les fluctuations de concentration s'écrivent alors

$$c' = \frac{1}{D_m} [(\mathcal{U}' - \overline{\mathcal{U}'}) \cdot \nabla \overline{C}] \quad (5.22)$$

Équation finale

Nous calculons $\mathcal{U}' - \overline{\mathcal{U}'}$ et nous injectons ce résultat dans les différents termes de l'équation 5.12. Après avoir utilisé la conservation du débit :

$$\nabla \cdot (Q) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (2h(x)\overline{U}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \left(h(x)^3 \frac{dp}{dx} \right) = 0$$

nous obtenons :

$$\overline{U} \frac{\partial c'}{\partial x} + u' \frac{\partial c'}{\partial x} + w' \frac{\partial c'}{\partial z} = \frac{-2h(x)^5}{945D_m\mu^2} \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x) \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} \right) \quad (5.23)$$

Comme :

$$\frac{Q}{2h(x)} = \overline{U} = \frac{-1}{3\mu} h(x)^2 \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{-3Q\mu}{2h(x)^3}$$

L'équation 5.12 devient :

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} - \frac{Q^2}{210D_m} \frac{1}{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x) \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} \right) - D_m \left(\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} + \Delta c' \right) = 0 \quad (5.24)$$

Examinons le dernier terme de cette équation afin de la simplifier.

Le terme suivant la dérivée seconde en z du laplacien de c' s'écrit :

$$\frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} = \frac{1}{2h(x)} \int_{-h}^h \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} dz = \frac{1}{2h(x)} \left[\left(\frac{\partial c'}{\partial z} \right)_{z=h(x)} - \left(\frac{\partial c'}{\partial z} \right)_{z=-h(x)} \right] = 0$$

d'après les conditions limites.

Effectuons maintenant une analyse dimensionnelle sur les termes $\frac{\partial^2 c'}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2}$. En reprenant les même notations que dans la section précédente et en exprimant $\frac{dp}{dx}$ par son écriture en fonction du débit et de $h(x)$ on peut montrer que :

$$c' \sim O \left(\frac{Q\overline{C}h_0}{bD_m} \right).$$

En définissant le nombre de Péclet dans ce cas bidimensionnel comme :

$$Pe = \frac{Qb}{D_m h_0}$$

on retrouve que $c' \sim O(\epsilon^2 Pe \bar{C})$. Ainsi :

$$\frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} \sim \frac{\bar{C}}{b^2} (O(\epsilon^2 Pe) + O(1))$$

Dans ce manuscrit nous travaillons avec des nombres de Péclet tels que $\epsilon^2 Pe \ll 1$ qui est aussi le régime considéré par Selverov et Stone [1]. Ainsi :

$$\frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2}$$

Et par conséquent, l'équation régissant l'évolution de \bar{C} devient :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{Q^2}{210 D_m} \frac{1}{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + D_m \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} \quad (5.25)$$

que l'on peut exprimer sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + D_m \frac{1}{h(x)} \frac{dh(x)}{dx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{D_{St}}{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) \quad (5.26)$$

où :

$$D_{St} = D_m + \frac{Q^2}{210 D_m} \quad (5.27)$$

Une analyse dimensionnelle du second et troisième terme du membre de gauche de l'équation 5.26 nous donne :

$$D_m \frac{1}{h(x)} \frac{dh(x)}{dx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \sim \frac{Q \bar{C}}{b h_0} (O(1) + O(Pe^{-1}))$$

Or, on considère que $Pe \gg \epsilon^{-1} \gg 1$, donc :

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \gg D_m \frac{1}{h(x)} \frac{dh(x)}{dx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}$$

L'équation finale qui régit la concentration moyenne \bar{C} est :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{D_{St}}{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) \quad (5.28)$$

Si on remarque que $\partial_x Q^2 = 2Q \partial_x Q = 2Q \nabla \cdot Q = 0$, alors cette dernière équation s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{1}{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x) D_{St} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) \quad (5.29)$$

où $(D_m + \frac{Q^2}{210 D_m}) \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2}$ est le terme classique de Taylor et $(D_m + \frac{Q^2}{210 D_m}) \frac{1}{h(x)} \frac{dh(x)}{dx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}$ est le terme relatif à la variation de la géométrie des parois. Ces résultats ont été obtenus pour des nombres de Péclet tels que :

$$\epsilon^{-2} \gg Pe \gg \epsilon^{-1}$$

Nous pouvons interpréter ce résultat comme l'équation bilan de la conservation de la quantité \bar{C} qui est advectée par la vitesse moyenne \bar{U} et qui est dispersée dans le canal par un terme de dispersion de Taylor, qui est ici local car il tient compte de la géométrie et donc de l'endroit considéré. Ce résultat est identique à celui trouvé précédemment par Mercer et Robert par une approche tout à fait différente (réduction à la variété centrale) [2] ou plus récemment avec la même approche par Selderov et Stone [1]. Une interprétation physique du résultat est aussi donné en [1] que nous reproduisons ci-dessous.

Soit $A(x)$ et $A(x + dx)$ deux sections transversales du canal en x et $x + dx$. On détermine le volume entre ces deux sections en établissant une section moyenne $\bar{A}(x)$ à partir de $A(x)$ et $A(x + dx)$. Comme $h(x)$ varie faiblement en fonction de x , on peut approcher $\bar{A}(x)$ par $A(x)$. Par conséquent le volume entre $A(x)$ et $A(x + dx)$ est $A(x)dx$. La variation de \bar{C} au cours du temps dans le volume précédemment défini, *i.e.* $\frac{\partial}{\partial t}(\bar{C}A(x)dx)$, est égale au flux total de \bar{C} plus le flux total de ce qui dispersé de \bar{C} au sein du volume. Le flux total de \bar{C} au sein du volume est égal à \bar{C} advectée par la vitesse moyenne \bar{U} qui rentre via la surface en $A(x)$ moins \bar{C} advectée par la vitesse moyenne \bar{U} qui sort via la surface $A(x + dx)$, soit $-(\bar{U}\bar{A}\bar{C})|_x^{x+dx}$. Le flux de ce qui est dispersé entre $A(x)$ et $A(x + dx)$ est déterminé par la loi de Fick mais avec un coefficient de dispersion égal au coefficient de dispersion de Taylor, soit $(D_T A \frac{\partial \bar{C}}{\partial x})|_x^{x+dx}$. Au final nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{C}A(x)dx) = -(\bar{U}\bar{A}\bar{C})|_x^{x+dx} + (D_T A \frac{\partial \bar{C}}{\partial x})|_x^{x+dx} \quad (5.30)$$

On divise ensuite par dx et on prends la limite $dx \rightarrow 0$ pour obtenir :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{1}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{C}A(x)\bar{U}) = \frac{1}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x}(D_T A(x) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}) \quad (5.31)$$

En notant que la conservation du débit implique que $\frac{d}{dx}(A(x)\bar{U}) = 0$ on obtient :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{1}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x}(D_T A(x) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}) \quad (5.32)$$

Dans notre cas, l'aire transversale $A(x) = 2h(x)$ et on retrouve bien le résultat obtenu précédemment.

5.2.3 Problème tridimensionnel

Dans cette partie nous considérons un soluté de dispersant dans un écoulement au sein d'un canal 3D. La direction de l'écoulement est le plan (x, y) et la coordonnée verticale z varie entre $z = -h(x, y)$ et $z = h(x, y)$. Nous reprenons les mêmes conventions que la section précédente en précisant que b est l'échelle caractéristique dans le plan de l'écoulement.

Dans un premier temps nous allons établir l'équation régissant l'évolution de \bar{C} sans spécifier la possible dépendance en temps du champ de vitesse. Puis nous étudierons le cas stationnaire pour montrer que le résultat obtenu est la généralisation du cas bidimensionnel. Pour cette section nous allons utiliser une démarche différente de la précédente.

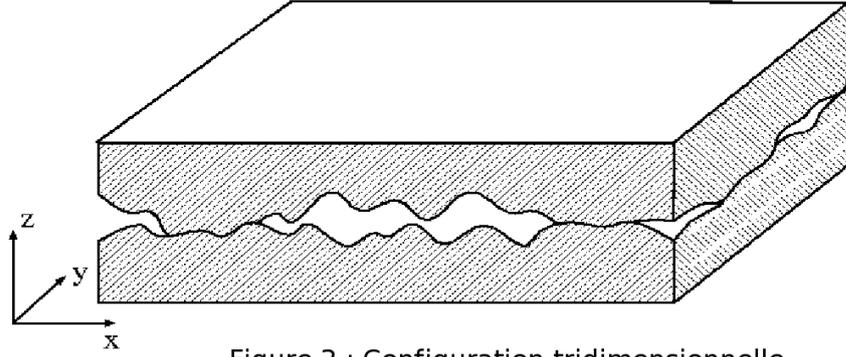


Figure 2 : Configuration tridimensionnelle

Champs de vitesse

Nous avons vu dans le chapitre de la lubrification que la structure des champs de vitesse 3D est :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (U, V) = \varphi(x, y, z) \nabla p(x, y) \\ W &= g(x, y, z) \Delta p(x, y) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Ce qui nous donne de par la décomposition de la vitesse :

$$\bar{\mathbf{U}}(x, y) = \overline{\varphi(x, y)} \nabla p(x, y) \quad (5.34)$$

$$\mathbf{u}'(x, y, z) = f(x, y, z) \nabla p(x, y) \quad (5.35)$$

Définissons les intégrales premières du champ de vitesse horizontal perturbé :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}' &= \int_{-h}^z \mathbf{u}' dz = \int_{-h}^z f dz \nabla p = F(x, y, z) \nabla p \\ \mathcal{U}' &= \int_{-h}^z \mathbf{U}' dz = \int_{-h}^z F dz \nabla p = \mathcal{F}(x, y, z) \nabla p \end{aligned} \quad (5.36)$$

Nous aurons besoin de ces définitions par la suite.

