



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Discipline ou spécialité :

Mathématiques appliquées

Présentée et soutenue par

Alice GAERTIG-STAHN

le : vendredi 09 novembre 2012

Titre :

Modèles probabilistes de feux de forêt sur des graphes infinis

École doctorale :

Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)

Unité de recherche :

UMR 5219

Directeur de thèse :

Xavier BRESSAUD

Rapporteurs :

Jean BERTOIN

Ellen SAADA

Membres du jury :

Patrick CATTIAUX

Nicolas FOURNIER

Pierre TARRÈS

Table des matières

Remerciements	vii
Introduction	ix
1 Le modèle de feux de forêt	1
1.1 Définition du modèle de feux de forêt	1
1.1.1 Définition	1
1.1.2 Existence des processus de feux de forêt	3
1.1.3 Unicité des processus de feux de forêt	7
1.2 Résultats sur \mathbb{Z}	8
1.2.1 Comportement asymptotique des composantes connexes	8
1.2.2 Mesure invariante	11
1.2.2.1 Existence de mesures invariantes	11
1.2.2.2 Unicité de la mesure invariante	11
1.2.3 Processus limite lorsque λ tend vers 0	12
1.3 Présentation des résultats	15
1.3.1 Existence de mesures invariantes	15
1.3.2 Vers un processus limite lorsque λ tend vers 0	16
2 Les outils probabilistes	23
2.1 Percolation	23
2.1.1 Premières définitions	24
2.1.2 Percolation sur \mathbb{Z}^d	27
2.1.3 Percolation sur un arbre binaire	30
2.2 Processus de branchements	32
2.2.1 Arbres de Galton-Watson	32
2.2.2 Processus de branchement à espace d'états continu	37
2.2.2.1 Définition	37
2.2.2.2 Étude de la probabilité d'extinction	39
2.2.2.3 Étude de la taille totale du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$	40
2.2.2.4 Comportement des CSBP dans le cas explosif	41
2.3 Lois stables	45
2.3.1 Définitions	46
2.3.2 Quelques propriétés	47
2.3.3 Étude de la somme de variables aléatoires	48

2.4	Autour de la taille des composantes connexes	50
2.4.1	Étude de la loi de la taille des composantes connexes	50
2.4.2	Lien avec les lois stables	52
2.4.3	Loi de la somme de la taille des composantes connexes	54
3	Mesure invariante	59
3.1	Notations	59
3.2	Tools introduced by Dürre	60
3.2.1	CCSB condition	60
3.2.2	Blur process	62
3.3	Existence of stationary measures on \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$	63
3.3.1	A candidate distribution	63
3.3.1.1	Definition of "finite volume" forest-fires processes	63
3.3.1.2	Construction of the candidate measure	65
3.3.2	Proof of the result	65
3.3.2.1	Proof of Theorem 3.3.2	65
3.3.2.2	Proof of Lemma 3.3.3	68
3.3.2.3	Proof of Lemma 3.3.4	71
4	Modèle de croissance	75
4.1	Notations	76
4.2	Modèle à taille fixée	79
4.2.1	Définition de l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$	79
4.2.2	Étude de ce que l'on rajoute à un site voisin de $\mathcal{B}_n(0)$	81
4.2.3	Étude de ce que l'on rajoute à l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$	86
4.3	Modèle limite	90
4.3.1	Étude de la taille N_0^n	91
4.3.2	Renormalisations en temps et en espace	93
4.3.3	Limite de la probabilité d'extinction de la forêt \mathcal{A}_t	94
4.3.4	Vers un processus limite de la forêt	95
4.3.4.1	Convergence des lois fini-dimensionnelles	95
4.3.4.2	Taille totale du processus	103
4.3.5	Étude du processus limite	117
4.3.5.1	Probabilité d'extinction du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$	117
4.3.5.2	Population totale	118
4.3.5.3	Comportement des variables aléatoires Z_k	119
4.3.6	Taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t_n)$	123
5	Vers un processus limite	127
5.1	Étude de la croissance de $\mathcal{C}(t)$	128
5.2	Étude du premier feu touchant $\mathcal{C}(t)$	134
5.2.1	Notations	134
5.2.2	Instant du premier feu	135
5.2.3	Taille de $\mathcal{C}(t)$ lorsqu'elle est touchée par la foudre	137
5.2.3.1	Première approche	137

5.2.3.2 Deuxième approche 138

Notations **141**

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à Xavier Bressaud, qui m'a fait découvrir les modèles de feux de forêt et a accepté d'encadrer cette thèse. Merci pour sa passion communicative de ces modèles et des mathématiques en général, son optimisme sans faille, son soutien dans les moments de doutes et sa disponibilité, surtout pendant la dernière ligne droite. Merci aussi pour m'avoir permis de co-organiser les rencontres autour des modèles de feux de forêt du mois de mars, qui ont été très enrichissantes.

Je tiens à remercier Jean Bertoin et Ellen Saada d'avoir accepté la tâche de rapporter ce manuscrit, ainsi que Patrick Cattiaux, Nicolas Fournier, Pierre Tarrès de faire partie du jury.

Je souhaiterais remonter un peu dans le temps pour remercier mes professeurs de Strasbourg et de Toulouse pour leurs enseignements et l'envie qu'ils m'ont transmise de continuer dans cette voie, plus particulièrement Philippe Morando, Claudine Mitschi, Michèle Audin et Patrick Martinez.

Cette thèse n'aurait jamais été aussi agréable sans les moments de détente avec mes amis de Toulouse et d'ailleurs : merci à Sandrine, aussi pour ses encouragements, les (nombreuses!) découvertes et tous ces goûters partagés; à Virginie et Jacques également pour leur soutien moral et administratif(!); ainsi qu'à Amic, Maxime, Daniel, Julien, Jean, Carole, Fabien, Aurélien, Florian, Alexandre, Julie, Clément, Charlotte, Nicolas, Elvyre, Guillaume, Jessica. Que ce soient des repas, des cafés, des parties de tennis, des soirées ou autres, je tiens à remercier également les doctorants toulousains, notamment Julie, Thomas, Mathieu (aussi pour son aide précieuse avec LaTeX), Victor, Paul, Sébastien, Steven, Rim, Yohann, Thibault, Julien, Jean-Christophe, Claire, Jean-Paul. Merci également à Marie-Laure et Sébastien pour les cafés de l'IMT, moments de détente mathématiques fort agréables.

Un grand merci à ma famille qui m'a apporté son soutien pendant ces trois années. J'ai une pensée toute particulière pour mes parents : merci de m'avoir toujours encouragée et de m'avoir permis de faire les études que je souhaitais dans de bonnes conditions.

And last but not least, merci à celui qui m'a soutenue, réconfortée, coachée au quotidien pendant ces années, et qui m'a supportée dans les moments difficiles... merci Gilles d'être à mes côtés.

Introduction

Cette thèse concerne l'étude de modèles de feux de forêt d'un point de vue probabiliste. Les modèles que nous avons étudiés ont été introduit dans le cadre de l'étude des systèmes critiques auto-organisés à la fin des années 80. Le concept de systèmes critiques auto-organisés a été introduit par des physiciens Bak, Tang et Wiesenfeld, en 1987 [35] dans le but d'expliquer l'apparition de la complexité dans la nature, comme par exemple les structures fractales. Leur idée fut de dire que seule la dynamique propre du système engendre un comportement critique de ce système, et non le réglage des paramètres sur certaines valeurs particulières. Considérons un système de particules dont l'évolution est régie par des interactions locales, et un agent extérieur, par exemple la foudre. Ce système évolue vers un état critique, en se relaxant au travers de catastrophes, par exemple un feu. Si ces catastrophes deviennent de plus en plus probables, alors le système atteint soudainement un état d'équilibre, qui est un état critique. Cet état possède des caractéristiques particulières, comme par exemple des propriétés d'invariance d'échelle ou un comportement en loi puissance de certaines quantités. Dans ce cadre ont été étudiés les modèles de tas de sables, d'avalanches, de feux de forêt, de tremblements de terre, ou même des modèles d'actions en bourse. Il n'y a pas de définition précise et admise par tous de la criticalité auto-organisée. Il s'agit plutôt d'un comportement typique partagé par de nombreux systèmes.

Intéressons nous maintenant plus particulièrement au modèle de feux de forêt. Le modèle que nous étudions a été introduit par Henley [28] et Drossel et Schwabl [18] en 1992, et est connu sous le nom de modèle de Drossel-Schwabl. Il a été beaucoup étudié en physique statistique, tant d'un point de vue théorique que numérique, au travers de modélisations. Nous allons parler dans la suite uniquement de la version continue en temps de ce modèle, qui est celle que nous étudions. Il s'agit d'un système de particules, les arbres, défini sur un graphe connecté. Chaque site possède deux états, vide ou occupé. On obtient ainsi une configuration de la forêt sur le graphe. Les sous-ensembles occupés maximaux sont appelés composantes connexes. La dynamique du système est dirigée par deux familles de processus de Poisson. L'une, de paramètre 1, régit la croissance des arbres. L'autre, de paramètre $\lambda > 0$, régit l'ignition d'un site par la foudre. De plus, pour modéliser la propagation du feu, lorsque la foudre tombe sur un site, elle brûle instantanément le site ainsi que toute sa composante connexe. Ce modèle est donc non conservatif. Le comportement de ce modèle dépend beaucoup du graphe sous-jacent. Ce modèle a été beaucoup

étudié sur \mathbb{Z} , mais il y a moins de résultats sur les graphes infinis plus généraux. Une des difficultés dans l'étude de ce modèle est due aux interactions à longue portée entre les particules, via les feux. Sur \mathbb{Z} , le fait qu'un site vide empêche le feu de se propager est très utile dans les raisonnements, par exemple pour montrer que le modèle est bien défini. Nous allons commencer par considérer ce cas.

La première étude probabiliste rigoureuse des modèles de feux de forêt a été faite en 2005 par van den Berg et Járai, [6]. Ils se sont intéressés au comportement asymptotique des composantes connexes, lorsque λ tend vers 0, pour le modèle sur \mathbb{Z} . Ils ont étudié la densité de sites vides et la loi de la taille des composantes connexes à l'équilibre. Leur preuve a validé en partie le comportement deviné par les physiciens. Puis en 2006 dans [15], Brouwer et Pennanen ont montré l'existence de mesures invariantes et se sont intéressés au comportement des composantes connexes sous une mesure invariante, toujours pour les processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} . En 2009 dans [12], Bressaud et Fournier ont montré l'unicité de la mesure invariante dans le cas des processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} de paramètre $\lambda = 1$. Ils ont également donné une méthode de simulation parfaite de cette mesure invariante sur un sous-ensemble fini. Un peu plus tard, ils se sont intéressés à la question de l'existence d'un processus limite, lorsque le paramètre de feu tend vers 0. Plus λ devient petit, moins il y a de feux, donc plus les composantes connexes ont le temps de grossir. Par contre, un feu, lorsqu'il se produit, peut détruire une grosse composante connexe. Cela crée une absence de monotonie de ce modèle en fonction de λ et rend son étude difficile. Il n'est même pas sûr qu'un processus limite existe. Dans [13] Bressaud et Fournier ont montré la convergence en loi du processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} vers un processus limite uniquement défini.

Intéressons nous maintenant au cas des graphes infinis plus généraux, pour lesquels il y a moins de résultats à ce jour. Une première étape est de montrer que l'on peut bien définir les modèles de feux de forêt sur des graphes infinis plus généraux que \mathbb{Z} . Cette étape n'est pas aussi facile que dans le cas de \mathbb{Z} . En 2006, Dürre a montré dans [19] que l'on pouvait bien définir les modèles de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d pour $d \geq 2$, pour tous les paramètres $\lambda > 0$, si l'on part d'une configuration initiale ne contenant que des composantes connexes finies. Il a montré dans cet article que presque sûrement la taille des composantes connexes dans le modèle de feux de forêt est finie. Pour montrer cette existence, il a construit le processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d comme une limite de processus définis sur des graphes finis. Rien n'assure dans cette preuve l'unicité de la limite. Étant données deux familles de processus de Poisson et une configuration initiale, un processus de feux de forêt est-il défini de manière unique ? Pour répondre à cette question, il faut étudier un peu plus finement la taille des composantes connexes, pour contrôler l'influence de l'infini. Dürre a répondu en deux temps à cette question de l'unicité. En 2006 également, il a obtenu cette unicité pour des paramètres λ suffisamment grands, [20]. Il a utilisé un modèle de percolation sous-critique pour son étude, ce qui explique la borne inférieure sur le paramètre λ . En 2009 dans sa thèse [21], il a répondu à la question pour tous les paramètres λ , mais avec une condition sur la configuration initiale du processus. Il a

même étendu l'existence et l'unicité des processus de feux de forêt à tous les graphes infinis connectés dont le nombre de voisins d'un site est uniformément borné par une constante. Dans [4], van den Berg et Brouwer se sont intéressés au comportement du modèle de feux de forêt sur \mathbb{Z}^2 près du temps critique t_c défini à partir de la probabilité critique p_c de percolation de sites sur \mathbb{Z}^2 . Sous une hypothèse de type percolation, ils ont montré que pour un temps $t > t_c$, la probabilité qu'un arbre d'une boule de rayon m brûle avant le temps t ne converge pas vers 1 lorsque l'on fait tendre λ vers 0 et m vers l'infini simultanément. Dans cette thèse, nous avons étudié ces modèles de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d pour $d \geq 2$ et sur les arbres binaires, dans deux directions. La première concerne l'existence de mesures invariantes pour les processus de feux de forêt définis sur \mathbb{Z}^d pour $d \geq 2$. La deuxième concerne l'étude des processus de feux de forêt sur l'arbre binaire, lorsque le paramètre λ tend vers 0.

Qu'en est-il des feux de forêt réels ? Le modèle que nous étudions est un modèle très simplifié par rapport à la complexité des vrais feux de forêt, où de nombreux paramètres comme le type d'arbres ou la météo entrent en ligne de compte. Cependant des études de données sur de vrais feux de forêt ont été réalisées et montrent des similitudes sur le comportement des composantes connexes, notamment l'apparition de lois puissances [33]. D'autre part, la catastrophe du parc du Yellowstone aux États-unis montre qu'il peut être dangereux de se mettre dans la situation où les composantes connexes sont grandes. En effet, les pompiers du parc de Yellowstone avaient adopté initialement une politique de répression des feux : à chaque fois qu'un feu se produisait ils partaient l'éteindre au plus vite. Ainsi, la forêt s'est de plus en plus densifiée au fil des années. En 1988, la catastrophe se produisit : un incendie immense ravagea 320 000 hectares. Maintenant, ils ont modifié leur stratégie et ont décidé de laisser les petits feux se produire pour éviter qu'une telle catastrophe ne se reproduise...

Nous allons maintenant parler d'autres variantes de modèles de feux de forêt qui ont été étudiées.

Du point de vue de la modélisation, le fait que l'évolution soit régie par des processus de Poisson n'est pas fondamentale. Ainsi, Bressaud et Fournier ont étudié dans [11] le cas des modèles de feux de forêt sur \mathbb{Z} définis à l'aide de processus de renouvellement qui ne sont pas forcément des processus de Poisson. Leur objectif est d'étudier la limite du modèle lorsque le paramètre de foudre λ tend vers 0. Cette fois, les temps d'attente suivent des lois ν_S et ν_M^λ respectivement pour la croissance et la foudre. Comme dans le cas du modèle initial ([13]), les auteurs obtiennent la convergence en loi vers un processus limite après une renormalisation. Dans ce cadre, ils ont obtenu quatre types de processus limites, selon que ν_S est à support borné ou bien a une queue de distribution qui décroît de façon rapide, régulière ou lente.

Les modèles de feux de forêt ont aussi été étudiés sur les graphes complets par

Ráth et Tóth [37]. Un graphe complet ne peut être défini que pour un nombre fini de sites. On étudie alors un modèle de feux de forêt sur un graphe complet composé de n sites, et on s'intéresse au comportement asymptotique lorsque n tend vers l'infini. Le paramètre de feu peut être relié à ce nombre n de sites, et on observe alors des comportements différents du modèle selon la manière dont il dépend de n . Le graphe étant complet, la dynamique du processus concerne à la fois les sites et les arêtes. Partant d'une configuration initiale entièrement vide, l'évolution est décrite de la manière suivante. Chaque arête devient occupée à taux n^{-1} . Un site est touché par la foudre à un taux $\lambda(n)$. Lorsqu'un site est touché par la foudre, toutes les arêtes appartenant à sa composante connexe occupée deviennent instantanément vides. Sans les feux, on obtient un graphe aléatoire d'Erdős-Rényi. Le mécanisme de feux va changer le comportement du processus lorsque $\lambda(n)$ sera significatif. Les auteurs se sont intéressés au comportement asymptotique en n de la loi de la taille des composantes connexes dans quatre régimes. Lorsque $\lambda(n) \ll n^{-1}$, l'effet des feux est négligeable à la limite et le comportement est similaire au graphe d'Erdős-Rényi. Lorsque $\lambda(n) = \lambda n^{-1}$, seules les composantes connexes géantes peuvent disparaître. Lorsque $\lambda(n) = \lambda \in]0, +\infty[$, on observe un comportement sous-critique. Le cas le plus intéressant est celui où $n^{-1} \ll \lambda(n) \ll 1$. Dans ce cas, il existe une transition de phases. Dans la phase sous-critique, le comportement est le même que celui du graphe d'Erdős-Rényi. Par contre, dès que l'on atteint le temps critique, le système reste critique pour toujours. On observe ici un comportement critique auto-organisé.

Bertoin a étudié dans [9] un modèle résultant de la combinaison d'un modèle de feux de forêt et du modèle de parking de Knuth. Dans ce modèle, on considère un parking circulaire de n places. Une voiture arrive à chaque place à taux 1. Si la place est vide, elle s'y gare. Sinon, elle cherche la première place vide qu'elle trouve en se déplaçant dans le sens des aiguilles d'une montre. Les feux sont introduits par le biais de cocktails Molotov jetés sur chaque place à taux $n^{-\alpha}$, où $0 < \alpha < 1$ est un paramètre fixé. Lorsqu'une voiture est touchée par le cocktail Molotov, toute sa composante connexe occupée de voitures brûle instantanément. Quel est l'impact de la destruction des voitures sur la saturation du parking? L'auteur montre qu'il existe une transition de phase pour $\alpha = 3/2$. Si $\alpha > 3/2$, le parking devient saturé après un temps proche de 1 avec grande probabilité. Dans la phase sous-critique, le parking s'approche de la saturation sans jamais l'atteindre.

Motivés par l'étude du comportement des processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^2 , van den Berg et Brouwer ont introduit dans [3] la notion de "self-destructive percolation". Ce modèle est défini en trois étapes, à partir de deux paramètres réels λ et δ . Une première étape consiste à faire une percolation de sites de paramètre $p > p_c$, où p_c est le seuil critique de la percolation de site sur \mathbb{Z}^2 . Dans la deuxième étape, les sites appartenant à une composante connexe infinie deviennent vides. La troisième étape consiste à remplir les sites vides des deux étapes précédentes indépendamment avec probabilité δ . Quelle est la probabilité $\theta(p, \delta)$ que l'origine soit dans une composante connexe infinie pour la configuration finale? Pour chaque $p > p_c$, les auteurs ont montré l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que $\theta(p, \delta) = 0$. Il faut donc une probabilité

suffisamment grande pour revoir apparaître une composante connexe infinie. Est-ce que δ tend vers 0 lorsque p décroît vers p_c ? C’est le cas pour le modèle défini sur l’arbre binaire. Par contre sur \mathbb{Z}^2 , l’existence de $\delta > 0$ tel que cette probabilité soit nulle pour tous les paramètres $p > p_c$ est conjecturée. Cette conjecture entraîne des conséquences pour le comportement du processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^2 près du temps critique mentionnées dans le quatrième paragraphe de l’introduction.

Un autre modèle de percolation modifié a été introduit par Aldous dans [1] sous le nom de “frozen percolation”. Considérons un graphe infini et une configuration initiale où toutes les arêtes sont vides. A chaque arête est associé un temps τ_e de loi uniforme sur l’intervalle $[0, 1]$. Une arête devient occupée au temps τ_e si les composantes connexes de ses deux extrémités sont finies. L’idée est que les composantes connexes sont gelées dès qu’elles deviennent infinies et ne peuvent plus grossir. Aldous a montré qu’un tel modèle existe sur les arbres binaires dans [1]. Cependant Benjamini et Schramm ont montré qu’un tel modèle ne pouvait pas exister sur \mathbb{Z}^2 [2]. Dans le but de mieux comprendre cette non existence, van den Berg, Lima et Nolin ont défini un modèle de N -frozen percolation [5], où cette fois les composantes connexes gèlent dès qu’elles atteignent la taille N . Ce modèle à interactions de portée finie peut être défini sur \mathbb{Z}^2 . Ils ont montré que la probabilité qu’une composante connexe soit de taille d’ordre N toute en restant inférieure à N est minorée par une constante strictement positive. Qu’en est-il sur l’arbre binaire où l’origine ne possède qu’un seul voisin? Dans [7] van den Berg, Kiss et Nolin ont montré que que la N -frozen percolation converge vers la frozen percolation d’Aldous. De plus, le comportement des composantes connexes est différent du cas de \mathbb{Z}^2 , puisque la probabilité précédente tend vers 0 dans ce cas. Une variante de ce modèle de “frozen percolation” sur des graphes complets a été étudié par Ráth dans [36].

Motivé par la “frozen percolation”, Bertoin a étudié un modèle similaire sur les graphes de Cayley de taille n dans [8]. Dans ce modèle, chaque site a trois états possibles : inflammable, brûlé ou résistant au feu. Partant d’une configuration initiale où tous les sites sont inflammables, le système évolue jusqu’à n’avoir plus que des sites brûlés ou résistants au feu, de la manière suivante. Un site inflammable devient résistant au feu à taux 1, indépendamment des autres sites. Un site inflammable peut être touché par la foudre à taux $n^{-\alpha}$. Dans ce cas ce site ainsi que toute sa composante connexe de sites inflammables brûlent. Quelle est la densité des sites résistants au feu? L’auteur a montré l’existence d’une transition de phase pour $\alpha = 1/2$. Pour cette valeur de α , la densité des sites résistants au feu converge en loi vers une variable aléatoire non dégénérée lorsque n tend vers l’infini. Elle converge vers 1 pour $\alpha > 1/2$ et vers 0 pour $\alpha < 1/2$). De plus, dans les cas critiques et sur-critiques, il existe une composante géante, qui n’est pas du même ordre de grandeur dans les deux cas.

Ce manuscrit est divisé en 5 chapitres. Les deux premiers chapitres présentent le modèle ainsi que les outils utilisés dans ce travail. Le troisième chapitre est consacré

à l'existence de mesures invariantes pour les processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d avec $d \geq 2$. Les chapitres 4 et 5 concernent la problématique de l'étude des modèles de feux de forêt sur les arbres binaires, lorsque le paramètre de feu λ tend vers 0. Nous allons donner un aperçu du contenu de ces chapitres et nous renvoyons à la partie 1.3 pour une présentation détaillée des principaux résultats de cette thèse.

Le chapitre 1 est consacré à la présentation du modèle de feux de forêt que nous étudions. Après avoir donné la définition des processus de feux de forêt, nous exposerons un peu plus en détails les résultats existants sur ce modèle évoqués plus tôt dans cette introduction, ce qui constitue la première étape du travail effectué dans cette thèse. Enfin, nous terminerons ce chapitre par une présentation détaillée des principaux résultats de cette thèse, ainsi que des perspectives de recherche.

Le chapitre 2 est consacré à la présentation des résultats de trois domaines de probabilités dont nous avons eu besoin pour comprendre et travailler sur les modèles de feux de forêt. Dans une première partie, nous parlons de la théorie de la percolation sur \mathbb{Z}^d ainsi que sur les arbres binaires. Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à deux types de processus de branchement : les arbres de Galton-Watson ainsi que les processus de branchement à temps discret et à espace d'états continu. La troisième partie est consacrée aux lois stables. Finalement, la dernière partie concentre les résultats sur la loi de la taille des composantes connexes pour un modèle de percolation de site critique sur l'arbre binaire, que nous utiliserons à plusieurs reprises dans les chapitres 4 et 5.

Le chapitre 3 est consacré à la question de l'existence de mesures invariantes. Ce chapitre fait l'objet d'un article qui a été soumis, [41], et est rédigé en langue anglaise. Nous montrerons que pour tous les paramètres $\lambda > 0$, les processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d pour $d \geq 2$ possèdent au moins une mesure invariante. Après avoir introduit quelques notations, nous présentons les outils appelés "CCSB condition" et "blur process" développés par Dürre dans sa thèse, que nous allons utiliser dans la preuve du résultat. Puis dans la troisième partie, nous montrons le résultat d'existence. Dans un premier temps, nous construisons une mesure invariante candidate à partir de processus de feux de forêt sur des graphes finis. Puis nous montrons que cette mesure candidate est bien invariante pour le processus de feux de forêt en utilisant les outils développés par Dürre pour contrôler l'influence de l'infini.

Les deux derniers chapitres sont consacrés à la problématique de l'existence d'un processus limite lorsque λ tend vers 0, sur les arbres binaires. Nous utiliserons beaucoup les résultats rappelés dans le chapitre 2 sur les processus de branchement, les lois stables, ainsi que la partie regroupant les résultats sur la loi de la taille des composantes connexes pour la percolation de sites sur l'arbre binaire.

Dans le chapitre 4, nous étudions un modèle sans feux pour mieux comprendre comment grossissent les composantes connexes d'arbres. En se plaçant dans une nouvelle échelle de temps et d'espace, nous montrons la convergence en loi de la taille d'un ensemble de sites construit à partir d'une boule de rayon n et des composantes

connexes qui l'intersectent, au bout d'un temps $t_n > 0$.

Dans le chapitre 5, nous rajoutons l'action de feux, en définissant un modèle différent du modèle initial, dans le but d'étudier la taille de la composante connexe de l'origine au moment où elle brûle pour la première fois. Dans ce modèle modifié, les composantes connexes autres que celle de l'origine suivent une loi stationnaire que nous avons supposé être dans le bassin d'attraction d'une loi stable. Pour ce modèle, nous montrons la convergence en loi de la taille renormalisée de la composante connexe de l'origine au moment où elle brûle pour la première fois.

Chapitre 1

Le modèle de feux de forêt

Ce chapitre est consacré à la présentation détaillée du modèle de feux de forêt que nous étudions dans cette thèse. Dans la première partie, nous donnons la définition des processus de feux de forêt. Nous verrons qu'il est aisé de montrer que ces processus sont bien définis sur \mathbb{Z} . Par contre, plus de travail est nécessaire pour le montrer sur des graphes infinis plus généraux. Nous expliquerons pourquoi et nous verrons que l'on doit imposer des conditions si l'on veut montrer que ces processus sont uniquement définis. Dans la deuxième partie, nous détaillons les résultats existants sur les processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} . Ces résultats concernent le comportement asymptotique des composantes connexes, l'étude de mesures invariantes, ainsi que l'étude de la convergence des processus de feux de forêt vers un processus limite, lorsque le paramètre λ tend vers 0. Finalement, dans la troisième partie, nous présentons les résultats de cette thèse sur l'étude des processus de feux de forêt sur des graphes infinis plus généraux. Nous avons étudié la question de l'existence de mesures invariantes sur \mathbb{Z}^d , pour $d \geq 2$, ainsi que celle du comportement limite des processus de feux de forêt sur les arbres binaires, lorsque le paramètre λ tend vers 0.

1.1 Définition du modèle de feux de forêt

1.1.1 Définition

Le modèle de feux de forêt est un modèle de système de particules, qui évolue de manière non conservative. Pour définir un modèle de feux de forêt, on a besoin d'un graphe et de processus de Poisson régissant l'apparition des arbres ainsi que leur disparition via la destruction par le feu. Soit $S = (V, E)$ un graphe tel que le nombre d'arêtes issues de chaque site est borné uniformément par une constante d . Chaque sommet du graphe, appelé site dans la suite, a deux états possibles : vide (0) ou occupé par un arbre (1). Pour chaque site $x \in V$, on note $\eta_{t,x} \in \{0, 1\}$ son état au temps t . La donnée des états de tous les sites de V à l'instant t est appelée configuration au temps t . Deux sites du graphe S sont voisins s'ils sont reliés par une arête du graphe S . Ceci va nous permettre de définir les notions de chemins de sites occupés et de composantes connexes de sites occupés pour chaque configuration.

Formellement, on a les définitions suivantes.

Définition 1.1 (Chemin et composante connexe, [19]). *Soit $\eta \in \{0, 1\}^V$ une configuration. Deux sites occupés x et y de V sont reliés par un chemin de sites occupés s'il existe un entier n et des sites $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ tels que $x = x_0$, $y = x_n$, et pour tout entier $0 \leq i \leq n - 1$, $\eta_{x_i} = 1$ et les sites x_i et x_{i+1} sont reliés par une arête du graphe.*

La composante connexe du site x est l'ensemble des sites de V reliés par un chemin de sites occupés à x pour la configuration η . Nous noterons $C_{t,x}$ la composante connexe du site x dans la configuration η au temps t .

Les notations $\eta_{t^-,x}$ et $C_{t^-,x}$ désignent la limite à gauche de la configuration et de la composante connexe du site x au temps t :

$$\eta_{t^-,x} = \lim_{s \rightarrow t, s < t} \eta_{s,x}$$

Pour décrire l'évolution du processus de feux de forêt, on utilise deux familles de processus de Poisson. A chaque site, on associe deux processus de Poisson G_x et I_x . Le premier, de paramètre 1, gouverne l'apparition des arbres. Le second, de paramètre λ , gouverne l'apparition de la foudre sur le site x . Dès qu'un évènement de croissance se produit au site x , son état devient occupé, quelque soit son état jusque là. Si la foudre tombe sur le site x au temps t , et si le site x est vide, il ne se passe rien. Par contre, si le site x est occupé, il devient vide, ainsi que tous les sites de sa composante connexe. Ceci modélise la propagation du feu, lorsque la propagation a lieu à une vitesse infinie. On voit ainsi que les états de deux sites très éloignés peuvent ne pas être indépendants, s'ils appartiennent à la même composante connexe.

Définition 1.2 (Processus de feux de forêt, [19]). *Soit $S = (V, E)$ un graphe dont le degré de sommets est borné uniformément par un entier d . Soit λ un réel strictement positif.*

Un processus de feux de forêt sur S de paramètre λ est un processus défini pour t positif par $\bar{\eta}_t = (\bar{\eta}_{t,x})_{x \in S} = (\eta_{t,x}, G_{t,x}, I_{t,x})_{x \in S}$, à valeurs dans $(\{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})^S$, vérifiant les conditions suivantes.

1. *Le processus $(\eta_t)_{t \geq 0}$ représente la configuration de la forêt au temps t :*

$$\eta_{t,x} = \begin{cases} 0 & \text{si le site } x \text{ est vide au temps } t \\ 1 & \text{si le site } x \text{ est occupé au temps } t. \end{cases}$$

2. *Pour tout site x de S , le processus $(G_{t,x})_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre 1, appelé processus de croissance ou de naissance (growth) et $(I_{t,x})_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ , appelé processus de foudre (ignition). Tous ces processus sont indépendants.*
3. *Pour tout $x \in S$, le processus $(\eta_{t,x}, G_{t,x}, I_{t,x})_{t \geq 0}$ est continu à droite et limité à gauche (abrégé càdlàg par la suite).*
4. *Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, les accroissements $(G_{t+s,x} - G_{t,x}, I_{t+s,x} - I_{t,x})_{t \geq 0, x \in S}$ sont indépendants du processus de feux de forêt $(\bar{\eta}_u)_{0 \leq u \leq t}$ jusqu'au temps t .*

5. Pour tout $x \in S$ et tout $t \geq 0$, on a les quatre règles d'évolution suivantes :

(a) s'il y a croissance d'un arbre au site x au temps t , alors le site x est occupé au temps t , ce qui s'écrit

$$G_{t^-,x} < G_{t,x} \Rightarrow \eta_{t,x} = 1,$$

(b) si le site x devient occupé au temps t alors il y a eu croissance d'un arbre au site x au temps t , ce qui s'écrit

$$\eta_{t^-,x} < \eta_{t,x} \Rightarrow G_{t^-,x} < G_{t,x},$$

(c) si la foudre tombe sur le site x au temps t , alors toute la composante connexe de x devient vide au temps t , ce qui s'écrit

$$I_{t^-,x} < I_{t,x} \Rightarrow \forall y \in C_{t^-,x}, \eta_{t,y} = 0,$$

(d) si le site x devient libre au temps t , alors la composante connexe de x a été frappée par la foudre au temps t , ce qui s'écrit

$$\eta_{t^-,x} > \eta_{t,x} \Rightarrow \exists y \in C_{t^-,x} : I_{t^-,y} < I_{t,y}.$$

Un tel processus existe-t-il? Nous allons voir que les processus de feux de forêt sont bien définis. Par contre, nous allons voir que sur les graphes infinis, ce résultat n'est pas trivial.

1.1.2 Existence des processus de feux de forêt

Dans cette partie, nous allons voir comment montrer l'existence des processus de feux de forêt dans différents cas. Nous parlerons tout d'abord du cas le plus simple qui est le cas des graphes finis. Puis nous parlerons du cas de \mathbb{Z} , qui est le graphe infini sur lequel il y a le plus de résultats. Nous finirons par le résultat de Dürre [19] traitant du cas de \mathbb{Z}^d , pour $d \geq 2$, qui peut s'étendre à des graphes infinis plus généraux.

Considérons un graphe fini, une configuration initiale sur ce graphe et deux familles de processus de Poisson comme dans la définition 1.2. Comme le graphe est constitué d'un nombre fini de sites, il y a un nombre fini de processus de Poisson. Puisque les lois exponentielles sont continues, la probabilité que deux événements poissonniens se produisent en même temps est nulle. Ainsi on peut ordonner tous les événements de croissance et de foudre dans le temps. On peut alors construire le processus de feux de forêt pas à pas, en mettant à jour la configuration à chaque fois qu'un événement de croissance ou de foudre se produit, selon les règles suivantes.

- ▷ Si c'est un événement de croissance qui se produit au site x :
 - ★ si le site est vide, il devient occupé ;
 - ★ si le site est déjà occupé, il ne se passe rien.
- ▷ Si c'est un événement de foudre qui se produit au site x :

- ★ si le site est vide, il ne se passe rien ;
- ★ si le site est occupé, toute sa composante connexe devient immédiatement vide.

On obtient ainsi une version discrète en temps du processus de configuration η . À partir de là, on peut définir un processus de configuration en temps continu en le posant constant entre deux évènements poissonniens consécutifs. Plus précisément, soient τ_1 et τ_2 les instants d'arrivée de deux évènements poissonniens consécutifs. Pour tout temps $t \in [\tau_1, \tau_2[$, on pose $\eta_t = \eta_{\tau_1}$.

Ainsi, pour tout paramètre $\lambda > 0$ et toute configuration initiale, le processus de feux de forêt sur un graphe fini est uniquement défini. Que se passe-t-il si le graphe est infini ?

Considérons tout d'abord le cas de \mathbb{Z} . Supposons que l'on parte d'une configuration initiale avec un nombre infini de sites vides sur les demi-droites positive et négative. Alors pour tout temps t positif, la probabilité qu'il existe un nombre infini de sites qui sont restés vides pendant tout l'intervalle de temps $[0, t]$ est strictement positive. Or un site vide sur \mathbb{Z} est un site bloquant, c'est-à-dire qu'il empêche le feu de se propager. Ainsi pour tout temps t , on peut découper \mathbb{Z} en intervalles finis, sur lesquels le processus de feux de forêt est uniquement défini via la construction précédente. On peut consulter le livre de Liggett [32] pour plus de précisions sur la construction graphique. Nous pouvons donc définir de manière unique les processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} , avec tout de même une condition sur la configuration initiale :

Théorème 1.1.1 (Existence sur \mathbb{Z} , [6]). *Pour tout réel λ strictement positif et toute configuration initiale ξ ne comportant que des composantes connexes finies, il existe un unique processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} de paramètre λ et de configuration initiale ξ .*

Qu'en est-il des processus de feux de forêt sur les graphes infinis plus généraux ? Soit S un graphe dont le nombre d'arêtes issues de chaque sommet est borné uniformément par un entier d . Considérons un instant le cas de \mathbb{Z}^2 . Un seul site vide ne permet plus de bloquer les feux comme sur \mathbb{Z} . Il faudrait un circuit de sites vides, ce qui est plus difficile à obtenir. En 2006, Dürre a montré dans [19] l'existence des processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d , pour $d \geq 2$, pour toute configuration initiale n'ayant pas de composantes connexes infinies. Sa méthode peut se généraliser aux graphes de type précédent, sous la même condition pour la configuration initiale.

Théorème 1.1.2 (Théorème 1 de [19] généralisé). *Soit S un graphe dont le degré des sommets est borné uniformément par un entier d . Pour tout entier d , pour tout réel strictement positif λ et toute configuration initiale ξ ne comportant que des composantes connexes finies, il existe un processus de feux de forêt sur S de paramètre λ et de configuration initiale ξ .*

L'idée de la preuve est de définir un processus limite à partir d'une suite de processus de feux de forêt définis sur des graphes finis de plus en plus gros, puis de

montrer que le processus limite est bien un processus de feux de forêt. Expliquons cette construction du processus limite.

Considérons deux familles $\{(G_{t,x})_{t \geq 0}\}_{x \in V}$ et $\{(I_{t,x})_{t \geq 0}\}_{x \in V}$ de processus de Poisson de paramètres respectifs 1 et λ , et une configuration sur V ne contenant aucune composante connexe infinie, notée ξ . Notons F l'espace $\{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Nous allons maintenant définir une suite de processus sur des graphes finis. Considérons une suite croissante $G_n = (V_n, E_n)$ de sous-graphes finis de $S = (V, E)$. À l'aide des processus de Poisson précédents et de la configuration ξ , définissons sur chacun de ces graphes un processus de feux de forêt de paramètre $\lambda > 0$ et de configuration initiale $\xi^n = \xi|_{V_n}$, noté $\bar{\eta}^n$. En vue de travailler sur le même espace de probabilités, étendons ces processus au graphe S tout entier en posant :

$$\bar{\eta}_{t,x}^n = \begin{cases} (\eta_{t,x}^n, G_{t,x}, I_{t,x}) & \text{si } x \in V_n, \\ (0, G_{t,x}, I_{t,x}) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.1)$$

On peut alors définir une mesure μ_n sur l'espace $F^{\mathbb{R}^+ \times V} = (\{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})^{\mathbb{R}^+ \times V}$ muni de sa tribu borélienne comme étant la loi du processus $\bar{\eta}^n$.

Expliquons maintenant comment nous allons définir la mesure limite. Cette construction est résumée dans le diagramme 1.1 page 6. Ce n'est pas la même chose de considérer un processus de feux de forêt sur le graphe G_n et de considérer la restriction au graphe G_n d'un processus de feux de forêt sur le graphe G_{n+m} . En effet les composantes connexes ne sont pas les mêmes et influent donc différemment. Par exemple, elles peuvent brûler dans le cas du processus de feux de forêt sur le graphe G_{n+m} mais pas dans le cas du processus de feux de forêt sur le graphe G_n . On ne peut donc pas prendre simplement une limite des mesures des processus sur les graphes finis. Nous allons passer à la limite en deux temps. En vue d'utiliser un argument de compacité, considérons une suite de sous-ensembles finis $S_k \subset \mathbb{Q}^+ \times V$ de cardinal k , telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \mathbb{Q}^+ \times V$. Pour chaque entier k , projetons les mesures μ_n sur l'espace F^{S_k} et notons $\mu_{n,k}$ les mesures obtenues. Nous allons passer à la limite sur n dans un premier temps. Pour tout entier k , la suite de mesures $(\mu_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue. Ainsi, via une extraction diagonale, pour chaque entier k , on extrait de $(\mu_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite faiblement convergente, et on note $\mu_{k_{conv}}$ la limite. Passons maintenant à la limite sur k_{conv} . La suite $(\mu_{k_{conv}})_{k \in \mathbb{N}}$ est consistante, donc par le théorème d'extension de Kolmogorov, on obtient une unique mesure $\mu_{\mathbb{Q}}$ sur $(F^{\mathbb{Q}^+ \times V}, \mathcal{B}(F^{\mathbb{Q}^+ \times V}))$, telle que pour tout entier k et tout borélien A_k de $\mathcal{B}(F^{S_k})$, $\mu_{\mathbb{Q}}(\pi_{S_k}^{-1}(A_k)) = \mu_{k_{conv}}(A_k)$. Finalement on étend la mesure à tout temps réel positif en utilisant le fait que les processus $(\bar{\eta}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des processus de feux de forêt.

Il reste encore à montrer que le processus limite obtenu est bien un processus de feux de forêt. Pour cela, il faut vérifier tous les points de la définition 1.2. Nous ne détaillerons pas la preuve ici, mais nous énoncerons des résultats importants sur les composantes connexes du processus de feux de forêt que Dürre a montré au cours de cette vérification.

Théorème 1.1.3 (Théorème 2 de [19]). *Presque sûrement, il n'existe pas de composante connexe infinie.*

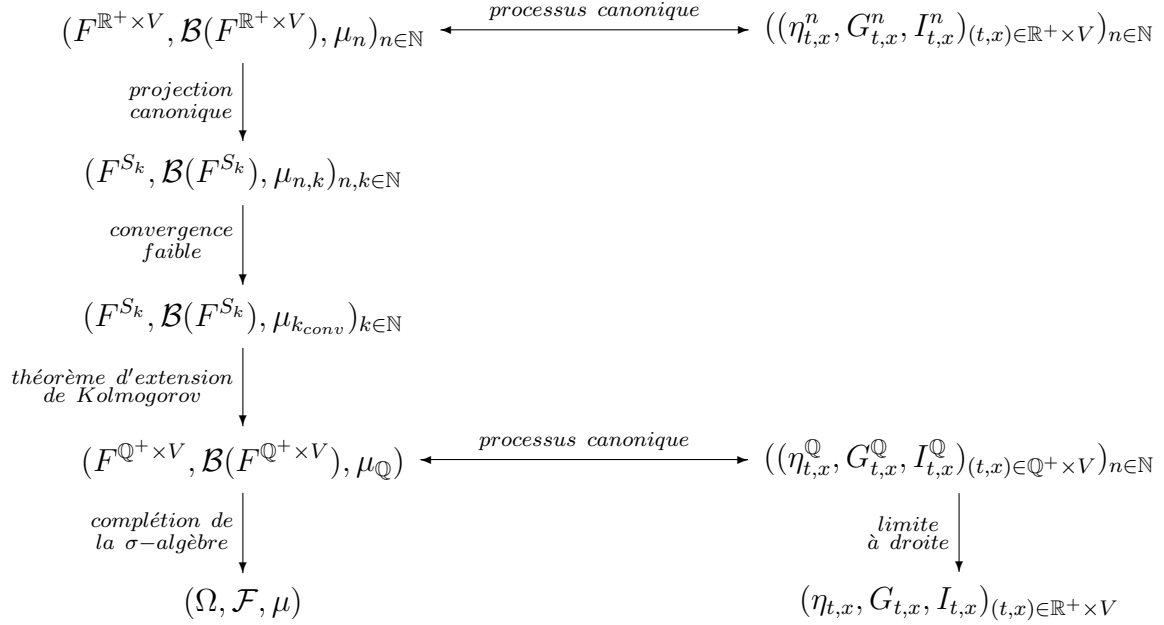


FIGURE 1.1 – Construction du processus limite, [19]

Pour montrer ce résultat, on utilise le fait que, s'il existe une composante connexe infinie, alors elle devient immédiatement vide. Ceci entre en contradiction avec la continuité à droite d'un processus de feux de forêt.

Le résultat suivant découle de la continuité à droite d'un processus de feux de forêt.

Proposition 1.1.4 (Lemme 20 de [19]). *Une composante connexe finie est continue à droite.*

Qu'en est-il de la limite à gauche d'une composante connexe ?

Proposition 1.1.5 (Théorème 2 de [19]). *Presque sûrement, la limite à gauche d'une composante connexe est finie.*

Nous venons de voir que, presque sûrement, une composante connexe ne peut pas être infinie (1.1.3). Ainsi, pour que la limite à gauche d'une composante connexe soit infinie, il faudrait qu'une composante connexe finie puisse croître infiniment souvent sans être touchée par la foudre. Une composante connexe grossit si et seulement si un arbre pousse sur un des sites voisins de cette composante connexe avant qu'elle ne soit touchée par la foudre. Cet événement sera appelé par la suite GBI pour Growth Before Ignition. En montrant que la probabilité de cet événement GBI est strictement inférieure à 1, on montre qu'il est presque sûrement impossible qu'une composante connexe finie puisse croître infiniment souvent sans être touchée par la foudre. Comme nous utiliserons l'évènement GBI dans la suite, nous allons en parler un peu plus ici. Le lemme suivant est une adaptation du lemme 18 de [19] au cas d'un graphe où le degré maximal d'un sommet est d .

Lemme 1.1.6 (Évènement “Growth Before Ignition”, [19]). *Pour tout réel $t > 0$ et tout ensemble S fini et non vide, notons*

$$GBI_t(\partial S, S) = \{\exists t' : \forall y \in S I_{t,y} = I_{t',y}, \exists z \in \partial S G_{t,z} < G_{t',z}\}. \quad (1.2)$$

Alors

$$\mathbb{P}(GBI_t(\partial S, S)) = \frac{|\partial S|}{|\partial S| + \lambda|S|} < 1 - \frac{\lambda}{d + \lambda} = \frac{d}{d + \lambda}. \quad (1.3)$$

Les processus de Poisson de croissance et de foudre des sites de $S \cup \partial S$ sont tous indépendants et de paramètres respectifs 1 et λ . Ainsi, le taux de mort de l'ensemble S est $\lambda|S|$ et le taux de croissance sur ∂S est $|\partial S|$. D'où la probabilité $\mathbb{P}(GBI_t(\partial S, S))$. La borne supérieure vient de la borne uniforme du nombre de voisins d'un site du graphe : $|\partial S| \leq d|S|$.

Nous venons de voir que l'on peut bien définir les processus de feux de forêt sur une grande classe de graphes infinis. Est-ce que ces processus sont uniquement définis? Nous avons vu qu'il n'y avait pas de problèmes pour les graphes finis et dans le cas de \mathbb{Z} . Nous allons voir que si l'on impose une condition supplémentaire sur la configuration initiale, la réponse à cette question est affirmative aussi pour les autres graphes infinis dont les sommets ont un nombre de voisins uniformément borné par une constante.

1.1.3 Unicité des processus de feux de forêt

Commençons par définir ce que nous entendons par unicité du processus de feux de forêt. Cela signifie ici que deux processus de feux de forêt définis sur le même graphe, par les mêmes processus de Poisson, et ayant la même configuration initiale, sont presque sûrement égaux. Dans la preuve précédente de l'existence, rien n'assure l'unicité de la limite choisie. Dürre s'est aussi intéressé à cette question de l'unicité et y a répondu en deux temps. Dans un premier article [20] paru en 2006, il a montré l'unicité des processus de feux de forêt définis sur \mathbb{Z}^d , pour des paramètres λ assez grand et une configuration initiale vide. Pour étudier l'influence des sites éloignés, il a dominé le processus de feux de forêt par un modèle de percolation sous-critique (d'où la contrainte sur le paramètre λ). Ainsi il a pu utiliser le résultat de décroissance exponentielle de la taille des composantes connexes en percolation sous-critique. Ce raisonnement est cependant limité aux grandes valeurs de λ en raison du seuil de percolation. Dans sa thèse [21] soutenue en 2009, il a démontré l'unicité des processus de feux de forêt définis sur les graphes de type S , pour tous les paramètres λ strictement positifs, et pour une certaine classe de configuration initiale (condition CCSB définie au paragraphe 3.2). Il a montré que ce résultat d'unicité se déduisait de la convergence presque sûre des processus de feux de forêt sur des sous-graphes finis qui sont couplés au processus de feux de forêt sur S avec les mêmes processus de Poisson et la même configuration initiale. Pour montrer ce résultat il a développé des outils beaucoup plus fins d'analyse de l'influence de l'infini et de la taille des composantes connexes. Nous utilisons une partie de ces outils dans

cette thèse, donc nous les détaillerons dans le paragraphe 3.2 du chapitre 3. Pour conclure ce paragraphe, citons les deux résultats d'unicité démontrés par Dürre.

Théorème 1.1.7 (Théorème 1 de [20]). *Soit p_c^d la probabilité critique de percolation de site sur \mathbb{Z}^d . Soit $(\bar{\eta}_{t,x})_{t \geq 0, x \in \mathbb{Z}^d} = (\eta_{t,x}, G_{t,x}, I_{t,x})_{t \geq 0, x \in \mathbb{Z}^d}$ un processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d de paramètre $\lambda > \frac{1 - p_c^d}{p_c^d}$ et de configuration initiale vide. Alors tout processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d dirigé par les processus de Poisson de naissance et de foudre $\{(G_{t,x})_{t \geq 0}, (I_{t,x})_{t \geq 0}\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$, de configuration initiale vide, est presque sûrement égal au processus de feux de forêt $\bar{\eta}$.*

Théorème 1.1.8 (Théorème 3 de [21]). *Soit S un graphe dont le degré de sommets est borné uniformément par un entier d . Pour tout entier d , pour tout réel strictement positif λ , soit $(\bar{\eta}_{t,x})_{t \geq 0, x \in V} = (\eta_{t,x}, G_{t,x}, I_{t,x})_{t \geq 0, x \in V}$ un processus de feux de forêt sur S de paramètre $\lambda > 0$, et qui vérifie $CCSB(0, \frac{\lambda}{4d^2}, m)$ pour un entier m . Alors tout processus de feux de forêt sur S dirigé par les mêmes processus de Poisson de naissance et de foudre $\{(G_{t,x})_{t \geq 0}, (I_{t,x})_{t \geq 0}\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$, et ayant la même configuration initiale, est presque sûrement égal au processus de feux de forêt $\bar{\eta}$.*

Nous venons de voir que les processus de feux de forêt sont uniquement définis pour une grande classe de graphes. Cependant, la plupart des résultats existants à ce jour concernent le cas du réseau \mathbb{Z} . Nous allons maintenant parler un peu plus précisément de ces résultats sur \mathbb{Z} .

1.2 Résultats sur \mathbb{Z}

Intéressons nous maintenant uniquement au cas du graphe \mathbb{Z} . Les processus de feux de forêt ont été étudiés dans deux directions. La première direction concerne l'étude du comportement asymptotique de ces processus. La deuxième direction est l'étude de l'existence d'un processus limite lorsque le paramètre de foudre λ tend vers 0. Nous allons présenter les résultats dans l'ordre chronologique de leur publication. Les premiers résultats concernent l'étude du comportement asymptotique des composantes connexes, notamment de leur taille. Puis nous nous intéresserons à la question de l'existence de mesures invariantes. Nous verrons que les processus de feux de forêt ont au moins une mesure invariante, pour tous les paramètres λ . La question de l'unicité de la mesure invariante a été résolue pour $\lambda = 1$, et la méthode peut être étendue pour les paramètres supérieurs à 1. Par contre, la question reste ouverte pour les petits paramètres λ . Nous finirons ce paragraphe par l'étude des processus de feux de forêt lorsque le paramètre λ tend vers 0. Nous verrons que l'on peut définir un processus limite vers lequel convergent les processus de feux de forêt.

1.2.1 Comportement asymptotique des composantes connexes

Le comportement asymptotique de la taille des composantes connexes a été étudié par Drossel, Clar et Schwabl dans [17]. Ils se sont intéressés d'une part à la densité

asymptotique de sites vides, et ont énoncé qu'elle est de l'ordre de $[\log(1/\lambda)]^{-1}$. Dans [6] van den Berg et Járai ont démontré rigoureusement ce résultat. D'autre part, ils ont prédit que la loi de la taille des composantes connexes avait un comportement en loi puissance pour des composantes connexes de l'ordre d'un entier n_λ défini ci-après (définition 1.3). Or dans le même article, van den Berg et Járai ont montré que ce résultat n'est pas vrai pour des composantes connexes dont la taille est plus petite que n_λ . Cependant, Brouwer et Pennanen ont montré dans [15] que ce résultat est tout de même vrai pour des composantes connexes dont la taille est plus petite que $n_\lambda^{\frac{1}{3}}$. Détaillons un peu ces résultats.

