



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse III - Paul Sabatier

Discipline ou spécialité : Micro-ondes, Électromagnétisme, et Optoélectronique

Présentée et soutenue par Adnane HAMIAZ

Le Jeudi 12 juillet 2012

Titre :

ÉTUDE D'UNE MÉTHODE VOLUMES FINIS POUR LA RÉOLUTION D'UN MODÈLE
NON LINÉAIRE D'UN COUPLAGE MAXWELL/PLASMA DANS LE DOMAINE
TEMPOREL

JURY

- M. Stéphane Lanteri, Directeur de Recherche INRIA, Sophia-Antipolis, Président
- M. Alain Reineix, Directeur de recherche CNRS, université de Limoge, Rapporteur
- M. Philippe Helluy, Professeur, université de Strasbourg, Rapporteur
- M. Olivier Pascal, Professeur, université Paul Sabatier, Directeur
- M. Xavier Ferrieres, Maître de recherche, ONERA Centre de Toulouse, Directeur
- M. Jean-Pierre Bœuf, Directeur de recherche CNRS, université Paul Sabatier, Examineur
- M. Jean-René Poirier, Maître de conférences, INP ENSEEIHT Toulouse, Examineur
- M. Pierre Bonnet, Maître de conférences, université de Clermont Ferrand, Examineur
- M. René Vézinet, Ingénieur CEA, Gramat, Invité

Ecole doctorale : Génie Electrique, Electronique, Télécommunications (GEET)

Unité de recherche : Laboratoire Plasma et Conversion d'Énergie (LAPLACE)

Directeur(s) de Thèse : Olivier PASCAL et Xavier FERRIERES



Juillet 2012

*A ma mère qui nous a déjà dédié sa vie entière.
Et à la mémoire de mon père gravée pour toujours
dans mon esprit.*

*"Il existe deux choses qui empêchent
une personne de réaliser ses rêves :
croire qu'ils sont irréalisables, ou bien,
quand la roue du destin tourne à l'improviste,
les voir se changer en possible au moment où
l'on s'y attend le moins."*

Extrait de *Le Démon et mademoiselle Prym*, de Paulo Coelho

*"Quand on veut une chose, tout l'Univers conspire à nous
permettre de réaliser notre rêve."*

Extrait de *L'Alchimiste*, de Paulo Coelho

Remerciements

Thèse soutenue -Dieu merci-, il est temps pour moi d'écrire ces quelques lignes de remerciements qui viendront clore trois années de thèse au laboratoire Laplace (comme le temps passe vite!). Trois années riches au niveau scientifique, mais également au niveau humain, grâce à toutes les personnes que j'ai eu l'occasion de rencontrer.

Le travail présenté dans ce document est le fruit d'une collaboration entre le Groupe de Recherche en Électromagnétisme (GRE) du LAPLACE et le groupe de recherche en Électromagnétisme et Radar (DEMR) de l'ONERA de Toulouse dans un projet de recherche transdisciplinaire RTRA PLASMAX.

En premier lieu, je tiens à remercier mes chers directeurs de thèse Olivier Pascal et Xavier Ferrieres de m'avoir soutenu et guidé. Merci à Olivier, tout d'abord pour m'avoir permis d'effectuer cette thèse, mais également pour ses conseils avisés, ses nombreuses idées, ses connaissances scientifiques, sa pédagogie et la liberté qu'il m'a laissé pour guider ma recherche. Et enfin, je remercie également Olivier pour ses qualités humaines, sachant toujours rester disponible et amical.

Un grand merci à Xavier à qui j'exprime, tout particulièrement, ma reconnaissance pour avoir co-encadré ma thèse de façon irréprochable durant ces trois années. Je le remercie pour sa disponibilité, sa grande gentillesse et son soutien permanent. Malgré nos deux forts caractères nous avons su nous entendre et mener ces travaux dans la complicité et la bonne humeur. Je ne te remercierai jamais assez pour ce que tu as fait pour moi. Grâce à toi, je sais, comme d'autre de tes thésards avant moi, que "le bug se situe toujours entre le clavier et le fauteuil". Un grand merci aussi pour toutes ces conversations enrichissantes sur la nature, le jardinage, la politique et la vie. Ce fut une joie de travailler avec toi.

Je remercie également mes deux rapporteurs de thèse, Phillippe Helluy et Alain Reineix, d'avoir accepté de rapporter ce présent manuscrit et pour la rapidité avec laquelle ils l'ont lu. Je leur suis reconnaissant d'avoir fait l'effort de se plonger dans mes travaux malgré leur charge de travail. Merci également aux autres membres de mon jury qui ont accepté de juger ce travail et de l'intérêt qu'ils y ont porté. À Stéphane Lanteri qui a présidé le jury, à Pierre Bonnet, Jean Pierre Boeuf, Jean René Poirier et à René Visiné pour avoir accepté l'invitation.

Je tiens aussi à remercier Jean Pierre Boeuf de m'avoir initié à la physique des plasmas et pour sa disponibilité, sa pédagogie et ses remarques qui ont enrichi nos discussions pendant ces trois années. Je tiens aussi à remercier Jean René Poirier de m'avoir encouragé à réaliser le monitorat qui m'a été très bénéfique et pour ses conseils sur la pédagogie et ses encouragements sans faille même pendant des moments délicats .

J'en profite également pour remercier Gratton Serge, Coulon Martial, Joseph Ger-gaud et Luc Giraud avec qui ce fut un plaisir d'enseigner leurs modules.

À tous les membres du laboratoire que j'ai pu côtoyer, qui ont contribué directement, ou indirectement à cette thèse, j'oublierai certainement quelques noms, vous m'excuserez d'avance. Tout d'abord, je remercie tout les permanents du GRE : Jérôme Sokoloff, Olivier Pigaglio, Nathalie Raveu, Gaeton Prigent, Ronan Perusselle et Tao Junwu pour leur disponibilité et leur gentillesse avec une mention spéciale pour Jérôme Sokoloff et Olivier Pigaglio pour leurs très bonne humeur.

Un grand merci aux doctorants, ex-doctorants et aux post-doctorants : Jonathan, Philippe, Mohamed, Guo-Qiang, Bhaskar, Tahar, Mounir, Chérif mais également à ceux qui sont sortis plus tôt : Amine, Sebastien, Aziz.

Une ligne spéciale pour ceux avec qui j'ai partagé le couloir à l'UPS. Merci à Olivier, Michael et un grand merci à Asma et Kévin qui ont été là pour moi le jour de ma soutenance. Asma et Kevin je vais essayer d'être là le jour "J" pour vous aussi. Un remerciement particulier à Juslin, mon compagnon de route, qui m'a soutenu du début jusqu'à la fin de la thèse et qui a été présent dans toutes les circonstances.

Une ligne spéciale et remerciement particulier pour mes amis syriens et libanais avec qui j'ai partagé des moments magnifiques soit au bureau à l'ENSEEIHHT soit autour d'un plat syrien ou algérien : Mohamad Almustafa, Ahmad Alhazzoury, Rania Oubaid, Adnan Saghir, Rawdha Thabet. Je tiens également à remercier Malika pour son aide précieuse dans la préparation et l'organisation du pot.

Je n'omets point Marie Estruga, la secrétaire de l'école doctorale GEET. Pour tous les services rendus, je vous dis merci !

Je voudrai également rendre hommage aux divers professeurs que j'ai eu durant ma scolarité et qui m'ont donné goût aux sciences. J'ai une petite pensée toute particulière pour M. Bouakache Rabah (mon prof au primaire), Mme Amrouche Hanifa (ma prof de sciences), Mme Talbi Aqila (ma prof de physique), M. Bellil Yahia (mon prof de français) et également Mme. Mahtout Salima (ma prof de mathématiques), M. Metmati (mon prof de physique en terminal) pour leur enthousiasme et la qualité de leurs cours. Merci également à mes amis la bande du lycée (c'était le bon vieux temps) : Nourdine, Daoud, Hilal, Zina, Yazid,...avec une pensée à mes chers amis Aziz et Karim qui nous ont quittés très jeune.

Je ne remercierai jamais assez ma mère, mes frères (Moussa, Hakim, Ahcen) et mes soeurs (Nabila, Leila, Hayat, Linda, Malika) et de m'avoir soutenu et encouragé sans relâche au cours de toutes ces années d'études ainsi que pour l'amour que vous me témoignez tous les jours. Une chaleureuse pensée à mon père qui aurait été heureux et fier de moi et de ce que je suis. Une grande pensée à la famille Hamiaz, Kachir (Mourad, Bicha, Baklich, Anais, Mohamed-Amine, Rayane...) et Ait Slimani. Un grand merci à mes grands-mères maternelle et paternelle (Kiki, Baya) et mon oncle et ses enfants (Mhand, Linda, Jiji).

Une immense dédicace à la plus belle ville du monde : Béjaia, au village de mon enfance : Tikilsa et à la ville de mon enfance : Tazmalt.

Enfin, je remercie ma chère et tendre fiancée Mounira de m'avoir encouragé, soutenu pendant les moments difficiles, d'avoir supporté mon stress et de m'avoir attendu en étant patiente et toujours souriante.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
INTRODUCTION	1
1 FORMULATION MATHÉMATIQUE ET COUPLAGE DES ÉQUATIONS MAXWELL-PLASMA	13
1.1 INTRODUCTION	13
1.2 FORMULATION GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL EN RÉGIME TRANSITOIRE	14
1.2.1 Rappel historique du formalisme de Maxwell	14
1.2.2 Problème électromagnétique : Formulation générale des équations de Maxwell	15
1.2.2.1 Formalisme mathématique	15
1.2.2.2 Reformulation du problème d'évolution	17
1.3 TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA MODÉLISATION DES DOMAINES NON-BORNÉS	18
1.3.1 Conditions aux limites absorbantes ou ABC	19
1.3.2 Couches Absorbantes ou ALB	19
1.3.3 Rappel d'un résultat d'existence et d'unicité	24
1.4 MODÈLE PLASMA	25
1.4.1 L'équation de Boltzmann considérée	25
1.4.2 Description fluide du plasma	25
1.4.2.1 Équation de densité	26
1.4.2.2 Équation d'Euler ou de vitesse	27
1.4.3 Reformulation de l'équation de densité de plasma	27
1.4.3.1 Dérive sous l'action d'un champ électrique	27
1.4.3.2 La diffusion libre	28
1.4.3.3 La diffusion ambipolaire	28
1.5 MODÈLE FINAL DU PLASMA ÉTUDIÉ DANS LE CADRE DE LA THÈSE	30
2 EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION DU SYSTÈME MAXWELL/PLASMA	33
2.1 INTRODUCTION	33
2.2 EXISTENCE ET UNICITÉ DES SOLUTIONS	34
2.3 PROBLÈME AUX LIMITES À TRAITER	35
2.3.1 Hypothèses	35
2.3.2 Choix des espaces de travail	36
2.4 RAPPELS MATHÉMATIQUES	37
2.4.1 Définitions	37
2.4.2 Rappel sur les traces	38

2.4.3	Théorèmes fondamentaux	38
2.5	ÉTUDE DE L'EXISTENCE ET DE L'UNICITÉ	39
3	APPROXIMATION NUMÉRIQUE DU SYSTÈME DE MAXWELL COUPLÉ AU MODÈLE PLASMA	47
3.1	INTRODUCTION	48
3.2	APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL/PLASMA PAR LE SCHÉMA DIFFÉRENCES FINIES DE YEE	48
3.2.1	Rappel du schéma de Yee pour l'approximation des équations de Maxwell	49
3.2.2	Approximation FDTD pour les équations liées au plasma	52
3.2.3	Discrétisation du problème couplé	54
3.2.4	Prise en compte des conditions aux limites sur le problème couplé	55
3.2.4.1	PML pour les équations de Maxwell	55
3.2.4.2	Conditions de périodicité électromagnétiques	56
3.2.5	Prise en compte des sources électromagnétiques dans le problème couplé	57
3.2.6	Conclusion	58
3.3	APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL/PLASMA PAR UN SCHÉMA VOLUMES FINIS	58
3.3.1	Formulation conservative et hyperbolicité du système de Maxwell	59
3.3.2	Les volumes de contrôle	62
3.3.3	Formulation variationnelle	64
3.3.4	Discrétisation des flux	65
3.3.4.1	Flux numérique décentré d'ordre un	65
3.3.4.2	Calcul des flux	66
3.3.5	Traitement des conditions aux limites	69
3.3.5.1	Surface parfaitement métallique (PEC)	69
3.3.5.2	Surface parfaitement magnétique (PMC)	69
3.3.5.3	Condition absorbante de Silver-Müller	70
3.3.5.4	Couches parfaitement absorbantes (PML)	70
3.3.6	Approximation d'ordre supérieur en espace	71
3.3.7	Formalisme général d'une approche volumes finis	72
3.3.8	Approximation numérique des équations du plasma	78
3.3.8.1	Formulation variationnelle	79
3.3.8.2	Calcul des flux	79
3.3.8.3	Approximation semi-discrète du modèle plasma	81
3.3.9	Discrétisation du problème couplé	82
3.3.10	Stratégie de pas de temps local pour le calcul des champs électroma- gnétiques	83
3.3.11	Conclusion	84
3.4	APPROCHE GALERKIN DISCONTINUE POUR LE PROBLÈME MAX- WELL/PLASMA	84
3.4.1	Formulation mathématique GD des équations de Maxwell	85
3.4.2	Approximation numérique du formalisme GD pour les équations de Maxwell	85
3.4.3	Définition des fonctions de base et des degrés de liberté	86
3.4.4	Formulation du schéma numérique lié aux équations de Maxwell	88
3.4.5	Ajout des équations liées au plasma dans le formalisme GD	88

4	APPLICATIONS NUMÉRIQUES	91
4.1	INTRODUCTION	91
4.2	STRATÉGIES DE PARALLÉLISATION	92
4.2.1	Parallélisation de la méthode différences finies	92
4.2.1.1	Découpage du domaine de calcul	92
4.2.1.2	Echanges de données	93
4.2.1.3	Performances obtenues	96
4.2.1.4	Conclusion	97
4.2.2	Parallélisation de la méthode volumes finis	97
4.2.2.1	Découpage du domaine de calcul pour l'approche volumes finis	97
4.2.2.2	Echanges des données dans l'approche volumes finis	98
4.2.2.3	Performances obtenues	99
4.2.2.4	Conclusion	100
4.3	INTÉRACTION MICRO-ONDE/PLASMA EN ESPACE LIBRE	100
4.3.1	Simulation FDTD du claquage en espace libre dans une configuration 2D	101
4.3.2	Simulation FDTD 3D d'un claquage en espace libre	103
4.4	EFFET DE BLINDAGE	107
4.4.1	Surface selective en fréquence 2D	109
4.4.2	Protection d'une électronique à l'intérieur d'une cavité	114
4.5	LIGNE MICRO-RUBAN	117
4.6	AUGMENTATION DE LA PRÉCISION DES CHAMPS CALCULÉS DANS UNE CAVITÉ PARFAITEMENT MÉTALLIQUE	119
4.7	CONCLUSION	127
5	MAILLAGE ADAPTATIF MONODIMENSIONNEL	129
5.1	INTRODUCTION	129
5.2	PROBLÈME 1D MAXWELL/PLASMA COUPLÉ	130
5.2.1	Formulation mathématique et approximation	131
5.2.2	Configuration 1D	132
5.3	MAILLAGE ADAPTATIF	137
5.3.1	Principe du raffinement	138
5.3.2	Principe du déraffinement	138
5.3.3	Etudes numériques sur l'influence des paramètres de raffinement/déraffinement	138
5.4	CONCLUSION	147
	CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES	149
	LISTE DES FIGURES	152
	ANNEXES	159
	BIBLIOGRAPHIE	176
	BIBLIOGRAPHIE	179

INTRODUCTION

Les décharges électriques dans les gaz ont été étudiées depuis plus de deux siècles. Parmi l'ensemble des décharges, les décharges micro-ondes ont été largement étudiées depuis la fin des années quarante afin de résoudre le problème de claquage dans les guides d'onde utilisés dans les systèmes radar[1].

Les premiers travaux concernant les décharges micro-ondes ont été orientés vers la détermination des champs critiques. Les fortes puissances en jeu dans les systèmes radar nécessitent effectivement de s'affranchir de ces phénomènes tant dans les circuits qu'en espace libre. A défaut, au mieux l'émission de l'onde est inefficace, au pire, le matériel est détruit soit par la décharge elle-même, soit par la désadaptation qu'elle engendre.

On trouve également dans la circuiterie radar le principal élément micro-onde exploitant les plasmas : le tube T/R, pour Transmit / Receive [2]. Quand l'émetteur et le récepteur partagent la même antenne, cet élément assure la protection du récepteur sensible aux faibles puissances pendant la phase d'émission de forte puissance. Les problématiques micro ondes qui incluent les plasmas ne sont pas très nombreuses. Historiquement, nous pouvons citer les effets de l'ionosphère sur la propagation des ondes. Ce sujet est toujours d'actualité à travers la caractérisation de la scintillation associée. Plus récemment et en particulier au sein de l'ONERA, l'engouement pour l'exploitation des plasmas dans l'amélioration de la furtivité radar des avions réaffirme l'intérêt du thème micro-onde plasma [3][4]. Dans le registre des applications défense, des travaux récents sur les surfaces sélectives en fréquence court-circuitées par des décharges quand elles sont soumises à une agression électromagnétique renforcent cet intérêt. Enfin, la possibilité de contrôler le plasma le positionne comme candidat dans la recherche actuelle de matériaux pour la reconfigurabilité micro-onde. Ce dernier sujet est d'ailleurs traité largement au sein du LAPLACE [5] [6][7].

Les applications plasmas qui incluent les micro-ondes sont nombreuses. Elles sont focalisées sur les sources de plasma froid. Ces ondes se révèlent particulièrement efficaces pour chauffer directement les électrons des plasmas. Elles ne nécessitent pas d'électrodes, elles n'engendrent pas de bombardement ionique et préservent ainsi les surfaces. Ces sources sont compactes et conduisent à des plasmas de fortes densités mais dont les dimensions et l'homogénéité sont limitées. De nombreux développements ont été faits dans ce sens aboutissant à des dispositifs à onde de surface [8][9][10], à cavité résonante [11][12][13] ou bien à résonance cyclotronique électronique. Le développement industriel des traitements de surface [14][13] continue à stimuler significativement cet axe de recherche.

Un élément notable à la source de ce travail de thèse est la réunion des acteurs toulousains de la recherche en micro-ondes et plasmas au sein du projet PLASMAX, mis pour Plasma Maxwell. Ce projet a été lauréat en 2007 du premier appel d'offre du Réseau Thématique de Recherche Avancée en Sciences et Technologies pour l'Aéronautique et l'Espace (RTRA-STAE). Il a rassemblé le LAPLACE (UMR 5213), l'ONERA et l'IMT (UMR 5219) avec pour objectif la modélisation des interactions

micro-ondes/plasmas pour les applications aérospatiales. Dans ce cadre, l'orientation de l'effort de recherche vers le développement de modèles numériques prenant en compte les équations de Maxwell et le milieu non linéaire du plasma pour disposer d'outil capables de rendre compte de configurations réalistes a été définie. Cet objectif ambitieux est nécessairement orienté d'emblée vers la modélisation 3D. Cela engendre d'évidentes difficultés liées au temps de calcul et à la mémoire mais cela permet d'envisager une ingénierie fine dans l'optimisation des dispositifs qui exploitent l'interaction micro-onde/plasma, voire le développement de nouveaux concepts.

Cet objectif de long terme posé, il a été choisi de conserver un modèle physique représentatif mais minimaliste. Vu les dispositifs d'intérêt pour lesquels les densités électroniques sont plutôt fortes pour des plasmas froids, l'orientation vers des pressions raisonnablement élevées conduit à choisir un modèle basique de plasma fluide. Ce dernier limitera néanmoins la représentativité des calculs aux premières phases de la décharge, mais il permettra de tester les effets de la non linéarité en s'appuyant sur les constatations physiques existantes, notamment pour les décharges en espace libre. Dans le cadre à présent posé, le problème se recentre sur les méthodes numériques en mesure de traiter efficacement cette association équations de Maxwell et plasma fluide en 3D. Il convient alors de commencer par une rapide revue des méthodes candidates pour établir une démarche et les objectifs associés qui déboucheront sur l'organisation du manuscrit.

Le système d'équations aux dérivées partielles issu du modèle physique est un système non linéaire d'équations aux dérivées partielles. Ce système se compose d'une part, des équations de Maxwell qui traduisent la propagation des ondes électromagnétiques, et d'autre part d'une description fluide du plasma qui se traduit par deux équations qui portent sur la densité et la vitesse électronique. Le couplage se fait à travers le terme courant induit par le plasma et à travers la fréquence d'ionisation effective puisqu'elle dépend du champ efficace.

Il existe plusieurs méthodes numériques pour résoudre ce problème découplé dans le domaine temporel telles que les Différences Finies dans le Domaine Temporel, FDTD en anglais, la Méthode des Eléments Finis, FEM, ou bien celle des Volumes Finis dans le Domaine Temporel, FVTD.

La méthode FDTD [15] [16] est la méthode de résolution numérique la plus connue et la plus utilisée par les ingénieurs dans les différents domaines de modélisation physique (électromagnétisme, électricité, plasma, ...etc). Cette popularité est due à sa simplicité dans la mise en uvre, à sa robustesse et à son très bon coût de calcul. Cependant, la méthode FDTD dans sa formulation classique (schéma de Yee) est limitée à l'utilisation d'un maillage structuré cartésien, ce qui implique une approximation de l'objet en escalier quand celui-ci possède une géométrie courbée. Cela se traduit par des erreurs d'approximation qui s'ajoutent aux erreurs de dispersion numérique de la méthode.

La méthode FEM [17] s'appuie sur une formulation variationnelle de l'équation aux dérivées partielles. Cependant, une telle formulation n'existe pas pour toute équation aux dérivées partielles et en particulier dans les cas non linéaires. Les méthodes d'éléments finis ne sont ainsi pas bien adaptées à la résolution de notre problème.

Les méthodes de volumes finis [18] [19] ont été mises au point initialement pour des lois de conservation, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques. Ces équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. Les intégrales de volume

d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface en utilisant le théorème de flux-divergence. Ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes finis. On utilise une fonction de flux numérique pour faire une approximation des flux aux interfaces. Les méthodes de volumes finis sont adaptées aux problèmes non linéaires.

Nous avons choisi dans cette thèse la méthode volumes finis pour palier aux inconvénients des FDTD et FEM. La méthode FVTD a comme avantage la possibilité de prendre en compte des maillages conformes à la géométrie, maillages non structurés type triangulation en 2D ou tétraèdres en 3D. Elle minimise de plus la dispersion numérique. Elle permet également de prendre en compte naturellement, sous formes de flux, les conditions aux limites et les raffinements locaux. Cependant, le principal défaut des schémas volumes finis réside dans leur dissipation numérique dans les cavités ou les structures résonantes. Pour résoudre ce problème une approximation d'ordre supérieure type Galerkin Discontinu pourra être envisagée.

CONTRIBUTION

Par rapport aux travaux menés par J. P. Boeuf et al [20][21][22] dont l'objectif principal était la démonstration que le modèle Maxwell/plasmas fluides traité en FDTD 2D permettait de rendre compte de la physique des streamers à pression atmosphérique, nous nous sommes donnés pour but le développement d'outils fondés sur les méthodes tridimensionnelles des différences finies (schéma de Yee) et des volumes finis (FVTD). Ainsi, il sera possible de considérer les géométries réalistes et complexes. Même si la capacité de la FDTD 2D à décrire de façon correcte les non linéarités du modèle physique était déjà établie au prix d'un surmaillage pouvant atteindre $\lambda/1000$ à cause du plasma, l'évaluation en 3D et le prolongement vers les méthodes de volumes finis constituent des contributions significatives. Vu la remarque précédente sur le maillage, le nombre de degrés de liberté est bien plus considérable que dans le cas de la résolution des équations de Maxwell seules. Le coût des méthodes de résolution peut alors devenir prohibitif et les volumes considérés ne sont pour l'instant que de quelques λ^3 . L'optimisation du temps de calcul (CPU) devenant alors un enjeu majeur, nous avons proposé des améliorations pour la méthode des volumes finis en introduisant deux stratégies originales dans ce contexte :

- stratégie de pas de temps local.
- stratégie de parallélisation du code sous MPI.

Constatant que la dissipation du schéma volumes finis constitue un point faible qui limite son emploi à l'intérieur des cavités ou des structures résonantes, nous avons envisagé une méthode Galerkin Discontinue (GD) réputée palier à cette difficulté. Elle combine les avantages des méthodes d'éléments finis (maillage non structuré, montée en ordre aisée) et de volumes finis (facilité de prise en compte des conditions aux limites). Elle traite les discontinuités entre cellules voisines par une approximation volumes finis des flux et elle approche le champ sur chaque cellule par une base locale de fonctions. En plus, nous avons abordé une stratégie de maillage auto-adaptatif basé sur un critère physique : la variation du gradient de la densité. Même si les travaux monodimensionnels conduits dans ce cadre restent tout à fait préliminaires, nous espérons que ce volet permettra de constituer une base de départ à de futurs travaux sur le maillage auto-adaptatif en 2D et 3D et aussi sur l'utilisation de la méthode Galerkin discontinue. L'ensemble des développements cités ci-dessus, réalisés pour le modèle Maxwell/Plasma fluide, sont originaux et

constituent ainsi une contribution significative pour une meilleure connaissance de l'extension de méthodes numériques conventionnelles à cette physique non linéaire.

ORGANISATION DU MANUSCRIT

Rappelons encore une fois que nous allons plus particulièrement travailler sur une modélisation Maxwell/plasma fluide, pour essayer d'obtenir un outil de simulation efficace dans le cas 3D. Le document est organisé en cinq chapitres dont le **premier** introduit le modèle physique à résoudre. Nous effectuons dans celui-ci une rapide mise en place des équations de Maxwell et de celles liées aux plasmas étudiés dans cette thèse. Dans le **deuxième chapitre**, on réalise une étude mathématique du système couplé afin de s'assurer que celui-ci possède bien une solution. On donne notamment des hypothèses pour lesquelles le problème admet une solution unique. Le **troisième chapitre** est consacré à l'approximation numérique du système couplé. Un premier paragraphe est dédié à l'approximation des différences finies en 3D, basée sur le schéma de Yee, qui est actuellement la plus utilisée pour résoudre le problème dans le cas 2D. Nous précisons, dans cette partie, les inconvénients majeurs de cette méthode, notamment le coût de calcul lié au fait d'avoir à deux problèmes physiques très différents en termes de variations temporelles et spatiales. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présentons la méthode que nous avons spécialement développée dans cette thèse. Cette méthode est basée sur un schéma volumes finis dont nous donnons, tout d'abord, le principe pour les équations de Maxwell. Nous développons alors son adaptation aux équations liées au plasma. Nous présentons ensuite, une stratégie de pas de temps local afin de réduire le temps de calcul. Les avantages de ce schéma par rapport à la méthode des différences finies sont mises en évidence. Malheureusement, notre approche volume finis présente également des difficultés liées en particulier à la dissipation numérique. Pour palier à ce problème, un schéma Galerkin Discontinu est proposé dans une troisième partie. Celui-ci permet d'augmenter les performances du schéma volumes finis tout en conservant le raffinement local.

Dans le **quatrième chapitre**, nous présentons en premier lieu une stratégie de parallélisation pour chacun des schéma FDTD et FVTD, puis, on présente un ensemble de configurations physiques 2D et 3D pour lesquelles nous avons réalisé des simulations. Des validations et des comparaisons à partir de notre approche volumes finis sont ainsi présentées. Sont successivement présentées des décharges en espace libre, des plasmas dans des orifices qu'ils soient périodiques et dans une plaque métallique ou bien dans une cavité ou encore au centre d'une ligne micro-ruban. Les applications visent les surfaces sélectives en fréquence, le blindage vis-à-vis des agressions micro-ondes de forte puissance ou les dispositifs reconfigurables. Enfin, dans le **dernier chapitre**, dans la perspective d'améliorer les coûts calcul de nos simulations, nous présentons une stratégie de maillage auto-adaptatif pour notre problème couplé dans le cas 1D. Pour cela, nous avons considéré un critère basé sur le gradient de la densité électronique pour raffiner ou déraffiner localement le maillage au cours du temps.

RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS SUR LA PHYSIQUE DES PLASMAS

LE plasma constitue environ 99% de la matière visible de l'univers. Nous le trouvons à l'état naturel dans les étoiles, les aurores boréales, les nébuleuses, les couronnes solaires, les éclairs ou encore dans l'ionosphère. On peut également les produire artificiellement, rendant ainsi réalisables de nombreuses applications de notre vie quotidienne tels que les écrans plasma, les néons, les photocopieurs les arcs électriques pour la soudure, les torches à plasma pour le découpage ou le revêtement de surface, les traitements de surface de polymères, ...

Le concept de "plasma" provient du grec et signifie "*forme, chose moulée*" ou encore "*ouvrage façonné*". Il fut introduit pour la première fois, en 1928, par le physicien américain Irving Langmuir [23] pour désigner un gaz ionisé électriquement neutre dans les tubes à décharge. Ce terme de plasma fut ensuite repris par les astrophysiciens pour désigner un état dilué de la matière, analogue à un gaz constitué de particules chargées mais électriquement neutre [24]. Par la suite, les plasmas non neutres comme la dynamique des faisceaux d'électrons, de protons, d'ions lourds ont été découverts.

Aujourd'hui, un plasma est un gaz partiellement ou totalement ionisé qui se compose d'un ensemble de particules d'espèces chargées : atomes, molécules neutres, ions positifs ou négatifs et électrons. A l'échelle macroscopique, ils sont généralement quasi-neutres. Cela signifie que la somme totale des charges est nulle dans un volume macroscopique.

Les propriétés spéciales des plasmas sont dues au long rayon d'action de la force entre particules. Les plasmas conservent cependant certaines propriétés des gaz (grande compressibilité, énergie interne, et pression proportionnelle à la température absolue, ...)[24].

Le plasma est aussi présenté comme le "quatrième état" de la matière, dans l'échelle des températures, après les états solide, liquide et gazeux. En effet, la matière passe de l'état solide à l'état liquide puis à l'état gazeux en fonction de la température atteinte (les liaisons entre particules sont très sensibles à la température). A une température de $10^5 K$ correspond une énergie d'environ $10 eV$, ce qui est approximativement l'énergie d'ionisation. A cette température la matière est ionisée : on passe à l'état plasma. Cependant, des plasmas existent à des températures inférieures, notamment ceux produits en laboratoire.

Plusieurs applications technologiques ont suscité l'étude des plasmas, regroupée dans la physique des plasmas qui étudie les propriétés, la dynamique et les applications des plasmas. Au début du XX^{ème} siècle, les premières études de propagation

d'ondes dans les gaz ionisés ont été réalisées. Elles ont ensuite été généralisées au cas des gaz ionisés soumis à un champ magnétique. Ensuite, le développement de dispositifs à décharge dans les gaz, en particulier les arcs et les lampes, a fait l'objet des travaux de I. Langmuir qui a étudié les propriétés du plasma contenu dans ces dispositifs. Ces cent dernières années, les chercheurs se sont intéressés aux tubes à faisceau à électrons; le premier chercheur étant A. W. Hull avec le magnétron. Bien que les faisceaux d'électrons ne soient pas neutres, ils possèdent des propriétés comme les ondes de charge d'espace, analogues aux plasmas qui ont suscité le développement de tubes pour hyperfréquences (klystrons,...) entre 1935 et 1960. Ces études sur la décharge dans les gaz restent encore d'actualité. Elles interviennent à la fois dans des applications traditionnelles comme le transport de l'énergie électrique et dans des nouvelles techniques récentes, comme par exemple la production de lumière dans les lasers à gaz.

Enfin, la production d'énergie par fusion thermonucléaire contrôlée reste une application des plasmas qui a changé le cours de l'histoire, notamment avec la production des bombes H en 1952 qui correspond à des réactions de fusion des noyaux légers en noyaux d'hélium.

Selon leurs propriétés, les plasmas peuvent être de natures très diverses. Pour les caractériser et les répertorier, il est nécessaire de tenir compte d'un certain nombre de paramètres [[3],[24], [25]] que nous allons décrire maintenant.

PARAMÈTRES D'UN PLASMA

Densité des espèces

Un plasma est un mélange de particules chargées et neutres, il se caractérise alors par le nombre d'espèces qu'il contient. On associe à chaque espèce une densité qui est le nombre de particules de cette espèce par unité de volume.

Soit n_n la densité des neutres, n_i^+ la densité des ions positifs, n_i^- la densité des ions négatifs et n_e celle des électrons. Supposons que les ions positifs aient une charge $(+Z^+e)$ et que les ions négatifs aient une charge $(-Z^-e)$, e étant la charge élémentaire. La densité ionique s'obtient alors par la condition de neutralité de charge suivante :

$$-n_e e + n_i^+ Z^+ e - n_i^- Z^- e = 0 \quad (1)$$

Si Z vaut 1, nous avons $n_e = n_i$. Le plasma est à l'équilibre. On dit également que le plasma est électriquement neutre. Cette neutralité est maintenue par des forces électrostatiques qui apparaissent dès qu'un déséquilibre de charges se crée localement et qui tendent alors à faire revenir le plasma à la neutralité. les densités peuvent aller de $10^6 m^{-3}$ (espace interstellaire) à $10^{34} m^{-3}$ (plasma dans les métaux).

Température des espèces

La température dont l'unité est le Kelvin (K) constitue un paramètre important pour un plasma. Comme pour les densités, on associe à chaque espèce une température, T_i la température ionique et T_e la température électronique. A l'équilibre thermodynamique les deux températures sont égales. En physique des plasmas, l'énergie

cinétique d'une espèce est souvent exprimée par sa température en eV (électron-Volt) ($1eV \approx 10^{-19}J \approx 11605K$). Rigoureusement c'est la quantité $k_B T$ qui est exprimée en eV , où k_B est la constante de Boltzmann ($k_B = 1.380710^{-23}JK^{-1}$). Les températures peuvent varier de $0.1K$ pour les néons à $10^{10}K$ dans des réacteur de fusion.

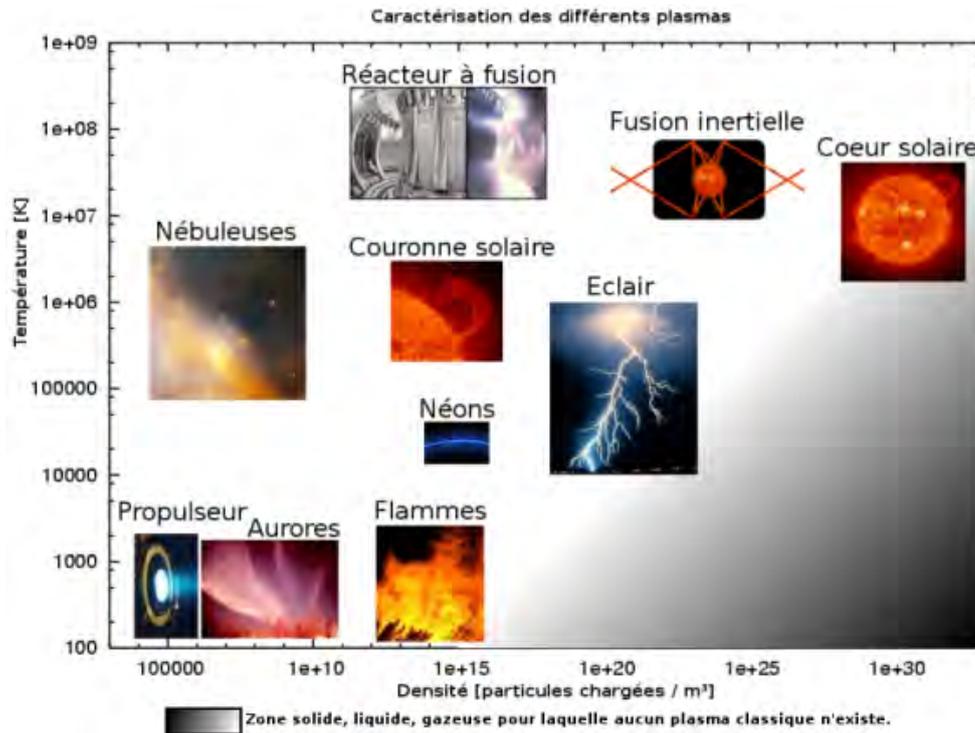


figure 1 – Classification des plasmas selon leur densité et leur température électronique.

Les deux paramètres précédents (i.e. densité et température des espèces) sont les deux paramètres principaux caractérisant un plasma (paramètres primaires).

Degré d'ionisation

Les gaz sont des isolants électriques car ils se composent uniquement des molécules neutres. Cependant une décharge dans un gaz produit un gaz ionisé contenant n_e électron, n_i ions positifs et n_n neutres par unité de volume. Le degré d'ionisation, noté α , est défini par le rapport :

$$\alpha = \frac{n_e}{n_n + n_e} \quad (2)$$

Ce degré d'ionisation est un paramètre qui permet de caractériser un plasma mais aussi les phénomènes liés à ce degré. Il varie en pratique entre des valeurs très faibles de l'ordre de 10^{-10} à des valeurs qui peuvent également atteindre 1. Il existe une valeur de α noté α_0 , calculée par la théorie cinétique des gaz ionisés qui définit la valeur critique permettant de classer les plasmas :

- Plasma faiblement ionisé : $\alpha < \alpha_0$ ou α_0 est de l'ordre de 10^{-7} , une minorité d'ions et d'électrons se déplace au milieu d'un grand nombre de molécules neutres. Les collisions binéaires entre un électron (ou un ion) et une molécule constitue alors la dynamique des particules. Par exemple les plasmas industriels et l'ionosphère appartiennent à cette famille.

- Plasma fortement ionisé : $\alpha > \alpha_0$, les collisions binaires électron-électron et électron-ion sont plus importantes que les collisions électron-molécule. Par exemple les plasmas thermonucléaires et les plasmas stellaires appartiennent à cette catégorie .
- Plasma totalement ionisé : $\alpha = 1$, la densité des molécules neutres est nulle. La nature de ces plasmas fortement ionisés est due à la présence d'interactions entre particules qui sont les interactions coulombiennes, appelées aussi interactions collectives. Par exemple, on trouve les plasmas stellaires dans ce type de plasmas.

Il existe également des plasmas fortement ionisés sans interactions entre particules, comme par exemple le vent solaire.

Longueur de Landau

Considérons un électron d'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2 = k_B T_e$. En présence d'un autre électron, son énergie potentielle est donnée par :

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3)$$

La longueur de Landau, λ_L , correspond à la distance séparant les deux électrons pour laquelle l'énergie cinétique de l'électron (énergie cinétique d'agitation thermique) est de l'ordre de l'énergie potentielle d'interaction binaire entre les deux électrons. Elle est définie par :

$$\lambda_L = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 k_B T_e} \quad (4)$$

avec e la charge élémentaire d'un électron, T_e sa température et ϵ_0 la permittivité électrique du vide. Notons que λ_L est nécessairement utilisée pour des études portant sur les phénomènes collisionnels dans un plasma.

Si la longueur séparant les deux électrons est inférieure à λ_L (i.e. l'énergie potentielle est supérieure à l'énergie cinétique), les plasmas sont corrélés. Si cette longueur est supérieure à λ_L , (i.e. l'énergie potentielle est inférieure à l'énergie cinétique), on parle de plasmas cinétiques. Cette longueur critique d'interaction binaire intervient dans l'étude de phénomènes de collisions.

Longueur de Debye

De manière générale, les interactions collectives entre particules, dans un plasma, jouent un rôle beaucoup plus important que les effets résultants des interactions binaires. Ces interactions collectives tiennent compte des conditions locales mais aussi de l'état du plasma dans un environnement lointain.

Considérons un plasma globalement neutre et une particule de charge q positive positionnée à $r = 0$. La répartition du potentiel V autour de la charge q est définie par :

$$V(r) = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right), \quad (5)$$

où λ_D est donné par :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}} \approx 69 \sqrt{\frac{T_e}{n_e}} \text{ en m.} \quad (6)$$

avec ε_0 permittivité du vide, k_B constante de Boltzmann, e charge élémentaire coulombienne, n_e la densité électronique du plasma en m^{-3} et T_e la température électronique en Kelvin. Le paramètre λ_D est connu sous le nom de longueur de Debye. C'est une longueur critique d'interaction collective. Il s'agit d'une estimation de la distance au-delà de laquelle l'influence du champ électrique d'une particule chargée n'est plus ressentie par les autres particules chargées. Elle correspond à une longueur d'écrantage. La particule de charge q va perturber le plasma quasi neutre. En effet, les particules de charge opposées à q sont attirées par la charge et forment ainsi un écran autour de q afin de rétablir l'équilibre de charge. Pour une distance inférieure à la longueur de Debye, le potentiel vu est celui de la charge nue. Au-delà, ce potentiel n'est plus vu par le plasma et le plasma retrouve sa neutralité.

Remarque 1 À des distances de l'ordre de λ_D , les interactions entre particules prédominent devant les interactions collectives. La neutralité électrique du plasma n'est alors valable que pour une échelle d'observation supérieure à λ_D .

Par ailleurs, il est nécessaire de définir le nombre d'électrons N_D présents dans la sphère de Debye (sphère dont le rayon est égal à la longueur de Debye λ_D). Nous avons :

$$N_D = \frac{4}{3} \pi n_e \lambda_D^3. \quad (7)$$

Si $N_D \gg 1$, l'écrantage est fort et les effets individuels sont dominants. Les plasmas sont dits alors cinétiques. Au contraire, pour un nombre N_D très petit devant 1, l'écrantage est faible et les plasmas sont fortement corrélés.

Fréquence plasma

Lorsque l'on perturbe un plasma initialement neutre, une perturbation locale sous forme de champ électrique est créée. Les électrons sont soumis à une force, de rappel, et sont accélérés vers leur position initiale. Ils vont alors osciller autour de leur position d'équilibre avec une certaine fréquence. Les ions étant plus lourds que les électrons, ils restent immobiles lors de ces oscillations. La pulsation ω_p des oscillations de plasma est donnée par :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}} \quad (8)$$

avec m_e la masse d'un électron. Cette notion de pulsation est souvent appelée *fréquence plasma*. Cependant, la fréquence plasma ou encore fréquence de Langmuir, notée f_p , est rigoureusement donnée par :

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \quad (9)$$

CLASSIFICATION DES PLASMAS

En utilisant les paramètres qu'on vient de définir, plusieurs classifications de plasma sont possibles. La première méthode est de les classer en fonction de la température. On peut alors distinguer trois grandes familles :

- Les plasmas chaud ou plasma de fusion : ces plasmas sont totalement ionisés ($\alpha = 1$). Les températures de différentes espèces sont égales et sont de l'ordre de quelques millions de degrés. Ce type de plasma vise à reproduire les réactions de fusion présentes au centre du soleil, dans le réacteur ITER pour la production d'énergie électrique. La température peut atteindre les $1.5 \cdot 10^8 K$ dans le réacteur.
- Les plasmas thermiques : ils sont à l'équilibre thermodynamique, ce qui est caractérisé par le fait que toutes les espèces (ions, électrons, particules neutres) ont la même température de l'ordre de 10^4 . Exemple d'applications : métallurgie (soudure, découpe, ...), et l'éclairage (lampe à arc).
- Les plasmas froids : ils sont hors équilibre thermodynamique, la température électronique est de quelques électron-Volt ($1eV = 11605K$) alors que les ions et les particules neutres beaucoup plus lourds, sont à une température proche de la température ambiante. Ces plasmas sont partiellement ionisés ($10^{-6} < \alpha < 0.1$). Ces plasmas sont utilisés pour la stérilisation, dans l'affichage (écran à plasma, enseignes lumineuses), la fabrication des imprimantes laser, des microprocesseurs ou des moteurs de propulsion spatiale.