Équation d'advection-diffusion et conditions limites

Définissons $\mathbf{q} = \mathbf{U} - D_m \nabla \bar{C}$ que nous appellerons flux convecto-diffusif et où D_m est le coefficient de diffusion moléculaire. Nous définissons \mathbf{q} comme un vecteur dont la première composante est un vecteur \mathbf{q}_2 qui correspond aux composantes suivant x et y et la seconde un scalaire q_z qui correspond à la composante de ce vecteur suivant z . Ainsi : $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_2, q_z)$. Nous pouvons alors écrire 5.11 de la façon suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla_3 \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (5.37)$$

où ∇_3 correspond à l'opérateur divergence suivant x, y, z .

Intégrons 5.37 entre $-h(x, y)$ et $+h(x, y)$ et séparons dans le terme de dérivée temporelle la concentration en quantité moyenne et fluctuante. Décomposons également \mathbf{q} en deux parties. En utilisant la propriété de moyenne nulle des quantités fluctuantes de la concentration, nous obtenons :

$$2h \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \int_{-h}^{+h} \nabla_2 \cdot \mathbf{q}_2 dz + \int_{-h}^{+h} \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = 0 \quad (5.38)$$

où $\nabla_2 \cdot$ correspond à l'opérateur divergence cette fois ci dans le plan (x, y) . A l'aide de la règle de l'intégrale de Leibniz nous avons :

$$\int_{-h}^{+h} \nabla_2 \cdot \mathbf{q}_2 dz = \nabla_2 \cdot \int_{-h}^{+h} \mathbf{q}_2 dz - \mathbf{q}_2|_{z=h} \nabla h - \mathbf{q}_2|_{z=-h} \nabla h$$

Le dernier terme de 5.38 nous donne :

$$\int_{-h}^{+h} \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = [q_z]_{-h}^{+h}$$

Ainsi notre équation se réécrit :

$$2h \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \nabla_2 \cdot \int_{-h}^{+h} \mathbf{q}_2 dz - \mathbf{q}_2|_{z=h} \nabla h - \mathbf{q}_2|_{z=-h} \nabla h + [q_z]_{-h}^{+h} = 0 \quad (5.39)$$

Les conditions limites de flux nul aux parois nous donnent :

$$\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{q}_3 \\ q_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\nabla h \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.40)$$

Si on regarde ces conditions en $\pm h$ nous avons :

$$q_z(\pm h) = \pm \mathbf{q}_2|_{z=\pm h} \cdot \nabla h$$

En sommant ces deux équations et en soustrayant au membre de gauche celui de droite nous obtenons :

$$[q_z]_{-h}^{+h} - [\mathbf{q}_2|_{z=h} + \mathbf{q}_2|_{z=-h}] \cdot \nabla h = 0$$

Ainsi 5.39 se simplifie en :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{1}{2h} \nabla_2 \cdot \int_{-h}^{+h} \mathbf{q}_2 dz = 0 \quad (5.41)$$

Décomposons maintenant les champs de vitesse et de concentration en moyenne plus fluctuation dans \mathbf{q}_2 . Rappelons que $\mathbf{q}_2 = \mathbf{U}_2 - D_m \nabla_2 \bar{C}$ où $\mathbf{U}_2 = \bar{\mathbf{U}}_2 + \mathbf{u}'_2$. Nous obtenons alors :

$$\frac{1}{2h} \nabla_2 \cdot \int_{-h}^{+h} \mathbf{q}_2 dz = \frac{1}{2h} \nabla_2 \cdot (2h \bar{\mathbf{U}}_2 \bar{C} + 2h \overline{\mathbf{u}'_2 c'} - D_m [2h \nabla_2 \bar{C} + 2h \overline{\nabla_2 c'}]) \quad (5.42)$$

Pour la suite, nous conviendrons que les opérateurs et champs de vitesses utilisés sont ceux du plan (x, y) . Ainsi nous avons :

$$\frac{1}{2h} \nabla \cdot \int_{-h}^{+h} \mathbf{q} dz = \frac{1}{2h} \nabla \cdot (2h \bar{\mathbf{U}} \bar{C} + 2h \overline{\mathbf{u}' c'} - D_m [2h \nabla \bar{C} + 2h \overline{\nabla c'}]) \quad (5.43)$$

C'est cette expression que nous allons maintenant simplifier :

- Le premier terme s'écrit

$$\frac{1}{2h} \nabla \cdot (2h \bar{\mathbf{U}} \bar{C}) = \frac{1}{2h} (\bar{C} \nabla \cdot (2h \bar{\mathbf{U}}) + 2h \bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla \bar{C})$$

Définissons \mathbf{Q} le débit local dans le plan (x, y) . Par définition nous avons :

$$\int_{-h}^{+h} \mathbf{U} = \mathbf{Q} \implies 2h\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{Q} \implies \nabla \cdot (2h\bar{\mathbf{U}}) = \nabla \cdot (\mathbf{Q}) = 0$$

par conservation du débit. Nous avons donc :

$$\frac{1}{2h} \nabla \cdot \int_{-h}^{+h} 2h\bar{\mathbf{U}}\bar{C} dz = \bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla \bar{C}$$

• Le second terme se réécrit en utilisant (5.22) ainsi que la définition de \mathbf{U}' :

$$\bar{\mathbf{u}'c'} = \frac{1}{2h} \left([\mathbf{U}'c']_{-h}^h - \int_{-h}^h \frac{\mathbf{U}'}{D_m} (\mathbf{U}' \cdot \nabla \bar{C}) dz \right)$$

Or :

$$\mathbf{U}'(h) = \int_{-h}^h \mathbf{u}' dz = 2h\bar{\mathbf{u}'} = 0$$

et :

$$\mathbf{U}'(-h) = \int_{-h}^{-h} \mathbf{u}' dz = 0$$

Donc :

$$2h\bar{\mathbf{u}'c'} = \frac{-1}{D_m} \int_{-h}^h \mathbf{U}'(\mathbf{U}' \cdot \nabla \bar{C}) dz$$

En utilisant l'expression des champs de vitesse via leur forme générique vue en 5.34, ainsi que $\nabla p = \frac{1}{2h\bar{\varphi}^2} \mathbf{Q}$, on montre que :

$$\int_{-h}^h \mathbf{U}'(\mathbf{U}' \cdot \nabla \bar{C}) dz = 2h\mathcal{D} \cdot \nabla \bar{C}$$

où :

$$\mathcal{D} = \frac{\bar{F}^2}{4h^2\bar{\varphi}^2} (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q})$$

Ainsi que :

$$\frac{1}{2h} \nabla \cdot (2h\bar{\mathbf{u}'c'}) = \frac{-1}{2h} \nabla \cdot \left(\frac{2h}{D_m} \mathcal{D} \cdot \nabla \bar{C} \right)$$

• En suivant la section précédente, on peut montrer par une analyse dimensionnelle sur les deux derniers termes de (5.42) que :

$$\nabla \bar{C} + \nabla c' \sim \frac{\bar{C}}{b} (O(1) + O(\epsilon^2 Pe))$$

Nous négligerons donc le terme en c' devant celui en \bar{C} pour obtenir

$$\frac{1}{2h} \nabla \cdot (-D_m[2h\nabla \bar{C} + 2h\nabla c']) \implies \frac{-1}{2h} \nabla \cdot (2hD_m \nabla \bar{C})$$

Équation finale

$$\frac{1}{2h} \nabla \cdot \int_{-h}^{+h} \mathbf{q} \, dz = \bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla \bar{C} - \frac{1}{2h} \nabla \cdot \left(\frac{2h}{D_m} \mathcal{D} \cdot \nabla \bar{C} \right) - \frac{1}{2h} \nabla \cdot (2h D_m \nabla \bar{C}) \quad (5.44)$$

En remarquant que :

$$-\frac{1}{2h} \nabla \cdot \left(\frac{2h}{D_m} \mathcal{D} \cdot \nabla \bar{C} \right) - \frac{1}{2h} \nabla \cdot (2h D_m \nabla \bar{C}) = \frac{-1}{2h} \nabla \cdot (2h \mathcal{D}^* \cdot \nabla \bar{C}) \quad (5.45)$$

où :

$$\mathcal{D}^* = D_m \left(\mathbf{I} + \frac{\bar{F}^2}{4h^2 D_m^2 \bar{\varphi}^2} (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}) \right) \quad (5.46)$$

avec \mathcal{D}^* le tenseur de dispersion effectif local de Taylor et \mathbf{I} la matrice identité 2×2 . Nous avons donc montré que l'équation qui régit l'évolution de la concentration moyenne effective de Taylor du traceur aux temps longs prend, en 3D, la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla \bar{C} = \frac{1}{2h} \nabla \cdot (2h \mathcal{D}^* \cdot \nabla \bar{C}), \quad (5.47)$$

Régime stationnaire

A aucun moment nous n'avons explicité le régime temporel de l'écoulement. Supposons que celui-ci soit stationnaire. D'après la généralisation en 3D des équations de lubrification stationnaire vues plus haut, nous avons :

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}^2 &= \frac{2h^6}{945\mu^2} \\ \bar{\varphi}^2 &= \frac{h^4}{9\mu^2} \end{aligned} \right\} \implies \frac{\bar{F}^2}{4h^2 D_m^2 \bar{\varphi}^2} = \frac{1}{210 D_m^2} \quad (5.48)$$

Nous voyons donc que l'équation 5.47 en régime stationnaire est bien la généralisation de notre résultat dans le cas bidimensionnel où h varie longitudinalement.