Nous allons nous intéresser à de petites valeurs du paramètre λ , que nous allons relier aux entiers de la manière suivante pour toute la suite du paragraphe.

Définition 1.3 (n_λ , [6]). *Soit n_λ un entier associé au réel λ de la manière suivante :*

$$n_\lambda \log(n_\lambda) \leq \frac{1}{\lambda} < (n_\lambda + 1) \log(n_\lambda + 1).$$

Comme on s'intéresse au comportement asymptotique des processus de feux de forêt, on souhaite trouver de nouvelles échelles de temps et d'espace pour étudier ces processus. Pour cela, on s'intéresse à deux évènements en particulier. Soit $A_J(s, t)$ l'évènement : "il y a au moins une naissance en chaque site d'un intervalle J dans un intervalle de temps $[s, t]$ ". Soit $B_J(s, t)$ l'évènement : "au moins un site de l'intervalle J est touché par la foudre dans l'intervalle de temps $[s, t]$ ". Formellement, on peut écrire :

$$A_J(s, t) = \{\forall x \in J, G_{s,t} > 0\} \quad (1.4)$$

$$B_J(s, t) = \{\exists x \in J; I_{s,t} > 0\} \quad (1.5)$$

On peut montrer qu'il existe des constantes $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$ telles que

$$\mathbb{P}(A_{[0, n_\lambda]}(0, \log(n_\lambda))) \in]K_1, 1 - K_1[\quad (1.6)$$

$$\mathbb{P}(B_{[0, n_\lambda]}(0, \log(n_\lambda))) \in]K_2, 1 - K_2[. \quad (1.7)$$

Ceci nous indique les échelles de temps et d'espace à considérer pour ce modèle : n_λ pour l'espace et $\log(n_\lambda)$ pour le temps.

Ainsi, partant d'un intervalle de longueur n_λ vide, la probabilité qu'il y ait un site vide à chaque temps t de l'intervalle de temps $[0, \log(n_\lambda)]$ est minorée par une constante strictement positive. Ceci est une propriété bloquante importante. En effet, sur \mathbb{Z} un site vide empêche le feu de se propager. Cependant cette propriété seule ne suffit pas pour conclure sur la densité de site vide à l'équilibre. Il faut une propriété bloquante sur un intervalle de longueur $\beta \log(n_\lambda)$ avec $\beta > 1$. L'obtention de cette propriété se fait en deux étapes. Dans un premier temps, on montre que ce résultat peut être obtenu en partant d'un intervalle de longueur n_λ entièrement vide. Dans un deuxième temps, il faut montrer que partant de n'importe quelle configuration initiale, la probabilité de vider entièrement un intervalle de longueur n_λ en un temps strictement inférieur à $2 \log(n_\lambda)$ est minorée par une constante

strictement positive. Finalement, le résultat asymptotique sur la densité de sites vides à l'équilibre s'obtient à partir de cette propriété bloquante, en combinant de manière astucieuse les arguments précédents. Voici les trois résultats présents dans l'article [6] sur le comportement asymptotique des composantes connexes.

Théorème 1.2.1 (Théorème 4 de [6]). *Il existe deux constantes K_3 et K_4 telles que pour toute configuration initiale $\xi, \forall \lambda > 0$ et pour $t > 3 \log(n(\lambda)) + 1$,*

$$\frac{K_3}{\log(\frac{1}{\lambda}) \vee 1} \leq \mathbb{P}_\lambda^\xi(\eta_{t,0} = 0) \leq \frac{K_4}{\log(\frac{1}{\lambda}) \vee 1}.$$

Théorème 1.2.2 (Théorème 5 de [6]). *Il existe une constante K_5 telle que pour toute configuration initiale ξ , pour tout réel $0 < \lambda < (3 \log(3))^{-1}$, pour tout entier $1 \leq k \leq n_\lambda$ et pour $t > 4 \log(n_\lambda)$,*

$$\mathbb{P}_\lambda^\xi(|\mathcal{C}_{t,0}| = k) \geq \frac{C_5}{k \log(n_\lambda)}.$$

Théorème 1.2.3 (Théorème 6 de [6]). *Pour tous les réels $0 < \alpha < \beta$, il existe une constante $K_6 \in]0, 1[$ telle que pour toute configuration initiale ξ , pour tout réel $0 < \lambda < (3 \log(3))^{-1}$ et pour $t > 3 \log(n_\lambda)$,*

$$\mathbb{P}_\lambda^\xi(\alpha n_\lambda \leq |\mathcal{C}_{t,0}| \leq \beta n_\lambda) \in]K_6, 1 - K_6[.$$

Brouwer et Pennanen se sont aussi intéressés au comportement asymptotique des processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} . Ils ont étudié le comportement des composantes connexes sous une mesure invariante du processus de feux de forêt. Ils ont montré que l'intuition des physiciens était bonne pour des composantes connexes dont la taille est plus petite que n_λ^α pour $\alpha < \frac{1}{3}$. Dans la deuxième partie de leur article, ils ont montré que leur résultat pouvait bien s'appliquer, c'est-à-dire qu'il existe bien au moins une mesure invariante. Nous parlerons de ce deuxième résultat dans le paragraphe suivant. Revenons au résultat de Brouwer et Pennanen sur le comportement asymptotique des processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} .

Théorème 1.2.4 (Théorème 2.1 de [15]). *Soit $\alpha < \frac{1}{3}$. Alors il existe deux constantes A_1 et A_2 telles que pour tout réel $\lambda < 1$, pour toute mesure invariante, invariante par translation μ_λ du processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} , et pour tout entier $n < n_\lambda^\alpha$,*

$$\frac{A_1}{n^2 \log(\frac{1}{\lambda})} \leq \mu_\lambda(\eta_0 = 0, \eta_1 = 1, \dots, \eta_n = 1, \eta_{n+1} = 0) \leq \frac{A_2}{n^2 \log(\frac{1}{\lambda})}$$

Remarque 1. La probabilité étudiée dans ce théorème est celle de l'existence d'une composante connexe de taille n à gauche de zéro. Pour obtenir la probabilité qu'un site soit dans une composante connexe de taille n , il faut multiplier par n la probabilité précédente.

Passons maintenant à l'étude des mesures invariantes.

1.2.2 Mesure invariante

Dans une première partie, nous nous intéresserons au résultat de Brouwer et Pennanen sur l'existence de mesures invariantes. Puis nous présenterons les résultats de Bressaud et Fournier sur la question de l'unicité de la mesure invariante.

1.2.2.1 Existence de mesures invariantes

Dans la deuxième partie de leur article [15], Brouwer et Pennanen ont montré l'existence d'au moins une mesure invariante. Pour montrer ce résultat, on ne peut pas utiliser les arguments classiques de l'étude des systèmes de particules. En effet, le processus de feux de forêt est un processus de Markov qui n'est pas un processus de Feller. Ceci est dû aux interactions à longue portée de ce modèle, car il peut exister une très grande composante connexe qui est touchée par la foudre. Il faut donc montrer ce résultat "à la main". Pour cela, ils ont utilisé une suite de processus de feux de forêt définis sur des sous-ensembles finis particuliers de \mathbb{Z} . Pour tout entier k positif, considérons le sous graphe $[-k, k]$ de \mathbb{Z} avec une arête supplémentaire reliant les deux extrémités k et $-k$. Cela revient à considérer un nombre fini de points sur un cercle. Chacun de ces processus de feux de forêt possède une unique mesure invariante. Ils montrent finalement qu'une limite faible d'une sous suite de ces mesures invariantes est bien une mesure invariante pour le processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} . Pour cela, ils utilisent notamment le fait que les sites vides sont bloquants sur \mathbb{Z} . Nous reprendrons cette méthode pour montrer le même résultat d'existence pour des processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d .

Théorème 1.2.5 (Théorème 2.1 de [15]). *Le processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} de paramètre $\lambda > 0$ a au moins une mesure invariante, invariante par translation.*

1.2.2.2 Unicité de la mesure invariante

Nous venons de voir que les processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} possèdent au moins une mesure invariante. Cette mesure est-elle unique? Bressaud et Fournier se sont intéressés à cette question pour les processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} . Ils ont montré l'unicité lorsque $\lambda = 1$ dans [12]. Dans cet article ils parlent de processus d'avalanche. Ces processus correspondent aux processus de feux de forêt que nous étudions ici. La méthode développée dans [12] peut s'étendre aux processus de feux de forêt de paramètre λ supérieur à 1 mais pas à tous ceux de paramètre $\lambda < 1$. Citons le résultat principal qu'ils ont obtenu.

Théorème 1.2.6 (Théorème 1.1 de [12]). *Notons \mathcal{C}^f l'espace des configurations ne possédant pas de composantes connexes infinies.*

1. *Le processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} de paramètre $\lambda = 1$ possède une unique mesure invariante Π sur l'espace \mathcal{C}^f .*
2. *On observe une convergence exponentielle vers l'équilibre. Pour toute configuration $\varphi \in \mathcal{C}^f$, notons Π_t^φ la loi du processus de feux de forêt de configuration*

initiale φ au temps t . Alors il existe des constantes $C > 0$, $\alpha > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$ et $l \geq 0$,

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{C}^f} |(\Pi_t^\varphi)_{[-l,l]} - \Pi_{[-l,l]}| \leq C(1+l)e^{-\alpha t}. \quad (1.8)$$

3. Pour tout $l \geq 0$, il existe une simulation parfaite explicite d'une variable aléatoire de loi $\Pi_{[-l,l]}$.
4. Il existe des constantes $C > 0$, $0 < q < 1$ telles que pour tout entier k , tout entier positif n ,

$$|\Pi_{(-\infty,k] \cup [k+n,\infty)} - \Pi_{(-\infty,k]} \otimes \Pi_{[k+n,\infty)}|_{\text{VT}} \leq Cq^n. \quad (1.9)$$

Bien qu'ils paraissent assez naturels, ces résultats ne sont pas évidents à montrer. L'idée est d'utiliser des processus, appelés processus de Bernoulli, où la configuration de chaque site est indépendante de celle des autres sites. Comme les processus de feux de forêt, ces processus sont définis à l'aide de deux types de familles de processus de Poisson. Cependant, au lieu de faire brûler la composante connexe d'un site lorsque celui-ci est touché par la foudre, seul le site touché par la foudre disparaît. Ainsi, l'état de chaque site est indépendant de l'état de tous les autres sites. En raison de cette indépendance entre les sites, on connaît la mesure invariante d'un tel processus. On va alors pouvoir s'en servir pour déterminer la mesure invariante du processus de feux de forêt. Pour cela, on utilise un couplage entre le processus de feux de forêt et un processus de Bernoulli. À partir de ce couplage, pour chaque site i , on peut construire un intervalle $[l_i(t), r_i(t)]$ tel que les sites $r_{i+1}(t)$ et $l_{i-1}(t)$ soient vides dans la configuration du processus de Bernoulli au temps t . Les auteurs ont montré qu'il existe un temps T_i , fini presque sûrement, tel que cet intervalle est vide, en s'intéressant plus particulièrement aux événements qui n'affectent qu'un seul des deux processus. Les événements concernés sont les événements de croissance où un arbre apparaît pour les processus de feux de forêt mais où le site est déjà occupé dans le processus de Bernoulli, ainsi que les événements de foudre où le site est occupé pour le processus de Bernoulli mais vide pour le processus de feux de forêt. Ainsi, en inversant le temps et en partant de $t = -T_i$, on peut reconstruire l'état du site i pour le processus de feux de forêt à partir d'un nombre fini de processus de Poisson correspondants aux sites des intervalles précédents. La loi de la configuration du site i au temps 0 est invariante pour le processus de feux de forêt, et elle peut être simulée parfaitement. De plus, ce raisonnement permet de montrer que la mesure invariante est unique. La dimension de la boîte de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ obtenue avec tous ces intervalles permet d'obtenir les estimées pour les autres assertions du théorème.

Jusqu'à présent, nous avons vu des résultats sur les processus de feux de forêt lorsque le paramètre λ était fixé. Que se passe-t-il lorsque ce paramètre devient de plus en plus petit ? C'est ce que nous allons étudier maintenant.

1.2.3 Processus limite lorsque λ tend vers 0

Quel est le comportement du processus de feux de forêt lorsque le paramètre λ tend vers 0 ? Si λ tend vers 0, il y a moins de feux. S'il y a moins de feux les

composantes connexes ont le temps de devenir très grosses. Ainsi, lorsque la foudre tombe sur un site, elle a des chances de détruire une très grosse composante connexe. Il n'est pas évident de deviner ce qu'il va se passer à la limite, ni même de savoir si un processus limite existe. Une première idée serait de dire que le comportement limite est celui d'un modèle où l'on ne considère que les processus de Poisson de naissance des arbres. Dans ce cas, on aurait un modèle de percolation où la probabilité qu'un site soit occupé tend vers 1 lorsque le temps passe. Ceci conduirait à avoir tous les sites de \mathbb{Z} occupés. Comme les feux, même très rares, ont une influence non négligeable sur la configuration de la forêt, ce modèle ne semble pas convenir comme limite du processus de feux de forêt. En 2010 dans [13], Bressaud et Fournier ont montré qu'il existait bien un processus limite pour le processus de feux de forêt correctement renormalisé. Pour cela ils ont étudié plus en détails le comportement des composantes connexes lorsque λ tend vers 0. À partir de là, ils ont défini un processus limite et ils ont montré que le processus de feux de forêt renormalisé convergeait en loi vers ce processus limite via la convergence des marginales des lois des tailles des composantes connexes. Le processus limite qu'ils ont obtenu est défini de manière unique, sa dynamique est relativement simple et il peut être construit par simulation parfaite.

Théorème 1.2.7 (Résultats de [13]). *Lorsque λ tend vers 0, le processus de feux de forêt de paramètre λ , de configuration initiale vide, renormalisé en espace et en temps, converge en loi vers un processus limite uniquement défini. De plus la restriction de ce processus limite à tout espace $[0, T] \times [-n, n]$ peut être construite par simulation parfaite.*

Remarque 2. Notre objectif ici est de donner une idée du comportement du processus limite. Nous ne rentrons pas dans les détails et les définitions formelles. Les résultats ne peuvent donc pas être énoncés comme ils apparaissent dans l'article [13].

Pour voir à quoi ressemble le processus limite, donnons un aperçu de son comportement et de la manière dont il est défini. Pour cela, regardons de plus près le comportement des composantes connexes. Lorsque λ tend vers 0, les composantes connexes sont de plus en plus grosses et il faut attendre de plus en plus longtemps avant qu'un feu ne se produise. Ainsi, nous aurons besoin de renormaliser l'espace et le temps pour étudier la limite. Pour que la taille moyenne d'une composante connexe soit proche de 1, nous allons accélérer le temps par un facteur $\log(\frac{1}{\lambda})$. Pour voir un seul feu par unité d'espace dans un intervalle de temps de longueur $\log(\frac{1}{\lambda})$ pour l'ancienne échelle de temps, on renormalise l'espace par un facteur $\lambda \log(\frac{1}{\lambda})$.

Ainsi on identifie $\left[0, \frac{1}{\lambda \log(\frac{1}{\lambda})}\right] \subset \mathbb{Z}$ et $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Dans ce paragraphe, pour une meilleure lisibilité, nous noterons $C(t, x)$ la composante connexe du site x au temps t et non $C_{t,x}$. Avec ces nouvelles échelles, si $\lambda < 1$, la taille d'une composante connexe est donnée par :

$$\text{Si } t > 0 \text{ et } x \in [0, 1], \quad D_t^\lambda(x) = \underbrace{-\lambda \log(\lambda) C\left(t \log\left(\frac{1}{\lambda}\right), \underbrace{\left[\frac{x}{\lambda \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)}\right]}_{\in \mathbb{Z}}\right)}_{\subset \mathbb{Z}}. \quad (1.10)$$

Avec l'approximation $|C(t, x)| \approx e^t$, on obtient $D_t^\lambda \approx -\lambda^{1-t} \log(\lambda)$. Ainsi la limite lorsque λ tend vers 0 de $|D_t^\lambda(x)|$ est égale à 0 si $t < 1$ et $+\infty$ si $t \geq 1$. Il faut donc garder un peu plus d'information pour obtenir une limite qui ne soit pas infinie lorsque $t \geq 1$. L'idée est que les feux microscopiques ont leur importance. En effet, lorsque l'on renormalise, les petites composantes connexes deviennent invisibles (représentée par un point $x \in \mathbb{R}$). Cependant, si elles sont touchées par la foudre, l'espace devenu vide est bloquant pendant un petit intervalle de temps. Pour tenir compte de ce phénomène, les auteurs ont introduit la notion de degré de petitesse d'une composante connexe, qui correspond à peu près au t de l'approximation précédente de D_t^λ .

$$Z_t^\lambda(x) = -\log(\lambda)^{-1} \log \left(1 + \left| C \left(t \log \left(\frac{1}{\lambda} \right), \left\lfloor \frac{x}{\lambda \log \left(\frac{1}{\lambda} \right)} \right\rfloor \right) \right| \right). \quad (1.11)$$

L'étude du comportement des quantités $D_t^\lambda(x)$ et $Z_t^\lambda(x)$ lorsque λ tend vers 0 permet d'avoir une idée du comportement d'un possible processus limite. Le processus limite est défini à partir d'une mesure de Poisson sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ d'intensité $dxdt$ et de trois processus $(Z_{t,x})_{t \geq 0, x \in \mathbb{Z}}$, $(D_{t,x})_{t \geq 0, x \in \mathbb{Z}}$, et $(H_{t,x})_{t \geq 0, x \in \mathbb{Z}}$. La convergence en loi du théorème 1.2.7 est en fait la convergence des lois fini-dimensionnelles de ces quantités Z^λ et D^λ vers les quantités Z et D du processus limite. Décrivons l'évolution du processus limite. On part d'une configuration entièrement vide. On pose $Z_0(x) = 0$ et $H_0(x) = 0$ et $D_0(x) = \{x\}$ pour tous les sites $x \in \mathbb{R}$. La valeur maximale que peut atteindre $Z_{t,x}$ est 1. Commençons par définir trois types de zones que l'on va utiliser pour décrire l'évolution du processus limite.

- ◇ zones bloquantes : ce sont les sites x tels que $H_t(x) > 0$
- ◇ composantes connexes microscopiques : ce sont les sites x tels que $Z_{t-}(x) < 1$,
- ◇ composantes connexes macroscopiques : ce sont les segments entre les points qui sont soit une composante connexe microscopique, soit une zone bloquante. Elles sont notées $D_t(x)$.

Décrivons maintenant l'évolution du processus limite.

- ◇ Occupation des zones vides correspondant aux composantes connexes microscopiques : croissance linéaire de $Z_t(x)$ en fonction du temps jusqu'à la valeur maximale 1.
- ◇ Feux : s'il y a une marque de Poisson en (x, t) :
 - ▷ On parle de feu microscopique si $Z_{t-}(x) < 1$. La composante connexe de x est microscopique. La zone x joue alors le rôle de barrière pendant un temps égal à $H_t(x) = Z_{t-}(x)$. $Z_t(x)$ continue de croître linéairement jusqu'à 1 sur l'intervalle $[t, t + H_t(x)[$. La quantité $H_t(x)$ décroît linéairement jusqu'à 0. Ces feux microscopiques ne se voient pas sur \mathbb{R} .
 - ▷ On parle de feux macroscopiques si $Z_{t-}(x) = 1$. Le feu détruit alors toute la composante connexe $D_{t-}(x)$ qui est un intervalle de \mathbb{R} . On remet la valeur de Z_t^λ à zéro. Ces feux sont visibles sur \mathbb{R} .

Pour plus de détails sur le processus limite, son existence et la convergence, nous renvoyons à l'article de Bressaud et Fournier [13].

La dernière partie de ce premier chapitre est consacrée à une présentation dé-

taillée des résultats de cette thèse, qui font l'objet des chapitres 3, 4 et 5.

1.3 Présentation des résultats

Dans cette partie, nous allons présenter un peu plus en détails les résultats de cette thèse. La première partie est consacrée à la question de l'existence de mesures invariantes sur \mathbb{Z}^d pour $d \geq 2$, qui sera développée dans le chapitre 3. La deuxième partie concerne la problématique de l'existence d'un processus limite lorsque le paramètre de feu λ tend vers 0, qui sera développée dans les chapitres 4 et 5. Chaque partie se termine par des questions ouvertes et des perspectives de recherche.

1.3.1 Existence de mesures invariantes

Nous avons vu au paragraphe 1.2.2.1 que les processus de feux de forêt sur \mathbb{Z} possèdent au moins une mesure invariante, invariante par translation [15]. Nous allons montrer que le même résultat est vrai pour les processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d pour $d \geq 2$. Ce travail fait l'objet d'un article [41] qui a été soumis.

Théorème 1.3.1 (Existence de mesures invariantes, [41]). *Les processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d pour $d \geq 2$ possèdent au moins une mesure invariante, invariante par translation.*

Comme les processus de feux de forêt sont des processus de Markov mais pas des processus de Feller, nous ne pouvons pas utiliser les arguments classiques de la théorie des systèmes de particules. Nous allons utiliser la méthode développée par Brouwer et Pennanen dans [15] pour montrer ce résultat. Par contre, le contrôle de l'influence des sites éloignés ne pourra pas se faire de la même manière que sur \mathbb{Z} , en raison de la géométrie différente de \mathbb{Z}^d . Nous allons alors utiliser les outils de "blur process" (définition 3.3) et de condition CCSB (définition 3.1) développés par Dürre dans sa thèse pour effectuer ce contrôle. Pour montrer l'existence de mesures invariantes, nous allons procéder en deux étapes. Dans un premier temps, nous allons construire une mesure candidate. Cette mesure candidate sera obtenue comme limite faible d'une sous-suite de mesures invariantes pour des processus de feux de forêt définis sur des graphes finis. Dans le but d'obtenir la propriété d'invariance par translation, ces graphes finis seront des tores discrets. Puis dans un deuxième temps, nous montrerons que la mesure candidate est bien une mesure invariante pour le processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d . C'est lors de cette étape que nous utiliserons les outils de Dürre.

Or Dürre a développé ces outils pour une classe de graphes infinis plus générale : les graphes infinis connectés dont le nombre de voisins d'un sommet est uniformément borné. Le résultat d'existence de mesures invariantes est-il encore vrai sur ces graphes infinis plus généraux ? La même méthode peut s'appliquer à ce type de graphes, mais sans la propriété d'invariance par translation. Nous pensons que cette propriété est aussi vraie sur les graphes qui sont des arbres de Cayley. Par

contre, pour obtenir cette propriété, des outils de théorie de groupe seront a priori nécessaires.

Concernant l'étude des mesures invariantes, la question de l'unicité reste ouverte à ce jour, aussi bien dans le cas de \mathbb{Z} pour des paramètres $\lambda < 1$ que dans le cas des autres graphes infinis.

Dans cette partie, nous avons considéré les modèles de feux de forêt pour des paramètres λ fixés. Intéressons nous maintenant à l'étude du comportement des processus de feux de forêt lorsque le paramètre de feu λ tend vers 0.

1.3.2 Vers un processus limite lorsque λ tend vers 0

On aimerait définir un processus continu qui serait une limite en loi du processus de feux de forêt lorsque $\lambda \rightarrow 0$. Si le processus de feux de forêt est à valeurs dans \mathbb{Z}^d , alors le processus limite cherché est à valeurs dans \mathbb{R}^d . Nous avons vu que sur \mathbb{Z} , un tel processus limite existe et est uniquement défini [13]. L'avantage sur \mathbb{Z} est le fait qu'un site vide est bloquant, c'est-à-dire qu'il empêche le feu de se propager. Sur \mathbb{Z}^d on perd cette propriété, et la géométrie du réseau implique une multitude de chemins possibles liant deux sites distincts, et ces multiples chemins ont souvent plusieurs sites en commun. Dans le but d'essayer de simplifier un peu les problèmes liés à la géométrie de \mathbb{Z}^d , en vue d'obtenir un peu plus d'indépendance, nous avons choisi d'étudier le problème sur les arbres, et plus particulièrement sur l'arbre binaire.

Quels sont les avantages et les inconvénients du travail sur les arbres binaires ? Un premier avantage est le fait que l'on retrouve une propriété bloquante, du même genre que dans \mathbb{Z} . En effet, un site vide de l'arbre binaire va alors séparer les sous-arbres issus des ses voisins, les feux ne pourront pas se propager. Nous allons beaucoup utiliser la propriété d'indépendance suivante. Connaissant l'état des sites de hauteur n , tous les sous-arbres issus des sites de hauteur $n+1$ sont indépendants. Par contre, sur l'arbre binaire, nous perdons la propriété de moyennabilité du réseau que \mathbb{Z}^d possède. Le nombre de sites liés à l'extérieur est de l'ordre du nombre de sites présents dans la boule, ce qui va créer une difficulté qui n'existait pas sur le réseau \mathbb{Z}^d . Ainsi l'influence de l'extérieur sur une boule joue un rôle important. De plus, si l'on regarde les composantes connexes présentes dans une boule de rayon n , un grand nombre d'entre elles touchent la frontière. Cela nous empêche d'accéder à la densité des composantes connexes de taille k en faisant la limite de cette densité dans une boule de rayon n .

Notre objectif est de mieux comprendre le comportement des composantes connexes pour le modèle de feux de forêt lorsque λ tend vers 0, notamment comment elles grossissent, et leur taille au moment où elles brûlent. Nous avons fait deux pas dans cette direction. Le premier concerne une meilleure compréhension du processus de croissance, qui correspond à un modèle sans feux. Le deuxième concerne l'étude de la taille de la composante connexe de l'origine au moment où elle brûle pour la première fois, dans un modèle de feux de forêt différent du modèle défini au début

de ce chapitre.

Les deux sections de ce paragraphe correspondent respectivement aux chapitres 4 et 5.

Étude du modèle de croissance

Nous allons ici étudier un modèle sans feux, appelé modèle de croissance. C'est un modèle où l'évolution est gouvernée uniquement par les processus de Poisson de croissance, ce qui revient à prendre $\lambda = 0$ dans la définition du processus de feux de forêt. Si l'on part d'une configuration initiale entièrement vide, petit à petit l'arbre se remplit jusqu'à être complètement occupé. A chaque temps t fixé, ce modèle correspond à un modèle de percolation de paramètre $p = 1 - e^{-t}$. Dès que p est strictement supérieur au seuil critique de percolation, il y a une composante connexe infinie. Ce modèle ne peut pas être le modèle limite cherché car les feux ont tout de même une influence. En effet, nous avons vu au théorème 1.1.3 que dans un modèle de feux de forêt, les composantes connexes sont presque sûrement finies. Cependant, l'étude des composantes connexes de ce modèle pour des temps très proches du temps critique est une première étape à la compréhension du comportement des composantes connexes du modèle de feux de forêt pour λ très petit.

Pour étudier ce modèle, nous partirons d'une configuration initiale obtenue par une percolation critique sur l'arbre binaire. Puis nous étudierons un ensemble, noté $\mathcal{B}_n(0)$, construit à partir d'une boule de rayon n à laquelle on ajoute les sites des composantes connexes qui touchent sa frontière au temps initial (définition 4.2). Nous nous intéresserons à sa taille à un temps $t_n > 0$, tendant vers 0 avec n . Nous montrerons dans le chapitre 4 que cette taille renormalisée converge en loi vers une variable aléatoire non dégénérée. Pour notre étude, nous nous sommes servis de la propriété des arbres binaires sur l'indépendance des sous-arbres issus des sites de la génération $n + 1$, une fois que l'état des sites de la génération n est connu. Exposons un peu plus en détails la façon dont nous avons étudié ce modèle et obtenu ce résultat.

Pour étudier comment les composantes connexes se comportent dans ce modèle, nous sommes partis d'un arbre binaire de rayon n , \mathbb{T}_n , de configuration initiale obtenue par une percolation de paramètre $\frac{1}{2}$. Puis nous avons ajouté les composantes connexes des sites occupés de hauteur n de \mathbb{T}_n , ce qui nous donne un ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ (définition 4.2). Étant donné un temps $t > 0$, quel est la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$? Cette taille peut être infinie. Cependant, il se peut aussi que cette taille soit finie si la composante connexe de l'origine n'est pas encore devenue infinie. Pour étudier la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$, nous avons défini des arbres de Galton-Watson, notés $\mathcal{A}_{x,t}$, chacun associé à un site vide x voisin de $\mathcal{B}_n(0)$. Nous utiliserons la propriété d'indépendance des arbres binaires mentionnée plus tôt pour se ramener à la taille de tout l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$. Soit x un tel site vide. Si x est vide au temps t , il n'y a rien à faire. Sinon, pour déterminer la taille du sous-arbre issu de x au temps t , nous allons explorer pas à pas le sous-arbre issu de x , de x vers l'extérieur. À chaque fois

que l'on rencontre un site vide à $t = 0$ qui devient occupé dans l'intervalle de temps $]0, t]$, on considère les composantes connexes voisines de ce site présentes au temps initial. Ces sites qui deviennent occupés créent un chemin de sites occupés vers x , qui appartient alors à $\mathcal{B}_n(t)$. Nous allons travailler de la frontière vers l'extérieur pour ne considérer qu'un nombre fini de sites à chaque étape. Si tous les arbres de Galton-Watson considérés s'éteignent, alors la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$ est finie. Notons \mathcal{A}_t la réunion des arbres $\mathcal{A}_{x,t}$ pour tous les sites voisins de $\mathcal{B}_n(0)$. Nous avons obtenu un premier résultat sur l'extinction au temps $t_n = \frac{u}{2^{n+1}}$ de la forêt \mathcal{A}_{t_n} .

Proposition 1.3.2. *La probabilité d'extinction de la forêt \mathcal{A}_{t_n} pour $t_n = \frac{u}{2^{n+1}}$ converge vers e^{-u} lorsque $n \rightarrow \infty$.*

Dans le but d'obtenir le comportement limite de la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t_n)$, nous étudions la forêt \mathcal{A}_{t_n} sous la forme d'un processus de Galton-Watson $(N_k^n)_{k \geq 0}$ (définition 4.6). En étudiant les lois fini-dimensionnelles de ce processus de Galton-Watson, nous avons montré qu'il convergeait en loi vers un processus de branchement à temps discret et espace d'états continu, noté $(Z_k)_{k \geq 0}$, défini à partir d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$ (définition 4.7). Pour cela, nous avons renormalisé ce processus en espace.

Théorème 1.3.3 (Comportement limite du processus $(N_k^n)_{k \geq 0}$). *Le processus de Galton-Watson $(u2^{-2n}N_k^n)_{k \geq 0}$ converge en loi vers le processus de branchement à temps discret et espace d'états continu $(Z_{k+1})_{k \geq 0}$, au sens des lois fini-dimensionnelles.*

À partir de cette convergence en loi, nous avons montré la convergence des tailles totales de ces processus renormalisés $(u2^{-2n}N_k^n)_{k \geq 0}$ vers celle du processus limite $(Z_{k+1})_{k \geq 0}$, notée S . Ceci nous permet d'obtenir la loi limite de la taille renormalisée de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t_n)$:

Théorème 1.3.4 (Loi limite de la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$). *Considérons l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ construit à partir de la boule \mathbb{T}_n de rayon n et des composantes connexes qui l'intersectent. Soit u un réel strictement positif. Soit S_u une variable aléatoire dont la transformée de Laplace est donnée par l'expression suivante :*

$$\mathbb{E}(e^{-sS_u}) = \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{u} + \sqrt{u + 4s}}{2} \right)^2 \right]. \quad (1.12)$$

Alors la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t_n)$ au temps $t_n = u2^{-n-1}$, renormalisée par 2^{2n} , converge en loi vers la variable aléatoire $u^{-1}(S_u - 1)$:

$$\frac{1}{2^{2n}} \left| \mathcal{B}_n \left(\frac{u}{2^{n+1}} \right) \right| \xrightarrow{d} \frac{1}{u} (S_u - 1). \quad (1.13)$$

Nous avons étudié le modèle de croissance pour des temps très petits, de limite nulle. Or le modèle de feux de forêt est un modèle qui évolue en fonction du temps. L'étude précédente ne suffit donc pas. Intéressons nous maintenant à l'étude d'un modèle dynamique avec des feux, mais différent du modèle de feux de forêt initial.

Étude d'un modèle de feux de forêt modifié

Lorsque λ est très petit, il y a peu de feux donc les composantes connexes ont le temps de croître. Par contre, plus elles sont grandes, plus elles ont de chances d'être touchées par la foudre. Il n'y a donc pas de monotonie de la taille des composantes connexes en fonction de λ dans ce modèle. La loi de la taille des composantes connexes est difficile à déterminer car les feux entraînent des interactions à très grande portée, notamment lorsque λ est très petit.

Étant donné un temps $t > 0$, quelle est la taille de la composante connexe de l'origine ? Pour déterminer cette taille, partons de la composante connexe de l'origine à $t = 0$. Elle est de taille finie. Dès qu'un site vide voisin de cette composante connexe devient occupé, une composante connexe se rajoute alors à cette composante connexe de l'origine. Quelle est sa taille ? Comme le temps que l'on a attendu est strictement positif, cette composante connexe a subi la dynamique du modèle de feux de forêt et a pu brûler ou se coller elle-même, plus tôt, à une composante connexe. Celle-ci ayant elle-même évolué selon la dynamique du modèle, ce processus peut ne jamais s'arrêter puisque le graphe considéré est infini. Cette méthode ne nous permet donc pas de conclure.

Pour essayer de contrer ce phénomène, nous avons défini un modèle de feux de forêt différent. Dans ce modèle, nous avons considéré que les composantes connexes différentes de l'origine évoluent sous une loi stationnaire qui tient compte de la dynamique précédente. Nous pensons que cette dynamique, quand λ tend vers 0, est proche de la percolation critique sur l'arbre binaire. Nous avons ainsi supposé que cette loi stationnaire est dans le bassin d'attraction d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$, cette hypothèse étant vérifiée dans le cas de la percolation critique sur l'arbre binaire. La composante connexe de l'origine est quant à elle soumise à une évolution régie par des processus de Poisson pour les croissances d'arbres sur ses sites vides voisins et des feux sur les sites qui la composent, avec les mêmes paramètres que pour le vrai modèle de feux de forêt. Ce modèle est paradoxal dans le sens où l'on observe deux types de comportement pour les composantes connexes. Pour $\lambda > 0$ fixé, ce modèle ne va pas nous permettre de déduire des résultats sur le vrai modèle de feux de forêt. Par contre, notre objectif est de pouvoir dire quelque chose sur le processus limite. Pour ce modèle, nous allons nous intéresser en particulier à l'évolution de la composante connexe de l'origine, notamment pour déterminer sa taille au moment où elle brûle pour la première fois. Exposons un peu plus en détails les résultats que nous avons obtenus.

Soit ν une loi sur \mathbb{N} qui est dans le bassin d'attraction d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour étudier de la taille de la composante connexe de l'origine, définissons un processus de Markov à temps discret. Partons à $t = 0$ d'une composante connexe de loi ν . Le premier évènement qui touche l'évolution de la composante connexe de l'origine, notée $\mathcal{C}(t)$, est soit la foudre qui tombe sur l'un des sites qui la compose, soit une croissance sur l'un de ses sites vides voisins. Comme on regarde un nombre fini de sites, on peut déterminer le premier évènement qui se produit. Si c'est un feu, on arrête notre étude. Si c'est une croissance, la composante connexe de l'origine grossit. Elle se colle via ce site, noté x , à une composante connexe qui est la réunion

des deux composantes connexes issues des voisins de x extérieurs à $\mathcal{C}(t)$, notés x_1 et x_2 . La taille de chacune de ces deux composantes connexes est de loi ν . Cette croissance est illustrée à la figure 1.2. Comme ces évènements de croissance et de feu sont régis par des processus de Poisson, on peut déterminer leur probabilité.

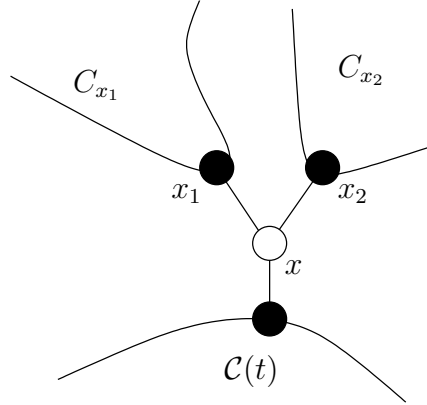


FIGURE 1.2 – Croissance de la composante connexe de l’origine

Commençons par considérer ce modèle sans les processus de Poisson gouvernant la foudre. On sait que les temps d’attente entre deux croissances suivent une loi exponentielle. Ainsi, à chaque étape k de croissance, on met à jour la taille Y_k de la composante connexe de l’origine, ainsi que l’instant X_k où cet évènement se produit (définition 5.1). À partir des deux processus $(X_k)_{k \geq 0}$ et $(Y_k)_{k \geq 0}$, on peut définir un processus de Markov à temps continu, noté $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, où $(X_k)_{k \geq 0}$ représente les instants de sauts et $(Y_k)_{k \geq 0}$ la valeur du processus après le saut (définition 5.2). En utilisant le fait que la loi ν est dans le bassin d’attraction d’une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$, nous avons montré le résultat suivant :

Théorème 1.3.5 (Temps d’explosion fini). *Le temps d’explosion T du processus $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ représentant la taille de la composante connexe de l’origine est fini presque sûrement.*

Ainsi, sans les évènements de foudre sur $\mathcal{C}(t)$, la composante connexe de l’origine grossit très vite. Qu’en est-il lorsque l’on rajoute ces évènements ? Cette fois nous mettons en compétition les évènements de croissance autour de $\mathcal{C}(t)$ et les feux dans $\mathcal{C}(t)$. Nous sommes intéressés par la taille de la composante connexe de l’origine au moment où elle brûle pour la première fois. Nous reprenons notre étude pas à pas, en notant cette fois Y'_k le processus des tailles de la composante connexe de l’origine. A chaque étape, on se demande si l’étape suivante est un feu ou une croissance. La probabilité que ce soit une croissance est l’évènement *GBI* (Growth Before Ignition) introduit par Dürre dans [19], dont nous avons parlé dans le lemme 1.1.6. Lorsque la taille de $\mathcal{C}(t)$ est suffisamment grande, cette probabilité ne dépend plus beaucoup de la taille exacte de $\mathcal{C}(t)$. Lorsque λ est très petit, il y a de fortes chances pour que la taille de $\mathcal{C}(t)$ soit grande. Ainsi, en faisant l’approximation que l’étape N_λ à laquelle se produit le feu suit une loi géométrique de paramètre $\lambda(1 + \lambda)^{-1}$, on

obtient le résultat suivant sur la taille $Y'_{N_\lambda-1}$ de la composante connexe de l'origine au moment où elle brûle :

Théorème 1.3.6. *Supposons que l'étape N_λ à laquelle se produit le premier feu suit une loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda}{1+\lambda}$. Alors la loi de la taille $Y'_{N_\lambda-1}$ de la composante connexe de l'origine au moment où elle est touchée par la foudre a le comportement limite suivant :*

$$\frac{\lambda^2 Y'_{N_\lambda-1}}{4} \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{d} E^2 G \text{ où } E \sim \mathcal{E}(1) \text{ et } G \sim \mathcal{G}_{\frac{1}{2}}.$$

Un des arguments clé de la preuve de ce résultat est encore le fait que la loi ν est dans le bassin d'attraction d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$.

Nous pensons que le comportement limite de $Y'_{N_\lambda-1}$ sans l'hypothèse précédente sur N_λ est proche de celui où l'hypothèse est vérifiée. La prochaine étape dans l'étude de ce modèle sera de montrer ou d'invalider cette conjecture. Dans un deuxième temps, l'objectif sera de valider ou d'invalider l'hypothèse que nous avons faite sur le choix de la loi stationnaire, en regardant si la loi obtenue pour la composante connexe de l'origine est bien dans le bassin d'attraction d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$. Ensuite, il reste encore des choses à faire sur la question du comportement des composantes connexes pour le vrai modèle de feux de forêt sur l'arbre binaire. D'autre part, la question de l'existence d'un processus limite sur les arbres binaires ou sur \mathbb{Z}^2 reste encore ouverte.

Chapitre 2

Les outils probabilistes

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques résultats de trois domaines des probabilités utilisés au cours de cette thèse. Dans une première partie, nous parlerons de la théorie de la percolation. Nous avons eu besoin tout d'abord de résultats de percolation sur \mathbb{Z}^d pour comprendre l'article de Dürre [20] sur l'unicité du processus de feux de forêt pour des grandes valeurs de λ , dont nous avons parlé au chapitre précédent. Ensuite, lorsque nous nous sommes intéressés au processus limite sur l'arbre binaire, nous avons eu besoin de résultats de percolation sur l'arbre binaire. Dans une deuxième partie, nous étudierons deux types de processus de branchement. Tout d'abord, nous parlerons des arbres de Galton-Watson, qui sont des processus de branchement à temps et à espace d'états discrets. Ils seront principalement utilisés dans le chapitre 4. Puis, pour étudier des processus limites, nous nous sommes intéressés aux processus de branchement toujours à temps discret mais cette fois à espace d'états continu. Dans la troisième partie, nous énonçons des résultats sur les lois stables. Nous travaillerons avec des lois qui sont dans le bassin d'attraction de lois stables dans les deux derniers chapitres de ce manuscrit. Dans la quatrième partie, nous présentons la majeure partie des résultats sur la loi de la taille des composantes connexes pour la percolation critique de site sur l'arbre binaire que nous allons utiliser dans les chapitres 4 et 5. Cette partie se base sur les résultats rappelés dans les trois parties précédentes de ce chapitre.

2.1 Percolation

Considérons que l'on immerge une pierre poreuse dans de l'eau. Quelle est la probabilité que le centre de cette pierre soit mouillé? Pour que cela arrive, il faut qu'il y ait un chemin de canaux à l'intérieur de la pierre à travers duquel l'eau puisse passer. Broadbent et Hammersley en 1957 ont été les premiers à formuler un modèle stochastique simple pour ce problème physique : la théorie de la percolation est alors née. L'idée est de modéliser la pierre en un réseau formé de sites et d'arêtes. Les arêtes représentent les canaux, ils peuvent être ouverts ou fermés, selon que l'eau peut passer au travers ou pas. Dans le modèle, chaque arête est indépendante des autres. Elle est ouverte avec une probabilité $p \in [0, 1]$ et fermée avec une probabilité $1 - p$. On regarde ensuite les chemins d'arêtes ouvertes, pour voir jusqu'où l'eau

peut aller.

Nous énoncerons ici principalement des résultats issus du livre de Grimmett [25] et du cours qu'il a donné à l'école d'été de probabilités de Cornell en 2011 [26]. Nous allons commencer par introduire la notion de percolation d'arête et de site et quelques premiers résultats issus du chapitre 1 de [25]. Puis nous passerons à l'étude des résultats spécifiques sur le réseau \mathbb{Z}^d et sur l'arbre binaire.

2.1.1 Premières définitions

Pour définir la percolation, on a besoin d'un réseau. Considérons un réseau $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ où \mathbb{E} est l'ensemble des arêtes et \mathbb{V} l'ensemble des sommets, que nous appellerons plutôt sites. Nous allons considérer principalement deux réseaux dans la suite : le réseau $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ et l'arbre binaire noté \mathbb{T} . Dans la littérature, \mathbb{T} fait souvent référence au réseau triangulaire, ce qui n'est pas le cas ici. Définissons ces deux réseaux.

Par abus de langage, nous parlerons plutôt du réseau \mathbb{Z}^d que du réseau \mathbb{L}^d dans la suite. C'est un graphe où l'ensemble des sommets est $\mathbb{V}^{(d)} = \mathbb{Z}^d$ et l'ensemble des arêtes est

$$\mathbb{E}^{(d)} = \left\{ \{x, y\} \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : |x - y|_1 = 1 \right\}, \text{ où } |x|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|.$$

La figure 2.1 illustre une partie du réseau \mathbb{Z}^2 .

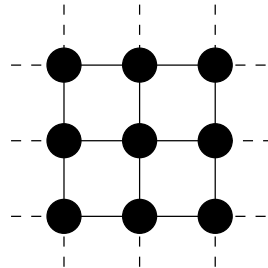
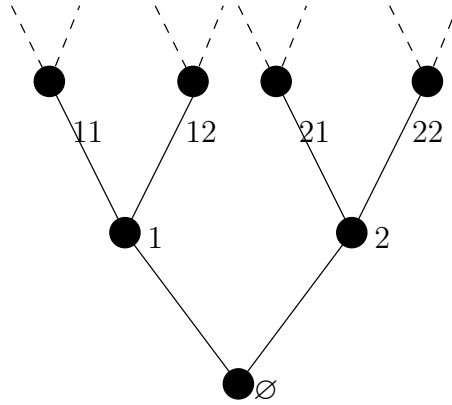


FIGURE 2.1 – Réseau \mathbb{Z}^2

L'arbre binaire \mathbb{T} que nous considérons ici est un arbre enraciné et inhomogène. Il s'agit d'un arbre enraciné tel que la racine a deux voisins et tel que tous les autres sites ont trois voisins. On parlera de la n -ième génération de l'arbre pour désigner l'ensemble des sites situés à une distance n de la racine. La distance est ici le nombre d'arêtes du plus court chemin du site vers la racine. On dira qu'un site est à hauteur n s'il appartient à la n -ième génération. On peut coder chaque site de cet arbre binaire de la manière suivante. La racine est identifiée par \emptyset . Pour les deux sites de la première génération, celui de gauche est identifié par 1 et celui de droite par 2. Ensuite chaque site de la $(n + 1)$ -ième génération est identifié par le n -uplet de son

FIGURE 2.2 – Arbre \mathbb{T}

père auquel on ajoute 1 ou 2 selon que le site considéré est l'enfant de gauche ou de droite. La figure 2.2 illustre une partie de l'arbre \mathbb{T} avec ces notations.

Formalisons un peu ce que nous avons dit dans l'introduction. Commençons par définir la percolation d'arête. Soit $p \in [0, 1]$ un réel. Une arête $e \in \mathbb{E}$ est *ouverte* avec probabilité p , on lui affecte alors la valeur $\eta(e) = 1$. Elle est *fermée* avec probabilité $1 - p$, on lui affecte alors la valeur $\eta(e) = 0$. En notant μ_e la loi de l'état de l'arête $e \in \mathbb{E}$, on obtient pour chaque arête $e \in \mathbb{E}$: $\mu_e(\eta(e) = 1) = p$ et $\mu_e(\eta(e) = 0) = 1 - p$. L'ensemble des valeurs de toutes les arêtes du réseau est appelé une configuration du réseau, et est notée $\eta = \{\eta(e), e \in E\}$. Nous considérons l'espace Ω de l'ensemble des configurations possibles ainsi que la probabilité P_p définie sur cet espace :

$$\Omega = \{0, 1\}^E \quad \text{et} \quad P_p = \prod_{e \in E} \mu_e. \quad (2.1)$$

Au lieu de travailler sur les arêtes on peut travailler sur les sites et définir une percolation de site. Un site $x \in \mathbb{V}$ peut alors être ouvert avec probabilité p et fermé avec probabilité $1 - p$. Une percolation d'arête peut toujours se reformuler en une percolation de site mais l'inverse n'est pas vrai. La percolation de site est plus générale. Soit G un graphe, définissons son graphe couvrant G_c . A chaque arête de G on associe un site de G_c . Deux sites de G_c sont reliés par une arête si les arêtes correspondantes dans G ont une extrémité commune. Par exemple dans le graphe couvrant de \mathbb{Z}^2 il y a plus d'arêtes que dans \mathbb{Z}^2 . Alors une percolation d'arête sur G se reformule en une percolation de site sur le graphe couvrant de G . Toutes les notions suivantes peuvent être définies pour la percolation de sites, en remplaçant "arête" par "site".

Définition 2.1 (Chemin et composante connexe).

1. (Percolation d'arête) Un chemin ouvert de longueur n est un ensemble de $n+1$ sites x_0, \dots, x_n reliés par des arêtes ouvertes. La composante connexe du site x , notée $C(x)$, est l'ensemble des sites reliés à x par un chemin ouvert. Sa taille sera notée $|C(x)|$ et représente le nombre de sites de $C(x)$.

2. (*Percolation de site*) Un chemin ouvert de longueur n est un ensemble de n sites x_1, \dots, x_n ouverts tels que pour tout entier $1 \leq i \leq n-1$, x_i et x_{i+1} sont reliés par une arête. La composante connexe du site x est l'ensemble des sites reliés au site x par un chemin ouvert. Sa taille est le nombre de sites qu'elle contient.

Remarque 3. Que l'on considère la percolation d'arête ou de site, la taille d'une composante connexe est toujours le nombre de sites qu'elle contient. Il faut donc faire attention à cette différence. La composante connexe du site x pour la percolation d'arête contient toujours le site x , que les arêtes soient ouvertes ou fermées. Par contre, pour la percolation de site, si le site x est fermé, sa composante connexe est vide.

En percolation, on est intéressé par la géométrie du sous-réseau restant lorsque l'on a enlevé toutes les arêtes fermées. Nous allons donc étudier les chemins ouverts et les composantes connexes, en particulier pour savoir s'il y a des composantes connexes infinies. Pour cela, nous allons nous intéresser principalement à deux quantités : la probabilité de percolation $\theta(p)$ et la taille moyenne des composantes connexes $\chi(p)$.

Sur \mathbb{Z}^d , par invariance du réseau et de la mesure de probabilité, la loi de la composante connexe du site x est indépendante de x . Ainsi il suffit de considérer la composante connexe de l'origine. Sur l'arbre binaire \mathbb{T} , l'origine joue un rôle différent des autres sites. Nous sommes intéressés en particulier par la composante connexe de l'origine dans ce cas. Dans toute la suite de cette partie, nous n'allons donc considérer que la composante connexe de l'origine, qui sera notée C .

Remarque 4. Les définitions sont les mêmes dans le cas de la percolation de sites et d'arêtes, mais les valeurs des quantités définies sont en général différentes. Lorsque l'on aura besoin de faire la distinction, nous mettrons des indices "site" ou "s" et "arête" ou "e" aux quantités en question.

Définition 2.2 ([25]). *La probabilité de percolation est la probabilité qu'un site appartienne à une composante connexe infinie :*

$$\theta(p) = P_p(|C| = \infty) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_p(|C| = n).$$

Considérons le réseau \mathbb{Z}^2 et deux cas extrêmes : $p = 0$ et $p = 1$. Si $p = 0$, toutes les arêtes sont fermées, il n'y a donc pas de composante connexe infinie. Si $p = 1$, toutes les arêtes sont ouvertes et il y a une composante connexe infinie. Si p est proche de zéro, peu d'arêtes seront ouvertes. On peut alors penser que les composantes connexes vont être petites et toutes finies. De même si p est proche de 1, on peut imaginer que les composantes connexes vont être grandes, voire même certaines infinies. Cette intuition est exacte et fait l'objet des résultats suivants.

Théorème 2.1.1 ([25]). *Il existe une valeur critique notée $p_c = p_c(d)$ telle que*

$$\begin{cases} \theta(p) = 0 & \text{si } p < p_c \\ \theta(p) > 0 & \text{si } p > p_c. \end{cases}$$

Définition 2.3 (Probabilité critique, [25]). *La valeur p_c du théorème 2.1.1 est appelée probabilité critique ou seuil de percolation. On peut écrire*

$$p_c = \sup\{p : \theta(p) = 0\}.$$

Cette probabilité est appelée critique, car nous verrons que les comportements du modèle lorsque la probabilité p lui est strictement inférieure ou supérieure sont très différents.

Définition 2.4 ([25]). *Considérons une percolation de paramètre p .*

1. *Si $p < p_c$, on parle de percolation sous-critique.*
2. *Si $p = p_c$, on parle de percolation critique.*
3. *Si $p > p_c$, on parle de percolation sur-critique.*

Avec le théorème 2.1.1, on voit que le comportement des composantes connexes est différent entre les phases sous-critique et sur-critique.

Il existe un lien entre les probabilités critiques pour les percolations d'arête et de site. Considérons un graphe infini $G = (V, E)$ avec un nombre dénombrable d'arêtes, d'origine 0 et dont le degré maximal des sommets est Δ . Les probabilités critiques de percolation de site et d'arête satisfont alors la relation suivante.

$$\frac{1}{1 - \Delta} \leq p_c^{\text{arête}} \leq p_c^{\text{site}} \leq 1 - (1 - p_c^{\text{arête}})^\Delta. \quad (2.2)$$

Nous allons maintenant donner quelques résultats sur le comportement des composantes connexes dans ces différentes phases en nous intéressant plus particulièrement au réseau \mathbb{Z}^d .