La deuxième méthode est de les classer en fonction de différents paramètres évoqués ci-dessus : plasmas ionisés, faiblement ionisés, corrélés ou encore cinétiques. Le tableau 1 répertorie quelques plasmas typiques selon leur densité électronique, leur température, leur fréquence plasma et leur longueur de Debye.

Quelques plasmas	Densité (m^{-3})	Température (K)	ω_p	λ_D
Gaz faiblement ionisés				
Ionosphère (basse altitude)	10^3	$10^{2.5}$	$10^{7.5}$	$10^{0.5}$
Gaz fortement ionisés				
Vent solaire	$10^{0.5}$	10^5	10^4	10^3
Ionosphère (haute altitude)	$10^{5.5}$	10^3	10^7	$10^{-0.5}$
Plasmas d'ionisation de surface	10^{12}	10^3	10^{10}	10^{-4}
Plasmas produits par laser	10^{19}	10^5	$10^{13.5}$	10^{-6}
Matière dense				
Electrons dans les métaux	10^{23}	$10^{2.5}$	$10^{15.5}$	$10^{-9.5}$
Intérieur des étoiles	10^{27}	$10^{7.5}$	$10^{17.5}$	$10^{-9.5}$

table 1 – Ordres de grandeurs de quelques plasmas en fonction de leur température T_e , leur densité n_e , leur fréquence plasma f_p et la longueur de Debye λ_D .

Une autre classification des plasmas en fonction de leur densité électronique, de leur température et de la longueur de Debye a été réalisée par Hollahan et Bell [26] (figure 2).

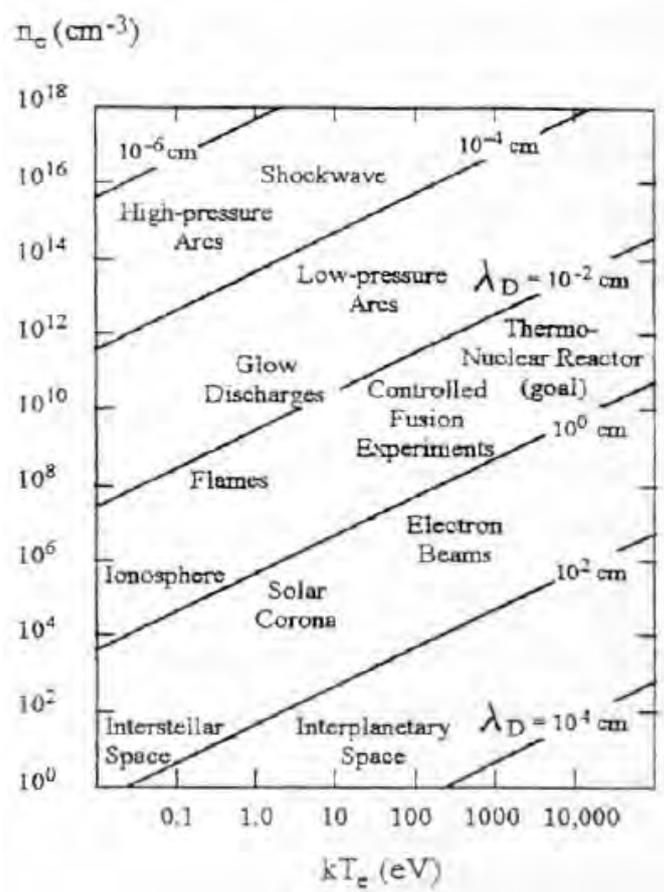


figure 2 – Classification des plasmas par Hallahan et Bell.

FORMULATION MATHÉMATIQUE ET COUPLAGE DES ÉQUATIONS MAXWELL-PLASMA

1

SOMMAIRE

1.1	INTRODUCTION	13
1.2	FORMULATION GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL EN RÉGIME TRANSITOIRE	14
1.2.1	Rappel historique du formalisme de Maxwell	14
1.2.2	Problème électromagnétique : Formulation générale des équations de Maxwell	15
1.3	TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA MODÉLISATION DES DOMAINES NON-BORNÉS	18
1.3.1	Conditions aux limites absorbantes ou ABC	19
1.3.2	Couches Absorbantes ou ALB	19
1.3.3	Rappel d'un résultat d'existence et d'unicité	24
1.4	MODÈLE PLASMA	25
1.4.1	L'équation de Boltzmann considérée	25
1.4.2	Description fluide du plasma	25
1.4.3	Reformulation de l'équation de densité de plasma	27
1.5	MODÈLE FINAL DU PLASMA ÉTUDIÉ DANS LE CADRE DE LA THÈSE	30

1.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord les différentes équations de Maxwell qui permettent de décrire les phénomènes électromagnétiques du point de vue mathématique (voir [27]) et physique (voir [28, 29, 30, 31]). Nous faisons ensuite un rappel sur les conditions aux limites pour la modélisation des domaines non bornés et nous présentons le principe des couches parfaitement adaptées (ou PML) qui est actuellement un des outils les plus puissants pour simuler la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu non borné. Ensuite nous décrivons le modèle plasma fluide non linéaire étudié dans le cadre de cette thèse ainsi que les paramètres de diffusion liés à notre plasma et la condition limite utilisée. Enfin dans une dernière partie, nous présentons le modèle non linéaire global de couplage Maxwell/plasma qui décrit l'interaction micro-onde et plasma dans le domaine temporel.

1.2 FORMULATION GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL EN RÉGIME TRANSITOIRE

Dans cette section, nous présentons un rappel historique des équations de Maxwell dans le domaine temporel et nous posons les conditions aux limites utilisées pour simuler l'espace infini.

1.2.1 Rappel historique du formalisme de Maxwell

La théorie du champ électromagnétique a été fondée au 19^{ème} siècle dans le but d'unifier la description des phénomènes électriques et magnétiques. Vers 1865, James Clerk Maxwell a réalisé une synthèse harmonieuse des diverses lois expérimentales découvertes par ses prédécesseurs Carl Friedrich Gauss (loi de l'électrostatique), André-Marie Ampère (loi du magnétisme), Michael Faraday (loi de l'induction), en les exprimant sous la forme d'un groupe de vingt équations avec vingt variables [32][33]. Cette synthèse n'a été rendue possible que grâce à l'introduction par Maxwell dans l'équation d'Ampère du "courant de déplacement", dont la présence assure la cohérence d'un ensemble d'équations unifiées. Celles-ci furent publiées en 1873 dans le célèbre ouvrage de Maxwell : "Treatise on Electricity and Magnetism". Ce n'est que plus tard que Oliver Heaviside [34] et William Gibbs [35] récrivirent ces équations sous la forme des quatre équations vectorielles aux dérivées partielles qui sont utilisées aujourd'hui.

Parmi les travaux importants qui ont précédé les équations de Maxwell, on peut citer en particulier :

- **La loi d'induction de Faraday (1831)** qui traduit le fait qu'une variation en temps de flux magnétique passant à travers une boucle conductrice génère un courant dans cette boucle. En d'autres termes :

Soit S une surface ouverte reposant sur une boucle conductrice C alors :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

- **La loi de Gauss électrique (1840)** qui permet de lier le flux du champ électrique à travers une surface fermée S aux charges se trouvant à l'intérieur de cette surface. En d'autres termes :

Soit V un volume délimité par la surface S et ρ une densité de charges interne au volume V , on a alors :

$$\oint \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon} \int \int \int_V \rho dV$$

Dans l'expression précédente, la constante ϵ définit la permittivité électrique du milieu.

- **La loi de Gauss magnétique** qui déclare que le flux magnétique à travers une surface fermée est toujours nul.

Soit une surface fermée S et \mathbf{B} l'induction magnétique, on a :

$$\oint \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (.1.1)$$

Cette loi traduit le fait qu'il n'existe pas de monopole magnétique analogue à une charge électrique.

- **L'équation de Maxwell-Ampère (1827)** qui relie la circulation de l'induction magnétique le long d'un contour fermé C à l'intensité des courants traversant celui-ci.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu \int \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \mu\epsilon \int \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

où μ définit la perméabilité du milieu, et

$$\mathbf{J}_D = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

le courant de déplacement de Maxwell.

A partir de l'ensemble de ces lois, pour obtenir la formulation locale des équations de Maxwell, on a besoin d'utiliser les formules d'Ostrogradski et de Stokes données par :

Théorème 1 (Formule d'Ostrogradski) Soit V un volume fermé dans \mathbb{R}^3 , S une surface orientée délimitant le volume V . Si le champ vectoriel \mathbf{A} admet des dérivées partielles continues, alors :

$$\int \int \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

Théorème 2 (Formule de Stokes) Soit C une courbe fermée orientée dans \mathbb{R}^3 , S une surface orientée dont le contour est C . Si le champ vectoriel \mathbf{A} admet des dérivées partielles continues, alors :

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

En appliquant la formule de Stokes aux lois de Faraday et de Maxwell-Ampère ainsi que la formule d'Ostrogradski aux lois de Gauss définies précédemment, nous obtenons la forme différentielle des équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{J} & (1) \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} & (2) \\ \operatorname{div}(\mathbf{E}) = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0 \end{cases}$$

1.2.2 Problème électromagnétique : Formulation générale des équations de Maxwell

Dans ce paragraphe, nous allons formaliser le problème de Maxwell dans un domaine borné Ω en précisant la définition du milieu et les conditions limites appliquées sur celui-ci.

1.2.2.1 Formalisme mathématique

Dans la section précédente, nous avons considéré un milieu de propagation caractérisé par une permittivité électrique ϵ et une perméabilité magnétique μ constantes. Plus généralement, dans un milieu quelconque Ω de \mathbb{R}^3 , les phénomènes électromagnétiques sur $[0, t]$ où t définit le temps d'observation de ceux-ci, sont décrits par les quatre champs vectoriels :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) : \text{champ électrique en Volt par mètre (V} \cdot \text{m}^{-1}) \\ \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) : \text{induction (ou déplacement) électrique en Coulomb par mètre carré (C} \cdot \text{m}^{-2}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) : \text{champ magnétique en Ampère par mètre (A} \cdot \text{m}^{-1}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) : \text{induction magnétique en Tesla (T)} \end{array} \right. \quad (.1.2)$$

où $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$.

Comme on l'a vu au paragraphe précédent, ces quatre grandeurs sont reliées par le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (\text{loi de Faraday}) \quad (.1.3a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{J} = \mathbf{0} \quad (\text{loi d'Ampère}) \quad (.1.3b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{loi de Gauss électrique}) \quad (.1.3c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{loi de Gauss magnétique}) \quad (.1.3d)$$

où $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ et $\rho(\mathbf{x}, t)$ représentent respectivement, les densités de courant électrique (en $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$) et de charge (en $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$) dans le milieu Ω .

Remarque 2 Sur ce système, on remarque qu'en dérivant par rapport au temps l'équation (.1.3c) et en prenant la divergence de l'équation (.1.3a), on obtient la relation dite de continuité ou de conservation des charges électriques donnée par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (.1.4)$$

Dans notre problème, nous n'utiliserons pas explicitement cette équation mais dans le cas d'autres modèles numériques plasma tels que les méthodes PIC [36], l'utilisation de cette équation est nécessaire pour corriger le champ électrique et éviter ainsi les erreurs d'instabilité numérique.

Dans le système précédent (.1.3), les inductions électrique \mathbf{D} et magnétique \mathbf{B} peuvent aussi s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \quad (.1.5a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\mu}}(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) \quad (.1.5b)$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\mu}}$ sont respectivement des tenseurs qui décrivent la permittivité électrique (en $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$) et la perméabilité magnétique (en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$) du milieu. \mathbf{P} définit le vecteur de polarisation et \mathbf{M} le vecteur de magnétisation (ou d'aimantation). Ces vecteurs traduisent le déplacement des charges liées à l'intérieur des matériaux diélectriques. Dans ce rapport, nous supposons que notre milieu Ω est constitué de matériaux diélectriques qui ne présentent pas de charges liées ou que leur déplacement est négligeable. Ceci implique seulement l'existence de deux tenseurs symétriques définis

positifs $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x})$ et $\underline{\underline{\mu}}(\mathbf{x})$, tels que :

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (.1.6a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\mu}}(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad (.1.6b)$$

Dans un milieu isotrope, les tenseurs de permittivité et perméabilité dans .1.6a et .1.6b se réduisent à des scalaires $\varepsilon(\mathbf{x})$ et $\mu(\mathbf{x})$. Dans le vide, la permittivité $\varepsilon(\mathbf{x})$ est donnée par une constante ε_0 et la perméabilité $\mu(\mathbf{x})$ est donnée par une constante μ_0 vérifiant :

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}, \quad \text{avec } \varepsilon_0 \mu_0 = 1/c_0^2 \quad (.1.7)$$

où c_0 définit la vitesse de propagation de l'onde dans le vide et est égale à $3 \cdot 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Plus généralement, les milieux diélectriques sont définis par un tenseur de permittivité électrique relative $\underline{\underline{\varepsilon}}_r$ et un tenseur de perméabilité magnétique relative $\underline{\underline{\mu}}_r$ vérifiant :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}}_r(\mathbf{x}) \quad (.1.8a)$$

$$\underline{\underline{\mu}}(\mathbf{x}) = \mu_0 \underline{\underline{\mu}}_r(\mathbf{x}) \quad (.1.8b)$$

Dans notre cas, ces tenseurs relatifs sont diagonaux et les valeurs de cette diagonale sont comprises entre 0 et 1.

Dans le cas d'un milieu conducteur, on peut aussi décomposer la densité de courant électrique \mathbf{J} en deux parties \mathbf{J}_c qui est la densité de courant dans la matière et \mathbf{J}_s qui est la densité de courant source. On a alors :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s \quad (.1.9)$$

Dans cette expression, \mathbf{J}_s définit une donnée du problème à simuler et \mathbf{J}_c peut être considérée comme un courant créé dans la matière par le champ électromagnétique. Ce courant \mathbf{J}_c peut être aussi vu comme le courant de conduction dû au mouvement des électrons libres dans le matériau sous l'action d'un champ électrique. A température constante, \mathbf{J}_c est alors relié au champ électrique \mathbf{E} par le biais d'un tenseur symétrique défini positif $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{loi d'Ohm}) \quad (.1.10)$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ est appelé tenseur de conductivité et son unité est le Siemens par mètre ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$).

Dans un milieu isotrope, $\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = \sigma(\mathbf{x}, t) I_3$ où I_3 est la matrice unité dans \mathbb{R}^3 . Lorsque $\sigma(\mathbf{x}, t) = 0$, on dira que le milieu est non conducteur. Le vide est un exemple de milieu non conducteur.

1.2.2.2 Reformulation du problème d'évolution

Dans la suite de ce rapport, nous supposons que Ω est un milieu diélectrique linéaire anisotrope non chargé pouvant être conducteur. On peut donc ré-écrire le

système (.1.3) sous la forme :

$$\underline{\underline{\mu}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (.1.11a)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} + \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E} + \mathbf{J}_s = \mathbf{0} \quad (.1.11b)$$

En effet, on peut remarquer, d'une part, en prenant la divergence de l'équation (.1.11a) et en se donnant $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{0}$, que :

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\mu}} \mathbf{H}) = 0 \quad (.1.12)$$

et d'autre part, en prenant la divergence de l'équation (.1.11b) et en considérant $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{0}$, que :

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}} \mathbf{E}) = 0 \quad (.1.13)$$

Les hypothèses sur la condition initiale et sur la source montrent que les contraintes sur les divergences du champ dans le système de Maxwell sont redondantes. Par la suite, nous n'utiliserons plus les deux équations de divergence dans notre modélisation numérique.

Remarque 3 *Il est courant d'omettre les contraintes de divergence dans la discrétisation des équations de Maxwell. Cependant il est important de s'assurer que la solution discrète tend vers une vérification de ces deux conditions. En effet, une violation des conditions de divergence risque de provoquer l'apparition d'ondes parasites qui peuvent détériorer la solution. On peut citer comme exemple, la discrétisation des équations de Maxwell à l'aide des éléments finis de type H^1 [37] où ces conditions ne sont pas vérifiées par le choix de l'espace d'approximation.*

Afin de poser correctement notre problème électromagnétique sur un domaine Ω , il faut adjoindre aux équations (.1.11a), (.1.11b) des conditions initiales et des conditions aux limites de ce domaine Ω . La difficulté réside alors dans la restriction d'un phénomène physique se propageant en domaine non borné dans un domaine de calcul borné. Plusieurs travaux ont été menés et proposés pour lever cette difficulté. Le paragraphe suivant va détailler ceux-ci et donner la solution actuelle préconisée pour borner artificiellement le domaine de calcul sur le problème de Maxwell.

1.3 TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA MODÉLISATION DES DOMAINES NON-BORNÉS

La résolution numérique d'un grand nombre de problèmes physiques non bornés nécessite une troncature du domaine de calcul. Cependant la question clé est de savoir comment effectuer cette troncature sans introduire d'artefacts importants dans le calcul. Certains problèmes sont naturellement tronqués comme par exemple les structures périodiques où une condition aux limites périodique peut être appliquée, et d'autre ne le sont pas comme par exemple, la diffraction d'une onde électromagnétique par une structure métallique où le champ diffracté est rayonné dans l'espace et tend vers zero à l'infini. De nombreuses techniques de troncature ont été alors développées pour traiter ces problèmes. On peut classer ces techniques en deux grandes familles : les conditions aux limites absorbantes ou Absorbing Boundary Condition (ABC) et les couches absorbantes ou Absorbing Layer Boundary (ALB).

1.3.1 Conditions aux limites absorbantes ou ABC

Cette approche a fait l'objet de plusieurs études menées par B. Engquist et A. Majda [38], Taylor et al, Talfove Brodwin et aussi Mur [39].

Le principe de cette méthode consiste à limiter le domaine de calcul supposé infini à l'aide d'une frontière sur laquelle on impose une condition limite. Cette condition a pour but de simuler l'espace libre pour les ondes sortantes rayonnées vers l'espace extérieur. Parmi ces ABC, on utilise la condition de Silver-Müller qui est naturellement, la condition la plus utilisée pour les méthodes volumes finis. C'est une condition locale qui est moins précise que les méthodes globales basées sur des équations intégrale de frontière, mais qui est aussi très facile à implémenter avec beaucoup moins de ressources mémoire. La condition de Silver-Müller traduit simplement le fait qu'au niveau de la frontière du domaine de calcul, il n'y a pas d'onde entrante mais seulement une onde sortante de celui-ci. Ceci s'écrit sous forme de la condition suivante :

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^* + \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{H}^* = \mathbf{0} \quad (.1.14)$$

avec (E^*, H^*) les valeurs du champ sur la frontière du domaine de calcul. En utilisant cette condition, seules les ondes sortantes qui arrivent à incidence normale sur la frontière fictive ne sont pas réfléchies. Pour tout autre angle d'incidence, on aura une réflexion partielle qui sera maximale pour les ondes à incidence rasante. De manière générale les formalismes ABC utilisés se limitent à éviter les réflexions des ondes dont l'incidence sur la surface du bord du domaine de calcul est dans un intervalle autour de l'angle d'incidence normale. Ces formalismes s'obtiennent par des développement limités locaux du formalisme intégral à des ordres plus élevés et sont donc généralement plus coûteux à mettre en oeuvre et posent des problèmes de stabilité. Pour plus de détails et d'explications sur la construction et l'étude de ce type de conditions, le lecteur pourra se référer à [40][41][42].

Afin d'éviter les réflexions sur la frontière du domaine, il convient aussi de placer celle-ci suffisamment loin des objets diffractants. Cela tend à voir le rayonnement des objets comme un point source (onde sphérique) et donc de minimiser les ondes qui arrivent avec une incidence rasante sur la frontière du domaine de calcul. En pratique, cette frontière est placée à une distance d'au moins deux longueurs d'onde des objets étudiés.

Aujourd'hui, l'utilisation des formalismes de conditions absorbantes pour modéliser un domaine de calcul infini est relativement restreinte. En effet, ce formalisme ne peut pas garantir l'absence de réflexion si ce n'est qu'au prix d'un coût calcul important. De plus, les travaux réalisés par J.P. Berenger sur un formalisme de couches parfaitement absorbantes, a favorisé l'utilisation des ALB à la place des ABC pour limiter le domaine de calcul.

1.3.2 Couches Absorbantes ou ALB

La stratégie des couches absorbantes consiste à utiliser autour de l'objet diffractant un ensemble de couches constituées d'un matériaux diélectrique absorbant analogue au revêtement physique réalisé sur les parois d'une chambre anéchoïque. Une première famille appelé Matched Layers (ML) ou couches adaptées a été construite en considérant les couches comme un matériau avec une conductivité électrique (σ) et

une conductivité magnétique (σ^*) vérifiant une condition d'adaptation par rapport au vide, donnée par :

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0}$$

Cette condition permet de garantir qu'il n'existe aucune réflexion des ondes qui arrivent avec une incidence normale sur les couches absorbantes. Cependant, toutes les ondes incidentes ne sont pas à incidence normale, et sont alors plus au moins réfléchies. Comme dans le cas des ABC, plus l'onde est rasante, plus le coefficient de réflexion est grand et le fait d'éloigner ces couches en les mettant à bonne distance de l'objet améliore les résultats des calculs, mais n'évite pas les réflexions. De ce point de vue, les couches ML sont assez similaires aux ABC et n'apportent pas de solution pour avoir une absence totale de réflexions.

En 1994 une deuxième famille de couches absorbantes appelées couches parfaitement adaptées ou PML (Perfectly Matched Layers) beaucoup plus performante que les précédentes est apparue dans les travaux de J.P. Bérenger [43][44][45]. En effet, celui-ci a pu donner un nouveau formalisme de couches qui est parfaitement adaptées, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de réflexions au niveau de l'interface vide/couches, quelque soit l'angle d'incidence des ondes qui pénètrent dans les couches. Il garantit que la décroissance des ondes entrantes dans les couches est exponentielle. Le formalisme PML de Bérenger est basé sur une re-écriture des équations de Maxwell en introduisant des conductivités électriques et magnétiques pour chaque direction d'espace ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*$) et en décomposant chaque composante de champ électromagnétique en deux composantes. Ces conductivités peuvent alors s'interpréter comme des coefficients d'absorption d'onde 1D.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons décrire de façon succincte la construction de ce formalisme et donner une version de celui-ci proposé par S. Gedney[46]. Le but ici est d'écrire seulement un système PML transitoire qui sera facilement discrétisable par les méthodes présentées dans cette thèse. Pour plus de détails sur ces techniques, on renvoie le lecteur à [47] [48] [49].

Principe et propriétés

Dans cette partie, nous nous limitons exclusivement à la présentation du principe des PML.

La méthode PML (Perfectly Matched Layer) définie par J.P. Bérenger [43], [45] consiste à ajouter aux frontières du domaine de calcul un ensemble de couches définissant un milieu absorbant sans réflexion dans le domaine de calcul pour les ondes électromagnétiques. Pour cela, on définit dans chaque couche une conductivité électrique $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ et une conductivité magnétique $\sigma^* = (\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*)$ dépendant de la direction des couches et de la distance de la couche à l'interface air/PML comme indiqué sur la figure (.1.1).

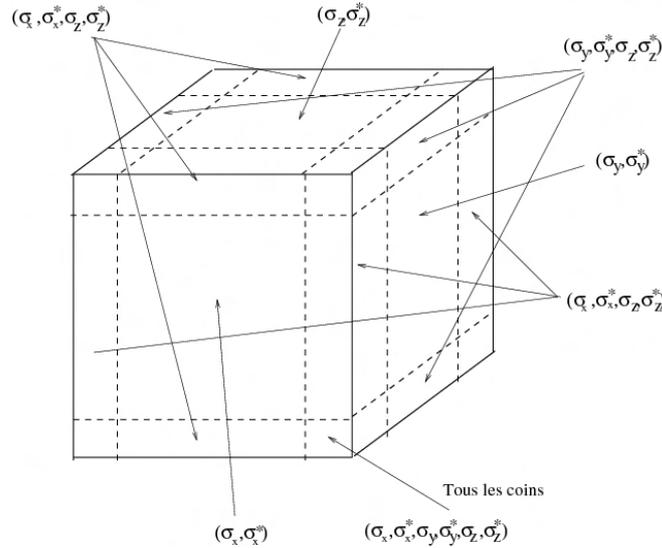


figure .1.1 – Position des couches absorbantes et des matériaux affectés à celles-ci.

Ces deux conductivités vérifient en plus une condition d'adaptation pour chaque composante :

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon} = \frac{\sigma_x^*}{\mu}, \quad \frac{\sigma_y}{\varepsilon} = \frac{\sigma_y^*}{\mu}, \quad \frac{\sigma_z}{\varepsilon} = \frac{\sigma_z^*}{\mu} \quad (.1.15)$$

Le modèle proposé par J.P. Bérenger consiste alors à décomposer les champs en deux composantes que l'on absorbe différemment dans les couches. Les équations de Maxwell sont réécrites dans les couches sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \sigma_y E_{xy} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} & \varepsilon \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} &= -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \varepsilon \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \sigma_z E_{xz} &= -\frac{\partial H_y}{\partial z} & \varepsilon \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \sigma_z E_{yz} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ \varepsilon \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} & \mu_0 \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{xy} &= -\frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \varepsilon \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} &= -\frac{\partial H_x}{\partial y} & \mu_0 \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{xz} &= \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \mu_0 \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{yx} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} & \mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} &= -\frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \mu_0 \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{yz} &= -\frac{\partial E_x}{\partial z} & \mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} E_x &= E_{xy} + E_{xz} & H_x &= H_{xy} + H_{xz} \\ E_y &= E_{yx} + E_{yz} & H_y &= H_{yx} + H_{yz} \\ E_z &= E_{zx} + E_{zy} & H_z &= H_{zx} + H_{zy} \end{aligned}$$

Dans la première version des PML, on résolvait directement ce nouveau système. Des études mathématiques ont pu montrer que l'opérateur lié à ce nouveau système n'était pas hyperbolique, mais faiblement hyperbolique. Ceci pouvait alors entraîner des problèmes d'instabilité à long termes. Afin de corriger ce problème, une nouvelle formulation du problème a été proposée [48],[46]. Pour cela on re-écrit les 12 équations proposées par Berenger dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} j\omega\varepsilon\hat{E}_{xy} + \sigma_y\hat{E}_{xy} &= \frac{\partial\hat{H}_z}{\partial y} & j\omega\varepsilon\hat{E}_{yx} + \sigma_x\hat{E}_{yx} &= -\frac{\partial\hat{H}_z}{\partial x} \\ j\omega\varepsilon\hat{E}_{xz} + \sigma_z\hat{E}_{xz} &= -\frac{\partial\hat{H}_y}{\partial z} & j\omega\varepsilon\hat{E}_{yz} + \sigma_z\hat{E}_{yz} &= \frac{\partial\hat{H}_x}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j\omega\varepsilon\hat{E}_{zx} + \sigma_x\hat{E}_{zx} &= \frac{\partial\hat{H}_y}{\partial x} & j\omega\mu_0\hat{H}_{xy} + \sigma_y^*\hat{H}_{xy} &= -\frac{\partial\hat{E}_z}{\partial y} \\
j\omega\varepsilon\hat{E}_{zy} + \sigma_y\hat{E}_{zy} &= -\frac{\partial\hat{H}_x}{\partial y} & j\omega\mu_0\hat{H}_{xz} + \sigma_z^*\hat{H}_{xz} &= \frac{\partial\hat{E}_y}{\partial z} \\
j\omega\mu_0\hat{H}_{yx} + \sigma_x^*\hat{H}_{yx} &= \frac{\partial\hat{E}_z}{\partial x} & j\omega\mu_0\hat{H}_{zx} + \sigma_x^*\hat{H}_{zx} &= -\frac{\partial\hat{E}_y}{\partial x} \\
j\omega\mu_0\hat{H}_{yz} + \sigma_z^*\hat{H}_{yz} &= -\frac{\partial\hat{E}_x}{\partial z} & j\omega\mu_0\hat{H}_{zy} + \sigma_y^*\hat{H}_{zy} &= \frac{\partial\hat{E}_x}{\partial y}
\end{aligned}$$

Afin de ne pas surcharger la présentation, on ne raisonnera que sur les équations concernant la composante \hat{E}_x . Les autres équations s'obtiennent de la même façon avec une permutation circulaire sur les indices.

On réécrit les deux équations liées à la composante \hat{E}_x comme :

$$\begin{cases} (1 + \frac{\sigma_y}{j\omega\varepsilon})j\omega\varepsilon\hat{E}_{xy} = \frac{\partial\hat{H}_z}{\partial y} \\ (1 + \frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon})j\omega\varepsilon\hat{E}_{xz} = -\frac{\partial\hat{H}_y}{\partial z} \end{cases} \quad (.1.16)$$

que l'on peut reformuler plus généralement sous la forme :

$$\begin{cases} S_y j\omega\varepsilon\hat{E}_{xy} = \frac{\partial\hat{H}_z}{\partial y} \\ S_z j\omega\varepsilon\hat{E}_{xz} = -\frac{\partial\hat{H}_y}{\partial z} \end{cases} \quad (.1.17)$$

en posant :

$$\begin{cases} S_x = 1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\varepsilon} \\ S_y = 1 + \frac{\sigma_y}{j\omega\varepsilon} \\ S_z = 1 + \frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon} \end{cases} \quad (.1.18)$$

La somme des deux équations (.1.17) donne : $j\omega\varepsilon(\hat{E}_{xy} + \hat{E}_{xz}) = \frac{1}{S_y} \frac{\partial\hat{H}_z}{\partial y} - \frac{1}{S_z} \frac{\partial\hat{H}_y}{\partial z}$, soit

$$j\omega\varepsilon\hat{E}_x = \frac{\partial_y}{S_y} \hat{H}_z - \frac{\partial_z}{S_z} \hat{H}_y \quad (.1.19)$$

En raisonnant de manière analogue sur les composantes y et z , on peut réécrire le précédent système des 12 équations en un système équivalent de 6 équations :

$$\begin{cases} j\omega\varepsilon\hat{\mathbf{E}} - \nabla_S \times \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \\ j\omega\mu_0\hat{\mathbf{H}} + \nabla_S^* \times \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (.1.20)$$

où on note l'opérateur $(\nabla_S \times)$ par

$$(\nabla_S \times) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial_z}{S_z} & \frac{\partial_y}{S_y} \\ \frac{\partial_z}{S_z} & 0 & -\frac{\partial_x}{S_x} \\ -\frac{\partial_y}{S_y} & \frac{\partial_x}{S_x} & 0 \end{pmatrix}$$

$(\nabla_S^* \times)$ a la même forme que $(\nabla_S \times)$, à ceci près que les S_i deviennent des S_i^* dans $(\nabla_S^* \times)$, avec $S_i^* = 1 + \frac{\sigma_i^*}{j\omega\mu_0}$.

Comme la condition d'adaptation des milieux PML est $\frac{\sigma_i^*}{\mu_0} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon}$, il en découle que $S_i^* = S_i \forall i = x, y, \text{ ou } z$ et donc que $(\nabla_S^* \times) = (\nabla_S \times)$

On peut ensuite montrer que $(\nabla_S \times) = N(\nabla \times)M$ avec :

$$M = S_x S_y S_z N = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix} = S_x S_y S_z \begin{pmatrix} \frac{1}{S_y S_z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_x S_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S_x S_y} \end{pmatrix}$$

En reprenant le système (.1.20) et en posant $\hat{\mathbf{E}}' = \hat{\mathbf{E}}$ et $\hat{\mathbf{H}}' = \hat{\mathbf{H}}$, on obtient :

$$\begin{cases} j\omega\varepsilon N^{-1}M^{-1}\hat{\mathbf{E}}' = (\nabla \times)\hat{\mathbf{H}}' \\ j\omega\mu_0 N^{-1}M^{-1}\hat{\mathbf{H}}' = -(\nabla \times)\hat{\mathbf{E}}' \end{cases}$$

La première équation de ce système s'écrit encore

$$j\omega\varepsilon \begin{pmatrix} \frac{S_y S_z}{S_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_x S_z}{S_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S_x S_y}{S_z} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{E}}' = (\nabla \times)\hat{\mathbf{H}}'$$

Si on pose :

$$\begin{cases} \hat{D}'_x = \varepsilon \frac{S_z}{S_x} \hat{E}'_x \\ \hat{D}'_y = \varepsilon \frac{S_x}{S_y} \hat{E}'_y \\ \hat{D}'_z = \varepsilon \frac{S_y}{S_z} \hat{E}'_z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{B}'_x = \mu_0 \frac{S_z}{S_x} \hat{H}'_x \\ \hat{B}'_y = \mu_0 \frac{S_x}{S_y} \hat{H}'_y \\ \hat{B}'_z = \mu_0 \frac{S_y}{S_z} \hat{H}'_z \end{cases} \quad (.1.21)$$

on obtient :

$$\begin{cases} j\omega K_S \hat{\mathbf{D}}' = (\nabla \times)\hat{\mathbf{H}}' \\ j\omega K_S \hat{\mathbf{B}}' = -(\nabla \times)\hat{\mathbf{E}}' \end{cases} \quad (.1.22)$$

avec

$$K_S = \begin{pmatrix} S_y & 0 & 0 \\ 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & S_x \end{pmatrix}$$

En repassant dans le domaine temporel, et compte tenu de la définition des S_i , ce dernier système devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}' + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \mathbf{D}' = (\nabla \times)\mathbf{H}' \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}' + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \mathbf{B}' = -(\nabla \times)\mathbf{E}' \end{cases} \quad (.1.23)$$

A ce stade, on multiplie les équations (.1.21) par M , ce qui donne pour la composante en x :

$$\left(1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\varepsilon}\right) \hat{D}'_x = \varepsilon \left(1 + \frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon}\right) \hat{E}'_x$$

On remultiplie alors ces équations par $j\omega$ puis on passe dans le domaine temporel, on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t D'_x + \frac{\sigma_x}{\varepsilon} D'_x = \varepsilon (\partial_t E'_x + \frac{\sigma_z}{\varepsilon} E'_x) \\ \partial_t B'_x + \frac{\sigma_x}{\varepsilon} B'_x = \mu_0 (\partial_t H'_x + \frac{\sigma_z}{\varepsilon} H'_x) \end{cases}$$

Au final, on obtient dans les couches PML, le système augmenté suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_1} \mathbf{D}' = (\nabla \times)\mathbf{H}' \\ \partial_t \mathbf{D}' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma} \mathbf{D}' = \varepsilon (\partial_t \mathbf{E}' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_2} \mathbf{E}') \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_1} \mathbf{B}' = -(\nabla \times)\mathbf{E}' \\ \partial_t \mathbf{B}' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma} \mathbf{B}' = \mu_0 (\partial_t \mathbf{H}' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_2} \mathbf{H}') \end{cases} \quad (.1.24)$$

$$\text{avec } K_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad K_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y \end{pmatrix}$$

Si on résout le système augmenté sur tout le domaine de calcul, il est alors facile de voir que celui-ci se ramène au système de Maxwell hors des couches PML. De plus, on peut démontrer que la solution du système augmenté sur tout le domaine de calcul coïncide avec la solution de Maxwell hors couches PML. Il faut aussi noter que dans ce formalisme PML, l'opérateur reste le rotationnel et donc, que nous n'avons plus les problèmes du formalisme initial de Bérenger, liés à la faible hyperbolicité de l'opérateur.

Remarque 4 Une autre présentation du formalisme PML dite de Gedney [46] basée sur un changement de variable complexe est donné dans l'annexe A.

1.3.3 Rappel d'un résultat d'existence et d'unicité

Soit le problème d'évolution :

$$\underline{\underline{\mu}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (.1.25a)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} + \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E} + \mathbf{J}_s = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (.1.25b)$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{Zn}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \quad (.1.25c)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) = E_0(x) \text{ et } \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = H_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (.1.25d)$$

On peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 3 Soit \mathbf{J}_s un courant source dans les équations de Maxwell ne dépendant que de \mathbf{x} et de t tel que : $\mathbf{J}_s \in C^0(0, T, \mathbf{L}^2(\Omega))$ alors il existe une solution unique \mathbf{E}, \mathbf{H} du problème (.1.25) vérifiant :

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^0(0, T; H(\text{rot}, \Omega)) \quad (.1.26)$$

Pour une preuve de ce théorème dans un contexte plus général, nous renvoyons le lecteur à la thèse de M. Remaki [18]. Dans ses travaux, M. Remaki montre l'existence et l'unicité des solutions du système de Maxwell pour des milieux hétérogènes non réguliers mixant deux conditions limites : Silver-Müller (.1.14) et conducteur parfait $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$.

Le résultat précédent nécessite de définir des espaces d'approximation adaptés au problème de Maxwell. Pour cela, nous avons une importante propriété qui est à la base de la construction de ces espaces $H(\text{div}, \Omega)$ et $H(\text{rot}, \Omega)$:

Théorème 4 Soient Ω_1 et Ω_2 deux sous domaines de Ω tels que $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \Gamma$ et \mathbf{v} une fonction telle que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}|_{\Omega_1} \in H(\text{rot}, \Omega_1)$ (respectivement $H(\text{div}, \Omega_1)$), $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}|_{\Omega_2} \in H(\text{rot}, \Omega_2)$ (respectivement $H(\text{div}, \Omega_2)$). Alors $\mathbf{v} \in H(\text{rot}, \Omega)$ (respectivement $H(\text{div}, \Omega)$) si et seulement si $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}_\Gamma$ (respectivement $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_\Gamma$) au sens des distributions sur Γ . \mathbf{n}_Γ est une normale à Γ (par exemple de Ω_1 vers Ω_2 .)

Remarque 5 Les propriétés du théorème précédent sont compatibles avec les équations de transmission à l'interface de deux matériaux.

1.4 MODÈLE PLASMA

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la modélisation du plasma lié à notre problème physique. Pour cela nous détaillons le modèle fluide mis en oeuvre et nous donnons finalement le modèle mathématique complet de notre problème.

1.4.1 L'équation de Boltzmann considérée

Pour modéliser le plasma, on peut considérer celui-ci comme défini par des fonctions de distribution de différentes espèces s de particules. Ces fonctions $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t)$ sont des moyennes statistiques de la répartition des particules dans l'espace des phases (ou vitesses) pour un grand nombre de réalisations du système physique considéré. Le produit $f_s d\mathbf{x}d\mathbf{w}$ décrit alors la moyenne du nombre de particules de l'espèce, dans un volume élémentaire de taille $d\mathbf{x}d\mathbf{w}$ et de centre (\mathbf{x}, \mathbf{w}) .

En présence de champs électromagnétiques et de collisions, l'évolution de ces fonctions f_s est régie par l'équation de Boltzmann qui s'écrit pour chaque espèce s de particules :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_s + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} f_s = \left. \frac{df_s}{dt} \right|_{\text{coll}} \quad (.1.27)$$

avec $f_s = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t)$ la fonction de distribution des particules d'une espèce donnée s , de charge q_s , de masse m_s et (\mathbf{E}, \mathbf{B}) le champ électromagnétique. La fonction f_s dépend de la position $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, de la vitesse de particule $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ et du temps $t \in \mathbb{R}$.

Ecrite sous cette forme, l'équation de Boltzmann exprime que la variation de la fonction de distribution en un point donné du plasma résulte de la contribution de trois termes :

- Le terme $\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_s$ qui représente l'influence des phénomènes de diffusion.
- Le terme $\frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} f_s$ qui représente l'action des forces appliquées.
- Le terme $\left. \frac{df_s}{dt} \right|_{\text{coll}}$ qui caractérise l'influence des interactions entre particules. Ce terme traduit la variation, du fait des collisions élastiques et inélastiques, du nombre de particules dans l'élément de volume de l'espace des phases centré en \mathbf{x}, \mathbf{w} .

1.4.2 Description fluide du plasma

La connaissance des fonctions de distribution des vitesses des particules d'un plasma nous permet de bien décrire l'état microscopique de celui-ci, mais il est très difficile de résoudre directement l'équation de Boltzmann. Une description simple du plasma peut alors se faire à l'aide des grandeurs macroscopiques telles que la densité, la vitesse moyenne du fluide, la pression ou la température de celui-ci. En prenant les moments successifs de l'équation de Boltzmann, on obtient une description hydrodynamique formellement rigoureuse au moyen d'un système infini d'équations couplées. Ce système peut-être arrêté à un stade quelconque en faisant une hypothèse de fermeture sur l'un des moments d'ordre supérieur.

Dans cette thèse, on se place dans le cas d'un plasma neutre ($n_e = n_i = n$) et on notera f_s par f . On définit ensuite les grandeurs macroscopiques à partir des fonctions de distribution f des particules en prenant les deux premiers moments de l'équation de Boltzmann. On obtient alors :

- la densité du plasma donnée par :

$$n(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t) d\mathbf{w} \quad (.1.28)$$

- la vitesse moyenne du plasma donnée par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{x}, t)} \int \mathbf{w} f(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t) d\mathbf{w} \quad (.1.29)$$

Dans notre modèle plasma, on se limitera à ces deux grandeurs macroscopiques et à l'espèce électronique uniquement.

1.4.2.1 Équation de densité

Pour obtenir l'équation qui décrit l'évolution de la densité, on intègre l'équation de Boltzmann par rapport à \mathbf{w} et on remarque que :

- \mathbf{w} ne dépend pas de \mathbf{x} donc :

$$\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{w} f)$$

- \mathbf{E} ne dépend pas de \mathbf{w} et la $i^{\text{ème}}$ composante de $\mathbf{w} \times \mathbf{B}$ est indépendante de la $i^{\text{ème}}$ composante de \mathbf{w} donc :

$$(\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} f = \nabla \cdot ((\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}) f)$$

En faisant l'hypothèse que la distribution f s'annule lorsque $\mathbf{w} \rightarrow \pm\infty$, l'application du théorème d'Ostrogradsky donne :

$$\int (\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} f d\mathbf{w} = \int \nabla \cdot ((\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}) f) d\mathbf{w} = 0$$

On obtient alors l'évolution de la densité donnée par l'équation :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (n\mathbf{v}) = \int \frac{df_s}{dt} |_{\text{coll}} d\mathbf{w} \quad (.1.30)$$

En général, dans un plasma, il y a création de particules chargées en volume (ionisation par collision électron-neutre) et destruction de celles-ci par recombinaison et attachement. L'intégrale du terme collisionnel prend alors la forme suivante :

$$\int \frac{df}{dt} |_{\text{coll}} d\mathbf{w} = (v_i - v_a)n - rn^2$$

avec v_i : fréquence d'ionisation, v_a : fréquence d'attachement et r : coefficient de recombinaison.

En considérant ces termes, l'équation (.1.30) devient :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (n\mathbf{v}) = v_{\text{eff}} n - rn^2 \quad (.1.31)$$

où $v_{\text{eff}} = (v_i - v_a)$ est la fréquence effective d'ionisation.

1.4.2.2 Équation d'Euler ou de vitesse

Pour obtenir le modèle qui décrit la vitesse moyenne des particules du plasma, on part de l'équation de Boltzmann et on néglige le terme de convection $\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f$.