5.3 Modélisation numérique et validation

5.3.1 Modélisation numérique

Soit une cavité tridimensionnelle d'ouverture comprise entre $-h^*(x^*, y^*)$ et $+h^*(x^*, y^*)$, de longueur comprise entre 0 et L et de dimension transverse comprise entre $-w^*(x^*, y^*)/2$ et $+w^*(x^*, y^*)/2$. Un fluide, au sein duquel se trouve un traceur de concentration C^* qui va se répandre, s'écoule dans le plan (x^*, y^*) suivant un régime stationnaire. La longueur caractéristique de la cavité suivant x^* est L , H suivant sa hauteur z^* et W suivant sa direction transverse y^* . Pour respecter le confinement géométrique et afin de pouvoir appliquer la théorie de la lubrification, nous avons $\epsilon = \frac{H}{L} < 1$. Le traceur, au temps initial t_0^* , se trouve à l'entrée de la cavité et sa concentration moyenne \bar{C}_0^* suit une loi gaussienne qui est supposée connue. Rappelons que nous travaillons sur des problèmes symétriques par rapport au plan horizontal. Ainsi nous pouvons restreindre notre étude entre 0 et $+h^*(x^*, y^*)$. Puisque nos équations sont moyennées suivant la hauteur, définissons Ω^* la surface dans le plan (x^*, y^*) de notre géométrie. C'est sur cette surface que nous avons déterminé nos équations et que nous allons calculer la dispersion du soluté.

Problème en pression

Nous allons, dans un premier temps, déterminer les champs de pression sur Ω^* en nous basant sur les travaux de [5]. Définissons le débit horizontal par :

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^* &= -K^* \nabla p^* \\ K^* &= \frac{-2(h^*)^3}{3}\end{aligned}$$

où K^* est la conductance hydraulique et p^* le champ de pression. Puisqu'il y a conservation du débit nous avons :

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}^* = -\nabla \cdot (K^* \nabla p^*) = 0 \quad (5.49)$$

Nous résolvons alors numériquement le problème variationnel associé.

Pour toute la suite nous allons travailler en variables adimensionnées que nous noterons sans l'indice *. Les variables spatiales sont adimensionnées par leur longueur caractéristique respective. La vitesse utilisée pour adimensionner nos champs est la vitesse moyenne $\bar{\mathbf{U}}^*$ associée au débit moyen \mathbf{Q}^* . La pression est adimensionnée par une pression visqueuse $\mu U^* L / H^2$ et nous définissons l'opérateur gradient adimensionné comme :

$$\forall f(x, y) \in \Omega, \nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \frac{1}{\gamma} \partial_y f \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

où nous définissons $\gamma = \frac{W}{L}$ et $\Omega = [0; 1] \times [-1/2; 1/2]$ est le domaine adimensionné associé à notre géométrie. Alors, pour p et \tilde{p} deux fonctions définies sur Ω , la formulation variationnelle associée à l'équation (5.49) adimensionnée est :

$$S[p, \tilde{p}] = \int_{\Omega} K (\nabla p \cdot \nabla \tilde{p}) \, dx dy$$

A cette équation nous associons des conditions limites de type Dirichlet sur la pression en entrée et sortie de l'écoulement afin de générer un différentiel et ainsi mettre le fluide en mouvement. Nous déterminons alors le champ de pression p sur Ω qui nous permet alors de reconstruire les champs de vitesse, et notamment le champ de vitesse moyen dans le plan (x, y) adimensionné : $\bar{\mathbf{U}}$.

Problème sur la concentration

Dans cette section nous allons déterminer la dispersion du soluté. Nous adimensionnons la concentration par la concentration moyenne \bar{C}_0^* que nous notons \bar{C} et le temps t^* par un temps convectif L/U^* que nous notons t . Nous allons utiliser un schéma d'intégration temporel d'Euler d'ordre un pour déterminer à chaque pas de temps δt la concentration moyenne \bar{C} en résolvant le problème variationnel associé à l'équation (5.47) adimensionnée. Le pas de temps δt utilisé est choisi inversement proportionnel au nombre de Péclet afin de capter les effets convectifs quelque soit la valeur de ce paramètre. Nous définissons le tenseur de dispersion effectif local de Taylor adimensionné, issu de (5.46) de la façon suivante :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_a & \mathcal{D}_b \\ \mathcal{D}_b & \mathcal{D}_c \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a &= \frac{1}{Pe} + \frac{(\epsilon Q_x)^2 Pe}{210} : \text{dispersion longitudinale} \\ \mathcal{D}_b &= \frac{\epsilon^2 Q_x Q_y Pe}{210} : \text{couplage entre dispersion longitudinale et transversale} \\ \mathcal{D}_c &= \frac{1}{Pe} + \frac{(\epsilon Q_y)^2 Pe}{210} : \text{dispersion transversale}\end{aligned}$$

avec Pe le nombre de Péclet de notre problème et Q_x et Q_y les composantes du vecteur débit horizontal adimensionné.

Soit c^n et \tilde{c}^n deux fonctions définies sur Ω au temps n . Définissons le vecteur :

$$\omega = \begin{pmatrix} \left(\begin{matrix} \mathcal{D}_a \\ \mathcal{D}_b \end{matrix} \right) \cdot \nabla c^n \\ \left(\begin{matrix} \mathcal{D}_b \\ \mathcal{D}_c \end{matrix} \right) \cdot \nabla c^n \end{pmatrix}$$

Ainsi à chaque pas de temps n , nous avons le problème variationnel suivant :

$$S[c^n, \tilde{c}^n] = \int_{\Omega} \left(\frac{c^n - c^{n-1}}{\delta t} \tilde{c}^n + \omega \cdot \nabla \tilde{c}^n + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla c^n) \tilde{c}^n \right) dx dy$$

Nous pouvons alors à chaque temps n déterminer la concentration moyenne adimensionnée du traceur en connaissant cette dernière au pas de temps $n - 1$. Nous utilisons ensuite les définitions des moments utilisés dans [1] pour déterminer la dispersion du soluté. Le moment d'ordre zéro correspond à la concentration totale du soluté initialement introduit. Ce moment est donc constant pour tout temps t :

$$M_0 = M = \alpha \int_{\Omega} h^{\beta}(x, y) \bar{C}(x, y, t) dx dy$$

Le moment d'ordre un correspond à la concentration moyenne et dépend du temps :

$$M_1 = \mu_L(t) = \frac{\alpha}{M} \int_{\Omega} x h^{\beta}(x, y) \bar{C}(x, y, t) dx dy \quad (5.51)$$

Le moment d'ordre deux correspond à la dispersion longitudinale élevée au carré du soluté, encore appelée déviation standard. Elle dépend également du temps :

$$M_2 = \sigma_L^2(t) = \frac{\alpha}{M} \int_{\Omega} (x - \mu) h^{\beta}(x, y) \bar{C}(x, y, t) dx dy \quad (5.52)$$

Les coefficients α et β valent 2 et 1 dans le cas d'une géométrie plane où π et 2 dans le cas d'une géométrie axisymétrique. De la même façon que nous avons établi la dispersion longitudinale, nous pouvons déterminer la dispersion transverse en définissant respectivement les deux premiers moments : $\mu_T(t)$ et $\sigma_T^2(t)$ en remplaçant x par y dans les expressions (5.51) et (5.52). Nous allons implémenter ces deux formulations variationnelles à l'aide du solveur aux éléments finis FreeFem++ [4] afin de mener nos études numériques.

5.3.2 Validation

Nous validons notre code suivant plusieurs points : maillage, pas de temps, condition initiale et utilisation d'éléments P1 ou bien P2. Cette section suit les exemples étudiés en [1]. Nous procédons à ces validations pour un canal bidimensionnel variant longitudinalement suivant $h(x)$ possédant une constriction et pour les deux valeurs extrêmes du nombre de Péclet utilisé : 100 et 1000. La surface Ω que nous maillons est un rectangle de dimension 6×2 . Nous regardons alors comment se comporte la dispersion longitudinale normalisée ou non par le coefficient de diffusion longitudinal effectif $\mathcal{D}_a = \frac{1}{Pe} + \frac{(\epsilon Q_x)^2 Pe}{210}$ au cours du temps.

Maillages et éléments finis

Nous comparons deux maillages. Le second maillage possède deux fois plus de points suivant les axes x et y que le maillage un. Nous effectuons cette comparaison pour des éléments finis de type P1 et P2.