2.1.2 Percolation sur \mathbb{Z}^d

Nous avons vu dans le théorème 2.1.1 l'existence d'une probabilité critique. Une question que l'on peut se poser maintenant est la suivante : existe-t-il vraiment trois phases ? Si la probabilité critique vaut 0 ou 1, alors on n'observe que deux phases. C'est le cas sur \mathbb{Z} , où $p_c = 1$. Par contre, à partir de la dimension 2 pour le réseau \mathbb{Z}^d , on voit apparaître trois phases, ce qui est un cas plus intéressant à étudier.

Théorème 2.1.2 ([25]). *Sur \mathbb{Z}^d avec $d \geq 2$, le seuil critique de percolation vérifie $0 < p_c < 1$.*

La valeur de p_c n'est pas facile à déterminer en général. Elle dépend du réseau, du type de percolation (site ou arête). Par exemple sur \mathbb{Z} , $p_c(1) = 1$. Dans le cas de la percolation d'arête sur \mathbb{Z}^2 , Kesten a montré que $p_c^{\text{arête}}(2) = \frac{1}{2}$ [30] en utilisant le réseau dual de \mathbb{Z}^2 . Pour les autres valeurs de d , on a seulement parfois des approximations numériques de p_c . Par exemple sur \mathbb{Z}^2 pour la percolation de sites, $p_c^{\text{site}}(2) \simeq 0,59$. D'autres valeurs exactes ou approchées sont données dans le chapitre 3 de [25].

Nous allons maintenant nous intéresser à la probabilité qu'il existe une composante connexe infinie en fonction de p . En utilisant la loi du 0 – 1, on peut montrer le théorème suivant :

Théorème 2.1.3 ([25]). *La probabilité $\psi(p)$ qu'il existe une composante connexe infinie vérifie*

$$\psi(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta(p) = 0 \\ 1 & \text{si } \theta(p) > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

On peut se demander ce qu'il se passe exactement au point critique, c'est-à-dire lorsque $p = p_c$. Pour $d = 2$ ou $d \geq 19$, il n'y a pas de composantes connexes infinies : $\theta(p_c) = 0$. Par contre pour les valeurs restantes de d , la question reste ouverte. La finitude des composantes connexes est pour l'instant conjecturée.

Le théorème 2.1.3 nous donne l'existence de composantes connexes infinies dans la phase sur-critique mais il ne nous dit pas combien il y en a. En fait, il n'y en a qu'une.

Théorème 2.1.4 ([25]). *Si p vérifie $\theta(p) > 0$, alors il existe presque sûrement une unique composante connexe infinie.*

Une des questions principales de la percolation concerne la taille et la forme d'une composante connexe typique lorsque le paramètre p varie. Nous allons tout d'abord étudier la taille moyenne des composantes connexes. Puis nous donnerons pour les trois phases des résultats ou des conjectures sur la loi de la taille des composantes connexes.

Définition 2.5 (Taille moyenne des composantes connexes,[25]). *L'espérance de la taille de la composante connexe de l'origine, notée $\chi(p)$ est définie de la manière suivante.*

$$\chi(p) = \mathbb{E}_p|C| = \infty P_p(|C| = \infty) + \sum_{n=1}^{\infty} n P_p(|C| = n).$$

Dans la définition de $\chi(p)$, on voit que si $p > p_c$, $\chi(p)$ est infinie. Cependant, il n'est pas facile de démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.1.5 ([25]). *Si $p < p_c$, la taille moyenne $\chi(p)$ de la composante connexe contenant l'origine est finie.*

On peut remarquer que le point critique dans le comportement de $\chi(p)$ est le même que celui de $\theta(p)$.

Énonçons maintenant quelques résultats sur la taille des composantes connexes dans les trois phases.

★ Phase sous-critique

On observe une décroissance exponentielle de la queue de distribution de la taille des composantes connexes.

Théorème 2.1.6 ([25]). *Supposons que $0 < p < p_c$. Il existe $\lambda(p) > 0$ tel que pour tout entier n strictement positif,*

$$P_p(|C| \geq n) \leq \exp(-n\lambda(p)).$$

Plus précisément, on a pour tout entier $n > \chi(p)^2$,

$$P_p(|C| \geq n) \leq \exp\left(-\frac{n}{2\chi(p)^2}\right).$$

Ce résultat entraîne que la variable aléatoire $|C|$ a des moments finis de tout ordre pour $p < p_c$.

★ Phase sur-critique

Le comportement de la distribution de la taille des composantes connexes finies est vraiment différent dans les phases sous-critique et sur-critique. Ici on a une décroissance sous exponentielle.

Théorème 2.1.7 ([25]). *Supposons que $p_c < p < 1$. Il existe des constantes $\gamma(p)$ et $\eta(p)$ finies telles que, pour tout entier n ,*

$$\exp(-\gamma(p)n^{\frac{d-1}{d}}) \leq P_p(|C| = n) \leq \exp(-\eta(p)n^{\frac{d-1}{d}}).$$

★ Phase critique

L'étude de cette phase est beaucoup plus délicate. Il existe de nombreuses conjectures mais peu de résultats sont prouvés. Le but est de comprendre le comportement des quantités précédentes au point critique mais aussi près du point critique, à savoir lorsque p croît ou décroît vers p_c . Les conjectures concernant les quantités étudiées prédisent un comportement en loi puissance près du point critique. Des *exposants critiques* ont alors été introduits pour énoncer ces conjectures. Mais l'existence de ces exposants n'est prouvée que dans certains cas particuliers. On sait les calculer pour la percolation sur l'arbre binaire. Ces dernières années il y a eu deux progressions majeures. La première concerne la compréhension des cas où le réseau est de grande dimension, $d \geq 19$, grâce à un outil appelé "lace expansion" développé par Hara, Slade, van der Hofstad entre autres. On pourra lire par exemple [40] sur ce sujet. Dans ce cas les exposants critiques sont les mêmes que ceux de l'arbre binaire. La deuxième progression résulte de l'avancée sur l'invariance conforme et l'introduction des courbes SLE (Schramm-Löwner evolution). On peut citer entre autres Schramm, Smirnov, Lawler, Werner, et lire par exemple [31]. Elle concerne l'étude de la percolation de sites sur le réseau triangulaire. Une autre direction de recherche actuelle concerne l'universalité des exposants. On conjecture ([24],[23]) que les valeurs des exposants ne dépendent que de la dimension du réseau et pas du type de percolation (site ou arête) ou d'autres caractéristiques du réseau. Énonçons ci dessous quelques conjectures avec des exposants critiques. Nous renvoyons au chapitre 9 de [25] pour plus de détails.

Intéressons nous tout d'abord à la probabilité de percolation et à la taille moyenne des composantes connexes. Pour pouvoir parler de la limite lorsque p décroît vers p_c , définissons la taille moyenne des composantes connexes finies.

Définition 2.6 ([25]). *Notons $\chi^f(p)$ la taille moyenne de la composante connexe de l'origine lorsqu'elle est finie :*

$$\chi^f(p) = \mathbb{E}(|C|I_{|C|<\infty}).$$

Lorsque $p < p_c$, $\chi^f(p) = \chi(p)$.

Dans l'énoncé des conjectures, nous noterons $f(p) \approx g(p)$ lorsque $\frac{\log(f(p))}{\log(g(p))} \rightarrow 1$.

Conjecture 1 ([25]). *Lorsque $p \rightarrow p_c$, on a les comportements suivants :*

- de la probabilité de percolation :

$$\theta(p) \approx (p - p_c)^\beta.$$

- de la taille moyenne des composantes connexes finies :

$$\chi^f(p) \approx |p - p_c|^{-\gamma}.$$

On peut aussi définir un exposant critique pour la loi de la taille d'une composante connexe. Cette fois, on se place en $p = p_c$.

Conjecture 2 ([25]). *Lorsque $n \rightarrow \infty$, on a le comportement suivant de la loi de la taille d'une composante connexe :*

$$\mathbb{P}_{p_c}(|C| = n) \approx n^{-1-\frac{1}{\delta}}.$$

Nous allons maintenant passer à l'étude de la percolation sur le deuxième réseau qui nous intéresse ici : l'arbre binaire.

2.1.3 Percolation sur un arbre binaire

Nous considérons ici l'arbre binaire inhomogène \mathbb{T} défini au paragraphe 2.1.1. L'avantage de ce réseau est l'absence de circuits, donc les calculs sont plus faciles. De plus, il y a des liens avec la percolation sur \mathbb{Z}^d pour d très grand. En effet on peut plonger l'arbre binaire dans le réseau " \mathbb{Z}^∞ ". Pour cela, on relie chaque site de la n -ième génération à ses fils par une arête parallèle au n -ième axe de coordonnées de \mathbb{Z}^∞ . Utilisons le codage d'un site de l'arbre binaire défini au paragraphe 2.1.1. Ainsi on peut voir un site de la n -ième génération de l'arbre binaire $(\emptyset, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ comme le site de coordonnées $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$ dans " \mathbb{Z}^∞ ", en posant $x_i = 1$ si $\lambda_i = 1$ et $x_i = -1$ si $\lambda_i = 2$. Certains résultats obtenus sur les arbres binaires peuvent alors être utilisés pour obtenir des résultats de percolation sur \mathbb{Z}^d pour d grand.

On peut considérer des modèles de percolation sur des arbres plus généraux, par exemple sur des arbres binaire homogènes ou sur des arbres r -naires. Les résultats

s'obtiennent essentiellement de la même manière. Nous nous restreignons ici au cas de l'arbre binaire \mathbb{T} .

Nous allons donner les résultats pour la percolation d'arêtes issus du chapitre 10 de [25]. Nous avons vu que les notions de composantes connexes ne sont pas exactement les mêmes entre les deux types de percolation. Nous allons adapter au paragraphe 2.4.1 ces résultats de percolation d'arête à la percolation de site. C'est pourquoi nous noterons ici $|C^e|$ pour bien souligner que nous sommes dans le cas de la percolation d'arête.

Des calculs explicites peuvent être menés sur les arbres binaires en utilisant des résultats de la théorie des processus de branchement de Galton-Watson, dont nous parlons au paragraphe 2.2.1. En effet, on peut voir la composante connexe de l'origine comme un arbre de Galton-Watson dont la loi des descendants est une loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$.

Nous allons commencer par étudier la probabilité critique de percolation. Puis nous nous intéresserons à la loi de la taille des composantes connexes, et nous donnerons le comportement de la queue de cette loi.

Proposition 2.1.8 ([25]). *La probabilité de percolation est donnée par*

$$\theta(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq \frac{1}{2} \\ 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 & \text{si } p \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

La probabilité critique de percolation est $p_c = \frac{1}{2}$.

Démonstration. La composante connexe de l'origine est finie si et seulement si l'arbre de Galton-Watson s'éteint. D'après le théorème 2.2.2, la probabilité d'extinction de l'arbre de Galton-Watson est la plus petite racine positive de l'équation $f(s) = s$, où f est la fonction génératrice de la loi $\mathcal{B}(2, p)$. Comme

$$f(s) = (1 - p + ps)^2,$$

on obtient le résultat cherché. \square

On peut aussi calculer les exposants critiques dans ce cas, mais nous n'en parlerons pas ici. Intéressons nous à la loi de la taille des composantes connexes. De la proposition précédente, on déduit que :

Proposition 2.1.9 ([25]). *Pour $p_c = \frac{1}{2}$, toutes les composantes connexes sont finies : $\theta(\frac{1}{2}) = 0$.*

Rappelons la définition d'une composante connexe pour la percolation d'arête.

$$C^e(x) = \{y \in V : \text{il existe un chemin d'arêtes ouvertes de } x \text{ à } y\}.$$

Ainsi une composante connexe contient nécessairement au moins un site et donc est de taille supérieure ou égale à un. En utilisant l'expression de la loi totale d'un arbre de Galton-Watson lorsqu'il s'éteint (ce qui arrive avec probabilité 1 en phase critique), on obtient les résultats suivants.

Proposition 2.1.10 ([25]).

1. La loi de la taille d'une composante connexe est donnée par

$$\forall k \geq 1, \mathbb{P}_p(|C^e| = k) = \frac{1}{k} \binom{2k}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{k+1}. \quad (2.4)$$

Si $p = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\forall k \geq 1, \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(|C^e| = k) = \frac{1}{k} \binom{2k}{k-1} \frac{1}{2^{2k}}. \quad (2.5)$$

2. L'espérance de la taille d'une composante connexe lorsque $p = p_c$ est infinie.

En utilisant l'expression précédente combinée à la formule de Stirling, on obtient le comportement de $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(|C^e| = k)$ lorsque k est grand.

Proposition 2.1.11 ([25]). Lorsque $k \rightarrow \infty$, on observe le comportement suivant de la loi de la taille d'une composante connexe :

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(|C^e| = k) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la théorie des processus de branchements, et présenter les principaux résultats dont nous aurons besoin dans le chapitre 4.

2.2 Processus de branchements

Nous allons nous intéresser à deux types de processus de branchement dans cette partie. Dans un premier temps, nous allons parler du processus de branchement le plus connu : les arbres de Galton-Watson. C'est un processus de branchement à temps discret et espace d'états discrets introduit pour l'étude de la transmission des noms de famille en Angleterre. Dans un second temps, nous allons parler d'une généralisation de ces processus à des espaces d'états continus, tout en conservant une évolution à temps discret.

2.2.1 Arbres de Galton-Watson

Nous avons principalement utilisé le livre de Harris [27] pour cette partie.

Les arbres de Galton-Watson ont été introduits en 1874 par Galton qui se posait des questions sur l'extinction des noms de famille en Angleterre. Watson s'est intéressé au problème et a été le premier à trouver des réponses, d'où le nom d'arbre de Galton-Watson. On peut considérer beaucoup de modèles de populations, par exemple des modèles avec immigration, des modèles où l'on fait intervenir l'âge des individus, des modèles avec plusieurs types d'individus... Nous ne parlerons ici

que du cas le plus simple, où l'on étudie la lignée des descendants “ mâles ”, vecteurs de la transmission du nom de famille. On garde en mémoire la génération des individus mais pas leur date de naissance. Les seuls liens de parenté auxquels on s'intéresse sont les relations père-fils. Ce modèle, dans ses différentes versions, a de nombreuses applications en biologie et en physique, même si le fait que les individus se reproduisent indépendamment les uns des autres pose parfois problème dans les applications.

Ce modèle concerne l'étude d'une population dont les individus se reproduisent indépendamment les uns des autres, selon la même loi. C'est un modèle à temps discret : chaque étape correspond à l'apparition d'une nouvelle génération. En représentant chaque individu par un site et en reliant les pères et fils par une arête, on obtient un arbre. Comment se comporte la taille de chaque génération ? Est-ce que la lignée s'éteint ? Si oui, quelle est la taille de la population totale ? Ce sont quelques questions auxquelles nous allons essayer d'apporter des réponses.

Commençons par définir plus précisément le modèle. Soit $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de réels de l'intervalle $[0, 1]$ dont la somme vaut 1. Le réel p_i représente la probabilité qu'un individu ait i enfants. La suite $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est appelée la loi des descendants. Notons Z_n la variable aléatoire représentant la taille de la n -ième génération. Il suffit d'étudier le cas des arbres ayant un seul ancêtre. En effet, si $Z_0 = k \geq 1$, le processus de Galton-Watson est alors constitué de k copies indépendantes de processus de Galton-Watson à un seul ancêtre. Chaque individu de la n -ième génération a des enfants indépendamment selon la loi des descendants. Ainsi Z_{n+1} est la somme de Z_n variables aléatoires indépendantes de même loi. Ainsi le processus de Galton-Watson $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov dont l'espace d'états est \mathbb{N} . Récapitulons cela dans la définition suivante.

Définition 2.7 (Processus de Galton-Watson, [27]). *Soit $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une loi de probabilité sur \mathbb{N} : $\forall k \in \mathbb{N}, p_k \in [0, 1]$ et $\sum_{k \geq 0} p_k = 1$. Cette loi est appelée loi des descendants. Un processus de Galton-Watson est une chaîne de Markov $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur les entiers positifs. Les probabilités de transitions $\mathbb{P}(Z_{n+1} = j | Z_n = i)$ sont définies à l'aide des deux assertions suivantes :*

- Si $Z_n = 0$, alors $Z_{n+1} = 0$ presque sûrement.
- Si $Z_n = k \geq 1$, alors la loi de Z_{n+1} est la loi de la somme de k variables aléatoires i.i.d suivant la loi des descendants.

Considérons dans toute la suite de ce paragraphe un processus de Galton-Watson noté $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dont la loi des descendants est donnée par une famille $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses de la définition 2.7. Nous allons faire quelques hypothèses supplémentaire sur ce processus pour la suite. Nous allons supposer que $Z_0 = 1$. Si $p_0 = 1$, le processus s'éteint tout de suite. S'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $p_k = 1$, alors le processus ne s'éteint jamais, et on obtient un arbre régulier si $Z_0 = 1$. Nous allons donc supposer que l'on ne se trouve pas dans l'un de ces cas. Nous allons aussi supposer que $p_0 + p_1 < 1$, pour que la fonction génératrice définie ci après soit strictement convexe.

On observe différents comportements du processus en fonction de l'espérance de la loi des descendants. En effet, on peut penser que si un individu a en moyenne

moins d'un enfant, la lignée a plutôt tendance à s'éteindre. Si au contraire il a en moyenne plus d'un enfant, la lignée a des chances de ne pas s'éteindre. Nous verrons que cette intuition sera confirmée.

Définition 2.8 (Paramètre m , [27]). *Notons $m = \mathbb{E}(Z_1)$ l'espérance de la loi des descendants. Le processus est dit sous-critique lorsque $m < 1$, critique lorsque $m = 1$, et sur-critique lorsque $m > 1$.*

Les fonctions génératrices des variables aléatoires Z_n sont très utilisées dans l'étude des arbres de Galton-Watson. Par exemple on les utilise pour déterminer la probabilité d'extinction de l'arbre comme nous le verrons un peu plus loin.

Définition 2.9 (Fonction génératrice, [27]). *Si $Z_0 = 1$, la fonction génératrice f de la variable aléatoire Z_1 est définie par*

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k) s^k. \quad (2.6)$$

Les itérées f_n de la fonction f sont définies par :

$$\begin{cases} f_0(s) = s \\ f_{n+1}(s) = f(f_n(s)) \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Nous noterons $f^{(i)}$ la i -ième dérivée de f .

Il n'est pas évident de calculer le fonction génératrice de Z_n . On peut relier la fonction génératrice de Z_n à celle de Z_1 de la manière suivante.

Théorème 2.2.1 ([27]). *La fonction génératrice de Z_n est la n -ième itérée f_n de la fonction f . De plus,*

$$\mathbb{E}(Z_n) = m^n.$$

Intéressons nous maintenant à la question de l'extinction de la lignée.

Définition 2.10 ([27]).

1. *Nous appellerons extinction l'évènement "la suite $(Z_n)_n$ est nulle à partir d'un certain rang". Comme la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs entières, cet évènement est égal à l'évènement $\{Z_k \rightarrow 0\}$.*
2. *Nous noterons q la probabilité d'extinction :*

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \mathbb{P}(Z_n \rightarrow 0).$$

3. *Nous appellerons explosion l'évènement $\{Z_k \rightarrow \infty\}$.*

Théorème 2.2.2 (Probabilité d'extinction, [27]). *Si $m = \mathbb{E}(Z_1) \leq 1$, la probabilité d'extinction est 1. Sinon la probabilité d'extinction q est la plus petite racine positive de l'équation $f(s) = s$.*

Si le processus ne s'éteint pas, est-il possible qu'il se stabilise en une valeur ? Le théorème suivant nous dit que soit le processus s'éteint, soit il explose.

Théorème 2.2.3 (Théorème d'extinction ou explosion, [27]).

Un processus de Galton-Watson s'éteint ou explose :

$$\mathbb{P}(\{Z_k \rightarrow \infty\}) = 1 - \mathbb{P}(\{Z_k \rightarrow 0\}).$$

Ce résultat semble contraire au comportement des populations étudiées en biologie, qui ont tendance à se stabiliser autour d'une valeur. En général, ce modèle devra être un peu complexifié pour répondre aux questions des biologistes.

Nous allons nous intéresser au comportement de Z_n pour n grand dans le cas sur-critique. En effet c'est seulement dans ce cas que la probabilité d'explosion est non nulle. L'objectif est de trouver une suite $(c_n)_n$ telle que $c_n Z_n$ converge en loi vers une variable aléatoire non dégénérée. Lorsque m est fini, une première idée est de prendre $c(n) = m^n$.

Théorème 2.2.4 (Cas sur-critique, [27]). *Si $Z_0 = 1$, $1 < m < \infty$ et $Var(Z_1) < \infty$ alors*

$$\frac{Z_n}{m^n} \xrightarrow{d} W,$$

où W est une variable aléatoire non dégénérée telle que $\mathbb{P}(W = 0) = q$.

Remarque 5. Si $m = \infty$, Seneta [39] a montré qu'il n'existait pas de suite de constantes normalisantes $(c_n)_n$ telle que $c_n Z_n$ converge en loi vers une variable aléatoire non dégénérée. Nous verrons un résultat similaire pour les processus de branchement à espace d'états continu dans le paragraphe 2.2.2.

Il y a d'autres versions de ce théorème dans la littérature, notamment avec des hypothèses plus faibles ou bien en considérant le cas sous-critique conditionné par la non extinction au temps n . Nous ne les citons pas ici car nous n'aurons pas besoin des ces résultats.

Dans le cas critique, Kolmogorov a obtenu un résultat sur le comportement de la probabilité d'extinction lorsque n est grand.

Théorème 2.2.5 (Cas critique, [27]). *Si $m = 1$ et $f^{(3)}(1) < \infty$, alors lorsque n tend vers l'infini,*

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim \frac{2}{nf^{(2)}(1)}.$$

Sous les mêmes hypothèses, on peut obtenir un résultat sur la loi de Z_n lorsque n est grand, montrant le caractère d'évènement rare lorsque n devient grand.

Théorème 2.2.6 (Cas critique, [27]). *Si $m = 1$ et $f^{(3)}(1) < \infty$, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{2Z_n}{nf^{(2)}(1)} > u \mid Z_n \neq 0\right) = e^{-u}.$$

Intéressons nous maintenant à la loi de la taille totale du processus lorsque celui-ci s'éteint. Comme la suite $(Z_n)_n$ est constituée d'entiers positifs, la somme des variables aléatoires Z_n est bien définie et peut valoir $+\infty$. Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^n Z_k \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k. \quad (2.8)$$

Supposons que l'évènement d'explosion se produise. Comme on travaille avec une suite d'entiers, la somme totale S est alors infinie. Sur l'évènement d'extinction, la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang et donc la somme S est finie. On obtient donc le premier résultat suivant :

Proposition 2.2.7 (Loi de la taille totale, [16]).

$$\mathbb{P}(S < +\infty) = q.$$

D'après le théorème 2.2.1, l'espérance des sommes partielles S_n est

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=0}^n m^k. \quad (2.9)$$

Ainsi par le théorème de convergence monotone, on obtient l'espérance de la limite S .

Proposition 2.2.8 ([16]). *L'espérance de la taille totale d'un processus de Galton-Watson est donnée par :*

$$\mathbb{E}(S) = \begin{cases} \frac{1}{1-m} & \text{si } m < 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons f_S la fonction génératrice de S , où par convention pour $S = +\infty$, $f_S(s) = 0$ si $s \in [0, 1[$ et $f_S(1) = 1$. Alors on a le résultat suivant, où f est la fonction génératrice de la taille de la première génération Z_1 :

Proposition 2.2.9 ([16]). *Supposons que $p_0 > 0$. Alors*

Si $m \leq 1$, $s \in [0, 1] \mapsto f_S(s)$ est l'inverse de la fonction $s \in [0, 1] \mapsto \frac{s}{f(s)}$.

Si $m > 1$, $s \in [0, 1[\mapsto f_S(s)$ est l'inverse de la fonction $s \in [0, q[\mapsto \frac{s}{f(s)}$.

Théorème 2.2.10 (Loi de la taille totale, [16]). *Soit $(\xi_i)_i$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi des descendants. Alors la loi de la taille totale S de l'arbre est donnée par :*

$$\forall n \geq 1, \mathbb{P}(S = n) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = n - 1).$$

Nous allons maintenant nous intéresser à des processus de branchement à temps discret et à espace d'états continu, qui sont une généralisation des processus de Galton-Watson.

2.2.2 Processus de branchement à espace d'états continu

Nous venons d'étudier les processus de Galton-Watson. Considérons une suite indexée par n de tels processus, chacun renormalisé par constante a_n . Un processus limite possible serait alors un processus de branchement à temps discret mais cette fois à espace d'états continu. Un tel processus existe-t-il? Nous allons voir que la réponse est affirmative. Des processus limites à temps et espace d'états continus existent aussi, mais nous n'en parlerons pas ici.

Dans tout ce paragraphe, nous citerons les résultats de Kallenberg [29]. Nous allons énoncer principalement les résultats qui seront utilisés dans le chapitre 4, et non donner une liste complète des résultats de cette théorie. Nous commencerons par donner la définition des processus de branchement à espace d'états continu. Puis nous nous intéresserons à la probabilité d'extinction d'un tel processus, notion qui va être un peu différente de celle des arbres de Galton-Watson. Nous continuerons ensuite avec l'étude de la taille totale d'un tel processus. Finalement, nous nous intéresserons au comportement de la taille de la n -ième génération pour de grandes valeurs de n .

2.2.2.1 Définition

On aimerait généraliser la notion d'arbre de Galton-Watson à des processus toujours à temps discret mais à espace d'états continus. Pour cela, on ne va pas partir de la définition classique d'un processus de Galton-Watson mais on va utiliser un point de vue un peu différent.

Revenons un instant sur les arbres de Galton-Watson. Notons $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le processus de Galton-Watson de loi des descendants ν et tel que $Z_0 = k \in \mathbb{N}$. On peut dire que pour tout i , $Z_{i+1} = \sum_{j=1}^{Z_i} Y_j$ où Y_j est de loi ν . Ceci revient à se donner une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de loi ν que l'on va sommer par paquets successifs. On obtient Z_1 en sommant les $Z_0 = k$ premières variables de cette suite. Puis Z_2 est obtenue en sommant les Z_1 variables suivantes, etc. La propriété de branchement nous dit qu'un arbre ayant $n + m$ ancêtres a la même loi que deux arbres indépendants ayant n et m ancêtres respectivement.

Comment va-t-on généraliser la loi des descendants et la propriété de branchement? Comme nous ne pouvons plus parler d'un individu, la loi des descendants sera définie pour une "unité" d'individu, c'est-à-dire pour un intervalle $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Pour généraliser la propriété de branchement, l'idée va être d'utiliser des lois infiniment divisibles. Pour une "unité" de parents, on souhaiterait faire le même raisonnement que précédemment. Si l'on coupe l'intervalle $[0, 1]$ en k parties $[a_k, b_k]$, on aimerait que la loi du processus avec une "unité" d'ancêtre soit la même que la somme de k processus indépendants avec $b_k - a_k$ ancêtres. Ainsi, la loi du "nombre" de descendants d'une "unité" de parents va devoir être infiniment divisible pour respecter la propriété de branchement.

Avant de définir le processus de branchement à espace d'états continu, définissons

tout d'abord la notion de subordonateur.

Définition 2.11. (*Subordonateur, [29]*) Un processus stochastique $\{X_t; t \in [0, \infty[$ est un subordonateur s'il a des accroissements indépendants et stationnaires, et si pour presque toute trajectoire $X(t, \omega)$:

1. $X(0, \omega) = 0$
2. $X(\cdot, \omega)$ est continu à droite en 0
3. $X(\cdot, \omega)$ est càdlàg sur $]0, \infty)$
4. $X(1, \omega) \geq 0$.

La propriété suivante est très utile pour définir un subordonateur.

Proposition 2.2.11 (Existence de subordonateurs, [10]).

1. Si $\{X_t; t \in [0, \infty[$ est un subordonateur, alors $X(1)$ est infiniment divisible.
2. La réciproque est aussi vraie : Soit X une variable aléatoire infiniment divisible. Alors il existe un unique subordonateur $\{X_t; t \in [0, \infty[$ tel que $X(1) \stackrel{d}{=} X$.

Nous pouvons maintenant passer à la définition d'un processus de branchement à espace d'états continu.

Définition 2.12 (CSBP, [29]). Soit $\{X_t; t \in [0, \infty[$ un subordonateur et un réel $c > 0$. Pour tout entier n , on définit

$$S_n = \sum_{i=0}^n Z_k, \quad \text{où} \quad \begin{cases} Z_0 & = c \\ Z_{n+1} & = X(S_n) - X(S_{n-1}) \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Alors $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus de branchement à espace d'état continu. La loi de $X(1)$ est appelée la loi des descendants. Nous utiliserons l'abréviation CSBP pour désigner ces processus.

Sauf mention contraire, pour la suite de cette partie, considérons un CSBP $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subordonateur X tel que $Z_0 = 1$.

Introduisons maintenant quelques quantités utiles pour l'étude des CSBP. La définition sera suivie de quelques remarques sur ces quantités.

Définition 2.13 ([29]).

- Nous allons considérer les deux probabilités suivantes :

$$r = \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0) \text{ et } q = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0).$$

- L'espérance de la loi des descendants est notée m :

$$m = \mathbb{E}(Z_1).$$

- Notons h_n la transformée de log-Laplace des variables aléatoires Z_n , et simplement h celle de Z_1 .

$$\forall n \in \mathbb{N}, h_n(s) = -\log \mathbb{E}(\exp(-sZ_n)).$$

- Soit a le premier point d'accroissement de la fonction de répartition de Z_1 :

$$a = \inf\{x; \mathbb{P}(Z_1 \leq x) > 0\}.$$

Pour les processus à valeurs entières, les probabilités q et r sont égales et correspondent à la probabilité d'extinction de l'arbre de Galton-Watson. Par contre, pour les processus à valeurs réelles, on peut avoir la convergence de Z_n vers 0 sans que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit nulle à partir d'un certain rang (par exemple si $Z_n = 2^{-n}$). Ainsi, on a toujours $q \leq r$, et on peut avoir l'inégalité stricte pour les processus sur \mathbb{R} . Dans notre travail, nous utiliserons principalement la probabilité r .

Comme pour les processus de Galton-Watson, l'espérance de la loi des descendants, notée m ici, joue un rôle important. On observe des comportements différents selon la valeur de m . Le processus est dit sous-critique lorsque $m < 1$, critique lorsque $m = 1$, sur-critique lorsque $m > 1$ et explosif lorsque $m = \infty$. Cependant, pour les processus continus, la valeur de m seule ne suffira plus à distinguer les différents types de comportement du processus. Nous aurons besoin d'utiliser le paramètre a . Nous donnerons plus de précisions sur les effets du paramètre a dans le paragraphe 2.2.2.4.

Tout comme les fonctions génératrices jouent un rôle important dans l'étude des processus de Galton-Watson, nous verrons que les fonctions h_n sont très utiles pour l'étude des CSBP.

Le lemme suivant traduit la propriété de branchement du CSBP $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemme 2.2.12 (Lemme 3.1.3 de [29]). *Pour tout réel $s > 0$ et tout entier n ,*

$$\mathbb{E}(e^{-sZ_{n+1}} | Z_0, Z_1, \dots, Z_n) = e^{-h(s)Z_n}.$$

Nous allons tout d'abord étudier la probabilité d'extinction du CSBP. Nous allons voir que pour les processus continus on a le même résultat d'extinction ou explosion que pour les arbres de Galton-Watson (théorème 2.2.3). Puis nous allons étudier la taille totale du CSBP. Finalement nous regarderons le comportement du processus sur les événements $\{Z_k \rightarrow 0\}$ et $\{Z_k \rightarrow \infty\}$ dans le cas explosif ($m = \infty$).

2.2.2.2 Étude de la probabilité d'extinction

Dans ce paragraphe, nous allons citer des résultats vrais quelque soient les valeurs de a et m .

Pour les processus de Galton-Watson, la fonction génératrice de Z_1 joue un rôle important, notamment pour sa propriété de convexité. Par contre lorsque le processus est à valeurs réelles, cette propriété de convexité est perdue en général. C'est pour cela que l'on s'intéresse plutôt à sa transformée log-Laplace, notée h ici, qui va être concave. Nous allons voir que l'on peut par exemple déterminer la probabilité d'extinction r via h .

Théorème 2.2.13 (Théorème 3.3.1 de [29]). *La transformée de log-Laplace de la variable aléatoire Z_n vérifie les propriétés suivantes.*

$$\forall s \in]0, \infty[, \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(s) = -\log(r).$$

De plus, l'une des trois assertions suivantes est vraie :

1. $\forall s \in]0, \infty[, h(s) < s$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(s) = 0$.
2. $\exists s_0 \in]0, \infty[$ tel que $h(s_0) = s_0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(s) = s_0$.
3. $\forall s \in]0, \infty[, h(s) > s$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(s) = \infty$.

Nous allons plutôt nous intéresser à la probabilité r dans l'étude des CSBP car la probabilité q peut être nulle dans certains cas :

Théorème 2.2.14 (Théorème 3.3.2 de [29]). *La probabilité d'extinction q vérifie :*

$$q = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$$

Dans l'étude du modèle de croissance au chapitre 4, nous serons dans le cas où $q = 0$.

Nous avons vu que la taille des générations d'un processus de Galton-Watson ne pouvait pas se stabiliser en une valeur non nulle. Qu'en est-il pour les processus continus ?

Théorème 2.2.15 (Théorème 3.3.3 de [29], théorème d'extinction ou explosion).

$$\mathbb{P}(\lim_{k \rightarrow \infty} Z_k = 0) = 1 - \mathbb{P}(\lim_{k \rightarrow \infty} Z_k = \infty).$$

Nous venons de voir que soit le processus s'éteint, soit il explose. Une question que l'on peut se poser concerne l'existence d'une suite normalisante $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\alpha_n Z_n$ converge vers une limite Z vérifiant $\mathbb{P}(0 < Z < \infty) > 0$. Pour beaucoup de processus explosifs, de telles suites normalisantes n'existent pas.

Intéressons nous maintenant à la taille totale d'un CSBP.

2.2.2.3 Étude de la taille totale du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$

Comme chaque terme Z_k est positif, on peut définir la limite S des sommes partielles des tailles des n premières générations.

Définition 2.14 (Taille totale). *La taille totale du CSBP $(Z_k)_{k \geq 0}$ est définie par :*

$$S := \sum_{k=0}^{\infty} Z_k$$

Dans un processus de Galton-Watson où l'espace d'états est discret, les événements $\{Z_k \rightarrow 0\}$ et $\{S < \infty\}$ sont les mêmes. Par contre, ce n'est plus forcément le cas ici dans le cas où l'espace d'états est continu. En fait, nous allons voir que ces deux événements ont même probabilité. Nous utiliserons la notation suivante pour l'inverse à gauche d'une fonction :

$$f^{\text{inv}}(s) = g(s) \Leftrightarrow g(f(s)) = s. \quad (2.10)$$

Théorème 2.2.16 (Théorème 3.3.6 de [29]). *Notons $k(s) = -\log(\mathbb{E}(\exp(-sS)))$. Alors*

1. *La fonction k satisfait l'équation*

$$k(s) = s + h(k(s)) \quad \text{si } s \in [0, \infty).$$

2. *Soit $s \in [0, \infty)$. Alors*

$$\begin{cases} k(s) = \{s - \log(r) - h(s - \log(r))\}^{\text{inv}} - \log(r) & \text{si } r > 0 \\ k(s) = \infty & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

3. $\mathbb{P}(S < \infty) = \mathbb{P}(\lim_{k \rightarrow \infty} Z_k = 0) = r$.

En prenant la convention $X(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t)$, on obtient l'équation suivante vérifiée par la taille totale S .

Théorème 2.2.17 (Théorème 3.3.7 de [29]). *La taille totale S du CSBP $(Z_k)_{k \geq 0}$ satisfait presque sûrement l'équation suivante :*

$$S = 1 + X(S).$$

On peut en déduire la valeur de la taille totale S à partir du subordonateur X .

Corollaire 2.2.18 ([29]). *La taille totale S du CSBP $(Z_k)_{k \geq 0}$ est presque sûrement donnée par :*

$$S = \inf\{t \geq 0, X(t) = X(t-) \leq t - 1\}. \quad p.s.$$

Nous allons maintenant étudier plus particulièrement le comportement de la taille des générations dans le cas des processus explosifs.

2.2.2.4 Comportement des CSBP dans le cas explosif

Plaçons nous maintenant dans le cas où l'espérance m est infinie. Nous avons vu que soit le processus s'éteint, soit il explose (théorème 2.2.15). Ces deux évènements ayant une probabilité positive de se produire, nous allons nous intéresser au comportement des CSBP sur ces deux évènements : $\{Z_n \rightarrow \infty\}$ et $\{Z_n \rightarrow 0\}$. Nous allons seulement parler des cas qui vont nous intéresser dans le chapitre 4, c'est-à-dire lorsque $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et $a = 0$.

Le seul cas qui va être vraiment différent par rapport au comportement des processus de Galton-Watson est celui où $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. En effet, pour des processus à valeurs entières, cela conduit à la non extinction du processus puisque chaque individu a au moins un descendant. Par contre, pour un processus sur \mathbb{R} , cela n'empêche pas l'évènement $\{Z_n \rightarrow 0\}$ de se produire.

Dans la plupart des cas pour les processus explosifs, il n'existe pas de suite de réels strictement positifs $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $d_n Z_n$ converge en loi vers une limite non dégénérée. L'idée est alors de trouver une suite de fonction g_n telle que la suite

$g_n(Z_n)$ converge vers une limite non dégénérée. C'est ce type de résultats que nous allons énoncer dans les deux cas qui vont nous intéresser. Nous observerons une convergence exponentielle vers la limite dans les deux cas. Commençons par l'étude du CSBP sur l'évènement d'explosion.

Comportement sur $\{Z_k \rightarrow \infty\}$

Le comportement du processus dans ce cas est différent du comportement du processus dans le cas sur-critique ($1 < m < +\infty$). Les résultats qui vont vraiment nous intéresser pour la suite sont contenus dans les exemples d'application du lemme et du théorème, à savoir les résultats (2.11) et (2.12). Nous énonçons ici un résultat de convergence en loi et de convergence presque sûre pour une suite de la forme $(g_n(Z_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Ici, g_n sera une fonction logarithme.

Lemme 2.2.19 (Lemme 7.3.1 de [29]). *Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de transformées de log-Laplace de variables aléatoires positives $(X_n)_{n \geq 1}$. Supposons qu'il existe une suite d'entiers positifs $(b_n)_{n \geq 1}$ et une fonction de répartition w tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ et*

$$\text{si } 0 < t < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(-\log(1 - \exp(-t(b_n)^{-1}))) = -\log(w(t)).$$

Alors pour chaque réel $t > 0$ où w est continue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(b_n \log(1 + X_n) \leq t) = w(t).$$

L'exemple 7.3.2 de [29] est une application de ce lemme à un processus de branchement continu $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subordonateur défini par une variable aléatoire strictement stable de paramètre $\alpha \in (0, 1)$. Nous donnons ici le résultat de convergence obtenu. Dans le chapitre 4 nous donnerons la démonstration de cet exemple directement adaptée au cas que nous étudions dans ce chapitre.

$$\alpha^n \log(1 + Z_n) \xrightarrow{d} Z \tag{2.11}$$

avec $\mathbb{P}(Z \leq t) = \begin{cases} \exp(-\exp(-t)) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Énonçons maintenant le résultat de convergence presque sûre. La fonction c_n qui apparaît dans ce théorème est la fonction inverse de la transformée h_n introduite dans la définition 2.13.

Théorème 2.2.20 (Théorème 7.3.6 de [29]).

1. *Soit L une fonction décroissante sur $(0, \infty)$ telle que*

$$\lim_{x \searrow 0} L(x) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = 0.$$

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers positifs. Supposons que pour tout réel $s \in (0, -\log(r))$, la limite suivante existe et est à valeurs dans $(0, \infty)$:

$$\psi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n L(c_n(s)).$$

Supposons de plus que la fonction $\psi(s)$ est continue sur $(0, -\log(r))$. Alors il existe une variable aléatoire U telle que

$$a_n L(Z_n^{-1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} U \quad \text{et} \quad \begin{cases} U = 0 & \text{sur } \{Z_k \rightarrow 0\} \\ U \in]0, +\infty[\text{ p.s.} & \text{sur } \{Z_k \rightarrow \infty\} \end{cases}$$

2. Supposons de plus que L est à variations lentes en 0 et que ψ est strictement décroissante sur $(0, -\log(r))$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U \leq t) &= \exp(-\psi^{\text{inv}}(t)), t \in (t_0, t_1) \\ \text{où } t_0 &= \lim_{t \nearrow -\log(r)} \psi(t) \quad \text{et } t_1 = \lim_{t \searrow 0} \psi(t) \end{aligned}$$

Comme précédemment, l'exemple 7.3.7 de [29] est une application de ce théorème au même processus de branchement continu $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La démonstration sera également donnée dans notre cas particulier au chapitre 4.

$$\alpha^n \log(1 + Z_n) \xrightarrow{p.s.} U \tag{2.12}$$

$$\text{avec } \mathbb{P}(U \leq t) = \begin{cases} \exp(-\exp(-t)) & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{e} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Comportement sur $\{Z_k \rightarrow 0\}$

Comme dans le paragraphe précédent, nous allons nous intéresser à la convergence d'une suite de la forme $(g_n(Z_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Nous verrons en (2.13) et (2.14) que g_n est aussi une fonction logarithme dans ce cas. Comme nous sommes sur l'évènement d'extinction, nous allons commencer par un résultat sur le lien avec les processus sous-critique.

Que l'on soit dans les cas de processus sur-critiques ou explosifs, on peut se ramener à l'étude d'un processus sous-critique de la manière suivante.

Proposition 2.2.21. *Si $r > 0$, le processus Z conditionné à s'éteindre ($\{Z_k \rightarrow 0\}$) est équivalent à un processus \tilde{Z} sous critique avec $\tilde{m} = \mathbb{E}(\tilde{Z}_1 | \tilde{Z}_0) = h'(-\log(r))$.*

Cependant, nous sommes ici dans le cas $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et $a = 0$. Les techniques utilisées vont alors être différentes. Lorsque l'on étudie le processus sur $\{Z_k \rightarrow 0\}$ avec $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$, c'est le paramètre a qui va jouer un rôle, et non plus m , et les cas $a = 0$ et $a > 0$ vont être traités différemment.

Le comportement du processus sur $\{Z_k \rightarrow 0\}$ est proche de celui des processus explosifs sur $\{Z_k \rightarrow \infty\}$. En effet, le fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n(s)}{c_{n+1}(s)} = 0$ joue un rôle important dans les démonstrations des résultats, où c_n est la fonction inverse de la transformée h_n introduite dans la définition 2.13. Cette limite, qui vaut $\frac{1}{m}$ dans le cas sur-critique, est nulle si $m = \infty$, c'est-à-dire dans le cas explosif. Dans le cas que nous regardons ici, où $a = 0$, cette limite vaut a , et donc est nulle également.

Nous allons voir qu'il y a un parallèle entre les résultats de ce paragraphe et ceux obtenus précédemment.

Lemme 2.2.22 (Lemme 9.2.1 de [29]). *Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de transformées de log-Laplace de variables aléatoires positives $(X_n)_{n \geq 1}$. Supposons qu'il existe une suite d'entiers positifs $(b_n)_{n \geq 1}$, une fonction de répartition w et une constante $d > 0$ tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ et*

$$\text{si } t \in (-\infty, +\infty) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(de^{-t(b_n)^{-1}}) = -\log(w(t)).$$

Alors pour chaque réel t où w est continue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(b_n \log(X_n) < t) = w(t).$$

L'exemple 9.2.2 de [29] est une application de ce lemme à un processus de branchement continu $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subordonateur défini par une variable aléatoire strictement stable de paramètre $\alpha \in (0, 1)$. Nous donnons ici le résultat de convergence obtenu. La démonstration adaptée au cas que nous regardons dans le chapitre 4 sera donnée dans ce chapitre.

$$\alpha^n \log(Z_n) \xrightarrow{d} Z \tag{2.13}$$

avec $\mathbb{P}(Z \leq t) = \exp(-\exp(-t))$ si $t \in]-\infty, +\infty[$.

Remarque 6. Ce résultat étend le résultat de l'exemple 7.3.2 du paragraphe précédent.

On a également un résultat de convergence presque sûre :

Théorème 2.2.23 (Théorème 9.2.8 de [29]).

1. *Soit L une fonction croissante sur $(0, \infty)$ telle que*

$$\lim_{x \searrow \infty} L(x) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} L(x) = 0.$$

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers positifs. Supposons que pour tout réel $s \in (-\log(r), +\infty)$, la limite suivante existe et est à valeurs dans $(0, \infty)$.

$$\psi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n L(c_n(s)).$$

Supposons de plus que la fonction $\psi(s)$ est continue sur $(-\log(r), +\infty)$. Alors il existe une variable aléatoire U telle que

$$a_n L(Z_n^{-1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} U \quad \text{et} \quad \begin{cases} U = 0 & \text{sur } \{Z_k \rightarrow \infty\} \\ U \in]0, +\infty[\text{ p.s.} & \text{sur } \{Z_k \rightarrow 0\} \end{cases}$$

2. Supposons de plus que L est à variations lentes en $+\infty$ et que ψ est strictement croissante sur $(-\log(r), +\infty)$. Alors

$$\mathbb{P}(U \leq t) = 1 - \exp(-\psi^{\text{inv}}(t)), t \in (t_0, t_1)$$

$$\text{où } t_0 = \lim_{t \searrow -\log(r)} \psi(t) \text{ et } t_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)$$

Comme précédemment, l'exemple 9.2.10 de [29] est une application de ce théorème au même processus de branchement continu $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La démonstration sera également donné dans notre cas particulier au chapitre 4.

$$\alpha^n \log(1 + Z_n^{-1}) \xrightarrow{\text{p.s.}} U \tag{2.14}$$

avec $\mathbb{P}(U \leq t) = 1 - \exp(-\exp(t))$ si $t \geq 0$.

Ce résultat est bien en accord avec le résultat précédent de convergence en loi. En effet, sur $\{Z_k \rightarrow 0\}$,

$$\alpha^n \log(1 + Z_n^{-1}) \sim \alpha^n \log(Z_n^{-1}) = -\alpha^n \log(Z_n).$$

Ainsi $\mathbb{P}(-U \leq t) = \mathbb{P}(U \geq -t) = e^{e^{-t}}$. Et de plus $U > 0$ p.s. sur $\{Z_k \rightarrow 0\}$.

Nous allons maintenant donner un aperçu de la théorie des lois stables. Les résultats que nous allons donner dans cette partie seront principalement utilisés dans le paragraphe 2.4 où nous verrons le lien entre la loi de la taille des composantes connexes pour la percolation critique sur l'arbre binaire et les lois stables.

2.3 Lois stables

La loi des grands nombres et le théorème central limite sont deux théorèmes très utiles lorsque l'on étudie une somme de variables aléatoires i.i.d. Cependant l'utilisation de ces théorèmes nécessite des hypothèses d'espérance ou de variance finie de la loi des variables aléatoires considérées. Nous allons voir qu'il existe des résultats similaires pour des sommes de va i.i.d. de loi n'ayant pas de variance ni même d'espérance. Ces résultats vont faire entrer en jeu des lois aux propriétés particulières appelées loi stables. La théorie des lois stables a été développées dans les années 1920 et 1930 par Lévy et Khinchine. Les lois stables sont utiles pour modéliser la contribution d'un grand nombre de petits effets. Elles sont utilisées par exemple pour modéliser des champs gravitationnels, les prix des actions sur les marchés boursiers, les précipitations annuelles.

Dans cette partie, nous allons définir les lois stables puis donner quelques-unes de leur propriétés. Nous expliquerons ensuite le lien avec les sommes normalisées de variables aléatoires. Les références principales utilisées pour rédiger cette partie sont les livres de Feller [22], Samorodnitsky et Taqu [38].

2.3.1 Définitions

Plusieurs terminologies ont été utilisées dans l'étude des lois stables au fil des ans. Les termes quasi stables, stables et strictement stables ne désignent pas toujours exactement la même chose selon les ouvrages. Commençons par donner la définition des lois stables et les notations que nous utiliserons dans la suite pour les désigner.

Définition 2.15 (Loi stable, [22]). *Une variable aléatoire X suit une loi stable si pour tout entier $n \geq 2$, il existe deux réels $C_n > 0$ et D_n tels que si $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que X ,*

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n, \quad (2.15)$$

Si $D_n = 0$, on dit que X est de loi strictement stable.

Remarque 7. On peut montrer qu'il est suffisant de vérifier l'égalité (2.15) pour $n = 2$ et $n = 3$. ($n = 2$ seul ne suffit pas).

Proposition 2.3.1 ([22]). *Si X est une variable aléatoire de loi stable, alors nécessairement la constante C_n de (2.15) est de la forme $C_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ avec $0 < \alpha \leq 2$.*

Définition 2.16 (Exposant α , [22]). *Le paramètre α est appelé l'exposant caractéristique de la loi stable. C'est le paramètre principal des lois stables, et nous utiliserons la terminologie loi α -stable pour désigner une loi stable d'exposant α .*

La définition 2.15 implique que les lois stables sont infiniment divisibles.

Théorème 2.3.2 ([22]). *Si X , X_1 et X_2 sont des variables aléatoires de loi α -stable, alors pour tous réels $s > 0$ et $t > 0$,*

$$s^{\frac{1}{\alpha}} X_1 + t^{\frac{1}{\alpha}} X_2 = (s + t)^{\frac{1}{\alpha}} X$$

On peut définir de manière équivalente les lois stables par leur fonction caractéristique. Comme on ne connaît pas la densité des variables aléatoires α -stables en dehors de certains cas particuliers, cette expression est souvent utile.

Définition 2.17 ([22]). *Une variable aléatoire X suit une loi stable s'il existe quatre paramètres réels $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et μ telle que la fonction caractéristique de la variable aléatoire X est de la forme suivante :*

$$\mathbb{E}(\exp(isX)) = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha |s|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sign}(s) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})) + i\mu s\} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp\{-\sigma |s| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(s) \ln(|s|) + i\mu s)\} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Ces quatre paramètres sont uniques.

Remarque 8. Le cas $\alpha = 1$ est plus difficile que les autres donc il est souvent traité séparément. Cette difficulté vient notamment de la présence du logarithme dans l'expression de la fonction caractéristique.

Définition 2.18 (Notation, [38]). *Les lois stables étant caractérisées par les quatre paramètres de la définition 2.17, nous les noterons en général $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Nous avons vu que le paramètre α est l'exposant caractéristique de la loi stable. Les paramètres μ et σ sont des paramètres de position et d'échelle. Une variable aléatoire de loi $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ est à support dans $[\mu, +\infty[$. Le paramètre β est un paramètre d'asymétrie.*

Proposition 2.3.3 (Paramètre β , [22]). *Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Le paramètre β est égal à $p - q$ où les réels p et q sont définis par les conditions suivantes :*

$$\frac{F(-x)}{1 - F(x) + F(-x)} \rightarrow q \text{ et } \frac{1 - F(x)}{1 - F(x) + F(-x)} \rightarrow p \text{ lorsque } x \rightarrow \infty \quad (2.16)$$

Les variables aléatoires α -stable ont une densité continue, dont l'expression est rarement connue. Comme elles sont très utiles en modélisation, des méthodes efficaces pour les simuler ont été développées. Nous ne parlerons pas de ces méthodes de simulation ici. Donnons l'expression des trois densités qui sont connues :

★ Lorsque $\alpha = 2$, X est une variable aléatoire gaussienne. Si $X \sim \mathcal{S}_2(\sigma, 0, \mu) = \mathcal{N}(\mu, 2\sigma^2)$, sa densité est

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{4\sigma^2}\right). \quad (2.17)$$

★ Lorsque $\alpha = 1$, X suit une loi de Cauchy. Si $X \sim \mathcal{S}_1(\sigma, 0, \mu)$, sa densité est

$$f(x) = \frac{\sigma}{\pi((x - \mu)^2 + \sigma^2)}. \quad (2.18)$$

★ Lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$, X suit une loi de Lévy. Si $X \sim \mathcal{S}_{\frac{1}{2}}(\sigma, 1, \mu)$, sa densité est

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} \frac{1}{(x - \mu)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\frac{\sigma}{-2(x - \mu)}\right). \quad (2.19)$$

Donnons maintenant quelques propriétés vérifiées par les lois stables.