L'équation (.1.27) devient alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} f = \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{coll}} \quad (.1.32)$$

En multipliant l'équation (.1.32) par $m_s \mathbf{w}$ et en intégrant sur tout l'espace des vitesses nous obtenons :

$$m_s \frac{\partial(n\mathbf{v})}{\partial t} + \int q_s (\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} f d\mathbf{w} = m_s \int \mathbf{w} \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{coll}} d\mathbf{w} \quad (.1.33)$$

D'une part, en remarquant que \mathbf{E}, \mathbf{B} ne dépendent pas de \mathbf{w} dans l'équation (.1.33), il vient :

$$\int q_s \mathbf{w} (\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} f d\mathbf{w} = -nq_s (\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}) \quad (.1.34)$$

D'autre part, le premier moment du terme collisionnel prend alors la forme suivante :

$$\int \mathbf{w} \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{coll}} d\mathbf{w} = -\nu_s \mathbf{v} n$$

et en remarquant que le temps de variation de la densité est plus long que celui de la vitesse i.e :

$$\frac{\partial(n\mathbf{v})}{\partial t} \approx n \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

Après simplification par $m_s n$, l'équation (.1.33) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu_s \mathbf{v} = \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (.1.35)$$

avec ν_s : fréquence de collision et m_s : masse de la particule s .

1.4.3 Reformulation de l'équation de densité de plasma

Nous voulons obtenir une équation de densité qui ne dépende pas de la vitesse moyenne \mathbf{v} . Pour cela, nous allons approcher le flux ($n\mathbf{v}$) par un terme qui dépend uniquement du gradient de n et d'un coefficient de diffusion que nous déterminerons.

Sous la présence d'un champ électrique, les particules d'un plasma se mettent en mouvement. On distingue trois types de transport que sont la dérive sous l'action d'un champ électrique, la diffusion libre et la diffusion ambipolaire.

1.4.3.1 Dérive sous l'action d'un champ électrique

On considère un nuage d'électrons dans un plasma faiblement ionisé soumis à un champ électrique \mathbf{E} . Le mouvement des électrons est soumis à une force électrique ($q_e \mathbf{E}$) et à une force collisionnelle ($-m_e \nu_m \mathbf{v}$), qui est traduit par l'équation (.1.35)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nu_m \mathbf{v} + \frac{q_e}{m_e} \mathbf{E} \quad (.1.36)$$

où ν_m est la fréquence de collision électrons-neutres et q_e, m_e la charge et la masse de l'électron. On peut constater que la vitesse électronique tend vers une vitesse \mathbf{v}_d appelée vitesse de dérive :

$$\mathbf{v}_d = \frac{q_e}{m_e \nu_m} \mathbf{E} \quad (.1.37)$$

On définit la mobilité électronique comme étant le rapport de la vitesse de dérive avec le champ électrique. On a donc :

$$\mu_e = \frac{-q_e}{m_e \nu_m} \quad (.1.38)$$

De même, on a la mobilité ionique définie par :

$$\mu_i = \frac{q_i}{m_i \nu_i} \quad (.1.39)$$

où ν_i est la fréquence de collision ions-neutres et q_i, m_i la charge et la masse de l'ion.

Remarque 6 La mobilité électronique est beaucoup plus grande que la mobilité ionique ($\mu_e \gg \mu_i$) car ($m_i \gg m_e$).

1.4.3.2 La diffusion libre

Dans un milieu fluide l'apparition d'un gradient de densité pour une espèce de particules entraîne la diffusion de celle-ci vers la zone à faible densité. On définit le coefficient de diffusion libre des électrons à température électronique constante (T_e) par :

$$D_e = \frac{\kappa_b T_e}{m_e \nu_m} \quad (.1.40)$$

De même, on a le coefficient de diffusion libre des ions à température ionique constante (T_i) par :

$$D_i = \frac{\kappa_b T_i}{m_i \nu_i} \quad (.1.41)$$

où κ_b est la constante de Boltzmann.

1.4.3.3 La diffusion ambipolaire

En l'absence de champ électrique et de champ magnétique appliqués, le transport de matière est diffusif. Les électrons possèdent un coefficient de diffusion beaucoup plus grand que celui des ions ($D_e \gg D_i$), alors le flux électronique est beaucoup plus important que le flux ionique. La diffusion des électrons vers la paroi engendre un écart de neutralité et crée une charge d'espace qui génère un champ électrique \mathbf{E}_a . Ce champ électrique \mathbf{E}_a va ralentir les électrons et accélérer les ions afin d'assurer la quasi-neutralité du plasma. Au delà d'une certaine densité (10^8 cm^{-3}), où les forces de rappel sont importantes, \mathbf{E}_a assure la diffusion des ions et des électrons à la même vitesse : *Diffusion ambipolaire*. Celle-ci est caractérisée par le coefficient de diffusion D_a pour les deux particules. Il est à noter que D_a résulte d'un transfert d'inertie entre électrons et ions à travers le champ ambipolaire qui assure un couplage fort entre les deux populations.

Les flux résultants de la diffusion sont donnés par :

$$\Gamma_i = \mathbf{v}_i n_i = -D_i \nabla n_i + \mu_i n_i \mathbf{E}_a \quad (.1.42)$$

$$\Gamma_e = \mathbf{v}_e n_e = -D_e \nabla n_e + \mu_e n_e \mathbf{E}_a \quad (.1.43)$$

On utilise ensuite l'hypothèse de neutralité du plasma $n_e = n_i = n$ et de congruence ($\Gamma_i = \Gamma_e = \Gamma$), il vient :

$$\Gamma = -\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n = \mathbf{v} n \quad (.1.44)$$

ce qui conduit à :

$$\mathbf{v} n = -D_a \nabla n \quad (.1.45)$$

avec :

$$D_a = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \sim D_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \quad (.1.46)$$

où T_e, T_i sont respectivement les températures électronique et ionique.

Remarque 7 Dans le cas où on a l'hypothèse de congruence et un milieu non neutre, on introduit β tel que $n_i = \beta n_e$ ($\beta \geq 1$) et (.1.46) peut alors s'écrire :

$$D_a = \frac{\beta(\mu_i D_e + \mu_e D_i)}{\beta\mu_i + \mu_e} \quad (.1.47)$$

Le plasma ne peut pas assurer la quasi-neutralité des densités et la diffusion ambipolaire dans tout le volume. La description des décharges électriques dans les plasma se traduit par la formation de deux zones dont l'une est dite de plasma quasi-neutre avec une diffusion ambipolaire et dont l'autre est dite la gaine (au voisinage des parois) avec une diffusion libre [25].

Dans notre cas, afin de mieux décrire la diffusion dans tout le domaine où il y a du plasma, nous avons besoin de définir un coefficient de diffusion effectif D_{eff} en fonction du coefficient de diffusion ambipolaire D_a et du coefficient de diffusion électronique D_e pour assurer une transition entre les deux modes de diffusion. Ce coefficient de diffusion effectif est donné par :

$$D_{eff} = \frac{\alpha D_e + D_a}{1 + \alpha} \quad (.1.48)$$

avec $D_e = 10^2 D_a$ (car $D_i = 0$) et $\mu_e = 100\mu_i$. Le coefficient α est donné par $\frac{\lambda_D^2 v_i}{D_e}$ où λ_D est la longueur de Debye. Si $\alpha = 0$ alors on a $D_{eff} = D_a$ (diffusion ambipolaire), si $\alpha \gg 1$ alors $D_{eff} = D_e$ (Diffusion libre).

L'équation (.1.31) peut alors se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (D_{eff} \nabla n) = v_{eff} n - r n^2 \quad (.1.49)$$

où $v_{eff} = (v_i - v_a)$ est la fréquence effective d'ionisation.

1.5 MODÈLE FINAL DU PLASMA ÉTUDIÉ DANS LE CADRE DE LA THÈSE

Dans cette thèse on a utilisé une description fluide non linéaire du plasma neutre non magnétisé, à température constante pour avoir l'évolution de la densité n_e et de la vitesse \mathbf{v} du plasma. On obtient alors un courant plasma $\mathbf{J}_p = qn_e\mathbf{v}$, où $\mathbf{v} = \mathbf{v}_e$ car la densité de courant ionique est négligeable en raison de la plus grande inertie des ions. En tenant compte des relations (.1.49) et (.1.35) le modèle plasma fluide non linéaire devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot (D_{eff} \nabla n_e) = n_e (v_{eff} - rn_e) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu_m \mathbf{v} = \frac{q\mathbf{E}}{m_e} \end{cases} \quad (.1.50)$$

Où

- $q_e = q$ est la charge de l'électron ;
- m_e est la masse de l'électron ;
- ν_m est la fréquence de collision électron-neutre dans l'air ;
- ν_a est la fréquence d'attachement ;
- ν_i est la fréquence d'ionisation ;
- r_{ei} est le coefficient de recombinaison que l'on va négliger dans nos simulations ;
- ν_{eff} est la fréquence effective d'ionisation.

La fréquence de collision électron-neutre dans l'air est donnée par :

$$\nu_m = 5.3 \times 10^9 p$$

avec p la pression en Torr à la température ambiante ($p = 760 Torr$). La fréquence effective d'ionisation dépend des fréquences d'ionisation ν_i et d'attachement ν_a par la relation :

$$\nu_{eff} = \nu_i - \nu_a$$

ν_{eff} est une fonction (Bolsig + [50, 51], voir en annexe B) du champ effectif E_{eff} dont la valeur est donnée par :

$$E_{eff} = \frac{E_{rms}}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\nu_m})^2}}$$

où ω est la pulsation de l'onde incidente et E_{rms} est le champ électrique moyen donné par :

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T E(t, \mathbf{x})^2 dt}$$

avec T : période de la source monochromatique.

Le coefficient de diffusion effectif D_{eff} donné par :

$$D_{eff} = \frac{\alpha D_e + D_a}{1 + \alpha} \quad (.1.51)$$

permet de décrire de manière satisfaisante le fait que le front du plasma, où la longueur de Debye est grande en raison d'une faible densité de plasma, diffuse avec le coefficient de diffusion électronique tandis que la diffusion derrière le front, où la longueur de Debye est faible en raison de la densité du plasma haute, est

ambipolaire [52][20].

Le modèle Maxwell/plasma couplé devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} \\ \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot (D_{eff} \nabla n_e) = n_e (v_{eff} - r n_e) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu_m \mathbf{v} = \frac{q \mathbf{E}}{m_e} \\ \mathbf{J} = n_e q \mathbf{v} \end{array} \right. \quad (.1.52)$$

A coté de ce modèle instationnaire non linéaire, présenté dans cette section, il existe un autre modèle harmonique linéaire décrivant l'interaction micro-onde/plasma. Celui-ci consiste à décrire l'interaction des ondes de faible puissance avec un plasma froid collisionnel pré-existant, en représentant le plasma par une distribution volumique de permittivité complexe. On peut alors définir un milieu hétérogène de propagation de l'onde et obtenir, en résolvant les équations de Maxwell dans ce milieu, la répartition du champ électromagnétique dans l'espace. Dans ce modèle, le plasma est supposé établi et la création de celui-ci n'est pas représentée (effets non linéaires). Nous présentons ce modèle dans le paragraphe suivant.

Modèle harmonique du plasma

Le modèle de Drüde [53] considère le plasma non magnétisé comme un milieu conducteur avec une conductivité complexe σ_e et une permittivité relative complexe ε_r . Selon le type d'onde et le domaine de fréquence considérés, le plasma a un comportement capacitif si $\omega > \omega_p$ ou un comportement inductif si $\omega < \omega_p$. ω définit la pulsation de l'onde et ω_p celle du plasma. Le comportement d'un électron de masse m_e et de charge q sous l'effet d'un champ électrique \mathbf{E} peut être décrit, comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, par l'équation fondamentale de la dynamique d'un plasma :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{q \mathbf{E}}{m_e} - \nu_m \mathbf{v} \quad (.1.53)$$

où \mathbf{v} est la vitesse de l'électron et ν_m la fréquence de collision (qui représente un terme d'amortissement) en nombre de collisions/seconde.

Sous l'effet d'un champ électrique de forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t) \quad (.1.54)$$

la solution de (.1.53) admet une solution harmonique qui peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t) \quad (.1.55)$$

On remplaçant \mathbf{v} dans (.1.53), on obtient :

$$\mathbf{v} = \frac{q \mathbf{E}}{m_e (\nu_m + i\omega)} \quad (.1.56)$$

et on peut écrire :

$$\mathbf{J} = qn_e \mathbf{v} = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{(v_m + i\omega)} \mathbf{E} = \sigma_e \mathbf{E} \quad (.1.57)$$

$$\sigma_e(\mathbf{x}, t) = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2(\mathbf{x}, t)}{v_m + i\omega} \quad (.1.58)$$

où la pulsation plasma $\omega_p^2 = \frac{q^2}{m_e \epsilon_0} n_e$ traduit les oscillations naturelles dans le plasma. Celle-ci correspond également à la pulsation d'onde critique à partir de laquelle l'onde commence à être réfléchi sur le milieu.

En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère on a :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{v_m \omega_p^2}{(v_m^2 + \omega^2)} \mathbf{E} + i\omega \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{(v_m^2 + \omega^2)}\right) \mathbf{E}$$

et donc :

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

avec

$$\epsilon_r = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{(v_m^2 + \omega^2)}\right) - i \frac{v_m \omega_p^2}{\omega(v_m^2 + \omega^2)} = \epsilon' - i\epsilon''$$

ϵ_r est la permittivité relative complexe (modèle de Drüde) et ϵ', ϵ'' sont respectivement la partie réelle et imaginaire de ϵ_r .

La résolution du problème Maxwell/plasma couplé se réduit donc à la résolution des équations de Maxwell dans le domaine harmonique avec une permittivité complexe ($\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$) :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = i\omega \epsilon \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{H} \end{cases} \quad (.1.59)$$

Cette formulation du problème ne décrit pas vraiment le couplage micro-onde/plasma et la non linéarité de ce couplage. En pratique, on linéarise le problème en fixant la valeur de la densité et donc celle de la permittivité complexe ($\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$) puis on calcule la solution en résolvant le problème linéaire (.1.59).

Remarque 8 Notons qu'à partir de la formule de la permittivité relative complexe $\epsilon_r = \epsilon' - i\epsilon''$, on peut déduire la conductivité complexe du plasma $\sigma_e = \sigma_e' + i\sigma_e''$ par :

$$\sigma_e' = \omega \epsilon_0 \epsilon'', \quad \sigma_e'' = \omega \epsilon_0 (\epsilon' - 1)$$

EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION DU SYSTÈME MAXWELL/PLASMA

SOMMAIRE

2.1	INTRODUCTION	33
2.2	EXISTENCE ET UNICITÉ DES SOLUTIONS	34
2.3	PROBLÈME AUX LIMITES À TRAITER	35
2.3.1	Hypothèses	35
2.3.2	Choix des espaces de travail	36
2.4	RAPPELS MATHÉMATIQUES	37
2.4.1	Définitions	37
2.4.2	Rappel sur les traces	38
2.4.3	Théorèmes fondamentaux	38
2.5	ÉTUDE DE L'EXISTENCE ET DE L'UNICITÉ	39

2.1 INTRODUCTION

La plupart des problèmes de la physique mathématique sont modélisés par des équations aux dérivées partielles. Le phénomène d'interaction micro-onde plasma froid qui nous intéresse est régi par les équations de Maxwell couplées à une description fluide du plasma composée d'une équation de diffusion non linéaire pour la densité et d'une équation différentielle sur la vitesse électronique. On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude de l'existence et de l'unicité d'une solution à ce problème non linéaire avant de développer une méthode d'approximation numérique dans le chapitre suivant.

Pour étudier mathématiquement notre problème, nous nous placerons dans le cas suivant :

- Les coefficients des équations de Maxwell, qui représentent les caractéristiques du milieu de la propagation de l'onde électromagnétique, sont des tenseurs symétriques définis positifs et bornés dépendants d'une façon non régulière de la variable d'espace.
- Pour l'équation de densité, le coefficient de diffusion est positif et borné et la fréquence effective d'ionisation dépendra d'une façon régulière de la variable d'espace.

Par soucis de simplifier les notations dans ce chapitre, on n'utilise pas la notation en gras des vecteurs comme ce fut le cas dans le chapitre précédent.

2.2 EXISTENCE ET UNICITÉ DES SOLUTIONS

Nous proposons de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème non linéaire décrit dans le premier chapitre, en considérant une condition aux limites absorbante sur les champs pour modéliser un domaine infini et une condition aux limites de type Dirichlet homogène pour la densité. Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème, nous serons amenés à étudier les propriétés d'un opérateur différentiel linéaire non borné afin d'utiliser la théorie des semi-groupes pour prouver qu'il est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe dans un espace de Hilbert. Nous pourrons alors écrire notre problème non linéaire sous la forme d'une équation $U = \mathcal{F}(U)$ sur laquelle on appliquera le théorème du point fixe de Banach [54].

Plus précisément, le système global des équations Maxwell/plasma peut s'écrire sous la forme d'un problème d'évolution du premier ordre avec second membre :

$$\frac{dU}{dt} + \mathbf{A}U = F(U) \quad (.2.1)$$

Comme les tenseurs ϵ et μ , des équations de Maxwell, sont symétriques définis positifs et bornés d'une part, et que le coefficient de diffusion et la fréquence de collision sont positifs et bornés d'autre part, on peut démontrer que l'opérateur \mathbf{A} est accréitif ou monotone et que, de plus, il est maximal. Nous verrons en détail dans la suite de ce chapitre cette démonstration. De par ses propriétés, l'opérateur \mathbf{A} est alors générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu de contraction S et la solution du problème (.2.1) peut s'écrire sous la forme :

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds \quad (.2.2)$$

Dans notre démonstration on va chercher à montrer que U est point fixe d'une fonctionnelle \mathcal{F} contractante dans un espace de Hilbert. Nous verrons que ceci sera vérifié à condition que F soit une fonction Lipschitzienne afin de pouvoir appliquer le théorème du point fixe à (.2.2). Dans notre étude, nous nous intéresserons au cas général qui nous permet de considérer la propagation des ondes dans un milieu qui peut être aussi bien isotrope qu'anisotrope.

Remarque 9 Dans le cas où le problème se résume à des équations de Maxwell homogènes le système peut s'écrire :

$$\frac{dU}{dt} + \mathbf{B}U = f$$

où les tenseurs ϵ et μ sont symétriques définis positifs et f un terme source. L'opérateur \mathbf{B} est maximal monotone et le théorème de Hille-Yosida suffit à montrer l'existence et l'unicité d'une solution de la forme [18] [55][56][57] :

$$U(t, \mathbf{x}) = S_B(t)U(t=0, \mathbf{x}) + \int_0^t S_B(t-s)f(s)ds$$

où S_B est le semi-groupe continu de contraction engendré par \mathbf{B} .

Concernant le système Maxwell/plasma global qui nous intéresse, le théorème de Hille-Yosida¹ [58] [59] [57] permet seulement de montrer que l'opérateur \mathbf{A} est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction de classe C^0 .

¹Dans certaines références [27] [57], le théorème de Hille-Yosida est connu sous le nom de "théorème de Hille-Yosida-Phillips".

2.3 PROBLÈME AUX LIMITES À TRAITER

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné, de classe C^2 et de frontière bornée Γ . On note $n(x)$ la normale extérieure en $x \in \Gamma$. On cherche une solution (E, H, u, v) qui vérifie :

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times H & = -quv & (1) \\ \mu \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \times E & = 0 & (2) \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(D_{eff} \nabla u) & = uv_{eff} & (3) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v_m v & = \frac{qE}{m} & (4) \end{cases} \quad (.2.3)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u(t, x) & = 0 & x \in \Omega & \text{Dirichlet homogène} \\ \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} n \times E + n \times n \times H & = 0 & x \in \partial\Omega & \text{Silver-Müller} \end{cases} \quad (.2.4)$$

et les conditions initiales données par :

$$\begin{cases} E(t=0, x) & = 0 & x \in \Omega \\ H(t=0, x) & = 0 & x \in \Omega \\ u(t=0, x) & = u_0 & x \in \Omega \end{cases} \quad (.2.5)$$

L'opérateur \mathbf{A} est alors donné par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \nabla \times & 0 & 0 \\ \mu \nabla \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nabla \cdot (D_{eff} \nabla) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_m \end{pmatrix}$$

et la fonction F par :

$$F(E, H, u, v) = \begin{pmatrix} -quv \\ 0 \\ uv_{eff} \\ \frac{qE}{m} \end{pmatrix}$$

2.3.1 Hypothèses

Afin de prouver que l'opérateur \mathbf{A} est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe, nous faisons les hypothèses suivantes :

1. les tenseurs de permittivité électrique $\epsilon(x)$ et de perméabilité magnétique $\mu(x)$ appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et sont symétriques définis positifs i.e :

$$\forall z \in \mathbb{R}^3, \epsilon_{min} \|z\|^2 \leq z^t \epsilon(x) z \leq \epsilon_{max} \|z\|^2 \text{ pour presque tout } x \in \Omega$$

$$\forall z \in \mathbb{R}^3, \mu_{min} \|z\|^2 \leq z^t \mu(x) z \leq \mu_{max} \|z\|^2 \text{ pour presque tout } x \in \Omega$$

où $\epsilon_{min}, \epsilon_{max}, \mu_{min}, \mu_{max} \in \mathbb{R}^{*+}$

2. le coefficient de diffusion $D_{eff} \in L^\infty(\Omega)$ vérifie qu'il existe deux constantes D_a, D_e appartenant à $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : D_e \geq D_{eff}(x) \geq D_a > 0$$

3. la fréquence effective d'ionisation $\nu_{eff} \in C^2(\overline{\Omega})$
4. la fréquence de collision ν_m est constante et strictement positive.

Remarque 10 à la frontière Γ , on suppose que le milieu est localement homogène et isotrope (ϵ, μ sont des constantes au voisinage de Γ). On définit alors l'impédance donnée par une constante $Z = \sqrt{\mu\epsilon^{-1}}$.

2.3.2 Choix des espaces de travail

On définit les espaces de Hilbert $L^2(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ comme suit :

$$L^2(\Omega) = \left\{ g, \int_{\Omega} |g|^2 dx < +\infty \right\}$$

$$H^2(\Omega) = \{g, D^\alpha g \in L^2(\Omega, \forall |\alpha| \leq 2)\}$$

avec

$$D^\alpha g = \frac{\partial^\alpha g}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \partial^{\alpha_3} x_3}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

Et de norme :

$$\|g\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |g|^2 dx$$

$$\|g\|_{H^2(\Omega)}^2 = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} \|D^\alpha g\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Sur les espaces produits de Hilbert $L^2[(\Omega)]^6$ et $L^2[(\Omega)]^3$ on définit la norme :

$$\|g\|_{[L^2(\Omega)]^k}^2 = \sum_{1 \leq i \leq k} \|g_i\|_{L^2(\Omega)}^2, k \in \{3, 6\}$$

Pour notre démonstration d'existence et d'unicité, on va travailler avec l'espace fonctionnel :

$$\mathbf{H} = [L^2(\Omega)]^6 \times H^2(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^3$$

défini par :

$$\mathbf{H} = \{f = (f_1, f_2, f_3), f_1 \in [L^2(\Omega)]^6, f_2 \in H^2(\Omega), f_3 \in [L^2(\Omega)]^3\}$$

Il est alors facile de voir que l'espace \mathbf{H} muni de la norme euclidienne :

$$\|f\| = \left[\|f_1\|_{[L^2(\Omega)]^6}^2 + \|f_2\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|f_3\|_{[L^2(\Omega)]^3}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Hilbert.

Remarque 11 On peut munir l'espace \mathbf{H} de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\|f\|_1 = \|f_1\|_{[L^2(\Omega)]^6} + \|f_2\|_{H^2(\Omega)} + \|f_3\|_{[L^2(\Omega)]^3}, f \in \mathbf{H}$$

La norme euclidienne $\|\cdot\|$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_1$ i.e :

$$\forall f \in \mathbf{H} \quad \|f\| \leq \|f\|_1 \leq \sqrt{3} \|f\|$$

On aura aussi besoin dans notre démonstration des espaces Hilbert suivants :

$$\begin{aligned} H_{rot}(\Omega) &= \{\phi \in L^2(\Omega), rot(\phi) \in L^2(\Omega)\} \\ H_{div}(\Omega) &= \{\phi \in L^2(\Omega), div(\phi) \in L^2(\Omega)\} \\ H_{\Delta}(\Omega) &= \{\phi \in H^1(\Omega), div(D_{eff} \nabla \phi) \in L^2(\Omega)\} \\ TH^s(\Gamma) &= \{\phi \in [H^s(\Gamma)]^3, \phi \cdot n = 0\}, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où n est la normale extérieure à Γ , et $TH^s(\Gamma)$ est l'ensemble des champs de vecteurs tangents sur Γ ayant la régularité H^s .

2.4 RAPPELS MATHÉMATIQUES

Avant de commencer la démonstration d'existence et d'unicité de solutions du problème (2.3),(2.4),(2.5), nous rappelons quelques définitions et théorèmes dont nous aurons besoin [27] [57].

2.4.1 Définitions

Définition 1 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, et soit $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur non borné dans \mathcal{H} . On dit que A est monotone (accrétif) si :

$$(Au, u) \geq 0, \forall u \in D(A)$$

On dit que A est maximal monotone s'il est monotone et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 + A$ soit surjectif de $D(A)$ dans \mathcal{H} i.e : $\forall f \in \mathcal{H}, \exists U \in D(A)$ tel que :

$$\lambda_0 U + AU = f$$

Définition 2 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, et soit $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur non borné dans \mathcal{H} . L'adjoint de A est l'opérateur $A^* : D(A^*) \subset \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}'$ qui vérifie la relation suivante :

$$(Au, v)_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'} = (u, A^*v)_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}, \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*)$$

où \mathcal{H}' est l'espace dual de \mathcal{H} .

Remarque 12 Puisque \mathcal{H} est un espace de Hilbert, on fera alors l'identification suivante :

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}'$$

Définition 3 Un semi groupe de type C^0 (continu) d'opérateur linéaire sur \mathcal{H} est une application :

$$S : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- $S(0) = I$
- Pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+ : S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$.
- Pour tout $u \in \mathcal{H}$ l'application :

$$t \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow S(t)u \in \mathcal{H}$$

est continue.

Si de plus on a pour tout $t > 0$:

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1$$

alors S est un semi groupe de contraction.

Remarque 13 On note $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ l'espace vectoriel des opérateurs continus de \mathcal{H} dans \mathcal{H} . $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$.

2.4.2 Rappel sur les traces

Soit Ω un ouvert connexe, de frontière Γ lipschitzienne. On peut alors définir des applications traces $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ telles que :

1. γ_1 est l'opérateur linéaire trace tangentielle continue de $H_{rot}(\Omega)$ dans $TH^{-1/2}(\Gamma)$ qui prolonge l'application de $[C^\infty]^3$:

$$\phi \longrightarrow (\phi - (\phi \cdot n)n)|_\Gamma \text{ i.e } \phi \longrightarrow (n \times \phi \times n)|_\Gamma$$

2. γ_2 est l'opérateur linéaire trace continue de $H_{rot}(\Omega)$ dans $TH^{-1/2}(\Gamma)$ qui prolonge l'application de $[C^\infty]^3$:

$$\phi \longrightarrow (\phi \times n)|_\Gamma$$

3. γ_3 est l'opérateur linéaire trace continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ qui prolonge l'application de C^∞ :

$$\phi \longrightarrow \phi|_\Gamma$$

Les trois traces ne sont pas surjectives et afin d'avoir cette surjectivité on introduit le théorème de trace suivant :

Théorème 5

1. γ_1 se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire continu et surjectif de $H_{rot}(\Omega)$ dans $H_{rot}^{-1/2}(\Gamma)$ avec :

$$H_{rot}^{-1/2}(\Gamma) = \{\phi \in TH^{-1/2}(\Gamma), \text{rot}_\Gamma(\phi) = \text{rot}(\phi \cdot n)|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)\}$$

2. γ_2 se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire continu et surjectif de $H_{rot}(\Omega)$ dans $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$ avec :

$$H_{rot}^{-1/2}(\Gamma) = \{\phi \in TH^{-1/2}(\Gamma), \text{div}_\Gamma(\phi) = \text{div}(\phi)|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)\}$$

3. γ_3 se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire continu et surjectif de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$.

4. on a la formule de Green :

$$\forall p, v \in H(\text{rot}, \Omega), \int_\Omega v \cdot \text{rot}(q) - \int_\Omega q \cdot \text{rot}(v) = - \langle \gamma_2(q), \gamma_1(v) \rangle_{H_{div}^{-1/2}, H_{rot}^{-1/2}}$$

Lemme 1 (H. Baruaq et B. Hanouzet [60]) Soit un champ de vecteurs v appartenant à l'espace $H_{div}^{-1/2}(\Gamma) \cap H_{rot}^{-1/2}(\Gamma)$ alors $v \in TH^{1/2}(\Gamma)$, et on peut définir le produit de dualité suivant :

$$\langle v, v \rangle_{H_{div}^{-1/2}, H_{rot}^{-1/2}} = \int_\Gamma |v|^2 d\Gamma$$

Une démonstration simple de ce lemme est dans [18].

2.4.3 Théorèmes fondamentaux

Nous rappelons ici les deux théorèmes fondamentaux pour notre démonstration, que sont les théorèmes de Hille-Yosida- [61][27] [57] et du Point Fixe de Banach [54] ainsi qu'un lemme [58][27] et une proposition [57] dont on aura besoin.

Théorème 6 (Théorème de Hille-Yosida) Soit A un opérateur de domaine $D(A)$ dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- A est un opérateur maximal monotone.
- $(-A)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction de classe C^0 .

Théorème 7 (Théorème du Point Fixe de Banach) $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ un espace métrique complet. Soit Φ un opérateur de \mathcal{M} dans \mathcal{M} tel que :

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{\mathcal{M}} \leq k\|x - y\|_{\mathcal{M}}$$

$$\forall x, y \in \mathcal{M}, \text{ et } 0 \leq k < 1$$

Alors Φ admet un point fixe unique x_0 tel que : $\Phi(x_0) = x_0$.

Proposition 1 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, $T > 0$. Si $U_0 \in D(A)$ et $U \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{H})$ est solution du problème (.2.2). Alors U est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} U \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}^0([0, T], D(A)) \\ \frac{dU}{dt} + AU = F(U) \\ U(0, \cdot) = U_0 \end{cases} \quad (.2.6)$$

Lemme 2 Soit A un opérateur de domaine $D(A)$ dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- A est un opérateur maximal monotone.
- A est un opérateur fermé monotone, de domaine $D(A)$ dense dans \mathcal{H} , avec A^* monotone.

La démonstration de ce lemme est donnée dans [18] [27] et celle de la proposition (1) dans [57].

2.5 ÉTUDE DE L'EXISTENCE ET DE L'UNICITÉ

En reprenant le problème (.2.3), on considère les matrices μ et ϵ symétriques définies positives. On peut alors définir $(\sqrt{\mu})^{-1}$ et $(\sqrt{\epsilon})^{-1}$. On introduit les variables suivantes :

$$h = (\sqrt{\mu})H, \quad \text{et} \quad e = (\sqrt{\epsilon})E$$

le système global Maxwell/Plasma devient en fonction de h et e :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + (\sqrt{\mu})^{-1} \nabla \times (\sqrt{\epsilon})^{-1} e = 0 \\ \frac{\partial e}{\partial t} - (\sqrt{\epsilon})^{-1} \nabla \times (\sqrt{\mu})^{-1} h = -(\sqrt{\epsilon})^{-1} quv \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(D_{eff} \nabla u) = u (v_{eff} - ru) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \nu_m v = \frac{q(\sqrt{\epsilon})^{-1} e}{m} \end{cases} \quad (.2.7)$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} e(t=0, \cdot) = (\sqrt{\epsilon})E_0(\cdot) & (x, y, z) \in \Omega \\ h(t=0, \cdot) = (\sqrt{\mu})H_0(\cdot) & (x, y, z) \in \Omega \\ u(t=0, \cdot) = u_0 & (x, y, z) \in \Omega \\ v(t=0, \cdot) = v_0 & (x, y, z) \in \Omega \end{cases} \quad (.2.8)$$

en posant :

$$Q = \begin{pmatrix} h \\ e \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

Ce système peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} + AQ = F(Q) \\ Q(0, \cdot) = Q_0 = (h_0, e_0, u_0, v_0), \end{cases} \quad x \in \Omega \quad (.2.9)$$

où A est l'opérateur linéaire défini par :

$$AQ = \begin{pmatrix} (\sqrt{\mu})^{-1} \nabla \times (\sqrt{\epsilon})^{-1} e \\ -(\sqrt{\epsilon})^{-1} \nabla \times (\sqrt{\mu})^{-1} h \\ -\text{div}(D_{eff} \nabla u) \\ \nu_m v \end{pmatrix}$$

et F est l'opérateur non linéaire définie par :

$$F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\sqrt{\epsilon})^{-1} quv \\ uv_{eff} \\ \frac{q(\sqrt{\epsilon})^{-1} e}{m} \end{pmatrix}$$

La condition aux limites s'écrit de la manière suivante :

$$n \times ((\sqrt{\epsilon})^{-1} e) + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} n \times n \times ((\sqrt{\mu})^{-1} h) = 0 \quad (x, y, z) \in \partial\Omega$$

On note A l'opérateur non borné défini sur \mathbf{H} de domaine

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{l} Q \in \mathbf{H}; ((\sqrt{\mu})^{-1} h, (\sqrt{\epsilon})^{-1} e) \in [H(\text{rot}, \Omega)]^2; \\ \gamma_1((\sqrt{\epsilon})^{-1} e) + Z\gamma_2((\sqrt{\mu})^{-1} h) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ u \in H_\Delta(\Omega), \gamma_3(u) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right\}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 8 Soit A l'opérateur linéaire non borné défini sur \mathbf{H} et de domaine $D(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} (\sqrt{\mu})^{-1} \nabla \times (\sqrt{\epsilon})^{-1} \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\sqrt{\epsilon})^{-1} \nabla \times (\sqrt{\mu})^{-1} \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{div}(D_{eff} \nabla \cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_m \cdot \end{pmatrix}$$

et vérifiant le problème de Cauchy (.2.9). Alors :

- A est maximal monotone.
- $(-A)$ est un générateur de semi-groupe de contraction de classe C^0 sur \mathbf{H} .

▷ PREUVE :

On commence par prouver que A est un opérateur maximal monotone. Pour cela, on utilise le lemme (2) et on démontre que A est un opérateur fermé monotone, de domaine $D(A)$ dense dans \mathcal{H} , et que l'opérateur adjoint A^* est monotone. Pour le second point du théorème, il suffit d'appliquer le théorème (6).

1) A est monotone

Pour $Q = (h, e, u, v) \in D(A)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle AQ, Q \rangle &= \int_{\Omega} h \cdot [(\sqrt{\mu})^{-1} \text{rot}(\sqrt{\epsilon})^{-1} e] - e \cdot [(\sqrt{\epsilon})^{-1} \text{rot}(\sqrt{\mu})^{-1} h] - u \cdot [\text{div}(D_{\text{eff}} \nabla u)] + \nu_m v^2 \\
&= \int_{\Omega} e \cdot [(\sqrt{\epsilon})^{-1} \text{rot}(\sqrt{\mu})^{-1} h] - e \cdot [(\sqrt{\epsilon})^{-1} \text{rot}(\sqrt{\mu})^{-1} h] + (D_{\text{eff}}(\nabla u))^2 + \nu_m v^2 \\
&\quad + \langle n \times (\sqrt{\epsilon})^{-1} e, (\sqrt{\mu})^{-1} h \rangle_{H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H_{\text{rot}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\
&= \int_{\Omega} D_{\text{eff}}(\nabla u)^2 + \nu_m v^2 dx + \langle n \times (\sqrt{\epsilon})^{-1} e, (\sqrt{\mu})^{-1} h \rangle_{H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H_{\text{rot}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \tag{.2.10} \\
&= - \langle Zn \times n \times (\sqrt{\mu})^{-1} h, (\sqrt{\mu})^{-1} h \rangle_{H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H_{\text{rot}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \int_{\Omega} D_{\text{eff}}(\nabla u)^2 + \nu_m v^2 dx \\
&= \langle Zn \times (\sqrt{\mu})^{-1} h, n \times (\sqrt{\mu})^{-1} h \rangle_{H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H_{\text{rot}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \int_{\Omega} D_{\text{eff}}(\nabla u)^2 + \nu_m v^2 dx
\end{aligned}$$

Sachant que : $\gamma_1((\sqrt{\epsilon})^{-1} e) + Z\gamma_2((\sqrt{\mu})^{-1} h) = 0$ sur Γ , on déduit que

$$n \times ((\sqrt{\mu})^{-1} h) \in H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \cap H_{\text{rot}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

D'où on appliquant le lemme 2, on aura :

$$\langle AQ, Q \rangle = Z(n \times (\sqrt{\mu})^{-1} h, n \times (\sqrt{\mu})^{-1} h)_{(L^2(\Gamma))^3} + \int_{\Omega} D_{\text{eff}}(\nabla u)^2 + \nu_m v^2 dx$$

donc :

$$\langle AQ, Q \rangle = Z \|n \times (\sqrt{\mu})^{-1} h\|_{(L^2(\Gamma))^3}^2 + \int_{\Omega} D_{\text{eff}}(\nabla u)^2 dx + \nu_m \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Comme D_{eff} est une fonction positive bornée et ν_m une constante du problème, positive par hypothèse, alors on obtient :

$$\forall Q \in D(A) \quad \langle AQ, Q \rangle \geq 0$$

et donc A est monotone.

2) A est fermé :

Soit $Q_n = (h_n, e_n, u_n, v_n)$ dans $D(A)$ telle que :

$$Q_n \rightarrow Q \quad \text{dans } \mathbf{H} \quad \text{et} \quad AQ_n \rightarrow f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \quad \text{dans } \mathbf{H}$$

On montre que (Q, f) appartient au graphe de A . Puisque les matrices ϵ et μ sont bornées, on a alors :

$$\begin{aligned}
(\sqrt{\mu})^{-1} h_n &\rightarrow (\sqrt{\mu})^{-1} h && \text{dans } [L^2(\Omega)]^3 \\
(\sqrt{\epsilon})^{-1} e_n &\rightarrow (\sqrt{\epsilon})^{-1} e && \text{dans } [L^2(\Omega)]^3 \\
u_n &\rightarrow u, \quad \nabla u_n &\rightarrow \nabla u && \text{dans } L^2(\Omega) \\
\nu_m v_n &\rightarrow \nu_m v && \text{dans } L^2(\Omega)
\end{aligned}$$

Et de plus on a :

$$\begin{aligned}
(\sqrt{\mu})^{-1} \text{rot}((\sqrt{\epsilon})^{-1} e) &\rightarrow f_1 && \text{dans } [L^2(\Omega)]^3 \\
-(\sqrt{\epsilon})^{-1} \text{rot}((\sqrt{\mu})^{-1} h) &\rightarrow f_2 && \text{dans } [L^2(\Omega)]^3 \\
-\text{div}(D_{\text{eff}} \nabla u) &\rightarrow f_3 && \text{dans } L^2(\Omega) \\
\nu_m v &\rightarrow f_4 && \text{dans } L^2(\Omega)
\end{aligned}$$

Ces convergences sont aussi vraies au sens des distributions et en utilisant le lemme suivant :

Lemme 3 Si $T \in \mathcal{D}'$, ses dérivées de tous les ordres appartiennent à \mathcal{D}' et si $T_j \rightarrow T$ dans \mathcal{D}' , alors $\partial^m T_j \rightarrow \partial^m T$ dans \mathcal{D}' .

et le fait que ϵ , μ et D_{eff} sont bornés, on aura au sens des distributions :

$$\begin{aligned} (\sqrt{\mu})^{-1} \text{rot}((\sqrt{\epsilon})^{-1} e_n) &\rightarrow (\sqrt{\mu})^{-1} \text{rot}((\sqrt{\epsilon})^{-1} e) \\ -(\sqrt{\epsilon})^{-1} \text{rot}((\sqrt{\mu})^{-1} h_n) &\rightarrow -(\sqrt{\epsilon})^{-1} \text{rot}((\sqrt{\mu})^{-1} h) \\ -\text{div}(D_{eff} \nabla u_n) &\rightarrow -\text{div}(D_{eff} \nabla u) \\ v_n v_n &\rightarrow v_m v \end{aligned}$$

L'unicité de la limite donne :

$$\begin{aligned} f_1 &= (\sqrt{\mu})^{-1} \text{rot}((\sqrt{\epsilon})^{-1} e) \\ f_2 &= -(\sqrt{\epsilon})^{-1} \text{rot}((\sqrt{\mu})^{-1} h) \\ f_3 &= -\text{div}(D_{eff} \nabla u) \\ f_4 &= v_m v \end{aligned}$$

Ce qui prouve que :

$$\begin{aligned} \text{rot}((\sqrt{\epsilon})^{-1} e) &\in [L^2(\Omega)]^3 \\ \text{rot}((\sqrt{\mu})^{-1} h) &\in [L^2(\Omega)]^3 \\ \text{div}(D_{eff} \nabla u) &\in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} ((\sqrt{\epsilon})^{-1} e_n) &\rightarrow ((\sqrt{\epsilon})^{-1} e) && H(\text{rot}, \Omega) \\ ((\sqrt{\mu})^{-1} h_n) &\rightarrow ((\sqrt{\mu})^{-1} h) && H(\text{rot}, \Omega) \\ u_n &\rightarrow u && H(\Delta, \Omega) \\ v_n &\rightarrow v && L^2(\Omega) \end{aligned}$$

Par ailleurs, Nous avons :

$$\begin{aligned} n \times ((\sqrt{\epsilon})^{-1} e_n) + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} n \times n \times ((\sqrt{\mu})^{-1} h_n) &= 0 \quad \text{sur } \partial\Gamma \\ u_n|_{\Gamma_2} &= 0 \end{aligned}$$

Comme γ_1 et γ_2 sont des opérateurs continus de $H(\text{rot}, \Omega)$ dans respectivement $H_{\text{rot}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et γ_3 est continu de $H^1(\Omega_2)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$, on aura par passage à la limite :

$$\begin{aligned} n \times ((\sqrt{\epsilon})^{-1} e) + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} n \times n \times ((\sqrt{\mu})^{-1} h) &= 0 \quad \text{sur } \partial\Gamma \\ u|_{\Gamma_2} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $Q \in D(A)$ et :

$$f = AQ \text{ donc } A \text{ est fermé}$$

3) $D(A)$ est dense dans \mathbf{H}

$\mathbb{D} = [D(\Omega)]^{10}$ est dense dans \mathbf{H} . Cependant \mathbb{D} n'est pas inclus dans $D(A)$. Soit ρ_n une suite régularisante, alors :

$$\forall Q \in \mathbf{H} : \exists Q_n = (h_n, e_n, u_n, v_n) \in \mathbb{D} \text{ tel que } Q_n \rightarrow Q \text{ dans } \mathbf{H}$$

On peut définir aussi pour $Q_n \in \mathbb{D} : \forall k$

$$Q_{n,k} = (\sqrt{\mu}(\rho_k * (\sqrt{\mu})^{-1} h_n), \sqrt{\epsilon}(\rho_k * (\sqrt{\epsilon})^{-1} e_n), \rho_k * u_n, \rho_k * v_n) \in D(A)$$

Et puisque ϵ et μ sont bornés alors :

$$Q_{n,k} \rightarrow Q_n \text{ dans } \mathbf{H}$$

Ainsi, pour toute fonction de \mathbf{H} , nous pouvons l'approcher par une suite de \mathbb{D} , qu'on peut aussi approcher à son tour par une suite de $D(A)$ pour la norme \mathbf{H} . Ce qui démontre que $D(A)$ est dense dans \mathbf{H} .