Nous observons d'après 5.1 que les différences sur les valeurs de la dispersion norma-

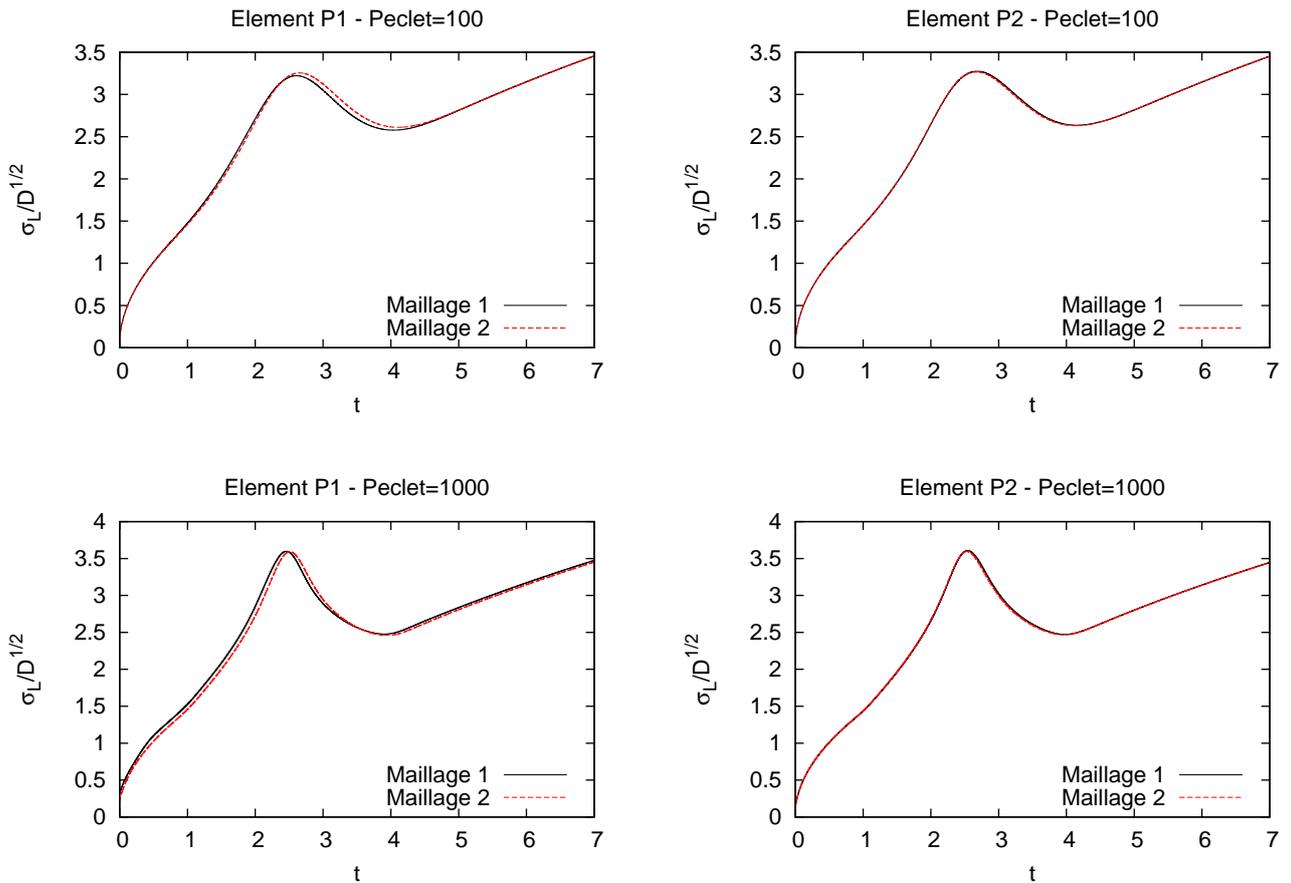


FIGURE 5.1 – Dispersion longitudinale calculée normalisée en fonction du temps t pour les deux maillages, suivant des éléments finis de type P1 et P2 et pour deux valeurs du nombre de Péclet : $Pe = 100$ et $Pe = 1000$.

lisée sont très faibles entre les deux cas, indiquant que nous avons convergé en maillage.

Cependant pour des éléments de type P2 les maillages se superposent quasiment, contrairement au cas P1. Nous utiliserons donc le premier maillage avec des éléments de type P2 pour nos calculs.

Pas de temps

Nous comparons différents pas de temps δt . Ceux-ci sont inversement proportionnels au nombre de Péclet : $\delta t \sim \frac{1}{Pe}$.

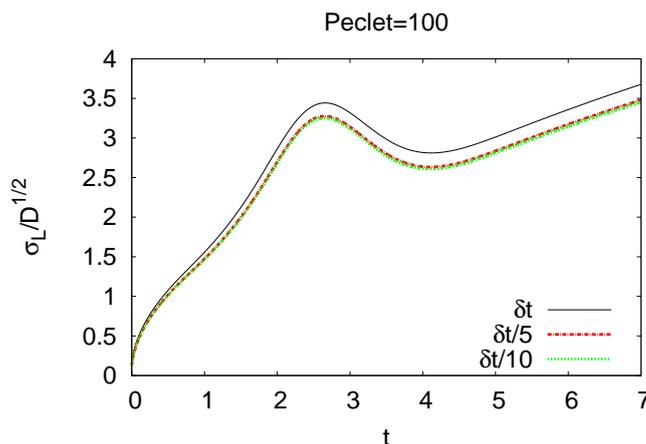


FIGURE 5.2 – Dispersion longitudinale calculée normalisée en fonction du temps t pour trois pas de temps et à $Pe = 100$.

Nous regardons comment se comporte la dispersion longitudinale normalisée à $Pe = 100$ pour trois pas de temps δt distincts. On remarque d'après 5.2 que la dispersion longitudinale adimensionnée converge pour un pas de temps $\delta t = \frac{1}{10Pe}$. Nous garderons ce pas de temps pour nos calculs.

Type de condition initiale

Nous regardons la condition initiale \bar{C}_0 que nous imposons en entrée à $t = 0$ pour deux dispositions différentes du traceur. Pour la première, le traceur est présent sous la forme d'un cercle de rayon r_0 . Pour la seconde, le traceur est disposé suivant la loi d'une gaussienne dont on fixe la variance σ_0 . Nous allons regarder comment se comporte la dispersion normalisée dans les deux cas ainsi que l'erreur sur le moment d'ordre 0 pour une valeur fixée de r_0 et σ_0 telles que $r_0 = \sigma_0$. Nous prenons la valeur la plus petite possible afin de pouvoir modéliser la concentration en $t = 0$ comme un Dirac.

On note d'après la figure 5.3 que par rapport à la dispersion longitudinale calculée normalisée nous obtenons des résultats similaires. Cependant, l'erreur relative sur le moment d'ordre zéro est trois fois plus grande et proche de 10% dans le cas du cercle par rapport au cas de la loi Gaussienne. Ceci peut être expliqué éventuellement par l'aspect plus régulier de cette dernière condition. Nous choisirons ce type de conditions pour la suite.

Condition initiale σ_0

Ici on regarde comment se comporte la dispersion longitudinale calculée adimensionnée pour différentes valeurs de la variance σ_0 pour une condition initiale qui suit la loi Gaus-

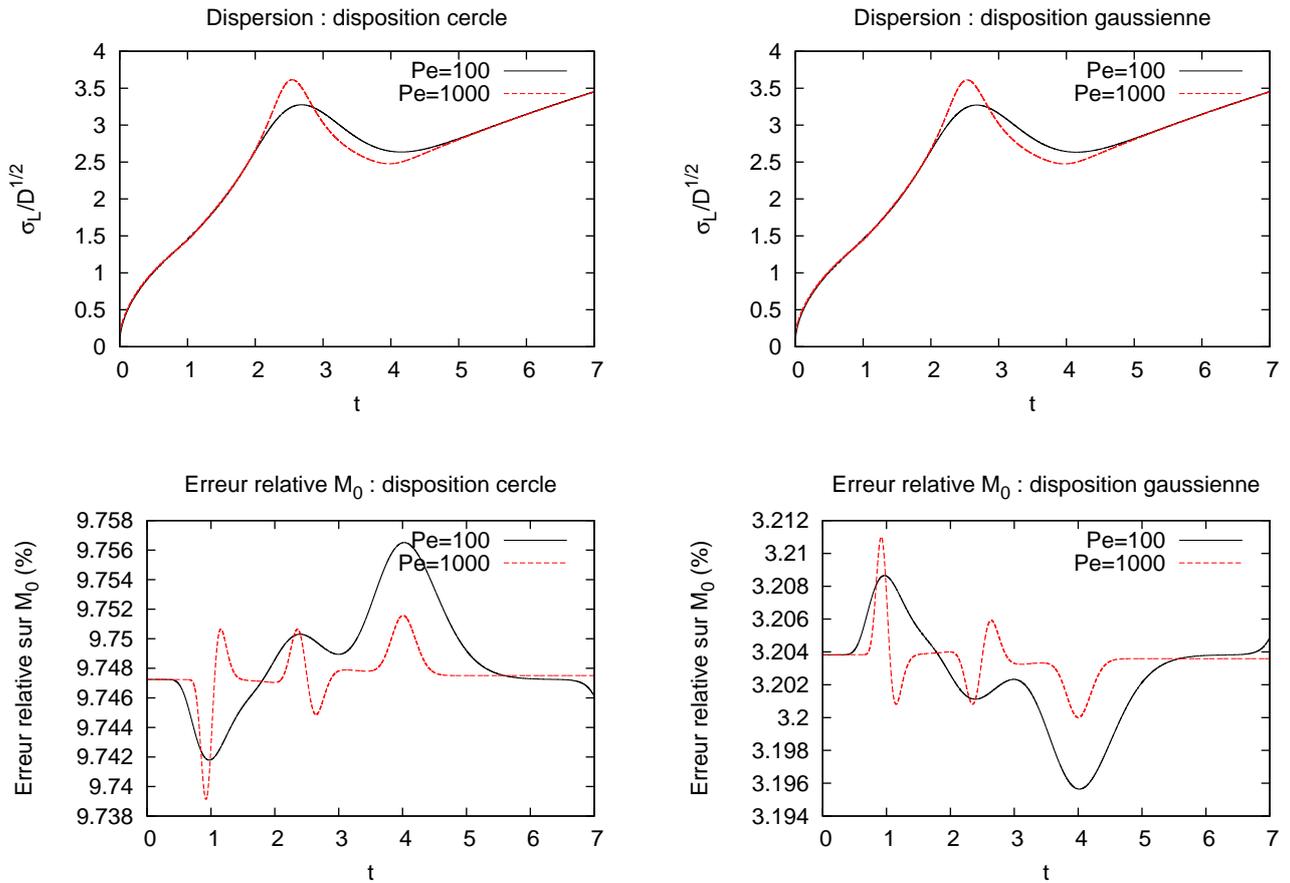


FIGURE 5.3 – Dispersion longitudinale calculée adimensionnée et erreur relative sur le premier moment M_0 en fonction du temps t pour les deux dispositions initiales de la concentration et pour deux nombres de Péclet : $Pe = 100$ et $Pe = 1000$.

sienne. Nous faisons cette étude pour différentes valeurs de Péclet.