2.3.2 Quelques propriétés

Commençons par quelques propriétés algébriques des lois stables.

Proposition 2.3.4 ([38]). *Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires α -stables de paramètres respectifs σ_i , β_i et μ_i ($i = 1$ ou 2). Alors :*

1. $X_1 + X_2 \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, où $\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}$ et $\mu = \mu_1 + \mu_2$.
2. Si $a \in \mathbb{R}$, alors $X_1 + a \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma_1, \beta_1, \mu_1 + a)$.

3. Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\alpha \neq 1$, alors $aX_1 \sim \mathcal{S}_\alpha(|a|\sigma_1, \text{sign}(a)\beta_1, a\mu_1)$.
4. Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\alpha = 1$, alors $aX_1 \sim \mathcal{S}_1(|a|\sigma_1, \text{sign}(a)\beta_1, a\mu_1 - \frac{2}{\pi}a(\ln(|a|)\sigma_1\beta_1))$.

Nous allons voir que si $\alpha \neq 1$, on peut toujours se ramener à une variable aléatoire strictement stable, en considérant la variable aléatoire $X - \mu$.

Proposition 2.3.5 ([38]). *Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ avec $\alpha \neq 1$. Alors X est de loi strictement stable si et seulement si $\mu = 0$.*

Proposition 2.3.6 ([38]). *La transformée de Laplace d'une variable aléatoire X de loi $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, 1, 0)$ est*

$$\mathbb{E}(e^{-sX}) = \exp\left(-\frac{(\sigma s)^\alpha}{\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}\right) \quad \text{si } \alpha \neq 1$$

$$\mathbb{E}(e^{-sX}) = \exp\left(\sigma \frac{2}{\pi} s \ln(s)\right) \quad \text{si } \alpha = 1.$$

Un des intérêts des lois stables réside dans la décroissance en loi puissance de la queue de leur distribution.

Proposition 2.3.7 ([38]). *Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ avec $0 < \alpha < 2$. Alors*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^\alpha \mathbb{P}(X > \lambda) = [\Gamma(1 - \alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2})]^{-1} \frac{1 + \beta}{2} \sigma^\alpha \quad \text{si } \alpha \neq 1$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^\alpha \mathbb{P}(X < -\lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \beta}{2} \sigma^\alpha \quad \text{si } \alpha = 1.$$

Comme $\mathbb{E}(|X|^r) = \int \mathbb{P}(|X|^r > \lambda) d\lambda$, la proposition précédente permet d'obtenir un résultat sur les moments des lois stables.

Proposition 2.3.8 ([38]). *Soit X une variable aléatoire de loi α -stable. Alors*

$$\mathbb{E}(|X|^r) < \infty \quad \text{si } p < \alpha$$

$$\mathbb{E}(|X|^r) = \infty \quad \text{si } p \geq \alpha$$

Nous allons terminer cette troisième partie avec la notion de domaine d'attraction d'une loi stable, que nous allons beaucoup utiliser par la suite.

2.3.3 Étude de la somme de variables aléatoires

Nous allons voir maintenant une propriété très importante des lois stables. Elle sont caractérisées comme étant les seules limites possibles pour une suite de sommes renormalisées de variables aléatoires i.i.d. Ce résultat est une généralisation du théorème central limite. Commençons par définir la notion de fonction à variations lentes.

Définition 2.19 (Variations lentes, [22]). *Une fonction f est dite à variations lentes en $+\infty$ si pour tout réel $x > 0$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{tx}{t} = 1. \quad (2.20)$$

Définition 2.20 (Domaine d'attraction, [22]). *Une variable aléatoire est dans le domaine d'attraction d'une loi stable s'il existe une suite positive $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et des réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que*

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{d_n} + a_n \xrightarrow{d} X, \quad (2.21)$$

où $\{Y_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont des variables aléatoires i.i.d même loi que Y , et X est une variable aléatoire de loi stable.

Remarque 9. En général, $d_n = h(n)n^{\frac{1}{\alpha}}$ où h est une fonction à variations lentes à l'infini.

Nous allons maintenant voir que les lois stables sont les seules lois limites possibles d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

Théorème 2.3.9 ([22]). *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. positives et notons F la fonction de répartition de X_1 . Soit Y une variable aléatoire dont la loi ne charge aucun point, telle que*

$$(a_n)^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{d} Y. \quad (2.22)$$

1. *Alors il existe une fonction L à variations lentes et une constante $0 < \alpha < 1$ telle que*

$$1 - F(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{L(x)}{x^\alpha \Gamma(1 - \alpha)}. \quad (2.23)$$

2. *Réciproquement, si F est de la forme (2.23), il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que*

$$\frac{nL(a_n)}{a_n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (2.24)$$

Dans ce cas, (2.22) est vraie pour une variable aléatoire Y de loi stable de paramètre α et de transformée de Laplace au point $s > 0$ est donnée par la formule $\exp(-s^\alpha)$.

Ce théorème nous dit en particulier que les limites possibles de (2.23) sont des variables aléatoires stables différant seulement par un paramètre d'échelle.

Appliquons maintenant les résultats que nous venons de voir dans les premières parties de ce chapitre à l'étude de la loi de la taille des composantes connexes de la percolation critique de site sur l'arbre binaire.

2.4 Autour de la taille des composantes connexes

Dans les chapitres 4 et 5, nous allons utiliser la loi de la taille des composantes connexes d'un modèle de percolation de site critique sur l'arbre binaire. Nous allons ici adapter les résultats du paragraphe 2.1.3 traitant de la percolation d'arête sur un arbre binaire. Nous donnerons une expression de cette loi et quelques-unes de ses propriétés. Puis nous utiliserons les résultats développés dans le paragraphe 2.3 sur les lois stables pour montrer que cette loi appartient au domaine d'attraction d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$. Finalement, nous démontrerons une expression de la loi de la somme de la taille de composantes connexes dans ce cas.

2.4.1 Étude de la loi de la taille des composantes connexes

Intéressons nous tout d'abord au lien entre la loi de la taille des composantes connexes pour les deux types de percolation que nous avons définis. Nous rappelons la définition d'une composante connexe pour la percolation de site, où la notation $x \sim y$ veut dire que les sites x et y sont ouverts et reliés par un chemin ouvert.

$$C^s(x) = \{y \in V : \eta(y) = 1 \text{ et } y \sim x\}.$$

Cette composante connexe peut donc être vide si le site x est fermé. Cela arrive donc avec probabilité $1 - p$. Si le site x est ouvert, alors nous allons voir que la taille de la composante connexe pour la percolation de sites est donnée par la taille d'une composante connexe pour la percolation d'arête légèrement modifiée.

Comme nous allons beaucoup utiliser la loi de la taille des composantes connexes de la percolation critique de site sur l'arbre binaire, nous allons définir une notation pour la désigner.

Définition 2.21 (Loi ν_{cc}). *Nous noterons ν_{cc} la loi de la taille des composantes connexes de la percolation critique de site sur l'arbre binaire*

Commençons par donner une expression de la loi ν_{cc} .

Proposition 2.4.1. *La loi ν_{cc} de la taille d'une composante connexe est donnée par*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \nu_{cc}(k) = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(|C^s| = k) = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k+1}}.$$

Démonstration. Intéressons nous à la taille de la composante connexe du site x en fonction de l'état de ce site. Nous rappelons que $\eta(x)$ vaut 0 si le site x est fermé et 1 s'il est ouvert.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|C^s(x)| = k) &= \mathbb{P}(|C^s(x)| = k \cap \{\eta(x) = 1\}) + \mathbb{P}(|C^s(x)| = k \cap \{\eta(x) = 0\}) \\ &= \mathbb{P}(|C^s(x)| = k | \{\eta(x) = 1\}) \mathbb{P}(\{\eta(x) = 1\}) + \mathbb{P}(\eta(x) = 0) I_{k=0} \\ &= p \mathbb{P}(|C^e(x)| = k) I_{k \geq 1} + (1-p) I_{k=0}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.1.10,

$$\mathbb{P}_p(|C^e| = k) = \frac{1}{k} \binom{2k}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{k+1}. \quad (2.25)$$

d'où

$$\mathbb{P}(|C^s(x)| = k) = p \frac{1}{k} \binom{2k}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{k+1} I_{k \geq 1} + (1-p) I_{k=0}. \quad (2.26)$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \binom{2k}{k-1} &= \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \text{ et } \frac{1}{0+1} \binom{0}{0} = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(|C^s(x)| = k) &= \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} p^k (1-p)^{k+1}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ce résultat est encore vrai pour $p = \frac{1}{2}$, d'où la proposition. \square .

A partir des résultats des propositions 2.1.10 et 2.1.11, on obtient des résultats sur la loi de la taille des composantes connexes pour la percolation de sites.

Proposition 2.4.2.

1. L'espérance de la taille des composantes connexes est $\mathbb{E}(|C^s|) = \infty$.
2. Lorsque k tend vers $+\infty$, on obtient le comportement suivant de la loi de la taille des composantes connexes :

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(|C^s| = k) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme la série de terme général positif $k^{-\frac{3}{2}}$ converge, on peut utiliser le théorème de sommation des équivalents pour obtenir le comportement de la queue de la distribution de la taille des composantes connexes.

Proposition 2.4.3. Lorsque k tend vers $+\infty$,

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(|C^s| \geq k) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.28)$$

On peut exprimer la loi de la taille des composantes connexes à l'aide des nombres de Catalan. Commençons par donner la définition des nombres de Catalan ainsi que les propriétés qu'ils vérifient dont nous aurons besoin dans la suite de cette partie.

Définition 2.22 (Nombres de Catalan). *Les nombres de Catalan sont définis par la formule suivante :*

$$\begin{cases} \text{Cat}_0 = 1 \\ \text{Cat}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} \text{ si } n \geq 1. \end{cases} \quad (2.29)$$

Proposition 2.4.4.

$$1. \text{Cat}_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} \text{Cat}_n.$$

$$2. \text{Cat}_{n+1} = \sum_{k=0}^n \text{Cat}_k \text{Cat}_{n-k}.$$

3. La fonction génératrice des nombres de Catalan est donnée par la formule :

$$c(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}. \quad (2.30)$$

Ainsi, on obtient une expression de la loi de la taille d'une composante connexe à l'aide des nombres de Catalan :

$$\nu_{\text{cc}}(k) = \mathbb{P}(|C^s| = k) = \frac{1}{2^{2k+1}} \text{Cat}_k. \quad (2.31)$$

En utilisant l'expression de la fonction génératrice des nombres de Catalan vue dans la proposition 2.4.4, on obtient une expression de la fonction génératrice et de la transformée de Laplace de la loi de la taille des composantes connexes.

Proposition 2.4.5. 1. La fonction génératrice de la loi de la taille des composantes connexes est :

$$f_{|C^s|}(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - s}}{s}.$$

2. La transformée de Laplace de la loi de la taille des composantes connexes est :

$$\mathbb{E}(e^{-t|C^s|}) = e^t - e^t \sqrt{1 - e^{-t}} = e^t(1 - \sqrt{1 - e^{-t}}).$$

Intéressons nous maintenant au lien entre la loi ν_{cc} de la taille des composantes connexes et les lois stables.

2.4.2 Lien avec les lois stables

Nous allons montrer dans ce paragraphe que la loi ν_{cc} est dans le domaine d'attraction d'une loi $\frac{1}{2}$ -stable, dont nous allons calculer les paramètres apparaissant dans la définition 2.18 sous la forme $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

Proposition 2.4.6. La loi ν_{cc} de la taille des composantes connexes pour la percolation de sites de paramètre $\frac{1}{2}$ sur l'arbre binaire est dans le domaine d'attraction d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$. Plus précisément, cette loi stable est la loi $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, 1, 0)$.

Nous allons beaucoup utiliser cette loi stable dans les chapitres 4 et 5. Nous allons donc définir une notation simplifiée pour désigner cette loi.

Définition 2.23. La loi stable $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, 1, 0)$ de la proposition 2.4.6 sera notée $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$.

Dans la démonstration de la proposition 2.4.6 nous verrons une expression de la transformée de Laplace de la loi $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$ (équation (2.34)). Comme nous allons en avoir besoin au chapitre 4, nous la donnons explicitement ici.

Proposition 2.4.7 (Propriétés de $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$). *Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$. Alors ses transformées de Laplace et de log-Laplace sont données par les formules suivantes*

$$\forall s \geq 0, \mathbb{E}(e^{-sX}) = e^{-\sqrt{s}} \text{ et } h(s) = \sqrt{s}. \quad (2.32)$$

Démontrons maintenant la proposition. Nous allons utiliser le théorème 2.3.9 pour montrer que la loi ν_{cc} est dans le domaine d'attraction d'une loi $\frac{1}{2}$ -stable. Les propriétés des lois stables données au paragraphe 2.3 vont nous permettre de déterminer les paramètres.

Démonstration. Commençons par montrer que la loi ν_{cc} est dans le domaine d'attraction d'une loi $\frac{1}{2}$ -stable. Dans l'objectif d'utiliser le théorème 2.3.9, intéressons nous à la queue de la loi ν_{cc} . Soit $|C|$ une variable aléatoire de loi ν_{cc} .

En utilisant l'équivalent obtenu à la proposition 2.4.3 et le fait que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, on obtient

$$\mathbb{P}(|C| \geq n) \sim \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.33)$$

Ainsi d'après le théorème 2.3.9, la loi ν_{cc} est dans le domaine d'attraction d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$. Soit S une variable aléatoire suivant cette loi. Alors ce même théorème nous donne une expression de sa transformée de Laplace :

$$\forall s \geq 0, \mathbb{E}(e^{-sS}) = \exp(-\sqrt{s}). \quad (2.34)$$

Nous avons vu à la définition 2.18 que les lois stables sont caractérisées par 4 paramètres. Nous venons de voir que $\alpha = \frac{1}{2}$. Déterminons les autres paramètres. Comme les variables aléatoires $\{|C_i|\}_{i \geq 1}$ sont positives, on obtient $\mu = 0$. De la proposition 2.3.3, comme le support de la loi est $[0, +\infty[$, on obtient que $\beta = 1 - 0 = 1$. De l'expression de la transformée de Laplace obtenue par le théorème 2.3.9, on va en déduire la valeur du paramètre σ .

Nous avons vu à la proposition 2.3.6 que la transformée de Laplace d'une variable aléatoire X de loi stable $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}(\sigma, 1, 0)$ est

$$\mathbb{E}(e^{-sX}) = \exp\left(-\frac{(\sigma s)^{\frac{1}{2}}}{\cos(\frac{\pi}{4})}\right). \quad (2.35)$$

De l'expression (2.34) on en déduit que $\sigma = \frac{1}{2}$. □

Pour finir cette partie, nous allons donner une expression de la loi de la somme de variables aléatoires indépendantes de loi ν_{cc} , c'est à dire la loi de la somme de tailles de composantes connexes.

2.4.3 Loi de la somme de la taille des composantes connexes

Dans cette partie, nous allons donner une expression de la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi ν_{cc} , pour tout n . Dans tout ce paragraphe, nous sommes dans le cas de la percolation de site sur l'arbre binaire et nous omettons l'indice 's'.

Pour obtenir la proposition suivante, nous avons tout d'abord essayé de trouver une formule générale pour la somme de n termes en calculant explicitement cette somme pour $n \leq 5$. Puis nous avons montré par récurrence la formule obtenue. Pour les calculs de la loi de petites sommes, nous avons utilisé la fonction génératrice de la taille d'une composante connexe, élevée à la puissance correspondante. La probabilité cherchée est obtenue par une égalité de séries entières.

Proposition 2.4.8 (Loi de la somme de la taille des composantes connexes). *Soit n un entier strictement positif. Soit $\{|C_i|\}_{1 \leq i \leq n}$ et $|C|$ des variables aléatoires indépendantes de loi ν_{cc} . La loi de la somme des variables aléatoires $\{|C_i|\}_{1 \leq i \leq n}$ est donnée par l'expression suivante :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n |C_i| = k\right) = n \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{k+j}{k+n-(j-1)} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(|C| = k + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor). \quad (2.36)$$

Lorsque $n = 2$ et 3 , on obtient les expressions suivantes :

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^2 |C_i| = k\right) = 2 \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(|C| = k + 1) \quad (2.37)$$

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^3 |C_i| = k\right) = 3 \frac{k+1}{k+3} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(|C| = k + 2). \quad (2.38)$$

Démonstration. Nous allons montrer cette formule par récurrence sur n . Posons l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{P}(n) : \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n |C_i| = k\right) = n \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{k+j}{k+n-(j-1)} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(|C| = k + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor). \quad (2.39)$$

• Initialisation. En prenant la convention que le produit dans (2.39) vaut 1 si $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = 0$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Comme les variables aléatoires $\{|C_i|\}_i$ sont indépendantes, on peut écrire

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+1} |C_i| = k\right) = \sum_{m=0}^k \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n |C_i| = m\right) \mathbb{P}(|C| = k - m) \quad (2.40)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+1} |C_i| = k\right) = \sum_{m=0}^k n \underbrace{\prod_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{m+j}{m+n-(j-1)}}_b \underbrace{\mathbb{P}(|C| = m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \mathbb{P}(|C| = k-m)}_a \quad (2.41)$$

Nous allons simplifier l'expression du produit ab pour tout entier n , en étudiant séparément les cas où n est pair et impair.

★ Expression de a :

Que n soit pair ($n = 2N$) ou impair ($n = 2N + 1$), la valeur de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est N , d'où

$$a = \frac{1}{2^{2(k+N+1)}} \frac{[2(m+N)]!}{(m+N)!(m+N+1)!} \frac{[2(k-m)]!}{(k-m)!(k-m+1)!} \quad (2.42)$$

★ Expression de b :

Si $n = 2N$ est pair, alors $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = N - 1$, d'où

$$b = \frac{(m+N-1)!(m+N+1)!}{m!(m+n)!} \quad (2.43)$$

Si $n = 2N + 1$ est impair ($= 2N + 1$), $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = N$, d'où

$$b = \frac{(m+N)!(m+N+1)!}{m!(m+n)!} \quad (2.44)$$

★ Expression de ab :

Si $n = 2N$ est pair, alors

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{2^{2k+2N+2}} \frac{[2(m+N)]!}{(m+N)m!(m+n)!} \frac{[2(k-m)]!}{(k-m)!(k-m+1)!} \\ &= \frac{1}{2^{2k+2N+1}} \frac{[2(m+N)]!}{2(m+N)m!(m+n)!} \frac{[2(k-m)]!}{(k-m)!(k-m+1)!} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Remplaçons maintenant $2N$ par n :

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{2^{2k+n+1}} \frac{[2m+n]!}{(2m+n)m!(m+n)!} \frac{[2(k-m)]!}{(k-m)!(k-m+1)!} \\ &= \frac{1}{2^{2k+n+1}} \frac{[2m+n-1]!}{m!(m+n)!} \frac{[2(k-m)]!}{(k-m)!(k-m+1)!} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Si $n = 2N + 1$ est impair, alors

$$ab = \frac{1}{2^{2k+2N+2}} \frac{[2(m+N)]!}{m!(m+2N)!} \frac{[2(k-m)]!}{(k-m)!(k-m+1)!} \quad (2.47)$$

Remplaçons maintenant $2N + 1$ par n :

$$ab = \frac{1}{2^{2k+n+1}} \frac{[2m+n-1]!}{m!(m+n)!} \frac{[2(k-m)]!}{(k-m)!(k-m+1)!} \quad (2.48)$$

Ainsi, que n soit pair ou impair, on obtient la même expression du produit ab . On en déduit une expression de $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{n+1} |C_i| = k)$ à partir de (2.41) :

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1} |C_i| = k\right) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{2^{2k+n+1}} \frac{[2m+n-1]!}{m!(m+n)!} \frac{[2(k-m)]!}{(k-m)!(k-m+1)!} \quad (2.49)$$

On veut montrer que

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1} |C_i| = k\right) = (n+1) \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{k+j}{k+n+1-(j-1)} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(|C| = k + \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor). \quad (2.50)$$

De même, en séparant les cas n pair et n impair, montrons que

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1} |C_i| = k\right) = (n+1) = 2^{-(n+2k+1)} \frac{(2k+n)!}{(k+n+1)!k!}. \quad (2.51)$$

Pour simplifier les calculs, notons

$$L_{n,k} = \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{k+j}{k+n+1-(j-1)} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(|C| = k + \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor). \quad (2.52)$$

Si $n = 2N$ est pair, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = N$, d'où

$$L_{n,k} = 2^{-(2N+2k+1)} \frac{(k+1) \dots (k+N)}{(k+2N+1) \dots (k+N+2)} \frac{(2N+2k)!}{(N+k+1)!(k+N)!} \quad (2.53)$$

$$= 2^{-(2N+2k+1)} \frac{(k+N)!(k+N+1)!(2N+2k)!}{k!(k+2N+1)!(N+k+1)!(k+N)!} \quad (2.54)$$

$$= 2^{-(n+2k+1)} \frac{(2k+n)!}{(k+n+1)!k!} \quad (2.55)$$

Si $n = 2N + 1$ est impair, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = N$ et $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = N + 1$, d'où

$$L_{n,k} = 2^{-(2N+2k+3)} \frac{(k+1) \dots (k+N)}{(k+2N+2) \dots (k+N+3)} \frac{(2N+2k+2)!}{(N+k+2)!(k+N+1)!} \quad (2.56)$$

$$= 2^{-(2N+2k+3)} \frac{(k+N)!(k+N+2)!2(N+k+1)(2N+2k+1)!}{k!(k+2N+2)!(N+k+2)!(k+N+1)!} \quad (2.57)$$

$$= 2^{-(n+2k+1)} \frac{(2k+n)!}{(k+n+1)!k!} \quad (2.58)$$

D'où l'égalité restant à montrer, que n soit pair ou impair :

$$(F_{n+1,k}) : n \sum_{m=0}^k \frac{(2m+n-1)!}{(m+n)!m!} \frac{[2(k-m)]!}{(k-m)!(k-m+1)!} = \frac{n+1}{k+n+1} \frac{(2k+n)!}{k!(k+n)!}. \quad (2.59)$$

En utilisant les nombres de Catalan et la notation $A(m, n+1) = \frac{(2m+n-1)!}{(m+n)!m!}$, l'équation précédente se réécrit de la manière suivante.

$$(F_{n+1,k}) : n \sum_{m=0}^k A(m, n+1) \text{Cat}_{k-m} = \frac{n+1}{k+n+1} \frac{(2k+n)!}{k!(k+n)!}. \quad (2.60)$$

Pour démontrer cette formule, on va utiliser l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ pour différents entiers k de manière indirecte. Si pour un entier k_1 l'égalité de $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors la formule F_{n,k_1} est aussi vraie. Nous allons donc utiliser l'hypothèse de récurrence sur les expressions $(F_{n,k'})$ pour tous les entiers $k' \leq k+1$ dans la suite. Commençons par utiliser l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ pour $k' = k+1$. L'expression $(F_{n,k+1})$ est alors vraie. Ainsi le membre de droite de $(F_{n,k+1})$, noté D , est

$$D = (n-1) \sum_{m=0}^{k+1} A(m, n) \text{Cat}_{k+1-m}. \quad (2.61)$$

D'après la proposition (2.4.4), $\text{Cat}_{k+1-m} = \sum_{i=0}^{k-m} \text{Cat}_i \text{Cat}_{k-m-i}$ d'où

$$D = (n-1)A(k+1, n) + (n-1) \sum_{m=0}^k A(m, n) \sum_{i=0}^{k-m} \text{Cat}_i \text{Cat}_{k-m-i} \quad (2.62)$$

$$= (n-1)A(k+1, n) + \sum_{i=0}^k \text{Cat}_i \left[(n-1) \sum_{m=0}^{k-i} A(m, n) \text{Cat}_{k-i-m} \right]. \quad (2.63)$$

La dernière égalité est obtenue en permutant les deux sommes. Utilisons maintenant l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ pour l'expression entre crochets. L'équation $(F_{n,k'})$ est vraie pour les entiers $k' \leq k-i$, et on obtient

$$D = (n-1)A(k+1, n) + \sum_{i=0}^k \text{Cat}_i \frac{n}{k-i+n} \frac{(2(k-i)+n-1)!}{(k-i)!(k-i+n-1)!} \quad (2.64)$$

$$= (n-1)A(k+1, n) + n \sum_{i=0}^k \text{Cat}_i A(k-i, n+1). \quad (2.65)$$

Le changement de variable $j = k-i$ dans la somme nous permet d'obtenir le membre de gauche de l'égalité $(F_{n+1,k})$ à montrer :

$$D = (n-1)A(k+1, n) + n \sum_{j=0}^k \text{Cat}_{k-j} A(j, n+1). \quad (2.66)$$

Comme D est le membre de droite de $(F_{n,k+1})$, il est égal au membre de gauche et donc

$$\begin{aligned} D - (n-1)A(k+1, n) &= \frac{n+1}{k+n+1} \frac{(2k+n)!}{k!(k+n)!} - (n-1) \frac{(2(k+1)+n-2)!}{(k+1+n-1)!(k+1)!} \\ &= \frac{(2k+n)!}{(k+1)!(k+n)!} \left[\frac{n(2k+n+1)}{k+n+1} - (n-1) \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Comme

$$\frac{n(2k+n+1)}{k+n+1} - (n-1) = \frac{(k+1)(n+1)}{k+n+1}, \quad (2.68)$$

on obtient finalement $(F_{n+1,k})$:

$$n \sum_{j=0}^k \text{Cat}_{k-j} A(j, n+1) = \frac{n+1}{k+n+1} \frac{(2k+n)!}{k!(k+n)!}. \quad (2.69)$$

□

Chapitre 3

Mesure invariante

L'objectif de ce chapitre est de prouver l'existence de mesures invariantes pour le processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d pour $d \geq 2$. Comme les processus de feux de forêt sont des processus de Markov non Feller, nous ne pouvons pas utiliser ici les arguments classiques de l'étude des systèmes de particules ([32]). Nous utiliserons la méthode de Brouwer et Pennanen pour l'étude sur \mathbb{Z} [15], combinée avec certains outils introduits par Dürre dans sa thèse [21] pour l'étude sur \mathbb{Z}^d , pour $d \geq 2$.

Ce chapitre fait l'objet d'un article soumis à publication [41], il est donc rédigé en anglais. Comme nous avons défini les processus de feux de forêt en détails dans le chapitre 1, nous ne mettons pas la partie introductive de [41] dans ce chapitre. Dans la première partie de ce chapitre, nous introduisons des notations qui seront utilisées dans la preuve du résultat. Dans la deuxième partie, nous présentons les outils développés par Dürre dans sa thèse [21] pour contrôler l'influence des sites éloignés. Dans la troisième partie, nous montrons le résultat d'existence d'une mesure invariante pour les processus de feux de forêt définis sur \mathbb{Z}^d pour $d \geq 2$. Nous terminons ce chapitre par un paragraphe sur la question de l'existence de mesures invariantes sur d'autres graphes infinis.

3.1 Notations

Unless stated otherwise, in this section, G will denote a connected graph with a vertices set V and an edges set E . A bound on the vertex degree of the graph G will be denoted by d_G .

For $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$, $|x|_\infty = \sup \{|x_i|, i = 1 \dots d\}$ and $|x|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$.

The expression *the graph* \mathbb{Z}^d will refer to a graph with vertices set $V^{(d)} = \mathbb{Z}^d$ and edges set $E^{(d)}$ corresponding to the hypercubic lattice : $E^{(d)} = \{ \{x, y\} \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : |x - y|_1 = 1 \}$.

The site $(0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ will be called the origin. We will work with specific finite

subsets of \mathbb{Z}^d called boxes, and defined by

$$B_k = \{x \in \mathbb{Z}^d : |x|_\infty \leq k\}.$$

Here k is called the radius of the box B_k .

The set of neighbors of a finite set of sites S is called the boundary of S :

$$N(S) = \{x \in V \setminus S, \exists y \in S \text{ linked by an edge in } E \text{ to } x\}.$$

We can define the set $\bar{S} = S \cup N(S)$.

Let $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ be the set of all possible configurations and $\mathcal{B}(X)$ the associated borel σ -field. Let μ be a measure on $(X, \mathcal{B}(X))$. For a finite subset J of \mathbb{Z}^d we denote by $\mu|_J$ the restriction of μ to J . For a forest-fire process $\bar{\eta}$ with an initial configuration with law μ , let us denote by $P^\mu(\eta_t \in \cdot)$ its distribution at time t .

3.2 Tools introduced by Dürre

In this model, the problem is to control the influence of long-distance sites. Two notions introduced by Dürre in his thesis will be used in this paper. The first one is a condition on the tail of the distribution of cluster size, named CCSB. The second one is a process, called the blur-process, used to study the influence on a given site of long-distant sites. Throughout this section, forest-fire processes on connected graphs will be considered.

3.2.1 CCSB condition

An important quantity to consider here is the size of clusters. In his thesis, Dürre restricted to forest-fire processes with initial configurations satisfying what he called the conditioned cluster size bound condition to prove the uniqueness. In order to use his results, we will need to use this conditioned cluster size bound condition.

This condition is a constraint on the cluster size distribution. It implies a uniform bound on the cluster size distribution. It is stronger in the sense that the result still holds when conditioning by the event that a specific configuration of a finite number of sites outside the cluster occurs.

Definition 3.1. (*conditioned cluster size bound, CCSB, [21]*) For all $s \geq 0$, $\delta \geq 0$ and $m \in \mathbb{N}$, $\bar{\eta}$ has CCSB(s, δ, m) if it has the following property. Let B and D be two finite subsets of V and $x \in V \setminus D$. Then conditioned on the occurrence of the event $\cup_{y \in B} C_{s,y} = D$, the probability that the size of the cluster at x is larger than m at time s is smaller than or equal to δ . And almost surely the cluster at x is finite at time s .

More formally, for all finite $B, D \subset V$, for all $x \in V \setminus D$,

$$P\left(\{|C_{s,x}| > m\} \cap \left\{\bigcup_{y \in B} C_{s,y} = D\right\}\right) \leq \delta P\left(\bigcup_{y \in B} C_{s,y} = D\right) \quad (3.1)$$

$$\text{and } P(|C_{s,x}| = \infty) = 0. \quad (3.2)$$

For example, consider a configuration where the size of all the clusters is smaller than an integer m , or a configuration obtained by sub-critical or critical site percolation on \mathbb{Z}^d . Then, a forest-fire process with one of these initial configurations satisfy a $\text{CCSB}(0, \delta, m)$ condition.

A natural question to ask is whether a forest-fire process satisfies a CCSB condition. If the forest-fire process has a CCSB at time 0, then the following theorem states that after a certain time the answer is yes. The uniformity in time and in δ will be useful in the proof of the result.

Theorem 3.2.1. *(Theorem 2 in [21]) Consider a forest-fire process $\bar{\eta}$ on G with parameter $\lambda > 0$ that satisfies $\text{CCSB}(0, \frac{\lambda}{4d_G^2}, m)$ for some integer m . Then for all real number $\gamma > 0$, for all $\delta \in]0, 1]$, there exists an integer $m_{\gamma, \lambda, d_G}(\delta)$ such that for all time $s \geq \gamma$, $\bar{\eta}$ has $\text{CCSB}(s, \delta, m_{\gamma, \lambda, d_G}(\delta))$.*

To prove this theorem, Dürre showed that it was true for finite-volume forest-fire processes, and then used the almost sure convergence to the infinite-volume forest-fire process to conclude. To prove the result for finite-volume forest-fire processes, he showed that one can find an integer m such that the probability that the size of $C_{t,x}$ is bigger than m is small. The explicit formula for this integer, called $m_{\gamma, \lambda, d_G}(\delta)$ in Theorem [21] is given in the following definition. It results from the different cases considered in the proof.

Definition 3.2. $(m_{\gamma, \lambda, d_G}(\delta), [21])$

$$m_{\gamma, \lambda, d_G}(\delta) = \left(\left\lceil \left(\frac{8d_G^3(N_{\gamma, \lambda, d_G}(\delta) - 1)}{2\delta\lambda} + 1 \right) \vee (M_{\gamma, \lambda, d_G}(\delta) \vee d_G) \right\rceil \right)^{N_{\gamma, \lambda, d_G}(\delta)},$$

$$\text{where } N_{\gamma, \lambda, d_G}(\delta) = \left\lceil \frac{\ln(2) - \ln(\delta)}{\ln(d_G + \lambda) - \ln(d_G)} \right\rceil, \quad M_{\gamma, \lambda, d_G}(\delta) = \left\lceil \frac{\ln(8) - \ln(7\delta)}{\lambda \epsilon_{\gamma, \lambda, d_G}(\delta)} \right\rceil$$

$$\text{and } \epsilon_{\gamma, \lambda, d_G}(\delta) = \left\{ -\ln \left(1 - \frac{\delta}{8d_G(N_{\gamma, \lambda, d_G}(\delta) - 1)} \right) \right\} \wedge \gamma.$$

3.2.2 Blur process

We turn now to the blur-process. The aim of this process is to control the influence of long-distant sites on a given site. This process is associated with a forest-fire process $\bar{\eta}$, and defined from an initial time t_0 and a finite set S . The blur process indicates if the state of a site $x \in \bar{S}$ at time $t \geq t_0$ might be influenced by the state of the sites located outside the set S at time t_0 . If it might, the site is said to be (t_0, S) -blurred at time t . The word "might" is important here. It means that the blur-process is a domination of the process of the real influence from outside S . If the site x is not (t_0, S) -blurred at time t , its state at time t can be recovered by using only the configuration at time t_0 and the Poisson processes of the sites in the set S .

The value of the (t_0, S) -blur process at a site $x \in \bar{S}$ at a time t is either 2 if the site is blurred or 0 otherwise. Once a site is blurred, it is blurred forever. The set of blurred sites at t_0 is $N(S)$ and the clusters in $\eta(t_0)$ intersecting the boundary of S . As time evolves, this set grows toward the site x , due to births of trees that create new occupied paths. Here is the formal definition of the blur process.

Definition 3.3. (*Blur process, [21]*) Let $t_0 \geq 0$ and $S \subset V$ a finite subset. The (t_0, S) -blur process $(\beta_{s,x})_{s \geq t_0, x \in \bar{S}}$ is a process with values in $\{0, 2\}^{\bar{S}}$, right continuous that has the following properties. For all site x in \bar{S} ,

- the site x is (t_0, S) -blurred **at time** t_0 if and only if its cluster is connected to the boundary of S :

$$\beta_{t_0, x} = \begin{cases} 2 & \text{if } \bar{C}_{s,x} \cap N(S) \neq \emptyset \\ 0 & \text{else,} \end{cases}$$

- once a site is (t_0, S) -blurred, it remains (t_0, S) -blurred forever :

$$\text{if } \beta_{s,x} = 2, \text{ then } \forall s' \geq s, \beta_{s',x} = 2,$$

- the site x is (t_0, S) -blurred **at time** $s > t_0$ if and only if the set $\bar{C}_{s,x}$ contains a site that has been (t_0, S) -blurred before time s :

$$\{\beta_{s,x} = 2\} = \left\{ \exists z \in \bar{C}_{s,x} \cap \bar{S} : \beta_{s^-,z} = 2 \right\}.$$

Like for the configuration process, the notation $\beta(t)$ will be used for $\{\beta_{t,x}\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$.

It seems that the bigger the set S is, the longer it takes for the site x to be S -blurred. What happens when the size of the set S tends to infinity? Is there a non empty interval during which a site is not influenced by "infinity"? The answer is given by the following proposition, assuming a CCSB condition is satisfied by the forest-fire process.

Proposition 3.2.2. (*Proposition 2 in [21]*) For all $m \in \mathbb{N}$, there exists $\epsilon_m > 0$ with the following property. Let $t \geq 0$ and suppose that the forest-fire process has

$CCSB(t, \frac{\lambda}{4d^2}, m)$. Then for all sites x in V , as n tends to infinity, the probability that the site x is (t, B_n) -blurred at time $t + \epsilon_m$ tends to zero :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\beta_{t+\epsilon_m, x} = 2) = 0.$$

Remark. The real number $\epsilon_m > 0$ is chosen such that $P(G_{0, \epsilon_m} > 0) < \frac{1}{4md_G}$, where G_{0, ϵ_m} is the event that there is at least an occurrence in $[0, \epsilon_m]$ of a Poisson process with intensity 1.

This proposition is slightly different from the one written in [21]. The additional hypothesis of almost-sure convergence at time t is omitted here. Actually Dürre has shown that it is always satisfied for a forest-fire process having a $CCSB$ condition at time zero.

We turn now to the proof of the existence of at least one stationary translation-invariant distribution for the forest-fire process on \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$.

3.3 Existence of stationary measures on \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$

Let us consider here forest-fire processes on \mathbb{Z}^d , for $d \geq 2$ with parameter $\lambda > 0$. Since the existence of forest-fire processes on \mathbb{Z}^d is known yet for initial configurations that contain no infinite clusters, we will consider only such forest-fire processes in this section. The main result of this section is stated below.

Theorem 3.3.1. *A forest-fire process on \mathbb{Z}^d with $d \geq 2$, with parameter $\lambda > 0$ has at least one stationary translation-invariant distribution.*

This section is divided into two parts. The first section explains the construction of the candidate for the stationary distribution. The second section is devoted to the proof of Theorem 3.3.1.

3.3.1 A candidate distribution

To prove the existence of a stationary distribution, we exhibit a distribution and then show that it is stationary. The aim of this section is to explain how the candidate distribution is obtained. The idea is to use forest-fire processes on finite graphs. To get the translation-invariance property of the stationary distribution, a modified version of the boxes B_k will be used.

3.3.1.1 Definition of “finite volume” forest-fire processes

Let k be a non negative integer.

The first step is to define a graph. Contrary to what was mentioned above, the graph defined below is infinite. The fact that the process defined on it will behave like a finite-volume forest-fire explains why it is called “finite volume”.

Define a graph $G_k = (V^{(d)}, E_k)$. The set of sites is $V^{(d)} = \mathbb{Z}^d$. The set of edges E_k is bigger than the set of edges of the graph \mathbb{Z}^d . Some edges constructed from the box B_k will be added. The goal is to make opposite sites of the interior boundary of B_k neighbors.

Recall that $E^{(d)}$ is the set of edges corresponding to the hypercubic lattice of \mathbb{Z}^d (see Section 3.1).

Define now the additional set of edges A_k . For all indices j in $\{1, \dots, d\}$, consider a site with the j -th coordinate equal to k and the other coordinates in the set $\{-k, \dots, k\}$. It is an interior boundary point. Then consider the opposite boundary site, i.e. the site with its j -th coordinate equal to $-k$ and the other coordinates exactly the same as the first site. Then A_k consists in the edges between such pair of points for the whole interior boundary of B_k . More formally, for each $j \in \{1, \dots, d\}$ the edges between the following couples of sites are in A_k :

$$\{(i_1, \dots, i_j, \dots, i_d); (i_1, \dots, -i_j, \dots, i_d)\} \text{ with } \begin{cases} i_l = k & \text{if } l = j \\ i_l \in \{-k, \dots, k\} & \text{if } l \neq j. \end{cases}$$

Then the set E_k is the union of the sets $E^{(d)}$ and A_k .

In Figure 3.1, a part of the additional edges for the graph G_2 restricted to the box $B_2 \subset \mathbb{Z}^2$ are drawn.

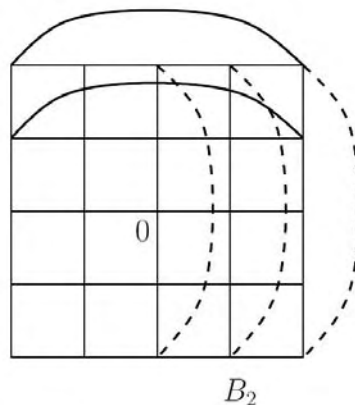


FIGURE 3.1 – Example of additional edges for the graph G_2

Compared to the graph \mathbb{Z}^d , at most d edges to each interior boundary site of B_k is added in the graph G_k . So the vertex degree of G_k is uniformly bounded by $d_f = 3d$, instead of $2d$ for \mathbb{Z}^d . Let us denote $d_f = 3d$ this bound.

The extra edges are not necessary to prove the existence of a stationary distribution but there are used to prove that the stationary distribution is translation-invariant.

Now the graph is defined, the second step is to consider a particular forest-fire process on this graph.

Definition 3.4. A G_k -forest-fire process $\bar{\eta}^k$ with parameter $\lambda > 0$ is a forest-fire process on the graph G_k with parameter $\lambda > 0$ with all the sites outside B_k always empty : for all times $t \geq 0$, for all sites $x \in B_k^c$, $\eta_{t,x}^k = 0$.

This forest-fire process behaves like a forest-fire process on B_k where the opposite sites of the interior boundary are neighbors. The dynamic does not take into account the Poisson processes corresponding to the sites located outside B_k . However, its configurations take values in $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. The G_k -forest-fire process can be seen as a forest-fire process on a discrete torus of dimension d .

3.3.1.2 Construction of the candidate measure

For each non negative integer k , let $\bar{\eta}^k$ be a G_k -forest-fire process. The configuration process η^k is a finite state-space Markov chain. Consider two possible states of this Markov chain ξ_1 and ξ_2 and study the probability that the state ξ_1 leads to ξ_2 . Consider the following event : all the occupied sites in ξ_1 are ignited and then a tree grows on each site which is occupied in ξ_2 . As the growths and ignitions are driven by independent Poisson processes, this event occurs with a non negative probability. Therefore, this Markov chain is irreducible, recurrent and aperiodic. Thus it has a unique invariant distribution, which will be denoted by μ^k .

Since the space $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ is compact, the sequence $(\mu^k)_{k \geq 0}$ has a weakly convergent subsequence. Let μ be its limit and \mathcal{K} the set of indices of the subsequence.

Theorem 3.3.2. *Let η be a forest-fire process on \mathbb{Z}^d with parameter $\lambda > 0$. Then μ is an invariant and translation-invariant probability measure for η .*

As mentioned above, the G_k -forest-fire process behaves exactly as a forest-fire process on a discrete torus. Thus each distribution μ^k can be seen as a measure on a discrete torus, where we have the rotation-invariance property. Here a translation on the graph G_k corresponds to a rotation on the discrete torus with $(2k + 1)^d$ points, due to the G_k -forest-fire process behavior. It follows that the weak limit μ is translation-invariant.

3.3.2 Proof of the result

The goal of this section is to prove Theorem 3.3.1. It follows from Theorem 3.3.2 stated above. This section is divided in three parts. The first part contains the proof of Theorem 3.3.2 assuming two lemma. The lemma are then proved in the second and third part.

3.3.2.1 Proof of Theorem 3.3.2

To show that the distribution μ is stationary, the idea is to couple a forest-fire process with initial configuration with law μ with G_k -forest-fire processes with initial configuration with law μ^k using the same Poisson processes. Then, the evolution of the processes will be compared using Dürre's tools.

A diagram of the main steps of the proof is given at the end of this first subsection.

Let λ and γ be two non negative real numbers.

For simplification, as λ and d_f are fixed here, let us denote by m_γ the real $m_{\gamma,\lambda,d_f}(\frac{\lambda}{4d_f^2})$ of Theorem 3.2.1 (recall that $d_f = 3d$, see Section 3.3.1.1).

Let $\epsilon > 0$ be a real number such that $P(G_{0,\epsilon} > 0) < \frac{1}{4m_\gamma d_f^2}$, where $G_{0,\epsilon}$ is the event that there is at least an occurrence in $[0, \epsilon]$ of a Poisson process with intensity 1.

The aim is to prove the following : for all times $t < \epsilon$, for all cylinder events A ,

$$P^\mu(\eta(t) \in A) = \mu(A). \quad (3.3)$$

Let t be a non negative real number such that $t < \epsilon$, and let A be a cylinder event.

Throughout this proof, two specific sets of sites will be used.

Since A is a cylinder event, it is determined by the configuration on a finite number of sites. Let I be the smallest box centered at the origin such that the event A can be described using only sites in I . There exists r_I such that $I = B_{r_I}$.

We will need to work with a set containing I but contained in B_k . Let L be a non negative integer and J be the box B_{r_I+L} . In order to simplify the notation, we will not write the dependence of J on L .

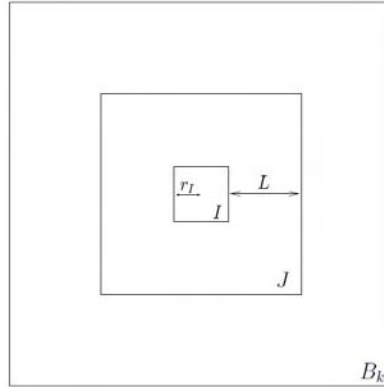


FIGURE 3.2 – Sets of sites

For the remainder of the proof, only integers $k \in \mathcal{K}$ satisfying the relation $k > r_I + L$ will be considered.

Using the construction of the candidate measure μ , a first upper bound is obtained :

$$|P^\mu(\eta(t) \in A) - \mu(A)| \leq |P^\mu(\eta(t) \in A) - \mu^k(A)| + |\mu^k(A) - \mu(A)|. \quad (3.4)$$

Since μ^k is an invariant distribution for a G_k -forest-fire process, the equality (3.3) is satisfied for μ^k . Turn now to study of the difference $|P^\mu(\eta(t) \in A) - P^{\mu^k}(\eta^k(t) \in A)|$.

Consider a forest-fire process on \mathbb{Z}^d and a G_k -forest-fire process, driven by the same Poisson processes on each site, and with initial configurations which coincide on J . Is it possible to find a time t when the two configurations on a site x in I are not the same? The answer is yes if (and only if) the configuration outside the box J influences the configuration in the box I during the time interval $[0, t]$ (through some fires outside J). Which events can allow influence on I from outside J ? If at a time t_0 in $[0, t]$ there exists a path of occupied sites linking a site in I to a site outside J , then a lightning falling in J^c can burn trees in I . That means, using the blur process, the existence of a site in the set I that is (t, J) -blurred.

However, in the difference we are interested in, the initial configuration of the two processes have the respective distribution μ and μ^k . In order to use our previous argument, we are going to optimally couple the measures $\mu_{|J}$ and $\mu_{|J}^k$. The coupling of $\mu_{|J}$ and $\mu_{|J}^k$ is said to be optimal here if it maximizes the weight of the diagonal of the product of the spaces of configurations. For two configurations ξ_1 with law $\mu_{|J}$ and ξ_2 with law $\mu_{|J}^k$, the optimal coupling ν satisfies $\nu(\xi_1 \neq \xi_2) = \inf_{\pi \in \mathcal{M}} \pi(\xi_1 \neq \xi_2)$, where \mathcal{M} is the set of all possible couplings of $\mu_{|J}$ and $\mu_{|J}^k$.

Now we couple a forest-fire process $\bar{\eta}$ on \mathbb{Z}^d with an initial configuration of law μ and the G_k -forest-fire process $\bar{\eta}^k$ with an initial configuration of law μ^k , by using the same Poisson processes and by optimally coupling $\mu_{|J}$ and $\mu_{|J}^k$. Then the following bound is obtained.

Lemma 3.3.3. *Let us denote by β the $(0, J)$ -blur process associated with η . Then,*

$$|P^\mu(\eta(t) \in A) - P^{\mu^k}(\eta^k(t) \in A)| \leq |I| \sup_{x \in I} P^\mu(\beta_{t,x} = 2) + 2 d_{TV}(\mu_{|J}, \mu_{|J}^k). \quad (3.5)$$

This lemma will be proved in the following section. The idea of the proof is to use the event "the initial configurations of the two processes coincide on J ". When it occurs, an upper bound is found using the blur process. Otherwise, the upper bound is given by the total variation between the two measures $\mu_{|J}$ and $\mu_{|J}^k$.

Using this lemma, the upper bound of the desired quantity is :

$$|P^\mu(\eta(t) \in A) - \mu(A)| \leq |I| \sup_{x \in I} P^\mu(\beta_{t,x} = 2) + 2 d_{TV}(\mu_{|J}, \mu_{|J}^k) + |\mu^k(A) - \mu(A)|. \quad (3.6)$$

The next step is to show that the upper bound of (3.6) tends to zero when k and L tend to infinity.

The distribution μ is the weak limit of a subsequence of $(\mu_k)_{k \geq 0}$. We first let k go to infinity along the set of indices \mathcal{K} . Since $k > \text{radius}(J) = r_I + L$, L does not depend on k and J is a finite set of sites, so :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mu^k(A) - \mu(A)| = 0 \quad (3.7)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_{TV}(\mu_{|J}, \mu_{|J}^k) = 0. \quad (3.8)$$

Recall that β is a $(0, J)$ -blur process. So the event $\{\beta_{t,x} = 2\}$ depends on L . To conclude we need to show that $\lim_{L \rightarrow \infty} P^\mu(\beta_{t,x} = 2) = 0$. This is given by Proposition 3.2.2 applied with $t = 0$ and $\delta = \frac{\lambda}{4d_f^2}$, provided the CCSB condition is satisfied. The purpose of the following lemma is to show that this hypothesis holds true.

Lemma 3.3.4. *For all non negative real number δ , a forest-fire process on \mathbb{Z}^d with parameter $\lambda > 0$, with an initial configuration with distribution μ , has $CCSB(0, \delta, m_{\gamma, \lambda, d_f}(\delta))$.*

Remark. *In the last parameter of the CCSB condition, the bound used for the vertex degree of \mathbb{Z}^d is $d_f = 3d$ and not $2d$ which is the optimal bound. This is due to our argument to prove this lemma, which uses the G_k -forest-fire process. Nevertheless this is sufficient here to show our theorem.*

Using Lemma 3.3.4 with $\delta = \frac{\lambda}{4d_f^2}$, we claim that a forest-fire process with an initial configuration with law μ has $CCSB(0, \frac{\lambda}{4d_f^2}, m_{\gamma, \lambda, d_f}(\frac{\lambda}{4d_f^2}))$.

By Proposition 3.2.2, there exists ϵ_{m_γ} such that for all site x in \mathbb{Z}^d , as L tends to infinity, the probability that the site x is $(0, J)$ -blurred at time ϵ_{m_γ} tends to zero. That is to say, with the choice of ϵ made here, that for all $t < \epsilon$, for all $x \in \mathbb{Z}^d$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P^\mu(\beta_{t,x} = 2) = 0.$$

Since $|I| < \infty$, this concludes the proof. \square

We conclude this part with a diagram of the main steps of the proof, located page 69.

3.3.2.2 Proof of Lemma 3.3.3

As mentioned in the proof of Theorem 3.3.2, the idea to prove this lemma is to use the event “the initial configurations of the two processes coincide on J ”. Then, the study differs depending on whether this event occurs or not. A diagram of the main steps of the proof is given at the end of the section.