4) A^* est monotone :

On définit l'adjoint de l'opérateur A par :

$$\langle A^*Q, Q^* \rangle = \langle Q, A^*Q^* \rangle, \forall Q \in D(A), \forall Q^* \in D(A^*)$$

avec :

$$D(A^*) = \left\{ \begin{array}{l} Q \in \mathbf{H}; ((\sqrt{\mu})^{-1}h, (\sqrt{\epsilon})^{-1}e) \in [H(\text{rot}, \Omega)]^2; \\ \gamma_1((\sqrt{\epsilon})^{-1}e) - Z\gamma_2((\sqrt{\mu})^{-1}h) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ u \in H_\Delta(\Omega), \gamma_3(u) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right\}$$

l'adjoint de A est donné par :

$$A^*(Q) = \begin{pmatrix} -(\sqrt{\mu})^{-1}\nabla \times (\sqrt{\epsilon})^{-1}e \\ (\sqrt{\epsilon})^{-1}\nabla \times (\sqrt{\mu})^{-1}h \\ -\text{div}(D_{\text{eff}}\nabla u) \\ v_m v \end{pmatrix}$$

Pour $Q \in D(A^*)$:

$$\langle A^*Q, Q \rangle = Z\|n \times (\sqrt{\mu})^{-1}h\|_{(L^2(\Gamma))^3}^2 + \int_{\Omega} D_{\text{eff}}(\nabla u)^2 dx + v_m \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$$

d'où la monotonie de A^* .

On vient de démontrer que l'opérateur linéaire A est fermé monotone, de domaine $D(A)$ dense dans \mathcal{H} , et d'opérateur adjoint A^* monotone. Cela implique, d'après le lemme (2), que l'opérateur A est maximal monotone.

En appliquant le théorème (6) à l'opérateur A maximal monotone, on déduit que $(-A)$ est un générateur de semi-groupe de contraction sur \mathbf{H} , qu'on peut noter $S(t) = \exp(-At)^2$. \triangleleft

Afin de prouver l'existence et l'unicité de notre solution on aura maintenant besoin d'appliquer un théorème de point fixe sur la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{F}(Q) = S(t)Q_0 + \int_0^t S(t-s)F(Q(s))ds$$

Théorème 9 Soit A l'opérateur linéaire non borné défini sur \mathbf{H} et de domaine $D(A)$. Le Problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} + AQ = F(Q) \\ Q(0, \cdot) = Q_0 = (h_0, e_0, u_0, v_0), \quad x \in \Omega \end{cases}$$

admet une unique solution dans $\mathcal{C}^1([0, T], \mathbf{H}) \cap \mathcal{C}^0([0, T], D(A))$ pour tout $Q_0 = \phi \in D(A)$ qui est de la forme :

$$Q(t, \mathbf{x}) = \exp^{-At} Q_0 + \int_0^t \exp^{-(t-s)A} F(Q(t, \mathbf{x})) ds$$

Avant la preuve de ce théorème, on commence par énoncer et montrer le lemme suivant :

Lemme 4 L'opérateur non linéaire F est défini de \mathbf{H} dans \mathbf{H} et vérifie l'inégalité suivante :

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|$$

$x, y \in \mathbf{H}$ avec L positif.

²On peut trouver une justification à cette notation dans [58][59] :

$$S(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(I + \frac{At}{n} \right)^{-1} \right]^n$$

▷ PREUVE : F est défini par : $\forall Q \in H$

$$F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\sqrt{\epsilon})^{-1}quv \\ uv_{eff} \\ \frac{q(\sqrt{\epsilon})^{-1}e}{m} \end{pmatrix}$$

On a :

1. $u \in H^2(\Omega)$ et donc en utilisant les injections de Sobolev ([58]) on aura : $u \in L^\infty(\Omega)$ (en plus $u \in C^0(\Omega)$), et puisque $v \in [L^2(\Omega)]^3$ alors $uv \in [L^2(\Omega)]^3$.
2. Puisque $v_{eff} \in C^2(\Omega)$ et $u \in H^2(\Omega)$ alors $v_{eff}u \in H^2(\Omega)$.
3. Comme q, ϵ, m sont des constantes et $e \in [L^2(\Omega)]^3$ alors $\frac{q(\sqrt{\epsilon})^{-1}e}{m} \in [L^2(\Omega)]^3$.

D'après 1, 2 et 3 on a alors :

$$\forall Q \in H, F(Q) \in H(\Omega)$$

On pose :

$$\begin{cases} \alpha = -q(\sqrt{\epsilon})^{-1} > 0 & \text{car } q < 0 \\ \delta = \frac{q}{m}(\sqrt{\epsilon})^{-1} \end{cases}$$

Comme $v_{eff} \in C^2(\bar{\Omega})$ alors :

$$\text{il existe } \beta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \Omega |v_{eff}(x)| \leq \beta$$

Pour prouver le deuxième point du lemme, on utilisera la norme $\|\cdot\|_1$ qui est d'après la remarque 11 équivalente à la norme $\|\cdot\|$.

Soit $Q_1, Q_2 \in \mathbf{H}$ alors :

$$\|F(Q_1) - F(Q_2)\|_1 = \|\alpha(u_1v_1 - u_2v_2)\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|v_{eff}(u_1 - u_2)\|_{H^2(\Omega)} + \|\delta(e_1 - e_2)\|_{[L^2(\Omega)]^3}$$

Pour les deux dernier termes, on peut les majorer par :

$$\|\delta(e_1 - e_2)\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq |\delta| \|e_1 - e_2\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq |\delta| \|Q_1 - Q_2\|_1 \quad (.2.11)$$

$$\|v_{eff}(u_1 - u_2)\|_{H^2(\Omega)} \leq \beta \|u_1 - u_2\|_{H^2(\Omega)} \leq \beta \|Q_1 - Q_2\|_1 \quad (.2.12)$$

Pour le premier terme on a :

$$\begin{aligned} \|\alpha(u_1v_1 - u_2v_2)\|_{[L^2(\Omega)]^3} &= \|\alpha(u_1v_1 - u_1v_2 + u_1v_2 - u_2v_2)\|_{[L^2(\Omega)]^3} \\ &= \alpha \|u_1(v_1 - v_2) + (u_1 - u_2)v_2\|_{[L^2(\Omega)]^3} \\ \text{inégalité triangulaire} &\leq \alpha \left[\|u_1(v_1 - v_2)\|_{[L^2]^3} + \|(u_1 - u_2)v_2\|_{[L^2]^3} \right] \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que $uv \in [L^2(\Omega)]^3$ on aura :

$$\begin{aligned} \|\alpha(u_1v_1 - u_2v_2)\|_{[L^2(\Omega)]^3} &= \alpha \left[\|u_1(v_1 - v_2)\|_{[L^2]^3} + \|(u_1 - u_2)v_2\|_{[L^2]^3} \right] \\ &\leq \alpha \left[\|u_1\|_{H^2} \|v_1 - v_2\|_{[L^2]^3} + \|(u_1 - u_2)\|_{H^2} \|v_2\|_{[L^2]^3} \right] \quad (.2.13) \\ &\leq \alpha \left[\|u_1\|_{H^2} \|(Q_1 - Q_2)\|_1 + \|(Q_1 - Q_2)\|_1 \|v_2\|_{[L^2]^3} \right] \\ &\leq \alpha (\|u_1\|_{H^2} + \|v_2\|_{[L^2]^3}) \|(Q_1 - Q_2)\|_1 \end{aligned}$$

On peut déduire de .2.11, .2.12, et .2.13 que :

$$\|F(Q_1) - F(Q_2)\|_1 \leq \left[\alpha (\|u_1\|_{H^2} + \|v_2\|_{[L^2]^3}) + |\delta| + \beta \right] \|(Q_1 - Q_2)\|_1$$

La remarque 11 donne le résultat :

$$\|F(Q_1) - F(Q_2)\| \leq L\|Q_1 - Q_2\|$$

avec

$$L(\|u_1\|_{H^2}, \|v_2\|_{[L^2]^3}, \alpha, \beta, \delta) = \sqrt{3} [\alpha(\|u_1\|_{H^2} + \|v_2\|_{[L^2]^3}) + |\delta| + \beta] \quad (.2.14)$$

◁

La démonstration du théorème d'existence et d'unicité de solution (9) est donc la suivante :

▷ PREUVE :

D'après la proposition 1, résoudre .2.9 équivaut à trouver $Q \in \mathcal{C}([0, T], \mathbf{H})$ tel que :

$$Q(t) = S(t)Q_0 + \int_0^t S(t-s)F(Q(s))ds$$

étant donné $T > 0$ et $k > 0$ (qui sera fixé ultérieurement), on considère l'espace métrique \mathcal{M}_k défini par :

$$\mathcal{M}_k = \{Q : [0, T] \longrightarrow \mathbf{H}(\Omega), \text{continue}, \sup_{t \in [0, T]} \|Q(t)\| < k\}$$

et on munit cet espace de la distance suivante :

$$d(Q_1, Q_2) = \sup_{t \in [0, T]} \|Q_1(t) - Q_2(t)\|$$

ce qui implique que \mathcal{M}_k est un espace de Banach pour la norme induite par d :

$$\|Q\|_{\mathcal{M}_k} = \sup_{t \in [0, T]} \|Q(t)\|$$

Soit $\phi = Q_0 \in \mathbf{H}$:

$$\mathcal{F}_\phi(Q) = S(t)\phi + \int_0^t S(t-s)F(Q(s))ds$$

on montre tout d'abord que la fonctionnelle \mathcal{F}_ϕ est une application de \mathcal{M}_k vers \mathcal{M}_k , puis qu'elle est une application contractante.

Soit $Q \in \mathcal{M}_k$, on a :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_\phi(Q)\| &\leq \|S(t)\phi\| + \int_0^t \|S(t-s)F(Q)\|ds \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})}\|\phi\| + \int_0^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})}\|F(Q)\|ds \\ &\leq \|\phi\| + \int_0^t \|F(Q)\|ds \end{aligned} \quad (.2.15)$$

D'après le lemme 4 et .2.14 :

$$\begin{aligned} \|F(Q)\| &\leq L\|Q\| \\ L &= \sqrt{3} [\alpha\|u\|_{H^2} + |\delta| + \beta] \end{aligned} \quad (.2.16)$$

Comme $Q \in \mathcal{M}_k$ alors :

$$\begin{aligned} \|Q(t)\| &< k \\ L &\leq L_k = \sqrt{3} [\alpha k + |\delta| + \beta] \end{aligned} \quad (.2.17)$$

.2.15 devient alors :

$$\|\mathcal{F}_\phi(Q)\| \leq \|\phi\| + L_k T k \quad (.2.18)$$

En choisissant k tel que :

$$\|\phi\| + L_k T k < k$$

alors :

$$\mathcal{F}_\phi(Q) \in \mathcal{M}_k$$

donc \mathcal{F}_ϕ est une application de \mathcal{M}_k vers \mathcal{M}_k .

Après avoir démontré que \mathcal{F}_ϕ est une application de \mathcal{M}_k vers \mathcal{M}_k , on veut montrer que \mathcal{F}_ϕ est une application contractante.

Soit $\phi, \psi \in \mathbf{H}$ et $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_k$ alors : $\forall t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_\phi(Q_1) - \mathcal{F}_\phi(Q_2)\| &\leq \|S(t)(\phi - \psi)\| + \int_0^t \|S(t-s)(F(Q_1) - F(Q_2))\| ds \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} \|\phi - \psi\| + \int_0^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} \|F(Q_1) - F(Q_2)\| ds \\ &\leq \|\phi - \psi\| + \int_0^t \|F(Q_1) - F(Q_2)\| ds \\ &\leq \|\phi - \psi\| + TL_k \|Q_1 - Q_2\| \end{aligned} \quad (.2.19)$$

Si $\phi = \psi$ alors :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_\phi(Q_1) - \mathcal{F}_\phi(Q_2)\| &\leq TL_k \|Q_1 - Q_2\| \\ \sup_{t \in [0, T]} \|\mathcal{F}_\phi(Q_1) - \mathcal{F}_\phi(Q_2)\| &\leq TL_k \sup_{t \in [0, T]} \|Q_1 - Q_2\| \\ \|\mathcal{F}_\phi(Q_1) - \mathcal{F}_\phi(Q_2)\|_{\mathcal{M}_k} &\leq TL_k \|Q_1 - Q_2\|_{\mathcal{M}_k} \end{aligned} \quad (.2.20)$$

Puisque

$$\|\phi\| + L_k T k < k \quad \text{alors} \quad L_k T < 1$$

On a : $\forall Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_k$:

$$\|\mathcal{F}_\phi(Q_1) - \mathcal{F}_\phi(Q_2)\| \leq TL_k \|Q_1 - Q_2\| \quad \text{avec} \quad L_k T < 1$$

donc \mathcal{F}_ϕ est une contraction de \mathcal{M}_k vers \mathcal{M}_k .

En appliquant le théorème du point fixe 7, il existe un unique point fixe $Q \in \mathcal{M}_k$ de \mathcal{F}_ϕ tel que :

$$\mathcal{F}_\phi(Q) = Q$$

ce qui conclut la démonstration d'existence et d'unicité. \triangleleft

CONCLUSION

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à l'étude mathématique du point de vue de l'existence et de l'unicité de solution à un problème non linéaire traduisant l'interaction micro-onde/plasma. Pour cela, notre démonstration s'est basée sur deux théorèmes fondamentaux que sont les théorèmes de Hille-Yosida-Phillips et de point fixe de Banach. Après avoir assuré l'existence et unicité de solution, on peut maintenant envisager de développer une méthode d'approximation numérique dans le chapitre suivant.

APPROXIMATION NUMÉRIQUE DU SYSTÈME DE MAXWELL COUPLÉ AU MODÈLE PLASMA

SOMMAIRE

3.1	INTRODUCTION	48
3.2	APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL/PLASMA PAR LE SCHÉMA DIFFÉRENCES FINIES DE YEE	48
3.2.1	Rappel du schéma de Yee pour l'approximation des équations de Maxwell	49
3.2.2	Approximation FDTD pour les équations liées au plasma	52
3.2.3	Discrétisation du problème couplé	54
3.2.4	Prise en compte des conditions aux limites sur le problème couplé	55
3.2.5	Prise en compte des sources électromagnétiques dans le problème couplé	57
3.2.6	Conclusion	58
3.3	APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL/PLASMA PAR UN SCHÉMA VOLUMES FINIS	58
3.3.1	Formulation conservative et hyperbolicité du système de Maxwell	59
3.3.2	Les volumes de contrôle	62
3.3.3	Formulation variationnelle	64
3.3.4	Discrétisation des flux	65
3.3.5	Traitement des conditions aux limites	69
3.3.6	Approximation d'ordre supérieur en espace	71
3.3.7	Formalisme général d'une approche volumes finis	72
3.3.8	Approximation numérique des équations du plasma	78
3.3.9	Discrétisation du problème couplé	82
3.3.10	Stratégie de pas de temps local pour le calcul des champs électromagnétiques	83
3.3.11	Conclusion	84
3.4	APPROCHE GALERKIN DISCONTINUE POUR LE PROBLÈME MAXWELL/PLASMA	84
3.4.1	Formulation mathématique GD des équations de Maxwell	85
3.4.2	Approximation numérique du formalisme GD pour les équations de Maxwell	85
3.4.3	Définition des fonctions de base et des degrés de liberté	86
3.4.4	Formulation du schéma numérique lié aux équations de Maxwell	88
3.4.5	Ajout des équations liées au plasma dans le formalisme GD	88

3.1 INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est l'étude de méthodes numériques pour la résolution du problème Maxwell/plasma couplé décrit dans les chapitres précédents. Pour cela, différentes méthodes numériques peuvent être utilisées. Historiquement, le problème que l'on souhaite résoudre a fait l'objet de plusieurs études numériques dans les cas 1D et 2D en utilisant le schéma FDTD de Yee. Dans nos travaux, on s'est focalisé sur une méthode volumes finis qui permet d'utiliser des maillages non structurés afin de mieux décrire les géométries complexes, de diminuer les effets dispersifs de la méthode FDTD et de raffiner localement le maillage dans le domaine de calcul. Dans la suite de notre étude, on s'est aussi intéressé à une approche Galerkin Discontinue qui peut être considérée comme une généralisation du schéma volumes finis à un ordre supérieur et qui palie surtout à la dissipation de celui-ci dans les cavités.

Dans un premier paragraphe, nous décrivons une méthode différences finis 3D basée sur le schéma de Yee pour résoudre les équations de Maxwell, puis, nous appliquons cette méthode aux équations du plasma fluide et au système Maxwell/plasma couplé. Nous établissons, ainsi la formulation du problème complet en introduisant les termes de couplage entre les équations de Maxwell et celles du plasma fluide.

Dans un deuxième paragraphe, nous présentons un schéma volumes finis, tout d'abord, pour résoudre le système de Maxwell, puis nous l'adaptions aux équations plasma et au problème couplé. Dans cette approche, afin d'améliorer la précision spatiale du schéma numérique, nous utilisons une méthode MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws). Le solveur ainsi présenté peut être aussi décrit par un formalisme plus général qui apporte d'autres propriétés en termes de dissipation et de dispersion numériques. Dans ce paragraphe, on donne cette approche générale et on montre comment obtenir notre schéma volumes finis à partir de celle-ci. Ensuite, nous décrivons une stratégie de pas de temps local pour améliorer les performances.

Enfin, dans un troisième paragraphe, nous introduisons succinctement une formulation Galerkin discontinue (GD) pour traiter le problème couplé. Cette formulation, basée sur la prise en compte des conditions limites par l'ajout de sauts tangentiels des champs électrique et magnétique, permet de diminuer les effets de dispersion et de dissipation numériques, tout en augmentant les performances calcul et mémoire [62][63][19][64].

3.2 APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL/PLASMA PAR LE SCHÉMA DIFFÉRENCES FINIES DE YEE

Dans ce paragraphe, nous décrivons une approximation différences finies pour résoudre le problème couplé Maxwell/plasma défini dans les chapitres précédents. L'approximation utilisée est basée sur le schéma de Yee, dont nous rappelons tout d'abord le principe pour les équations de Maxwell. Nous donnons ensuite une approximation compatible avec ce schéma pour les équations liées au plasma. Enfin, nous explicitons les conditions aux limites et la prise en compte des sources dans le

schéma numérique pour le problème Maxwell/plasma couplé.

3.2.1 Rappel du schéma de Yee pour l'approximation des équations de Maxwell

La méthode différences finies (FDTD) développée par K. S. Yee [15] à partir de 1966 est actuellement, l'une des méthodes les plus utilisées pour la résolution des équations de Maxwell dans le domaine temporel [16]. On part ainsi des équations :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} + \sigma \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{H} \\ \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \end{cases} \quad (.3.1)$$

Cette méthode repose sur un schéma leap-frog en espace et en temps. Le domaine de calcul est défini par un parallélépipède découpé sous forme d'une grille suivant les trois directions x , y et z . On obtient alors une représentation du domaine de calcul sous forme d'un ensemble de cellules repérées par 3 indices i, j, k pour $i = 1, n_x$, $j = 1, n_y$ et $k = 1, n_z$. Les valeurs n_x , n_y et n_z représentent le nombre de mailles que l'on a choisi respectivement en x , y et z . Dans le schéma, les inconnues (E_x, E_y, E_z) et (H_x, H_y, H_z) sont localisées sur chaque cellule du maillage comme décrit sur la figure (.3.1).

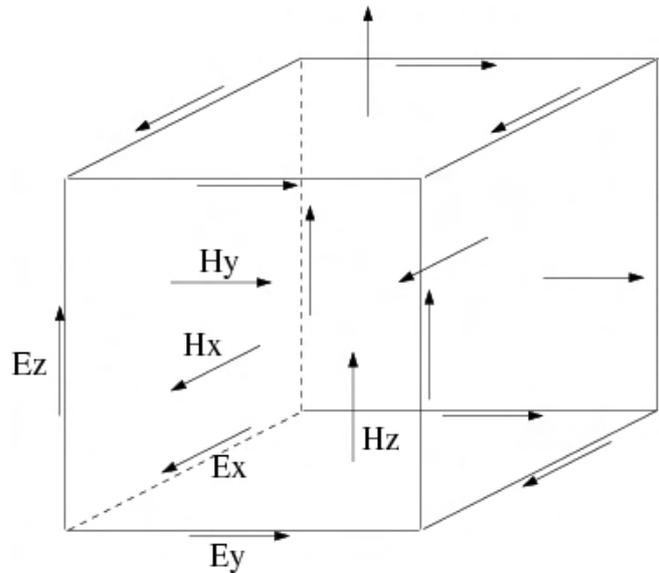


figure .3.1 – Localisation des inconnues dans la cellule FDTD 3D.

On note dans ce choix, que les composantes de champ électrique sont tangentes aux arêtes des cellules du maillage alors que les composantes du champ magnétique sont perpendiculaires aux faces de ces mêmes cellules. Il est classique, dans cette méthode, de définir une grille duale dont les sommets sont les centres de gravité des cellules comme décrit sur la figure (.3.2).

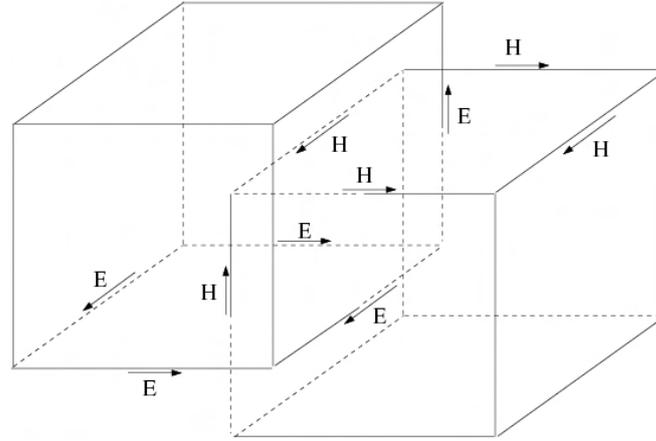


figure .3.2 – Position de la grille duale par rapport aux cellules du maillage initial.

Dans cette grille duale, les champs magnétiques sont alors tangents aux arêtes des cellules et les champs électriques sont normaux aux faces de ces mêmes cellules. Nous verrons par la suite l'intérêt de cette double grille pour le calcul des composantes de champs. Dans le maillage du domaine de calcul, afin de pouvoir représenter précisément la source et la solution, le pas de discrétisation des cellules est définie par λ/n où λ est la longueur d'onde minimale de la source excitatrice du problème et n définit un entier que l'on choisit généralement supérieur ou égal à 10. En utilisant ce choix d'inconnues, si on considère les composantes E_x et H_x , on obtient par un développement de Taylor centré en temps et en espace, l'approximation numérique suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{i,j,k} \frac{E_{x_{i,j,k}}^{n+1} - E_{x_{i,j,k}}^n}{dt} + \sigma_{i,j,k} \frac{E_{x_{i,j,k}}^{n+1} + E_{x_{i,j,k}}^n}{2} = \frac{H_{z_{i,j,k}}^{n+1/2} - H_{z_{i,j-1,k}}^{n+1/2}}{yh(j) - yh(j-1)} - \frac{H_{y_{i,j,k}}^{n+1/2} - H_{y_{i,j,k-1}}^{n+1/2}}{zh(k) - zh(k-1)} \\ \mu_0 \frac{H_{x_{i,j,k}}^{n+1/2} - H_{x_{i,j,k}}^{n-1/2}}{dt} = -\frac{E_{z_{i,j+1,k}}^n - E_{z_{i,j,k}}^n}{ye(j+1) - ye(j)} + \frac{E_{y_{i,j,k+1}}^n - E_{y_{i,j,k}}^n}{ze(k+1) - ze(k)} \end{cases} \quad (.3.2)$$

avec $E_{x_{i,j,k}}^n$ et $H_{x_{i,j,k}}^n$ les champs électriques et magnétiques sur la cellule i, j, k et au temps t_n . Les valeurs $\varepsilon_{i,j,k}$ et $\sigma_{i,j,k}$ sont des moyennes prises aux points de calcul des composantes de champ électrique. Un sommet (i, j, k) de la grille FDTD est donné par les coordonnées $(xe(i), ye(j), ze(k))$. Les coordonnées des sommets de la grille duale sont données par $(xh(i), yh(j), zh(k))$ définis par :

$$\begin{cases} xh(i) = (xe(i+1) + xe(i))/2 \\ yh(j) = (ye(j+1) + ye(j))/2 \\ zh(k) = (ze(k+1) + ze(k))/2 \end{cases} \quad (.3.3)$$

On note dans cette approche différences finies par développement de Taylor que les permittivités et conductivités sont délicates à évaluer. Pour palier à cette difficulté, on peut aussi considérer le schéma de Yee comme un schéma surfaces finies. Pour cela, raisonnons sur l'équation en champ électrique :

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} = (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (.3.4)$$

Pour chaque composante de champ électrique, on considère la surface S de la grille duale perpendiculaire à cette composante comme le montre la figure (.3.3).

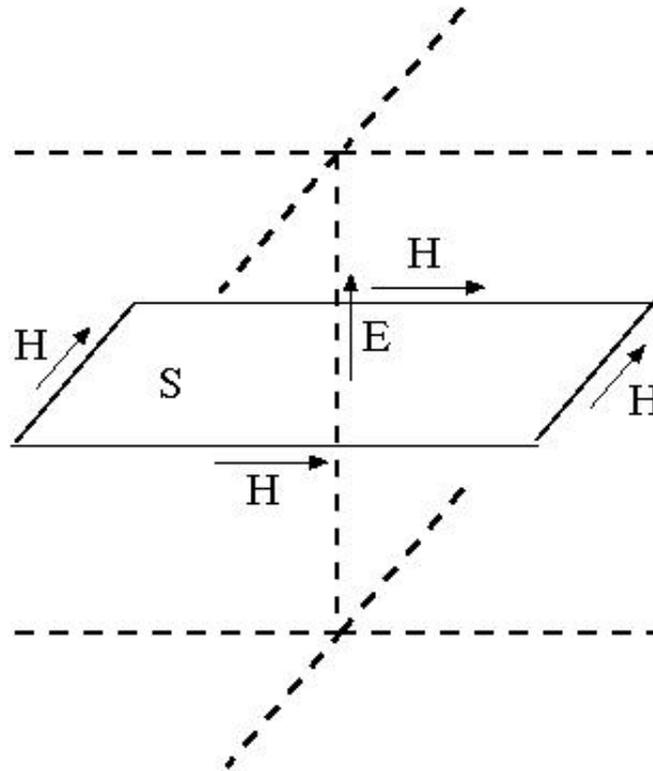


figure .3.3 – Localisation des inconnues sur une surface duale.

En projetant l'équation (.3.4) sur la normale \mathbf{n} à la surface S , on obtient :

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \quad (.3.5)$$

où $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ définit de par le choix de la localisation des composantes de champ sur la cellule, une composante du champ électrique. En intégrant cette équation sur S , on obtient :

$$\frac{\int_S \varepsilon dx}{S} \frac{\partial \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}}{\partial t} + \frac{\int_S \sigma dx}{S} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{S} \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (.3.6)$$

où C est le contour de la surface S . En discrétisant l'équation précédente, on obtient le même schéma numérique que (.3.2).

Dans cette approche surfaces finies, on note sur l'équation (.3.6) que chaque composante électrique est obtenue par la circulation des composantes magnétiques perpendiculaires à celle-ci ; ce qui est représentatif de la physique étudiée. On note aussi que dans cette approche les moyennes sur les permittivités et conductivités apparaissent naturellement sous la forme $\varepsilon_{i,j,k} = \frac{\int_S \varepsilon(x) dx}{S}$ et $\sigma_{i,j,k} = \frac{\int_S \sigma(x) dx}{S}$. Ceci a un intérêt évident lorsqu'il faut prendre en compte des matériaux volumiques. En effet, les matériaux volumiques sont définis constants par cellule. Dans le cas où on évalue une composante de champ électrique qui se trouve à la frontière de plusieurs matériaux comme décrit dans la figure (.3.4), l'approche surfaces finies nous permet d'obtenir le matériaux moyen à prendre pour cette composante. Celui-ci est donné sous forme d'une somme pondérée des surfaces S_i des cellules voisines à la composante de champ. Chaque surface S_i est donnée par la projection de la cellule i adjacente à la composante de champ sur la surface duale (voir figure .3.4).

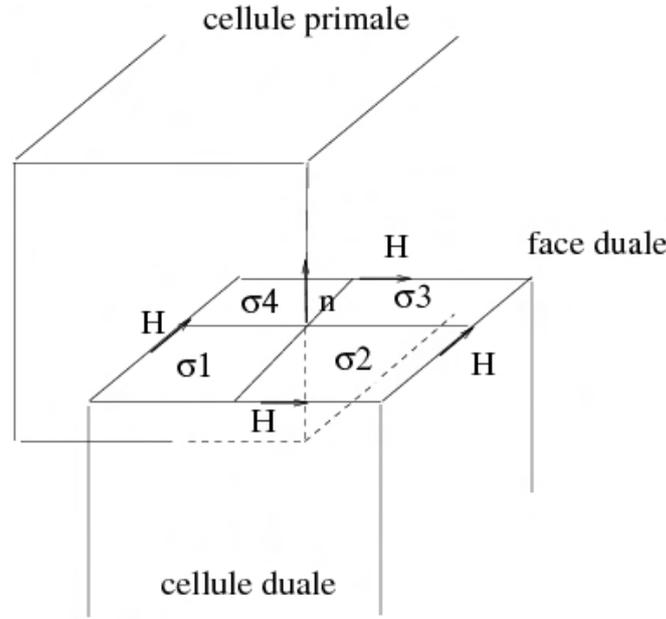


figure .3.4 – Prise en compte des matériaux volumiques.

On obtient alors pour la conductivité moyenne $\sum_i S_i \sigma_i / \sum_i S_i$. Dans le cas où le maillage est à pas constant cela revient à prendre $\sum_i \sigma_i / 4$, mais dans l'autre cas, on obtient une pondération différente qui dépend localement du maillage. Cette remarque sur la conductivité est évidemment la même sur la permittivité et tout autre matériau volumique.

Le schéma numérique ainsi obtenu possède les caractéristiques suivantes :

- c'est un schéma d'ordre 2 en temps ;
- dans le cas d'un maillage à pas constant, le schéma est d'ordre 2 en espace ;
- le choix d'une approximation centrée en espace permet au schéma de ne pas être dissipatif en espace ;
- le schéma est dispersif en espace et peut donc présenter sur des temps d'observation longs, un décalage du signal en fréquence important. Avec le maillage en marche d'escalier, ce dernier point est le principal inconvénient du schéma.

En ce qui concerne la stabilité, on peut démontrer en espace libre que le schéma est stable sous la condition :

$$dt \leq \frac{1}{v} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2} + \frac{1}{dz^2}}} \quad (.3.7)$$

où $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu_0}$ définit la vitesse du milieu et dx, dy, dz définissent les pas spatiaux minimaux suivant les trois directions.

3.2.2 Approximation FDTD pour les équations liées au plasma

Pour les équations liées au plasma, les inconnues sont les densités des charges et leurs vitesses. Dans notre présentation, les densités sont affectées aux noeuds du maillage alors que la position des vitesses est identiques à celle du champ électrique (voir Figure .3.5) pour des raisons de simplicité.

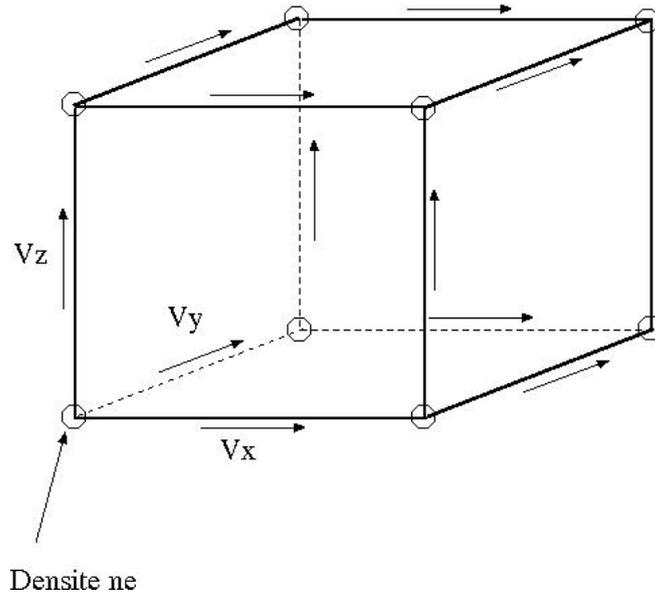


figure .3.5 – Position des inconnues liées au plasma dans la cellule.

Soit le vecteur vitesse défini par $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. La discrétisation différences finies utilisée pour l'équation liée aux vitesses (.1.50) est donnée par :

$$\frac{\mathbf{v}_{i,j,k}^{n+1/2} - \mathbf{v}_{i,j,k}^{n-1/2}}{dt} + \nu_c \frac{\mathbf{v}_{i,j,k}^{n+1/2} + \mathbf{v}_{i,j,k}^{n-1/2}}{2} = \frac{q}{m_e} \mathbf{E}_{i,j,k}^n \quad (.3.8)$$

où $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ et ν_c est la fréquence de collision neutre/électron qui est prise égale dans nos applications à $5.3 \times 10^9 p$, avec p la pression en torr.

Concernant les densités électroniques (.1.50), on utilise l'approximation numérique suivante :

$$\frac{n_{e,i,j,k}^{n+1} - n_{e,i,j,k}^n}{dt} - (\nabla \cdot (D_{eff} \cdot \nabla n_e))_{i,j,k}^n = (\nu_{i,j,k} - \nu_a) n_{e,i,j,k}^n - r (n_{e,i,j,k}^n)^2 \quad (.3.9)$$

Dans cette discrétisation on écrit $\nabla \cdot (D_{eff} \nabla n_e)$ sous la forme $\nabla D_{eff} \cdot \nabla n_e + D_{eff} \Delta n_e$. Le premier terme de cette expression se discrétise sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (\nabla D_e \cdot \nabla n_e)_{i,j,k}^n &= \frac{D_{eff,i+1,j,k}^n - D_{eff,i,j,k}^n}{xe(i+1) - xe(i)} \frac{n_{e,i+1,j,k}^n - n_{e,i,j,k}^n}{xe(i+1) - xe(i)} + \\ &\frac{D_{eff,i,j+1,k}^n - D_{eff,i,j,k}^n}{ye(j+1) - ye(j)} \frac{n_{e,i,j+1,k}^n - n_{e,i,j,k}^n}{ye(j+1) - ye(j)} + \\ &\frac{D_{eff,i,j,k+1}^n - D_{eff,i,j,k}^n}{ze(k+1) - ze(k)} \frac{n_{e,i,j,k+1}^n - n_{e,i,j,k}^n}{ze(k+1) - ze(k)} \end{aligned} \quad (.3.10)$$

Quant au deuxième terme de l'expression, sa discrétisation est :

$$\begin{aligned} (D_{eff} \Delta n_e)_{i,j,k}^n &= D_{eff,i,j,k}^n \left(\frac{2(n_{e,i+1,j,k}^n - n_{e,i,j,k}^n)}{(xe(i+1) - xe(i))(xe(i+1) - xe(i-1))} + \frac{2(n_{e,i-1,j,k}^n - n_{e,i,j,k}^n)}{(xe(i) - xe(i-1))(xe(i+1) - xe(i-1))} \right) \\ &+ \frac{2(n_{e,i,j+1,k}^n - n_{e,i,j,k}^n)}{(ye(j+1) - ye(j))(ye(j+1) - ye(j-1))} + \frac{2(n_{e,i,j-1,k}^n - n_{e,i,j,k}^n)}{(ye(i) - ye(j-1))(ye(j+1) - ye(j-1))} \\ &+ \frac{2(n_{e,i,j,k+1}^n - n_{e,i,j,k}^n)}{(ze(k+1) - ze(k))(ze(k+1) - ze(k-1))} + \frac{2(n_{e,i,j,k-1}^n - n_{e,i,j,k}^n)}{(ze(k) - ze(k-1))(ze(k+1) - ze(k-1))} \end{aligned} \quad (.3.11)$$

Dans l'équation (.3.9), les termes ν_i et ν_a définissent respectivement les fréquences d'ionisation et d'attachement. On définit $\nu_{eff} = \nu_i - \nu_a$ qui est une fonction tabulée

de la pression p et du champ E_{eff} donné par :

$$E_{eff} = \frac{E_{rms}}{\sqrt{1 + \omega^2/\nu_c^2}} \quad (.3.12)$$

avec ω définissant la pulsation de l'onde incidente et :

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T (E_x^2(t) + E_y^2(t) + E_z^2(t)) dt} \quad (.3.13)$$

où T définit une période de la source électromagnétique monochromatique.

En ce qui concerne la valeur du coefficient de diffusion effectif D_{eff} , on prend [52] :

$$D_{eff,i,j,k}^n = \frac{D_a + \alpha_{i,j,k}^n D_e}{1 + \alpha_{i,j,k}^n} \quad \text{avec} \quad \alpha_{i,j,k}^n = \nu_i \epsilon_0 / (e n_{e,i,j,k}^n \mu_e) \quad (.3.14)$$

où D_e et D_a représentent respectivement les coefficients de diffusion électronique et ambipolaire. Dans nos simulations nous prenons $D_e = \mu_e k_B T_e / e$ avec $\mu_e = e / m_e \nu_c$ et $D_a = \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e$. Dans ces expressions μ_e et μ_i définissent les mobilités électroniques et ioniques (on suppose que $\mu_e / \mu_i = 100$), k_B est la constante de Boltzmann et T_e la température électronique que l'on considère égale à $2eV$ dans nos simulations.

En ce qui concerne la stabilité, on peut démontrer dans le cas de coefficients constants D_{eff} et $\nu_{eff} = r = 0$ que le schéma est stable sous la condition :

$$dt \leq \frac{1}{2D_e} \frac{1}{\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2} + \frac{1}{dz^2}} \quad (.3.15)$$

où dx, dy, dz définissent les pas spatiaux minimaux suivant les trois directions et ($D_a \leq D_{eff} \leq D_e$).

3.2.3 Discrétisation du problème couplé

Le système couplé s'écrit :

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} \\ \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot (D_{eff} \nabla n_e) = (\nu_i - \nu_a) n_e - r n_e^2 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E} - \nu_m \mathbf{v} \\ \mathbf{J} = q n_e \mathbf{v} \end{cases} \quad (.3.16)$$

Dans ce système, les couplages sont au niveau des densités de courant \mathbf{J} en ce qui concerne l'interaction du plasma sur le champ électromagnétique, dans le terme source de l'équation en \mathbf{v} et dans les coefficients D_{eff} et ν_i en ce qui concerne l'interaction du champ sur le plasma.

Dans la discrétisation temporelle du système (.3.102), nous avons pris en considération la différence d'échelle entre l'évolution en temps de la densité n_e et celle du champ électromagnétique. Ceci est possible car l'évolution temporelle de la densité du plasma est très lente par rapport à celle du champ électromagnétique. A ce sujet, il faut noter que le modèle physique implique que le couplage entre la densité du

plasma et le champ électromagnétique est effectué à travers le champ électrique E_{rms} et non pas par l'intermédiaire du champ instantané E . Pour traiter cette différence d'échelle, nous avons associé deux pas de temps, définis par dt_{n_e} pour la densité et dt_M pour le champ électromagnétique. Dans notre stratégie, on a choisi de prendre deux pas de temps proportionnels tel que $dt_{n_e} = m dt_M$. Concernant la vitesse, le pas de temps pris en compte dans la discrétisation est le même que celui du champ électromagnétique. En effet, la vitesse évolue sur la même échelle temporelle que le champ électromagnétique.

Dans le processus de calcul des champs, la densité du plasma est supposée constante entre les deux étapes $t^n = n dt_M$ et $t^N = Nm dt_M = \frac{Nm}{n} t^n$, et égale à la valeur évaluée à $t^{(N-1)}$.

Enfin, pour le couplage plasma/champ, on prend :

$$\mathbf{J}_{i,j,k}^{n+1/2} = -e \frac{n_{e_{i,j,k}}^{N-1} + n_{e_{i,j,k}}^N}{2} \mathbf{v}_{i,j,k}^{n+1/2} \quad (.3.17)$$

En ce qui concerne la stabilité du problème complet, nous appliquons les critères établis pour les champs et les densités plasma, dans les deux paragraphes précédents. En utilisant ce critère, nous n'avons pas observé d'instabilité sur l'ensemble des configurations étudiées

3.2.4 Prise en compte des conditions aux limites sur le problème couplé

Dans les simulations que nous avons réalisées dans ce travail de thèse, nous nous sommes focalisés sur des géométries en espace libre ou bien périodiques. Nous avons donc introduit pour le calcul des champs électromagnétiques, 2 types de conditions limites :

- conditions d'espace libre simulées par des couches PML ;
- conditions de périodicité simulées par des conditions aux frontières du domaine de calcul sur le champ électrique et le champ magnétique.

En ce qui concerne le plasma, nous nous sommes exclusivement limité au cas d'un plasma confiné à l'intérieur du domaine de calcul. La condition sur les bords du domaine de calcul a été fixée par $n_e = 0$ où n_e représente la densité plasma. En raison de la position des inconnues sur les vitesses liées au plasma, il n'est pas nécessaire d'avoir des conditions limites sur celles-ci. Dans ce paragraphe, nous allons donc détailler uniquement les deux types de conditions aux limites appliquées sur les champs électromagnétiques.

3.2.4.1 PML pour les équations de Maxwell

La méthode PML (Perfectly Matched Layer) fut d'abord définie par J.P. Bérenger dans le cadre d'un schéma de Yee [45], [44]. Celle-ci consiste, comme décrit dans le chapitre 1, à ajouter aux frontières du domaine de calcul un ensemble de couches définissant un milieu absorbant sans réflexion dans le domaine de calcul pour les ondes électromagnétiques. Pour cela, on définit dans chaque couche une conductivité électrique $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ et une conductivité magnétique $\sigma^* = (\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*)$ dépendant de la direction des couches et de la distance de la couche à l'interface air/PML comme indiqué sur la figure .3.6.

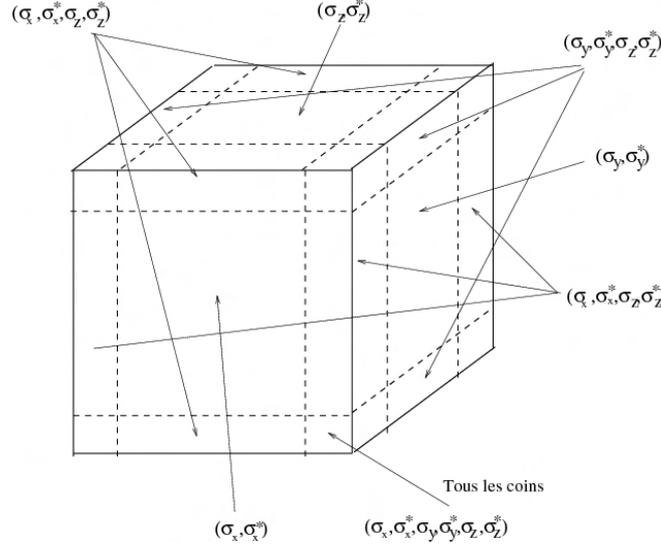


figure .3.6 – Position des couches absorbantes et des matériaux affectés à celles-ci.