Nous observons d'après 5.4 que les deux courbes de la dispersion normalisée calculée se superposent pour la dernière valeur de σ_0 . C'est donc celle-ci que nous utiliserons pour la suite. Il est normal que nous trouvions cette superposition pour les temps t où le traceur est hors de la constriction, représenté par ce pic observé. En effet, nous normalisons par le coefficient de dispersion locale qui dépend lui même du nombre de Péclet considéré. Ainsi nous pouvons voir au travers de la dispersion calculée normalisée le rôle joué uniquement par la constriction.

5.4 Résultats et perspectives

Dans cette section nous allons présenter différents résultats obtenus en utilisant les paramètres choisis dans la section précédente. Nous allons d'abord regarder des configurations bidimensionnelles telle que celle représentée par la figure 5.2.1. Nous montrons le rôle joué par le nombre de Péclet pour une ou plusieurs constriction au sein de différents types de canaux : plan, divergent et convergent. Nous montrerons également l'effet de l'amplitude de ces constriction. Nous présenterons quelques résultats pour le cas tridi-

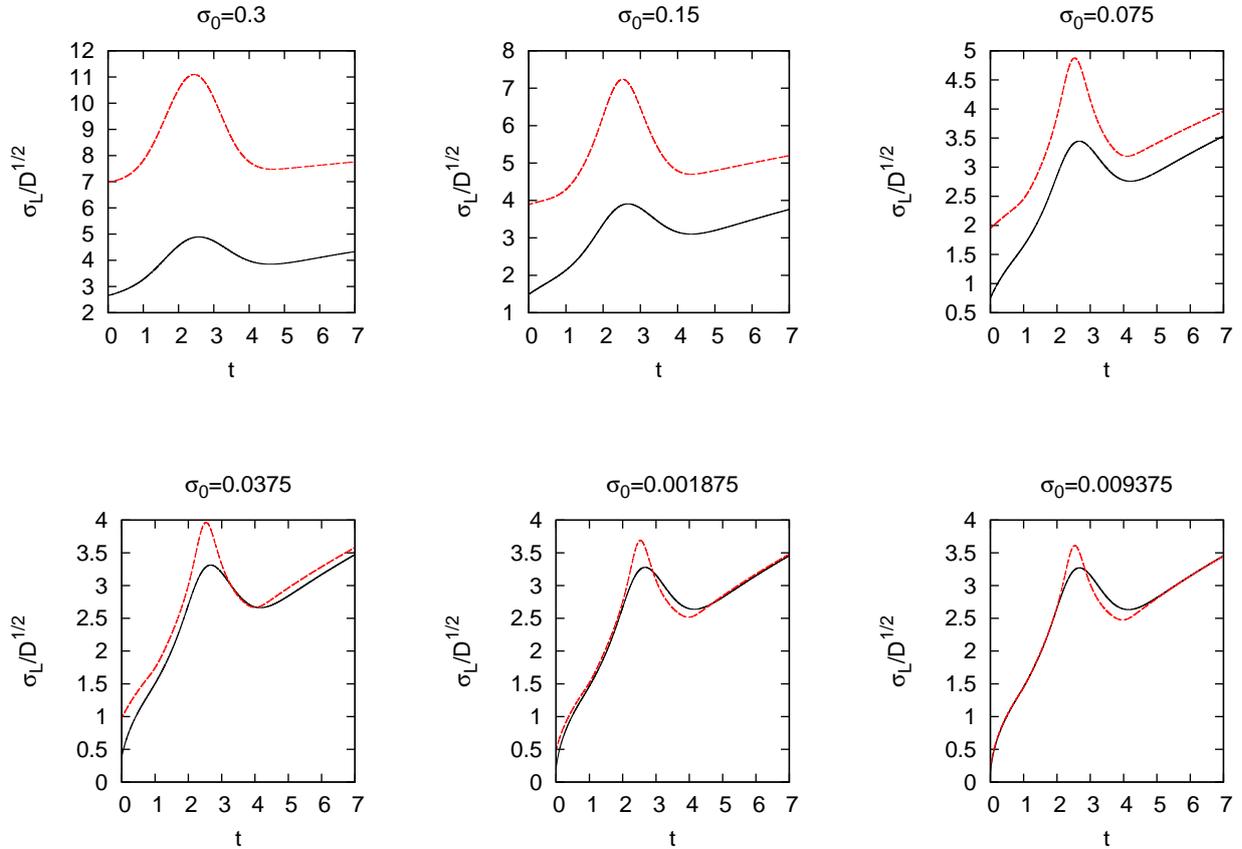


FIGURE 5.4 – Dispersion longitudinale calculée adimensionnée en fonction du temps t pour différentes valeurs de la variance initiale σ_0 et pour deux nombres de Péclet : $Pe = 100$ en noir et $Pe = 1000$ en rouge.

mensionnel. Nos résultats sont cohérents avec [1] ainsi qu'avec les prédictions théoriques dans le cas d'un canal bidimensionnel plan ou pour une succession infinie de constriction.

5.4.1 Canal bidimensionnel

Une seule constriction

On considère trois canaux : un canal plan, un canal divergent et un canal convergent. Ces trois canaux dans lesquels on injecte la même concentration initiale à $t = 0$ sont de même longueur. Les constriction du divergent et du convergent sont composées de deux rampes linéaires. Chaque rampe commence et finit spatialement au même endroit dans les deux cas. L'amplitude du convergent est notée $\delta_c = 1 - h_{min}$ et celle du divergent $\delta_d = h_{max} - 1$. Le convergent et le divergent ont la même amplitude $\delta = 0.5$.

D'après (5.5), on remarque que la dispersion est modifiée par rapport au résultat classique de la dispersion de Taylor lors du passage du soluté dans la constriction. La dispersion du soluté dans le cas du divergent est plus élevée à la sortie de la constriction

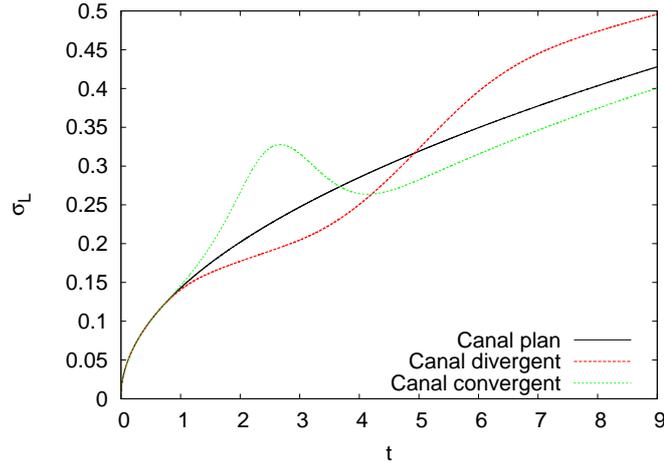


FIGURE 5.5 – Dispersion longitudinale calculée en fonction du temps t pour un canal plan, un divergent et un convergent à $Pe = 100$ et pour une amplitude $\delta = 0.5$.

comparé au cas du canal plan. Et inversement, la dispersion est plus faible à la sortie du convergent comparé au canal plan. Un divergent a donc tendance à augmenter la dispersion du soluté alors qu'un convergent va la diminuer.

Comme l'explique [1], un convergent peut être vu comme une région de dispersion faible et un divergent comme une région de forte dispersion. Si on remplace le convergent/divergent par une section constante de dispersion faible/forte, la dispersion du soluté après le passage dans cette section sera identique à la dispersion du soluté qui aurait traversé le convergent/divergent équivalent.

L'effet d'un convergent sur la dispersion du soluté peut être expliqué ainsi : on peut voir un convergent comme la succession d'une partie convergente et d'une partie divergente. La première partie va étirer le soluté, augmentant ainsi sa dispersion pour atteindre une valeur maximale. La deuxième partie va compresser le soluté qui a atteint des valeurs de dispersion élevées. L'effet de compression va alors être plus prononcé et expliquer pourquoi la dispersion à la sortie va être plus faible que celle d'un canal plan. Le phénomène inverse se produit pour un divergent.

On peut aussi regarder l'effet d'un divergent et d'un convergent avec une amplitude accrue de leur forme. La figure 5.6 montre que l'augmentation de l'amplitude dans un convergent ou un divergent augmente l'effet de la constriction sur la dispersion du soluté. Donc, plus une constriction sera d'amplitude accentuée et plus la dispersion à la sortie sera augmentée ou diminuée par rapport au canal plan. Enfin, on remarque que dans le convergent plus l'amplitude est importante et plus le pic de dispersion est accentué alors qu'à la sortie les courbes semblent se superposer vers une même courbe à partir d'une certaine amplitude. Inversement dans le divergent, les courbes ont tendance à se superposer vers une même courbe à partir d'une certaine amplitude. Alors qu'à la sortie, plus l'amplitude augmente et plus les écarts sur la dispersion se creusent.