Recall that we coupled a forest-fire process η on \mathbb{Z}^d with an initial configuration of law μ and the G_k -forest-fire process η^k with an initial configuration of law μ^k , by using the same Poisson processes on each site and by optimally coupling $\mu|_J$ and $\mu^k|_J$. Let ν be the distribution of the optimal coupling. We have

$$\begin{aligned} & |P^\mu(\eta(t) \in A) - P^{\mu^k}(\eta^k(t) \in A)| \\ &= |P^\nu((\eta(t), \eta^k(t)) \in A \times X) - P^\nu((\eta(t), \eta^k(t)) \in X \times A)|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Consider now the event “the initial configurations of the two processes coincide on J ”. Let $C_J = \{\eta(0)|_J = \eta^k(0)|_J\}$ be this event. Denote by C_J^c the complement of this event. Then we can upper bound the difference we are interested in :

$$|P^\mu(\eta(t) \in A) - P^{\mu^k}(\eta^k(t) \in A)| = |Dif + Eq| \leq |Dif| + |Eq| \quad (3.10)$$

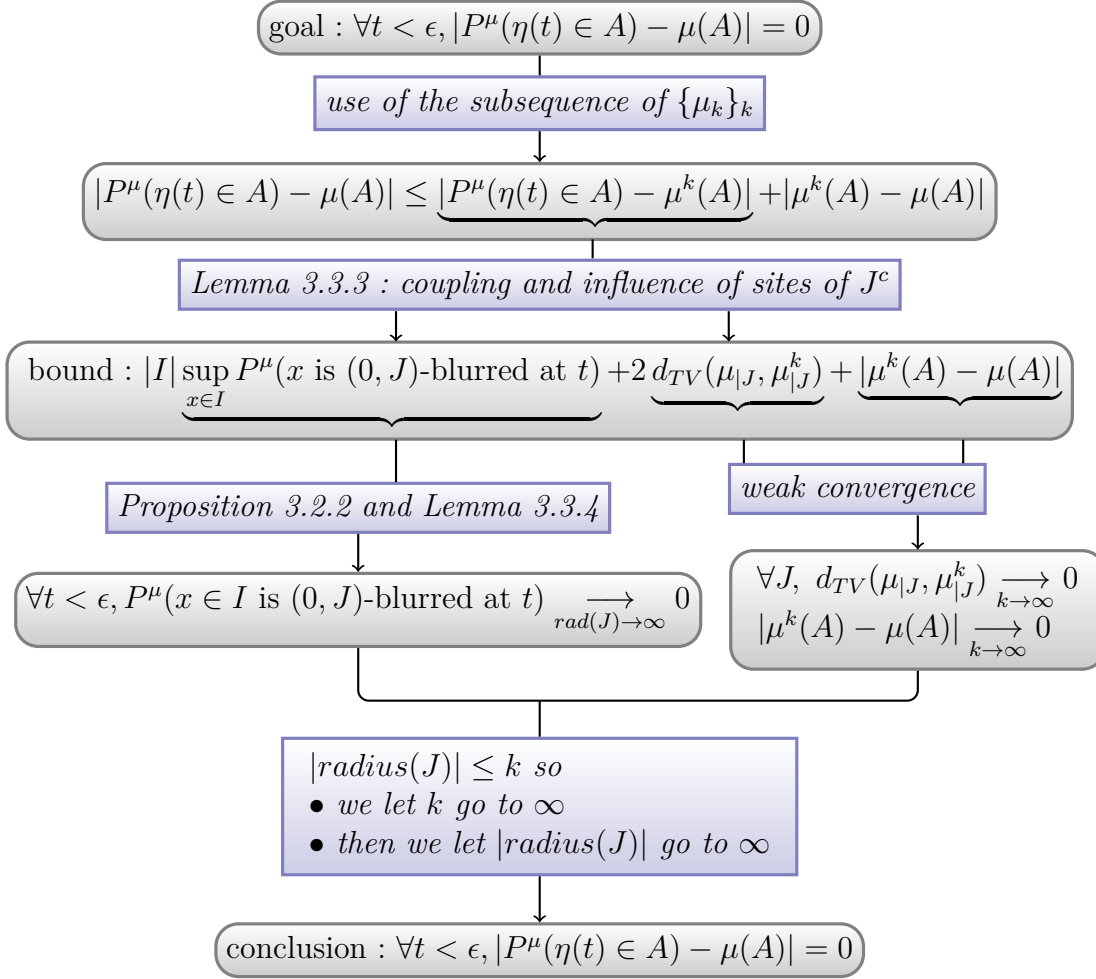


FIGURE 3.3 – Scheme of the proof

with

$$Dif = P^\nu\left([\eta(t), \eta^k(t)] \in A \times X\right] \cap C_J^c) - P^\nu\left([\eta(t), \eta^k(t)] \in X \times A\right] \cap C_J^c) \quad (3.11)$$

$$Eq = P^\nu\left([\eta(t), \eta^k(t)] \in A \times X\right] \cap C_J) - P^\nu\left([\eta(t), \eta^k(t)] \in X \times A\right] \cap C_J). \quad (3.12)$$

★ Study of Dif :

Since $\mu_{|J}$ and $\mu_{|J}^k$ are optimally coupled,

$$P^\nu(\eta(0)_{|J} \neq \eta^k(0)_{|J}) \leq d_{TV}(\mu_{|J}, \mu_{|J}^k)$$

and we get

$$|Dif| \leq 2 P^\nu(\eta(0)_{|J} \neq \eta^k(0)_{|J}) \leq 2 d_{TV}(\mu_{|J}, \mu_{|J}^k). \quad (3.13)$$

★ Study of Eq :

After using the Bayes formula in (3.12), we are interested in the difference

$$Eq = \left| P^\nu \left((\eta(t), \eta^k(t)) \in A \times X \mid C_J \right) - P^\nu \left((\eta(t), \eta^k(t)) \in X \times A \mid C_J \right) \right| \cdot P(C_J). \quad (3.14)$$

We can use indicator functions to rewrite the difference in the righthand term :

$$Eq = \left| E^\nu (1_{X \times A}(\eta(t), \eta^k(t)) - 1_{A \times X}(\eta(t), \eta^k(t)) \mid C_J) \right| \cdot P(C_J).$$

When is the difference $1_{X \times A}(\eta(t), \eta^k(t)) - 1_{A \times X}(\eta(t), \eta^k(t))$ non zero? It occurs only when $(\eta(t), \eta^k(t)) \in A^c \times A$ or when $(\eta(t), \eta^k(t)) \in A \times A^c$. These events occur when there exists a time $t_1 > 0$ and a site x in I where the two configurations are not the same, i.e. $\eta_{t_1, x} \neq \eta_{t_1, x}^k$. The two forest-fire processes are driven by the same Poisson processes and we conditioned by the event "their initial configurations coincide on J ". So this non equality must be the consequence of the influence of at least one cluster outside J on the box I . This is equivalent to the existence of a site in I whose state is influenced by the state of a site outside J . More precisely, there exists a site x in I which is $(0, J)$ -blurred at time t_1 .

Firstly we give some notations associated with the blur processes. We denote by β the $(0, J)$ -blur process associated with $\bar{\eta}$ and by β^k the $(0, J)$ -blur process associated with $\bar{\eta}^k$. To simplify the notation, we do not write the dependence in J (neither in L) of the blur processes. Let NB be the set of configurations where all the sites of the box I have the value 0 and NB_x be the set of configurations where the site x has the value 0.

Then with these notations we can write

$$|1_{X \times A}(\eta(t), \eta^k(t)) - 1_{A \times X}(\eta(t), \eta^k(t))| \leq 1_{NB^c \times NB^c}(\beta(t), \beta^k(t)).$$

So

$$\begin{aligned} |Eq| &\leq E^\nu (1_{NB^c \times NB^c}(\beta(t), \beta^k(t)) \mid C_J) P^\nu(C_J) \\ &\leq P^\nu \left((\beta(t), \beta^k(t)) \in NB^c \times NB^c \mid C_J \right) \cdot P^\nu(C_J) \end{aligned}$$

The $(0, J)$ -blur process associated with a forest-fire process is defined only with the Poisson processes on the sites of the set J and the initial configuration of the sites of the box J . We know that the two initial configurations coincide on J and that the two processes are driven by the same Poisson processes on each site. Thus, the blur processes β and β^k are the same. So

$$|Eq| \leq P^\mu(\beta(t) \in NB^c). \quad (3.15)$$

The complements of the events NB and NB_x satisfy the relation $NB^c = \bigcup_{x \in I} NB_x^c$, so

$$|Eq| \leq |I| \sup_{x \in I} P^\mu(\beta(t) \in NB_x^c). \quad (3.16)$$

★ Conclusion

Since $P^\mu(\beta(t) \in NB_x^c) = P^\mu(\beta_{t,x} = 2)$, using equations (3.13) and (3.16) we obtain the desired result.

$$|P^\mu(\eta(t) \in A) - P^{\mu^k}(\eta^k(t) \in A)| \leq 2 d_{TV}(\mu|_J, \mu|_J^k) + |I| \sup_{x \in I} P^\mu(\beta_{t,x} = 2).$$

□

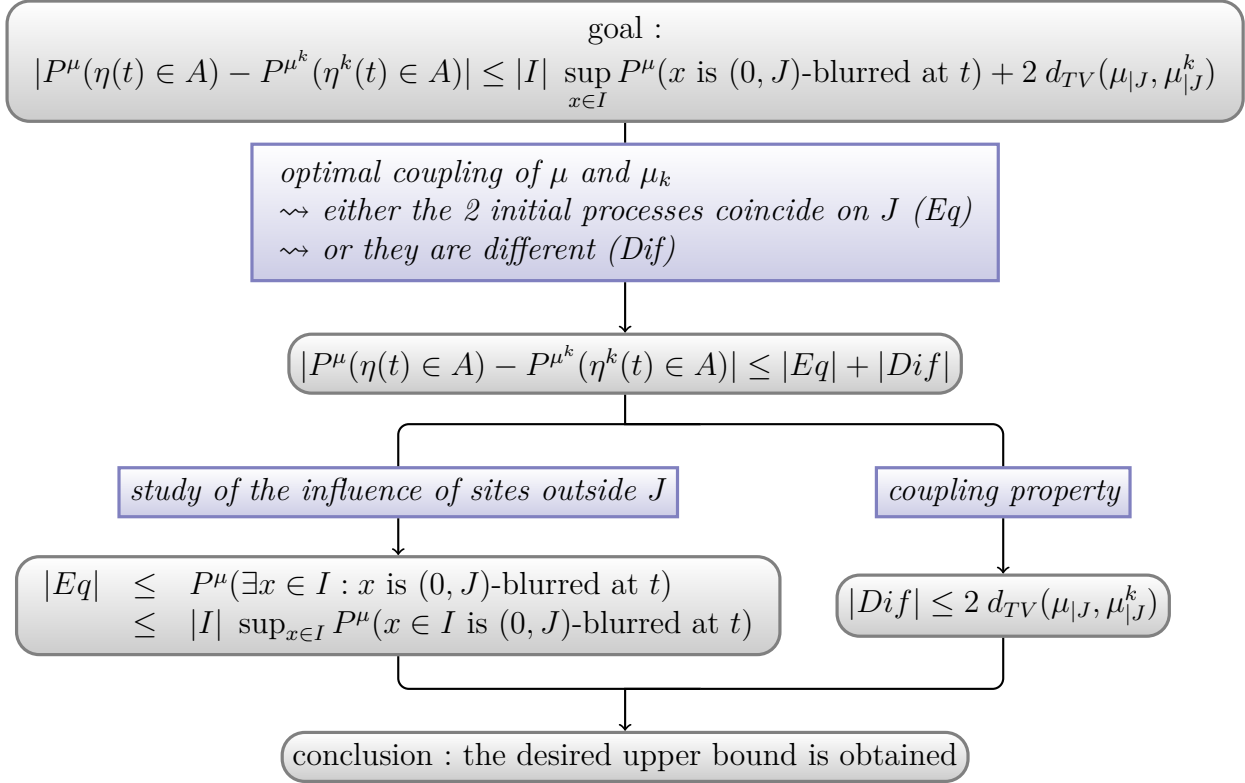


FIGURE 3.4 – Scheme of the proof of Lemma 3.3.3

3.3.2.3 Proof of Lemma 3.3.4

The construction of the distribution μ as a weak limit of the sequence $\{\mu^k\}_{k \in \mathcal{K}}$ is used to prove this lemma. We will need the CCSB condition for a G_k -forest-fire process, which is the result of the following lemma.

Lemma 3.3.5. *Let n be in \mathbb{N} and δ be a non negative real number. Consider a G_n -forest-fire process α^n with parameter λ , with an initial configuration with distribution μ^n .*

Then α^n has $CCSB(0, \delta, m_{\gamma, \lambda, d_f}(\delta))$.

Proof. (of Lemma 3.3.5)

Let n and m be in \mathbb{N} .

The goal is to show a CCSB condition. Therefore let B and D be two subsets of B_n , x a site in $B_n \setminus D$ and consider

$$\text{Cond}_{B,D} = \left\{ \bigcup_{y \in B} C_y = D \right\} \quad \text{and} \quad \text{Size}_{x,m} = \{|C_x| > m\}.$$

To simplify the notations, we denote $m_{\gamma,\lambda,d_f}(\delta)$ by $m_{\gamma,\delta}$ in this section.

The G_n -forest-fire process α^n has $\text{CCSB}(0, \delta, m_{\gamma,\lambda,d_f}(\delta))$ if

$$P^{\mu^n}(\alpha^n(0) \in \text{Size}_{x,m_{\gamma,\delta}} \cap \alpha^n(0) \in \text{Cond}_{B,D}) \leq \delta P^{\mu^n}(\alpha^n(0) \in \text{Cond}_{B,D}). \quad (3.17)$$

Since μ^n is the stationary distribution of a G_n -forest-fire process, (3.17) can be written :

$$\mu^n(\text{Size}_{x,m_{\gamma,\delta}} \cap \text{Cond}_{B,D}) \leq \delta \mu^n(\text{Cond}_{B,D}). \quad (3.18)$$

A forest-fire process having a CCSB condition at time 0 satisfies one for all times $t > \gamma$ by Theorem 3.2.1. Thus to show (3.18), we will use this result combined with the ergodic theorem.

Consider a G_n -forest-fire process β^n with parameter $\lambda > 0$, with an initial configuration with law ρ^n and having $\text{CCSB}(0, \frac{\lambda}{4d_f^2}, m)$.

Since μ^n is the unique stationary distribution of a G_n -forest-fire process, the ergodic theorem gives

$$\mu^n(\text{Size}_{x,m_{\gamma,\delta}} \cap \text{Cond}_{B,D}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P^{\rho^n}(\beta_s^n \in \text{Size}_{x,m_{\gamma,\delta}} \cap \beta^n(s) \in \text{Cond}_{B,D}) ds. \quad (3.19)$$

Recall that γ was set in Section 3.3.2.1 and take $t > \gamma$.

By Theorem 3.2.1, for all times s larger than γ , the forest-fire process β^n has $\text{CCSB}(s, \delta, m_{\gamma,\delta})$, so

$$\forall s \geq \lambda, P^{\rho^n}(\beta_s^n \in \text{Size}_{x,m_{\gamma,\delta}} \cap \beta^n(s) \in \text{Cond}_{B,D}) \leq \delta P^{\rho^n}(\beta_s^n \in \text{Cond}_{B,D}).$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_{\gamma}^t P^{\rho^n}(\beta_s^n \in \text{Size}_{x,m_{\gamma,\delta}} \cap \beta^n(s) \in \text{Cond}_{B,D}) ds &\leq \frac{1}{t} \int_{\gamma}^t \delta P^{\rho^n}(\beta_s^n \in \text{Cond}_{B,D}) ds \\ &\leq \delta \frac{1}{t} \int_0^t P^{\rho^n}(\beta_s^n \in \text{Cond}_{B,D}) ds. \end{aligned}$$

Since

$$\frac{1}{t} \int_0^{\gamma} P^{\rho^n}(\beta_s^n \in \text{Size}_{x,m_{\gamma,\delta}} \cap \beta^n(s) \in \text{Cond}_{B,D}) ds \leq \frac{\gamma}{t},$$

we get a bound for the integral :

$$\frac{1}{t} \int_0^t P^{\rho^n}(\beta_s^n \in \text{Size}_{x,m_{\gamma,\delta}} \cap \beta^n(s) \in \text{Cond}_{B,D}) ds \leq \frac{\gamma}{t} + \delta \frac{1}{t} \int_0^t P^{\rho^n}(\beta_s^n \in \text{Cond}_{B,D}) ds.$$

Finally, we let t tend to infinity and use (3.19) twice to get (3.18). This concludes the proof. \square

We can now show the lemma concerning the distribution μ .

Proof. (of Lemma 3.3.4)

Let $\delta > 0$.

The idea of the proof is to use the fact that the measure μ is a weak limit of a subsequence of $(\mu^k)_{k \geq 0}$, combined with the previous lemma.

To show the CCSB condition, consider two finite subsets B and D of \mathbb{Z}^d , a site x in $\mathbb{Z}^d \setminus D$ and

$$\text{Cond}_{B,D} = \left\{ \bigcup_{y \in B} C_y = D \right\} \quad \text{and} \quad \text{Size}_{x,m_{\gamma,\delta}} = \left\{ |C_x| > m_{\gamma,\delta} \right\}.$$

For all finite subsets B and D of \mathbb{Z}^d and all sites x in $\mathbb{Z}^d \setminus D$, the sets $\text{Cond}_{B,D}$ and $\text{Size}_{x,m_{\gamma,\delta}}$ are defined by a finite number of sites. Therefore we can write

$$\mu(\text{Size}_{x,m_{\gamma,\delta}} \cap \text{Cond}_{B,D}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^k(\text{Size}_{x,m_{\gamma,\delta}} \cap \text{Cond}_{B,D}) \quad (3.20)$$

$$\mu(\text{Cond}_{B,D}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^k(\text{Cond}_{B,D}). \quad (3.21)$$

By the previous lemma

$$\mu^k(\text{Size}_{x,m_{\gamma,\delta}} \cap \text{Cond}_{B,D}) \leq \delta \mu^k(\text{Cond}_{B,D}). \quad (3.22)$$

The result is obtained by letting k tend to infinity :

$$\mu(\text{Size}_{x,m_{\gamma,\delta}} \cap \text{Cond}_{B,D}) \leq \delta \mu(\text{Cond}_{B,D}).$$

□

What about stationary measures on other graphs ?

In this proof of the existence of stationary measures on \mathbb{Z}^d , we used Dürre's tools to control the influence of long-distant sites. In his thesis, Dürre introduced these tools for a larger class of infinite-volume graphs, with a bounded vertex degree. Can we adapt our proof for these graphs? We used the fact that we were on \mathbb{Z}^d to define the finite graph corresponding to a discrete torus, in order to get the translation-invariance of the stationary measure. Let us consider an infinite-volume graph with a bounded vertex degree. We can define finite sub-graphs of this graph without adding extra edges as we did in \mathbb{Z}^d to get the discrete torus. Then we still get the existence of a stationary measure by using the same method. But nothing tells us that this measure is translation invariant. Could we define subgraphs with translation-invariance properties? Consider for example the case of the Cayley trees in which each site has four neighbors. We tried to determine edges that we could add to finite subgraphs so as to get this property, but we did not succeed. We think that the translation-invariance result is true, but it may require further investigations using tools of group theory.

Chapitre 4

Modèle de croissance

Pour l'introduction de ce chapitre, nous reprenons les idées données dans le paragraphe de présentation des résultats 1.3, en détaillant un peu plus les particularités liées au choix de l'arbre binaire.

On aimerait définir un processus continu qui serait une limite en loi du processus de feux de forêt lorsque $\lambda \rightarrow 0$. Si le processus de feux de forêt est à valeurs dans \mathbb{Z}^d , le processus limite cherché est à valeurs dans \mathbb{R}^d . Nous avons vu que sur \mathbb{Z} , un tel processus limite existe et est uniquement défini [13]. L'avantage sur \mathbb{Z} est le fait qu'un site vide est bloquant. Sur \mathbb{Z}^d on perd cette propriété, et la géométrie du réseau implique une multitude de chemins possibles liant deux sites distincts, et ces multiples chemins ont souvent plusieurs sites en commun. Dans le but d'essayer de simplifier un peu les problèmes liés à la géométrie de \mathbb{Z}^d , en vue d'obtenir un peu plus d'indépendance, nous avons choisi d'étudier le problème sur les arbres, et plus particulièrement sur l'arbre binaire.

Quels sont les avantages et les inconvénients du travail sur les arbres binaires ? Un premier avantage est le fait que l'on retrouve une propriété bloquante, du même genre que dans \mathbb{Z} . En effet, un site vide de l'arbre binaire va alors séparer les sous-arbres issus de ses voisins, les feux ne pourront pas se propager. Nous allons beaucoup utiliser la propriété d'indépendance suivante. Connaissant l'état des sites de hauteur n , tous les sous-arbres issus des sites de hauteur $n+1$ sont indépendants. Par contre, sur l'arbre binaire, nous perdons la propriété de moyennabilité du réseau que \mathbb{Z}^d possède. Un réseau est moyennable si le rapport de la taille de la frontière d'une boule de rayon n sur la taille de l'intérieur de cette boule tend vers 0. Sur \mathbb{Z}^d , le rapport entre la taille de la frontière d'une boule de rayon n la taille de son intérieur est de l'ordre de $\frac{1}{n}$, et converge donc vers 0. Sur l'arbre binaire, ce même rapport est de l'ordre de 1. Le nombre de sites liés à l'extérieur est de l'ordre du nombre de sites présents dans une boule. Ainsi l'influence de l'extérieur sur une boule joue un rôle important, ce qui va créer une difficulté qui n'existait pas sur le réseau \mathbb{Z}^d . De plus, si l'on regarde les composantes connexes présentes dans une boule de rayon n , un grand nombre d'entre elles touchent la frontière. Cela nous empêche d'accéder à la densité des composantes connexes de taille k en faisant la limite de cette densité dans une boule de rayon n .

Notre objectif est de mieux comprendre le comportement des composantes connexes pour le modèle de feux de forêt lorsque λ tend vers 0, notamment comment elles grossissent. Pour cela, nous allons essayer de mieux comprendre ce qu'il se passe dans un modèle sans feux, c'est-à-dire un modèle où l'évolution est gouvernée uniquement par les processus de Poisson de croissance, ce qui revient à prendre $\lambda = 0$. Si l'on part d'une configuration initiale entièrement vide, petit à petit l'arbre se remplit jusqu'à être complètement occupé. A chaque temps t fixé, ce modèle correspond à un modèle de percolation de paramètre $p = 1 - e^{-t}$. Dès que p est strictement supérieur au seuil critique de percolation, il y a une composante connexe infinie. Ce modèle ne peut pas être le modèle limite cherché car les feux ont tout de même une influence. En effet, nous avons vu au théorème 1.1.3 que dans un modèle de feux de forêt, les composantes connexes sont presque sûrement finies. Cependant, l'étude des composantes connexes de ce modèle pour des temps très proches du temps critique est une première étape à la compréhension du comportement des composantes connexes du modèle de feux de forêt pour λ très petit.

Dans ce chapitre, nous allons regarder un modèle "sans feux" sur un arbre binaire enraciné ce qui revient à prendre $\lambda = 0$. Nous allons considérer une configuration initiale obtenue en réalisant une percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur l'arbre binaire. Ainsi, à chaque temps t strictement positif, la configuration de la forêt correspond à une percolation sur-critique, où il y a une composante connexe infinie. Notre objectif ici est de comprendre comment la composante connexe de la racine, qui est finie à $t = 0$, évolue. Plus précisément, nous allons étudier un ensemble, noté $\mathcal{B}_n(0)$, construit à partir d'une boule de rayon n à laquelle on ajoute les composantes connexes qui l'intersectent au temps initial. Nous nous intéresserons à sa taille à un temps $t_n > 0$, tendant vers 0 avec n . Nous montrerons que cette taille renormalisée converge en loi vers une variable aléatoire non dégénérée.

Ce chapitre est divisé en trois parties. Dans la première partie, nous introduisons les notations utilisées dans ce chapitre, et le vocabulaire lié à l'arbre binaire que nous utiliserons. Dans la deuxième partie, nous donnons la définition de l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ et nous étudions la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$ à un temps $t > 0$ pour un entier n fixé. Dans la troisième partie, nous nous intéressons au comportement limite de $\mathcal{B}_n(t_n)$ lorsque n tend vers l'infini, pour obtenir la convergence en loi annoncée.

4.1 Notations

Commençons par introduire quelques notations que nous allons utiliser tout au long de ce chapitre.

Nous allons travailler sur l'arbre binaire infini enraciné défini au paragraphe 2.1.1, que nous notons \mathbb{T} . Ici la racine a seulement deux voisins alors que tous les autres sommets en ont trois. Les arbres comportant seulement n générations seront notés \mathbb{T}_n et $\partial\mathbb{T}_n$ désigne la n -ième génération de \mathbb{T}_n , ce qui correspond à sa frontière

“intérieure”.

Comme pour le modèle de feux de forêt, chaque sommet de l'arbre a deux états possibles : vide (noté 0) ou occupé (noté 1). Ainsi les configurations de l'arbre \mathbb{T} appartiennent à l'espace $\{0, 1\}^{\mathbb{T}}$.

Les composantes connexes et leur taille sont également définies de la même manière que pour le modèle de feux de forêt. Les arêtes ne sont pas orientées. Cependant, dans les raisonnements que nous ferons, nous allons partir d'un arbre \mathbb{T}_n puis explorer les sites de $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_n$ en partant de la frontière de \mathbb{T}_n vers l'extérieur. Ainsi, par commodité, nous utiliserons tout de même le vocabulaire de “site enfant”, “site père” d'un sommet, et de racine d'une composante connexe, comme si l'arbre était orienté avec éloignement de la racine. Cela ne changera rien aux arguments utilisés.

Ainsi, en utilisant ce vocabulaire, chaque site x de \mathbb{T} a deux sites enfants notés en général x_1 et x_2 . Dans la suite, on dira que l'on “tire” les composantes connexes enfants d'un site selon la loi μ lorsque l'on considère une composante connexe de racine x_1 et de taille de loi μ notée C_{x_1} et une composante connexe de racine x_2 et de taille de loi μ notée C_{x_2} . Cela nous suffira ici car nous ne sommes intéressés que par la taille des ensembles que nous considérons. La figure 4.1 illustre cette construction.

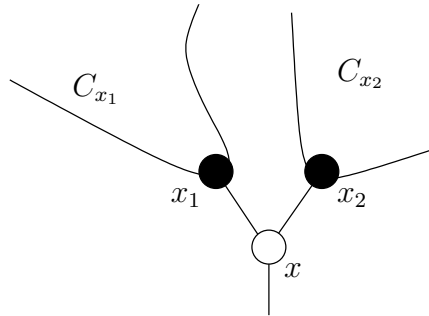


FIGURE 4.1 – Composantes connexes enfants d'un site x

Nous allons utiliser deux notions de voisins d'une composante connexe.

Définition 4.1 (Voisins d'une composante connexe). *L'ensemble des sites voisins d'une composante connexe C , noté $V(C)$, est défini par*

$$V(C) = \{x \in \mathbb{T} \setminus C : \exists y \in C : x \sim y\}, \quad (4.1)$$

où la notation $x \sim y$ signifie que les sites x et y sont reliés par une arête de \mathbb{T} .

L'ensemble des voisins enfants d'une composante connexe C , noté $V^e(C)$, est l'ensemble de tous les voisins de C privé du voisin “père” de la racine de C .

Lemme 4.1.1. *Sur l'arbre binaire, pour toute composante connexe C ne contenant pas l'origine, on a les relations*

$$|V(C)| = |C| + 2 \quad \text{et} \quad |V^e(C)| = |C| + 1. \quad (4.2)$$

Pour toutes les composantes connexes C contenant la racine de \mathbb{T} , on a l'égalité

$$|V(C)| = |V^e(C)| = |C| + 1. \quad (4.3)$$

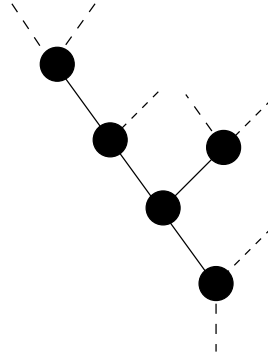


FIGURE 4.2 – Voisins d'une composante connexe

Démonstration. Soit C une composante connexe ne contenant pas la racine de \mathbb{T} . Pour montrer ce lemme, nous allons considérer les arêtes issues des sites de cette composante connexe. Cette démonstration est illustrée par la figure 4.2.

Notons a le nombre total d'arêtes issues des sites de C . Alors

$$a = 2|C| + 1. \quad (4.4)$$

En effet, pour ne pas compter les arêtes en double, considérons une orientation de la racine de C vers l'extérieur. Chaque site a alors deux arêtes le reliant à ses enfants. Il faut aussi compter l'arête reliant la racine de C à son père.

Comptons maintenant les arêtes reliant deux sites de C . Il y en a

$$a_{\text{int}} = |C| - 1. \quad (4.5)$$

Le nombre $|V(C)|$ de sites voisins de C correspond au nombre d'arêtes reliant un site de C à un site qui n'est pas dans C . Ce nombre est $a_{\text{ext}} = a - a_{\text{int}}$. Ainsi,

$$|V(C)| = 2|C| + 1 - (|C| - 1) = |C| + 2. \quad (4.6)$$

Pour calculer $|V^e(C)|$, il suffit de ne pas considérer l'arête reliant la racine de C à son père d'où $|V^e(C)| = |C| + 1$. \square

Pour étudier le modèle sans feux, nous allons partir d'une configuration initiale de l'arbre correspondant à une percolation critique. Ainsi, dans tout ce chapitre, nous utiliserons les résultats sur la taille ν_{cc} des composantes connexes pour la percolation critique sur l'arbre binaire regroupés dans la section 2.4.

Étudions maintenant le modèle de croissance à partir du sous-arbre \mathbb{T}_n , pour une valeur de n fixée.

4.2 Modèle à taille fixée

Pour étudier le modèle sans feux décrit dans l'introduction de ce chapitre, nous n'allons pas regarder le modèle sur \mathbb{T} tout entier mais nous allons commencer par ne regarder que l'arbre \mathbb{T}_n pour un entier n fixé. Nous explorerons ensuite \mathbb{T} petit à petit à partir de \mathbb{T}_n . Cette façon de faire nous permettra de travailler avec un nombre fini de sites. Nous allons tout d'abord définir l'ensemble fini de sites, noté $\mathcal{B}_n(0)$, dont nous partirons à $t = 0$, qui va être un peu plus gros que \mathbb{T}_n . Cet ensemble sera construit à partir de la configuration initiale de \mathbb{T} , de telle sorte que tous ses voisins seront des sites vides. L'objectif est de déterminer, pour un temps $t > 0$, la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$. Comme nous travaillons dans un arbre, nous avons vu dans l'introduction de ce chapitre que chacune des branches issues des voisins de $\mathcal{B}_n(0)$ sont indépendantes.

Fixons un entier n strictement positif. Dans une première partie, nous allons commencer par définir précisément l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$. Puis dans la deuxième partie, nous étudierons le nombre de sites qui se rajoutent à $\mathcal{B}_n(0)$ au temps t via un site voisin de cet ensemble. Dans la troisième partie, nous déterminerons le nombre de sites qui se rajoutent à tout l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ au temps t par indépendance des branches issues des voisins de $\mathcal{B}_n(0)$.

4.2.1 Définition de l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$

Nous allons donner dans cette partie la définition de l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ que l'on va étudier. Nous introduisons également la variable aléatoire N_0^n , qui sera égale en loi à la taille de l'ensemble des voisins de $\mathcal{B}_n(0)$, que nous allons beaucoup utiliser dans la suite de ce chapitre.

Considérons une configuration initiale sur \mathbb{T}_n obtenue en faisant une percolation de sites de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbb{T}_n . Nous noterons η_0 la configuration obtenue. Comme tous les sites sont indépendants pour la percolation, on pourra par la suite tirer la configuration initiale d'un site en dehors de \mathbb{T}_n . Pour chaque site occupé de $\partial\mathbb{T}_n$, on tire les composantes connexes de ses deux sites enfants selon la loi ν_{cc} . On définit alors l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ comme étant les sites de l'arbre \mathbb{T}_n ainsi que ceux des composantes connexes que l'on vient de définir.

Définition 4.2 (Ensemble $\mathcal{B}_n(0)$). *Soit η_0 une configuration initiale sur \mathbb{T}_n obtenue en faisant une percolation de sites de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour chaque site occupé $y \in \mathbb{T}_n$, soit C_{y_1} et C_{y_2} les composantes connexes de racines les sites enfants y_1 et y_2 de y dont la taille est de loi ν_{cc} . L'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ est alors défini par la réunion de \mathbb{T}_n et de ces composantes connexes. Formellement,*

$$\mathcal{B}_n(0) = \mathbb{T}_n \cup \bigcup_{y \in \partial\mathbb{T}_n: \eta_0(y)=1} (C_{y_1} \cup C_{y_2}). \quad (4.7)$$

L'ensemble des sites voisins de cet ensemble est constitué :

- des sites vides de $\partial\mathbb{T}_n$

- des voisins enfants vides de chacune des deux composantes connexes enfants des sites occupés de $\partial\mathbb{T}_n$.

Ainsi, avec les notations de la définition précédente, on obtient

$$V(\mathcal{B}_n(0)) = \{x \in \partial\mathbb{T}_n : \eta_0(x) = 0\} \cup \bigcup_{y \in \partial\mathbb{T}_n : \eta_0(y) = 1} (V^e(C_{y_1}) \cup V^e(C_{y_2})). \quad (4.8)$$

Nous sommes intéressés par la loi de la taille de ces ensembles. Ainsi, au lieu de considérer directement les composantes connexes enfants des sites, nous allons considérer un ensemble $\{|C_i|\}_{1 \leq i \leq 2^{n+1}}$ de variables aléatoires de loi ν_{cc} . La taille des ensembles précédents aura la même loi que les variables aléatoires que nous allons définir avec cet ensemble de tailles de composantes connexes. Comme les états des sites de $\partial\mathbb{T}_n$ sont indépendants et que ces sites jouent le même rôle, nous n'allons pas les nommer comme dans la définition 4.2 mais nous allons les numéroter. Ainsi, de (4.8), on déduit

$$\begin{aligned} |V(\mathcal{B}_n(0))| &\stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^{2^n-1} (|C_{2i}| + |C_{2i+1}| + 2) I_{\{\text{site occupé}\}}(i) + I_{\{\text{site vide}\}}(i) \\ &= 2^n + \sum_{i=0}^{2^n-1} (|C_{2i}| + |C_{2i+1}| + 1) I_{\{\text{site occupé}\}}(i). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Comme la configuration de \mathbb{T}_n est obtenue en faisant une percolation de paramètre $\frac{1}{2}$, un site de $\partial\mathbb{T}_n$ est occupé avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des autres sites. Ainsi, le nombre de sites occupés de $\partial\mathbb{T}_n$, noté A_n , suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2^n, \frac{1}{2})$. Nous allons maintenant définir une variable aléatoire notée N_0^n qui sera égale en loi à la taille de l'ensemble des voisins de $\mathcal{B}_n(0)$. C'est avec cette variable aléatoire N_0^n que nous allons travailler dans la suite.

Définition 4.3 (Taille N_0^n). *Soit $\{|C_i|\}_{1 \leq i \leq 2^{n+1}}$ un ensemble de variables aléatoires indépendantes de loi ν_{cc} . Soit N_0^n la variable aléatoire définie de la manière suivante :*

$$N_0^n = 2^n + A_n + \sum_{i=1}^{2A_n} |C_i| \quad \text{où} \quad A_n \sim \mathcal{B}\left(2^n, \frac{1}{2}\right). \quad (4.10)$$

La variable aléatoire N_0^n suit la même loi que la variable aléatoire $|V(\mathcal{B}_n(0))|$ représentant le nombre de voisins de l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$.

Remarque 10. Comme nous sommes intéressés uniquement par les lois des variables aléatoires, par abus de langage, nous dirons que N_0^n est la taille de $V(\mathcal{B}_n(0))$.

L'étude du comportement limite de la loi de la variable aléatoire N_0^n sera faite dans le paragraphe 4.3.1.

On peut remarquer le lien suivant entre la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ et la taille N_0^n de l'ensemble de ses voisins. En effet, la taille de $\mathcal{B}_n(0)$ est donnée par

$$|\mathcal{B}_n(0)| \stackrel{d}{=} |\mathbb{T}_n| + \sum_{i=1}^{2A_n} |C_i| = N_0^n + 2^n - 1 - A_n. \quad (4.11)$$

Nous utiliserons ce lien au paragraphe 4.2.3.

La dynamique du modèle de croissance que nous étudions est régie par des processus de Poisson de paramètre 1 associés à chaque site de manière indépendante. Notre objectif est de déterminer la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$ à un temps $t > 0$. Pour cela, nous allons commencer par considérer un site de l'ensemble des voisins de $\mathcal{B}_n(0)$ et déterminer la taille de l'intersection de sa composante connexe au temps t avec l'ensemble $\mathbb{T} \setminus \mathcal{B}_n(0)$.

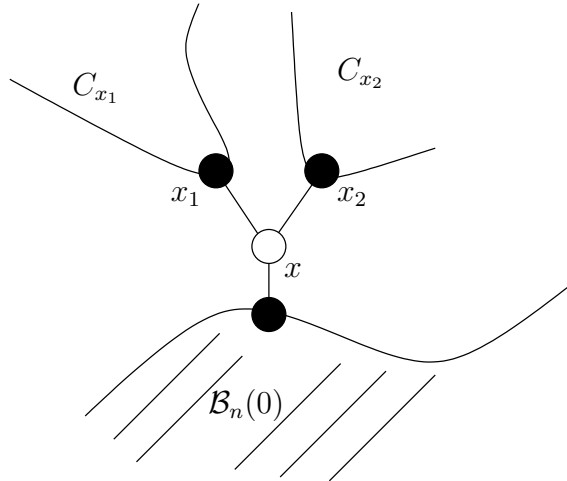
4.2.2 Étude de ce que l'on rajoute à un site voisin de $\mathcal{B}_n(0)$

Soit $x \in V(\mathcal{B}_n(0))$ un site voisin de $\mathcal{B}_n(0)$ et t un temps strictement positif. On sait par définition de $V(\mathcal{B}_n(0))$ que le site x est vide à $t = 0$. On souhaite déterminer la taille de l'intersection de la composante connexe du site x au temps t avec le complémentaire de l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$. Nous allons procéder pas à pas, en partant du site x . Nous allons relier le site x petit à petit aux composantes connexes présentes dans \mathbb{T} à $t = 0$ par des chemins de sites qui sont devenus occupés dans l'intervalle de temps $]0, t]$. Pour faire cela, nous allons définir un processus de Galton-Watson à un ancêtre. Ses sommets représenteront les voisins vides restants à explorer pour déterminer entièrement l'ensemble des sites à rajouter à $\mathcal{B}_n(0)$ par le site x . Si cet arbre de Galton-Watson s'éteint, cela voudra dire que l'on rajoute une composante connexe finie à $\mathcal{B}_n(0)$ par le site x . Sinon, le site x appartient à une composante connexe infinie au temps t regardé, et donc $\mathcal{B}_n(t)$ sera infinie.

Expliquons maintenant comment nous allons définir l'arbre de Galton-Watson $\mathcal{A}_{x,t}$ associé au site x . Par définition, le site x est vide à $t = 0$. Regardons son état au temps t en utilisant le processus de Poisson associé à ce site. Il y a deux possibilités : soit il n'y a pas de sauts de ce processus dans l'intervalle $[0, t]$, soit il y en a au moins un.

- ▷ S'il n'y a pas de sauts de ce processus dans l'intervalle $[0, t]$, le site x reste vide sur l'intervalle $[0, t]$. Ainsi les composantes connexes de $\mathcal{B}_n(0)$ ne vont pas grossir dans l'intervalle de temps $[0, t]$ via ce site. L'individu correspondant à x dans l'arbre de Galton-Watson n'aura pas de descendants.
- ▷ S'il y a au moins un saut de ce processus dans l'intervalle $[0, t]$, le site x est occupé au temps t . On va alors considérer les voisins vides à $t = 0$ de ses composantes connexes enfants C_{x_1} et C_{x_2} . Ainsi l'individu correspondant à x dans l'arbre de Galton-Watson aura $|V^e(C_{x_1})| + |V^e(C_{x_2})| = |C_{x_1}| + |C_{x_2}| + 2$ descendants (donc au moins 2 descendants), qui correspondent aux sites vides voisins des composantes connexes que l'on ajoute.

Ensuite, on refait le même raisonnement avec chacun des sites vides des composantes connexes que l'on a ajouté. On peut donc bien utiliser un arbre de Galton-Watson pour étudier notre construction. La figure 4.3 illustre la première étape, pour le site x voisin de $\mathcal{B}_n(0)$, avec la configuration à $t = 0$.

FIGURE 4.3 – Étude du site vide x

Comme tous les sites x jouent le même rôle, l'arbre $\mathcal{A}_{x,t}$ sera en fait indépendant du site x choisi dans $V(\mathcal{B}_n(0))$. On omet alors la dépendance en x de la loi des descendants que nous allons définir, car cette loi sera la même pour tous les sites de $V(\mathcal{B}_n(0))$. Définissons maintenant l'arbre $\mathcal{A}_{x,t}$.

Définition 4.4 (Arbre $\mathcal{A}_{x,t}$). Soit $\mathcal{A}_{x,t}$ un arbre de Galton-Watson à un ancêtre, dont la loi des descendants ν_t est définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \nu^t(0) &= e^{-t} \\ \nu^t(1) &= 0 \\ \nu^t(k) &= (1 - e^{-t}) \mathbb{P}(|C_1| + |C_2| + 2 = k) \text{ si } k \geq 2 \end{cases} \quad (4.12)$$

où $|C_1|$ et $|C_2|$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi ν_{cc} .

Étudions maintenant cet arbre de Galton-Watson. Nous allons utiliser les propriétés des arbres de Galton-Watson rappelées au paragraphe 2.2.1.

Probabilité d'extinction de $\mathcal{A}_{x,t}$

Proposition 4.2.1. (Propriétés de $\mathcal{A}_{x,t}$)

1. L'arbre $\mathcal{A}_{x,t}$ est sur-critique, "d'espérance" infinie.
2. Sa probabilité d'extinction, notée s_t , est

$$s_t = \frac{4e^t - 3}{(2e^t - 1)^2} \in]0, 1[. \quad (4.13)$$

Démonstration. 1. Par la proposition 2.4.2, l'espérance de la taille des composantes connexes est infinie. Par conséquent, l'espérance du nombre d'enfants d'un site est infinie. L'arbre $\mathcal{A}_{x,t}$ est donc sur-critique.

2. Notons f_{ν^t} la fonction génératrice associée à la loi ν^t . Par la proposition 2.2.2, la probabilité d'extinction de l'arbre $\mathcal{A}_{x,t}$ est la racine strictement inférieure à 1, notée s_t , de l'équation

$$f_{\nu^t}(y) = y. \quad (4.14)$$

★ Déterminons tout d'abord f_{ν^t} . Soit $|C_1|$ et $|C_2|$ deux variables aléatoires de loi ν_{cc} . Par définition de la loi ν^t , on obtient

$$f_{\nu^t}(y) = e^{-t} + (1 - e^{-t}) \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(|C_1| + |C_2| + 2 = k) y^k. \quad (4.15)$$

Les variables aléatoires $|C_1|$ et $|C_2|$ sont indépendantes, donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(|C_1| + |C_2| = k) y^k = (f_{|C^s|})^2(y), \quad (4.16)$$

D'où

$$f_{\nu^t}(y) = e^{-t} + (1 - e^{-t}) y^2 f_{|C^s|}^2(y). \quad (4.17)$$

Nous avons vu à la proposition 2.4.5 que la fonction génératrice associée à la loi ν_{cc} est donnée par la formule suivante :

$$f_{|C^s|}(y) = \frac{1 - \sqrt{1-y}}{y}. \quad (4.18)$$

Nous obtenons alors une expression de la fonction génératrice associée à la loi ν^t

$$f_{\nu^t}(y) = e^{-t} + (1 - e^{-t})(1 - \sqrt{1-y})^2. \quad (4.19)$$

★ Résolvons maintenant l'équation (4.14). De (4.19), on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} y &= e^{-t} + (1 - e^{-t})(2 - 2\sqrt{1-y} - y) \\ (2 - e^{-t})y - 2 + e^{-t} &= 2(1 - e^{-t})\sqrt{1-y}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

On voit que 1 est solution de cette équation. Pour déterminer les autres solutions, on va chercher les solutions dans l'intervalle $[0, 1]$ de l'équation suivante :

$$[(2 - e^{-t})(y - 1)]^2 = [2(1 - e^{-t})\sqrt{1-y}]^2, \quad (4.21)$$

qui se réécrit :

$$(2 - e^{-t})^2 y^2 + [4(1 - e^{-t})^2 - 2(2 - e^{-t})^2]y + (2 - e^{-t})^2 - 4(1 - e^{-t})^2 = 0.$$

Comme on sait que 1 est solution de (4.21), l'autre solution est donnée par

$$y_1 = \frac{(2 - e^{-t})^2 - 4(1 - e^{-t})^2}{(2 - e^{-t})^2}. \quad (4.22)$$

Après simplifications, on obtient

$$y_1 = \frac{4e^t - 3}{(2e^t - 1)^2}. \quad (4.23)$$

La fonction $t \mapsto \frac{4e^t - 3}{(2e^t - 1)^2}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, elle vaut 1 en zéro et sa limite en $+\infty$ est 0. Ainsi pour tout $t > 0$, cette solution est bien dans l'intervalle $]0, 1[$ donc c'est la racine s_t cherchée. \square

Étudions maintenant la taille totale de $\mathcal{A}_{x,t}$.

Taille totale de $\mathcal{A}_{x,t}$

Nous avons vu à la proposition 2.2.10 la loi de la taille totale d'un arbre de Galton-Watson ayant un ancêtre, que nous rappelons ici.

$$\mathbb{P}(S_{\mathcal{A}_{x,t}} = n) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = n - 1), \quad (4.24)$$

où $(\xi_i)_i$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi des descendants.

En notant $S_{\mathcal{A}_{x,t}}$ la taille totale de l'arbre $\mathcal{A}_{x,t}$, on obtient :

Proposition 4.2.2 (Taille totale de $\mathcal{A}_{x,t}$). *La loi de la taille totale $S_{\mathcal{A}_{x,t}}$ de l'arbre $\mathcal{A}_{x,t}$ est donnée par les formules suivantes.*

1. $\mathbb{P}(S_{\mathcal{A}_{x,t}} = 0) = 0$.
2. $\mathbb{P}(S_{\mathcal{A}_{x,t}} = 1) = e^{-u}$.
3. Et si $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(S_{\mathcal{A}_{x,t}} = n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \binom{2n-2k-2}{n-1} \frac{1}{2^{2(n-1-k)}} e^{-u(n-k)} (1 - e^{-u})^k.$$

Démonstration. Comme l'arbre $\mathcal{A}_{x,t}$ a un ancêtre,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{\mathcal{A}_{x,t}} = 0) &= 0 \\ \mathbb{P}(S_{\mathcal{A}_{x,t}} = 1) &= \nu^t(0) = e^{-u}. \end{aligned}$$

Soit maintenant un entier $n \geq 2$, et $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi ν^t .

Pour calculer $\mathbb{P}(S_{\mathcal{A}_{x,t}} = n)$, nous allons utiliser la partitions d'évènements A_k : "il y a exactement $(n - k)$ termes nuls dans la somme" pour $0 \leq k \leq n$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = n - 1) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = n - 1 | A_k) \mathbb{P}(A_k). \quad (4.25)$$

- Calculons $\mathbb{P}(A_k)$.

Il y a $\binom{n}{n-k}$ choix possibles pour avoir $n - k$ termes nuls parmi les n termes de la somme. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A_k) = \binom{n}{n-k} \mathbb{P}(\xi_1 = 0, \dots, \xi_{n-k} = 0, \xi_{n-k+1} \geq 2, \dots, \xi_n \geq 2). \quad (4.26)$$

Comme toutes les variables aléatoires $\{\xi_i\}_{i=1\dots k}$ sont indépendantes, et que

$$\mathbb{P}(\xi_1 \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(\xi_1 = 0) = 1 - e^{-u}, \quad (4.27)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k) &= \binom{n}{n-k} \mathbb{P}(\xi_1 = 0)^{n-k} \mathbb{P}(\xi_1 \geq 2)^k \\ &= \binom{n}{n-k} e^{-u(n-k)} (1 - e^{-u})^k. \end{aligned} \quad (4.28)$$

- Calculons maintenant $P_{A_k} = \mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = n - 1 | A_k)$.

Commençons par regarder le cas $k = 0$. Si tous les n termes ξ_i sont nuls, alors

$$p(\xi_1 + \dots + \xi_n = n - 1 | A_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad (4.29)$$

Soit $k \geq 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = n - 1 | A_k) &= \mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_k = n - 1) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} |C_i| + 2k = n - 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} |C_i| = n - 1 - 2k\right) \end{aligned}$$

Comme les variables aléatoires $\{|C_i|\}_i$ sont positives, alors

$$\mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = n - 1 | A_k) = 0 \quad \text{si } n - 1 - 2k < 0. \quad (4.30)$$

Intéressons nous au cas $n - 1 - 2k \geq 0$. Utilisons l'expression de la loi de la somme des tailles des composantes connexes vue à la proposition 2.4.8. Lorsque $k \geq 1$, $\lfloor \frac{2k-1}{2} \rfloor = k - 1$ donc on obtient :

$$\begin{aligned} P_{A_k} &= 2k \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n - 1 - 2k + j}{n - 1 - 2k + 2k - (j - 1)} \mathbb{P}(|C| = k + n - 1 - 2k) \\ &= 2k \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n - 1 - 2k + j}{n - j} \mathbb{P}(|C| = n - 1 - k) \end{aligned} \quad (4.31)$$

- Revenons maintenant au calcul de $\mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = n - 1)$.

Nous noterons $P = \mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = n - 1)$. En utilisant les deux calculs précédents, on obtient

$$P = \sum_{k=1}^n \binom{n}{n-k} e^{-u(n-k)} (1 - e^{-u})^k 2k \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n-1-2k+j}{n-j} \mathbb{P}(|C| = n-1-k) \quad (4.32)$$

Or

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n-1-2k+j}{n-j} &= \frac{(n-2k)(n-2k+1)\dots(n-k-2)}{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-k-2)!}{k!(n-2k-1)!}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Rappelons l'expression de la loi ν_{cc} vue à la proposition 2.4.1

$$\mathbb{P}(|C| = n-1-k) = \frac{1}{2^{2(n-1-k)+1}} \frac{1}{n-1-k} \binom{2(n-1-k)}{n-2-k}. \quad (4.34)$$

Donc

$$P = \sum_{k=1}^n 2k \frac{n \cdot (n-k-2)!}{k!(n-2k-1)!} \frac{1}{n-1-k} \binom{2(n-1-k)}{n-2-k} \frac{1}{2^{2(n-1-k)+1}} e^{-u(n-k)} (1 - e^{-u})^k. \quad (4.35)$$

En multipliant par $\frac{(n-1)!}{(n-1)!}$, on peut réécrire les termes factoriels de la manière suivante :

$$k \frac{n \cdot (n-k-2)!}{k!(n-2k-1)!} \frac{1}{n-1-k} \binom{2(n-1-k)}{n-2-k} = \binom{n-1}{k-1} \binom{2n-2k-2}{n-1}. \quad (4.36)$$

D'où la formule

$$P = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \binom{2n-2k-2}{n-1} \frac{1}{2^{2(n-1-k)}} e^{-u(n-k)} (1 - e^{-u})^k. \quad (4.37)$$

Avec la formule (4.24), cela nous donne le résultat cherché. \square

À partir de cette étude de $\mathcal{A}_{x,t}$, intéressons nous maintenant au nombre de sites que l'on ajoute à tout l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ au temps t .

4.2.3 Étude de ce que l'on rajoute à l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$

On souhaite déterminer la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$. Pour cela, nous allons nous intéresser à ce que l'on rajoute à tout l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$. Nous allons commencer par définir une forêt d'arbres de Galton-Watson de type précédent. Nous nous intéresserons ensuite à sa probabilité d'extinction ainsi qu'à la loi de sa taille totale. Comme les expressions obtenues ne seront pas trop exploitables, nous verrons que l'on peut

voir cette forêt comme un processus de Markov. Nous concluons cette partie en donnant le lien entre ce processus de Markov et la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$.

Par la géométrie de l'arbre binaire, comme on connaît l'état des sites de $\mathcal{B}_n(0)$, les branches issues des sites voisins de $\mathcal{B}_n(0)$ sont indépendantes. Ainsi on va considérer une forêt \mathcal{A}_t d'arbres de Galton-Watson de type $\mathcal{A}_{x,t}$ défini au paragraphe précédent pour étudier ce que l'on ajoute.

Définition 4.5 (Forêt \mathcal{A}_t). *Soit \mathcal{A}_t la réunion des arbres de Galton-Watson $\mathcal{A}_{x,t}$ étudiés au paragraphe précédent. On parlera aussi de l'arbre de Galton-Watson \mathcal{A}_t , avec $|V(\mathcal{B}_n(0))|$ ancêtres.*

$$\mathcal{A}_t = \bigcup_{x \in V(\mathcal{B}_n(0))} \mathcal{A}_{x,t}. \quad (4.38)$$

Nous avons vu au paragraphe 4.2.1 que la loi de la taille de $V(\mathcal{B}_n(0))$ est donnée par la loi de la variable aléatoire N_0^n .

Étudions maintenant la probabilité d'extinction de cette forêt ainsi que sa taille totale.