Ces deux conductivités vérifient en plus une condition d'adaptation pour chaque composante :

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon} = \frac{\sigma_x^*}{\mu'}, \quad \frac{\sigma_y}{\varepsilon} = \frac{\sigma_y^*}{\mu'}, \quad \frac{\sigma_z}{\varepsilon} = \frac{\sigma_z^*}{\mu'} \quad (.3.18)$$

En reprenant le système augmenté obtenu dans le chapitre 1 pour les PML, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_1} \mathbf{D}' = (\nabla \times) \mathbf{H}' \\ \partial_t \mathbf{D}' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma} \mathbf{D}' = \varepsilon (\partial_t \mathbf{E}' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_2} \mathbf{E}') \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_1} \mathbf{B}' = -(\nabla \times) \mathbf{E}' \\ \partial_t \mathbf{B}' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma} \mathbf{B}' = \mu_0 (\partial_t \mathbf{H}' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_2} \mathbf{H}') \end{cases} \quad (.3.19)$$

où $K_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$, $K_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{pmatrix}$ et $K_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y \end{pmatrix}$

En termes de schéma numérique, on obtient sur les composantes en x :

$$\begin{cases} B_x^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{2\varepsilon - \sigma_y \Delta t}{2\varepsilon + \sigma_y \Delta t} \right) B_x^{n-\frac{1}{2}} - \left(\frac{2\varepsilon \Delta t}{2\varepsilon + \sigma_y \Delta t} \right) (DE_z^n - DE_y^n) \\ H_x^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{2\varepsilon - \sigma_z \Delta t}{2\varepsilon + \sigma_z \Delta t} \right) H_x^{n-\frac{1}{2}} + \left(\frac{2\varepsilon + \sigma_x \Delta t}{\mu_0 (2\varepsilon + \sigma_z \Delta t)} \right) B_x^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{-2\varepsilon + \sigma_x \Delta t}{\mu_0 (2\varepsilon + \sigma_z \Delta t)} \right) B_x^{n-\frac{1}{2}} \\ D_x^{n+1} = \left(\frac{2\varepsilon - \sigma_y \Delta t}{2\varepsilon + \sigma_y \Delta t} \right) D_x^n + \left(\frac{2\varepsilon \Delta t}{2\varepsilon + \sigma_y \Delta t} \right) (DH_z^{n+\frac{1}{2}} - DH_y^{n+\frac{1}{2}}) \\ E_x^{n+1} = \left(\frac{2\varepsilon - \sigma_z \Delta t}{2\varepsilon + \sigma_z \Delta t} \right) E_x^n + \left(\frac{2\varepsilon + \sigma_x \Delta t}{\varepsilon (2\varepsilon + \sigma_z \Delta t)} \right) D_x^{n+1} + \left(\frac{-2\varepsilon + \sigma_x \Delta t}{\varepsilon (2\varepsilon + \sigma_z \Delta t)} \right) D_x^n \end{cases}$$

Les autres composantes s'expriment de la même manière.

Concernant la stabilité, on peut démontrer que le critère donné en espace libre pour les équations de Maxwell assure aussi la stabilité du système augmenté.

3.2.4.2 Conditions de périodicité électromagnétiques

Le domaine de calcul est un domaine parallélépipédique dans lequel on peut imposer des conditions de périodicité dans une, deux ou trois directions. Dans le calcul, nous rappelons que les composantes des champs sont évaluées sur une grille définie

par $[1, n_x] \times [1, n_y] \times [1, n_z]$ où n_x , n_y et n_z sont les nombres de cellules du maillage dans les 3 directions. Pour des raisons de facilité de calcul les champs électriques sont définis sur la grille $[1, n_x + 1] \times [1, n_y + 1] \times [1, n_z + 1]$ et les champs magnétiques sur la grille $[0, n_x] \times [0, n_y] \times [0, n_z]$. Les valeurs des champs étant initialement positionnés à 0, les valeurs frontières ne seront jamais modifiées par le calcul et resteront à 0; ce qui est normal puisque sur les bords du domaine de calcul on impose généralement une condition de métal parfait. Dans ces conditions, la prise en compte d'une condition de périodicité dans la direction x s'effectue facilement en imposant à chaque itération en temps :

$$\begin{cases} E_y(n_x + 1, j, k) = E_y(1, j, k) \quad \forall j = 1, n_y \text{ et } \forall k = 1, n_z \\ E_z(n_x + 1, j, k) = E_z(1, j, k) \quad \forall j = 1, n_y \text{ et } \forall k = 1, n_z \\ H_y(0, j, k) = H_y(n_x, j, k) \quad \forall j = 1, n_y \text{ et } \forall k = 1, n_z \\ H_z(0, j, k) = H_z(n_x, j, k) \quad \forall j = 1, n_y \text{ et } \forall k = 1, n_z \end{cases} \quad (.3.20)$$

Dans le cas d'une condition de périodicité en y ou en z , on aura le même type d'équations en prenant en compte les bonnes composantes. Pour la direction y , on utilisera les composantes de champs en x et z , alors que pour la direction z , on utilisera les composantes en x et en y .

Les conditions de périodicité électromagnétiques sont utilisées dans la simulation des structures périodiques.

3.2.5 Prise en compte des sources électromagnétiques dans le problème couplé

Les sources mises en oeuvre dans les applications abordées dans ce travail de thèse sont des ondes planes pour les champs électromagnétiques et des densités électroniques initiales pour le plasma. En ce qui concerne les sources plasma, nous définissons une zone de l'espace dans laquelle on place une densité initiale constante ou bien une forme spatiale gaussienne en précisant le centre (x_0, y_0, z_0) et le rayon r de celle-ci. On obtient alors $n_e(t = 0, x, y, z) = A \exp(-(\sqrt{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)}/r)^2)$, avec A une valeur initiale de densité.

Pour la source de type onde plane, nous définissons dans le domaine de calcul une surface dite de Huygens délimitant une zone de calcul en champ diffracté, d'une zone de calcul en champ total. Dans nos configurations habituelles, la surface de Huygens est définie par 6 surfaces qui constituent un parallélépipède. Toutefois, pour prendre en compte des configurations périodiques, nous pouvons limiter cette surface à une surface non fermée ayant une normale. Dans tous les cas, nous adopterons la règle suivante :

- le champ diffracté est évalué du côté de la normale sortante alors que le champ total est évalué de l'autre côté (voir figure 3.7).

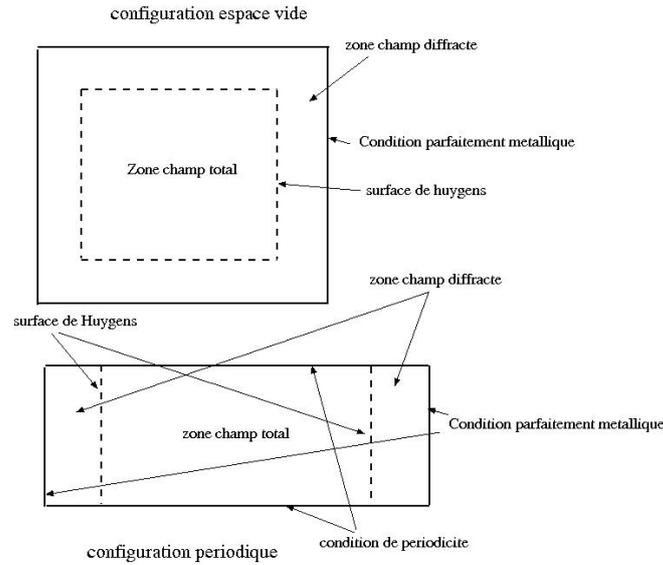


figure .3.7 – Position du calcul en champ diffracté et en champ total.

3.2.6 Conclusion

La méthode FDTD (Finite-Difference Time-Domain) est la méthode de résolution numérique la plus connue et la plus utilisée par les ingénieurs dans le domaine de la modélisation électromagnétique. Cette popularité est due à sa simplicité de mise en oeuvre, à sa robustesse et à son très bon coût de calcul. Elle a donc été naturellement mise en oeuvre dans le cas dans notre problème Maxwell/plasma.

Pendant, la méthode FDTD dans sa formulation classique (schéma de Yee) est limitée à l'utilisation d'un maillage structuré cartésien, ce qui implique une approximation de l'objet en escalier quand celui-ci possède une géométrie courbée. Cela se traduit par des erreurs d'approximation qui s'ajoutent aux erreurs de dispersion numérique de la méthode. De même la présence de structures fines par rapport à la taille du domaine peut augmenter le temps de calcul et la place mémoire.

Dans nos configurations, on est aussi confronté à des simulations où le plasma est localisé seulement en un endroit précis, ce qui motive l'utilisation d'un maillage localement raffiné. Dans ce cas, il est très difficile d'utiliser un raffinement local pour les schémas FDTD et cela entraîne une perte de précision spatiale (ordre 1 en h) lorsque le rapport entre les tailles de deux mailles voisines est supérieur à 1. De plus, les schémas FDTD résultants peuvent souffrir de certains phénomènes d'instabilité [65] [66] [67].

3.3 APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL/PLASMA PAR UN SCHEMA VOLUMES FINIS

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'étude d'une approche volumes finis dans le domaine temporel pour la résolution de notre problème couplé. En considérant chaque système du problème global (Maxwell/Plasma) indépendamment. Pour cela, on commence par traiter les équations de Maxwell avec second membre puis les équations du plasma, avant de traiter le problème final.

La forme conservative et le caractère hyperbolique du système de Maxwell mènent naturellement à l'utilisation de méthodes FVTD pour résoudre celui-ci. Après avoir présenté les deux schémas FVTD, dits centrés aux noeuds et centrés aux éléments, nous choisissons le plus efficace dans notre cas pour définir les volumes de contrôles et nous donnons la formulation variationnelle associée aux équations de Maxwell. En termes d'approximation numérique, on fournit le calcul des flux en utilisant les équations caractéristiques du problème de Maxwell. Afin d'augmenter la précision de la méthode FVTD, une approximation d'ordre supérieur de type MUSCL est ensuite présentée. L'ensemble du schéma numérique ainsi obtenu peut aussi se formaliser plus généralement. Pour conclure notre modélisation des équations de Maxwell par une approche FVTD, nous fournissons cette approche générale.

3.3.1 Formulation conservative et hyperbolicité du système de Maxwell

L'interprétation physique du caractère hyperbolique des équations de Maxwell se traduit par le fait que les solutions du système sont des ondes électromagnétiques qui se propagent suivant des directions particulières [68]. Cette propriété est utilisée dans la construction des flux décentrés précis en temps et en espace. Il permet d'identifier le sens de propagation de l'onde électromagnétique. Pour plus d'information sur les systèmes hyperboliques, on peut se référer à [69].

On considère le système des équations de Maxwell dans un milieu isotrope et homogène :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{H}) &= -\mathbf{J} \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{E}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (.3.21)$$

où ε et μ représentent la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du milieu. On pose $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)^t$ et $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)^t$. \mathbf{J} est un courant source.

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{div} F(\mathbf{U}) = \mathbf{J} \quad (.3.22)$$

avec $\mathbf{U} = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)^t$ et $F(\mathbf{U}) = (F_1(\mathbf{U}), F_2(\mathbf{U}), F_3(\mathbf{U}))$

où :

$$F_1(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ H_z/\varepsilon \\ -H_y/\varepsilon \\ 0 \\ -E_z/\mu \\ E_y/\mu \end{pmatrix}, F_2(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -H_z/\varepsilon \\ 0 \\ H_x/\varepsilon \\ E_z/\mu \\ 0 \\ -E_x/\mu \end{pmatrix}, F_3(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} H_y/\varepsilon \\ -H_x/\varepsilon \\ 0 \\ -E_y/\mu \\ E_x/\mu \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$F(\mathbf{U})$ est une fonction vectorielle linéaire de $[\mathbb{R}^6]^3$ dont chacune des trois composantes prend des valeurs dans \mathbb{R}^6 .

$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^6 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \\ \mathbf{U} & \longrightarrow & F(\mathbf{U}) = (F_1(\mathbf{U}); F_2(\mathbf{U}); F_3(\mathbf{U})) \end{cases} \quad (.3.23)$$

A partir d'un système de coordonnées cartésiennes, le système d'équations aux dérivées partielles précédent (.3.22) s'écrit alors :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left(\frac{\partial F_1(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial F_2(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial F_3(\mathbf{U})}{\partial z} \right) = -\mathbf{J}(\mathbf{U}) \quad (.3.24)$$

Après dérivation du terme convectif par rapport aux variables d'espace x, y, z , nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left(\frac{\partial F_1(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial F_2(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \frac{\partial F_3(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} \right) = -\mathbf{J} \quad (.3.25)$$

En posant :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1 = \frac{\partial F_1(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \\ \mathcal{A}_2 = \frac{\partial F_2(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \\ \mathcal{A}_3 = \frac{\partial F_3(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \end{cases}$$

L'équation .3.25 devient :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left(\mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathcal{A}_3 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} \right) = -\mathbf{J} \quad (.3.26)$$

Soit \mathbf{n} une direction donnée unitaire ($\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$), on s'intéresse uniquement aux variations de \mathbf{U} dans la direction \mathbf{n} , alors l'équation .3.26 s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left(\mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \mathcal{A}_3 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} \right) = -\mathbf{J} \quad (.3.27)$$

En remarquant que $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} = n_x$, $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} = n_y$ et $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} = n_z$, l'équation devient :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} \right) = -\mathbf{J} \quad (.3.28)$$

avec :

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1 n_x + \mathcal{A}_2 n_y + \mathcal{A}_3 n_z)$$

Pour une direction \mathbf{n} unitaire fixée, la matrice \mathcal{A} est donnée de façon explicite par :

$$\mathcal{A} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{n_z}{\varepsilon_0} & \frac{n_y}{\varepsilon_0} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n_z}{\varepsilon_0} & 0 & -\frac{n_x}{\varepsilon_0} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{n_y}{\varepsilon_0} & \frac{n_x}{\varepsilon_0} & 0 \\ 0 & \frac{n_z}{\mu_0} & -\frac{n_y}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n_z}{\mu_0} & 0 & \frac{n_x}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n_y}{\mu_0} & -\frac{n_x}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (.3.29)$$

Définition 4 Le système .3.28 est dit hyperbolique si et seulement si la matrice jacobienne associée \mathcal{A} est diagonalisable dans \mathbb{R} pour tout vecteur \mathbf{n} de \mathbb{R}^3 et pour tout \mathbf{U} de \mathbb{R}^6 .

La matrice \mathcal{A} est une matrice carrée, réelle et symétrique. Elle est donc diagonalisable dans \mathbb{R} et ses valeurs propres $\lambda_i (i = 1, \dots, 6)$ sont données par :

$$(0, 0, \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}})$$

Puisque la matrice \mathcal{A} est diagonalisable, il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ orthogonale telle que chaque colonne de la matrice P est un vecteur propre de la matrice \mathcal{A} associée à une valeur propre λ_i . On construit alors une nouvelle base formée des vecteurs propres de \mathcal{A} . La matrice \mathcal{A} peut se mettre sous la forme diagonale :

$$\mathcal{A} = P\Lambda P^{-1}$$

avec $\Lambda = (diag(\lambda_i))_{i=1, \dots, 6}$ la matrice diagonale dans la base des vecteurs propres. P est la matrice de changement de base donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} n_x & 0 & n_x n_z Z & -n_x n_y Z & -n_x n_z Z & n_x n_y Z \\ n_y & 0 & n_y n_z Z & (n_x^2 + n_z^2) Z & -n_y n_z Z & -(n_x^2 + n_z^2) Z \\ n_z & 0 & -(n_x^2 + n_y^2) Z & -n_y n_z Z & (n_x^2 + n_y^2) Z & n_y n_z Z \\ 0 & n_x & -n_y & -n_z & -n_y & -n_z \\ 0 & n_y & n_x & 0 & n_x & 0 \\ 0 & n_z & 0 & n_x & 0 & n_x \end{pmatrix}.$$

avec $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ l'impédance caractéristique du milieu.

P^{-1} la matrice inverse de P s'écrit alors :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \\ \frac{n_z}{2n_x Z} & 0 & \frac{-1}{2Z} & \frac{-1}{2} n_y & \frac{1}{2} \frac{(n_z^2 + n_x^2)}{n_x} & \frac{-1}{2} \frac{n_y n_z}{n_x} \\ \frac{-n_y}{2n_x Z} & \frac{1}{2Z} & 0 & \frac{-1}{2} n_z & \frac{-1}{2} \frac{n_y n_z}{n_x} & \frac{1}{2} \frac{(n_y^2 + n_x^2)}{n_x} \\ \frac{-n_z}{2n_x Z} & 0 & \frac{1}{2Z} & \frac{-1}{2} n_y & \frac{1}{2} \frac{(n_z^2 + n_x^2)}{n_x} & \frac{-1}{2} \frac{n_y n_z}{n_x} \\ \frac{n_y}{2n_x Z} & \frac{-1}{2Z} & 0 & \frac{-1}{2} n_z & \frac{-1}{2} \frac{n_y n_z}{n_x} & \frac{1}{2} \frac{(n_y^2 + n_x^2)}{n_x} \end{pmatrix}$$

avec $\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$ l'admittance du milieu.

3.3.2 Les volumes de contrôle

Le solveur des équations de Maxwell présenté ici est basé sur une méthode volumes finis utilisant un maillage non structuré de type élément finis composé de triangles en 2D et de tétraèdres en 3D.

La méthode des volumes finis est basée sur une partition du domaine de calcul en volumes appelés "cellules de contrôle" ou "volumes finis". Cette partition peut être différente du maillage. En effet, plusieurs choix de cellules de contrôle sont possibles, tout en gardant le même type de schéma de résolution. On peut distinguer dans la littérature au moins deux approches qui se différencient par la localisation des variables associées aux composantes des champs.

La première approche est la méthode de volumes finis centrés aux nœuds (cell-vertex) [70] [71] [72], dans laquelle on associe les composantes du champ aux nœuds du maillage. Dans cette approche, les sous domaines d'intégration sont des volumes particuliers, différents des cellules du maillage. Ceux-ci sont construits autour d'un nœud en reliant les barycentres des cellules du maillage qui sont adjacentes au nœud considéré. (voir Figure .3.8). Cela conduit en 3D à des volumes finis de forme géométrique complexe .

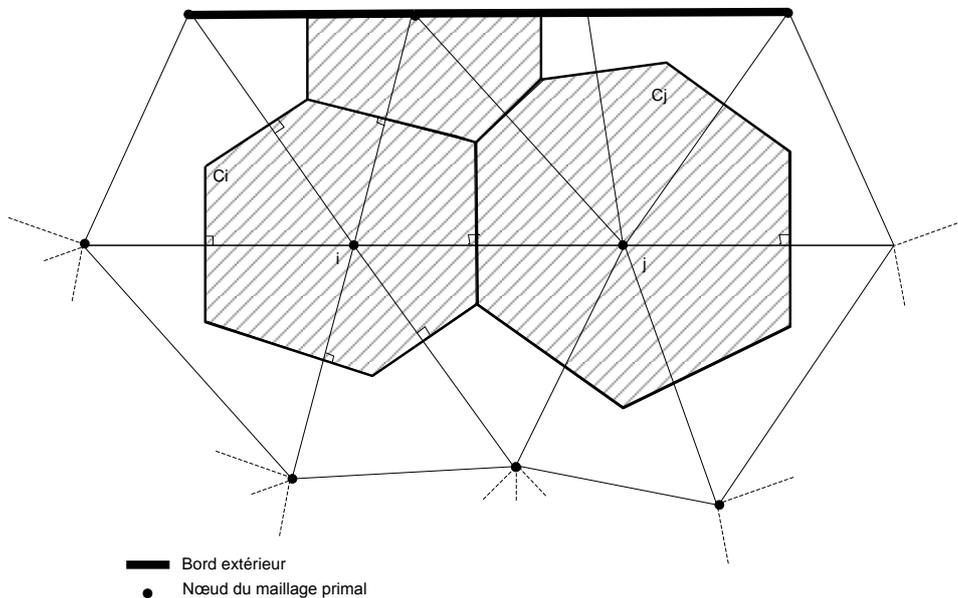


figure .3.8 – Cellules d'intégration pour une formulation centré aux nœuds en 2D.

La deuxième approche est la méthode des volumes finis centrés aux élément dite aussi cell-centered. Les volumes de contrôles coïncident avec les cellules définissant le maillage, et les inconnues sont positionnées aux barycentres de celles-ci (voir Figure .3.9). Cette approche a été proposée par Durlofsky, Osher et Engquist pour les équations d'advection et de Burger [73] et par ONERA [64][74], INRIA [18] pour les équations de Maxwell.

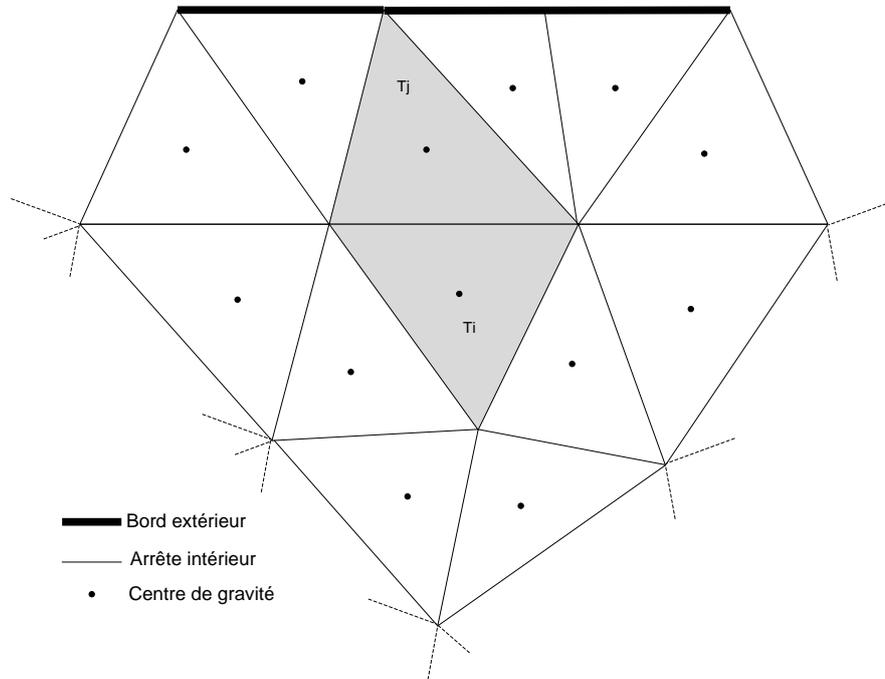


figure .3.9 – Cellules d'intégration pour une formulation centré aux élément en 2D.

Les deux approches donnent des résultats de bonne qualité bien que les deux formulations ne présentent pas les mêmes avantages et les mêmes inconvénients [75]. En effet, la formulation centrée aux nœuds est moins coûteuse en terme de temps calcul du fait d'une condition CFL moins restrictive. De plus, l'extension à des ordres spatiaux supérieurs est plus aisée, de même que l'hybridation à des schéma FDTD. Cependant, cette formulation présente un inconvénient majeur, qui est la prise en compte des conditions aux limites. Du fait de la construction de la méthode, les cellules de contrôles aux bords sont tronquées (voir Figure .3.8) et cela rend difficile la prise en compte de conditions frontières.

La formulation centrées aux éléments présente le grand avantage de pouvoir prendre en compte de manière naturelle les conditions aux limites étant donné que la frontière du domaine de calcul correspond déjà à une frontière du maillage (voir Figure .3.9). De plus, il a été prouvé dans [75] qu' à maillage identique, la méthode centrée aux éléments est mieux adaptée pour résoudre des problèmes avec des fréquences plus élevées. Elle permet aussi de prendre en compte des dispositifs incluant des couches de matériaux ou des surfaces minces.

Remarque 14 Les cellules d'intégration des volumes finis centrés aux nœuds forment un nouveau maillage

du domaine qu'on appelle "maillage dual". Le maillage initial du domaine de calcul est aussi appelé "maillage primal".

Remarque 15 En plus des deux formulations volumes finis précédentes, il existe une troisième formulation volumes finis qui est le "cell-vertex". Les inconnues sont associées aux nœuds et le volume de contrôle pour un nœud donné est l'ensemble des éléments du maillage adjacent à celui-ci. Ce type de schéma peut conduire à des schémas numériques peu diffusifs et peu sensibles à la distorsion du maillage [76] [77].

Dans notre approche volumes finis, nous nous sommes focalisé exclusivement sur l'approche volumes finis centrés aux éléments (cell-centered) pour traiter le problème qui nous intéresse.

3.3.3 Formulation variationnelle

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^3$ un domaine de calcul et $\mathcal{T}_h = V_{1, \dots, n_{vf}}$ une partition de Ω telle que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n_{vf}} V_i$, où n_{vf} est le nombre des volumes de contrôle V_i . On note S_i la surface qui entoure V_i et m_i le nombre de cellules voisines de V_i tel que :

$$V_i \cap V_j = \{\text{un point, une droite, une surface ou l'ensemble vide.}\}$$

$$\partial V_i = S_i = \bigcup_{k=1}^{m_i} S_i^k$$

La formulation faible du système de Maxwell est obtenue en intégrant (.3.22) sur chaque volume de contrôle V_i et en prenant les fonctions caractéristiques des cellules comme fonctions tests. L'inconnue \mathbf{U} est prise au barycentre de chaque cellule. L'intégration sur le volume V_i de l'équation (.3.22) donne :

$$\int_{V_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dV + \int_{V_i} \text{div} F(\mathbf{U}) dV = - \int_{V_i} \mathbf{J} dV \quad (.3.30)$$

En supposant que \mathbf{U} , $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$ et \mathbf{J} sont constantes sur chaque volume de contrôle, et en utilisant la formule de Green (ou théorème de "divergence") définie par :

$$\int_{V_i} \text{div} F(\mathbf{U}) dV = \int_{S_i} F(\mathbf{U}^*) \cdot \mathbf{n}_i dS$$

on peut réécrire l'équation (.3.30) :

$$V_i \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + \int_{S_i} F(\mathbf{U}^*) \cdot \mathbf{n}_i dS = - V_i \mathbf{J}_i dV \quad (.3.31)$$

où $\mathbf{U}^* = (\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*)$ sont les valeurs des champs électrique et magnétique sur la surface S_i . Ces valeurs sont prises aux centres de gravité. \mathbf{n}_i définit la normale extérieure à la surface S_i et $F(\mathbf{U}^*) \cdot \mathbf{n}_i$ est le flux à travers la surface S_i de la cellule V_i .

Le flux à travers une surface S de normale \mathbf{n} peut s'écrire en fonction de la matrice \mathcal{A} définie précédemment :

$$F(\mathbf{U}^*) \cdot \mathbf{n} = \mathcal{A}(\mathbf{n}) \mathbf{U} \quad (.3.32)$$

Il est simple de vérifier que le flux peut aussi s'écrire en fonction des champs \mathbf{E}, \mathbf{H} :

$$F(\mathbf{U}^*) \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{H}}{\varepsilon}, \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{E}}{\mu} \right)^t \quad (.3.33)$$

En considérant m_i comme la somme de tous les types de surfaces (surface métallique m_b , surface absorbante m_∞ , surface libre m_l), frontière du volume i , l'équation (.3.31) se réécrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} = & -\frac{1}{V_i} \sum_j^{m_l} \int_{S_{ij}} F(\mathbf{U}^*) \cdot \mathbf{n}_{ij} dS < 1 > \\ & -\frac{1}{V_i} \sum_j^{m_b} \int_{S_{ij}} F(\mathbf{U}^*) \cdot \mathbf{n}_{ib} dS < 2 > \\ & -\frac{1}{V_i} \sum_j^{m_\infty} \int_{S_{ij}} F(\mathbf{U}^*) \cdot \mathbf{n}_{i\infty} dS < 3 > \\ & -\mathbf{J}_i < 4 > \end{aligned} \quad (.3.34)$$

où \mathbf{n}_{ij} est la normale sortante à l'interface S_{ij} entre les volumes V_i et V_j , \mathbf{n}_{ib} et $\mathbf{n}_{i\infty}$ sont les normales extérieures unitaires aux bords du domaine, respectivement, pour un métal parfaitement conducteur et une frontière absorbante. Le terme $< 1 >$ définit les flux internes, les termes $< 2 >$ et $< 3 >$ définissent les flux associés aux conditions aux limites (métal et condition de non réflexion sur le bord du domaine de calcul). Enfin, le terme $< 4 >$ représente la discrétisation des courants volumiques \mathbf{J} .

3.3.4 Discrétisation des flux

La forme conservative ainsi que le caractère hyperbolique du système de Maxwell conduisent naturellement à l'utilisation des flux décentrés (Upwind) bien adaptés pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques conservatifs [78] [79] [80].

3.3.4.1 Flux numérique décentré d'ordre un

Nous présentons ici la manière dont nous discrétisons les flux internes $< 1 >$. On introduit la fonction du flux numérique comme suit :

$$\Phi_{ij} = \Phi(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \mathbf{n}_{ij}) = F(\mathbf{U}^*) \cdot \mathbf{n}_{ij} \quad (.3.35)$$

où \mathbf{n}_{ij} est la normale extérieure à l'interface S_{ij} entre les deux cellules V_i et V_j , et $F(\mathbf{U}^*)$ est une valeur approchée de F le long de l'interface S_{ij} . Ainsi l'évaluation du flux se ramène à un problème monodimensionnel dans la direction de la normale \mathbf{n}_{ij} avec une fonction flux numérique Φ dépendant des deux états \mathbf{U}_i et \mathbf{U}_j qui sont les valeurs du champ dans les cellules de part et d'autre de l'interface S_{ij} .

Définition 5 Soient F et \mathcal{A} définis respectivement par les formules .3.23 et .3.29. Le flux numérique Φ est dit décentré s'il vérifie :

$$\Phi(u, v, n) = \frac{F(u) + F(v)}{2} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2} |\mathcal{A}| (v - u) \quad (.3.36)$$

pour deux états voisins u et v . $|\mathcal{A}| = \mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^-$ où $(\mathcal{A}^+, \mathcal{A}^-)$ sont respectivement la partie positive et négative de \mathcal{A} .

Cette définition est une extension de celle du schéma décentré monodimensionnel étudiée par Lax, Harten et Van Leer [78] [81] que nous avons appliquée au système de Maxwell en trois dimensions d'espace.

Remarque 16 *Cette définition ne tient pas compte des caractéristiques diélectriques d'un milieu, elle n'est donc valable que pour les milieux homogènes.*

Remarque 17 *Dans un milieu homogène, les schémas décentrés d'ordre un pour le système de Maxwell sont tous identiques. On peut donc utiliser indifféremment n'importe quel schéma décentré pour résoudre celui-ci.*

Remarque 18 *On remarque dans la définition qu'un schéma décentré se décompose en un schéma centré et un terme diffusif. Le caractère diffusif du schéma assure la stabilité contrairement aux schémas centrés. Cependant, la diffusion peut aussi altérer la précision de la solution, notamment l'amplitude. Il est donc nécessaire de savoir contrôler cette diffusion par la construction de schémas d'ordre élevés par exemple.*

3.3.4.2 Calcul des flux

Il existe plusieurs schémas décentrés (Upwind) pour résoudre numériquement les équations de Maxwell. Parmi ces schémas on retrouve celui de Lax-Friedrichs [82], celui de Roe [83] et celui de Rusanov [84]. Nous allons focaliser notre étude sur un schéma décentré basé sur une décomposition des flux (flux-splitting) et en particulier la décomposition dite de Steger et Warming [85].

On reprend le développement du paragraphe (3.3.1). La matrice jacobienne \mathcal{A} est diagonalisable, on peut alors l'écrire sous la forme :

$$\mathcal{A} = P\Lambda P^{-1} \quad \Lambda = (\text{diag}(\lambda_i))_{i=1,\dots,6}$$

avec λ_i les valeurs propres de \mathcal{A} données par :

$$(0, 0, \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, -\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, -\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}})$$

La matrice diagonalisable \mathcal{A} se décompose aussi en deux matrices diagonalisables, une positive et l'autre négative :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^- \tag{.3.37}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{A}^+ = P\Lambda^+P^{-1} \\ \mathcal{A}^- = P\Lambda^-P^{-1} \end{cases} \tag{.3.38}$$

Λ^+ est la matrice diagonale des valeurs propres positives de \mathcal{A} et Λ^- est la matrice

diagonale des valeurs propres négatives de \mathcal{A} . La matrice \mathcal{A}^+ est donnée par :

$$\mathcal{A}^+(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (n_y^2 + n_z^2)v & -n_x n_y v & -n_x n_z v & 0 & \frac{n_z}{\varepsilon} & -\frac{n_y}{\varepsilon} \\ -n_x n_y v & (n_x^2 + n_z^2)v & -n_z n_y v & -\frac{n_z}{\varepsilon} & 0 & \frac{n_x}{\varepsilon} \\ -n_x n_z v & -n_z n_y v & (n_x^2 + n_z^2)v & \frac{n_y}{\varepsilon} & -\frac{n_x}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{n_z}{\mu} & -\frac{n_y}{\mu} & (n_y^2 + n_z^2)v & -n_x n_y v & -n_x n_z v \\ -\frac{n_z}{\mu} & 0 & \frac{n_x}{\mu} & -n_x n_y v & (n_x^2 + n_z^2)v & -n_z n_y v \\ \frac{n_y}{\mu} & -\frac{n_x}{\mu} & 0 & -n_x n_z v & -n_z n_y v & (n_x^2 + n_z^2)v \end{pmatrix}.$$

où $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ est la vitesse de la lumière dans le milieu. En remplaçant v par $-v$, on peut déduire la matrice \mathcal{A}^- . La matrice \mathcal{A}^+ est liée à la matrice \mathcal{A}^- par la relation suivante :

$$\mathcal{A}^-(\mathbf{n}) = -\mathcal{A}^+(-\mathbf{n}) \quad (.3.39)$$

Notre but est de trouver une relation qui donne les valeurs des champs \mathbf{U}^* sur les faces d'un volume de contrôle en fonction de la valeur \mathbf{U} au centre du volume. Pour cela, on introduit un changement de variable $\mathbf{W} = P^{-1}\mathbf{U}$ et on remplace \mathcal{A} par sa décomposition $P\Lambda P^{-1}$ dans l'équation (.3.28). Afin de trouver cette relation, on néglige le terme source \mathbf{J} et on aura alors :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \left(\Lambda \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{n}} \right) = 0 \quad (.3.40)$$

qui correspond au système de six équations scalaires :

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \left(\lambda_i \frac{\partial W_i}{\partial \mathbf{n}} \right) = 0, i = 1, \dots, 6 \quad (.3.41)$$

Afin de résoudre cette équation, on introduit la notion de courbe caractéristique. On cherche une courbe $(\mathbf{n}(s), t(s))$, telle que l'onde \mathbf{W} soit constante sur celle-ci et se propage à la vitesse λ_i , le long de celle-ci. On peut écrire :

$$dW_i(\mathbf{n}, t) = \frac{\partial W_i}{\partial t} dt + \frac{\partial W_i}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{n} \quad (.3.42)$$

En comparant les deux équations (.3.40),(.3.42), on trouve l'équation de la courbe caractéristique donnée par :

$$d\mathbf{n} = -\lambda_i dt \quad (.3.43)$$

Comme $dW_i = 0$ alors $W_i = W_i(\mathbf{n}_0) = cte$ le long de la courbe caractéristique $\mathbf{n}(t) = \lambda_i t + \mathbf{n}_0$. Ainsi la solution de l'EDP est donnée par : $W_i(t, \mathbf{n}) = W_i(\mathbf{n}(t) - \lambda_i t)$. En prenant \mathbf{n} comme la normale extérieure à une face d'un volume de contrôle, alors la valeur \mathbf{W}_i au centre du volume de contrôle à l'instant t est égale à celle de W_i sur la face de ce volume à l'instant $t + \delta t$. En notant \mathbf{W}^* la valeur sur la face, on déduit la relation suivante :

$$\mathbf{W}(t + \delta t, \mathbf{n}) = \mathbf{W}^* \quad (.3.44)$$

Remarque 19 Afin de relier les valeurs aux centres des volumes à celles aux faces dans une formulation volumes finis, on néglige le temps de propagation de l'onde entre le centre et la face $\delta t = \frac{d}{\lambda_i}$ (d est la distance entre le centre et la face). On a donc $\mathbf{W}^* = \mathbf{W}(t, \mathbf{n})$

Soit S la face commune entre deux volumes de contrôle V_L et V_R . On se place dans le volume V_L , en multipliant par $P\Lambda^+$ l'équation (.3.44) devient alors :

$$\mathcal{A}^+(\mathbf{n})\mathbf{U} = \mathcal{A}^+(\mathbf{n})\mathbf{U}^* \quad (.3.45)$$

En remplaçant \mathbf{n} par $-\mathbf{n}$ et en utilisant la relation (.3.39), on trouve la contribution au flux de la cellule V_R qui se traduit par :

$$\mathcal{A}^-(\mathbf{n})\mathbf{U} = \mathcal{A}^-(\mathbf{n})\mathbf{U}^{**} \quad (.3.46)$$

En résumé, pour une face interne S entre deux volumes V_L et V_R . Les relations (.3.45) et (.3.46) se traduisent en termes de champs \mathbf{E} et \mathbf{H} de la façon suivante :

$$\begin{cases} Y\mathbf{n} \times \mathbf{E}^* - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^*) = Y\mathbf{n} \times \mathbf{E}^L - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^L) \\ Y\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{**} + \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{**}) = Y\mathbf{n} \times \mathbf{E}^R + \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^R) \end{cases} \quad (.3.47)$$

avec $Y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ l'admittance caractéristique du milieu.

Remarque 20 Ces relations exploitent la propagation dans des directions privilégiées, que sont les normales aux faces du volume, pour relier les champs au centre de gravité à ceux sur les faces.

Remarque 21 Si on considère un milieu hétérogène, la permittivité ε et la perméabilité μ vont dépendre des variables d'espace. Pour un maillage donné du domaine de calcul, on peut supposer que ε et μ sont constants par volume de contrôle. Dans ce cas le système (.3.47) devient alors :

$$\begin{cases} Y^L\mathbf{n} \times \mathbf{E}^* - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^*) = Y^L\mathbf{n} \times \mathbf{E}^L - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^L) \\ Y^R\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{**} + \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{**}) = Y^R\mathbf{n} \times \mathbf{E}^R + \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^R) \end{cases} \quad (.3.48)$$

avec $Y^L = \sqrt{\frac{\varepsilon^L}{\mu^L}}$ et $Y^R = \sqrt{\frac{\varepsilon^R}{\mu^R}}$ qui définissent respectivement, les admittances caractéristiques dans les cellules V_L et V_R .

Pour finir le calcul des flux, il suffit de combiner ces deux équations aux conditions aux limites. Pour les faces internes, on applique une condition de continuité tangentielle des champs.

Condition de continuité tangentielle

La continuité tangentielle traduit le fait que la composante tangentielle du champ de chaque côté de l'interface diélectrique est continue. Elle est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^* = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{**} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}^* = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{**} \end{cases}$$

En combinant ces relations avec (.3.47), le flux à travers une face S est calculé par :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times \mathbf{E}^L + \mathbf{n} \times \mathbf{E}^R) - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^L - \mathbf{H}^R)) \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}^L + \mathbf{n} \times \mathbf{H}^R) - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^R - \mathbf{E}^L)) \end{cases} \quad (.3.49)$$

Une réécriture plus condensée de ce flux donne :

$$F(\mathbf{U}^*) \cdot \mathbf{n} = \mathcal{A}^+\mathbf{U}^L + \mathcal{A}^-\mathbf{U}^R \quad (.3.50)$$

Si le milieu contient un contraste diélectrique alors (.3.49) devient :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^* &= \frac{1}{Y^L + Y^R} ((\mathbf{n} \times Y^L \mathbf{E}^L + \mathbf{n} \times Y^R \mathbf{E}^R) - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^L - \mathbf{H}^R))) \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}^* &= \frac{Y^L Y^R}{Y^L + Y^R} ((\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{H}^L}{Y^L} + \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{H}^R}{Y^R}) - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^R - \mathbf{E}^L))) \end{cases} \quad (.3.51)$$

Comme (.3.50), une réécriture plus condensé de ce flux donne alors :

$$F(\mathbf{U}^*) \cdot \mathbf{n} = \mathcal{A}^{+L} \mathbf{U}^L + \mathcal{A}^{-R} \mathbf{U}^R \quad (.3.52)$$

où \mathcal{A}^{+L} (respectivement \mathcal{A}^{-R}) est la matrice \mathcal{A}^+ (respectivement \mathcal{A}^-) prise dans un milieu de permittivité ε^L (respectivement ε^R) et de perméabilité μ^L (respectivement μ^R).

L'expression (.3.51) correspond à la fonction de flux définie à travers une surface entre deux milieux diélectriques. Elle peut être utilisée directement dans le système final (.3.34) pour le calcul du terme $\langle 1 \rangle$ à l'intérieur du domaine de calcul.

Remarque 22 *Le flux donné par la relation (.3.51) correspond exactement à la définition du flux décentré donnée dans la définition (5). Cette méthode de calcul du flux est plus générale que la définition (5) puisqu'elle est valable aussi dans des milieux hétérogènes.*

En résumé, pour un volume V_i l'équation .3.34 donne une simple équation différentielle :

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} = -\frac{1}{|V_i|} \sum_j^{m_i} |S_{ij}| \Phi(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \mathbf{n}_{ij}) - \mathbf{J}_i \quad (.3.53)$$

où $\Phi(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \mathbf{n}_{ij}) = F(\mathbf{U}^*) \cdot \mathbf{n}_{ij}$ est le flux numérique à travers la surface S_{ij} .

3.3.5 Traitement des conditions aux limites

3.3.5.1 Surface parfaitement métallique (PEC)

Soit S_m une face parfaitement métallique. Dans ce cas, la composante tangentielle du champ électrique \mathbf{E} est nulle i.e $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$. En utilisant les relations (.3.49), on obtient le flux suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^* &= \mathbf{0} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}^* &= Y \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^L) + \mathbf{n} \times \mathbf{H}^L \end{cases} \quad (.3.54)$$

3.3.5.2 Surface parfaitement magnétique (PMC)

Soit S une face parfaitement magnétique, la composante tangentielle du champ magnétique \mathbf{H} est alors nulle sur cette face i.e $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$. En utilisant les relations (.3.49), on obtient le flux suivant sur cette face :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^* &= \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^L) - Z \mathbf{n} \times \mathbf{H}^L \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}^* &= \mathbf{0} \end{cases} \quad (.3.55)$$

où $Z = \frac{1}{Y} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ est l'impédance du milieu.

3.3.5.3 Condition absorbante de Silver-Müller

Dans les méthodes de volumes finis, la condition de Silver-Müller est la plus naturelle et la plus appliquée pour limiter le domaine de calcul. Cette condition locale est très facile à implémenter et ne requiert que très peu de ressource mémoire.

La condition de Silver-Müller traduit le fait qu'au niveau de la frontière du domaine de calcul, il n'y a pas d'onde entrante mais seulement une onde sortante au domaine. Cela s'écrit sous forme de la relation suivante :

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{**} + \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{**} = \mathbf{0}$$

avec $(\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*)$ les valeurs des champs sur la surface frontière.

En prenant l'écriture condensée (.3.52), le flux à travers la frontière du domaine de calcul est donné en fonction de la valeur des champs au centre du volume de contrôle V_L par :

$$\begin{cases} F(\mathbf{U}^*) \cdot \mathbf{n} = \mathcal{A}^{+L} \mathbf{U}^L \\ \mathcal{A}^{-R} \mathbf{U}^R = 0 \end{cases} \quad (.3.56)$$

De manière générale, cette condition, comme pour les ABC existantes, se limite à absorber les ondes à incidence normale sur la frontière. Pour les autres angles d'incidence, on peut utiliser des ABC d'ordres plus élevés pour atteindre une bonne précision [40][41]. Afin d'éviter les réflexions sur la frontière, il convient aussi de la placer suffisamment loin de l'objet, cela permet de minimiser les ondes qui arrivent avec une incidence rasante sur celle-ci. En pratique, la frontière du domaine de calcul est placée à une distance d'au moins deux longueurs d'onde de l'objet étudié et choisie de forme sphérique. En effet, on considère que, suffisamment loin de l'objet, le champ rayonné par celui-ci a une structure d'onde sphérique et arrive donc perpendiculairement à la frontière du domaine de calcul.