La figure 5.7 nous montre que l'augmentation du nombre de Péclet dans un convergent augmente l'effet de la dispersion au sein de la constriction. Cette figure nous montre

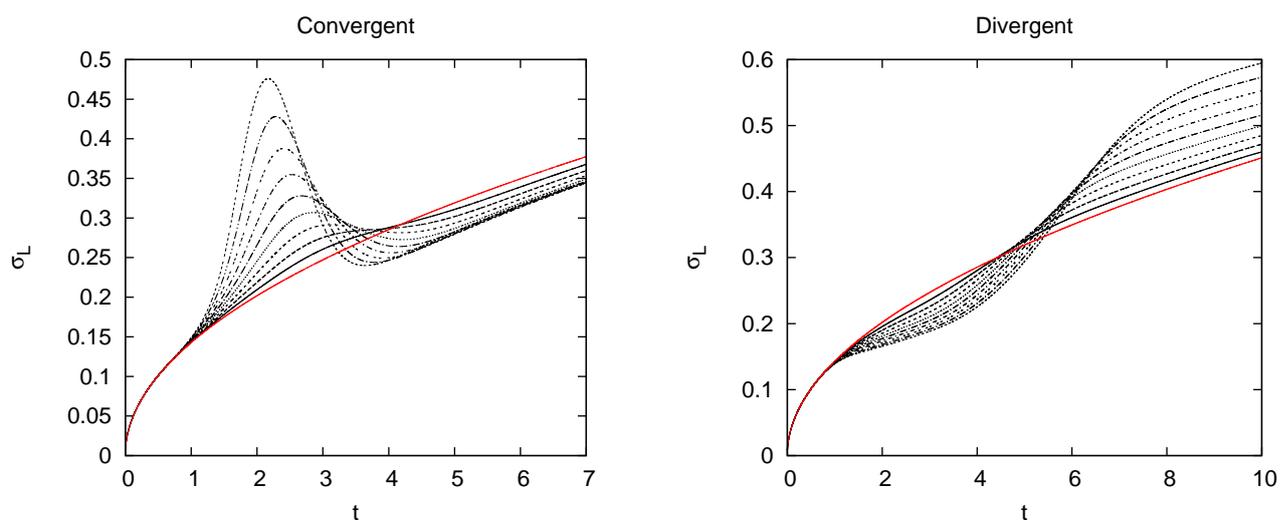


FIGURE 5.6 – Dispersion longitudinale calculée en fonction du temps t pour un canal plan, un divergent et un convergent à $Pe = 100$. Le divergent et le convergent ont la même amplitude δ variant entre 0.1 et 0.9. La courbe en rouge est le canal plan, en noires la constriction. Plus l’amplitude est importante et plus l’effet de la constriction est accentué.

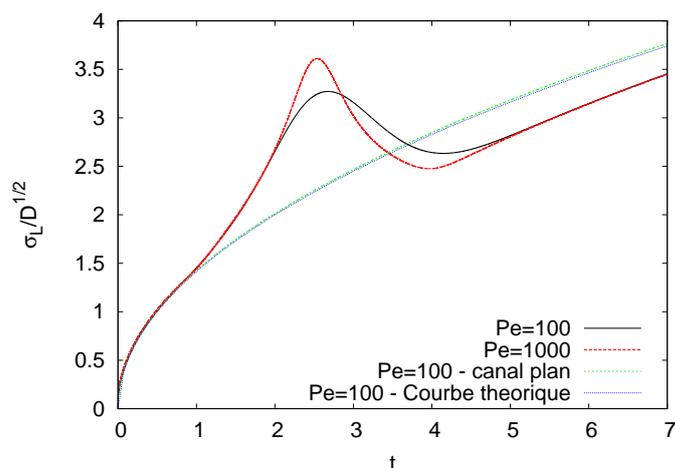


FIGURE 5.7 – Dispersion longitudinale calculée normalisée en fonction du temps t pour $Pe = 100$ et $Pe = 1000$ dans le cas d’un convergent et $Pe = 100$ dans le cas d’un canal plan. La courbe théorique pour le résultat de Taylor à $Pe = 100$ est également portée.

également que nos résultats dans le cas d’un canal plan coïncide avec le résultat théorique de Taylor, à savoir que $\sigma = 2Dt$ où D est le coefficient de dispersion effectif de Taylor, ce qui apporte une validation supplémentaire aux calculs numériques effectués.

Plusieurs constriction

Dans cette partie nous regardons des canaux possédant plusieurs ou une infinité de constriction.

La courbe 5.8 compare la dispersion du soluté pour un canal plan et un canal dit si-

nusoïdal qui comporte un nombre infini de constriction. On peut voir que la succession infinie de constriction augmente la dispersion par rapport au cas du canal plan. La dispersion du canal sinusoïdal coïncide avec la courbe théorique de dispersion aux temps longs que nous avons déterminé, validant ainsi nos résultats.

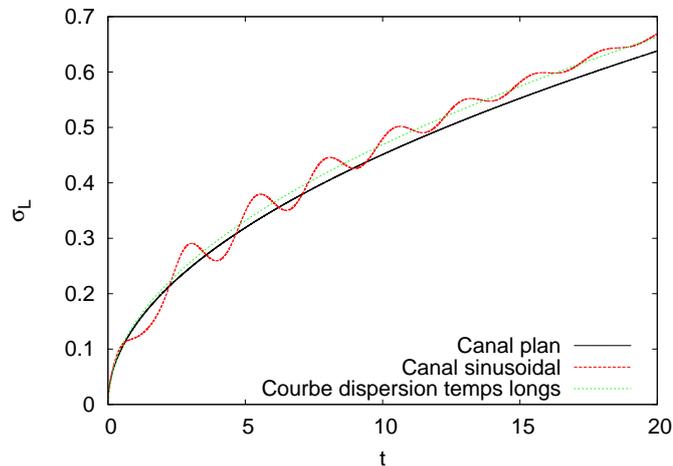


FIGURE 5.8 – Dispersion longitudinale calculée en fonction du temps t avec $Pe = 100$ pour un canal plan et un canal dit sinusoïdal possédant un nombre infini de constriction. On porte également la courbe théorique de dispersion aux temps longs.

La figure 5.12 nous montre que plus le nombre de constriction traversées par le soluté est important et plus la valeur de la dispersion à la sortie est faible devant celle obtenue dans le cas d'un canal plan. Ceci est du à la succession d'étirement que subi le traceur. Celui-ci ne peut pas être compressé car quand il sort d'une constriction il rentre dans une autre. Au passage de chaque constriction la valeur maximale de la dispersion augmente. Or plus cette valeur est importante et plus la compression à la sortie est accentuée, d'où la baisse si importante dans le cas de quatre constriction et moins importante dans le cas d'une constriction.

5.4.2 Canal tridimensionnel

Enfin, nous présentons les résultats que nous avons obtenu dans le cas tridimensionnel. Notre constriction possède une demi-hauteur $h(x, y)$ variant dans le plan (x, y) . La figure 5.10 est un exemple d'une constriction sur laquelle nous allons faire nos études numériques.

Dans la figure suivante nous avons une vue de dessus d'une succession de plusieurs constriction comme celle représentée dans la figure 5.10. Nous représentons également la dispersion du soluté à trois instants :

Nous avons regardé comment se comporte la dispersion longitudinale calculée adimensionnée pour différents rapports d'aspect entre la longueur caractéristique longitudinale H et la longueur caractéristique transversale W que l'on note $\gamma = \frac{W}{H}$. Ces résultats sont

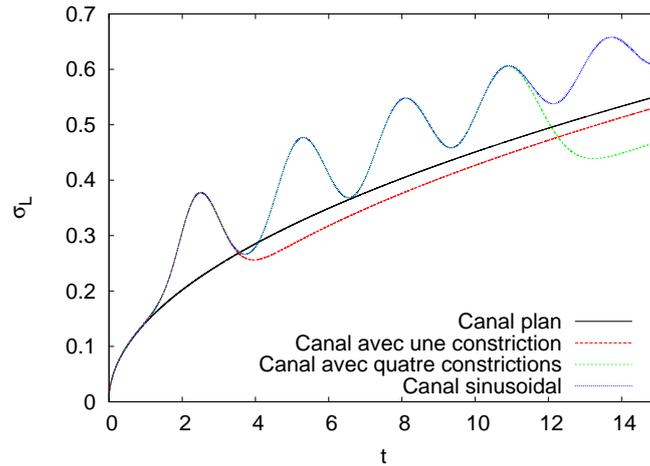


FIGURE 5.9 – Dispersion longitudinale calculée en fonction du temps t avec $Pe = 100$ pour un canal plan, un canal avec une constriction, un canal avec quatre constrictions et un canal avec un nombre infini de constriction, dit sinusoidal.

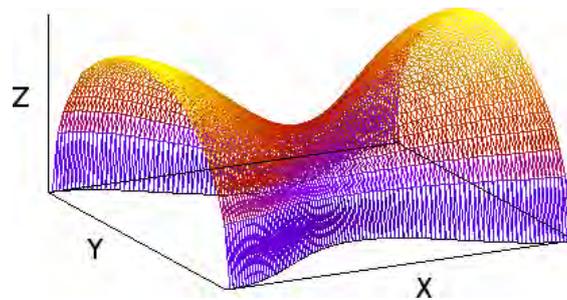


FIGURE 5.10 – Exemple d'une constriction tridimensionnelle .