Probabilité d'extinction de la forêt \mathcal{A}_t

Cette forêt d'arbres de Galton-Watson s'éteint si tous les arbres $\mathcal{A}_{x,t}$ meurent. Tous ces arbres sont indépendants. Ainsi, sachant que $N_0^n = k$, la probabilité que l'on ajoute un nombre fini de sites est $(s_t)^k$, où s_t désigne la probabilité d'extinction d'un arbre $\mathcal{A}_{x,t}$ vue à la proposition 4.2.1. Ainsi la probabilité d'extinction de la forêt \mathcal{A}_t est donnée par la proposition suivante :

Proposition 4.2.3. *(Probabilité d'extinction de la forêt \mathcal{A}_t) Soit $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. La probabilité d'extinction de la forêt \mathcal{A}_t est $\mathbb{E}((s_t)^{N_0^n})$, et a pour expression*

$$\mathbb{E}((s_t)^{N_0^n}) = \left(1 - \sqrt{1 - s_t}\right)^{2^n}. \quad (4.39)$$

Démonstration. D'après la définition 4.3 de N_0^n ,

$$N_0^n = 2^n + A_n + \sum_{i=1}^{2A_n} |C_i| \quad \text{où} \quad A_n \sim \mathcal{B}\left(2^n, \frac{1}{2}\right). \quad (4.40)$$

Calculons dans un premier temps $\mathbb{E}(s_t^{N_0^n - 2^n})$. Par définition de l'espérance conditionnelle et en utilisant le fait que B_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2^n, \frac{1}{2})$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s_t^{N_0^n - 2^n}) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(s_t^{N_0^n - 2^n} | B_n)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{2^n} \frac{1}{\mathbb{P}(B_n = i)} \left(\int_{\{B_n = i\}} s_t^{i + \sum_{j=1}^{2i} |C_j|} d\mathbb{P}\right) I_{\{B_n = i\}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{2^n} \frac{\mathbb{P}(B_n = i)}{\mathbb{P}(B_n = i)} \mathbb{E}\left(s_t^{\sum_{j=1}^{2i} |C_j|}\right) s_t^i I_{\{B_n = i\}}\right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Comme les variables aléatoires $\{|C_j|\}_{j=1\dots 2^{n+1}}$ sont indépendantes et de même loi, on obtient :

$$\mathbb{E}(s_t^{N_0^n - 2^n}) = \sum_{i=0}^{2^n} \mathbb{E}(s_t^{|C|})^{2i} s^i \mathbb{P}(B_n = i). \quad (4.42)$$

Nous avons vu à la proposition 2.4.5 une expression de $\mathbb{E}(s^{|C|})$. On peut ainsi calculer explicitement cette somme.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s^{N_0^n - 2^n}) &= \sum_{i=0}^{2^n} \left(\frac{1}{s_t} - \frac{\sqrt{1-s_t}}{s_t} \right)^{2i} s_t^i \binom{2^n}{i} \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \sum_{i=0}^{2^n} \binom{2^n}{i} s_t^{-i} (1 - 2\sqrt{1-s_t} + 1 - s_t)^i \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \sum_{i=0}^{2^n} \binom{2^n}{i} s_t^{-i} (2 - s_t - 2\sqrt{1-s_t})^i \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \left(1 + \frac{2}{s_t} - 1 - \frac{2\sqrt{1-s_t}}{s_t} \right)^{2^n} \\ &= \left(\frac{1 - \sqrt{1-s_t}}{s_t} \right)^{2^n}. \end{aligned}$$

Finalement, on a le résultat

$$\mathbb{E}(s_t^{N_0^n}) = \mathbb{E}(s_t^{2^n} s_t^{N_0^n - 2^n}) = (1 - \sqrt{1-s_t})^{2^n}. \quad (4.43)$$

□

Nous avons vu que la probabilité que tous les arbres de la forêt \mathcal{A}_t sont finis est strictement comprise entre 0 et 1. On aimerait maintenant déterminer la taille de la forêt lorsque celle-ci est finie.

Taille de la forêt \mathcal{A}_t

Nous allons donner une expression de la loi de la taille de la forêt \mathcal{A}_t , conditionnellement à la valeur du nombre N_0^n d'arbres qui la compose. Comme tous les arbres qui la composent sont indépendants, nous allons utiliser la loi de la taille d'un arbre de Galton-Watson à un ancêtre vue à la proposition 4.2.2.

Proposition 4.2.4 (Taille de la forêt \mathcal{A}_t). *La loi de la taille $S_{\mathcal{A}_t}$ de la forêt \mathcal{A}_t conditionnée par la valeur de N_0^n est donnée par l'expression suivante, pour tout*

entiers n et h ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{\mathcal{A}_t} = n | N_0^n = h) &= \sum_{\Delta_h} \prod_{i=1}^h \mathbb{P}(S_{\mathcal{A}_{x,t}} = n_i) \\ &= \sum_{\Delta_h} \prod_{i=1}^h \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^n \binom{n_i-1}{k-1} \binom{2n_i-2k-2}{n_i-1} \frac{e^{-u(n_i-k)}(1-e^{-u})^k}{2^{2(n_i-1-k)}}. \end{aligned}$$

avec $\Delta_h = \{(n_1, \dots, n_h) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^h; \sum_{i=1}^h n_i = n\}$ (4.44)

La loi de la taille d'un seul arbre $\mathcal{A}_{x,t}$ n'est pas très explicite. La loi de la somme de tous ces arbres, bien qu'ils soient indépendants, l'est encore moins. Essayons d'attaquer le problème sous un autre angle et définissons autrement cette forêt.

Une autre façon de voir \mathcal{A}_t

Nous allons étudier cette forêt à travers les tailles de ses générations successives. Comme un processus de Galton-Watson est un processus de Markov (définition 2.7), nous allons voir la forêt \mathcal{A}_t comme un processus de Markov formé de la taille de ses générations successives. La taille de la génération 0 est donnée par la variable aléatoire N_0^n vue à la définition 4.3. Pour obtenir la taille de la génération $k+1$, il suffit de sommer tous les enfants des sites de la génération k . Comme les processus de Poisson de tous les sites de \mathbb{T} sont indépendants et de paramètre 1, le nombre de sites de la génération k qui deviennent occupés pendant l'intervalle $[0, t]$ suit une loi binomiale de paramètres la taille de cette k -ième génération et $1 - e^{-t}$. Comme la loi du nombre d'enfants de chaque site non bloquant est la loi de $|C_1| + |C_2| + 2$ où $|C_1|$ et $|C_2|$ sont des variables aléatoires de loi ν_{cc} , on obtient la définition suivante :

Définition 4.6 (Processus $(N_k^n)_{k \geq 0}$). *Soit $(N_k^n)_{k \geq 0}$ un processus de branchement défini par la relation suivante :*

$$\begin{cases} N_0^n &= 2^n + A_n + \sum_{i=1}^{2A_n} |C_i| & \text{où } A_n \sim \mathcal{B}\left(2^n, \frac{1}{2}\right) \\ N_{k+1}^n &= \sum_{i=1}^{2Y_k} (|C^s| + 1) & \text{où } Y_k \sim \mathcal{B}(N_k^n, 1 - e^{-t}) \end{cases} \quad (4.45)$$

Nous allons finir cette partie en donnant la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$ en fonction du processus $(N_k^n)_{k \geq 0}$ que nous venons de définir.

Taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$

Quel est le lien entre la forêt \mathcal{A}_t et le nombre de sites que l'on ajoute vraiment au temps t à l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ de départ ? Notons $R_n(t)$ le nombre de sites ajoutés à l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ au temps t . Dans notre construction, les individus de la forêt d'arbres

de Galton-Watson \mathcal{A}_t représentent les voisins vides des composantes connexes que l'on ajoute vraiment à l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$. Ainsi, $R_n(t)$ n'est pas exactement la taille totale de \mathcal{A}_t . À chaque étape k , on ajoute donc le nombre de sites vides que l'on étudie à cette étape qui deviennent occupés avant le temps t et la taille des composantes connexes de leurs sites enfants. Avec les notations introduites à la définition 4.6, cela donne l'égalité en loi suivante

$$R_n(t) \stackrel{d}{=} \sum_{k \geq 0} \left(Y_k^n + \sum_{i=1}^{2Y_k^n} |C_i| \right). \quad (4.46)$$

En utilisant les variables aléatoires N_k^n , on obtient

$$R_n(t) \stackrel{d}{=} \sum_{k \geq 0} (Y_k^n + N_{k+1}^n - 2Y_k^n) = \sum_{k \geq 1} (N_k^n - Y_k^n) - N_0^n. \quad (4.47)$$

En utilisant le lien entre les variables aléatoires $|\mathcal{B}_n(0)|$ et N_0^n vu en (4.11) page 80, on obtient finalement la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_n(t)| &= |\mathcal{B}_n(0)| + R_n(t) \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{k \geq 1} (N_k^n - Y_k^n) + 2^n - 1 - A_n, \quad \text{où } A_n \sim \mathcal{B}\left(2^n, \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Intéressons nous maintenant au comportement limite de la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$.

4.3 Modèle limite

En vue de s'orienter vers l'objectif initial, il faut maintenant chercher un processus limite lorsque l'on fait tendre la taille de la boule \mathbb{T}_n de départ vers l'infini. Pour cela, on va chercher une renormalisation en espace et en temps adéquate et passer à la limite dans la construction précédente.

Cette section est découpée en six parties. Dans la première partie, nous nous intéresserons au comportement limite de la taille N_0^n de la génération 0 du processus $(N_k^n)_{k \geq 0}$. Nous verrons qu'il existe une renormalisation pour laquelle cette taille converge vers une variable aléatoire de loi stable. Puis dans une deuxième partie, nous donnerons une heuristique des nouvelles échelles de temps et d'espace que nous allons considérer. Dans la troisième partie, nous nous intéresserons à la limite de la probabilité d'extinction de la forêt \mathcal{A}_t renormalisée. Dans la quatrième partie, nous étudierons le comportement limite de la forêt renormalisée elle-même, via le processus $(N_k^n)_{k \geq 0}$, et nous montrerons la convergence en loi de ce processus vers un processus de branchement à temps discret et à espace d'états continu. Dans la cinquième partie, nous étudierons le comportement de ce processus de branchement limite. Finalement dans la dernière partie, nous concluons sur la question initiale sur la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$.

4.3.1 Étude de la taille N_0^n

Nous allons étudier un peu plus en détails la loi de N_0^n . Nous rappelons son expression vue à la définition 4.3 page 80.

$$N_0^n = 2^n + A_n + \sum_{i=1}^{2A_n} |C_i| \text{ où } A_n \sim \mathcal{B}\left(2^n, \frac{1}{2}\right).$$

On aimerait connaître le comportement de N_0^n pour n grand. Dans le chapitre 2, nous avons vu que la loi de la taille des composantes connexes est dans le bassin d'attraction d'une loi strictement stable de paramètre $\frac{1}{2}$. Une première idée pour utiliser ce résultat consiste à approcher la variable aléatoire A_n de loi binomiale par son espérance, qui vaut 2^{n-1} . On va alors définir une nouvelle variable aléatoire notée \widehat{N}_0^n .

$$\widehat{N}_0^n \stackrel{\text{def}}{=} 2^n + 2^{n-1} + \sum_{i=1}^{2^n} |C_i|. \quad (4.49)$$

Nous allons étudier le comportement limite de la loi de \widehat{N}_0^n . Nous verrons que la loi de cette variable aléatoire converge vers une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$. Ensuite, nous verrons que N_0^n a le même comportement limite.

Lemme 4.3.1 (Loi de \widehat{N}_0^n).

$$\frac{\widehat{N}_0^n}{2^{2n}} \xrightarrow{d} G \text{ où } G \sim \mathcal{G}_{\frac{1}{2}}. \quad (4.50)$$

Démonstration. Par définition de \widehat{N}_0^n , on a

$$\frac{\widehat{N}_0^n}{2^{2n}} = \frac{3}{2^{n+1}} + \frac{\sum_{i=1}^{2^n} |C_i|}{2^{2n}}. \quad (4.51)$$

D'après la proposition 2.4.6, la loi de la taille des composantes connexes est dans le bassin d'attraction d'une loi strictement stable de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi

$$\frac{\sum_{i=1}^{2^n} |C_i|}{2^{2n}} \xrightarrow{d} G \text{ où } G \sim \mathcal{G}_{\frac{1}{2}}. \quad (4.52)$$

Comme le premier terme du membre de droite de l'égalité (4.51) converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini, on obtient le résultat souhaité en utilisant un résultat classique de convergence en loi. \square

Déduisons le comportement limite de N_0^n .

Proposition 4.3.2 (Loi limite de N_0^n). *La taille N_0^n de l'ensemble des voisins de l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ a le comportement limite suivant :*

$$\frac{N_0^n}{2^{2n}} \xrightarrow{d} G \text{ où } G \sim \mathcal{G}_{\frac{1}{2}}. \quad (4.53)$$

Démonstration. D'après le lemme 4.3.1 précédent, il suffit de montrer que

$$\frac{N_0^n - \widehat{N}_0^n}{2^{2n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \quad (4.54)$$

Par définition de \widehat{N}_0^n ,

$$N_0^n - \widehat{N}_0^n \stackrel{d}{=} A_n - 2^{n-1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{|A_n - 2^{n-1}|} |C_i|}_{:=r_n}. \quad (4.55)$$

Nous allons montrer (4.54) en utilisant le fait que les variables aléatoires $\{|C_i|\}_i$ sont dans le domaine d'attraction d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour cela, nous allons utiliser l'évènement

$$E = \{|A_n - 2^{n-1}| \leq 2^{(1-\delta)n}\}, \text{ où } 0 < \delta < \frac{1}{2} \quad (4.56)$$

Soit $\epsilon > 0$. Avec E , on peut écrire :

$$\mathbb{P}\left(\frac{r_n}{2^{2n}} > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{r_n}{2^{2n}} > \epsilon \mid E\right) \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\frac{r_n}{2^{2n}} > \epsilon \mid E^c\right) \mathbb{P}(E^c). \quad (4.57)$$

Comme les variables aléatoires $\{|C_i|\}_i$ sont positives et que les probabilités sont inférieures à 1, on obtient la majoration :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{r_n}{2^{2n}} > \epsilon\right) &\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=1}^{2^{n/(2-\delta)}} |C_i| > \epsilon \mid E\right) + \mathbb{P}(E^c) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=1}^{2^{n/(2-\delta)}} |C_i| > \epsilon\right) + \mathbb{P}(|A_n - 2^{n-1}| > 2^{n/(2-\delta)}). \end{aligned} \quad (4.58)$$

D'une part, en utilisant le théorème central limite, on sait que

$$\frac{A_n - 2^{n-1}}{\sqrt{2^{n-2}}} \xrightarrow{d} N \text{ où } N \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (4.59)$$

Ainsi, par un résultat classique de convergence en loi,

$$\frac{A_n - 2^{n-1}}{2^{(1-\delta)n}} = \frac{\sqrt{2^{n-2}}}{2^{(1-\delta)n}} \cdot \frac{A_n - 2^{n-1}}{\sqrt{2^{n-2}}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \quad (4.60)$$

D'autre part, nous avons vu à la proposition 2.4.6 que

$$\frac{1}{2^{2(1-\delta)n}} \sum_{i=1}^{2^{(1-\delta)n}} |C_i| \xrightarrow{d} G \text{ où } G \sim \mathcal{G}_{\frac{1}{2}}. \quad (4.61)$$

Ainsi, par un résultat classique de convergence en loi,

$$\frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=1}^{2^{(1-\delta)n}} |C_i| = \frac{2^{2(1-\delta)n}}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{2^{2(1-\delta)n}} \sum_{i=1}^{2^{(1-\delta)n}} |C_i| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \quad (4.62)$$

D'après les résultats de convergence (4.60) et (4.62), il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \mathbb{P}\left(\frac{r_n}{2^{2n}} > \epsilon\right) \leq \epsilon. \quad (4.63)$$

Comme (4.60) nous donne aussi la convergence en probabilité de $2^{-2n}(A_n - 2^{n-1})$ vers 0, on obtient le résultat. \square

Lorsque n tend vers l'infini, la taille de $\mathcal{B}_n(0)$ et donc de $\mathcal{B}_n(t)$ devient de plus en plus grande. Pour pouvoir l'étudier, nous allons renormaliser cette taille. Présentons maintenant les échelles de temps et d'espace que nous allons utiliser pour cela.

4.3.2 Renormalisations en temps et en espace

Dans ce paragraphe, nous allons présenter les échelles de temps et d'espace qui nous semblent adaptées pour ce modèle. On souhaite trouver des nouvelles échelles de temps et d'espace dépendant de n de sorte qu'il soit possible de définir une limite au processus de branchement discret précédemment défini, lorsque $n \rightarrow \infty$. L'idée ici est de ralentir le temps en vue de voir grossir l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ mais aussi de réduire l'espace pour voir quelque chose malgré la taille de départ de $\mathcal{B}_n(0)$ qui va être de plus en plus grande.

Intéressons nous en premier à la renormalisation de l'espace. Nous avons étudié la loi de la taille N_0^n dans le paragraphe 4.3.1. Ainsi, si l'on renormalise l'espace en divisant par 2^{2n} , la limite de la taille initiale de $\mathcal{B}_n(0)$ est une variable aléatoire de loi $\frac{1}{2}$ -stable.

Passons maintenant à la renormalisation en temps. On aimerait ajouter un nombre de sites du même ordre que N_0^n dans un intervalle de temps de longueur 1 dans la nouvelle échelle. Comme à chaque étape, on rajoute des composantes connexes de même loi (la loi à $t = 0$), on aimerait que le nombre de sites de N_0^n qui deviennent occupés dans le nouvel intervalle de temps $[0, 1]$ soit de l'ordre de $\mathbb{E}(A_n)$, où A_n est le nombre de sites occupés de $\partial\mathbb{T}_n$ (voir la section 4.3.1). Comme l'occupation d'un site vide est gouverné par un processus de Poisson, le temps mis par un site pour devenir occupé suit une loi exponentielle de paramètre 1. En approchant la taille de N_0^n par 2^{2n} , le temps d'attente T_1 pour voir le premier site qui devient occupé suit une loi exponentielle de paramètre 2^{2n} (minimum de 2^{2n} variables aléatoires exponentielles de paramètre 1). Ainsi, on obtient une renormalisation pour le temps :

$$c(n) = \mathbb{E}(A_n) * \mathbb{E}(T_1) = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{n+1}}. \quad (4.64)$$

En utilisant ces échelles, intéressons nous maintenant au comportement limite du modèle renormalisé.

4.3.3 Limite de la probabilité d'extinction de la forêt \mathcal{A}_t

Nous allons considérer ici la forêt d'arbres de Galton-Watson \mathcal{A}_t . Nous avons étudié dans la proposition 4.2.3 la probabilité d'extinction de la forêt \mathcal{A}_t lorsque le paramètre n était fixé. Notre objectif ici est de faire tendre n vers l'infini. Nous allons renormaliser le temps par 2^{n+1} , c'est-à-dire que nous allons considérer la forêt \mathcal{A}_{t_n} au temps $t_n = \frac{u}{2^{n+1}}$. Nous ne renormalisons pas l'espace ici. Nous avons calculé la probabilité d'extinction de la forêt \mathcal{A}_t pour un temps t fixé dans la proposition 4.2.3. Nous allons maintenant calculer sa limite lorsque le temps dépend également de n .

Proposition 4.3.3. *La probabilité d'extinction de la forêt \mathcal{A}_{t_n} pour $t_n = \frac{u}{2^{n+1}}$, qui vaut $\mathbb{E}((s_{t_n})^{N_0^n})$, converge vers e^{-u} lorsque n tend vers l'infini.*

Démonstration. Rappelons le résultat de la proposition 4.2.3 donnant la probabilité d'extinction de la forêt \mathcal{A}_t :

$$\mathbb{E}((s_t)^{N_0}) = \left(1 - \sqrt{1 - s_t}\right)^{2^n}. \quad (4.65)$$

Ici, on considère une quantité légèrement différente puisque l'on a changé l'échelle de temps. Lorsque $t = \frac{u}{2^{n+1}}$, elle devient :

$$\mathbb{E}((s_{\frac{u}{2^{n+1}}})^{N_0}) = \left(1 - \sqrt{1 - s_{\frac{u}{2^{n+1}}}}\right)^{2^n}. \quad (4.66)$$

Pour trouver la limite de cette quantité lorsque n tend vers l'infini, nous allons faire un développement limité. Étudions tout d'abord la probabilité $s_{\frac{u}{2^{n+1}}}$.

$$s_{\frac{u}{2^{n+1}}} = \frac{4e^{\frac{u}{2^{n+1}}} - 3}{(2e^{\frac{u}{2^{n+1}}} - 1)^2} = 1 - 4\left(\frac{u}{2^{n+1}}\right)^2 + O\left(\frac{u^3}{2^{3n}}\right). \quad (4.67)$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned} 1 - s_{\frac{u}{2^{n+1}}} &= \left(\frac{u}{2^n}\right)^2 \cdot \left(1 + O\left(\frac{u}{2^n}\right)\right) \\ \sqrt{1 - s_{\frac{u}{2^{n+1}}}} &= \frac{u}{2^n} + O\left(\frac{u^2}{2^{2n}}\right). \end{aligned} \quad (4.68)$$

En utilisant $a^b = \exp(b \ln(a))$, on a

$$\left(1 - \sqrt{1 - s_{\frac{u}{2^{n+1}}}}\right)^{2^n} = \exp\left(2^n \left[-\frac{u}{2^n} + O\left(\frac{u^2}{2^{2n}}\right)\right]\right). \quad (4.69)$$

On obtient alors le résultat cherché. \square

A partir de maintenant, nous allons étudier le processus $(N_k^n)_{k \geq 0}$ pour de grands entiers n , en vue d'obtenir un processus limite.

4.3.4 Vers un processus limite de la forêt

On souhaite obtenir un comportement limite du processus $(N_k^n)_{k \geq 0}$. Pour cela nous allons utiliser les nouvelles échelles introduites au paragraphe 4.3.2, et étudier le processus $(2^{-2n} N_k^n)_{k \geq 0}$. Nous rappelons la définition 4.6 du processus $(N_k^n)_{k \geq 0}$ des tailles successives des générations de cette forêt vue au paragraphe, mais ici nous considérons le temps $t_n = \frac{u}{2^{n+1}}$.

$$\begin{cases} N_0^n &= 2^n + A_n + \sum_{i=1}^{2A_n} |C_i| & \text{où } A_n \sim \mathcal{B}\left(2^n, \frac{1}{2}\right) \\ N_{k+1}^n &= \sum_{i=1}^{2Y_k} (|C^s| + 1) & \text{où } Y_k \sim \mathcal{B}\left(N_k^n, 1 - \exp\left(-\frac{u}{2^{n+1}}\right)\right) \end{cases} \quad (4.70)$$

Un processus plus accessible à étudier au niveau des calculs est le processus $(2^{-n+1} Y_k^n)_{k \geq 0}$, formé de variables aléatoires de loi binomiale apparaissant dans l'expression (4.70). Nous montrerons que ce processus a un comportement limite identique à celui du processus $(2^{-2n} u N_k^n)_{k \geq 0}$. On pourrait encore simplifier l'étude en considérant un processus constitué de variables aléatoires qui correspondraient à l'espérance des variables aléatoires Y_k^n si celle-ci était définie. Mais cela ne nous a pas permis d'arriver au résultat final sur la taille totale du processus. Nous allons montrer la convergence en loi de la taille totale du processus $(2^{-2n} u N_k^n)_{k \geq 0}$ vers celle du processus de branchement à espace d'états continu suivant. Nous utilisons les résultats sur les processus de branchement à temps discret et espace d'états continu vu au paragraphe 2.2.2 pour cette définition.

Définition 4.7 (Processus $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$). *Soit X l'unique subordinateur tel que $X(1)$ soit une variable aléatoire de loi $u\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$. Soit $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ le processus de branchement à temps discret et espace d'états continu de subordinateur X , tel que $Z_0 = 1$.*

Ce paragraphe est divisé en deux parties. Nous allons tout d'abord étudier la convergence des lois fini-dimensionnelles du processus $(2^{-n+1} Y_k^n)_{k \geq 0}$ vers celles de $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Puis nous montrerons que les processus $(2^{-n+1} Y_k^n)_{k \geq 0}$ et $(2^{-2n} u N_k^n)_{k \geq 0}$ ont le même comportement limite et nous en déduirons la convergence en loi du processus $(2^{-2n} u N_k^n)_{k \geq 0}$. Ensuite, nous nous intéresserons à la convergence en loi des tailles totales des processus. Dans toute cette étude, nous allons beaucoup utiliser les résultats sur la loi de la taille des composantes connexes ν_{cc} que nous avons étudiée au chapitre 2 ainsi que le fait que les processus de branchement s'éteignent ou explosent.

Commençons par l'étude des lois fini-dimensionnelles.

4.3.4.1 Convergence des lois fini-dimensionnelles

Notre objectif ici est de montrer, la convergence en loi du processus $(u2^{-2n} N_k^n)_{k \geq 0}$ vers le processus $(Z_k)_{k \geq 0}$. Pour cela, nous allons dans un premier temps montrer la convergence des lois des k -uplets $(2^{1-n} Y_0^n, \dots, 2^{1-n} Y_k^n)$ vers celles des k -uplets

(Z_1, \dots, Z_{k+1}) , pour tout entier k . Puis nous allons montrer que pour tout entier k , les variables aléatoires $u2^{-2n}N_k^n$ et $2^{1-n}Y_k^n$ ont la même loi limite.

Étude du processus $(Y_k^n)_{k \geq 0}$

Proposition 4.3.4. *Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, le k -uplet $(2^{1-n}Y_0^n, \dots, 2^{1-n}Y_k^n)$ converge en loi vers le k -uplet (Z_1, \dots, Z_{k+1}) .*

Nous allons montrer ce résultat par récurrence. Nous allons découper la preuve de ce résultat en plusieurs parties en démontrons tout d'abord les deux lemmes suivants. Le premier lemme correspond à l'étape d'initialisation de la récurrence.

Lemme 4.3.5 (Étude de la loi initiale du processus $(2^{1-n}Y_k^n)_{k \geq 0}$). *La variable aléatoire Y_0^n renormalisée par 2^{n+1} converge en loi vers la variable aléatoire Z_1 du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$.*

$$\frac{Y_0^n}{2^{n-1}} \xrightarrow{d} Z_1$$

Le deuxième lemme correspond à l'étude de la convergence des lois de transition du processus $(2^{1-n}Y_k^n)_{k \geq 0}$ qui est une chaîne de Markov.

Lemme 4.3.6 (Étude des lois de transition du processus $(2^{1-n}Y_k^n)_{k \geq 0}$). *Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, pour tout réel $s \in \mathbb{R}$, notons*

$$E_k = \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{-sY_{k+1}^n}{2^{n-1}} \right) \middle| \frac{Y_k^n}{2^{n-1}} \right].$$

Alors

$$E_k = \left[1 - \sqrt{1 - \exp \left(\frac{-s}{2^{n-1}} \right) \left(1 - \exp \left(\frac{-u}{2^{n+1}} \right) \right) - \exp \left(\frac{-u}{2^{n+1}} \right)} \right]^{2Y_k^n}.$$

Démontrons ces deux lemmes. Pour cela, nous allons utiliser trois lemmes de convergence, que je vais énoncer ici.

Lemme 4.3.7. *Considérons une variable aléatoire Y , ainsi que deux suites de variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Supposons que $Y_n \xrightarrow{d} Y$ et $N_n \xrightarrow{\mathbb{P}} +\infty$. Alors*

$$Y_{N_n} \xrightarrow{d} Y.$$

Lemme 4.3.8. *Considérons une variable aléatoire Y et une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers convergeant vers l'infini. Supposons que $\frac{Y_n}{a_n} \xrightarrow{d} Y$. Alors*

$$Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} +\infty.$$

Lemme 4.3.9 ([14]). *Considérons deux variables aléatoires Q et H , ainsi que trois suites de variables aléatoires $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(H_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Supposons les assertions suivantes.*

1. $\forall n, Q_n \in \mathbb{R}^+$ et $Q_n \xrightarrow{d} Q$
2. $\forall m, T_m \in \mathbb{N}$ et $T_m \xrightarrow{\mathbb{P}} +\infty$
3. $H_m \xrightarrow{d} H$
4. *Toutes les variables H_m, T_m et H sont chacune indépendantes des variables Q et Q_n .*

Alors

$$H_m \cdot Q_{T_m} \xrightarrow{d} H \cdot Q.$$

Démonstration (Lemme 4.3.5). Pour étudier la convergence en loi de $2^{1-n}Y_0^n$, nous allons utiliser le résultat de convergence en loi de la variable aléatoire N_0^n vu à la proposition 4.3.2. On peut écrire

$$\frac{Y_0^n}{2^{n-1}} = 2^{n+1} \left[1 - \exp\left(-\frac{u}{2^{n+1}}\right) \right] \cdot \frac{N_0^n}{2^{2n}} + \frac{Y_0^n - \left[1 - \exp\left(-\frac{u}{2^{n+1}}\right) \right] N_0^n}{2^{n-1}} \quad (4.71)$$

Nous allons montrer les deux résultats de convergence suivants, ce qui nous permettra de conclure.

$$2^{n+1} \left[1 - \exp\left(-\frac{u}{2^{n+1}}\right) \right] \cdot \frac{N_0^n}{2^{2n}} \xrightarrow{d} Z_1 \quad (4.72)$$

$$\frac{Y_0^n - \left[1 - \exp\left(-\frac{u}{2^{n+1}}\right) \right] N_0^n}{2^{n-1}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \quad (4.73)$$

★ Commençons par l'étude de (4.72).

$$1 - \exp\left(-\frac{u}{2^{n+1}}\right) = \frac{u}{2^{n+1}} + o\left(\frac{u}{2^{n+1}}\right), \quad (4.74)$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+1} \left[1 - \exp\left(-\frac{u}{2^{n+1}}\right) \right] = u. \quad (4.75)$$

Or d'après la proposition 4.3.2, $2^{-2n}N_0^n$ converge en loi vers une loi stable $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$. Comme Z_1 est de loi $u\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$, on obtient le résultat souhaité :

$$2^{n+1} \left[1 - \exp\left(-\frac{u}{2^{n+1}}\right) \right] \cdot \frac{N_0^n}{2^{2n}} \xrightarrow{d} Z_1.$$

★ Étudions maintenant (4.73).

Pour montrer la convergence en probabilité, nous allons voir Y_0^n comme une somme de variables aléatoires de loi de Bernoulli. Ainsi, nous pourrions appliquer le théorème central limite. Cependant Y_0^n est une somme aléatoire. Nous allons alors utiliser la convergence en loi de $2^{-2n}N_0^n$ ainsi que les trois lemmes de convergence précédents pour montrer que l'on peut tout de même appliquer le théorème central limite.

Y_0^n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(N_0^n, 1 - e^{-u/2^{n+1}})$ donc on peut l'écrire comme une somme de variables aléatoires de Bernoulli. Introduisons la notation S_m :

$$S_m = \sum_{j=1}^m \xi_j \quad \text{où } \xi_j \sim \mathcal{B}(1 - e^{-u/2^{n+1}}). \quad (4.76)$$

Ainsi,

$$Y_0^n \stackrel{d}{=} S_{N_0^n} = \sum_{j=1}^{N_0^n} \xi_j. \quad (4.77)$$

D'après le théorème central limite, il existe une variable aléatoire U de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ telle que

$$U_m := \frac{S_m - m(1 - e^{-u/2^{n+1}})}{\sqrt{m(1 - e^{-u/2^{n+1}})e^{-u/2^{n+1}}}} \xrightarrow{d} U. \quad (4.78)$$

Or nous avons vu que $2^{-2n}N_0^n$ converge en loi vers une loi stable $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$. Ainsi d'après le lemme 4.3.8, N_0^n converge en probabilité vers $+\infty$. On peut donc utiliser le lemme 4.3.7 et on obtient

$$U_{N_0^n} \xrightarrow{d} U. \quad (4.79)$$

Or

$$\frac{S_{N_0^n} - (1 - e^{-u/2^{n+1}})N_0^n}{2^{(1-\delta_2)n}} = U_{N_0^n} \cdot \frac{\sqrt{N_0^n(1 - e^{-u/2^{n+1}})e^{-u/2^{n+1}}}}{2^{(1-\delta_2)n}} \quad (4.80)$$

On peut réécrire le deuxième terme du produit sous la forme :

$$\frac{\sqrt{N_0^n(1 - e^{-u/2^{n+1}})e^{-u/2^{n+1}}}}{2^{(1-\delta_2)n}} = \sqrt{\frac{N_0^n}{2^{2n}}} \cdot \sqrt{\frac{2^{2n}(1 - e^{-u/2^{n+1}})e^{-u/2^{n+1}}}{2^{(2-2\delta_2)n}}} \quad (4.81)$$

Or

$$\frac{2^{2n}(1 - e^{-u/2^{n+1}})e^{-u/2^{n+1}}}{2^{(1-\delta_2)n}} = \underbrace{\frac{1}{2^{(1-2\delta_2)n+1}}}_{\xrightarrow[n]{0}} \cdot \underbrace{\frac{2^{n+1}}{u}(1 - e^{-u/2^{n+1}})}_{\xrightarrow[n]{1}} \cdot \underbrace{e^{-u/2^{n+1}}}_{\xrightarrow[n]{1}} \quad (4.82)$$

Comme $2^{-2n}N_0^n$ converge en loi vers une loi stable $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{\sqrt{N_0^n(1 - e^{-u/2^{n+1}})e^{-u/2^{n+1}}}}{2^{(1-\delta_2)n}} \xrightarrow[n]{d} 0. \quad (4.83)$$

Finalement,

$$\frac{Y_0^n - (1 - e^{-u/2^{n+1}})N_0^n}{2^{(1-\delta_2)n}} = \frac{S_{N_0^n} - (1 - e^{-u/2^{n+1}})N_0^n}{2^{(1-\delta_2)n}} \xrightarrow[n]{d} 0. \quad (4.84)$$

On obtient donc le résultat du lemme . □

Démonstration (Lemme 4.3.6). Soit $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$. Par définition, Y_{k+1}^n suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{2Y_k^n} (|C_i| + 1), 1 - \exp\left(-\frac{u}{2^{n+1}}\right)\right)$. On souhaite calculer E_k . Pour simplifier les expressions, nous noterons

$$p = 1 - \exp\left(-\frac{u}{2^{n+1}}\right). \quad (4.85)$$

Dans un premier temps, calculons l'espérance conditionnelle suivante pour les entiers $i \in \mathbb{N}$.

$$E_k(i) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{-sY_{k+1}^n}{2^{n-1}}\right) \middle| \frac{Y_k^n}{2^{n-1}} = \frac{i}{2^{n-1}}\right]. \quad (4.86)$$

$$E_k(i) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \exp\left(-\frac{sl}{2^{n-1}}\right) \mathbb{P}(Y_{k+1}^n = l | Y_k^n = i) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \exp\left(-\frac{sl}{2^{n-1}}\right) \mathbb{P}(Y'_{k+1,i} = l), \quad (4.87)$$

où $Y'_{k+1,i}$ est une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{2i} (|C_i| + 1), p\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} E_k(i) &= \sum_{l \in \mathbb{N}} \exp\left(-\frac{sl}{2^{n-1}}\right) \sum_{j \geq l-2i} \mathbb{P}(Y'_{k+1,i} = l | \sum_{i=1}^{2i} |C_i| = j) \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2i} |C_i| = j\right) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{N}} \exp\left(-\frac{sl}{2^{n-1}}\right) \sum_{j \geq l-2i} \binom{j+2i}{l} p^l (1-p)^{j+2i-l} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2i} |C_i| = j\right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{l \leq j+2i} \binom{j+2i}{l} \exp\left(-\frac{sl}{2^{n-1}}\right) p^l (1-p)^{j+2i-l} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2i} |C_i| = j\right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{l \leq j+2i} \binom{j+2i}{l} \left(\exp\left(-\frac{s}{2^{n-1}}\right)p\right)^l (1-p)^{j+2i-l} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2i} |C_i| = j\right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \left[\exp\left(-\frac{s}{2^{n-1}}\right)p + 1 - p\right]^{j+2i} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2i} |C_i| = j\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\left[\exp\left(-\frac{s}{2^{n-1}}\right)p + 1 - p\right]^{2i + \sum_{i=1}^{2i} |C_i|}\right]. \end{aligned}$$

Comme les variables aléatoires $\{|C_i|\}_{i \geq 1}$ sont i.i.d, de loi ν_{cc} , et que la fonction génératrice d'une variable aléatoire $|C|$ de loi ν_{cc} est $f_{|C|}(x) = \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} E_k(i) &= \left[\exp\left(-\frac{s}{2^{n-1}}\right)p + 1 - p\right]^{2i} \left[f_{|C|}\left(\exp\left(-\frac{s}{2^{n-1}}\right)p + 1 - p\right)\right]^{2i} \\ &= \left[1 - \sqrt{1 - \left(\exp\left(-\frac{s}{2^{n-1}}\right)p + 1 - p\right)}\right]^{2i}. \end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant p par sa valeur, on obtient le résultat.

$$E_k = \left[1 - \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-s}{2^{n-1}}\right)\left(1 - \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}}\right)\right) - \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}}\right)}\right]^{2Y_k^n}. \quad (4.88)$$

□

Démonstration (Proposition 4.3.4). Montrons cette proposition par récurrence sur k . Posons l'hypothèse de récurrence suivante

$$(\mathcal{P}_k) : \left(\frac{Y_0^n}{2^{n-1}}, \dots, \frac{Y_k^n}{2^{n-1}} \right) \xrightarrow{d} (Z_1, \dots, Z_{k+1}). \quad (4.89)$$

- Initialisation. D'après le lemme 4.3.5, (\mathcal{P}_0) est vraie.
- Supposons (\mathcal{P}_k) vraie et montrons (\mathcal{P}_{k+1}) .

Nous allons montrer que la transformée de Laplace de $\left(\frac{Y_0^n}{2^{n-1}}, \dots, \frac{Y_{k+1}^n}{2^{n-1}} \right)$ converge simplement vers celle de (Z_1, \dots, Z_{k+2}) .

★ Soit $(s_0, \dots, s_{k+1}) \in [0, \infty)^{k+2}$. Calculons $\mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=0}^{k+1} \frac{-s_i Y_i^n}{2^{n-1}}\right)\right)$.

Pour calculer cette espérance, nous allons conditionner par le $(k+1)$ -uplet $\left(\frac{Y_0^n}{2^{n-1}}, \dots, \frac{Y_k^n}{2^{n-1}} \right)$ en vue d'utiliser le fait que le processus $\{Y_k^n\}_{k \geq 0}$ est une chaîne de Markov.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=0}^{k+1} \frac{-s_i Y_i^n}{2^{n-1}}\right)\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=0}^{k+1} \frac{-s_i Y_i^n}{2^{n-1}}\right) \middle| \left(\frac{Y_0^n}{2^{n-1}}, \dots, \frac{Y_k^n}{2^{n-1}}\right)\right]\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=0}^k \frac{-s_i Y_i^n}{2^{n-1}}\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{-s_{k+1} Y_{k+1}^n}{2^{n-1}}\right) \middle| \left(\frac{Y_0^n}{2^{n-1}}, \dots, \frac{Y_k^n}{2^{n-1}}\right)\right]\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=0}^k \frac{-s_i Y_i^n}{2^{n-1}}\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{-s_{k+1} Y_{k+1}^n}{2^{n-1}}\right) \middle| \frac{Y_k^n}{2^{n-1}}\right]\right). \end{aligned} \quad (4.90)$$

D'après le lemme 4.3.6, on peut écrire

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=0}^{k+1} \frac{-s_i Y_i^n}{2^{n-1}}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=0}^k \frac{-s_i Y_i^n}{2^{n-1}}\right) \exp\left(2^n \ln[f(s_{k+1}, n)] \frac{Y_k^n}{2^{n-1}}\right)\right) \quad (4.91)$$

$$\text{où } f(s_{k+1}, n) = 1 - \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-s_{k+1}}{2^{n-1}}\right) \left(1 - \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}}\right)\right) - \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}}\right)} \quad (4.92)$$

★ Calculons la limite en n de la transformée de Laplace précédente. Pour cela, étudions pour n grand la quantité $f(s_{k+1}, n)$ définie en (4.92).

$$\begin{aligned} f(s_{k+1}, n) &= 1 - \left[1 - \left(1 - \frac{s_{k+1}}{2^{n-1}} + \frac{s_{k+1}^2}{2^{2n-1}} + o\left(\frac{1}{2^{2n-1}}\right)\right) \cdot \left(\frac{u}{2^{n+1}} - \frac{u^2}{2^{2n+3}} + o\left(\frac{1}{2^{2n+3}}\right)\right)\right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{u}{2^{n+1}} + \frac{u^2}{2^{2n+3}} + o\left(\frac{1}{2^{2n+3}}\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(s_{k+1}, n) &= 1 - \left[\left(\frac{s_{k+1}}{2^{n-1}} - \frac{s_{k+1}^2}{2^{2n-1}} + o\left(\frac{1}{2^{2n-1}}\right)\right) \cdot \left(\frac{u}{2^{n+1}} - \frac{u^2}{2^{2n+3}} + o\left(\frac{1}{2^{2n+3}}\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \left[\frac{s_{k+1}u}{2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{s_{k+1}u}}{2^n} [1 + o(1)]^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{s_{k+1}u}}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \ln(f(s_{k+1}, n)) = -\sqrt{s_{k+1}u}. \quad (4.93)$$

Utilisons maintenant l'hypothèse de récurrence. Comme la suite $(s_k - 2^n \ln(f(s_{k+1}, n)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $s_k + \sqrt{s_{k+1}u}$, on obtient la convergence en loi suivante :

$$\left(\frac{Y_0^n}{2^{n-1}}, \dots, (s_k - 2^n \ln[f(s_{k+1}, n)]) \frac{Y_k^n}{2^{n-1}} \right) \xrightarrow{d} (Z_1, \dots, (s_k + \sqrt{s_{k+1}u})Z_{k+1}). \quad (4.94)$$

En utilisant la convergence des transformées de Laplace au point $(s_0, \dots, s_{k-1}, 1)$, on obtient alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\exp \left(\sum_{i=0}^{k+1} \frac{-s_i Y_i^n}{2^{n-1}} \right) \right) = \mathbb{E} \left(\exp \left(- \sum_{i=1}^{k+1} s_i Z_i - \sqrt{s_{k+1}u} Z_{k+1} \right) \right). \quad (4.95)$$

★ Montrons que la limite de (4.95) est bien égale à la transformée de Laplace de (Z_1, \dots, Z_{k+2}) au point (s_0, \dots, s_{k+1}) . Pour cela, nous allons conditionner par (Z_1, \dots, Z_{k+1}) et utiliser une propriété des processus de branchement à temps discret et espace d'états continu.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\exp \left(- \sum_{i=0}^{k+1} s_i Z_{i+1} \right) \right) &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{i=0}^{k+1} s_i Z_{i+1} \right) \middle| (Z_1, \dots, Z_{k+1}) \right] \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\exp \left(- \sum_{i=0}^k s_i Z_{i+1} \right) \mathbb{E} \left[\exp(-s_{k+1} Z_{k+2}) \middle| (Z_1, \dots, Z_{k+1}) \right] \right). \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2.12, comme la transformée de log-Laplace d'une variable aléatoire de loi $u\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$ est $h(s) = \sqrt{su}$ (proposition 2.4.7), on obtient donc

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(- \sum_{i=0}^{k+1} s_i Z_{i+1} \right) \right) = \mathbb{E} \left(\exp \left(- \sum_{i=0}^k s_i Z_{i+1} - \sqrt{s_{k+1}u} Z_{k+1} \right) \right). \quad (4.96)$$

★ Finalement, on a bien la convergence simple de la transformée de Laplace

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\exp \left(\sum_{i=0}^{k+1} \frac{-s_i Y_i^n}{2^{n-1}} \right) \right) = \mathbb{E} \left(\exp \left(- \sum_{i=0}^{k+1} s_i Z_{i+1} \right) \right), \quad (4.97)$$

d'où le résultat. □

Lien entre les limites des processus $(N_k^n)_{k \geq 0}$ et $(Y_k^n)_{k \geq 0}$

Proposition 4.3.10. *Pour tout entier $k \geq 0$, on a la convergence en probabilité suivante*

$$\frac{Y_k^n}{2^{n-1}} - \frac{uN_k^n}{2^{2n}} \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} 0. \quad (4.98)$$

Démonstration. Pour montrer ce résultat, nous allons utiliser le théorème limite central de la même manière que dans le lemme 4.3.5. Pour cela, nous avons besoin de savoir que $2^{-2n}N_k^n$ converge en loi vers une variable aléatoire non dégénérée. Nous allons le montrer en utilisant le lemme de convergence 4.3.9 et la convergence des variables aléatoires $2^{1-n}Y_k^n$ que nous venons de voir.

Dans la démonstration du lemme 4.3.5, la convergence en probabilité (4.98) est montrée pour $k = 0$. Montrons là pour $k \geq 1$.

★ Commençons par montrer la convergence en loi de la variable aléatoire $2^{-2n}N_k^n$. Par définition de N_k^n ,

$$\frac{N_k^n}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=1}^{2Y_{k-1}^n} (|C_i| + 1) = \frac{1}{(2Y_{k-1}^n)^2} \sum_{i=1}^{2Y_{k-1}^n} (|C_i| + 1) \cdot \frac{(2Y_{k-1}^n)^2}{2^{2n}}. \quad (4.99)$$

Comme $2^{1-n}Y_{k-1}^n \xrightarrow{d} Z_k$, on obtient la convergence en loi du carré de ces variables aléatoires

$$\frac{(2Y_{k-1}^n)^2}{2^{2n}} \xrightarrow{d} Z_k^2. \quad (4.100)$$

D'après la proposition 2.4.6, les variables aléatoires $\{|C_i|\}_i$ sont dans le domaine d'attraction d'une loi stable $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$. Soit G une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$. Par le lemme 4.3.8

$$2^{1-n}Y_{k-1}^n \xrightarrow{d} Z_k \quad \text{et} \quad Y_{k-1}^n \xrightarrow{\mathbb{P}} +\infty.$$

De plus les variables aléatoires $2^{-2n}(2Y_{k-1}^n)^2$, Z_k^2 et $2^{1-n}Y_{k-1}^n$ sont chacune indépendantes des variables aléatoires G et $n^{-2} \sum_{i=1}^n (|C_i| + 1)$. Ainsi on peut utiliser le lemme 4.3.9 et on obtient l'existence d'une variable aléatoire A_1 telle que

$$\frac{N_k^n}{2^{2n}} \xrightarrow{d} A_1. \quad (4.101)$$

★ Montrons maintenant le résultat de convergence (4.98).

On peut décomposer notre étude en deux parties :

$$\begin{aligned} \frac{Y_k^n}{2^{n-1}} - \frac{uN_k^n}{2^{2n}} &= \frac{1}{2^{n-1}} \left(Y_k^n - \left(1 - \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}}\right) \right) N_k^n \right) \\ &\quad + \left(\frac{1 - \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}}\right)}{2^{n-1}} - \frac{u}{2^{2n}} \right) N_k^n. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n} \left(\frac{1 - \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}}\right)}{2^{n-1}} - \frac{u}{2^{2n}} \right) = 0, \quad (4.103)$$

et que $2^{-2n}N_k^n$ converge en loi vers A_1 , on a la convergence en probabilité suivante

$$\left(\frac{1 - \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}}\right)}{2^{n-1}} - \frac{u}{2^{2n}} \right) N_k^n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad (4.104)$$

De la convergence en loi (4.101) que nous venons d'établir, on obtient la convergence en probabilité de N_k^n vers $+\infty$ en appliquant le lemme 4.3.8. Comme la variable aléatoire Y_k^n suit une loi binomiale de paramètre N_k^n et $1 - \exp(-u/2^{n+1})$, de la même manière que dans la démonstration du lemme 4.3.5, on obtient la convergence

$$\frac{1}{2^{n-1}} \left(Y_k^n - \left(1 - \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}}\right) \right) N_k^n \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad (4.105)$$

Finalement (4.104) et (4.105) nous donnent le résultat. \square

Convergence en loi du processus $(N_k^n)_{n \geq 0}$

Des propositions 4.3.4 et 4.3.10, on déduit la convergence en loi du processus $(u2^{-2n}N_k^n)_{k \geq 0}$ vers le processus $(Z_{k+1})_{k \geq 0}$:

Théorème 4.3.11 (Comportement limite du processus $(N_k^n)_{k \geq 0}$). *Le processus de Galton-Watson $(u2^{-2n}N_k^n)_{k \geq 0}$ converge en loi vers le processus de branchement à temps discret et espace d'états continu $(Z_{k+1})_{k \geq 0}$, au sens des lois fini-dimensionnelles.*

Nous venons d'étudier les lois fini-dimensionnelles du processus $(u2^{-2n}N_k^n)_{k \geq 0}$. C'est le premier pas vers l'étude de la taille totale de ce processus que nous allons effectuer maintenant.

4.3.4.2 Taille totale du processus

Pour déterminer la taille de ce que l'on rajoute à l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ au temps t , nous sommes intéressés par la taille totale du processus $(u2^{-2n}N_k^n)_{k \geq 0}$. Nous allons montrer que la taille totale de ce processus converge en loi vers celle du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$. Pour montrer ce résultat, nous allons utiliser la propriété d'extinction ou d'explosion d'un processus de branchement, pour séparer l'étude des cas où le processus explose ou s'éteint. Nous allons aussi utiliser le résultat de convergence en loi obtenu au théorème 4.3.11 du paragraphe précédent.

Théorème 4.3.12 (Convergence en loi des populations totales). *La suite des variables aléatoires $\left(\sum_{k \geq 0} u2^{-2n}N_k^n\right)_{n \geq 0}$ représentant la population totale du processus $(u2^{-2n}N_k^n)_{k \geq 0}$ converge en loi vers la somme totale $\sum_{k \geq 1} Z_k$ du processus de branchement limite $(Z_k)_{k \geq 0}$.*

Pour montrer ce théorème, nous allons utiliser le lemme suivant, qui est une étude un peu plus précise du comportement du processus $(2^{-2n}N_k^n)_{k \geq 0}$.

Lemme 4.3.13 (Comportement de $(2^{-2n}N_k^n)_{k \geq 0}$). *Soit $\frac{3}{2} < \delta < 2$ et $h < 1$. Alors il existe un entier J et deux constantes positives C_1 et C_2 tels que pour tout entier*

$n \geq J$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq 1} \left\{ \frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \left\lfloor \frac{h}{2^k} \right\rfloor \right\} \mid \frac{N_Q^n}{2^{2n}} \leq h\right) \geq \exp\left(-C_1\sqrt{h} - C_2n\frac{1}{2^{(\delta-1)n}}\right)$$

Nous allons montrer le théorème 4.3.12 en admettant le lemme 4.3.13, puis nous effectuerons la démonstration de ce lemme.

Démonstration (du théorème 4.3.12). Pour montrer ce résultat, nous allons montrer la convergence des transformées de Laplace. Soit $s > 0$. On souhaite montrer que la différence suivante tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$\left| \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} Z_k\right)\right] - \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] \right|. \quad (4.106)$$

Soit $\epsilon > 0$.

Pour faire intervenir le résultat de convergence en loi des processus $(u2^{-2n}N_k^n)_{k \geq 0}$ (théorème 4.3.11), nous allons faire apparaître des sommes partielles et non des sommes infinies. L'idée va être alors de choisir un rang Q assez grand tel que la variable aléatoire Z_Q soit assez grande ou assez petite pour pouvoir dire quelque chose sur le reste de la série. Ensuite, nous choisirons un entier n assez grand pour que entre autres les Q -uplets $(u2^{-2n}N_0^n, \dots, u2^{-2n}N_k^n)$ et (Z_1, \dots, Z_{k+1}) soient assez proches, et que $u2^{-2n}N_Q^n$ soit assez petit ou assez grand. Formalisons cela.

- Soit $h > 0$ (petit) et $M > 0$ (grand) deux réels tels que

$$e^{-sM} < \epsilon \quad \text{et} \quad \max\left(h, \sqrt{h}, sh, \sqrt{\frac{h}{u}}, \frac{h}{u}\right) < \epsilon. \quad (4.107)$$

- Soit Q un entier tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$\mathbb{P}(Z_Q < h) + \mathbb{P}(Z_Q > M) \geq 1 - \epsilon \quad (4.108)$$

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sum_{k=Q}^{\infty} Z_k > \epsilon\right\} \cap \{Z_Q < h\}\right) \leq 2\epsilon. \quad (4.109)$$

L'existence d'un entier Q_1 tel que pour tout entier $Q \geq Q_1$ la première condition est vérifiée résulte du théorème 2.2.15 sur l'extinction ou d'explosion des processus de branchement à temps discret et espace d'états continu .