3.3.5.4 Couches parfaitement absorbantes (PML)

La méthode PML (Perfectly Matched Layer) consiste à ajouter aux frontières du domaine de calcul un ensemble de couches définissant un milieu absorbant sans réflexion dans le domaine de calcul pour les ondes électromagnétiques. Le formalisme PML à déjà été présenté dans le premier chapitre de cette thèse (1.3.2).

L'application de ce formalisme au schéma volumes finis se résume à prendre un domaine de calcul cubique ou parallélépipédique dans lequel deux zones sont définies comme pour les différences finies. La seule modification réside dans le fait que le maillage de chaque zone peut être non structuré comme décrit sur la figure .3.10. On calcule alors les valeurs de la conductivité aux centres des volumes des cellules des couches PML.

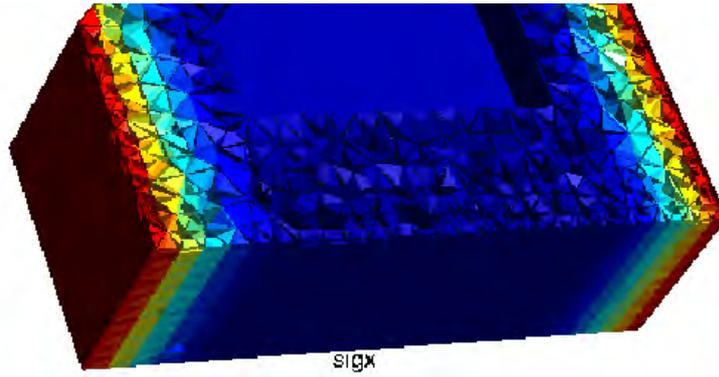


figure .3.10 – Coupe partielle du volume de calcul avec représentation des cellules dans la zone PML.

3.3.6 Approximation d'ordre supérieur en espace

Dans la section précédente, on a calculé un flux numérique en utilisant une approximation d'ordre un, car on a pris les valeurs des champs constantes sur chaque volume de contrôle. Nous voulons maintenant améliorer la précision spatiale du schéma numérique en augmentant l'ordre d'approximation. Pour cela, nous allons utiliser la méthode MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws) de Van Leer [80, 86, 81, 87].

Une manière d'obtenir un schéma d'ordre supérieur consiste à augmenter le degré d'interpolation dans un volume de contrôle et à évaluer les flux à l'aide des valeurs extrapolées aux interfaces. Le calcul des valeurs aux interfaces nécessite celui du gradient sur chaque volume de contrôle et des valeurs du champ au centre. L'obtention du flux d'ordre supérieur est directe par cette méthode puisque il suffit d'une seule modification des arguments de la fonction flux Φ définie dans (.3.35).

Soit S_{ij} une face commune entre deux volumes de contrôle adjacents V_i et V_j . On note \mathbf{U}_i la valeur du champ au centre de V_i et $\nabla \mathbf{U}_i$ la valeur du gradient au même point. On définit le nouveau flux par :

$$\begin{cases} \Phi_{ij} &= \Phi(\mathbf{U}_{ij}, \mathbf{U}_{ji}, \mathbf{n}_{ij}) \\ \mathbf{U}_{ij} &= \mathbf{U}_i + \nabla \mathbf{U}_i \cdot \overline{x_i s} \\ \mathbf{U}_{ji} &= \mathbf{U}_j + \nabla \mathbf{U}_j \cdot \overline{x_j s} \end{cases} \quad (.3.57)$$

Où x_i et x_j sont, respectivement les centres de gravité des cellules V_i et V_j , et s est le centre de gravité de la surface S_{ij} .

Il existe plusieurs façons d'évaluer les gradients des champs dans une cellule. Les deux méthodes les plus utilisées sont :

- calcul de ceux-ci sous forme d'une moyenne aux nœuds du maillage [88]. Cette méthode est très employée dans les formulations volumes finis centrées aux nœuds [70]. Pour les formulations volumes finis centrées aux éléments où les variables sont situées aux centres des éléments, on ajoute une étape supplémentaire qui consiste à faire une interpolation à partir des valeurs adjacentes à la cellule considérée pour calculer les valeurs aux nœuds de celle-ci [18, 75]. Cependant, dans ce calcul, on

est confronté à des problèmes de définition des champs aux nœuds dans un milieu hétérogène (discontinuité de certaines composantes de champs à travers la face).

- Calcul des gradients par interpolation linéaire sur un maillage dual [73]. Dans une formulation volumes finis centrée aux éléments, on cherche à définir les gradients en faisant intervenir les valeurs des volumes adjacents à un volume de contrôle donné.

Ces deux méthodes sont basées sur des interpolations linéaires et ne sont pas adaptées au cas des milieux hétérogènes. De plus elles ont un très grand coût de calcul pour des simulations tridimensionnelles [75, 18]. Pour ces raisons, dans le cadre d'une formulation centrée aux éléments, il est plus naturel d'approximer le gradient pour un volume V_i en utilisant directement les valeurs aux centres des volumes de contrôle voisins [19].

L'évaluation de ces gradients est simple et inspirée du calcul des flux. On écrit sur chaque cellule V_i :

$$\int_{V_i} \nabla \mathbf{U} dv = \sum_{k=1}^{m_i} \int_{S_k} \mathbf{U}^* n_k ds \quad (.3.58)$$

où m_i est le nombre de faces S_k entourant la cellule V_i . En pratiquant les mêmes approximations que celles effectuées au paragraphe (3.3.3) pour les intégrales surfacique et volumique, on obtient :

$$|V_i| \nabla \mathbf{U}_i = \sum_{k=1}^{m_i} |S_k| \mathbf{U}_k^* \mathbf{n}_k \quad (.3.59)$$

avec $|V_i|$ le volume de V_i , $|S_k|$ la surface de S_k , et \mathbf{n}_k la normale extérieure à la surface S_k . Pour la valeur de \mathbf{U}_k^* , on choisira la valeur de \mathbf{U}_i dans les cas où la surface S_k coïncide avec une surface limite ou de discontinuité (par exemple, à la limite du domaine de calcul ou sur une face parfaitement conductrice). Dans tous les autres cas, où S_k est la face commune aux volumes V_i et V_{i+1} , on prendra une valeur moyenne construite avec les valeurs centrées \mathbf{U}_i et \mathbf{U}_{i+1} des cellules V_i et V_{i+1} pondérées par les distances entre les centres des cellules et le centre de la face S_k :

$$\mathbf{U}_k^* = \frac{\overrightarrow{x_{i+1}\hat{s}} \cdot \mathbf{U}_i + \overrightarrow{x_i\hat{s}} \cdot \mathbf{U}_{i+1}}{\overrightarrow{x_{i+1}\hat{s}} + \overrightarrow{x_i\hat{s}}}$$

où $\overrightarrow{x_i\hat{s}}$ et $\overrightarrow{x_{i+1}\hat{s}}$ représentent respectivement les distances entre le centre de la face S_k et les centres des cellules V_i et V_{i+1} .

3.3.7 Formalisme général d'une approche volumes finis

Dans ce qui précède, nous avons formalisé une approche volumes finis pour résoudre le système de Maxwell en utilisant la forme conservative et la propagation des ondes suivant les courbes caractéristiques. On obtient alors un schéma avec des termes de saut dont la pondération est complètement fixée en fonction des conditions limites entre les frontières des éléments. Il existe cependant une formulation plus générale qui permet plus de souplesse sur la pondération des termes de saut, et en particulier des sauts dissipatifs. Cette possibilité offre des propriétés intéressantes

en termes de dispersion et dissipation du schéma numérique. Dans ce paragraphe, nous présentons cette formulation.

Soit un domaine Ω de \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega$. On note \mathbf{n} la normale unitaire extérieure à Ω . Soit \mathcal{T}_h un ensemble de cellules tétraédriques, qui constitue une partition de Ω tel que :

$$\begin{aligned}\Omega &= \cup_{i=1}^{N_e} K_i \\ \dot{K}_i \cap \dot{K}_j &= \emptyset, \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq N_e\end{aligned}\tag{.3.60}$$

Nous notons \mathcal{F}_h l'ensemble des faces de \mathcal{T}_h . Cet ensemble est composé de deux sous-ensembles disjoints :

- l'ensemble des faces internes \mathcal{F}_h^i défini par :

$$\text{soit } \Gamma \in \mathcal{F}_h^i \text{ alors } \exists 1 \leq i \neq j \leq N_e \text{ tels que } \Gamma = K_i \cap K_j \tag{.3.61}$$

- l'ensemble des faces externes \mathcal{F}_h^b défini par :

$$\text{soit } \Gamma \in \mathcal{F}_h^b \text{ alors } \exists 1 \leq i \leq N_e \text{ tels que } \Gamma = K_i \cap \partial\Omega \tag{.3.62}$$

Pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$, on note \mathbf{n}_K la normale unitaire extérieure à K .

On définit les équations de Maxwell avec le terme source \mathbf{J} par :

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \tag{.3.63a}$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \tag{.3.63b}$$

$$\mathbf{E}(t=0, \mathbf{x}) = 0 \text{ et } \mathbf{H}(t=0, \mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \tag{.3.63c}$$

Pour poser correctement le problème, nous devons poser des conditions au bord du domaine de calcul. Dans le cas de cavités parfaitement métalliques, on impose une condition aux bords définie par : $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$. Dans le cas d'un domaine non borné, cette condition est aussi appliquée après les PML.

On peut re-écrire le problème défini sur tout le domaine en chaque cellule K par :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \\ \llbracket \mathbf{E} \times \mathbf{n} \rrbracket|_{\partial K} = 0, \llbracket \mathbf{H} \times \mathbf{n} \rrbracket|_{\partial K} = 0 \\ \llbracket \mathbf{n} \times \mathbf{E} \times \mathbf{n} \rrbracket|_{\partial K} = 0, \llbracket \mathbf{n} \times \mathbf{H} \times \mathbf{n} \rrbracket|_{\partial K} = 0 \end{cases} \tag{.3.64}$$

où on a ajouté les conditions de continuité des composantes de champs tangentes sur la frontière ∂K de l'élément K définies par les termes de sauts $\llbracket \cdot \rrbracket$.

Pour obtenir le formalisme général, on reformule le système avec conditions de frontière écrit sur chaque cellule, par un système sans conditions limites. Pour cela, on introduit ces conditions sous forme de termes pénalisants dans les équations de Maxwell. On obtient alors :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} + \beta \llbracket \mathbf{H} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial K}^K \delta_{\partial K} + \alpha \llbracket \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \rrbracket_{\partial K}^K \delta_{\partial K}, \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} + \gamma \llbracket \mathbf{E} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial K}^K \delta_{\partial K} + \delta \llbracket \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \rrbracket_{\partial K}^K \delta_{\partial K}, \end{cases} \tag{.3.65}$$

où le terme $\delta_{\partial K}$, symbole de Kronecker, est égal à 1 sur ∂K et 0 ailleurs. Il désigne le fait que les termes de saut sont ajoutés uniquement sur la frontière des éléments. Il faut maintenant s'assurer que les deux formulations avec et sans sauts sont équivalentes. Pour cela, nous allons déterminer les conditions que doivent vérifier $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Après une multiplication par des fonctions test régulières ϕ_1, ϕ_2 et en intégrant sur un élément K de \mathcal{T}_h , le problème (3.65) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_K \varepsilon \mathbf{E}_K \cdot \phi_{1K} dx - \int_K \nabla \times \mathbf{H}_K \cdot \phi_{1K} dx + \int_K \mathbf{J} \cdot \phi_{1K} dx = \\ \int_{\partial K} \alpha \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K) \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \phi_{1K} d\sigma + \int_{\partial K} \beta \llbracket \mathbf{H} \times \mathbf{n}_K \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \phi_{1K} d\sigma \\ \frac{d}{dt} \int_K \mu \mathbf{H}_K \cdot \phi_{2K} dx + \int_K \nabla \times \mathbf{E}_K \cdot \phi_{2K} dx = \\ \int_{\partial K} \gamma \llbracket \mathbf{E} \times \mathbf{n}_K \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \phi_{2K} d\sigma + \int_{\partial K} \delta \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K) \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \phi_{2K} d\sigma \end{array} \right. \quad (.3.66)$$

où $\mathbf{E}_K = \mathbf{E}|_K$, $\mathbf{H}_K = \mathbf{H}|_K$, $\phi_{jK} = \phi_{j|K}$, $d\sigma$ est l'abscisse curviligne associée à ∂K et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre réels pouvant être différents d'une face à une autre.

Proposition 2 Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vérifient les propriétés suivantes :

- $\forall \Gamma \in \mathcal{F}_h^i, \beta, \gamma \neq 0$.
- $\forall \Gamma \in \mathcal{F}_h^b, \beta = \delta = 0$ et $\gamma \neq 0$ où $\alpha \neq 0$.

alors nous avons équivalence entre les problèmes (3.66) et (5.22).

▷ PREUVE :

Soit (\mathbf{E}, \mathbf{H}) la solution de (5.22). Comme les champs électrique et magnétique appartiennent à l'espace $H(\text{rot}, \Omega)$ (voir 1.26), alors $\forall \Gamma \in \mathcal{F}_h^i$ tel que $\Gamma = K \cap K'$, on a :

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{H} \times \mathbf{n}_K \rrbracket_{\partial K}^K &= \mathbf{0} \\ \llbracket \mathbf{E} \times \mathbf{n}_K \rrbracket_{\partial K}^K &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (.3.67)$$

Maintenant, si on introduit cette solution dans (3.66), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_K \varepsilon \mathbf{E}_K \cdot \phi_{1K} dx - \int_K \nabla \times \mathbf{H}_K \cdot \phi_{1K} dx + \int_K \mathbf{J} \cdot \phi_{1K} dx \\ = - \sum_{\Gamma \subset \partial K \in \mathcal{F}_h^b} \int_{\Gamma} \beta (\mathbf{H}_K \times \mathbf{n}_{\Gamma}) \cdot \phi_{1K} d\sigma \\ \frac{d}{dt} \int_K \mu \mathbf{H}_K \cdot \phi_{2K} dx + \int_K \nabla \times \mathbf{E}_K \cdot \phi_{2K} dx = - \sum_{\Gamma \subset \partial K \in \mathcal{F}_h^b} \int_{\Gamma} \delta (\mathbf{n}_{\Gamma} \times (\mathbf{H}_K \times \mathbf{n}_{\Gamma})) \cdot \phi_{2K} d\sigma \end{array} \right. \quad (.3.68)$$

où $\mathbf{n}_{\Gamma} = \mathbf{n}_{K|\Gamma}$.

En multipliant (5.22a) par ϕ_2 et (5.22b) par ϕ_1 et en intégrant sur un élément K de \mathcal{T}_h , il est

facile de voir que l'on doit avoir la condition $\beta, \delta = 0, \forall \Gamma \in \mathcal{T}_h^b$ pour que (\mathbf{E}, \mathbf{H}) vérifient (.3.66).

Nous allons maintenant démontrer l'implication contraire c'est-à-dire donner les conditions sur les coefficients pour qu'une solution de (.3.66) soit solution du problème d'évolution (.5.22).

Soit $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h)$ une solution du problème (.3.66). Nous voulons retrouver la continuité tangentielle pour les faces internes et la condition de type métal parfait sur le bord de Ω .

Pour cela, prenons $\phi_1, \phi_2 \in [\mathcal{D}(K)]^3 = [C_c^\infty(K)]^3$ pour un élément K de \mathcal{T}_h . (.3.66) se réécrit donc sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle \varepsilon \mathbf{E}_K, \phi_{1K} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \langle \nabla \times \mathbf{H}_K, \phi_{1K} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \langle \mathbf{J}, \phi_{1K} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \langle \mu \mathbf{H}_K, \phi_{2K} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \langle \nabla \times \mathbf{E}_K, \phi_{2K} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0 \end{cases} \quad (.3.69)$$

La régularité de $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h)$ donne alors :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{J} = \mathbf{0} \text{ presque partout dans } K \\ \mu \partial_t \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ presque partout dans } K \end{cases} \quad (.3.70)$$

Soit $\phi_1, \phi_2 \in [\mathcal{D}(\overbrace{K \cup K'}^{\Gamma})]^3$ où $K, K' \in \mathcal{T}_h$ et $\Gamma = K \cap K'$.

La propriété (.3.70) étant vraie pour tous les éléments de \mathcal{T}_h , les équations (.3.66) prises pour K et K' donnent :

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} \alpha [\mathbf{n}_K \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K)]_{\Gamma}^K \cdot \phi_{1K} d\sigma + \int_{\Gamma} \beta [\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K]_{\Gamma}^K \cdot \phi_{1K} d\sigma = 0 \\ - \int_{\Gamma} \alpha [\mathbf{n}_K \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K)]_{\Gamma}^K \cdot \phi_{2K} d\sigma + \int_{\Gamma} \beta [\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K]_{\Gamma}^K \cdot \phi_{2K} d\sigma = 0 \\ \int_{\Gamma} \gamma [\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K]_{\Gamma}^K \cdot \phi_{1K} d\sigma + \int_{\Gamma} \delta [\mathbf{n}_K \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K)]_{\Gamma}^K \cdot \phi_{1K} d\sigma = 0 \\ \int_{\Gamma} \gamma [\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K]_{\Gamma}^K \cdot \phi_{2K} d\sigma - \int_{\Gamma} \delta [\mathbf{n}_K \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K)]_{\Gamma}^K \cdot \phi_{2K} d\sigma = 0 \end{cases} \quad (.3.71)$$

Ces quatre équations sont donc vraies pour toutes fonctions $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Gamma)$. On peut les écrire au sens des distributions. La régularité $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ des traces de \mathbf{E}, \mathbf{H} sur Γ ($\mathbf{E}_{K|\Gamma}, \mathbf{E}_{K'|\Gamma} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ car $s \geq 1$ et on a la même chose pour \mathbf{H}) nous permet d'écrire ces quatre égalités au sens presque partout sur Γ :

$$\alpha [\mathbf{n}_K \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K)]_{\Gamma}^K + \beta [\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K]_{\Gamma}^K = \mathbf{0} \text{ presque partout sur } \Gamma \quad (.3.72a)$$

$$-\alpha [\mathbf{n}_K \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K)]_{\Gamma}^K + \beta [\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K]_{\Gamma}^K = \mathbf{0} \text{ presque partout sur } \Gamma \quad (.3.72b)$$

$$\gamma [\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K]_{\Gamma}^K + \delta [\mathbf{n}_K \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K)]_{\Gamma}^K = \mathbf{0} \text{ presque partout sur } \Gamma \quad (.3.72c)$$

$$\gamma [\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K]_{\Gamma}^K - \delta [\mathbf{n}_K \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K)]_{\Gamma}^K = \mathbf{0} \text{ presque partout sur } \Gamma \quad (.3.72d)$$

On veut maintenant retrouver la continuité tangentielle de \mathbf{E} et \mathbf{H} à partir des quatre équations (.3.72). On a alors plusieurs possibilités. Par exemple :

- si on additionne (.3.72a) avec (.3.72b) et (.3.72c) avec (.3.72d), on obtient :

$$\beta [\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K]_{\Gamma}^K = \mathbf{0} \quad (.3.73)$$

$$\gamma [\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K]_{\Gamma}^K = \mathbf{0}$$

Il faut donc prendre $\beta, \gamma \neq 0$ pour assurer la continuité.

- si on soustrait (.3.72a) avec (.3.72b) et (.3.72c) avec (.3.72d), on obtient :

$$\begin{aligned}\alpha \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K) \rrbracket_{\Gamma}^K &= \mathbf{0} \\ \delta \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K) \rrbracket_{\Gamma}^K &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{.3.74}$$

Il faut donc prendre $\alpha, \delta \neq 0$ pour assurer la continuité.

Pour des raisons qui seront confirmées lors du calcul de l'énergie du système, nous choisissons la première possibilité c'est-à-dire $\beta, \gamma \neq 0$ pour toutes les faces de \mathcal{F}_h^i . On retrouve donc bien le caractère H -rot de \mathbf{E}, \mathbf{H} dans Ω .

Il nous reste maintenant à trouver les coefficients qui assurent la condition de type métal parfait sur $\partial\Omega$. Pour cela prenons $\Gamma \in \mathcal{F}_h^b$ telle que $\Gamma = \partial K \cap \partial\Omega$ avec $K \in \mathcal{T}_h$. Supposons que $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2 \in \mathcal{D}(\dot{K} \cup \dot{\Gamma})$, il vient alors :

$$\begin{cases} -\alpha \int_{\Gamma} (\mathbf{n}_K \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K)) \cdot \boldsymbol{\phi}_{1K} d\sigma - \beta \int_{\Gamma} (\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K) \cdot \boldsymbol{\phi}_{1K} d\sigma = 0 \\ -\gamma \int_{\Gamma} (\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K) \cdot \boldsymbol{\phi}_{2K} d\sigma - \delta \int_{\Gamma} (\mathbf{n}_K \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K)) \cdot \boldsymbol{\phi}_{2K} d\sigma = 0 \end{cases}\tag{.3.75}$$

Pour les mêmes raisons que celles utilisées précédemment, on peut écrire (.3.75) au sens presque partout sur Γ c'est-à-dire :

$$-\alpha(\mathbf{n}_K \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K)) - \beta(\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K) = \mathbf{0}\tag{.3.76a}$$

$$-\gamma(\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K) - \delta(\mathbf{n}_K \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K)) = \mathbf{0}\tag{.3.76b}$$

Ceci nous donne $\beta, \delta = 0$ et $\gamma \neq 0 \forall \Gamma \in \mathcal{F}_h^b$ pour obtenir la condition limite voulue.

◁

Remarque 23 *On procède de la même façon pour trouver les coefficients nécessaires pour imposer une condition de Silver-Müller.*

Nous allons maintenant nous intéresser à l'énergie \mathcal{E} du système (.3.66). Pour cela, nous allons oublier le caractère H -rot de la solution de ce système afin d'obtenir un résultat transposable à l'approximation semi-discrète en espace. En effet, les sauts sont en général non nuls lorsque ce problème est approximé. Le but est de trouver les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour assurer la stabilité du problème au sens de la continuité de la solution par rapport aux données.

Définition 6 *Dans le domaine de modélisation mathématique on définit classiquement ([89, 90]) l'énergie du système Maxwell (.3.66) à l'instant $t \in (0, T)$ par :*

$$\mathcal{E}(t) = \|\mathbf{E}\|_{h,\varepsilon}^2 + \|\mathbf{H}\|_{h,\mu}^2\tag{.3.77}$$

où

$$\begin{cases} \|\mathbf{E}\|_{h,\varepsilon}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \varepsilon \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{E}_K dx \\ \|\mathbf{H}\|_{h,\mu}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mu \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{H}_K dx \end{cases}\tag{.3.78}$$

Nous avons le résultat de stabilité suivant :

Théorème 10 *Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vérifient les propriétés suivantes :*

- $\forall \Gamma \in \mathcal{F}_h^i, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{2}$ i.e. $(\beta - \gamma + 1 = 0, \beta + \gamma = 0)$ et $\alpha, \delta \geq 0$.
- $\forall \Gamma \in \mathcal{F}_h^b, \beta = \delta = 0, \gamma = 1$ i.e. $(\beta - \gamma + 1 = 0)$ et $\alpha \geq 0$.

alors nous avons l'estimation de stabilité :

$$\mathcal{E}(t) \leq (\mathcal{E}(0) + \int_0^t \|\mathbf{J}\|_{h,\varepsilon^{-1}}^2 ds) e^t \quad (.3.79)$$

▷ PREUVE :

Prenons $\phi_1 = \mathbf{E}$ et $\phi_2 = \mathbf{H}$ dans (.3.66), on obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_K \varepsilon \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{E}_K dx - \int_K \nabla \times \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{E}_K dx + \int_K \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_K dx = \\ \int_{\partial K} \alpha \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K) \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{E}_K d\sigma + \int_{\partial K} \beta \llbracket \mathbf{H} \times \mathbf{n}_K \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{E}_K d\sigma \\ \frac{d}{dt} \int_K \mu \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{H}_K dx + \int_K \nabla \times \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{H}_K dx = \\ \int_{\partial K} \gamma \llbracket \mathbf{E} \times \mathbf{n}_K \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{H}_K d\sigma + \int_{\partial K} \delta \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K) \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{H}_K d\sigma \end{array} \right. \quad (.3.80)$$

La formule de Green donne :

$$\begin{aligned} \int_K \nabla \times \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{E}_K dx &= \int_K \mathbf{H}_K \cdot \nabla \times \mathbf{E}_K dx + \int_{\partial K} \mathbf{H}_K \cdot (\mathbf{E}_K \times \mathbf{n}_K) d\sigma \\ &= \int_K \mathbf{H}_K \cdot \nabla \times \mathbf{E}_K dx - \int_{\partial K} (\mathbf{H}_K \times \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{E}_K d\sigma \end{aligned} \quad (.3.81)$$

En utilisant (.3.82) et en additionnant les équations de (.3.80), on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left[\int_K \varepsilon \mathbf{E}_K \cdot \mathbf{E}_K dx + \int_K \mu \mathbf{H}_K \cdot \mathbf{H}_K dx \right] \\ &= - \int_K \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_K dx - \int_{\partial K} (\mathbf{H}_K \times \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{E}_K d\sigma + \\ &\int_{\partial K} \alpha \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K) \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{E}_K d\sigma + \int_{\partial K} \beta \llbracket \mathbf{H} \times \mathbf{n}_K \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{E}_K d\sigma + \\ &\int_{\partial K} \gamma \llbracket \mathbf{E} \times \mathbf{n}_K \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{H}_K d\sigma + \int_{\partial K} \delta \llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K) \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \mathbf{H}_K d\sigma \end{aligned} \quad (.3.82)$$

Additionnons maintenant sur tous les éléments de \mathcal{T}_h et réarrangeons les termes de surface :

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) = -(\mathbf{J}, \mathbf{E})_h \\ &+ \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^i: \Gamma=K \cap K'} \left[-\alpha \|\llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}_K) \rrbracket_{\partial K}^K\|_{\Gamma}^2 - \delta \|\llbracket \mathbf{n}_K \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}_K) \rrbracket_{\partial K}^K\|_{\Gamma}^2 \right. \\ &\int_{\Gamma} ((\beta + \gamma)(\mathbf{H}_{K'} \times \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{E}_K + (\beta + \gamma)(\mathbf{E}_{K'} \times \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{H}_K + (\beta - \gamma + 1)(\mathbf{E}_K \times \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{E}_K \\ &\left. + (\beta - \gamma + 1)(\mathbf{H}_{K'} \times \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{E}_{K'} d\sigma \right] + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^b: \Gamma=K \cap \partial \Omega} \left[-\alpha \|\mathbf{n}_K \times (\mathbf{E}_K \times \mathbf{n}_K)\|_{\Gamma}^2 \right. \\ &\left. - \delta \|\mathbf{n}_K \times (\mathbf{H}_K \times \mathbf{n}_K)\|_{\Gamma}^2 + \int_{\Gamma} ((\beta - \gamma + 1)(\mathbf{E}_K \times \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{H}_K) d\sigma \right] \end{aligned} \quad (.3.83)$$

où $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx$.

Utilisons Cauchy-Schwartz sur le terme en \mathbf{J} :

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}, \mathbf{E})_h &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}_K dx \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}\|_K \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}_K\|_K \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}_s\|_K^2 + \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}_K\|_K^2) = \frac{1}{2} (\|\mathbf{J}\|_{h,\varepsilon^{-1}}^2 + \|\mathbf{E}\|_{h,\varepsilon}^2) \end{aligned} \quad (.3.84)$$

De plus, pour pouvoir contrôler (.3.83), il faut imposer :

- $\forall \Gamma \in \mathcal{F}_h^i, \alpha, \delta \geq 0, \beta - \gamma + 1 = 0, \beta + \gamma = 0$ en particulier $\beta = -\frac{1}{2}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$.
- $\forall \Gamma \in \mathcal{F}_h^b, \alpha, \delta \geq 0$ et $\beta - \gamma + 1 = 0$ en particulier $\gamma = 1$ (car il ne faut pas oublier que $\beta = 0$ de (2)).

On utilise (.3.84) et le choix que l'on vient de faire pour les coefficients pour réécrire (.3.83) :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) &\leq \frac{1}{2} (\|\mathbf{J}\|_{h,\varepsilon^{-1}}^2 + \|\mathbf{E}\|_{h,\varepsilon}^2) \\ &\leq \|\mathbf{J}\|_{h,\varepsilon^{-1}}^2 + \|\mathbf{E}\|_{h,\varepsilon}^2 + \|\mathbf{H}\|_{h,\mu}^2 \end{aligned} \quad (.3.85)$$

Intégrons maintenant (.3.85) entre 0 et t :

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) + \int_0^t \|\mathbf{J}\|_{h,\varepsilon^{-1}}^2 ds + \int_0^t \mathcal{E}(t) dt \quad (.3.86)$$

Le lemme de Grönwall donne immédiatement :

$$\mathcal{E}(t) \leq (\mathcal{E}(0) + \int_0^t \|\mathbf{J}\|_{h,\varepsilon^{-1}}^2 ds) e^t \quad (.3.87)$$

◁

A partir du formalisme général mis en place dans ce paragraphe, le schéma volumes finis consiste à prendre des fonctions de base constantes par élément (fonction indicatrice de l'élément) et à projeter le système (5.22) sur ces fonctions de base. Dans le formalisme obtenu, on peut alors avoir un schéma non dissipatif où $\alpha = \delta = 0$ et $\gamma = \beta = 1/2$ comme celui étudié par S. Piperno [62], ou bien le schéma décentré présenté dans le paragraphe précédent. L'avantage de l'écriture générale du schéma volumes finis, permet de choisir la proportion de dissipation que l'on souhaite injecter dans celui-ci. De plus, en prenant des fonctions de base non constantes, on peut aussi obtenir des formulations de type Galerkin discontinues qui présentent d'autres avantages par rapport aux schémas volumes finis.

3.3.8 Approximation numérique des équations du plasma

Les méthodes de volumes finis (FVTD) ont été mises au point initialement pour des lois de conservation, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques [91, 92, 93]. Après l'approximation des équations de Maxwell, on s'intéresse maintenant à l'équation non linéaire de densité du plasma pour laquelle on cherche à appliquer la méthode des volumes finis.

3.3.8.1 Formulation variationnelle

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine de calcul. Soit \mathcal{T} une partition de Ω telle que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n_{vf}} V_i$, où n_{vf} est le nombre de volumes de contrôle V_i . On note S_i la surface frontière de V_i et m_i le nombre de cellules voisines de V_i tel que :

$$\partial V_i = S_i = \bigcup_{k=1}^{m_i} S_i^k$$

On rappelle l'équation de densité plasma et les conditions limites et initiales associées à celle-ci :

$$\begin{cases} \frac{\partial n_e}{\partial t} - \text{div}(D_{eff} \nabla n_e) = (v_{eff} - r_e n_e) n_e \\ n_e(t, x, y, z) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall (x, y, z) \in \partial\Omega \\ n_e(t = 0, x, y) = n_{e0}(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (.3.88)$$

où D_{eff} est le coefficient de diffusion effectif dépendant des variables d'espace et v_{eff} la fréquence effective d'ionisation.

En intégrant l'équation (.3.88) sur chaque volume de contrôle V_i , on obtient :

$$\int_{V_i} \frac{\partial n_e}{\partial t} dV - \int_{V_i} \text{div}(D_{eff} \nabla n_e) dV = \int_{V_i} (v_{eff,i} - r_e n_e) n_e dV \quad (.3.89)$$

En appliquant le théorème de divergence on obtient la formulation faible de l'équation (.3.88). L'intégration sur le volume V_i de (.3.22) donne :

$$\int_{V_i} \frac{\partial n_e}{\partial t} dV - \int_{S_i} (D_{eff} \nabla n_e) \cdot \mathbf{n} dV = \int_{V_i} (v_{eff,i} - r_e n_e) n_e dV \quad (.3.90)$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure à la face S_i .

3.3.8.2 Calcul des flux

Soit $(L, R) \in \mathcal{T}$ deux volumes de contrôles adjacents. On note S la face commune à ceux-ci. Les inconnues n_{eL}, n_{eR} sont prises aux centres de gravité de chaque cellule L et R .

On cherche à approximer le flux $D_{eff}^* \nabla n_e \cdot \mathbf{n}$ à travers la face S . En l'absence de terme source sur S , on peut montrer que le flux à travers celle-ci est donné par :

$$D_{eff}^* \nabla n_e \cdot \mathbf{n}_L = -D_{eff}^* \nabla n_e \cdot \mathbf{n}_R \quad (.3.91)$$

où \mathbf{n}_L est la normale extérieure à S , de L vers R et \mathbf{n}_R est la normale extérieure à S , de R vers L . D_{eff}^* est le coefficient de diffusion sur la face S , donné en fonction des valeurs D_{eff}^L et D_{eff}^R associés respectivement aux cellules L et R :

$$D_{eff}^* = \frac{D_{eff}^L + D_{eff}^R}{2} \quad (.3.92)$$

Une première approximation naturelle de ce flux est donnée par :

$$\nabla n_e \cdot \mathbf{n}_L = \frac{n_{eR} - n_{eL}}{d_{LR}} \quad (.3.93)$$

où d_{LR} est la distance entre les deux centres de gravité des volumes L et R . Ce choix simple et intuitif constitue une très bonne approximation pour les maillages structurés. Cependant, il est loin d'être optimal pour les maillages non structurés car il conduit à des flux non consistants [91, 94, 95]. Dans le but de résoudre ce problème, on trouve dans la littérature la notion de maillage admissible [93, 96, 91].

Définition 7 Soit \mathcal{T}_h une triangulation du domaine de calcul Ω et \mathcal{E} l'ensemble des arêtes e du maillage. On dit que \mathcal{T}_h est un maillage admissible si et seulement si :

- l'union de tout les volumes de contrôle constitue un recouvrement de Ω .
- Pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, il existe un sous-ensemble \mathcal{E}_K de \mathcal{E} , tel que :
 $\partial K = \bigcup_{e \in \mathcal{E}_K} e$ et $\mathcal{E} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_K$
- pour tout couple $(K, L) \in \mathcal{T}_h^2$ avec $K \neq L$, où $K \cap L = \{S_{K,L}, \emptyset\}$; $S_{K,L}$ définissant la face commune entre K et L .
- la famille de point $\mathcal{P} = (x_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ est telle que $x_K \in K$ et si $e = S_{K,L}$ alors $x_K \neq x_L$ et $\overrightarrow{x_L x_R}$ est orthogonale à $S_{K,L}$.
- pour les cellules K aux bords i.e il existe $e \in \mathcal{E}_K \cap \partial\Omega$, si $x_K \notin e$ alors l'intersection de la ligne passant par x_K et orthogonale à e n'est pas vide.

Remarque 24 Un exemple d'un maillage admissible en 2D est le maillage triangulaire basé sur des triangles dont tous les angles sont inférieurs à $\pi/2$. $(x_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ est le centre du cercle circonscrit (intersection des trois médianes de K).

Dans tout ce qui suit, nous allons prendre les $(x_K)_{K \in \mathcal{T}}$ comme les centres de gravité des volumes de contrôle K . On note n_e^* la valeur de n_e sur la face S de deux volumes adjacents R et L . On cherche à déterminer n_e^* telle que le flux à travers S soit conservatif. En utilisant la formule de Taylor on a :

$$\begin{cases} n_e^* = n_{eL} + \nabla n_e \cdot \overrightarrow{y_L x_L} \\ n_e^* = n_{eR} + \nabla n_e \cdot \overrightarrow{y_R x_R} \end{cases} \quad (.3.94)$$

où y_L, y_R sont respectivement les projections des centres de gravité x_L et x_R sur S tel que :

$$\overrightarrow{y_L x_L} = d_L \mathbf{n}_L = d_L \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{y_R x_R} = d_R \mathbf{n}_R$$

De l'équation .3.96 on a :

$$\begin{cases} \nabla n_e \cdot \mathbf{n}_L = \frac{n_e^* - n_{eL}}{d_L} \\ \nabla n_e \cdot \mathbf{n}_R = \frac{n_e^* - n_{eR}}{d_R} \end{cases} \quad (.3.95)$$

En utilisant la conservation de l'équation (.3.91) du flux on a :

$$\frac{n_e^* - n_{eL}}{d_L} = - \frac{n_e^* - n_{eR}}{d_R}$$

ce qui donne après un simple calcul :

$$n_e^* = \frac{d_R n_{eL} + d_L n_{eR}}{d_R + d_L} \quad (.3.96)$$

Maintenant que la valeur sur la face S est déterminée, on peut calculer le flux de densité en introduisant (.3.96) dans (.3.95) :

$$\nabla n_e \cdot \mathbf{n} = \frac{(d_R - 1)n_{eL} + d_L n_{eR}}{d_L(d_R + d_L)} \quad (.3.97)$$

D'autre part, dans l'équation (.3.90), le flux à travers S est donné par la forme intégrale suivante :

$$F_{e,S} = \int_S (D_{eff} \nabla n_e) \cdot \mathbf{n} dV \approx |S| D_{eff}^* \frac{(d_R - 1)n_{eL} + d_L n_{eR}}{d_L(d_R + d_L)} \quad (.3.98)$$

Par analogie on approche le flux à travers $S_\sigma \in (L \cap \partial\Omega)$:

$$F_{e,S_\sigma} \approx |S_\sigma| D_{eff}^L \frac{(d_L n_{e\sigma} - n_{eL})}{d_L^2} \quad (.3.99)$$

Où $|S_\sigma|$ est la surface de S_σ et $n_{e\sigma}$ est la valeur de n_e aux bords (dans notre cas $n_{e\sigma} = 0$).

Remarque 25 Dans le cas où le vecteur reliant les deux centres de gravités x_L et x_R forme un petit angle θ avec la normale \mathbf{n} , alors on prend $\mathbf{n} = \cos(\theta) \overrightarrow{x_L x_R}$. Le flux est alors donné par :

$$F_{e,S} \approx \begin{cases} D_{eff}^* \frac{|S|(n_{eR} - n_{eL})}{\|x_L x_R\|^2} (\overrightarrow{x_L x_R}, \mathbf{n}_L) & S \notin \partial\Omega \\ D_{eff(i)} \frac{|S_\sigma|(n_{e\sigma} - n_{eL})}{\|x_L x_\sigma\|^2} (\overrightarrow{x_L x_\sigma}, \mathbf{n}_L) & S \in \partial\Omega_1 \end{cases}$$

Enfin concernant l'équation de vitesse des électrons :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mu_m \mathbf{v} = \frac{q}{m_e} \mathbf{E}$$

les inconnues sont prises au centre de la cellule. Il en est de même pour les champs électromagnétiques et la densité du plasma.

3.3.8.3 Approximation semi-discrète du modèle plasma

Après une discrétisation spatiale, nous avons pour chaque volume de contrôle un système d'équations différentielles donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial n_{ei}}{\partial t} - \frac{1}{|V_i|} \sum_k^m F_{e,S_{ik}} = (v_{eff,i} - r_e n_{ei}) n_{ei} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \mu_m \mathbf{v}_i = \frac{q}{m_e} \mathbf{E}_i \end{cases} \quad (.3.100)$$

où

- n_{ei} est la valeur de n_e au centre de V_i .
- \mathbf{v}_i est la valeur de \mathbf{v} au centre de V_i .
- \mathbf{E}_i est la valeur du champ électrique \mathbf{E} au centre de V_i .
- $F_{e,S_{ik}} = \int_{S_{ik}} D_{eff(i)} \nabla n_{ei} \cdot \mathbf{n}_i ds$ est le flux à travers S_{ik} approché par les formules (.3.98) et (.3.99).
- $D_{eff(i)} = (D_{eff(i)} + D_{eff(k)})/2$ est le coefficient d'ionisation effectif sur la face S_{ik} .

3.3.9 Discrétisation du problème couplé

Après avoir discrétisé spatialement le problème découplé (équations de Maxwell et équations de plasma), on s'intéresse aux termes qui couplent les deux systèmes.

Le système couplé continu s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot (D_{eff} \nabla n_e) = (v_i - v_a) n_e - r n_e^2 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{q}{m_e} \mathbf{E} - \nu_m \mathbf{v} \\ \mathbf{J} = q n_e \mathbf{v} \end{cases} \quad (.3.101)$$

le système discrétisé s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} = -\frac{1}{|V_i|} \sum_j^{m_i} |S_{ij}| (\Phi(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \mathbf{n}_{ij}) - \mathbf{J}_i) \\ \frac{\partial n_{ei}}{\partial t} = \frac{1}{|V_i|} \sum_j^{m_i} F_{e,S_{ij}} + (v_{eff,i} - r_e n_{ei}) n_{ei} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = \frac{q}{m_e} \mathbf{E}_i - \nu_m \mathbf{v}_i \end{cases} \quad (.3.102)$$

où $\mathbf{U} = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ et $\mathbf{J} = (\frac{q n_e \mathbf{v}}{\varepsilon}, 0, 0, 0)$.

Dans ce système les couplages sont au niveau des densités de courant \mathbf{J} en ce qui concerne le couplage plasma sur le champ électromagnétique et dans le terme source de l'équation en \mathbf{v} et les coefficients D_e et v_i en ce qui concerne le couplage du champ sur le plasma.

Dans la discrétisation temporelle du système (.3.102), nous avons pris en considération la différence d'échelle entre l'évolution en temps de la densité n_e et celle du champ électromagnétique. Ceci est possible car l'évolution temporelle de la densité du plasma est très lente par rapport à celle du champ électromagnétique. Pour cela, nous avons associé, comme dans le cas différences finies, deux pas de temps dt_{n_e} pour la densité et dt_M pour le champ électromagnétique. On a choisi deux pas de temps proportionnels tel que $dt_{n_e} = m dt_M$. Concernant la vitesse, le pas de temps pris en compte dans la discrétisation est le même que celui du champ électromagnétique.

Dans le processus de calcul, la densité du plasma est supposée constante entre les deux étapes $t^n = n dt_M$ et $t^N = Nm dt_M = \frac{Nm}{n} t^n$, et égale à la valeur évaluée à $t^{(N-1)}$, pour calculer les champs électromagnétiques.

Pour la discrétisation temporelle du système (.3.102), nous choisissons de prendre un schéma explicite d'Euler, un schéma prédicteur-correcteur et un schéma d'Euler implicite pour la discrétisation en temps, respectivement, de l'équation de densité de plasma, des équations de Maxwell et de l'équation des vitesses.

Enfin, le schéma numérique pour le système (.3.102) est donné par :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{U}_i^n - \frac{dt_M}{2} [\sum_{j=1}^{m_i} \frac{|S_{ij}|}{|V_i|} (\Phi(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \mathbf{n}_{ij}) + \mathbf{J}_i^n)] & \text{Etape prédictrice (P)} \\ \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^{n+\frac{1}{2}} - dt_M [\sum_{j=1}^{m_i} \frac{|S_{ij}|}{|V_i|} (\Phi(\mathbf{U}_i^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{U}_j^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{n}_{ij}) + \mathbf{J}_i^{n+\frac{1}{2}})] & \text{Etape correctrice (C)} \\ \mathbf{v}_i^{n+1} = (\mathbf{v}_i^n - dt_M \frac{e \mathbf{E}_i^{n+1}}{m_e}) / (1 + dt_M \nu_m) \\ n_{ei}^{N+1} = n_{ei}^N [1 + dt_{n_e} (v_{eff,i}^N - r_e n_{ei}^N)] + \frac{dt_{n_e}}{S_i} \sum_j^{m_i} F_{e,ij}^N \end{cases} \quad (.3.103)$$

où le couplage plasma/champ est donné par :

$$\mathbf{J}_i^{n+1/2} = q \frac{n_{ei}^{N-1} + n_{ei}^N}{2} \mathbf{v}_i^{n+1/2} \quad (.3.104)$$

En ce qui concerne la stabilité, nous appliquons les critères établis indépendamment pour les champs et la densité plasma à partir des approximations numériques présentées dans les deux paragraphes précédents.