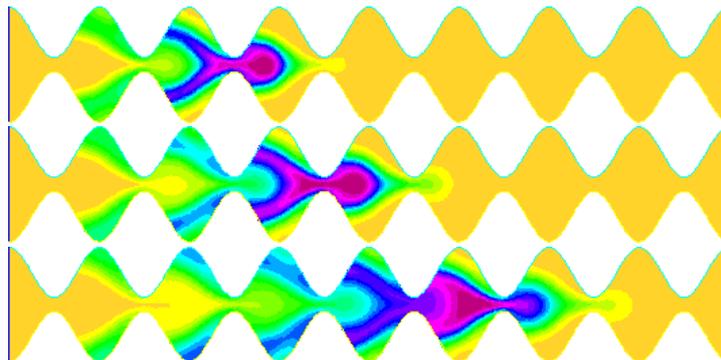


FIGURE 5.11 – Concentration moyenne \bar{C} respectivement à t_1 (en haut) $< t_2$ (au milieu) $< t_3$ (en bas).

obtenus dans ces géométries vues en 5.11. On observe 5.12 que la dispersion longitudinale est influencée par le rapport d'aspect γ , la dispersion étant plus faible quand γ n'est pas trop élevé.

Enfin pour terminer, nous comparons la dispersion longitudinale calculée adimensionnée

dans le cas d'un canal tridimensionnel constitué d'une série de plusieurs constriction, un canal sans constriction (toujours tridimensionnel) et un canal bidimensionnel plan. On observe alors que la dispersion dans le canal tridimensionnel sans constriction est identique à celle du canal bidimensionnel plan. Nos résultats montrent qu'un canal 3D composé de plusieurs constriction disperse environ deux fois mieux qu'un canal plan.

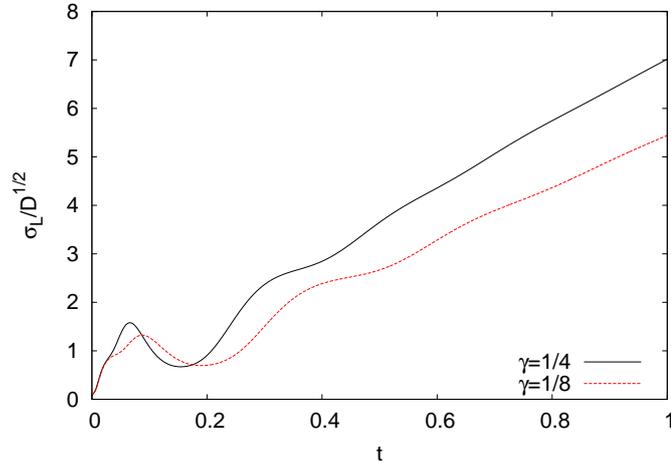


FIGURE 5.12 – Dispersion longitudinale calculée adimensionnée en fonction du temps t pour $Pe = 100$ dans un canal tridimensionnel constitué de plusieurs constriction telle que 5.10 et pour deux rapports d'aspect : $\gamma = 1/4$ et $\gamma = 1/8$.

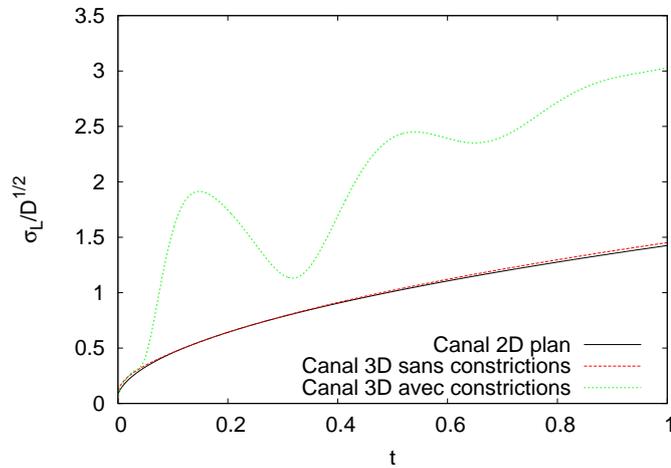


FIGURE 5.13 – Dispersion longitudinale calculée adimensionnée en fonction du temps t avec $Pe = 100$ pour un canal 2D plan, 3D sans constriction et 3D avec constriction.

5.4.3 Conclusions et perspectives

Nous avons établi un modèle théorique de la dispersion de Taylor d'un soluté au sein de canaux bidimensionnels et tridimensionnels de hauteurs et largeurs variables. Nous avons délimité la gamme du nombre de Péclet pour laquelle la théorie proposée est valide. La formulation conservative de l'équation de convection-diffusion moyenne obtenue en 3D généralise les résultats précédemment obtenus en 2D.

Elle montre comment la géométrie joue un rôle dans la dispersion du soluté en plus du terme classique. Nous avons ensuite implémenté la formulation variationnelle du problème associé *via* FreeFem++. Nous avons validé le code numérique en nous intéressant à la convergence sur le maillage, le pas de temps, les conditions initiales utilisés.

Nous avons pu ensuite modéliser des canaux bidimensionnels composés d'une ou plusieurs constriction. Nous avons analysé l'influence du nombre de Péclet sur la dispersion longitudinale ainsi que sur le type de constriction considérée (convergent ou divergent) et leurs amplitudes. Nos résultats sont en accord avec la théorie de Taylor dans le cas d'un canal plan ainsi qu'avec la théorie homogénéisée associée à une succession infinie de constriction.

Ils le sont également avec les résultats numériques de [1]. Enfin nous avons regardé succinctement comment se comporte la dispersion longitudinale dans le cas de canaux tridimensionnels avec différents rapports d'aspects entre la longueur transverse et longitudinale. Nous comparons nos résultats avec ceux obtenus en 2D.

En guise de perspectives nous souhaiterions mener des études paramétriques approfondies similaires au cas 2D en géométries 3D. Nous voudrions également explorer le rôle de la dispersion transverse et du confinement transversale dans la dispersion totale du soluté. Enfin, il serait intéressant d'analyser des régimes de vitesse pulsé similaires à [5].

Bibliographie

- [1] K. P. Selverov and H. Stone. Taylor dispersion in channels with constrictions. *Preprint*, 2002.
- [2] G. Mercer and A. Roberts. A centre manifold description of contaminant dispersion in channels with varying flow properties. *SIAM J. Appl. Math.*, **50**(6) :1547–1565, 1990.
- [3] S. D. Watt and A. Roberts. The accurate dynamics modelling of contaminant dispersion in channel. *SIAM J. Appl. Math.*, **55** :1016–1038, 1995.
- [4] O. Pironneau, F. Hecht, A. Le Hyaric, and J. Morice. Freefem++. <http://www.freefem.org/ff++/>.
- [5] R. Guibert, F. Plouraboué, and A. Bergeon. Steady streaming confined between three-dimensional wavy surfaces. *J. Fluid Mech.*, **657**, 2010.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Dans ces travaux nous avons étudié deux problèmes convecto-diffusifs de transfert ou de transport d'un champ scalaire dans des géométries complexes. Les chapitres 2, 3, et 4 ont abordé le problème dit de Graetz, qui correspond au transport stationnaire de température. Le dernier chapitre 5 est consacré au problème de dispersion de Taylor, que j'ai étudié notamment en Master 2 Recherche.

Dans les deux cas, un travail théorique généraliste a permis de reformuler des problèmes tridimensionnels dans le cadre d'une formulation bidimensionnelle.

Cette formulation théorique est d'un grand avantage car le traitement numérique des problèmes associés est alors considérablement allégé.

De plus, le formalisme employé permet de traiter toutes sortes de conditions physiques, géométriques et hydrodynamiques. L'implémentation simple de ces méthodes de résolution par discrétisation aux éléments finis a été réalisée et adaptée dans chaque cas pour effectuer des études paramétriques. Concernant le problème de transfert stationnaire un travail théorique a permis de généraliser le concept de mode de Graetz à des conditions aux limites latérales quelconques dans des géométries non axisymétriques infinies et semi-infinies. Nous avons en particulier montré dans le chapitre 3 que des conditions latérales de Neumann homogènes dans un échangeur équilibré (dans le cas de conductivités identiques entre fluide et solide ce cas correspond à un débit total $Q = 0$) diffèrent sensiblement du cas Dirichlet. Il existe alors, dans ce cas, un mode supplémentaire lié à un noyau non nul de l'opérateur de convecto-diffusion qui s'applique aux modes de Graetz, et qui conduit à des modes qui ne varient pas exponentiellement dans la direction longitudinale, mais linéairement. Par ailleurs, nous avons aussi montré comment décomposer des conditions aux limites quelconques sur les modes de Graetz, par convolution dans la direction longitudinale. Nous avons considéré pour les tests et illustrations numériques le cas de conditions latérales de flux de Heaviside longitudinales dans des cas semi-infinis, avec des conditions d'entrée prescrites de Dirichlet du type de celles utilisées dans d'autres travaux de la littérature, comme précédemment discuté dans l'introduction. Dans des cas axisymétriques, la convergence modale a été comparée avec des calculs quasi-analytiques obtenus avec un code Maple. Nous avons ensuite observé numériquement la convergence dans des cas non axisymétriques dans un échangeur cylindrique à deux tubes ou bien des tubes répartis périodiquement dans la direction transverse (proche d'une configuration "plancher chauffant"). Dans tous les cas, nous avons confirmé qu'un petit nombre de modes suffit pour obtenir une très bonne estimation des échanges. Dans le chapitre 4, nous nous sommes intéressés au point de vue complémentaire qui consiste à enrichir la complexité des conditions d'entrées/sorties pour décrire au plus près des situations

d'échangeurs classiques, en gardant l'hypothèse de condition latérale de Dirichlet homogène prescrite. Nous avons alors considéré deux familles de conditions d'entrée/sorties : soit on prescrit explicitement les conditions d'entrée et sortie des tubes chaud et froid, soit on couple l'échangeur avec des tubes semi-infinis en amont et aval, qui permettent d'assurer la continuité des champs de température et de sa dérivée le long de la coordonnée longitudinale sur les domaines fluides. Dans les deux cas, nous avons proposé une nouvelle approche pour des conditions d'entrée/sortie complexes par minimisation d'une fonctionnelle quadratique adaptée. La minimisation analytique de cette fonctionnelle conduit à la construction explicite d'un système linéaire sur les amplitudes des modes dont l'inversion donne la solution du problème. Nous avons donné explicitement pour chaque famille, et leurs possibles compositions en entrée et en sortie, la forme générique des systèmes linéaires à résoudre. Les illustrations numériques et les études paramétriques que nous avons ensuite développées ont privilégié les couplages avec des tubes pour se rapprocher de configurations réalistes. En effet, cette méthode préconise d'imposer une valeur constante de la température en champ lointain des tubes d'entrée et de calculer, en champ lointain, des tubes de sortie une température également constante qui sera la valeur significative de notre champ. Ceci paraît plus réaliste que d'imposer en sortie les températures que l'on cherche justement à déterminer. De plus le contrôle des températures d'entrée et le calcul des températures de sortie possède un véritable caractère applicatif, puisque ceux sont les paramètres attendus d'un échangeur.