Montrons qu'il existe un entier Q_2 tel que la deuxième condition soit vérifiée pour tous les entiers $Q \geq Q_2$. Utilisons pour cela l'évènement "la somme $\sum_{k \geq 0} Z_k$ est finie" et son complémentaire.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{k=Q}^{\infty} Z_k > \epsilon\right\} \cap \{Z_Q < h\}\right) &= \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{k=Q}^{\infty} Z_k > \epsilon\right\} \cap \{Z_Q < h\} \cap \left\{\sum_{k \geq 0} Z_k < \infty\right\}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{k=Q}^{\infty} Z_k > \epsilon\right\} \cap \{Z_Q < h\} \cap \left\{\sum_{k \geq 0} Z_k = \infty\right\}\right) \end{aligned} \quad (4.110)$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{k=Q}^{\infty} Z_k > \epsilon\right\} \cap \{Z_Q < h\}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{k=Q}^{\infty} Z_k > \epsilon\right\} \cap \left\{\sum_{k \geq 0} Z_k < \infty\right\}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\{Z_Q < h\} \cap \left\{\sum_{k \geq 0} Z_k = \infty\right\}\right) \end{aligned} \quad (4.111)$$

Il existe un entier Q_3 tel que le premier terme du majorant de (4.111) soit inférieur à ϵ pour tous les entiers $Q \geq Q_3$. D'autre part, comme la somme $\sum_{k \geq 0} Z_k$ est infinie si et seulement si le processus explose (théorème 2.2.16), il existe un entier Q_4 tel que le deuxième terme du majorant de (4.111) soit inférieur à ϵ pour tous les entiers $Q \geq Q_4$. D'où l'existence de l'entier Q final recherché.

• Déterminons maintenant un entier J à partir duquel plusieurs conditions sur le processus $(u2^{-2n}N_k^n)_{n \geq 0}$ vont être vérifiées.

Soit J_0 un entier tel que pour tout entier $n \geq J_0$ le résultat du lemme 4.3.13 soit vrai pour $h' = \frac{h}{u}$ et que la condition suivante soit vérifiée :

$$n \frac{1}{2^{(\delta-1)n}} < \epsilon \quad (4.112)$$

Nous avons vu au théorème 4.3.11 la convergence en loi suivante pour tout entier $j \in \mathbb{N}$:

$$\left(\frac{uN_0^n}{2^{2n}}, \dots, \frac{uN_j^n}{2^{2n}}\right) \xrightarrow{d} (Z_1, \dots, Z_{j+1}). \quad (4.113)$$

Donc il existe un entier J_1 tel que pour tout $n \geq J_1$

$$\left| \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] \right| \leq \epsilon \quad (4.114)$$

$$\forall n \geq N_2, \mathbb{P}\left(\frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < h\right) + \mathbb{P}\left(\frac{uN_Q^n}{2^{2n}} > M\right) \geq 1 - 3\epsilon. \quad (4.115)$$

Finalement, posons

$$J = \max(J_0, J_1). \quad (4.116)$$

Considérons un entier $n \geq J$ pour toute la suite.

• Pour étudier la différence (4.106), nous allons utiliser les sommes partielles des deux processus et découper cette différence en trois morceaux.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} Z_k\right)\right] - \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] \\ = \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} Z_k\right)\right] - \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k\right)\right] \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$+ \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k\right)\right] - \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] \quad (4.118)$$

$$+ \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] - \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] \quad (4.119)$$

Nous allons traiter ces trois termes séparément. Le deuxième terme (4.118) va être contrôlé par la convergence en loi des processus $(u2^{-2n}N_k^n)_{k \geq 0}$ et notre choix de n . Pour l'étude des deux autres termes, nous allons utiliser les évènements où les variables de rang Q ou $Q + 1$ des deux processus sont inférieures à h , supérieures à M ou comprises entre ces deux valeurs. La probabilité du dernier évènement est petite au vu du choix de Q et n . Sur l'évènement où elles sont supérieures à M , comme les variables aléatoires sont positives, les sommes partielles et infinies sont elles aussi supérieures à M et donc leur transformée de Laplace est petite par le choix de M assez grand. Le dernier cas va être traité différemment pour les deux processus. Dans le cas de $(Z_k)_{k \geq 0}$, c'est le choix de Q qui nous donne que le reste de la série est petit avec une grande probabilité. Pour le processus $(u2^{-2n}N_k^n)_{n \geq 0}$, nous allons utiliser le lemme 4.3.13 pour obtenir un résultat similaire pour le reste de la série.

▷ Commençons par le deuxième terme (4.118).

Par le choix de n fait en (4.116), on a directement

$$\left| \mathbb{E} \left[\exp \left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k \right) - \exp \left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}} \right) \right] \right| \leq \epsilon. \quad (4.120)$$

▷ Étudions maintenant le premier terme du membre de droite de (4.117).

Nous allons utiliser les évènements $\{Z_Q < h\}$ et $\{Z_Q > M\}$.

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(-s \sum_{k \geq 1} Z_k \right) \right] - \mathbb{E} \left[\exp \left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k \right) \right] \quad (4.121)$$

$$= \mathbb{E} \left(\left[\exp \left(-s \sum_{k \geq 1} Z_k \right) - \exp \left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k \right) \right] I_{\{h < Z_Q < M\}} \right) \quad (4.122)$$

$$+ \mathbb{E} \left(\left[\exp \left(-s \sum_{k \geq 1} Z_k \right) - \exp \left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k \right) \right] I_{\{Z_Q > M\}} \right) \quad (4.123)$$

$$+ \mathbb{E} \left(\left[\exp \left(-s \sum_{k \geq 1} Z_k \right) - \exp \left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k \right) \right] I_{\{Z_Q < h\}} \right) \quad (4.124)$$

Comme toutes les variables aléatoires sont positives, toutes les sommes sont positives et on obtient une majoration du premier terme :

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left(\left[\exp \left(-s \sum_{k \geq 0} Z_k \right) - \exp \left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k \right) \right] I_{\{h < Z_Q < M\}} \right) \right| &\leq 2 \mathbb{P}(h < Z_Q < M) \\ &\leq 2\epsilon. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Comme les variables aléatoires Z_k sont positives,

$$\sum_{k \geq 1} Z_k \geq \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k \geq Z_Q. \quad (4.126)$$

D'où une majoration du deuxième terme :

$$\left| \mathbb{E} \left(\left[\exp \left(-s \sum_{k \geq 1} Z_k \right) - \exp \left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k \right) \right] I_{\{Z_Q > M\}} \right) \right| \leq 2e^{-sM}. \quad (4.127)$$

Par le choix de M , on obtient finalement

$$\left| \mathbb{E} \left(\left[\exp \left(-s \sum_{k \geq 1} Z_k \right) - \exp \left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k \right) \right] I_{\{Z_Q > M\}} \right) \right| \leq 2\epsilon. \quad (4.128)$$

Pour le dernier terme, nous allons utiliser l'évènement $\{\sum_{k=Q}^{\infty} Z_k > \epsilon\}$ et son complémentaire.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left[\exp \left(-s \sum_{k \geq 1} Z_k \right) - \exp \left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k \right) \right] I_{\{Z_Q < h\}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left[\exp \left(-s \sum_{k \geq 1} Z_k \right) - \exp \left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k \right) \right] I_{\{Z_Q < h\}} \left(I_{\{\sum_{k=Q}^{\infty} Z_k > \epsilon\}} + I_{\{\sum_{k=Q}^{\infty} Z_k < \epsilon\}} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.129)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left(\left[\exp \left(-s \sum_{k \geq 1} Z_k \right) - \exp \left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k \right) \right] I_{\{Z_Q < h\}} \right) \right| \\ & \leq \mathbb{P} \left(\left\{ \sum_{k=Q}^{\infty} Z_k > \epsilon \right\} \cap \{Z_Q < h\} \right) + (1 - e^{-s\epsilon}) \\ & \leq 2\epsilon + (1 - e^{-s\epsilon}) \end{aligned} \quad (4.130)$$

Finalement,

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(-s \sum_{k \geq 1} Z_k \right) \right] - \mathbb{E} \left[\exp \left(-s \sum_{k=1}^{Q+1} Z_k \right) \right] \leq 6\epsilon + (1 - e^{-s\epsilon}). \quad (4.131)$$

▷ Il nous reste à traiter le cas du troisième terme

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}} \right) \right] - \mathbb{E} \left[\exp \left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}} \right) \right]. \quad (4.132)$$

C'est celui qui va demander le plus de travail. Comme pour l'étude du premier terme, nous allons utiliser les évènements

$$\left\{ \frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < h \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \frac{uN_Q^n}{2^{2n}} > M \right\}.$$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] - \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] \quad (4.133)$$

$$= \mathbb{E}\left(\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] I_{\left\{h < \frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < M\right\}}\right) \quad (4.134)$$

$$+ \mathbb{E}\left(\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] I_{\left\{\frac{uN_Q^n}{2^{2n}} > M\right\}}\right) \quad (4.135)$$

$$+ \mathbb{E}\left(\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] I_{\left\{\frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < h\right\}}\right). \quad (4.136)$$

En utilisant le choix de n (4.115) et le fait que les sommes sont positives, on obtient une majoration du premier terme (4.134)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] I_{\left\{h < \frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < M\right\}}\right) \\ & \leq 2 \mathbb{P}\left(h < \frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < M\right) \\ & \leq 6 \epsilon \end{aligned} \quad (4.137)$$

Le deuxième terme (4.135) se traite de la même manière que dans l'étude du même cas pour $(Z_k)_{k \geq 0}$, puisque les variables aléatoires N_k^n sont aussi positives et donc, par le choix de M ,

$$\left|\mathbb{E}\left(\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] I_{\left\{\frac{uN_Q^n}{2^{2n}} > M\right\}}\right)\right| \leq 2e^{-sM} \leq 2\epsilon. \quad (4.138)$$

Pour traiter le troisième terme (4.136), on va utiliser l'évènement

$$\bigcap_{k \geq 0} \left\{ \frac{uN_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k} \right\} \quad (4.139)$$

et son complémentaire. Si cet évènement est réalisé, le reste de la série est petit. Sinon, la probabilité de l'évènement complémentaire est petite par le lemme 4.3.13.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] I_{\left\{\frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < h\right\}}\right) \\ & = \mathbb{E}\left(\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] I_{\left\{\frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < h\right\}} I_{\bigcap_{k \geq 1} \left\{\frac{uN_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\}}\right) \\ & + \mathbb{E}\left(\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] I_{\left\{\frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < h\right\}} I_{\left\{\bigcap_{k \geq 1} \left\{\frac{uN_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\}\right\}^c}\right) \end{aligned} \quad (4.140)$$

Traitons le premier terme de (4.140)

En factorisant par la somme partielle de la série jusqu'à Q , on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] I_{\left\{\frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < h\right\}} I_{\bigcap_{k \geq 1} \left\{\frac{uN_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) \left[\exp\left(-s \sum_{k=Q+1}^{\infty} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - 1\right] I_{\bigcap_{k \geq 0} \left\{\frac{uN_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\}}\right) \end{aligned} \quad (4.141)$$

Or lorsque pour tous les entiers k , on a la relation $\frac{uN_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}$, on peut donc majorer le reste de la série

$$\sum_{k=Q+1}^{\infty} \frac{uN_k^n}{2^{2n}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h}{2^k} = h \quad (4.142)$$

D'où en majorant le premier terme exponentiel et les indicatrices par 1,

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}\left(\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] I_{\left\{\frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < h\right\}} I_{\bigcap_{k \geq 1} \left\{\frac{uN_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\}}\right) \right| \\ & \leq 1 - e^{-sh} \\ & \leq 1 - e^{-\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.143)$$

La deuxième majoration résulte du choix de h fait en (4.107).

Traitons le deuxième terme de (4.140)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] I_{\left\{\frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < h\right\}} I_{\bigcap_{k \geq 0} \left\{\frac{uN_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\}}\right)^c \\ & \leq 2 \mathbb{P}\left(\frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < h \cap \left\{\bigcap_{k \geq 0} \left\{\frac{uN_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\}\right\}^c\right) \\ & \leq 2 \mathbb{P}\left(\left\{\bigcap_{k \geq 0} \left\{\frac{uN_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\}\right\}^c \mid \frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < h\right) \\ & \leq 2\left(1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq 0} \left\{\frac{uN_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\} \mid \frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < h\right)\right). \end{aligned} \quad (4.144)$$

Pour montrer que la probabilité de la dernière inégalité précédente tend vers 1, utilisons le lemme 4.3.13.

Nous avons choisi J_0 en (4.116) tel que le résultat du lemme est vrai pour les entiers $n \geq J_0$, d'où

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] I_{\left\{\frac{uN_Q^n}{2^{2n}} < h\right\}} I_{\bigcap_{k \geq 0} \left\{\frac{uN_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\}}\right)^c \\ & \leq 2\left(1 - \exp\left(-C_1 \sqrt{h} - C_2 n \frac{1}{2^{(\delta-1)n}}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.145)$$

Finalement on obtient la majoration du troisième terme (4.119) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] \\ \leq 8\epsilon + 2\left(1 - \exp\left(-C_1\sqrt{h} - C_2n \frac{1}{2^{(\delta-1)n}}\right)\right) + 1 - e^{-\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.146)$$

Par les choix de h et de n , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right) - \exp\left(-s \sum_{k=0}^Q \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] \\ \leq 8\epsilon + 2\left(1 - e^{-(C_1+C_2)\epsilon}\right) + 1 - e^{-\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.147)$$

Maintenant, en utilisant les majorations des trois termes obtenues en (4.131), (4.120) et (4.147), on obtient une majoration de la différence de départ :

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 0} \frac{uN_k^n}{2^{2n}}\right)\right] - \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{k \geq 1} Z_k\right)\right]\right| \\ \leq 15\epsilon + 2\left(1 - e^{-(C_1+C_2)\epsilon}\right) + 2\left(1 - e^{-\epsilon}\right). \end{aligned} \quad (4.148)$$

Comme ce majorant tend bien vers 0 lorsque ϵ tend vers 0, on a le résultat cherché. \square

Démontrons maintenant le lemme 4.3.13.

Démonstration. Nous allons voir que l'on peut se ramener à l'étude de la probabilité d'une intersection finie d'évènements. Nous donnerons ensuite le schéma général de la preuve avant de la faire. Soit m un entier positif. En utilisant la formule de Bayes et le fait que $(N_k^n)_{k \geq 0}$ est une chaîne de Markov, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^m \left\{\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\} \mid \left\{\frac{N_Q^n}{2^{2n}} \leq h\right\}\right) &= \prod_{k=1}^m \mathbb{P}\left(\left\{\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\} \mid \bigcap_{l=0}^{k-1} \left\{\frac{N_{Q+l}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^l}\right\}\right) \\ &= \prod_{k=1}^m \mathbb{P}\left(\left\{\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\} \mid \left\{\frac{N_{Q+k-1}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^{k-1}}\right\}\right) \end{aligned} \quad (4.149)$$

S'il existe un entier K tel que $N_{Q+k}^n = 0$, alors pour tout entier $l \geq K$, $N_{Q+l}^n = 0$ par définition du processus $(N_k^n)_k$. De plus ce processus est à valeurs entières. Comme $h < 1$, si $k \geq 2n$, $h2^{2n-k} < 1$ donc

$$\{N_{Q+k}^n \leq h2^{2n-k}\} = \{N_{Q+k}^n = 0\}. \quad (4.150)$$

Ainsi, de (4.149) on déduit que pour tout entier $m > 2n$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^m \left\{\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\} \mid \left\{\frac{N_Q^n}{2^{2n}} \leq h\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \left\{\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\} \mid \left\{\frac{N_Q^n}{2^{2n}} \leq h\right\}\right) \quad (4.151)$$

Comme la suite d'évènements $\left(\bigcap_{k=1}^m \left\{\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\}\right)_m$ est décroissante et qu'une probabilité est finie, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq 1} \left\{\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\} \mid \left\{\frac{N_Q^n}{2^{2n}} \leq h\right\}\right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^m \left\{\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\} \mid \left\{\frac{N_Q^n}{2^{2n}} \leq h\right\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{2n} \left\{\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\} \mid \left\{\frac{N_Q^n}{2^{2n}} \leq h\right\}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{2n} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\} \mid \left\{\frac{N_{Q+k-1}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^{k-1}}\right\}\right) \end{aligned} \quad (4.152)$$

Donnons le schéma général de la preuve du lemme. L'objectif est de minorer le produit précédent. Pour cela nous allons dans un premier temps se ramener à des variables aléatoires N_{Q+k}^n toujours de la même forme, mais plus simples à étudier que les variables aléatoires N_{Q+k}^n . Puis, nous séparerons le produit (4.152) pour ces nouvelles variables aléatoires N_{Q+k}^n en deux parties. Dans un premier temps, nous étudierons ce produit pour $k > n$. Nous montrerons que dans ce cas la probabilité que la variable aléatoire N_{Q+k}^n soit nulle est grande. Dans un deuxième temps, nous étudierons le produit restant. Pour montrer que l'évènement complémentaire a une faible probabilité de se produire, l'argument clé est l'équivalent de la queue de la loi de la taille des composantes connexes vu au chapitre 2. Au cours de la démonstration, nous allons définir plusieurs entiers J_i au delà desquels les minoration ou majorations considérées seront vraies. L'entier J dans l'énoncé du lemme sera alors le maximum de ces entiers J_i .

Commençons par nous ramener à une variable aléatoire plus simple à étudier. Par définition

$$N_{Q+k}^n = \sum_{i=1}^{2Y_{Q+k}} (|C_i| + 1), \text{ où } Y_{Q+k} \sim \mathcal{B}\left(N_{Q+k-1}^n, 1 - \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}}\right)\right). \quad (4.153)$$

Comme les variables aléatoires $\{|C_i|\}_{i \in \mathbb{N}}$ sont positives et que la loi binomiale est une somme de variables aléatoires positives, on a pour tout entier k ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\} \mid \left\{\frac{N_{Q+k-1}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^{k-1}}\right\}\right) &\geq \mathbb{P}\left(\left\{\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\} \mid \left\{\frac{N_{Q+k-1}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^{k-1}}\right\}\right) \\ \text{où } N_{Q+k}^n &= \sum_{i=1}^{2Y_{Q+k}'} (|C_i| + 1) \text{ avec } Y_{Q+k}' \sim \mathcal{B}\left(\lfloor h2^{2n-k+1} \rfloor, 1 - \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.154)$$

Comme N_{Q+k}^n est indépendante de N_{Q+k-1}^n , on a

$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right\} \mid \left\{\frac{N_{Q+k-1}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^{k-1}}\right\}\right) \geq \mathbb{P}\left(\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right). \quad (4.155)$$

Finalement, on obtient la minoration

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq 1} \left\{ \frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k} \right\} \mid \left\{ \frac{N_Q^n}{2^{2n}} \leq h \right\}\right) \geq \prod_{k=1}^{2n} \mathbb{P}\left(\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right). \quad (4.156)$$

★ Étudions maintenant le produit (4.156) pour $n \leq k \leq 2n$. Soit un tel entier k . Nous allons nous ramener à l'étude de la probabilité que N_{Q+k}^n soit nulle.

$$\mathbb{P}\left(\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right) \geq \mathbb{P}\left(\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} = 0\right) = \mathbb{P}(Y_{Q+k}'^n = 0). \quad (4.157)$$

Comme $Y_{Q+k}'^n$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(\lfloor h2^{2n-k+1} \rfloor, 1 - \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}}\right)\right)$, on obtient

$$\mathbb{P}(Y_{Q+k}'^n = 0) = \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}} \lfloor h2^{2n-k+1} \rfloor\right) \geq \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}} h2^{2n-k+1}\right) = \exp(-uh2^{n-k-2}). \quad (4.158)$$

Ainsi, on obtient une minoration du produit :

$$\begin{aligned} \prod_{k=n+1}^{2n} \mathbb{P}\left(\left\{ \frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k} \right\} \mid \left\{ \frac{N_{Q+k-1}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^{k-1}} \right\}\right) &\geq \prod_{k=n+1}^{2n} \exp\left(-uh2^{n-k-2}\right) \\ &\geq \exp\left(-uh \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right) \\ &\geq \exp\left(-\frac{uh}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.159)$$

En posant $C_1' = \frac{u}{2}$, on obtient finalement

$$\prod_{k=n+1}^{2n} \mathbb{P}\left(\left\{ \frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k} \right\} \mid \left\{ \frac{N_{Q+k-1}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^{k-1}} \right\}\right) \geq e^{-C_1' h}. \quad (4.160)$$

★ Étudions maintenant le cas des entiers $1 \leq k \leq n$ pour le produit (4.156).

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k} \right\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left\{ \frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} > \frac{h}{2^k} \right\}\right) \quad (4.161)$$

Nous allons montrer qu'il existe une fonction $f(n)$ tendant vers 0 telle que

$$\mathbb{P}\left(\frac{N_{Q+k}^n}{2^{2n}} > \frac{h}{2^k}\right) \leq f(n). \quad (4.162)$$

Pour cela, nous allons étudier le cas où la variable aléatoire $Y_{Q+k}'^n$ est plus petite ou plus grande que son espérance, notée $a_{k,n}$ dans la suite. Si elle est plus grande, nous séparerons encore l'étude en deux, selon que la différence entre les deux est petite ou grande. Si la différence est petite, ou bien si $Y_{Q+k}'^n$ est inférieure à son espérance, nous utiliserons le comportement de la loi de la taille des composantes connexes

pour conclure. Dans le dernier cas, nous montrerons que la probabilité que Y'_{Q+k} soit beaucoup plus grande que son espérance est faible.

Nous noterons $p_n = 1 - \exp(\frac{-u}{2^{n+1}})$ pour simplifier les notations. Posons $a_{k,n} = p_n h 2^{2n-k+1}$ et soit l'évènement $A = \{Y'_{Q+k} \leq [a_{k,n}]\}$. Comme les variables aléatoires $(|C_i|)_i$ sont positives,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{N'_{Q+k}}{2^{2n}} > \frac{h}{2^k}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{[a_{k,n}]} (|C_i| + 1) > h 2^{2n-k}\right\} \cap A\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{[a_{k,n}]} (|C_i| + 1) + \sum_{i=1}^{[Y'_{Q+k} - a_{k,n}]} (|C_i| + 1) > h 2^{2n-k}\right\} \cap A^c\right). \end{aligned} \quad (4.163)$$

En utilisant le fait que si une somme de deux termes est plus grande que a , alors au moins un de ces deux termes est supérieur à $\frac{a}{2}$, on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{[a_{k,n}]} (|C_i| + 1) + \sum_{i=1}^{[Y'_{Q+k} - a_{k,n}]} (|C_i| + 1) > h 2^{2n-k}\right\} \cap A^c\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{[a_{k,n}]} (|C_i| + 1) > h 2^{2n-k-1}\right\} \cap A^c\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{[Y'_{Q+k} - a_{k,n}]} (|C_i| + 1) > h 2^{2n-k-1}\right\} \cap A^c\right). \end{aligned} \quad (4.164)$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{N'_{Q+k}}{2^{2n}} > \frac{h}{2^k}\right) &\leq 2\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{[a_{k,n}]} (|C_i| + 1) > h 2^{2n-k-1}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{[Y'_{Q+k} - a_{k,n}]} (|C_i| + 1) > h 2^{2n-k-1}\right\} \cap A^c\right). \end{aligned} \quad (4.165)$$

Nous allons commencer par étudier le deuxième terme du majorant. Pour cela, nous allons considérer le cas où la différence entre Y'_{Q+k} et son espérance est grande ou petite. Soit B l'évènement

$$B = \{Y'_{Q+k} - a_{k,n} > b_{k,n}\} \text{ où } b_{k,n} = \sqrt{h 2^{\delta n - k}} \text{ avec } 1 < \delta < 2. \quad (4.166)$$

Alors

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{\lfloor Y'_{Q+k} - a_{k,n} \rfloor} (|C_i| + 1) > h2^{2n-k-1}\right\} \cap A^c\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{\lfloor Y'_{Q+k} - a_{k,n} \rfloor} (|C_i| + 1) > h2^{2n-k-1}\right\} \cap B\right) \\
&+ \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{\lfloor Y'_{Q+k} - a_{k,n} \rfloor} (|C_i| + 1) > h2^{2n-k-1}\right\} \cap A^c \cap B^c\right)
\end{aligned} \tag{4.167}$$

D'où

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{\lfloor Y'_{Q+k} - a_{k,n} \rfloor} (|C_i| + 1) > h2^{2n-k-1}\right\} \cap A^c\right) \\
&\leq \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\lfloor b_{k,n} \rfloor} (|C_i| + 1) > h2^{2n-k-1}\right)
\end{aligned} \tag{4.168}$$

Utilisons l'inégalité de Hoeffding pour calculer $\mathbb{P}(B)$. Comme Y'_{Q+k} suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(\lfloor h2^{2n-k+1} \rfloor, 1 - \exp\left(\frac{-u}{2^{n+1}}\right)\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y'_{Q+k} - a_{k,n} > b_{k,n}) &\leq \frac{p_n(1-p_n)\lfloor h2^{2n-k} \rfloor}{b_{k,n}^2} \\
&\leq \frac{p_n(1-p_n)h2^{2n-k}}{h2^{\delta n-k}}
\end{aligned} \tag{4.169}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-p_n) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{u} p_n = 1$, il existe un entier J_1 tel que $\forall n \geq J_1$,

$$p_n(1-p_n) \leq 4 \frac{u}{2^{n+1}} \tag{4.170}$$

D'où

$$\mathbb{P}(Y'_{Q+k} - a_{k,n} > b_{k,n}) \leq \frac{2u}{2^{(\delta-1)n}} \tag{4.171}$$

Nous allons utiliser le même raisonnement pour majorer les probabilités restantes des inégalités (4.165) et (4.168) :

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\lfloor a_{k,n} \rfloor} (|C_i| + 1) > h2^{2n-k-1}\right) \text{ et } \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\lfloor b_{k,n} \rfloor} (|C_i| + 1) > h2^{2n-k-1}\right). \tag{4.172}$$

L'idée est d'utiliser la formule de la loi de la somme de la taille de composantes connexes ainsi que l'équivalent de la queue de distribution de la taille d'une composante connexe vues au chapitre 2, section 2.4.

En utilisant la formule de la loi de la somme de la taille de composantes connexes (proposition 2.4.8), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\lfloor a_{k,n} \rfloor} (|C_i| + 1) > h2^{2n-k-1}\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\lfloor a_{k,n} \rfloor} |C_i| > h2^{2n-k-1} - \lfloor a_{k,n} \rfloor\right) \\ &\leq \lfloor a_{k,n} \rfloor \mathbb{P}(|C| \geq h2^{2n-k-1} - \lfloor a_{k,n} \rfloor) + \frac{1}{2} \lfloor a_{k,n} \rfloor \\ &\leq a_{k,n} \mathbb{P}(|C| \geq h2^{2n-k-1} - \frac{1}{2} \lfloor a_{k,n} \rfloor) \end{aligned} \quad (4.173)$$

En utilisant l'équivalent de la queue de la loi de la taille des composantes connexes (proposition 2.4.3), on obtient qu'il existe J_2 tel que $\forall n \geq J_2$,

$$\sqrt{h2^{2n-k-1} - \frac{1}{2} \lfloor a_{k,n} \rfloor} \mathbb{P}(|C| \geq h2^{2n-k-1} - \frac{1}{2} \lfloor a_{k,n} \rfloor) \leq \frac{1}{2} \quad (4.174)$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\lfloor a_{k,n} \rfloor} (|C_i| + 1) > h2^{2n-k-1}\right) \leq \frac{1}{2} a_{k,n} \left[\sqrt{h2^{2n-k-1} - \frac{1}{2} \lfloor a_{k,n} \rfloor} \right]^{-1}. \quad (4.175)$$

On souhaite simplifier le terme sous la racine en ne gardant que $h2^{2n-k-1}$. Nous allons voir que cela est possible pour n assez grand car $a_{k,n}$ et $b_{k,n}$ sont négligeables devant $h2^{2n-k-1}$. Comme

$$a_{k,n} = p_n h2^{2n-k+1} = (1 - \exp(\frac{-u}{2n+1})) h2^{2n-k+1} \text{ et } b_{k,n} = \sqrt{h2^{\delta n - k}}, \quad (4.176)$$

les limites suivantes sont nulles

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{k,n}}{h2^{2n-k-1}} \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{k,n}}{h2^{2n-k-1}} = 0. \quad (4.177)$$

Ainsi, il existe un entier J_3 tel que $\forall n \geq J_3$,

$$\left[\sqrt{h2^{2n-k-1} - \frac{1}{2} \lfloor a_{k,n} \rfloor} \right]^{-1} \leq 2 \left[\sqrt{h2^{2n-k-1}} \right]^{-1}. \quad (4.178)$$

Ainsi, nous avons pour $a_{k,n}$ et $b_{k,n}$ la majoration :

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\lfloor a_{k,n} \rfloor} (|C_i| + 1) > h2^{2n-k-1}\right) \leq \frac{1}{2} a_{k,n} \left[\sqrt{h2^{2n-k-1}} \right]^{-1}. \quad (4.179)$$

Nous allons maintenant traiter les cas $a_{k,n}$ et $b_{k,n}$ séparément.

Commençons par $a_{k,n}$. En remplaçant $a_{k,n}$ par sa valeur, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\lfloor a_{k,n} \rfloor} (|C_i| + 1) > h2^{2n-k-1}\right) \leq \frac{1}{2} p_n h2^{2n-k+1} \left[\sqrt{h2^{2n-k-1}} \right]^{-1}. \quad (4.180)$$

Avec le choix de J_1 fait en (4.170), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\lfloor a_{k,n} \rfloor} (|C_i| + 1) > h2^{2n-k-1}\right) &\leq \frac{1}{2} p_n h 2^{2n-k+1} \left[\sqrt{h2^{2n-k-1}} \right]^{-1} \\ &\leq \sqrt{2hu} \sqrt{2^{-k}} \end{aligned} \quad (4.181)$$

Nous gardons ce majorant, car nous allons faire ensuite le produit pour les entiers $1 \leq k \leq n$.

Étudions maintenant le cas de $b_{k,n}$. En remplaçant $b_{k,n}$ par sa valeur, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\lfloor b_{k,n} \rfloor} (|C_i| + 1) > h2^{2n-k-1}\right) &\leq \frac{1}{2} \sqrt{h2^{\delta n-k}} \left[\sqrt{h2^{2n-k-1}} \right]^{-1} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{2^{(2-\delta)n-1}}}. \end{aligned} \quad (4.182)$$

Finalement, de l'inégalité (4.165), en utilisant (4.181) (4.171) (4.182), on obtient la majoration

$$\mathbb{P}\left(\frac{N'_{Q+k}}{2^{2n}} > \frac{h}{2^k}\right) \leq \sqrt{8hu^2 2^{-k}} + \frac{2u}{2^{(\delta-1)n}} + \sqrt{\frac{1}{2^{(2-\delta)n-1}}} \quad (4.183)$$

Revenons au produit sur les entiers $1 \leq k \leq n$:

$$\prod_{k=1}^n \mathbb{P}\left(\frac{N'_{Q+k}}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right) \geq \prod_{k=1}^n \left(1 - \sqrt{8hu^2 2^{-k}} - \frac{2u}{2^{(\delta-1)n}} - \sqrt{\frac{1}{2^{(2-\delta)n-1}}}\right) \quad (4.184)$$

Si $2 > \delta > \frac{3}{2}$, alors il existe une constante C_2 telle que

$$\prod_{k=1}^n \mathbb{P}\left(\frac{N'_{Q+k}}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right) \geq \prod_{k=1}^n \left(1 - \sqrt{8hu^2 2^{-k}} - C_2 \frac{1}{2^{(\delta-1)n}}\right) \quad (4.185)$$

Calculons maintenant ce produit. En utilisant la minoration $\log(1-x) \geq -x$ pour tout réel $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \log\left(1 - \sqrt{8hu^2 2^{-k}} - C_2 \frac{1}{2^{(\delta-1)n}}\right) &\geq \sum_{k=1}^n \left[-\sqrt{8hu^2 2^{-k}} - C_2 \frac{1}{2^{(\delta-1)n}}\right] \\ &\geq \sum_{k=1}^n \left[-\sqrt{8hu^2 2^{-k}}\right] - C_2 n \frac{1}{2^{(\delta-1)n}} \end{aligned} \quad (4.186)$$

Comme $\sum_{k=1}^n 2^{-k} = 1 - 2^{-n} \leq 1$, en posant $C'_2 = \sqrt{8u^2}$ et en revenant au produit on obtient la minoration :

$$\prod_{k=1}^n \mathbb{P}\left(\frac{N'_{Q+k}}{2^{2n}} \leq \frac{h}{2^k}\right) \geq \exp\left(-C'_2 \sqrt{h} - C_2 n \frac{1}{2^{(\delta-1)n}}\right) \quad (4.187)$$

Posons $J = \max(J_1, J_2, J_3)$ et $C_1 = C'_1 + C'_2$. Alors les minoration (4.160) et (4.187) nous donnent le résultat du lemme. \square

Maintenant que nous avons montré la convergence en loi des processus $(u2^{-2n} N_k^n)_{k \geq 0}$ et de leur taille totale vers le processus $(Z_{k+1})_{k \geq 0}$ et sa taille totale, étudions un peu plus en détails ce processus limite.

4.3.5 Étude du processus limite

Nous renvoyons au paragraphe 2.2.2 du chapitre 2 pour les résultats généraux sur les processus de branchement discrets à espace d'états continu.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le processus de branchement à temps discret et espace d'états continu $(Z_k)_{k \geq 0}$ introduit dans la définition 4.7 page 95. Nous allons nous intéresser à sa probabilité d'extinction, puis à la loi de sa taille totale pour finir par l'étude du comportement de la taille des générations sur les évènements d'extinction et d'explosion.

4.3.5.1 Probabilité d'extinction du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$

En vue d'utiliser les résultats sur les processus de branchement à temps discret et espace d'états continu vus au chapitre 2, nous allons commencer par donner les valeurs des quantités m , a et $\mathbb{P}(Z_1 = 0)$ pour le processus $(Z_k)_{k \geq 0}$ que nous étudions ici.

Nous avons vu que la variable aléatoire Z_1 suit la loi $u\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$. Ainsi, Z_1 est une variable aléatoire continue, d'espérance infinie. On a donc les résultats suivants :

- $m = \infty$,
- $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$,
- $\forall x > 0, \mathbb{P}(Z_1 \leq x) > 0$, donc $a = 0$.

Nous pouvons maintenant passer à l'étude des probabilités q et r , qui sont respectivement les probabilités que Z_k soit nul à partir d'un certain rang et que Z_k tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

Proposition 4.3.14 (Probabilités d'extinction q et r). *Les probabilités q et r d'extinction du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$ ont les valeurs suivantes :*

$$q = \mathbb{P}(\exists k : Z_k = 0) = 0 \quad \text{et} \quad r = \mathbb{P}(Z_k \rightarrow 0) = e^{-u}. \quad (4.188)$$

Démonstration. 1) Comme nous sommes dans le cas où $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$, d'après le théorème 2.2.14, $q = 0$.

2) Pour déterminer r , d'après le théorème 2.2.13, il faut déterminer la limite en n de $h_n(s) = -\log(\mathbb{E}(e^{-sZ_n}))$. D'après ce même théorème, commençons par voir si h possède un point fixe.

Dans la proposition 2.4.7, nous avons vu que la transformée de log-Laplace d'une variable aléatoire G de loi $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$ est la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $s \mapsto \sqrt{s}$. Comme Z_1 est de loi $u\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\forall s > 0, h(s) = \sqrt{us}. \quad (4.189)$$

Ainsi h possède un point fixe qui vaut $s_0 = u$. D'après le théorème 2.2.13, on obtient

$$-\log(r) = s_0 = u, \quad \text{soit} \quad r = e^{-u}. \quad (4.190)$$

□

Remarque 11. La valeur de r est la même que la valeur de la limite de la probabilité d'extinction du processus discret étudiée au paragraphe 4.3.3.

Intéressons nous maintenant à l'étude la taille totale du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$.

4.3.5.2 Population totale

Notons S la population totale du processus de branchement $(Z_k)_{k \geq 0}$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n Z_k. \tag{4.191}$$

Comme les tailles des générations successives sont positives, S est bien définie et peut valoir $+\infty$. Nous allons utiliser le théorème 2.2.16 pour obtenir la proposition suivante.

Proposition 4.3.15 (Taille totale). *La loi de la taille totale S du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$ vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. $\mathbb{P}(S < \infty) = e^{-u}$.
2. $\mathbb{E}(e^{-sS}) = \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{u} + \sqrt{u + 4s}}{2} \right)^2 \right]$.

Démonstration. 1) D'après le théorème 2.2.16, $\mathbb{P}(S < \infty) = r$. Or nous avons vu à la proposition 4.3.14 que $r = e^{-u}$ d'où le résultat.

2) D'après le théorème 2.2.16, comme $r > 0$, $k(s) = -\log(\mathbb{E}(e^{-sS}))$ est donnée par la formule

$$\forall s > 0, k(s) = \underbrace{\{s - \log(r) - h(s - \log(r))\}^{inv}}_{f(s)} - \log(r). \tag{4.192}$$

Comme ici $-\log(r) = u$ et $h(s) = \sqrt{us}$, on obtient

$$f(s) = s + u - \sqrt{u(s + u)}. \tag{4.193}$$

Nous obtenons le tableau de variations de la fonction f :

s	$-u$	$\frac{-3u}{4}$	0	$+\infty$
$f'(s)$	$-$	0	$+$	
$f(s)$	0	\searrow	\nearrow	$+\infty$

$\frac{-u}{4}$

La fonction f est donc bijective de $[0, +\infty)$ sur $[0, +\infty)$. Cherchons son inverse. Soit $y \in]0, +\infty)$. Cherchons à résoudre l'équation d'inconnue s

$$y = s + u - \sqrt{u(s + u)}. \tag{4.194}$$

En passant les deux membres au carré après avoir retranché $s + u$, on obtient l'équation

$$y^2 - 2y(s + u) + (s + u)^2 = u(s + u).$$

Soit

$$y^2 - 2y(s + u) + s(s + u) = 0.$$

ou encore

$$s^2 + (u - 2y)s + y(y - 2u) = 0. \quad (4.195)$$

Le discriminant associé à cette équation vaut

$$\Delta = (u - 2y)^2 - 4y(y - 2u) = u^2 + 4yu. \quad (4.196)$$

Comme $y > 0$, $y > \frac{-u}{4}$ donc $\Delta > 0$. L'équation possède deux solutions. Nous cherchons une valeur de s strictement positive, donc on choisit la solution

$$s_1 = \frac{2y - u + \sqrt{u(u + 4y)}}{2}. \quad (4.197)$$

Ainsi, on obtient finalement l'inverse de f :

$$\forall s \in [0, \infty), g(s) = \frac{2s - u + \sqrt{u(u + 4s)}}{2}. \quad (4.198)$$

Il ne reste plus qu'à ajouter $-\log(r) = u$ pour obtenir k .

$$k(s) = \frac{2s + u + \sqrt{u(u + 4s)}}{2} = \left(\frac{\sqrt{u} + \sqrt{u + 4s}}{2} \right)^2. \quad (4.199)$$

D'où le résultat. □

En vue de comprendre un peu mieux le comportement du processus limite $(Z_k)_{k \geq 0}$, intéressons nous maintenant au comportement de la taille des générations de ce processus sur les évènements d'extinction et d'explosion.

4.3.5.3 Comportement des variables aléatoires Z_k

Nous allons voir ici comment utiliser les résultats énoncés au paragraphe 2.2.2.4 du chapitre 2. Nous allons voir des résultats de convergence en loi et de convergence presque sûre de fonctions non linéaires des variables aléatoires Z_k , lorsque k tend vers l'infini. En effet, nous verrons que le comportement de Z_k vers l'extinction ou l'explosion est exponentiel. Nous allons commencer par le comportement sur l'évènement d'explosion. Nous verrons ensuite le même type de comportement sur l'évènement d'extinction.

Comportement sur $\{Z_k \rightarrow \infty\}$

Commençons par un résultat de convergence en loi.

Proposition 4.3.16. *Il existe une variable aléatoire Z telle que les générations du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$ se comportent de la manière suivante :*

$$\frac{1}{2^k} \log(1 + Z_k) \xrightarrow{d} Z \quad (4.200)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mathbb{P}(Z \leq 0) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathbb{P}(Z \leq t) = \exp(-u \exp(-t)) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (4.201)$$

Démonstration. Comme Z_1 est de loi $u\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$, nous avons vu que sa transformée de log-Laplace est la fonction $h(s) = \sqrt{us}$, pour $s \geq 0$. On peut réécrire h de la manière suivante :

$$h(s) = \exp\left(\frac{1}{2} \log(u) + \frac{1}{2} \log(s)\right).$$

Ainsi, sa n -ième itérée est

$$h_n(s) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \log(u) + \frac{1}{2^n} \log(s)\right).$$

Soit

$$h_n(s) = u^{1-2^{-n}} s^{2^{-n}}. \quad (4.202)$$

Choisissons la suite de constantes $b_n = \frac{1}{2^n}$. On a bien $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Calculons la valeur de $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(-\log(1 - \exp(-t(b_n)^{-1})))$. Comme

$$\begin{aligned} \log(1 - e^{-2^{nt}}) &= e^{-2^{nt}} + o_{n \rightarrow \infty}(e^{-2^{nt}}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u^{1-2^{-n}} &= u \end{aligned}$$

on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(-\log(1 - \exp(-t(b_n)^{-1}))) = ue^{-t}. \quad (4.203)$$

D'après le lemme 2.2.19,

$$\frac{1}{2^n} \log(Z_n) \xrightarrow{d} Z$$

où la distribution de Z est donnée par

$$w(t) = \exp\left(-\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(-\log(1 - \exp(-t(b_n)^{-1})))\right).$$

d'où le résultat. □

On a en fait un résultat plus fort de convergence presque sûre.

Proposition 4.3.17. *Il existe une variable aléatoire U telle que les générations du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$ se comportent de la manière suivante :*

$$\frac{1}{2^k} \log(1 + Z_k) \xrightarrow{\text{p.s.}} U \quad (4.204)$$

$$\text{avec } \mathbb{P}(U \leq t) = \exp(-u \exp(-t)) \quad \text{si } t \geq 0 \quad (4.205)$$

Démonstration. Nous avons vu que

$$\forall s, h_n(s) = u^{1-2^{-n}} s^{2^{-n}}. \quad (4.206)$$

Ainsi, pour chaque entier n , l'inverse c_n de la fonction h_n est donnée par :

$$\forall s, c_n(s) = u^{1-2^{-n}} s^{2^n} = u \left(\frac{s}{u} \right)^{2^n} \quad (4.207)$$

Considérons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et la fonction L suivante :

$$\forall s \in [0, \infty[, L(s) = \log \left(1 + \frac{1}{s} \right). \quad (4.208)$$

La fonction L est décroissante, sa limite à droite en 0 vaut $+\infty$, celle en $+\infty$ vaut 0 et elle est à variations lentes en 0. Comme $-\log(r) = u$ (proposition 4.3.14), calculons pour tout réel $s \in (0, u)$, $\psi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n L(c_n(s))$.

$$a_n L(c_n(s)) = 2^{-n} \log \left(1 + \frac{1}{u} \left(\frac{u}{s} \right)^{2^n} \right) \quad (4.209)$$

Comme $s < u$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u}{s} \right)^{2^n} = +\infty$, d'où

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log \left(1 + \frac{1}{u} \left(\frac{u}{s} \right)^{2^n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log \left(\frac{1}{u} \left(\frac{u}{s} \right)^{2^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log \left(\frac{1}{u} \right) + \log \left(\frac{u}{s} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\psi(s) = \log \left(\frac{u}{s} \right). \quad (4.210)$$

La fonction ψ vérifie les propriétés suivantes :

- . $\forall s \in (0, u), \psi(s) > 0$
- . $t_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \psi(s) = +\infty$
- . $t_0 = \lim_{s \rightarrow u} \psi(s) = 0$
- . son inverse est $\psi^{\text{inv}}(s) = ue^{-s}$.

donc on peut appliquer le théorème 2.2.20 et on obtient la convergence souhaitée avec $\mathbb{P}(U \leq t) = \exp(-\psi^{\text{inv}}(s))$ pour $s \in (t_0, t_1)$. \square

Intéressons nous maintenant au comportement sur l'évènement d'extinction. Nous allons voir qu'il est du même type que sur l'évènement d'explosion.

Comportement sur $\{Z_k \rightarrow 0\}$

Nous allons montrer des résultats de convergence en loi et presque sûre du même type que dans le paragraphe précédent.

En conditionnant par l'évènement d'extinction, on pourrait se ramener à un processus de branchement sous-critique. Cependant, on serait toujours dans le cas où $\mathbb{P}(\tilde{Z}_1 = 0) = 0$ et $\tilde{a} = 0$. Ainsi, l'analyse du comportement du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$ sur $\{Z_k \rightarrow 0\}$ nécessite une étude particulière.

Proposition 4.3.18. *Il existe une variable aléatoire Z telle que les générations du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$ se comportent de la manière suivante :*

$$\frac{1}{2^k} \log(Z_k) \xrightarrow{d} Z \quad (4.211)$$

$$\text{avec } \mathbb{P}(Z \leq t) = \exp(-u \exp(-t)) \text{ si } t \in]-\infty, +\infty[\quad (4.212)$$

Démonstration. Nous avons vu dans la démonstration de la proposition 4.3.16 la forme explicite de la fonction h_n :

$$\forall s \geq 0, h_n(s) = u^{1-2^{-n}} s^{2^{-n}}. \quad (4.213)$$

Choisissons $d = 1$ et la suite de constantes $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. On a bien $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Calculons la valeur de $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(d \exp(-t(b_n)^{-1}))$. Comme

$$h_n(\exp(-2^n t)) = u^{1-2^{-n}} (\exp(-2^n t))^{2^{-n}} = u^{1-2^{-n}} e^{-t}$$

on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\exp(-2^n t)) = u e^{-t}$$

D'après le lemme 2.2.22,

$$\frac{1}{2^n} \log(Z_n) \xrightarrow{d} Z$$

où la distribution de Z est donnée par

$$w(t) = \exp\left(-\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\exp(-2^n t))\right).$$

d'où le résultat. □

Énonçons maintenant un résultat de convergence presque sûre.

Proposition 4.3.19. *Il existe une variable aléatoire U telle que les générations du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$ se comportent de la manière suivante :*

$$\frac{1}{2^k} \log\left(1 + \frac{1}{Z_k}\right) \xrightarrow{\text{p.s.}} U \quad (4.214)$$

$$\text{avec } \mathbb{P}(U \leq t) = 1 - \exp(-u \exp(t)) \text{ si } t \geq 0. \quad (4.215)$$

Démonstration. Nous avons vu dans la démonstration de la proposition 4.3.17 une expression de la fonction c_n :

$$\forall s \geq 0, c_n(s) = u^{1-2^n} s^{2^n} = u \left(\frac{s}{u} \right)^{2^n}$$

Considérons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ et la fonction L suivante :

$$\forall s \in [0, \infty[, L(s) = \log(1 + s). \quad (4.216)$$

La fonction L est croissante, sa limite à droite en 0 vaut 0, celle en $+\infty$ vaut $+\infty$ et elle est à variations lentes en $+\infty$. Comme $-\log(r) = u$ (proposition 4.3.14), calculons pour tout réel $s \in (u, +\infty)$, $\psi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n L(c_n(s))$.

$$a_n L(c_n(s)) = 2^{-n} \log \left(1 + u \left(\frac{s}{u} \right)^{2^n} \right). \quad (4.217)$$

Comme $s > u$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{s}{u} \right)^{2^n} = +\infty$, d'où

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log \left(1 + u \left(\frac{s}{u} \right)^{2^n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log \left(u \left(\frac{s}{u} \right)^{2^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log(u) + \log \left(\frac{s}{u} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\psi(s) = \log \left(\frac{s}{u} \right). \quad (4.218)$$

La fonction ψ vérifie les propriétés suivantes :

- . $\forall s > u, \psi(s) > 0$
- . $t_0 = \lim_{s \rightarrow u} \psi(s) = 0$
- . $t_1 = \lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = +\infty$
- . son inverse est $\psi^{\text{inv}}(s) = ue^s$.

donc on peut appliquer le théorème 2.2.23 et on obtient la convergence souhaitée avec $\mathbb{P}(U \leq t) = 1 - \exp(-\psi^{\text{inv}}(s))$ pour $s \in (t_0, t_1)$. \square

Pour conclure ce chapitre, nous allons maintenant revenir à la question de la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$.

4.3.6 Taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t_n)$

Nous allons maintenant énoncer un résultat de convergence en loi de la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$.

Nous avons vu en (4.48) page 90 une expression de la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$ que nous rappelons ici :

$$|\mathcal{B}_n(t)| \stackrel{d}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (N_k^n - Y_k^n) + 2^n - 1 - A_n, \text{ où } A_n \sim \mathcal{B}\left(2^n, \frac{1}{2}\right). \quad (4.219)$$

Lorsque nous renormalisons par 2^{2n} , et que nous considérons le temps $t_n = \frac{u}{2^{n+1}}$, les variables aléatoires Y_k^n n'apparaissent plus à la limite d'après l'étude faite à la section 4.3.4.1. D'autre part, les variables aléatoires A_n n'apparaissent plus non plus à la limite. Ainsi nous obtenons que les variables aléatoires $2^{-2n}|\mathcal{B}_n(\frac{u}{2^{n+1}})|$ et $2^{-2n} \sum_{k \geq 0} N_k^n$ ont la même limite en loi.

Nous avons obtenu au théorème 4.3.12 la convergence en loi de la taille totale du processus $(u2^{-2n}N_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ vers celle du processus $(Z_{k+1})_{k \geq 0}$. D'autre part, nous avons étudié au paragraphe 4.3.5.2 la loi de la taille totale du processus $(Z_k)_{k \geq 0}$, donnée à la proposition 4.3.15. Comme $Z_0 = 1$, cela nous donne aussi la loi de la taille totale du processus $(Z_{k+1})_{k \geq 0}$. Finalement, on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.3.20 (Loi limite de la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t)$). *Considérons l'ensemble $\mathcal{B}_n(0)$ construit à partir de la boule \mathbb{T}_n de rayon n et des composantes connexes qui l'intersectent. Soit u un réel strictement positif. Soit S_u une variable aléatoire dont la transformée de Laplace est donnée par l'expression suivante :*

$$\mathbb{E}(e^{-sS_u}) = \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{u} + \sqrt{u + 4s}}{2} \right)^2 \right]. \quad (4.220)$$

Alors la taille de l'ensemble $\mathcal{B}_n(t_n)$ au temps $t_n = u2^{-n-1}$, renormalisée par 2^{2n} , converge en loi vers la variable aléatoire $u^{-1}(S_u - 1)$:

$$\frac{1}{2^{2n}} \left| \mathcal{B}_n \left(\frac{u}{2^{n+1}} \right) \right| \xrightarrow{d} \frac{1}{u} (S_u - 1). \quad (4.221)$$

Comment se comporte cette taille en fonction du temps u ? Appelons $(X_u)_{u \in \mathbb{R}^+}$ le processus limite en loi défini au théorème 4.3.20.

Plus on considère un temps u grand, plus les sites vides ont de chance de devenir occupés. A n fixé, le processus $\left(\mathcal{B}_n \left(\frac{u}{2^{n+1}} \right) \right)_{u > 0}$ est donc croissant. Il en est de même pour $(X_u)_{u \in \mathbb{R}^+}$. Nous avons vu que ce processus est à valeurs dans $[0, \infty]$. On peut se demander si les accroissements de ce processus sont stationnaires ou indépendants.