Après calcul, de la condition de stabilité sur chaque équation du système (.3.102), nous trouvons deux conditions sur les pas de temps :

$$\begin{cases} dt_M \leq \min_i \left(\frac{S_i}{c \sum_{k=1}^3 l_{i,k}} \right) \\ dt_{ne} \leq \min_i \left(\frac{S_i}{\sqrt{D\epsilon} \sum_{k=1}^3 l_{i,k}} \right)^2 \end{cases} \quad (.3.105)$$

3.3.10 Stratégie de pas de temps local pour le calcul des champs électromagnétiques

Comme nous venons de le voir, dans le système global Maxwell/Plasma couplé, nous obtenons deux pas de temps dont le plus contraignant est celui sur le calcul des champs à cause de la taille minimale des mailles utilisées dans la zone plasma. Si nous choisissons de résoudre tout le domaine de calcul en utilisant ce pas minimal pour les champs, le calcul peut devenir extrêmement long et le gain lié à la possibilité de raffinement de maillage local de la méthode FVTD peut alors être perdu. Pour éviter cela, il apparaît opportun de mettre en place une stratégie de pas de temps local pour le calcul des champs.

Pour cela, nous proposons de décomposer le domaine de calcul en différents ensembles de cellules pour lesquelles le champ est évalué au même pas de temps. On définit ainsi n classes de pas de temps comprises entre les pas de temps minimal et maximal pour assurer la stabilité du schéma, respectivement, sur la plus petite et la plus grande maille du domaine de calcul. Dans notre stratégie de pas de temps local, nous imposons certaines contraintes qui consistent à :

- faire évoluer le pas de temps d'une classe à l'autre, d'un facteur 2. On obtient ainsi pour la classe i , un pas de temps associé égal à $2^{(i-1)} dt_{min}$ avec dt_{min} le pas de temps minimal pour assurer la stabilité sur les cellules les plus petites ;
- effectuer l'ordonnancement des classes du plus petit pas de temps au plus grand. Les cellules sont alors affectées à la classe dont le pas de temps est égal ou inférieur à celui de la cellule considérée ;
- limiter l'écart à une classe entre deux cellules adjacentes.

La stratégie que l'on a mise en place, peut s'écrire comme un processus récursif donné par la figure (.3.11). Cette figure concerne un schéma de type prédicteur-correcteur, où les étapes de prédiction et de correction sont notées respectivement p et c . Dans la figure, on a choisi de prendre un exemple à 3 niveaux de classes. On trouve aussi sur la figure, l'ordre des opérations effectuées pour faire un step du schéma. On considère ici que le step correspond à un pas de temps où les champs sur toutes les cellules sont au même temps. Ce pas correspond alors au pas de temps le plus grand. Il faut noter sur la figure, qu'à l'inverse de la méthode, on a noté la classe 1 comme étant celle avec le plus grand pas de temps et la classe 3 comme étant celle avec le plus petit pas de temps. Cela n'est qu'une notation et ne change rien à l'ordre dans lequel sont faites les opérations.

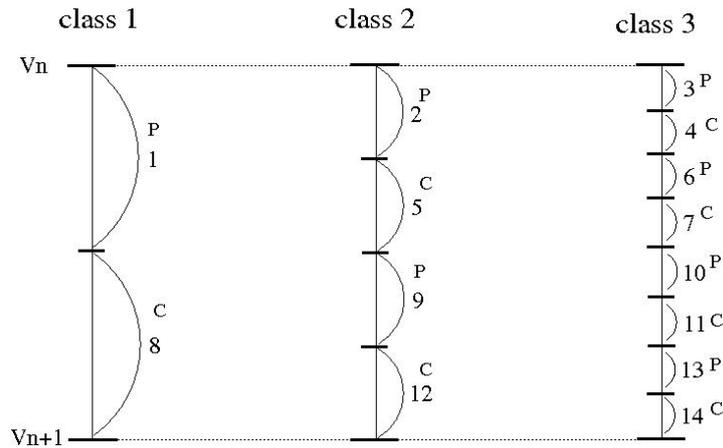


figure .3.11 – Avancée d’une itération temporelle dans la stratégie de pas de temps local. On considère un exemple à 3 classes (**p** : étape prédictrice et **c** : étape correctrice).

Dans l’avancée effectuée en temps les valeurs des champs considérés à chaque sous-pas de temps ne sont pas interpolés pour être ramené parfaitement à la bonne itération. Cela peut donc poser des problèmes de convergence. En fait, les expériences numériques menées jusqu’ici montrent que sur des signaux temporels plutôt C^∞ , la méthode ne présente pas de problèmes de stabilité (il faut cependant baisser un peu la CFL) et converge vers la bonne solution. On a donc utilisé cette méthode en abaissant la CFL du schéma d’un facteur 0.8 pour nos applications sans avoir de problème lié à des instabilités numériques.

3.3.11 Conclusion

Les méthodes de volumes finis (FVTD) ont été mises au point pour des systèmes conservatifs, puis elles ont été généralisées et adaptées pour des équations elliptiques et paraboliques. Ces équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. Les intégrales de volume d’un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface en utilisant le théorème de flux-divergence. Ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes finis. On utilise une fonction de flux numérique pour faire une approximation des flux aux interfaces. Les méthodes de volumes finis sont adaptées aux problèmes non linéaires. La méthode volumes finis (FVTD) peut palier aux inconvénients de la FDTD en combinant les avantages des deux méthodes. La méthode FVTD a comme avantages la possibilité de prendre en compte des maillages conformes à la géométrie (utilisation de maillage non structuré type triangulation en 2D) et d’éviter la dispersion numérique. Elle permet aussi de prendre en compte naturellement sous forme de flux les conditions aux limites et les raffinements locaux. Cependant, le principal défaut des schémas volumes finis est leur dissipation numérique dans les cavités.

3.4 APPROCHE GALERKIN DISCONTINUE POUR LE PROBLÈME MAXWELL/PLASMA

Dans ce paragraphe, nous présentons une formulation Galerkin Discontinue (GD) adaptée aux équations de Maxwell que nous étendrons aux équations Max-

well/Plasma couplées. Pour plus de détails sur cette méthode appliquée au système de Maxwell, on pourra se référer à la thèse de S. Pernet [89].

3.4.1 Formulation mathématique GD des équations de Maxwell

Soit le domaine de calcul Ω , tel que $\Omega = \cup_{i=1,n} K_i$ où K_i définit un élément hexaédrique et l'ensemble de ces N éléments constitue une partition de Ω . En reprenant la formulation générale d'une approche volumes finis ou Galerkin Discontinue, on peut alors écrire sur chaque élément K :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{H} + \beta \llbracket \mathbf{H} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial K}^K \delta_{\partial K} + \alpha \llbracket \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \rrbracket_{\partial K}^K \delta_{\partial K}, \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} + \gamma \llbracket \mathbf{E} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial K}^K \delta_{\partial K} + \delta \llbracket \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \rrbracket_{\partial K}^K \delta_{\partial K}, \end{cases} \quad (.3.106)$$

où $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{\partial K}^K$ définit le saut au travers de la frontière ∂K du volume K . Plus en détails, le saut s'exprime comme : $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{\partial K}^K = \mathbf{u}_K^+ - \mathbf{u}_K$ où \mathbf{u}_K est la trace sur la frontière ∂K de la valeur \mathbf{u} prise dans l'élément K et \mathbf{u}_K^+ la trace sur ∂K de la valeur \mathbf{u} prise dans l'autre volume adjacent à la frontière ∂K . Lorsque $\Gamma = \partial K \cap \partial \Omega \neq \emptyset$ alors $\mathbf{u}_K^+ = 0$. Dans les expressions précédentes, le symbole de Kronecker $\delta_{\partial K}$, égal à 1 sur ∂K et à 0 ailleurs, marque le fait que les termes de saut sont uniquement ajoutés sur les surfaces des éléments.

Dans ce chapitre, on a pu montrer que pour assurer l'équivalence du système (.3.106) avec le système de Maxwell, les coefficients α , β , δ et γ doivent vérifier :

$$\begin{cases} \alpha = \delta = 0 \\ 1 + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \quad (.3.107)$$

En fait, il suffit d'avoir $1 + \beta - \gamma = 0$ et $\alpha, \delta \geq 0$ pour avoir le système (.3.106) bien posé.

3.4.2 Approximation numérique du formalisme GD pour les équations de Maxwell

Dans notre approximation nous considérons les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} suffisamment réguliers pour appartenir à $(H^1(K))^3$. Nous définissons ensuite, l'espace :

$$\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h) = \{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}|_K \in (H^1(K))^3 \}$$

Nous définissons alors la formulation variationnelle de (.3.106) suivante : Chercher $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in (\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h))^2$ tel que

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx &= - \int_{\Omega} \sigma \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \times \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \beta \int_{\partial K} \llbracket \mathbf{H} \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \boldsymbol{\varphi} ds \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\psi} dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(- \int_K \nabla \times \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\psi} dx + \gamma \int_{\partial K} \llbracket \mathbf{E} \times \mathbf{n} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\psi} ds \right) \end{cases} \quad (.3.108)$$

où $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$ et $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$.

Nous introduisons l'espace d'approximation de $\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$ par :

$$U_h = \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3; \forall K \in \mathcal{T}_h, DF_K^* \mathbf{v}|_K \circ \mathbf{F}_K \in [Q_r(\hat{K})]^3\},$$

où $Q_r(\hat{K})$ définit l'ensemble des polynômes de $\hat{K} = [0, 1]^3$ d'ordre inférieur ou égal à r sur chaque variable. Soit $K \in \mathcal{T}_h$, alors \mathbf{F}_K définit un isomorphisme tel que $\mathbf{F}_K(\hat{K}) = K$. DF_K définit la matrice Jacobienne de cet isomorphisme et $J_K = \det(DF_K)$ son Jacobien. Comme on le verra dans la suite, la définition non classique de l'espace d'approximation U_h va permettre par l'utilisation d'une transformation H-rot d'avoir peu de stockage pour les matrices de rigidité et de saut et donc de gagner aussi en temps calcul.

Le problème approximé consiste alors à chercher :

$(\mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h) \in (U_h)^2$ tels que

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_h dx &= - \int_{\Omega} \sigma \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_h dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \times \mathbf{H}_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_h dx \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \alpha \int_{\partial K} \llbracket \mathbf{H}_h \times \mathbf{n} \rrbracket_{\partial K}^K \cdot \boldsymbol{\varphi}_h ds \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{H}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(- \int_K \nabla \times \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h dx + \gamma \int_{\partial K} \llbracket \mathbf{E}_h \times \mathbf{n} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\psi}_h ds \right) \end{cases} \quad (.3.109)$$

3.4.3 Définition des fonctions de base et des degrés de liberté

Pour définir les fonctions de base sur U_h , nous définissons d'abord les fonctions de base sur l'élément de référence \hat{K} (Fig. 3.12). Soit \hat{K} l'élément de référence, les degrés de liberté sont positionnés aux points $\vec{\xi}_{ijk} = (\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j, \hat{\xi}_k)$, $1 \leq i \leq r+1$, $1 \leq j \leq r+1$, $1 \leq k \leq r+1$, de \hat{K} , tels que $\hat{\xi}_\ell$ représente l'abscisse d'un point de quadrature de Gauss sur l'intervalle $[0, 1]$. Par ailleurs, nous introduisons un ensemble de $(r+1)^3$ polynômes de Lagrange $\hat{\varphi}_{ijk} \in Q_r$ tels que $\hat{\varphi}_{ijk}(\vec{\xi}_{\ell, m, n}) = \delta_{i\ell} \delta_{jm} \delta_{kn}$, où $\delta_{ij} = \delta_{x_i}(x_j) = 1$ si $i = j$ sinon 0. Finalement, nous définissons l'ensemble $\hat{\mathcal{B}}$ des fonctions de base vectorielles sur \hat{K} données en un point $\vec{\xi}_{ijk}$ par : $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{ijk}^{(1)} = (\hat{\varphi}_{ijk}, 0, 0)^T$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{ijk}^{(2)} = (0, \hat{\varphi}_{ijk}, 0)^T$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{ijk}^{(3)} = (0, 0, \hat{\varphi}_{ijk})^T$.

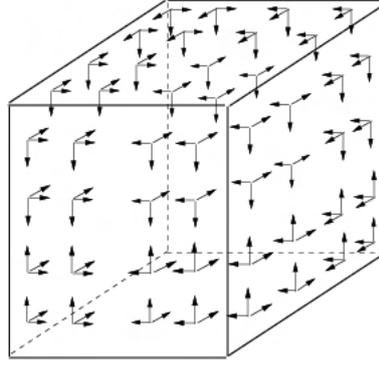


figure 3.12 – Localisation des fonctions de bases sur l'élément de référence pour une approximation Q_3

On déduit ensuite de $\widehat{\mathcal{B}}$ une base de fonctions \mathcal{B} sur l'espace U_h . Pour chaque élément K , nous définissons un ensemble de $3(r+1)^3$ fonctions de base $\varphi_{ijk,K}^{(\ell)}$ telles que $\varphi_{ijk,K}^{(\ell)} = DF_K^{*-1} \widehat{\varphi}_{ijk}^{(\ell)}$, pour $\ell = 1..3$. L'espace \mathcal{B} est alors donné par :

$$\mathcal{B} = \{\varphi_{ijk,K}^{(\ell)}, \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall (ijk) \in \{1..r+1\}^3, \forall \ell \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Dans leur définition, le support de chaque fonction de base est réduit à un élément. De manière évidente, on a $\dim U_h = 3(r+1)^3 N_e$ pour un maillage dont le nombre d'éléments est N_e .

En utilisant cette approximation, nous pouvons montrer que :

- le terme général des matrices de masse se réduit à :

$$\int_K \mathbf{u} \cdot \varphi_{ijk,K}^l dx = \omega_{ijk} \sum_{p=1}^3 \mathbf{u}_{ijk,K}^p (DF_K^{-1} (DF_K^*)^{-1})_{pl} |J_K|$$

où ω_{ijk} est le poids de la formule de quadrature de Gauss au point \hat{x}_{ijk} et le terme générique $(M)_{pl}$ définit la composante (p, l) de la matrice M . Donc en choisissant une numérotation point par point des composantes, nous obtenons une matrice de masse bloc-diagonale 3×3 et diagonale dans le cas de maillages cartésiens.

- le terme général des matrices de rigidité se réduit à :

$$\int_K \nabla \times \mathbf{u}(t, x) \cdot \varphi_{ijk,K}^l(x) dx = \sum_{p=1}^3 \sum_{m,n,q=1,N} \text{sign}(J(\hat{x}_{mnq})) \omega_{mnq} \mathbf{u}_{mnq,K}^l(t) (\widehat{\nabla} \times \widehat{\varphi}_{mnq}^p)^l(\hat{x}_{ijk})$$

On note sur cette expression que pour un élément K donné, il suffit de connaître le signe du jacobien sur celui-ci.

- le terme des matrices de saut est donné par :

$$\int_{\Gamma_{i,K}} [\mathbf{u} \times \mathbf{n}_{i,K}] \cdot \varphi_{ijk,K}^l ds = \text{sign}(J_{K'}) \int_{\widehat{\Gamma}_{i'}} (DF_K^{-1} \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K} DF_{K'}) (\widehat{\mathbf{u}}_{K'} \times \widehat{\mathbf{n}}_{i'}) \cdot \widehat{\varphi}_{ijk}^l \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K} d\widehat{s}' - \text{sign}(J_K) \int_{\widehat{\Gamma}_i} (\widehat{\mathbf{u}} \times \widehat{\mathbf{n}}_i) \cdot \widehat{\varphi}_{ijk}^l d\widehat{s}$$

avec $\mathcal{G}_{K' \rightarrow K}$ représentant la permutation qui fait correspondre la numérotation locale des inconnues sur les élément K et K' au niveau de la face adjacente à ceux-ci. $\widehat{\mathbf{n}}_i$ est la normale sortante de \widehat{K} associée à la face de référence $\widehat{\Gamma}_i$.

3.4.4 Formulation du schéma numérique lié aux équations de Maxwell

Grâce au choix de l'espace d'approximation et des éléments hexaédriques, les intégrales des différents termes concernant les matrices de masse, de rigidité et de saut se résument à peu de calcul et de stockage. On peut écrire de manière matricielle le système de Maxwell approximé en espace sous la forme :

$$\begin{aligned} M_\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + M_\sigma \mathbf{E} &= R \mathbf{H} + S_E \mathbf{E} \\ M_\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -R \mathbf{E} + S_H \mathbf{H} \end{aligned} \quad (.3.110)$$

où les matrices de masses M_ε , M_μ , M_σ sont des matrices bloc-diagonales 3×3 . Concernant les matrices de rigidité R et de saut S_E , S_H , nous obtenons celles-ci à partir du signe du jacobien sur l'élément K considéré et d'un calcul générique sur l'élément de référence. Donc au final, nous obtenons un schéma peu coûteux en mémoire et très rapide en temps puisqu'on évite l'inversion d'une grande matrice de masse.

Pour compléter notre schéma numérique, nous choisissons un schéma leap-frog pour l'approximation temporelle, comme dans le cas du schéma de Yee.

3.4.5 Ajout des équations liées au plasma dans le formalisme GD

Pour ajouter les équations d'évolution du plasma dans l'approche Galerkin Discontinue présentée, nous avons deux inconnues supplémentaires à prendre en compte : l'inconnue n_e pour la densité plasma et l'inconnue \mathbf{v} pour la vitesse du plasma. De plus, nous devons reformaliser l'équation liée à la densité plasma pour tenir compte des conditions de continuité de $D_{eff} \nabla n_e$ entre chaque volume élémentaire. On obtient alors dans le formalisme GD un terme de saut prenant en compte cette condition et l'équation devient :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot (D_{eff} \nabla n_e) + \delta_{\partial K \eta} [\mathbf{n} \cdot (D_{eff} \nabla n_e)] = (v_i - v_a) n_e \quad (.3.111)$$

Pour assurer un terme d'énergie $\int_K \mathbf{n}_e^2 dx$ décroissant, le coefficient η doit être pris égal à 1.

Concernant l'approximation des deux inconnues supplémentaires pour le plasma, nous choisissons la même approximation pour \mathbf{v} que pour les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} , et l'approximation suivante pour n_e :

$$n_e(x) = n_e(F(\hat{x})) = \sum_{ijk}^{r+1} n_{e_{ijk}} \hat{\phi}_{ijk}(\hat{x})$$

où les fonctions $\hat{\phi}$ sont les polynômes de Lagranges définis précédemment.

Le schéma semi-discret pour l'équation en \mathbf{v} donne :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{ijk}^l}{\partial t} = \frac{q_e}{m_e} E_{ijk}^l - v_m \mathbf{v}_{ijk}^l \quad (.3.112)$$

pour l'équation en n_e , nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \omega_{i_0j_0k_0} \frac{\partial n_{e_{i_0j_0k_0}}}{\partial t} |Jac(\hat{x}_{i_0j_0k_0})| = \\
& \sum_{m,n,p}^{r+1} \omega_{mnp} (\sum_{i,j,k}^{r+1} D_{eff}(\hat{x}_{mnp}) n_{e_{ijk}} DF^{*-1}(\hat{x}_{mnp}) \hat{\nabla} \hat{\phi}_{ijk}(\hat{x}_{mnp})) \cdot DF^{*-1}(\hat{x}_{mnp}) \hat{\nabla} \hat{\phi}_{i_0j_0k_0}(\hat{x}_{mnp}) |Jac(\hat{x}_{mnp})| + \\
& \omega_{i_0j_0k_0} (v_i(\hat{x}_{i_0j_0k_0}) - v_a) n_{e_{i_0j_0k_0}} |Jac(\hat{x}_{i_0j_0k_0})| + \eta \sum_{m,n}^{r+1} \omega_{mn} (\sum_{i,j,k}^{r+1} D_{eff} \circ \mathcal{G}_{K \rightarrow K'}(\hat{x}_{smn})) (DF^{*-1} \circ \mathcal{G}_{K \rightarrow K'}(\hat{x}_{smn})) \\
& \hat{\nabla} (\sum_{i,j,k}^{r+1} n_{e_{ijk,K'}} \hat{\phi}_{ijk,K'} \circ \mathcal{G}_{K \rightarrow K'}(\hat{x}_{smnp})) \cdot DF^{*-1}(\hat{x}_{smn}) \hat{\mathbf{n}} \hat{\phi}_{i_0j_0k_0}(\hat{x}_{smn}) |Jac(\hat{x}_{smn})|)
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Dans cette formule, $|Jac|$, $\hat{\mathbf{n}}$, \hat{x}_{smn} définissent respectivement la valeur absolue du jacobien de F , la normale à la face considérée dans l'élément de référence et la coordonnée du point de Gauss m, n sur cette face. $n_{e_{ijk,K'}}$ est la valeur de la densité sur l'élément K' adjacent à K .

Le formalisme Galerkin Discontinu présenté dans ce paragraphe a été exploité, dans le cadre de cette thèse, uniquement dans le cas 2D et sur maillage cartésien pour les équations de Maxwell. L'intérêt de ce schéma a surtout été démontré dans le contexte particulier des calculs sur cavités. Malheureusement, dans ce cas, malgré les avantages obtenus, nous n'avons pas pu introduire les équations liées au plasma dans ce schéma, faute de temps. Cet aspect reste donc pour nous une piste intéressante à investiguer dans la suite de ces travaux.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES

4

SOMMAIRE

4.1	INTRODUCTION	91
4.2	STRATÉGIES DE PARALLÉLISATION	92
4.2.1	Parallélisation de la méthode différences finies	92
4.2.2	Parallélisation de la méthode volumes finis	97
4.3	INTÉRACTION MICRO-ONDE/PLASMA EN ESPACE LIBRE	100
4.3.1	Simulation FDTD du claquage en espace libre dans une configuration 2D	101
4.3.2	Simulation FDTD 3D d'un claquage en espace libre	103
4.4	EFFET DE BLINDAGE	107
4.4.1	Surface selective en fréquence 2D	109
4.4.2	Protection d'une électronique à l'intérieur d'une cavité	114
4.5	LIGNE MICRO-RUBAN	117
4.6	AUGMENTATION DE LA PRÉCISION DES CHAMPS CALCULÉS DANS UNE CAVITÉ PARFAITEMENT MÉTALLIQUE	119
4.7	CONCLUSION	127

4.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous présentons plusieurs applications qui mettent en oeuvre les méthodes numériques décrites dans le chapitre précédent.

Le nombre important de mailles et la durée des simulations pour traiter notre problème physique, impose la mise en place d'une solution parallèle. Le premier paragraphe de ce chapitre est donc consacré à la présentation des stratégies de parallélisation mises en oeuvre pour les méthodes différences finies (FDTD) et volumes finis (FVTD). A ce titre, nous détaillons les principes de découpage du domaine de calcul et des échanges de données à effectuer pour les deux schémas. Ce travail de portage des outils de simulation sur machine parallèle va nous permettre de réaliser efficacement le traitement de problèmes bidimensionnels avec un pas d'espace de l'ordre de $\lambda/200$ à $\lambda/1000$, ou tridimensionnels.

Nous présentons ensuite, dans les autres paragraphes de ce chapitre, un ensemble d'applications 2D et 3D auxquelles nous nous sommes intéressées dans cette thèse. Dans les configurations étudiées, nous avons travaillé sur :

- l'interaction d'une onde plane avec une distribution de plasma en espace libre, à pression atmosphérique. Dans cet exemple, nous nous sommes particulièrement intéressés à la déformation du champs électromagnétique en présence du plasma dans le cas 3D. En effet, plusieurs études dans le cas 2D ont déjà été

- réalisées pour les différentes polarisations TE et TM. Toutefois, à cause des besoins en temps calcul et stockage mémoire, le cas 3D restait encore inaccessible pour des moyens de calcul classiques. Grâce à l'utilisation des machines parallèles et au travail de portage de nos outils sur celles-ci, on a pu réaliser une simulation 3D et la comparer aux résultats 2D existants. Outre ces éléments comparatifs, la simulation 3D pourra aussi nous offrir l'opportunité de traiter des configurations impossibles à simuler en 2D ;
- le blindage par création d'un plasma. Pour cela, on s'est tout d'abord focalisé sur l'étude d'une structure définie par un plan métallique infini possédant des petites ouvertures localisées périodiquement. On trouve ce type de structure dans les métamatériaux ou les surfaces sélectives en fréquence. Cette surface est ensuite soumise à une onde électromagnétique de forte puissance et claquage se crée aux niveaux des petites ouvertures. On simule cet effet en introduisant une densité électronique initiale localisée sur celles-ci et en résolvant notre système Maxwell-plasma couplé. Dans un deuxième temps, on met l'accent sur la protection d'une électronique localisée à l'intérieur d'une cavité présentant une ouverture. Dans ce problème, on suppose que la cavité est soumise à l'agression d'un champ de forte puissance. La difficulté supplémentaire de ce problème par rapport au problème des surfaces sélectives réside dans le fait de devoir calculer précisément un champ électromagnétique à l'intérieur d'une cavité. En effet dans ce cas, on sait que les méthodes différences finies et volumes finis souffrent respectivement d'un problème de dispersion et de dissipation numérique important. On proposera alors une solution de type Galerkin Discontinu pour répondre au traitement efficace du calcul du champ électromagnétique dans cette configuration ;
 - l'effet d'un plasma localisé dans le substrat diélectrique d'une ligne microruban sur la propagation de l'onde électromagnétique permet également d'aborder des problématiques de type blindage par plasma ou reconfigurabilité par plasma.

4.2 STRATÉGIES DE PARALLÉLISATION

Dans ce paragraphe, on détaille les grands principes des stratégies de parallélisation mises en oeuvre dans les méthodes différences finies et volumes finis.

4.2.1 Parallélisation de la méthode différences finies

On donne dans ce sous-paragraphe l'approche utilisée pour paralléliser la méthode FDTD. Les points essentiels de cette stratégie sont le découpage du domaine de calcul et les échanges des données entre processeurs.

4.2.1.1 Découpage du domaine de calcul

Le découpage du domaine de calcul est effectué lors du pré-traitement des données. Ce découpage consiste, en 3D, à faire un découpage dans les directions x , y et z du volume de calcul en plusieurs sous-volumes que l'on répartit sur une grille de processeurs comme indiqué sur la figure .4.1. Le choix des directions de découpage ne doit pas être fait de façon quelconque. En effet, il est préférable de découper d'abord en z , puis en y et enfin en x pour favoriser au niveau de chaque processeur, la localité des données dans les caches mémoire et donc accélérer l'accès à celles-ci.

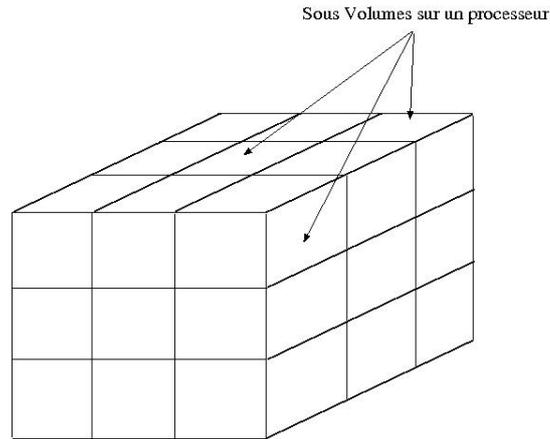


figure .4.1 – Découpage de l'espace de calcul total en sous volumes.

Cela entraîne donc au niveau de la création du maillage des objets, une stratégie qui consiste à favoriser un nombre de mailles important dans la direction z puis y et un nombre de mailles plus petit dans la direction x .

4.2.1.2 Echanges de données

En ce qui concerne l'implémentation, on va, après avoir découpé le volume total en différents sous-volumes répartis sur chaque processeur, exécuter le même logiciel sur chacun de ces processeurs. Compte tenu de la présentation du schéma FDTD et du découpage du domaine de calcul, on voit, de façon évidente, que le logiciel à exécuter sur chaque processeur est pratiquement le code monoprocasseur. Toutefois, celui-ci est modifié pour pouvoir récupérer sur les processeurs voisins les données qui ne sont pas locales au processeur courant. Ces modifications portent sur :

- le calcul des champs \mathbf{E} , \mathbf{H} et \mathbf{v} à la frontière de chaque processeur ;
- le calcul des densités n_e au niveau des noeuds se trouvant à la frontière de plusieurs processeurs.

Calcul des champs

Si on se place sur un processeur P_c , on a alors 6 processeurs voisins P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 et P_6 définis comme sur la figure (.4.2) et à l'intérieur du processeur P_c , on a un volume de calcul où les champs électriques \mathbf{E} et magnétiques \mathbf{H} sont localisés comme sur la figure (.4.3).

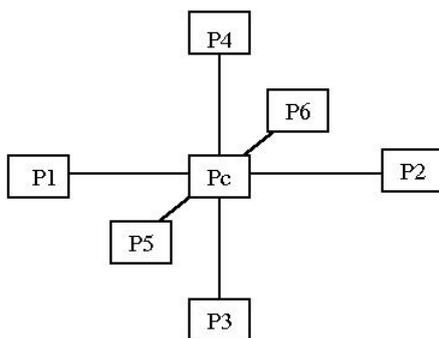


figure .4.2 – Positionnement des processeurs P_c , P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 et P_6 .

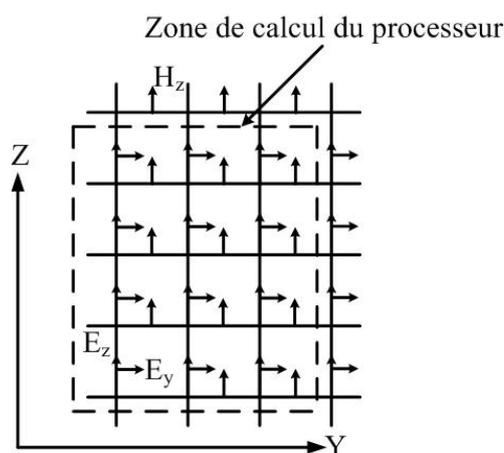


figure .4.3 – Positionnement des champs calculés sur le processeur courant P_c dans une coupe 2D (y,z).

Plaçons nous dans le processeur P_c . Pour calculer les champs E_x et E_z à la frontière des processeurs P_c et P_1 et les champs E_x et E_y à la frontière des processeurs P_c et P_2 , on a besoin respectivement sur P_c des champs H_z et H_x se trouvant sur P_1 et des champs H_y et H_x se trouvant sur P_2 . Cette remarque vaut aussi pour les processeurs P_3 et P_4 , ainsi que pour les processeurs P_5 et P_6 , pour le calcul des composantes (x, y) et (y, z) . La figure (.4.4) résume les communications effectuées entre les processeurs.

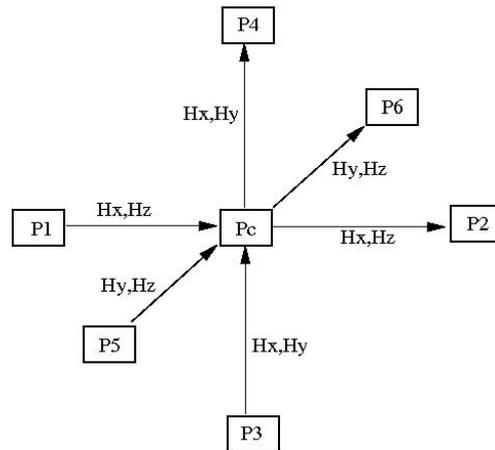


figure .4.4 – Communications entre processeurs pour le calcul des champs électriques.

De la même façon, pour le calcul des champs magnétiques \mathbf{H} sur le processeur Pc , on va devoir effectuer un certain nombre de transferts avec les processeurs voisins de Pc que l'on peut résumer par la figure .4.5.

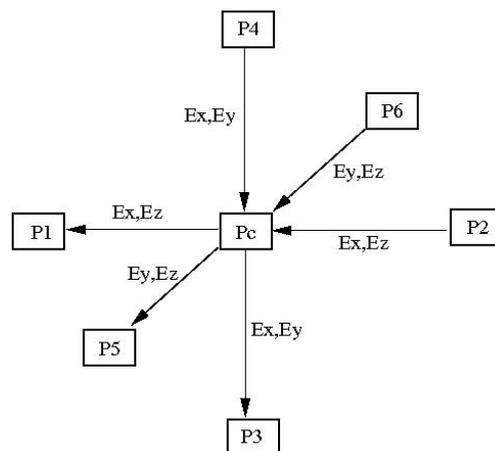


figure .4.5 – Communications entre processeurs pour le calcul des champs magnétiques.

Il faut noter la nécessité de faire attention d'effectuer d'abord les envois avant les réceptions dans chaque processeur, sinon on bloque la machine (tous les processeurs sont alors en attente de réception de message).

Calcul des densités et de la vitesse électronique

On se place sur le processeur Pc . Le calcul des vitesses électroniques se fait à l'aide des champs électriques tangents localisés aux mêmes positions que les vitesses. Le calcul des vitesses est donc local à chaque processeur et ne demande pas d'échanges particuliers entre processeurs. En ce qui concerne les densités électroniques, celles-ci sont localisées aux sommets du maillage. On aura donc besoin d'échanger des données entre processeurs pour effectuer leur calcul.

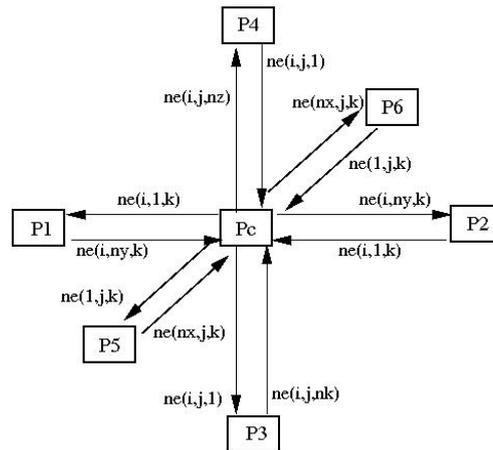


figure .4.6 – Communications entre processeurs pour le calcul des densité. magnétiques.

En effet, pour calculer la densité n_e à la frontière du processeur P_c on a besoin sur P_c du coefficient de diffusion effective D_{eff} mais surtout de la densité n_e se trouvant sur les processeurs adjacents pour évaluer le laplacien. En fait, sur chaque processeur on évalue la densité sur l'intervalle $[1, n_x] \times [1, n_y] \times [1, n_z]$, où n_x , n_y et n_z représentent respectivement le nombre de mailles dans les directions x , y et z , sur le processeur considéré. Pour cela, on définit des tableaux sur $[0, n_x + 1] \times [0, n_y + 1] \times [0, n_z + 1]$. Comme le montre la figure .4.6, les données en $x = 0$ seront envoyées par le processeur $P1$ au processeur courant alors que celui-ci enverra au processeur $P1$ la donnée en $x = 1$. Celles-ci seront stockées en $x = n_x + 1$ sur le processeur $P1$. Les autres échanges sont décrits dans la figure .4.6. Comme pour l'évaluation des champs, il est nécessaire d'effectuer d'abord les envois avant les réceptions dans chaque processeur pour éviter un blocage.

4.2.1.3 Performances obtenues

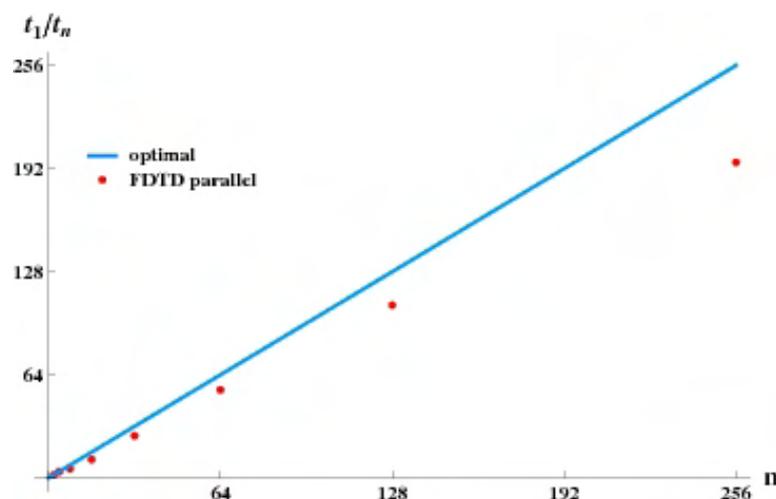


figure .4.7 – Gain en temps CPU en augmentant le nombre de processeurs.

Après avoir introduit la stratégie de parallélisation décrite précédemment dans un code FDTD, nous avons effectué des calculs dans le cas 2D pour un problème de

blindage par plasma, en utilisant plusieurs processeurs. La figure .4.7 montre le gain obtenu en temps CPU ou speed-up suivant le nombre de processeurs utilisés. On note que la courbe du speed-up réel est très proche de celle du speed-up parfait. Ce bon résultat est dû à un découpage équilibré où le nombre de cellules par processeur est quasi identique. Cependant, sur la figure .4.7, on note aussi que l'écart entre les deux speed-up augmente de manière plus importante dès que le nombre de processeurs a dépassé les 64 processeurs. On peut expliquer cela par un problème découpé trop petit en nombre de cellules par processeurs. Dans ce cas, le coût lié aux échanges n'est plus négligeable par rapport aux calculs liés aux cellules internes à chaque processeur.

4.2.1.4 Conclusion

Les simulations effectuées montrent que notre stratégie de parallélisation permet un gain de temps CPU important. Il faut toutefois, trouver le bon compromis entre le nombre de processeurs et le nombre de cellules existantes dans le domaine de calcul, pour obtenir des gains optimaux. Enfin, la possibilité d'utiliser des machines parallèles nous permet de résoudre des problèmes 3D.

4.2.2 Parallélisation de la méthode volumes finis

Malgré l'utilisation d'une stratégie de pas de temps local et d'une stratégie de raffinement local pour le schéma FVTD, le temps CPU reste important en 2D (très important en 3D) puisqu'on a besoin de mailler localement très finement le domaine de calcul. Cela correspond à un maillage de l'ordre de $\lambda/200$ afin d'avoir une bonne précision pour décrire l'évolution du plasma. Par conséquent, il est intéressant d'utiliser le calcul parallèle pour palier à cet inconvénient.

4.2.2.1 Découpage du domaine de calcul pour l'approche volumes finis

Soit un ensemble de n processeurs, nous proposons une parallélisation du problème où nous attribuons chaque cellule du maillage à un processeur en utilisant une méthode "glouton" basée sur plusieurs zones. Le principe de cette méthode consiste d'abord à découper le domaine de calcul en différentes zones définies par une grille cartésienne de telle sorte que $n_x \times n_y \times n_z = n$. Ensuite, nous cherchons un point appartenant à chaque zone (i, j, k) , puis, en utilisant un algorithme glouton, nous déterminons l'ensemble des cellules appartenant à chaque processeur. Enfin, plusieurs cellules sont échangées aux bords des domaines des processeurs contigus pour garantir une charge similaire en termes de nombre de cellules sur chaque processeur. Cette méthode nous permet d'avoir par processeur un ensemble compact de cellules comme on peut le voir sur la figure .4.8 dans un exemple 2D.

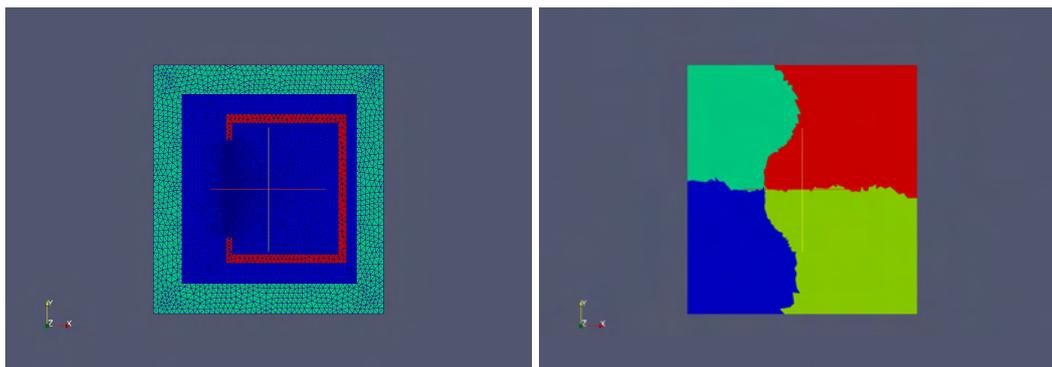


figure .4.8 – *Gauche* : maillage des différentes zone du domaine de calcul. *Droite* : les 4 zones de processeur.

Nous ajoutons à l'ensemble des cellules obtenues à l'étape précédente, un autre petit ensemble de cellules pour faire des échanges entre les processeurs voisins pendant le calcul. Ce nouvel ensemble est composé de cellules appartenant à un autre processeur qui est adjacent à une cellule du processeur considéré. Il n'y a aucun calcul de champ ou de densité plasma sur cet ensemble de cellules. Les valeurs échangées sont les champs électriques, magnétiques et la densité plasma, comme dans le cas des différences finies. Sur chaque processeur, l'évaluation des champs et de la densité plasma consiste d'abord à faire les échanges et ensuite les calculs. Pour mieux comprendre le processus, la figure (.4.9) montre sur un exemple simple les zones et les opérations d'échanges effectuées avant un calcul en considérant trois processeurs

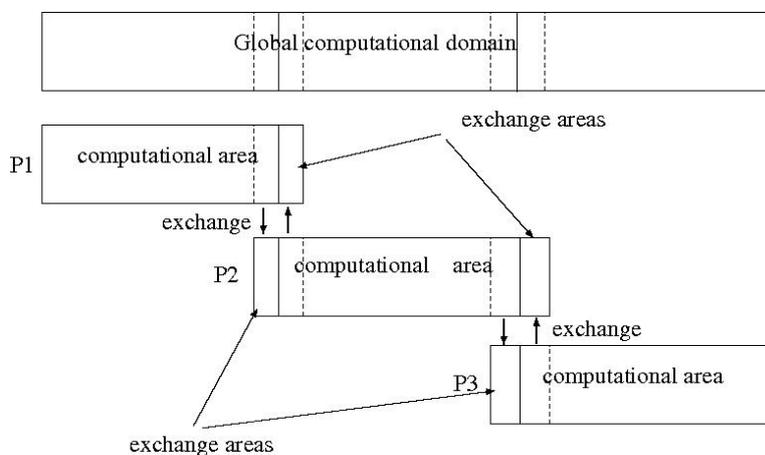


figure .4.9 – Définition des zones et des opérations d'échange dans une configuration avec 3 processeurs(P_1, P_2, P_3).

4.2.2.2 Echanges des données dans l'approche volumes finis

Chaque processeur dispose d'un tableau contenant les numéros des volumes dont les valeurs doivent être transmises, et le numéro des cellules à mettre à jour. Pour procéder à l'échange des valeurs, on utilise le protocole mpi. Dans nos échanges, envoyer toutes les données en même temps sur le réseau, avant de recevoir, risque de le saturer. Pour éviter ce blocage, la procédure d'échange utilisée sur un processeur

courant P_c (voir Fig.(.4.10)) est décrite par :

pour tout processeur P

- si le processeur P a certaines valeurs à échanger avec le processeur P_c et $P < P_c$, alors
- P_c accepte de recevoir les valeurs de P ;
- P_c envoie des valeurs à P ;
- autrement si P a certaines valeurs à échanger avec le processeur P_c et $P > P_c$ alors
- P_c envoie des valeurs à P ;
- P_c accepte de recevoir les valeurs de P .