La méthode de calcul a été d'abord validée en comparant avec des solutions analytiques obtenues via un code Maple pour un domaine axisymétrique couplé en amont et en aval. Nous nous sommes ensuite concentrés sur le cas d'un échangeur à deux tubes de section cylindrique de même type que celui étudié au chapitre 3. Numériquement, la détermination des champs de température dans chaque compartiment (tubes avals, amonts et échangeur) passe par l'inversion d'un système matriciel qui reste de taille raisonnable.

Bien que les résultats des études paramétriques furent obtenus tardivement dans le déroulement de la thèse, nous avons tenté d'en donner les principales conclusions même si leurs interprétations physiques auraient pu être plus développées. En premier lieu, nous confirmons les résultats du chapitre 3 indiquant qu'un nombre de modes "principaux" modérés suffisent à décrire et approcher les échanges. En second lieu, nous avons pu montrer que l'échangeur doit être au moins de longueur $3/|\lambda_{\pm 1}|$ (où $\lambda_{\pm 1}$ est le premier mode propre de Graetz amont ou aval) pour atteindre la valeur limite de son rendement chaud ou froid. Dans le cas de configurations non symétriques nous avons constaté que la longueur d'établissement est égale $3/|\lambda_1|$ pour le rendement chaud et $3/|\lambda_{-1}|$ pour le rendement froid, de sorte qu'une des deux fonctionnalités de l'échangeur doit alors être privilégiée si λ_{-1} et λ_1 diffèrent sensiblement. Ce constat est bien entendu différent dans le cas d'une configuration symétrique pour laquelle la température d'entrée adimensionnée $T_{i,c} = -1$. Ainsi, le spectre est symétrique, de sorte que $\lambda_1 = \lambda_{-1}$, et la convergence vers la valeur limite du rendement chaud et froid est donc également symétriques. Les échangeurs symétriques sont donc plus "universels" que les autres puisqu'ils ont une qualité de fonctionnement identique au réchauffement et au refroidissement. Nos calculs ont également montré que pour des régimes convectifs (i.e $Pe = 10, 100$), les rendements sont proches, et convergent vers la limite pleinement développée du premier mode de Graetz. Il n'est donc pas nécessaire d'injecter une vitesse convective trop importante pour obtenir de bons résultats de rendements, pourvu que la longueur de l'échangeur soit adaptée, c'est à dire de l'ordre de $3/|\lambda_{\pm 1}|$. Ce résultat est particulièrement important pour les applications afin d'utiliser au mieux un échangeur. Nos résultats indiquent aussi que les flux échangés sont sensibles à l'écart l entre les tubes à partir d'une certaine valeur limite. En effet, les

résultats sont proches pour $l = \delta/2$ (où δ est le rapport entre diamètre des tubes fluides et diamètre de l'échangeur) et $l = \delta$, mais sensiblement différents à partir de $l = 2\delta$. On remarque également que bien que la température de sortie du tube chaud tende vers une même valeur avec l qui augmente, et ce quelque soit la température d'entrée du tube froid, le rendement du tube chaud est peu sensible à l'écart des deux tubes. De même, bien que la température de sortie du tube froid décroît avec l et semble invariante selon la température du tube froid injectée en entrée, le rendement de ce tube varie peu avec l .

Dans le futur nous souhaiterions approfondir ces résultats par des études plus poussées. Nous voudrions déterminer avec plus d'exactitude le comportement des rendements et des flux échangés selon une gamme plus étendue des paramètres cités auparavant (l, L, Pe). Ceci pourrait permettre éventuellement de mettre en avant des configurations optimales en terme de rendements ou de flux fluide/solide dans la configuration échangeur symétrique. Le formalisme mathématique étant établi ainsi que l'implémentation numérique associée, nous pensons qu'il y a maintenant tous les outils nécessaires afin de mener ces études. La comparaison de nos résultats avec des études expérimentales, notamment concernant la mesure des flux d'échanges et les températures de sortie serait également envisageable, mais il nous faudrait certainement travailler avec d'autres conditions latérales qu'une température homogène imposée comme au chapitre 4. Une extension à une condition adiabatique imposée (qui pourrait être pertinente pour des expériences menée dans l'air) est possible, mais nécessite la prise en compte du mode u_0 dont la variation longitudinale linéaire pourrait permettre de capter une grande partie de la différence de température imposée au deux extrémités de l'échangeur. Enfin, pour considérer des configurations plus réalistes encore, il faudrait étudier l'influence d'un rapport de conductivités thermiques différent de 1. C'est en effet le cas dans la plupart des configurations étudiées dans la littérature pour des applications de micro-échangeurs où la conductivité du solide va être dans la plupart des cas plus importante que celle du fluide. Les flux d'échanges vont alors être modifiés et il serait intéressant d'étudier comment.

Concernant le problème de dispersion de Taylor, nous avons également procédé en plusieurs étapes. Nous avons dans un premier temps établi la forme conservative des équations de dispersion de Taylor pour un canal tridimensionnel texturé. Nous avons pu vérifier que la formulation théorique est la généralisation de résultats connus en $2D$ dans le cas d'un écoulement stationnaire. Dans un second temps nous avons implémenté numériquement cette formulation. Nous l'avons testé dans le cas d'un canal bidimensionnel plan puis texturé. Là encore, nous avons pu vérifier que nos résultats sont en adéquation avec certains résultats théoriques d'homogénéisation ou bien avec des travaux antérieurs. Enfin, nous avons présenté des résultats dans le cas de cavités texturées $3D$ que nous aimerions toutefois élargir et approfondir dans le futur.

Nous aimerions étudier plus en détail le rôle de constriction suivant la hauteur h mais aussi suivant les bords de la cavité. Nous voudrions déterminer également la dépendance de la dispersion longitudinale suivant le paramètre du rapport d'aspect γ . Une autre chose également intéressante à regarder est la dispersion transverse, qui prend tout son sens dans le cas de cavités $3D$ qui sont fermées. Enfin, nous pourrions nous intéresser à des écoulements pulsés. Comme dans la problématique de Graetz, tous les outils sont à disposition pour mener ces différentes études.

Doctorat de l'Université de Toulouse
Spécialité Dynamique des Fluides

présentée par

Julien Bouyssier

le lundi 17 Décembre 2012

et dirigée par

Franck Plouraboué et Charles Pierre

IMFT, Université de Toulouse

Transports couplés en géométries complexes

Ces travaux s'intéressent au transfert stationnaire de chaleur par convection diffusion aux sein de géométries complexes. Nous étendons le principe, validons l'utilisation et illustrons l'efficacité d'une décomposition en mode de Graetz pour prédire les échanges dans des configurations réalistes d'échangeurs. Le problème initial 3D est formulé comme un problème aux valeurs propres généralisées en 2D. La résolution numérique associée est drastiquement moins coûteuse. Nous étudions des conditions limites latérales quelconques. Nous calculons ces modes dans le cas de configurations semi-infinies, comme des configurations transversalement périodiques. Dans le cas d'échangeurs finis, nous procédons à un couplage des entrées et des sorties avec des tubes amonts et aval, afin de déterminer les amplitudes des modes de Graetz par minimisation d'une fonctionnelle. Ces modes permettent l'étude paramétrique systématique des champs de température, des flux de chaleur entre les domaines fluides et les domaines solides ainsi que des rendements thermiques des échangeurs parallèles à deux tubes.

Mots-clés : Transfert de chaleur, convection diffusion, formulation variationnelle, échangeurs convectifs, décomposition en modes de Graetz, problème aux valeurs propres généralisées

Coupled transport onto complex geometries

This work interest is about heat stationary transfer by convection-diffusion onto complex geometries. We extend the principle, validate the use, and illustrate the efficiency of Graetz modes decompositions for exchanges prediction in realistic exchangers configurations. We formulate the initial 3D problem as a generalysed 2D eigenvalue problem. The numerical evaluation is drastically reduced. We study arbitrary applied lateral boundary conditions. We compute those modes for semi-infinite configurations, like lateral periodic configurations. In the case of finite exchangers, we proceed to a coupling of input and output with upstream and downstream tubes to evaluate the amplitudes of Graetz modes from functional minimization. The evaluation of these amplitudes permit a systematic parametric study of temperature fields, heat fluxes between fluid and solid, and hot/cold performance of a couple-tube exchanger.

Keywords : Heat transfer, convection diffusion, variationnal formulation, convective exchangers, Graetz modes decomposition, generalysed eigenvalue problem