Soit $u > 0$ et $s > 0$. Intéressons nous à l'accroissement $X_{u+s} - X_u$. A-t-il même loi que X_s ? Est-il indépendant de la loi de X_u ? Le processus $(X_u)_{u \in \mathbb{R}^+}$ est défini à partir de l'ensemble $\mathcal{B}_n \left(\frac{u}{2^{n+1}} \right)$, donc intéressons nous à cet ensemble. Partons de la taille $\left| \mathcal{B}_n \left(\frac{u}{2^{n+1}} \right) \right|$ et regardons comment déterminer $\left| \mathcal{B}_n \left(\frac{u+s}{2^{n+1}} \right) \right|$. Pour cela, il faut partir de l'ensemble des voisins de $\mathcal{B}_n \left(\frac{u}{2^{n+1}} \right)$. Par définition, ces sites sont vides au temps $\frac{u}{2^{n+1}}$. Il faut alors regarder s'ils sont devenus occupés pendant l'intervalle de temps $\left[\frac{u}{2^{n+1}}, \frac{u+s}{2^{n+1}} \right]$. Cela revient à regarder des processus de Poisson sur l'intervalle $\left[0, \frac{s}{2^{n+1}} \right]$. Supposons maintenant qu'un site est devenu occupé pendant ce nouveau laps de temps. On va alors regarder si les sites vides voisins des composantes connexes au temps $t = 0$ de ses sites enfants sont devenus occupés pendant tout l'intervalle

de temps $\left[0, \frac{s}{2^{n+1}}\right]$, et non plus simplement sur l'intervalle de temps $\left[\frac{u}{2^{n+1}}, \frac{u+s}{2^{n+1}}\right]$. Les accroissements du processus $(X_u)_{u \in \mathbb{R}^+}$ ne semblent donc pas stationnaires ni indépendants.

Si l'on souhaite déterminer la taille $|\mathcal{B}_n\left(\frac{u+s}{2^{n+1}}\right)|$ à partir de $|\mathcal{B}_n\left(\frac{s}{2^{n+1}}\right)|$, on peut utiliser le même raisonnement avec les arbres de Galton-Watson que nous avons fait dans ce chapitre. Cependant, au lieu de travailler avec la loi stable $u\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$ qui était la loi limite de la taille renormalisée de $|\mathcal{B}_n(0)|$, il faudra maintenant considérer la loi $u^{-1}(S_u - 1)$ vue au théorème 4.3.20, avec laquelle il est a priori moins facile de travailler.

Chapitre 5

Vers un processus limite

Pour l'introduction de ce chapitre, nous reprenons les idées données dans le paragraphe 1.3 de présentation des résultats.

Lorsque λ est très petit, il y a peu de feux donc les composantes connexes ont le temps de croître. Par contre, plus elles sont grandes, plus elles ont de chance d'être touchées par la foudre. Il n'y a donc pas de monotonie de la taille des composantes connexes en fonction de λ dans ce modèle. La loi de la taille des composantes connexes est difficile à déterminer car les feux entraînent des interactions à très grande portée, notamment lorsque λ est très petit.

Étant donné un temps $t > 0$, quelle est la taille de la composante connexe de l'origine ? Pour déterminer cette taille, partons de la composante connexe de l'origine à $t = 0$. Elle est de taille finie. Dès qu'un site vide voisin de cette composante connexe devient occupé, une composante connexe se rajoute alors à la composante connexe de l'origine. Quelle est sa taille ? Comme le temps que l'on a attendu est strictement positif, cette composante connexe a subi la dynamique du modèle de feux de forêt et a pu brûler ou se coller elle-même, plus tôt, à une composante connexe. Celle-ci ayant elle-même évolué selon la dynamique du modèle, ce processus peut ne jamais s'arrêter puisque le graphe considéré est infini. Cette méthode ne nous permet donc pas de conclure.

Pour essayer de contrer ce phénomène, nous avons défini un modèle de feux de forêt différent. Dans ce modèle, nous avons considéré que les composantes connexes différentes de l'origine évoluent sous une loi stationnaire qui tient compte de la dynamique précédente. Nous pensons que cette dynamique, quand λ tend vers 0, est proche de la percolation critique sur l'arbre binaire. Nous avons ainsi supposé que cette loi stationnaire, notée ν , est dans le bassin d'attraction d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$, cette hypothèse étant vérifiée dans le cas de la percolation critique sur l'arbre binaire. La composante connexe de l'origine est quand à elle soumise à une évolution régie par des processus de Poisson pour les croissances d'arbres à sa frontière ainsi que pour les feux sur les sites qui la composent. Ces processus de Poisson ont les mêmes paramètres que ceux du vrai modèle de feux de forêt, à savoir 1 et $\lambda > 0$. Ce modèle est paradoxal dans le sens où l'on observe deux types de comportement pour les composantes connexes. Pour $\lambda > 0$ fixé, ce modèle ne va pas nous permettre de déduire des résultats sur le vrai modèle de feux de forêt. Par

contre, notre objectif est de pouvoir dire quelque chose sur le processus limite. Pour ce modèle, nous allons nous intéresser en particulier à l'évolution de la composante connexe de l'origine, notamment pour déterminer sa taille au moment où elle brûle pour la première fois.

Dans la première partie de ce chapitre, nous étudierons la taille de la composante connexe de l'origine, notée $\mathcal{C}(t)$, dans notre modèle modifié sans les événements de foudre touchant la composante connexe de l'origine. Nous montrerons que cette taille explose en temps fini. Dans la deuxième partie, nous étudierons la même quantité en ajoutant les événements de foudre. Nous étudierons ensuite plus précisément l'instant du premier feu, et nous expliquerons d'où vient l'hypothèse que nous ferons sur la loi de ce premier feu. Finalement, nous montrerons la convergence en loi de la taille de la composante connexe de l'origine au moment où elle brûle pour la première fois, sous une hypothèse sur la loi de l'instant du premier feu.

5.1 Étude de la croissance de $\mathcal{C}(t)$

Dans un premier temps nous allons considérer un modèle sans feux. Cependant, ce n'est pas le modèle de feux de forêt où l'on ne fait qu'enlever les processus de Poisson correspondant à la foudre. En effet, ici, on se place dans un régime où les composantes connexes autres que celle de l'origine ont toutes la même loi ν , quelque soit le temps $t > 0$ auquel on se place. Nous allons nous intéresser à l'évolution d'une composante connexe et nous demander si elle devient infinie en un temps fini. Précisons le modèle.

Soit ν une loi sur \mathbb{N} , dans le bassin d'attraction d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$. Nous utiliserons la notion d'ensemble de voisins V^e définie au paragraphe 4.1.

Dans le chapitre 4, un temps $t > 0$ était fixé et nous étions intéressés par la taille de la composante connexe de l'origine à ce temps t . Ici, nous ne procédons pas de la même manière : nous suivons l'évolution de la taille de la composante connexe de l'origine au cours du temps, au fil des événements de croissance qui l'affectent. Plus précisément, nous allons mettre à jour la taille de la composante connexe de l'origine à chaque fois qu'un événement de croissance se produit sur l'un de ses sites voisins. On va alors considérer un processus discret, où chaque étape va représenter un événement de croissance sur l'un des sites voisins de la composante connexe de l'origine.

Plus précisément, partons de la composante connexe de l'origine $\mathcal{C}(0)$ au temps $t = 0$, dont la taille, finie, est de loi ν . Comme on travaille avec un nombre fini de sites puisque l'on s'intéresse uniquement aux sites de $\mathcal{C}(0)$ et à ses voisins, on peut déterminer l'instant t_1 de la première croissance sur l'un des sites voisins de $\mathcal{C}(0)$. Cet instant suit une loi exponentielle de paramètre $|V^e(\mathcal{C}(0))| = |\mathcal{C}(0)| + 1$. Notons x le site qui devient occupé au temps t_1 . Le site x relie alors la composante connexe de l'origine avec les deux composantes connexes enfants C_{x_1} et C_{x_2} du site x , chacune de taille de loi ν d'après notre hypothèse. Ainsi, la taille de la composante connexe de l'origine au temps t_1 est $|\mathcal{C}(t_1)| = |\mathcal{C}(0)| + 1 + |C_1| + |C_2|$, où $|C_1|$ et $|C_2|$ sont des variables aléatoires de loi ν . Nous venons de décrire la première étape. On

réitère ensuite le même procédé avec la composante connexe de l'origine $\mathcal{C}(t_1)$. Ainsi, comme la composante connexe de l'origine ne fait que croître, elle va devenir infinie. La question réside alors dans le temps d'explosion de la taille de la composante connexe de l'origine. En effet, comme la composante connexe de l'origine est de plus en plus grande, on attend de moins en moins longtemps pour que l'un de ses sites voisins devienne occupé. Nous allons voir que le temps d'explosion est fini.

Formellement, on peut décrire l'évolution de la taille de la composante connexe de l'origine à l'aide d'une chaîne de Markov à temps continu et espace d'états dénombrable. Considérons une suite $\{|C_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires i.i.d de loi ν . On va alors définir une suite de couples de variables aléatoires $\{(X_n, Y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, où X_n représente le temps qui s'écoule et Y_n la taille de la composante connexe de l'origine (définition 5.1). Ainsi X_1 est le temps t_1 dont nous venons de parler dans la description de la première étape. Cette façon d'étudier la composante connexe de l'origine va nous permettre de définir un processus de Markov à temps continu et à espace d'états dénombrables à partir d'un processus de la taille des sauts et de la suite des temps d'attente. Nous avons utilisé le chapitre 2 du livre de Norris [34] pour cette partie.

Commençons par définir les processus de taille $(Y_n)_{n \geq 0}$ et de temps d'attente entre les sauts $(X_n)_{n \geq 0}$ à partir de la construction précédente. Le processus Y_n représente la taille de la composante connexe de l'origine après la n -ième étape de croissance. Le processus X_n représente l'instant où se produit le n -ième événement de croissance affectant la composante connexe de l'origine. Comme il y a un événement de croissance lorsqu'un événement de Poisson se produit sur l'un des sites voisins de la composante connexe de l'origine, le temps d'attente entre deux événements de croissance à l'étape n suit une loi exponentielle de paramètre $1 + |\mathcal{C}(X_n)| = 1 + Y_n$.

Définition 5.1 (Processus $(X_n)_{n \geq 0}$ et $(Y_n)_{n \geq 0}$). *Soit $\{|C_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi ν . On définit alors une suite de couples de variables aléatoires : $\{(X_n, Y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :*

$$\begin{cases} (X_0, Y_0) = (0, |C_0|) \\ X_n = \sum_{k=0}^{n-1} E_{Y_k+1} = X_{n-1} + E_{Y_{n-1}+1} \text{ où } E_{Y_k+1} \sim \mathcal{E}(Y_k + 1) \\ Y_n = \sum_{k=1}^{2n+1} |C_k| + n = Y_{n-1} + (|C_{2n}| + |C_{2n+1}| + 1) \end{cases} \quad (5.1)$$

Le processus $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à temps discret. Elle est définie par la loi initiale ν et la matrice de transition $\Pi = (\pi_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ avec

$$\pi_{i,j} = \mathbb{P}(|C_1| + |C_2| + 1 = j - i) I_{j \geq i}. \quad (5.2)$$

Définissons maintenant le processus $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ à partir des processus à temps discret $(X_n)_{n \geq 0}$ et $(Y_n)_{n \geq 0}$.

Définition 5.2 (Processus $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$). Soit $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ le processus de Markov défini à partir des processus $(X_n)_{n \geq 0}$ et $(Y_n)_{n \geq 0}$ de la définition 5.1 de la manière suivante :

$$Z_t = \begin{cases} Y_n & \text{si } X_n \leq t < X_{n+1} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.3)$$

Le processus de Markov $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ a pour loi initiale ν et pour générateur la matrice $Q = (q_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ où

$$q_{i,j} = (i+1)\pi_{i,j}I_{j>i} - (i+1)I_{j=i}. \quad (5.4)$$

En notant $q(i) = -q_{ii}$, on obtient $q(Y_i) = Y_i + 1$ et la propriété suivante : conditionnellement à Y_0, \dots, Y_{n-1} , les temps d'attente $S_1 = X_1, \dots, S_n = X_n - X_{n-1}$ sont des variables aléatoires de loi exponentielle de paramètres respectifs $q(Y_j) = Y_j + 1$. Ce qui est conforme à la définition présente dans la section 2.6 de [34].

Définissons maintenant le temps d'explosion du processus $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ auquel nous allons nous intéresser dans le reste de cette section. Comme la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et croissante, la définition suivante a un sens.

Définition 5.3 (Temps d'explosion T de $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$). Le temps d'explosion T du processus $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est défini par :

$$T = \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} E_{Y_{k+1}}. \quad (5.5)$$

Le temps d'explosion T est-il fini ? Il n'y a pas de résultats sur les chaînes de Markov à temps continu qui nous permettent de répondre directement. Cependant, si l'espérance de T est finie, alors le temps d'explosion T est fini presque sûrement. C'est ce que nous allons montrer.

Théorème 5.1.1. (Temps d'explosion fini) Le temps d'explosion T du processus $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ représentant la taille de la composante connexe de l'origine est fini presque sûrement.

Le temps d'explosion est fini si les temps d'attente entre deux sauts sont de plus en plus rapprochés, de la manière suivante. Si le temps d'attente moyen entre deux sauts est le terme général d'une série convergente, alors l'espérance du temps d'explosion est finie. Ici, le temps moyen d'attente entre deux sauts correspond à peu près à l'inverse de la hauteur du processus, c'est-à-dire à l'inverse de la taille de la composante connexe de l'origine. Pour la preuve de ce résultat, nous allons montrer que cette hauteur Y_n croît strictement plus vite que n à partir d'un certain rang. L'étude de la variable aléatoire Y_n fait l'objet du lemme suivant, dont la preuve repose sur le fait que la loi ν est dans le bassin d'attraction d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$.

Lemme 5.1.2. (Contrôle de Y_n) Soit β un réel vérifiant $1 < \beta < 2$. Considérons pour tout entier n les événements

$$A_n = \left\{ Y_{2^{n+1}} - Y_{2^n} \geq 4(2^n)^\beta \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{2^{n+1}} |C_i| + 2^n \geq 4(2^n)^\beta \right\}. \quad (5.6)$$

Alors les évènements A_n vérifient les deux propriétés suivantes :

1. Il existe un entier $N > 0$ tel que

$$\forall n \geq N, A_n \subset \bigcap_{l=2^{n+1}}^{2^{n+2}} \{Y_l \geq l^{1+\epsilon}\}. \quad (5.7)$$

2. La série de terme général $\mathbb{P}(A_n^c)$ converge, et donc

$$\mathbb{P}(A_n^c \text{ i.s.}) = 0. \quad (5.8)$$

Les évènements A_n de ce lemme vont nous permettre de travailler avec des accroissements indépendants du processus $(Y_n)_{n \geq 0}$. Admettons pour l'instant ce lemme et démontrons le théorème 5.1.1.

Démonstration (du théorème 5.1.1). Par définition du temps d'explosion (définition 5.3), et d'après le théorème de convergence monotone, on obtient

$$\mathbb{E}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n). \quad (5.9)$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et calculons $\mathbb{E}(X_n)$.

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} E_{Y_{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(E_{Y_{k+1}}). \quad (5.10)$$

Comme $E_{Y_{k+1}}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{Y_{k+1}}$, on a

$$\mathbb{E}(E_{Y_{k+1}}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(E_{Y_{k+1}}|Y_k)) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{Y_k + 1}\right). \quad (5.11)$$

Ainsi, on obtient

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(\frac{1}{Y_k + 1}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{Y_k + 1}\right). \quad (5.12)$$

Or d'après le lemme 5.1.2, il existe un entier N tel que

$$\bigcup_{n \geq N} A_n \subset \bigcup_{n \geq N} \bigcap_{l \geq 2^{n+1}} \{Y_l \geq l^{1+\epsilon}\} \subset \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{l \geq 2^{n+1}} \{Y_l \geq l^{1+\epsilon}\} \quad (5.13)$$

Comme d'après le lemme $\mathbb{P}(A_n^c \text{ i.s.}) = 0$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{l \geq 2^{n+1}} \{Y_l \geq l^{1+\epsilon}\}\right) = 1. \quad (5.14)$$

La série de terme général $k^{-1-\epsilon}$ est convergente, donc l'espérance $\mathbb{E}(T)$ est finie. Nous avons donc montré que le temps d'explosion T est presque sûrement fini. \square

Montrons maintenant le lemme 5.1.2.

Démonstration (du lemme 5.1.2).

- Commençons par démontrer l'inclusion (5.7) de ce lemme.

Nous allons nous ramener à un évènement plus simple à étudier que A_n . Comme les variables Y_n sont positives,

$$A_n \subset \{Y_{2^{n+1}} \geq 4(2^n)^\beta\}. \quad (5.15)$$

Comme $\beta < 2$, $2^\beta < 4$, donc $(2^{n+1})^\beta < 4(2^n)^\beta$, d'où l'inclusion

$$A_n \subset \{Y_{2^{n+1}} \geq (2^{n+1})^\beta\}. \quad (5.16)$$

Notons $\epsilon = \frac{\beta-1}{2}$. Montrons qu'il existe un entier N tel que $\forall n \geq N$,

$$\{Y_{2^n} \geq (2^n)^\beta\} \subset \bigcap_{l=2^n}^{2^{n+1}} \{Y_l \geq (l)^{1+\epsilon}\}. \quad (5.17)$$

Soit $l \in [2^n, 2^{n+1}]$. Alors

$$l^{1+\epsilon} \leq (2^{n+1})^{1+\epsilon}. \quad (5.18)$$

Comme la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $Y_l \geq Y_{2^n}$. Si $Y_{2^n} \geq (2^n)^\beta$ alors

$$Y_l \geq (2^n)^\beta. \quad (5.19)$$

Ainsi, pour obtenir le résultat désiré, il faut montrer qu'il existe des entiers n pour lesquels

$$(2^{n+1})^{1+\epsilon} \leq 2^{n\beta}. \quad (5.20)$$

Ceci équivaut à l'inégalité $(n+1)(1+\epsilon) \leq n\beta$. Comme $\epsilon = \frac{\beta-1}{2}$, on obtient la condition

$$n \geq 1 + \frac{2}{\beta-1}. \quad (5.21)$$

Soit N tel que $\forall n \geq N$, n vérifie la condition (5.21) précédente. Ainsi on a

$$(2^{n+1})^{1+\epsilon} \leq 2^{n\beta}.$$

D'où l'inclusion (5.17).

Ainsi, pour tout entier $l \geq 2^{N+1}$, (5.16) et (5.17) donnent le résultat.

- Montrons maintenant l'égalité (5.8) du lemme.

Pour cela on va utiliser le lemme de Borel Cantelli et montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^c)$ converge.

Commençons par montrer que l'on peut se ramener à un évènement un peu plus simple à étudier que A_n .

$$\text{Si } \sum_{i=1}^{2^{n+1}} |C_i| \geq 4(2^n)^\beta, \text{ alors } \sum_{i=1}^{2^{n+1}} |C_i| + 2^n \geq 4(2^n)^\beta.$$

Considérons alors l'évènement B_n :

$$B_n = \left\{ \sum_{i=1}^{2^{n+1}} |C_i| \geq 4(2^n)^\beta \right\}. \quad (5.22)$$

On a alors $\mathbb{P}(B_n) \leq \mathbb{P}(A_n)$ et donc $\mathbb{P}(A_n^c) \leq \mathbb{P}(B_n^c)$. Il suffit alors de montrer la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(B_n^c)$. Comme les variables aléatoires $\{|C_i|\}_i$ sont positives, on peut écrire

$$\mathbb{P}(B_n^c) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2^{n+1}} |C_i| \leq 4(2^n)^\beta\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{2^{n+1}} |C_i| \leq 4(2^n)^\beta\right). \quad (5.23)$$

Comme les variables aléatoires $\{|C_i|\}_i$ sont indépendantes et de même loi, on obtient

$$\mathbb{P}(B_n^c) \leq \left[\mathbb{P}(|C| \leq 42^{\beta n})\right]^{2^{n+1}}. \quad (5.24)$$

Comme la loi ν est dans le bassin d'attraction d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$, d'après le théorème 2.3.9, on connaît un équivalent de la queue de distribution d'une variable aléatoire $|C|$ de loi ν . Utilisons ce résultat pour majorer la probabilité étudiée.

$$\left[\mathbb{P}(|C| \leq 2^{\beta n+2})\right]^{2^{n+1}} = \exp(2^{n+1} \ln(1 - \mathbb{P}(|C| \geq 2^{\beta n+2}))) \quad (5.25)$$

$$\leq \exp(2^{n+1} \cdot (-\mathbb{P}(|C| \geq 2^{\beta n+2}))) \quad (5.26)$$

$$\leq \exp(-c2^{(1-\frac{\beta}{2})n} [c^{-1}\sqrt{2^{\beta n+2}}\mathbb{P}(|C| \geq 2^{\beta n+2})]). \quad (5.27)$$

D'après le théorème 2.3.9, il existe $c > 0$ tel que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c^{-1}\sqrt{k}\mathbb{P}(|C| \geq k) = 1. \quad (5.28)$$

Ainsi, il existe un entier K tel que

$$\forall k \geq K, c^{-1}\sqrt{k}\mathbb{P}(|C| \geq k) \geq \frac{1}{2}. \quad (5.29)$$

Soit N tel que pour tout $n \geq N$, $2^{\beta n+2} > K$. Alors pour tout entier $n > N$,

$$\left[\mathbb{P}(|C| \leq 2^{\beta n+2})\right]^{2^{n+1}} \leq \exp(-c2^{(1-\frac{\beta}{2})n}\frac{1}{2}) \quad (5.30)$$

Comme $2^{(1-\frac{\beta}{2})n} \geq (1 - \frac{\beta}{2})n$,

$$\begin{aligned} \left[\mathbb{P}(|C| \leq 2^{\beta n+2})\right]^{2^{n+1}} &\leq \exp(-c(1 - \frac{\beta}{2})n\frac{1}{2}) \\ &\leq \exp(-c(1 - \frac{\beta}{2})\frac{1}{2})^n. \end{aligned}$$

Comme $1 < \beta < 2$, $c(1 - \frac{\beta}{2})\frac{1}{2} > 0$ donc $\exp(-c(1 - \frac{\beta}{2})\frac{1}{2})^n$ est le terme général d'une série convergente. Finalement la série de terme général $\mathbb{P}(B_n^c)$ et donc celle de terme général $\mathbb{P}(A_n^c)$ convergent. Par application du lemme de Borel Cantelli, on obtient le résultat. \square

Nous allons maintenant nous intéresser au modèle complet dont nous avons parlé en introduction, c'est-à-dire dans lequel la composante connexe de l'origine peut être touchée par la foudre. L'action de la foudre est modélisée à l'aide de processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

5.2 Étude du premier feu touchant $\mathcal{C}(t)$

Nous allons maintenant rajouter des feux. C'est à dire que nous allons mettre en compétition la croissance d'un arbre parmi les voisins de la composante connexe de l'origine $\mathcal{C}(t)$ et la foudre touchant un site de $\mathcal{C}(t)$. Comme dans le paragraphe précédent, le temps d'attente pour qu'il y ait une croissance sur l'un des sites voisins de $\mathcal{C}(t)$ suit une loi exponentielle de paramètre $|\mathcal{C}(t)| + 1$. Cette fois, on considère aussi le temps d'attente pour que la foudre tombe sur un site de $\mathcal{C}(t)$, qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda|\mathcal{C}(t)|$. On va alors s'intéresser dans cette partie au premier feu qui touche la composante connexe de l'origine.

Cette section est divisée en trois parties. Nous allons commencer par définir les processus que nous allons regarder et introduire quelques notations. Puis nous nous intéresserons au premier feu touchant la composante connexe de l'origine. Enfin, nous étudierons la taille de la composante connexe de l'origine au moment où elle brûle pour la première fois, par deux approches différentes. Dans la première approche, nous calculons la loi de cette taille. L'expression obtenue n'étant pas exploitable, nous étudions sa convergence en loi lorsque le paramètre λ tend vers 0 dans la deuxième approche.

5.2.1 Notations

Reprenons la construction étape par étape du modèle de croissance précédent. Mais cette fois, à chaque étape, on ne va pas forcément rajouter des composantes connexes. On va se demander si le prochain évènement affectant la composante connexe de l'origine est une croissance sur l'un de ses sites voisins ou bien la foudre touchant l'un de ses sites. Lorsqu'il y a croissance sur un site voisin, ce site relie comme précédemment les deux composantes connexes de loi ν de ses enfants à la composante connexe de l'origine que l'on regarde. Ainsi, tant qu'il n'y a pas de feux, la taille de la composante connexe de l'origine a la même loi que $(Y_n)_{n \geq 0}$ dans le modèle de croissance du premier paragraphe. Par contre la loi des sauts n'est plus la même ici puisqu'il faut tenir compte des feux éventuels.

Nous noterons N_λ l'étape à laquelle le premier feu touche $\mathcal{C}(t)$ et T_{N_λ} l'instant où il se produit.

Soit $(Y'_n)_{n \geq 0}$ la chaîne de Markov représentant la taille de $\mathcal{C}(t)$ à chaque étape tant qu'elle n'a pas brûlée. Ainsi, en utilisant la définition 5.1, on pose

$$Y'_n = \begin{cases} Y_n & \text{si } n < N_\lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.31)$$

Nous noterons $(X'_n)_{n \geq 0}$ le processus des instants où la n -ième étape de croissance ou le premier feu se produit.

Finalement, nous noterons $(Z'_t)_{t \geq 0}$ le processus représentant la taille de la composante connexe de l'origine dans notre modèle en fonction du temps. Comme dans le paragraphe précédent, le processus $(Z'_t)_{t \geq 0}$ est construit à partir des processus $(X'_n)_{n \geq 0}$ et $(Y'_n)_{n \geq 0}$. En particulier, ce processus est nul à partir du temps T_{N_λ} .

Dans la suite de cette partie, nous nous intéresserons tout d'abord aux variables N_λ et T_{N_λ} représentant respectivement l'étape et l'instant du premier feu. Puis nous étudierons la variable aléatoire $Y'_{N_\lambda-1}$ représentant la taille de la composante connexe de l'origine au moment où elle brûle.

5.2.2 Instant du premier feu

Dans ce paragraphe nous allons commencer par étudier la variable aléatoire N_λ . Cette étude va en particulier motiver notre choix de l'hypothèse faite sur la loi de N_λ pour l'étude de $Y'_{N_\lambda-1}$, comme nous l'avons vu dans la partie 1.3.

A un instant t donné, quelle est la probabilité que le prochain évènement soit une croissance ? Il s'agit de l'évènement GBI (Growth Before Ignition) défini par Dürre [19] pour montrer l'existence des processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d , pour $d \geq 2$, dont nous avons parlé au lemme 1.1.6. D'une part, le temps d'attente pour que le prochain évènement de croissance sur $V^e(\mathcal{C}(t))$ se produise suit une loi exponentielle de paramètre $|V^e(\mathcal{C}(t))|$. D'autre part, le temps d'attente pour que le prochain évènement de foudre sur $\mathcal{C}(t)$ se produise suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda|\mathcal{C}(t)|$. C'est exactement la même chose que pour les processus de feux de forêt. Ainsi, d'après le lemme 1.1.6, la probabilité de l'évènement " le premier évènement après t qui affecte $\mathcal{C}(t)$ est une croissance", noté $GBI_t(\mathcal{C}(t), V^e(\mathcal{C}(t)))$ pour "Growth in $V^e(\mathcal{C}(t))$ Before Ignition of $\mathcal{C}(t)$ after time t ", se calcule de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(GBI_t(\mathcal{C}(t), V^e(\mathcal{C}(t)))) = \frac{|V^e(\mathcal{C}(t))|}{|V^e(\mathcal{C}(t))| + \lambda|\mathcal{C}(t)|}. \quad (5.32)$$

En appliquant ce résultat à notre cas, et avec les notations introduites dans le paragraphe précédent on obtient la probabilité qu'il y ait une croissance à l'étape $n+1$ sachant qu'aucun feu ne s'est produit jusque là :

$$\mathbb{P}(Y'_{n+1} > 0 | Y'_n > 0) = \mathbb{P}(GBI_{X'_n}(V^e(\mathcal{C}(X'_n)), \mathcal{C}(X'_n))) = \frac{Y'_n + 1}{Y'_n + 1 + \lambda Y'_n}. \quad (5.33)$$

Ainsi, la probabilité que le prochain évènement soit la foudre qui touche un site de la composante connexe de l'origine est

$$\mathbb{P}(Y'_{n+1} = 0 | Y'_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(Y'_{n+1} > 0 | Y'_n > 0) = \frac{\lambda Y'_n}{Y'_n + 1 + \lambda Y'_n}. \quad (5.34)$$

A partir de l'expression (5.33), expliquons maintenant le choix de l'hypothèse faite sur la loi de N_λ pour l'étude de $Y'_{N_\lambda-1}$. Pour étudier la loi de $Y'_{N_\lambda-1}$, nous

supposons que N_λ suit une loi géométrique de paramètre $\lambda(1 + \lambda)^{-1}$. D'où vient cette hypothèse ? Pour de très petites valeurs de λ , la probabilité $\mathbb{P}(Y'_{n+1} > 0 | Y'_n > 0)$ calculée en (5.33) est proche de 1. Ainsi, lorsque λ est petit, il y a de grandes chances pour que le feu arrive lorsque la composante connexe est assez grande. C'est-à-dire qu'il y a de grandes chances pour que la taille Y'_n soit grande. Lorsque la taille Y'_n est grande, on a l'approximation suivante :

$$\mathbb{P}(Y'_{n+1} = 0 | Y'_n > 0) \sim \frac{\lambda}{\lambda + 1}. \quad (5.35)$$

On peut donc penser que lorsque la composante connexe est assez grande l'influence de sa taille exacte sur la probabilité que le prochain évènement soit une croissance ou la foudre est faible. D'où notre hypothèse sur la loi de N_λ , qui semble raisonnable pour de petites valeurs de λ .

Que se passe-t-il sans cette hypothèse ? Étudions maintenant la loi de l'instant du premier feu. Nous allons donner ici un aperçu du calcul de la probabilité $\mathbb{P}(T_{N_\lambda} < t)$, pour laquelle nous n'avons pas trouvé d'expression exploitable.

Étant donné un temps t , on ne sait pas combien d'évènements de croissance ont eu lieu. On va alors décomposer notre étude sur tous les nombres possibles de croissance avant le temps t . Étant donnée une étape n , la probabilité que le prochain évènement soit une croissance ou un feu dépend de la taille Y'_n . Ainsi, pour calculer exactement cette probabilité, on va décomposer selon toutes les valeurs possibles de la variable aléatoire Y'_n . Finalement, en utilisant le fait que les temps d'attentes entre les évènements suivent des lois exponentielles, on obtient l'expression suivante :

$$\mathbb{P}(T_{N_\lambda} < t) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\Delta_N} \int_{D'_{N+1}} f_1(t_1, \dots, t_N) f_2(t_{N+1}) \otimes dt_j,$$

où $\Delta_N = \{(a_1, \dots, a_{2N+1}) \in \mathbb{N}^{2N+1}\}$, $D_N = \{(t_1, \dots, t_{N+1}) \mid \forall i \ t_i \in [0, t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j]\}$

$$(5.36)$$

Étant donné un $(2N + 1)$ -uplet d'entiers (a_1, \dots, a_{2N+1}) , sachant que les tailles des composantes connexes dans l'expression de Y'_j sont égales à ce $(2N + 1)$ -uplet (a_1, \dots, a_{2N+1}) , la variable aléatoire Y'_j vaut b_j où b_j s'exprime de la manière suivante :

$$\forall 1 \leq j \leq N, \ b_j = j + \sum_{i=1}^{2j+1} a_i. \quad (5.37)$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont alors définies de la manière suivante :

- La fonction f_1 représente les N croissances successives :

$$f_1(t_1, \dots, t_N) = \prod_{i=1}^N (1 + b_i) e^{-(1+C^i)t_i}.$$

- La fonction f_2 représente le fait qu'il y ait un feu après la N -ième croissance :

$$f_2(t_{N+1}) = \lambda |C^N| e^{-\lambda |C^N| t_{N+1}} e^{-|V(C^N)| t_{N+1}}.$$

Intéressons nous maintenant à la loi de la taille de la composante connexe de l'origine au moment où elle est touchée par la foudre, c'est-à-dire à la variable aléatoire $Y'_{N_\lambda-1}$.

5.2.3 Taille de $\mathcal{C}(t)$ lorsqu'elle est touchée par la foudre

Dans un premier temps, nous avons essayé de calculer directement la loi de $Y'_{N_\lambda-1}$. Cette approche n'ayant pas donné de résultat exploitable, nous nous sommes ensuite intéressés au comportement limite de cette variable aléatoire renormalisée par λ^2 .

5.2.3.1 Première approche

Dans ce modèle, la loi ν des composantes connexes qui se collent à la composante connexe de l'origine est dans le bassin d'attraction d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour obtenir une expression de la loi de $Y'_{N_\lambda-1}$, nous avons fait l'hypothèse supplémentaire que cette loi est la loi ν_{cc} définie au chapitre 2 à la définition 2.21, c'est-à-dire la loi de la taille des composantes connexes pour une percolation de paramètre $\frac{1}{2}$. Nous avons vu à la proposition 2.4.6 que cette loi vérifie la propriété que nous avons imposé pour ν . D'autre part, nous faisons une hypothèse sur la loi de N_λ dont nous avons parlé au paragraphe 5.2.2.

Proposition 5.2.1. *Supposons que N_λ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda}{\lambda+1}$, et que $\nu = \nu_{cc}$. Alors la loi de la taille de la composante connexe de l'origine au moment où elle brûle pour la première fois est donnée par :*

$$\forall m \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y'_{N_\lambda-1} = m) = \frac{1}{2m+1} \frac{1}{2^{2m+1}} \sum_{k=0}^m (2k+1) \binom{2m+1}{m-k} \frac{\lambda}{(\lambda+1)^k}. \quad (5.38)$$

Remarque 12. Cette expression est la fonction hypergéométrique

$${}_3F_2\left(\left[1, \frac{3}{2}, -m\right], \left[\frac{1}{2}, m+2\right], \frac{-1}{1+\lambda}\right).$$

Démonstration. Pour montrer ce résultat, on décompose sur les étapes possibles où se produit le feu. Comme par définition, $Y'_i \geq i$ s'il n'y a pas encore eu de feu, il y a au maximum m étapes de croissance, d'où

$$\mathbb{P}(Y'_{N_\lambda-1} = m) = \sum_{k=0}^m \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2k+1} |C| + k = m\right) \mathbb{P}(N_\lambda = k). \quad (5.39)$$

En utilisant l'expression de la loi de la somme des tailles des composantes connexes vue à la proposition 2.4.8, on obtient :

$$\mathbb{P}(Y'_{N_\lambda-1} = m) = \sum_{k=0}^m \frac{2k+1}{2} \frac{(2m)!}{(m+k+1)!(m-k)!} \frac{1}{2^{2m}} \frac{\lambda}{(\lambda+1)^k} \quad (5.40)$$

D'où le résultat. □

Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse sur N_λ ? On pourrait alors s'intéresser au calcul de la loi de la taille de la composante connexe de l'origine au moment où elle brûle ou bien à un temps t quelconque, c'est-à-dire respectivement aux probabilités $\mathbb{P}(Y'_{N_\lambda-1} = k)$ et $\mathbb{P}(|Z'_t| = k)$, pour un entier k . Mais sans l'hypothèse sur N_λ , on utilise la méthode vue pour le calcul de $\mathbb{P}(T_{N_\lambda} < t)$, au paragraphe 5.2.2. On obtient le même genre d'expression que pour $\mathbb{P}(T_{N_\lambda} < t)$ qui n'est pas exploitable.

Nous allons maintenant étudier la loi de $Y'_{N_\lambda-1}$ sous un autre angle, en s'intéressant plutôt à son comportement limite lorsque λ tend vers 0.

5.2.3.2 Deuxième approche

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au comportement limite de la loi de la taille de la composante connexe de l'origine au moment où elle brûle pour la première fois. Nous allons supposer comme précédemment que l'étape du premier feu suit une loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda}{1+\lambda}$. Nous avons obtenu un résultat de convergence en loi pour cette quantité notée $Y'_{N_\lambda-1}$, renormalisée par λ^2 .

Théorème 5.2.2. *Supposons que l'étape N_λ à laquelle se produit le premier feu suit une loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda}{1+\lambda}$. Alors la loi de la taille de la composante connexe de l'origine au moment où elle est touchée par la foudre a le comportement limite suivant :*

$$\frac{\lambda^2 Y'_{N_\lambda-1}}{4} \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{d} E^2 G \text{ où } E \sim \mathcal{E}(1) \text{ et } G \sim \mathcal{G}_{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Supposons que N_λ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda}{1+\lambda}$. Tout d'abord, comme

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (1 + \lambda)^2 = 1, \quad (5.41)$$

on peut se ramener à l'étude d'une quantité faisant apparaître le paramètre de la loi géométrique :

$$\frac{\lambda^2}{4} \sum_{i=1}^{2N_\lambda} |C_i| = (1 + \lambda)^2 \cdot \frac{1}{4 \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2} \sum_{i=1}^{2N_\lambda} |C_i|. \quad (5.42)$$

À partir de là, décomposons la quantité à étudier en vue d'utiliser notre connaissance de la loi de la taille des composantes connexes.

$$\frac{1}{4 \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2} \sum_{i=1}^{2N_\lambda} |C_i| = \frac{(2\mathbb{E}(N_\lambda))^2}{4 \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2} \cdot \frac{(2N_\lambda)^2}{(2\mathbb{E}(N_\lambda))^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{2N_\lambda} |C_i|}{(2N_\lambda)^2}. \quad (5.43)$$

Notre objectif est d'utiliser le lemme 4.3.9 page 97 pour étudier la convergence en loi du produit des deux derniers termes, qui ne sont pas indépendants. Occupons nous tout d'abord du premier terme du produit de (5.43). Comme N_λ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda}{1+\lambda}$, son espérance est donnée par

$$\mathbb{E}(N_\lambda) = \frac{1 + \lambda}{\lambda} \quad (5.44)$$

Ainsi le premier terme du produit de (5.43) vaut 1, donc

$$\frac{1}{4\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2} \sum_{i=1}^{2N_\lambda} |C_i| = \frac{(2N_\lambda)^2}{(2\mathbb{E}(N_\lambda))^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{2N_\lambda} |C_i|}{(2N_\lambda)^2}. \quad (5.45)$$

Montrons maintenant que les hypothèses du lemme 4.3.9 sont satisfaites. En calculant $\mathbb{P}(N_\lambda[\mathbb{E}(N_\lambda)]^{-1} \geq k)$, on peut montrer que $\mathbb{P}(N_\lambda[\mathbb{E}(N_\lambda)]^{-1} \geq k) \rightarrow e^{-k}$ quand $\lambda \rightarrow 0$. Ainsi,

$$\frac{N_\lambda}{\mathbb{E}(N_\lambda)} \xrightarrow{d} E \text{ où } E \sim \mathcal{E}(1) \quad (5.46)$$

Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est continue, on obtient aussi la convergence en loi suivante :

$$\left(\frac{N_\lambda}{\mathbb{E}(N_\lambda)}\right)^2 \xrightarrow{d} E^2 \quad (5.47)$$

Montrons maintenant que $N_\lambda \xrightarrow{\mathbb{P}} +\infty$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$.

$$N_\lambda = \lambda^{-2} \cdot \lambda^2 N_\lambda \quad (5.48)$$

Par (5.44) et (5.46), on obtient $\lambda^2 N_\lambda \xrightarrow{d} E$. Comme $\lambda^{-2} \rightarrow +\infty$, on obtient la convergence en probabilité de N_λ vers $+\infty$.

Nous avons d'autre part fait l'hypothèse que la loi ν de la taille des composantes connexes est dans le bassin d'attraction d'une loi stable $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$. Soit G une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$.

Comme on a bien indépendance entre les variables N_λ, E^2, G et les tailles des composantes connexes, on peut appliquer le lemme 4.3.9 et on obtient :

$$\frac{(2N_\lambda)^2}{(2\mathbb{E}(N_\lambda))^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{2N_\lambda} |C_i|}{(2N_\lambda)^2} \xrightarrow{d} E^2 G. \quad (5.49)$$

D'où le résultat. □

Quelle est la suite de cette étude ? Nous reprenons ici les idées données dans le paragraphe 1.3 de présentation des résultats au chapitre 1.

Nous pensons que le comportement limite de $Y'_{N_\lambda-1}$ sans l'hypothèse précédente sur N_λ est proche de celui où l'hypothèse est vérifiée. La prochaine étape dans l'étude de ce modèle sera de montrer ou d'invalider cette conjecture. Dans un deuxième temps, l'objectif sera de valider ou d'invalider l'hypothèse que nous avons faite sur le choix de la loi stationnaire, en regardant si la loi obtenue pour la composante connexe de l'origine est bien dans le bassin d'attraction d'une loi stable de paramètre $\frac{1}{2}$. Mais l'étude de ce modèle ne constitue qu'un barreau sur l'échelle qui mène au comportement des composantes connexes pour le vrai modèle de feux de forêt sur l'arbre binaire, puis à la question de l'existence d'un processus limite sur les arbres binaires ou sur \mathbb{Z}^2 reste encore ouverte.

Notations

Nous avons regroupé ici les principales notations que nous avons utilisées dans ce manuscrit sur les convergences et les lois de variables aléatoires, ainsi que sur les ensembles.

★ Convergences de variables aléatoires et égalités

\xrightarrow{d} : convergence en loi

$\xrightarrow{\mathbb{P}}$: convergence en probabilité

$\xrightarrow{\text{p.s.}}$: convergence presque sûre

$\stackrel{d}{=}$: égalité en loi

$A \stackrel{\text{def}}{=} B$: A est défini par l'expression B .

★ Quelques lois

$\mathcal{B}(n, p)$: loi binomiale de paramètres n et p

$\mathcal{E}(\lambda)$: loi exponentielle de paramètre λ

$\mathcal{N}(0, 1)$: loi normale de paramètres 0 et 1

$\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$: loi $\frac{1}{2}$ -stable, voir la définition 2.23

ν_{cc} : loi de la taille des composantes connexes d'une percolation critique de site sur l'arbre binaire, voir la définition 2.21

ν : loi dans le bassin d'attraction d'une loi $\frac{1}{2}$ -stable dans le chapitre 5

★ Ensembles et réseaux

I_A ou $I_{\{A\}}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A .

\mathbb{T} : arbre binaire inhomogène enraciné, voir le paragraphe 4.1

\mathbb{T}_n : sous arbre de hauteur n de \mathbb{T} , voir le paragraphe 4.1

C ou C_i : désigne en général une composante connexe

$|A|$: taille (=nombre de sites) d'un ensemble A

$V(B)$ et $V^e(B)$: ensemble des voisins d'un ensemble $B \subset \mathbb{T}$ de sites, voir la définition 4.1.

$N(S)$: ensemble des voisins d'un ensemble $S \subset \mathbb{Z}^d$, notation utilisée uniquement dans le chapitre 3, propre à l'article [41].

Bibliographie

- [1] D. J. Aldous, *The percolation process on a tree where infinite clusters are frozen*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **128** (2000), no. 3, 465–477.
- [2] I. Benjamini and O. Schramm, Private communication with David Aldous (1999).
- [3] J. van den Berg and R. Brouwer, *Self-destructive percolation*, Random Structures Algorithms **24** (2004), no. 4, 480–501.
- [4] ———, *Self-organized forest-fires near the critical time*, Comm. Math. Phys. **267** (2006), no. 1, 265–277.
- [5] J. van den Berg, B. N. B. de Lima, and P. Nolin, *A percolation process on the square lattice where large finite clusters are frozen*, Random Structures Algorithms **40** (2012), no. 2, 220–226.
- [6] J. van den Berg and A. A. Járai, *On the asymptotic density in a one-dimensional self-organized critical forest-fire model*, Comm. Math. Phys. **253** (2005), no. 3, 633–644.
- [7] J. van den Berg, D. Kiss, and P. Nolin, *A percolation process on the binary tree where large finite clusters are frozen*, Electron. Commun. Probab. **17** (2012), no. 2, 11.
- [8] J. Bertoin, *Fires on trees*, arXiv : 1011.2308, to appear in : Ann. Institut. Henri Poincaré.
- [9] ———, *Burning cars in a parking lot*, Comm. Math. Phys. **306** (2011), no. 1, 261–290.
- [10] L. Breiman, *Probability*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1968.
- [11] X. Bressaud and N. Fournier, *One-dimensional general forest fire processes*, arXiv : 1101.0480.
- [12] ———, *On the invariant distribution of a one-dimensional avalanche process*, Annals of Probability **37** (2009), no. 1, 48–77.
- [13] ———, *Asymptotics of one-dimensional forest fire processes*, Ann. Probab. **38** (2010), no. 5, 1783–1816.
- [14] X. Bressaud and R. Zweimüller, *Non exponential law of entrance times in asymptotically rare events for intermittent maps with infinite invariant measure*, Ann. Henri Poincaré **2** (2001), no. 3, 501–512.

- [15] R. Brouwer and J. Pennanen, *The cluster size distribution for a forest-fire process on \mathbb{Z}* , Electronic Journal of Probability **11** (2006), no. 43, 1133–1143.
- [16] J-F. Delmas and B. Jourdain, *Modèles aléatoires*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications].
- [17] B. Drossel, S. Clar, and F. Schwabl, *Exact results for the one-dimensional self-organized critical forest-fire model*.
- [18] B. Drossel and F. Schwabl, *Self-organized critical forest-fire model*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992), no. 11, 1629–1632.
- [19] M. Dürre, *Existence of multi-dimensional infinite volume self-organized critical forest-fire models*, Electronic Journal of Probability **11** (2006), no. 21, 513–539.
- [20] ———, *Uniqueness of multi-dimensional infinite volume self-organized critical forest-fire models*, Electronic Communications in Probability **11** (2006), no. 31, 304–315.
- [21] ———, *Self-organized critical phenomena : Forest fire and sandpile models*, Ph.D. thesis, LMU München : Faculty of Mathematics, 2009, pp. 1–58.
- [22] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.*, Second edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
- [23] G. R. Grimmett and I. Manolescu, *Inhomogeneous bond percolation on the square, triangular, and hexagonal lattices*, arXiv : 1105.5535, to appear in : Ann. Probab.
- [24] ———, *Universality for bond percolation in two dimensions*, arXiv : 1108.2784, to appear in : Ann. Probab.
- [25] G.R. Grimmett, *Percolation - 2nd edition*, Springer-Verlag, 1999.
- [26] ———, *Three theorems in discrete random geometry*, Probab. Surv. **8** (2011), 403–441.
- [27] T. E. Harris, *The theory of branching processes*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 119, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [28] C.L. Henley, *Self-organized percolation : a simpler model*, Bull. Am. Phys. Soc. **34** (1989).
- [29] P. J. M. Kallenberg, *Branching processes with continuous state space*, Mathematical Centre Tracts, vol. 117, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1979.
- [30] H. Kesten, *The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$* , Comm. Math. Phys. **74** (1980), no. 1, 41–59.
- [31] G. F. Lawler, *Scaling limits and the Schramm-Loewner evolution*, Probab. Surv. **8** (2011), 442–495.
- [32] T. M. Liggett, *Interacting particle systems*, Springer-Verlag, 1985.
- [33] B.D. Malamud, G. Morein, and Turcotte D.L., *Forest fires : An example of self-organized critical behavior*, Science **281** (1998), no. 5384, 1840–1842.
- [34] J. R. Norris, *Markov chains*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, Reprint of 1997 original.

- [35] K. Wiesenfeld P. Bak, C. Tang, *Self-organized criticality : an explanation of 1/f noise*, Phys. Rev. Letters **59** (1987), 381–384.
- [36] B. Ráth, *Mean field frozen percolation*, J. Stat. Phys. **137** (2009), no. 3, 459–499.
- [37] B. Ráth and B. Tóth, *Erdős-Rényi random graphs + forest fires = self-organized criticality*, Electron. J. Probab. **14** (2009), no. 45, 1290–1327.
- [38] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable non-Gaussian random processes*, Stochastic Modeling.
- [39] E. Seneta, *Functional equations and the Galton-Watson process*, Advances in Appl. Probability.
- [40] G. Slade, *The lace expansion and its applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1879, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Lectures from the 34th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 6–24, 2004, Edited and with a foreword by Jean Picard.
- [41] A. Stahl, *Existence of a stationary distribution for multi-dimensional infinite volume forest-fire processes*, arXiv : 1203.5533.

Cette thèse concerne l'étude de modèles de feux de forêt d'un point de vue probabiliste. Les modèles que nous avons étudiés ont été introduits dans le cadre de l'étude des systèmes critiques auto-organisés à la fin des années 80. Il s'agit de systèmes de particules, les arbres, définis sur un graphe connecté. Leur évolution est régie par deux familles de processus de Poisson, l'une pour la croissance des arbres, l'autre pour leur disparition via l'action de la foudre. L'influence de la foudre est caractérisée par un paramètre $\lambda > 0$. Ces modèles ont été beaucoup étudiés sur \mathbb{Z} . Par contre sur des graphes infinis plus généraux, seules son existence et son unicité ont été montrées jusqu'à présent. Dans cette thèse, nous avons étudié ces modèles sur \mathbb{Z}^d pour $d \geq 2$ et sur les arbres binaires, dans deux directions. La première concerne l'existence de mesures invariantes. La deuxième concerne l'étude de ce modèle lorsque le paramètre λ tend vers 0.

Dans la première partie, nous montrerons que pour tous les paramètres $\lambda > 0$, les processus de feux de forêt sur \mathbb{Z}^d pour $d \geq 2$ possèdent au moins une mesure invariante. Les processus de feux de forêt sont des processus de Markov non Feller, donc on ne peut pas appliquer les théorèmes usuels de l'étude des systèmes de particules. De plus, la géométrie de \mathbb{Z}^d ne permet pas d'utiliser les mêmes arguments que dans le cas de \mathbb{Z} . Nous utiliserons des outils développés lors de l'étude de ces modèles sur \mathbb{Z}^d .

Dans une seconde partie, nous nous consacrerons à la problématique de l'existence d'un processus limite lorsque λ tend vers 0, sur les arbres binaires. Dans un premier temps, nous étudierons un modèle sans feux pour mieux comprendre comment grossissent les composantes connexes d'arbres. En se plaçant dans une nouvelle échelle de temps et d'espace, nous montrerons la convergence en loi de la taille d'un ensemble de sites construit à partir d'une boule de rayon n et des composantes connexes qui l'intersectent, au bout d'un temps $t(n) > 0$. Dans un deuxième temps, nous rajouterons l'action de feux, en définissant un modèle différent du modèle initial. Dans ce modèle modifié, les composantes connexes autres que celle de l'origine suivront une loi stationnaire à laquelle on s'attend à la limite, et non la dynamique du modèle de feux de forêt initial. Pour ce modèle, nous montrerons la convergence en loi de la taille renormalisée de la composante connexe de l'origine au moment où elle brûle pour la première fois.

Mots-clés : Probabilités, processus de feux de forêt, systèmes de particules

This work is concerned with a probabilistic study of forest-fire models. The models studied here were introduced in the context of self-organized criticality at the end of the eighties. These models are systems of particles, the trees, defined on connected graphs. Their evolution is governed by two families of Poisson processes, one for the growth of trees, the other one for the ignition of trees by lightning. The influence of lightning is characterized by a parameter $\lambda > 0$. These models were widely studied on \mathbb{Z} . However, only the existence and uniqueness of more general infinite-volume forest-fire processes have been proven yet. In this thesis, we studied forest-fire models on \mathbb{Z}^d for $d \geq 2$ and on binary trees, in two directions. The first one is concerned with the existence of stationary measures. The second one is concerned with the study of these processes when the parameter λ tends to zero.

In the first part, we will show the existence of at least one stationary measure for forest-fire processes on \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$, for all parameters $\lambda > 0$. The forest-fire processes are Markov processes but not Feller processes, so the usual arguments cannot be used here. Moreover, the geometry of \mathbb{Z}^d does not allow using the same arguments as for \mathbb{Z} . Tools developed while studying these processes on \mathbb{Z}^d will be used here.

In the second part, we will study the behavior of the forest-fire processes on binary trees when the parameter λ tends to zero. We will begin with the study of a model without any fires, in order to understand better how the clusters of trees grow. We will show a convergence in law of the number of sites of a set construct from a ball of radius n and the intersecting clusters, after a time $t_n > 0$, for processes rescaled in space and time. Then, we will add fires and define a modified forest-fire model. In this new model, apart from the cluster of the origin, the clusters evolve under a stationary measure which we expect at the limit in λ , and not under the dynamic of the initial forest-fire model. For this model, we will show a convergence in law of the rescaled size of the cluster of the origin when it burns for the first time.

Keywords : probability, forest-fire processes, particle systems