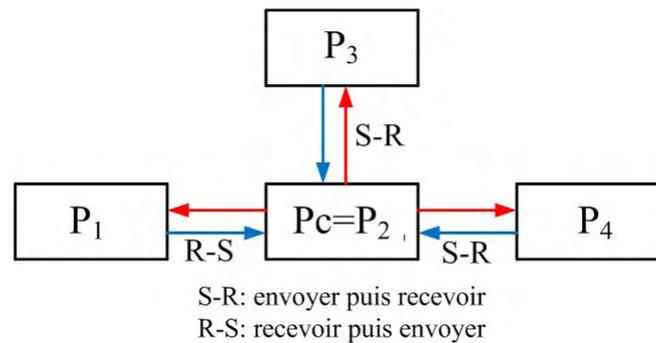


figure .4.10 – Protocole d'échange utilisé sur un processeur courant $P_c = P_2$ entouré de trois processeurs P_1, P_3, P_4 .

Enfin, pour finir de décrire notre stratégie de parallélisation, les sorties sont effectuées indépendamment par chaque processeur. On a donc autant de fichiers de sorties que de processeurs utilisés. Un post-traitement, effectué à l'aide de paraview, permet ensuite l'exploitation groupée de ces différents fichiers.

4.2.2.3 Performances obtenues

Comme dans le cas des différences finies, nous avons introduit la stratégie précédente dans notre outil volumes finis et nous avons ensuite effectué des simulations 2D dans un contexte de blindage par plasma. La figure .4.11 représente le gain en temps CPU obtenu en augmentant le nombre de processeurs de 1 jusqu'à 32 avec un maillage d'environ 180000 cellules.

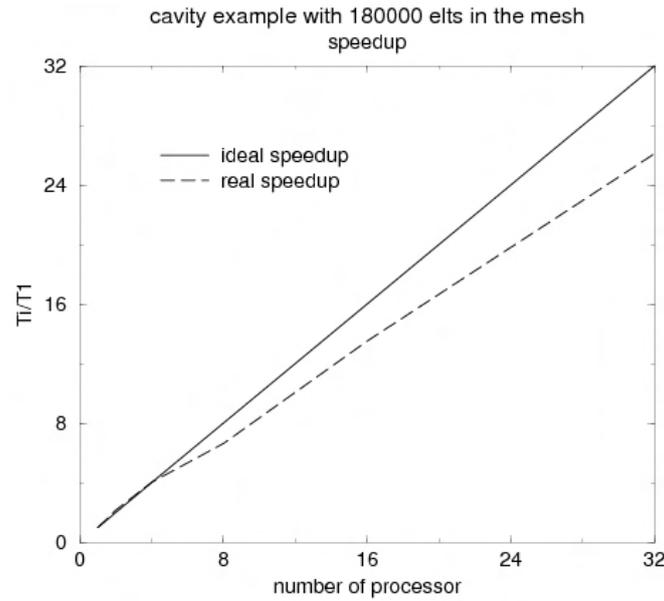


figure .4.11 – Gain en temps CPU en augmentant le nombre de processeurs.

Les résultats obtenus montrent un très bon gain en temps CPU. Cependant, l'écart entre les deux courbes de speed-up augmente au fur et à mesure que le nombre de processeurs augmente et s'écroule pour un nombre de processeurs supérieur à 128 dans notre exemple. Après avoir comparé le nombre de cellules appartenant à chaque processeur à l'issue du découpage, nous avons pu expliquer cette contre-performance par l'utilisation d'un algorithme de découpage qui n'est pas suffisamment efficace. En effet, celui-ci engendre une distribution non uniforme du nombre d'élément sur les différents processeurs. En fait, on peut même montrer que le temps CPU final est proportionnel au nombre maximal de cellules qui se trouve sur un processeur. Pour palier à ce problème, la solution pourrait être l'utilisation d'outils de découpage plus efficaces que l'on peut trouver dans le domaine public mais que nous n'avons pu mettre en œuvre, faute de temps.

4.2.2.4 Conclusion

Notre stratégie de parallélisation dans le cas de la méthode volumes finis permet, comme en différences finies, une réduction importante du temps CPU mais elle n'est pas optimale. En effet, pour optimiser le temps de calcul, on doit améliorer l'algorithme de découpage en travaillant sur une autre procédure qui équilibre le nombre d'élément entre les processeurs. Ceci dans le cas de maillage non structurés est une voie de recherche actuellement menée par plusieurs équipes. Il est donc plus judicieux d'utiliser ces travaux plutôt que de faire nous-même un développement spécifique dans ce domaine.

4.3 INTÉRACTION MICRO-ONDE/PLASMA EN ESPACE LIBRE

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au claquage miro-onde à pression atmosphérique. Plusieurs études 2d ont été conduites par J.P. Boeuf et al au LAPLACE. Elles nous permettront de vérifier la capacité de nos outils à rendre compte de l'évo-

lution physique du plasma. Cela posera également les bases de l'interprétation des résultats 3D originaux qui suivent.

4.3.1 Simulation FDTD du claquage en espace libre dans une configuration 2D

Le claquage micro-onde dans l'air à pression atmosphérique a été observé au MIT dans des expériences mené par Y. Hidaka et al [97]. Ces expériences mettent en oeuvre une source micro-onde de forte puissance et des caméras rapides. Les mesures montrent que, lors du claquage, un ensemble structuré de filaments de plasma se forme et se dirige vers la source électromagnétique.

Les travaux de J. P. Boeuf et al [20][21][52] ont mis en évidence les mécanismes de formation et de propagation de ces structures de plasma auto-organisées dans les conditions des expériences du MIT ($f = 110\text{GHz}$, amplitude du champ incident voisine de $E_0 = 6\text{MV/m}$).

Les figures (.4.12) et (.4.13) montrent les résultats des simulations obtenus par J.P. Boeuf et al dans [21] pour un domaine de calcul de $2.5\lambda \times 2.5\lambda$, dans l'air et à pression atmosphérique.

Ces résultats numériques montrent la formation de ces structures de plasma filamentaires auto-organisées (voir Fig. .4.12 partie supérieure) en excellent accord avec les observations expérimentales (voir Fig. .4.13). Ces structures sont liées à la partition du champ électrique diffracté par le plasma. De nouveaux filaments se forment dans le front du plasma par des phénomènes de diffusion-ionisation (voir Fig. .4.12 partie inférieure). Le modèle montre que la formation d'un réseau de filaments de plasma auto-organisé est dû à l'apparition des maxima de champ électrique de l'onde stationnaire formée suite à la réflexion par le front du plasma.

Dans la simulation en mode TE (voir Fig. .4.14 et .4.15), le streamer micro-onde s'allonge parallèlement à la direction du champ en raison du renforcement de celui-ci à ses pôles (phénomène de polarisation). L'intensité du champ aux extrémités du filament est modulée dans le temps en raison de phénomènes de résonance pour des longueurs de filaments voisines de multiples de la demie longueur d'onde, comme l'a montré J.P. Boeuf et al dans [98].

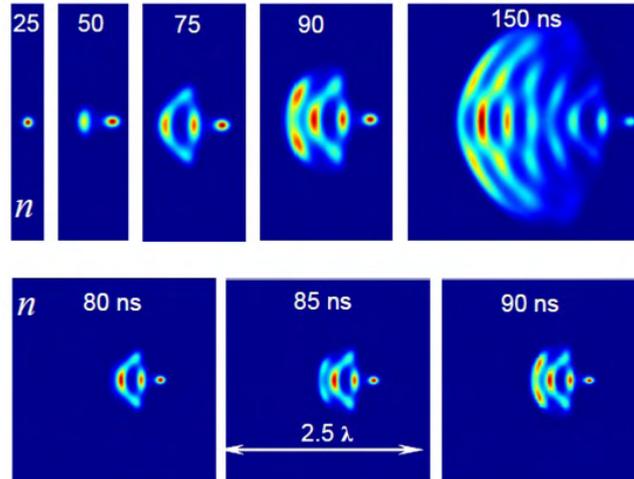


figure .4.12 – Evolution spatiale de la densité électronique pour différents temps et une excitation en mode TM. La fréquence f est de 110GHz, le champ électrique \mathbf{E} d'amplitude 6MV/m est polarisé selon \vec{z} (direction perpendiculaire à la figure). La direction de propagation de l'onde est suivant l'axe \vec{x} (direction horizontale, de gauche à droite). En partie inférieure : zoom temporel sur la formation d'un filament.

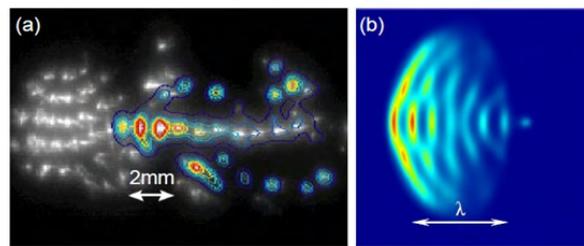


figure .4.13 – **a**) Résultat expérimental de la cartographie de la densité [97] en mode TM. **b**) Cartographie de la densité obtenue dans [21] en mode TM .

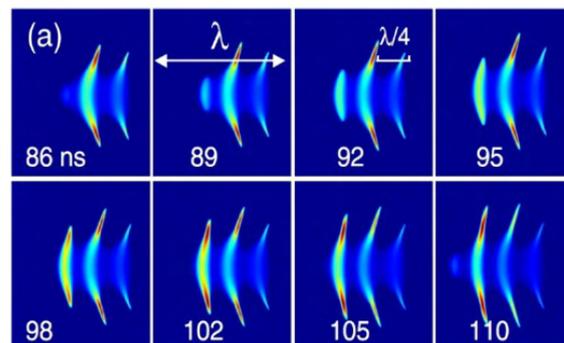


figure .4.14 – Evolution spatiale de la densité électronique pour différents temps et une excitation en mode TE. La fréquence f est de 110GHz, le champ électrique \mathbf{E} d'amplitude 6MV/m est polarisé selon l'axe \vec{y} (direction verticale sur la figure). La direction de propagation de l'onde est suivant la direction \vec{x} (direction horizontale, de gauche à droite).

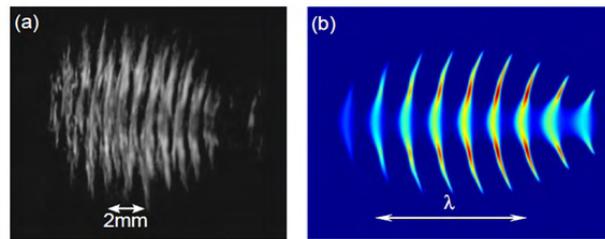


figure 4.15 – a) Résultat expérimental de la cartographie de la densité [97] en mode TE. b) Cartographie de la densité obtenue dans [21] en mode TE.

En conclusion des travaux 2D menés sur l'interaction micro-onde/plasma en espace libre, on peut dire que les résultats obtenus par J. P. Boeuf et al ont nécessité un maillage de tout le domaine de calcul à $\lambda/1000$. L'utilisation d'un tel maillage implique un très grand coût en termes de temps CPU et de stockage mémoire. Grâce à l'introduction de la stratégie de parallélisation présentée dans le paragraphe précédent, on peut améliorer considérablement le temps de calcul et permettre ainsi d'augmenter les tailles des problèmes à traiter. En particulier, les simulations en 3D de phénomènes qu'on ne peut pas traiter en 2D, tel que l'utilisation d'une polarisation circulaire par exemple, deviennent possibles.

Des simulations complémentaires réalisées avec une méthode volumes finis 2D sont présentés en Annexe D. Ils sont évidemment en parfaite cohérence avec ceux montrés ci-dessus.

4.3.2 Simulation FDTD 3D d'un claquage en espace libre

Dans cet exemple nous montrons la réalisation d'un calcul 3D sur machine parallèle. Pour cela, nous étudions le claquage puis la diffraction d'un champ électromagnétique par le plasma dans un domaine 3D. Le domaine de calcul est défini par un pavé donné par $[0,6mm] \times [0,3mm] \times [0,3mm]$. Ce domaine est découpé en $120 \times 60 \times 60$ mailles, respectivement dans les trois directions x , y et z , et est borné par des couches PML. L'excitation est définie par une onde plane monochromatique (k_x, E_y, H_z) de fréquence $f = 110GHz$ et de module $E_0 = 6MV/m$. La densité de plasma initiale est localisée dans une boule de centre $C = (4.5mm, 1.5mm, 1.5mm)$ et de rayon $r = 0.1mm$. La valeur initiale de cette densité est $n_0 = 10^{18}$. Dans la simulation effectuée sur un temps d'observation de $100ns$, avec 4 processeurs, on considère que le problème est à pression atmosphérique ($p = 760Torr$). En termes de sorties, nous relevons les champs et les densités électroniques en 3 points ($P_1 = (4,5mm, 1,5mm, 1,5mm)$, $P_2 = (3,5mm, 1,5mm, 1,5mm)$, $P_3 = (2,5mm, 1,5mm, 1,5mm)$) et sur une grille dans le domaine de calcul en 200 temps équirépartis sur la totalité du temps d'observation. La figure (4.16) représente l'évolution temporelle des densités aux 3 points P_1 , P_2 et P_3 . On note sur cette figure le bon comportement croissant de la densité jusqu'à une valeur de saturation où le claquage est complet et la décroissance ensuite de celle-ci due à la diminution du champ électrique, masqué par le plasma.

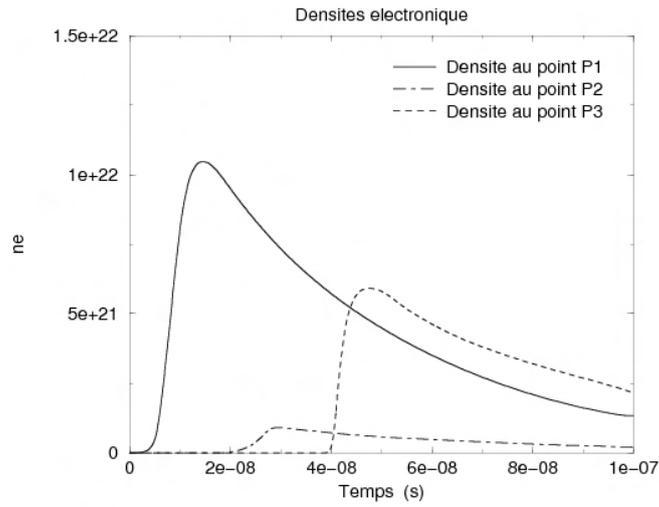


figure .4.16 – Evolution temporelle de la densité électronique aux points P_1 , P_2 et P_3

Les figures .4.17 et .4.18 montrent respectivement l'évolution spatio-temporelle des densités électroniques et du champ électrique.

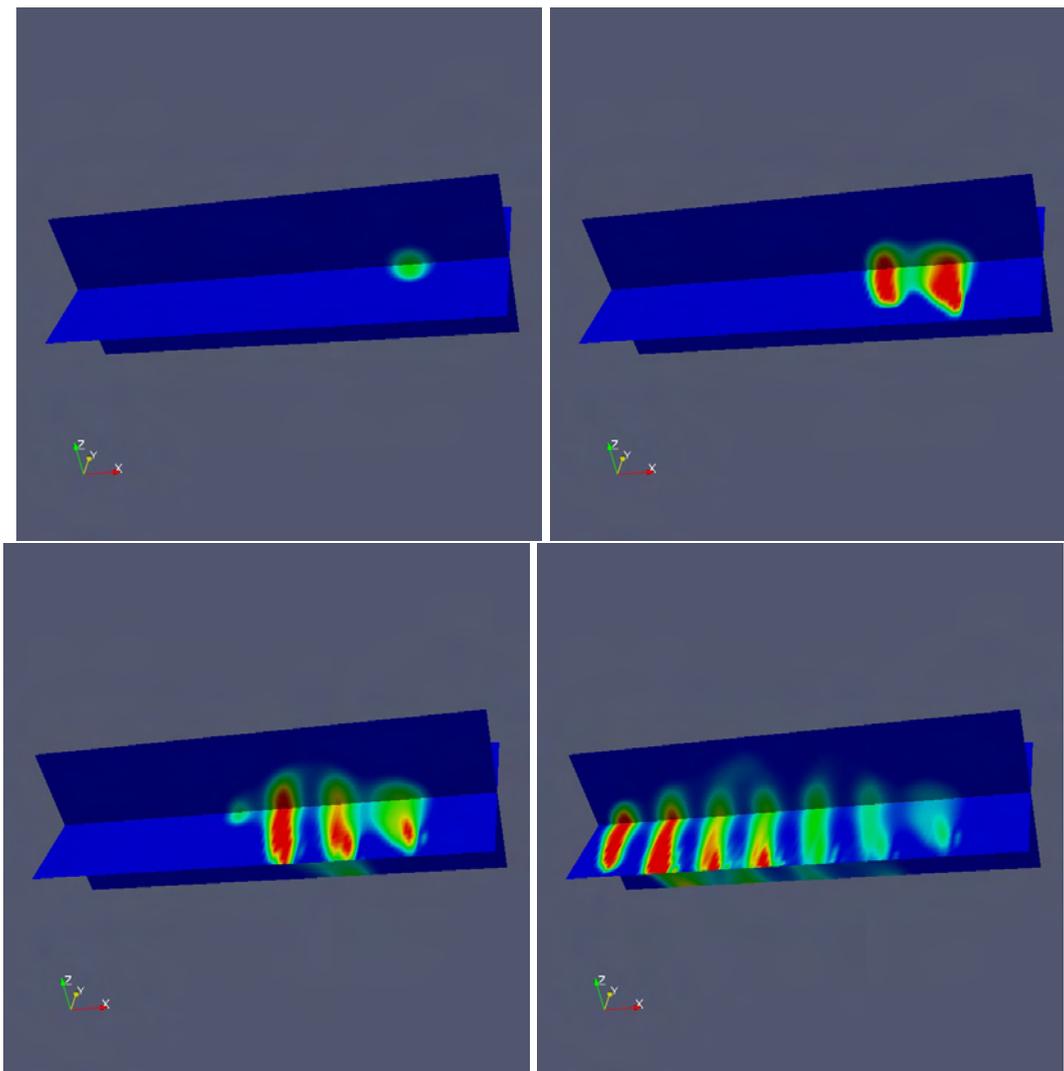


figure .4.17 – Evolution spatiale de la densité électronique aux temps 8ns, 29ns, 40ns et 80ns.

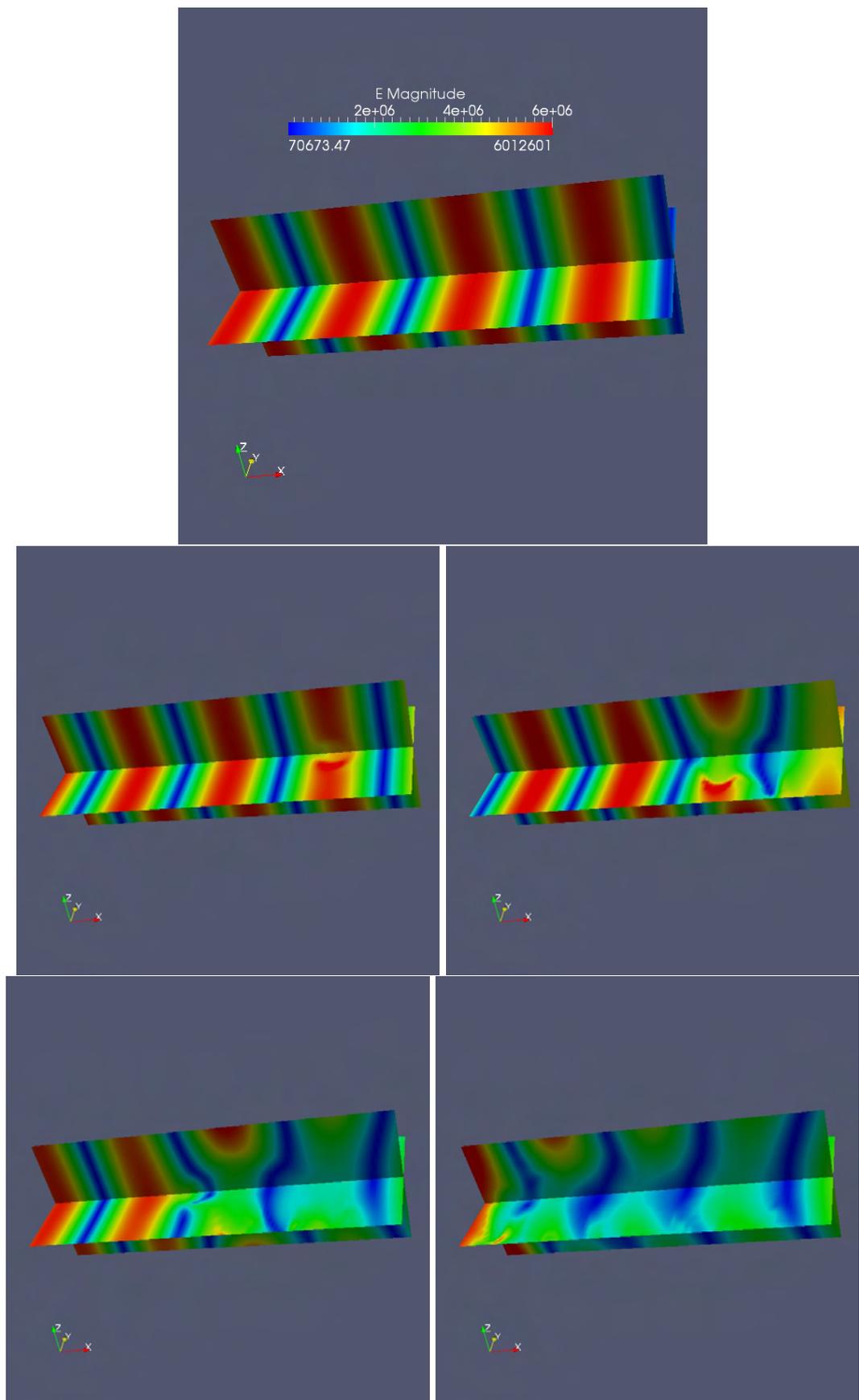


figure .4.18 – Evolution spatiale du module du champ électrique aux temps 0ns, 8ns, 29ns, 40ns et 80ns.

On note sur ces figures que le comportement du champ électromagnétique et de la densité plasma sont similaires aux résultats obtenus dans le cas 2D. En effet, le champ est réfléchi à partir d'une valeur critique de la densité plasma et il y a création d'un front de plasma qui avance dans le sens inverse de la propagation de l'onde. La forme de cette densité correspond à une forme en "fish-bone" que l'on retrouve dans le cas 2D. On peut aussi noter que l'élongation de la densité est visible suivant un axe préférentiel. Les cas 2D TM et TE représentent ainsi deux plans de découpe xy et xz .

Toutefois, à cause du pas de la discrétisation spatiale utilisé ($\lambda/50$), on ne peut pas représenter précisément l'évolution de la densité plasma avec cette simulation. Pour cela, il sera nécessaire de refaire un calcul avec un pas de maillage beaucoup plus petit et avec certainement un nombre plus important de processeurs pour obtenir des temps de simulations convenables.

En conclusion de ce paragraphe, nous avons montré la possibilité de réaliser une simulation 3D modélisant l'interaction d'une source micro-onde avec une densité plasma volumique. Les résultats obtenus ont été qualitativement comparés avec des résultats 2D donnés dans la littérature. On montre qu'il y a une assez bonne coïncidence sur la forme des deux résultats. Ceci permet de valider grossièrement notre approche 3D. Il reste cependant à faire encore d'autres simulations en 3D pour permettre une validation plus précise. Cela ouvre la voie pour introduire certains effets volumiques, inaccessibles en 2D, tels que l'utilisation d'une polarisation circulaire ou elliptique. La non-linéarité ne permet pas de considérer ce cas comme résultat de la superposition de cas TM et TE.

4.4 EFFET DE BLINDAGE

L'étude des perturbations induites par des sources micro-ondes de forte puissance sur les composants électroniques situés à l'intérieur de cavités avec de petites ouvertures est un problème difficile à étudier. En effet, l'intensité du champ électromagnétique incident est amplifié sur les bords des ouvertures et peut générer des claquages qu'il convient de prendre en considération dans les effets de blindage. La figure (4.20) montre pour différents instants l'évolution de la densité plasma que l'on positionne dans un volume localisé sur l'ouverture. On note sur cette figure que le claquage commence sur les bords de l'ouverture et se propage vers l'intérieur de celle-ci. La vitesse de propagation du claquage dans l'ouverture dépend de la taille de l'ouverture et de l'amplitude du champ initial. Plus l'ouverture est de petite dimension et le champ excitateur grand, plus le blindage sera efficace. La figure 4.19 montre la répartition du champ dans l'ouverture selon sa taille et l'amplitude du champ excitateur. En termes de modélisation, les claquages peuvent être approchés comme une évolution d'une densité initiale de plasma dans les ouvertures en fonction des champs électromagnétiques. Le problème de blindage exploitant la densité du plasma a déjà été étudié par plusieurs auteurs [99] [100] [101] [102] en dimensions 1D et 2D. En ce qui concerne les modèles 2D, les auteurs utilisent une méthode FDTD pour résoudre un couplage de micro-onde/plasma. [52][21][20] [22][103].

La difficulté majeure de ce type de simulation est la nécessité d'avoir un maillage avec un pas d'espace de l'ordre de λ/n , où λ définit la longueur d'onde et $n \geq 200$, pour décrire correctement l'évolution de la densité du plasma. Ce point est un inconvénient majeur pour la méthode FDTD qui utilise un maillage structuré

avec un pas d'espace constant. En effet, nous obtenons un grand nombre de mailles et donc un coût important en termes de stockage mémoire et en termes de temps calcul. On peut éviter cet inconvénient dans nos simulation volumes finis (FVTD) en utilisant un maillage localement raffiné. La méthode volumes finis 2D utilisé pour nos simulations est présentés en Annexe C.

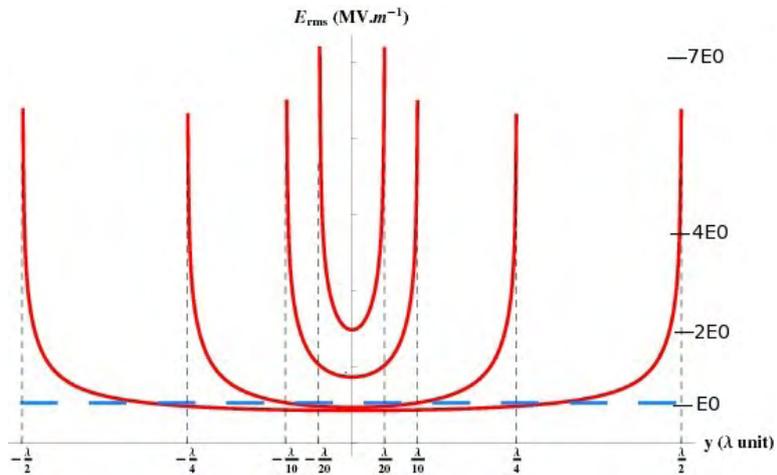


figure .4.19 – Champ rms pour différentes longueurs de l'ouverture. La ligne pointillée représente le champ rms d'une onde plane incidente dans le vide. (Simulation FDTD)

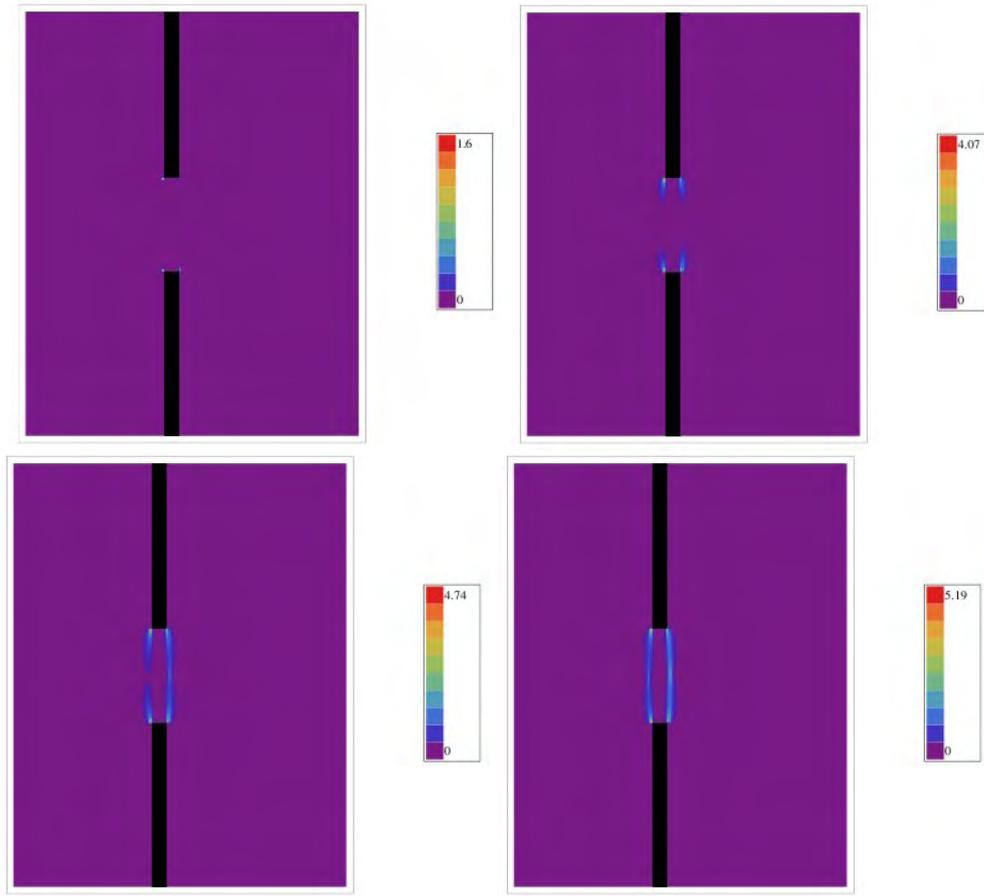


figure .4.20 – Evolution de la densité sur l'ouverture dans un plan métallique à différentes instants.

Pour ce type de problème où la densité plasma reste confinée dans un volume localisé, nous allons nous intéresser à trois types de configurations.

4.4.1 Surface selective en fréquence 2D

La structure de ce problème est représentée par une surface infinie dans laquelle des ouvertures sont positionnées périodiquement. Dans notre exemple 2D on suppose que ces ouvertures sont de taille $\lambda/10$ et espacées d'une longueur $\lambda/3$.

Dans cette étude, nous simulons un claquage plasma micro-onde dans l'air en utilisant la géométrie de la configuration décrite sur la figure .4.21. Cette configuration correspond à un mur infini avec des fentes périodiques, éclairé par une onde plane. La géométrie est une géométrie 2D cartésienne et le champ électromagnétique incident est tel que \mathbf{H} est perpendiculaire au domaine de simulation et \mathbf{E} est parallèle au mur (voir figure .4.21). Dans la simulation, le domaine de calcul est limité par deux conditions périodiques dans la direction perpendiculaire parallèles au mur et deux conditions parfaitement absorbantes dans la direction parallèle au mur.

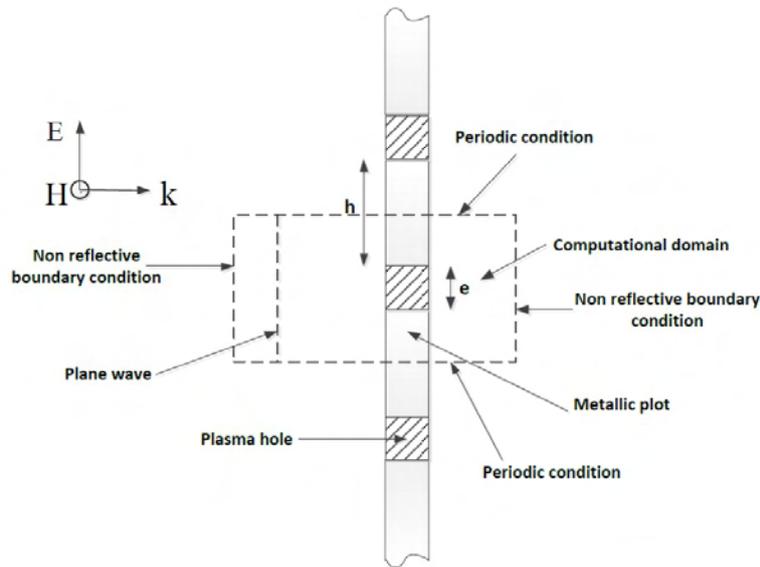


figure .4.21 – Configuration 2D utilisée dans les simulations.

La fréquence de l'onde incidente est de 25 GHz. La longueur de l'ouverture e est égale à $\lambda/10$. La longueur de la partie métallique h est $\lambda/3$ et l'épaisseur de l'ouverture est $\lambda/40$ (λ est la longueur d'onde de la source, ce qui correspond à 1,2 cm pour une fréquence de 25 GHz).

Pour les simulations, on suppose que le plasma est confiné dans le volume formé par l'ouverture (voir fig. .4.21) à une pression donnée p (avec une condition absorbante pour la densité $n_e = 0$ sur la surface de ce volume).

La densité initiale d'électrons et d'ions est supposée être uniforme et égale à 10^{13}m^{-3} au début de la simulation.

Comme mentionné dans la section précédente, la grille doit être fine (le pas de discrétisation est de l'ordre de $\lambda/200$) dans la région du plasma pour assurer une modélisation correcte de l'évolution de la densité. Sur les autres régions du domaine de calcul, le maillage peut être relâché (le pas de discrétisation est de l'ordre de $\lambda/20$) pour avoir une bonne précision sur les champs électromagnétiques. Pour une simulation FDTD, afin d'éviter les erreurs de dispersion numérique, nous choisissons de prendre une grille uniforme sur l'ensemble du domaine de calcul. En ce qui concerne la simulation FVTD, on peut utiliser un raffinement local sans erreur de dispersion. Pour notre configuration, nous prenons un maillage avec un pas de discrétisation spatiale égal à $\lambda/200$ dans la zone du plasma et un pas de discrétisation spatiale entre $\lambda/200$ et $\lambda/50$ ailleurs. Dans les deux simulations FVTD et FDTD, seule les discrétisations de la zone de calcul des champs électromagnétiques sont différentes.

Considérons la configuration précédente avec un champ incident d'amplitude égale à 2MV/m et sans plasma. Les figures (.4.22) et (.4.23) montrent la répartition spatiale de l'amplitude du champ électrique à deux moments différents, pour des simulations FDTD et FVTD. Ces figures montrent l'amplification du champ électrique autour des bords de l'ouverture. De plus, on note sur ces figures que les méthodes FVTD et FDTD donnent des résultats similaires.

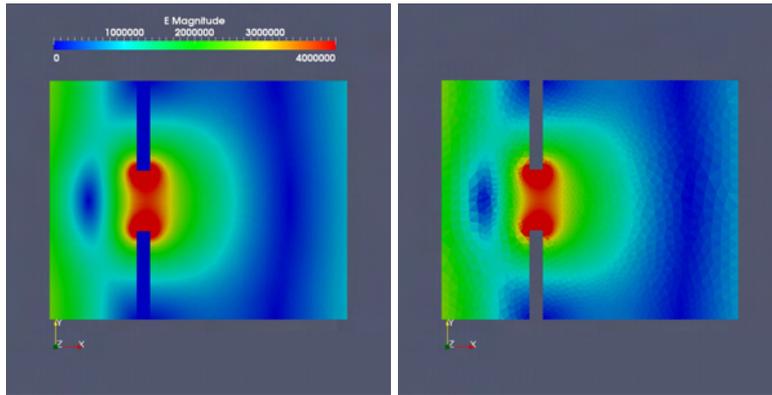


figure .4.22 – Amplitude du champ électrique à $t = 1.12\text{ns}$ obtenue en utilisant les méthodes FDTD (à gauche) et FVTD (à droite) sans plasma. L'amplitude du champ incident est de 2 MV/m .

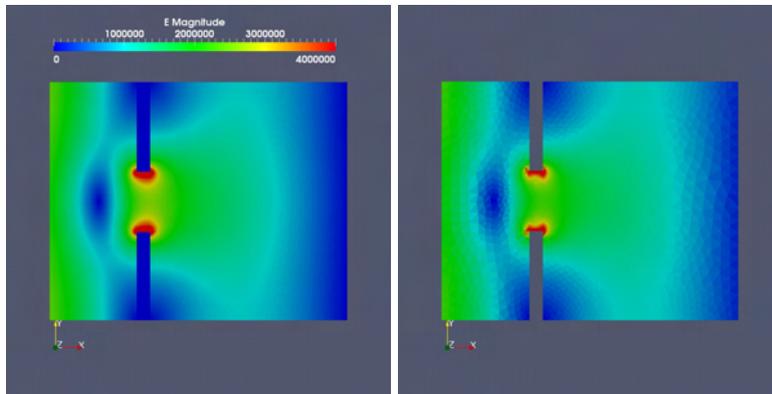


figure .4.23 – Amplitude du champ électrique à $t = 1.15\text{ns}$ obtenue en utilisant les méthodes FDTD (à gauche) et FVTD (à droite) sans plasma.

La figure (.4.24) montre la variation en temps du champ électrique calculé au centre de l'ouverture avec les méthodes FVTD et FDTD. Les deux méthodes numériques donnent le même résultat et avec la même précision. Cependant, pour des temps longs nous pouvons observer un léger décalage Δt entre les solutions des deux méthodes. Ce décalage ($\Delta t = 7.1e^{-13}\text{s}$ à $t = 5e^{-9}\text{s}$), est trop petit pour traduire une dispersion relative à l'une ou à l'autre des deux méthodes (voir la figure .4.25).

D'un point de vue informatique, dans les conditions des simulations décrites ci-dessus, la méthode FVTD utilise 5184 cellules au lieu de 33152 pour la méthode FDTD, ce qui se traduit par un gain en mémoire autour de deux pour la méthode FVTD. Sans l'utilisation de la stratégie de pas de temps local, le temps CPU pour la méthode FVTD est deux fois plus grand que le temps CPU nécessaire à la méthode FDTD. L'utilisation de la stratégie de pas de temps local permet à la méthode FVTD de redevenir plus performante que la méthode FDTD avec un facteur de 1.2. Ce gain est relativement petit mais nous pouvons nous attendre à un gain plus important pour des calculs avec un plus grand nombre de cellules, comme par exemple dans le cas des simulations 3D. On voit donc sur cet exemple l'intérêt d'utiliser la méthode volumes finis pour traiter le problème de Maxwell/plasma couplé.

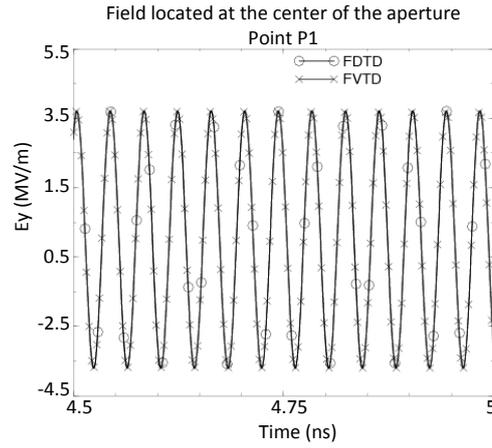


figure .4.24 – Variations temporelles du champ électrique E_y calculé avec les méthodes FVTD et FDTD au centre de l'ouverture.

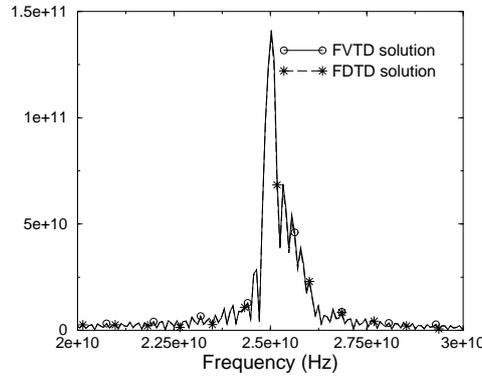


figure .4.25 – Spectres des solutions FDTD and FVTD.

Prenons maintenant une densité de plasma initiale confinée dans l'ouverture à une pression $p = 100\text{ torr}$ donnée. En utilisant la méthode des volumes finis, nous étudions l'évolution des champs à l'intérieur du domaine de calcul.

Le claquage apparaît si la production de particules chargées par ionisation est plus grande que les pertes par attachement, diffusion ou recombinaison. Pour cela, le champ de claquage réduit E_{eff}/p dans l'air est de l'ordre de 3 kV/m/torr [104]. Puisque le champ effectif est relié à l'amplitude du champ critique E_{cr} par :

$$E_{eff} = \frac{E_{cr}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{v_m^2}}}$$

On a l'expression du champ critique en fonction de la pression et de la pulsation de l'onde, donnée par :

$$E_{cr} = 4.25p \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{v_m^2}}} \quad (.4.1)$$

avec $v_m = 5,310^9 p$ et $\omega = 2\pi f$. On doit alors avoir E_0 supérieur à environ 0.45 MV/m pour avoir un claquage dans nos conditions (100 Torr , 25 GHz). Pour nos simulations, on prend $E_0 = 2\text{ MV/m}$ ce qui permet d'accélérer le blindage et d'éviter les claquages dans l'air à la pression atmosphérique.

Lorsque les équations du plasma sont résolues conjointement avec les équations de Maxwell, en prenant une (petite) densité initiale dans l'ouverture, on observe une augmentation exponentielle de la densité du plasma suivie par un blindage du champ électromagnétique par le plasma formé dans l'ouverture. Cela peut être vu sur la figure (.4.26) où les champs électriques calculés avec la méthode FVTD avec et sans plasma sont présentés à l'instant $t = 2.05ns$.

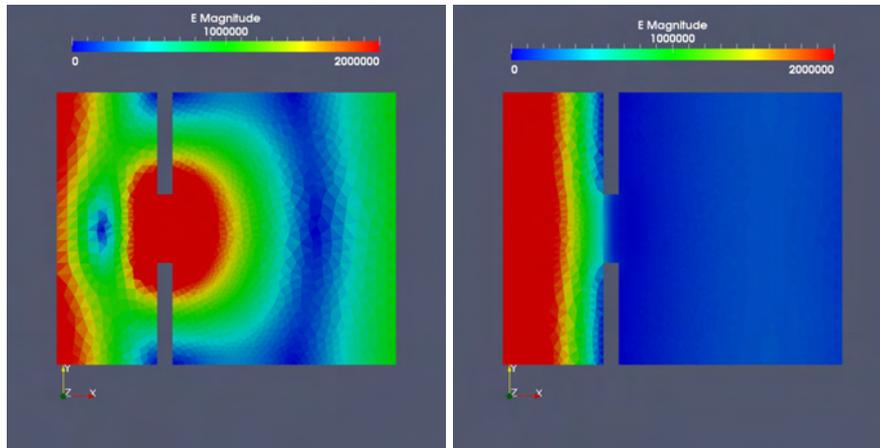


figure .4.26 – Amplitude du champ électrique à $t = 2.05ns$ obtenue avec les méthodes FVTD avec plasma (à droite) et sans plasma (à gauche). La densité initiale du plasma est égale à $10^{13}m^{-3}$ dans le cas avec le plasma. La dimension de l'échantillon est égale à $\lambda/3 \times \lambda/3$.

La figure (.4.27) montre l'évolution temporelle du champ électrique calculé au-delà de l'ouverture pour les cas avec et sans plasma. Nous voyons que le champ incident est (partiellement) blindé au bout d'environ $0.5ns$, en présence d'un plasma. La croissance de la densité du plasma au centre de l'ouverture en fonction du temps est représentée sur la Figure (.4.36). La densité du plasma atteint une valeur quasi stationnaire d'environ $5 \cdot 10^{20}m^{-3}$ après environ $0.5ns$. Une fois que le blindage s'est produit, la diminution du niveau de champ électrique atteint un facteur 5 par rapport au champ initial. Cela peut se traduire par une protection de $14dB$.

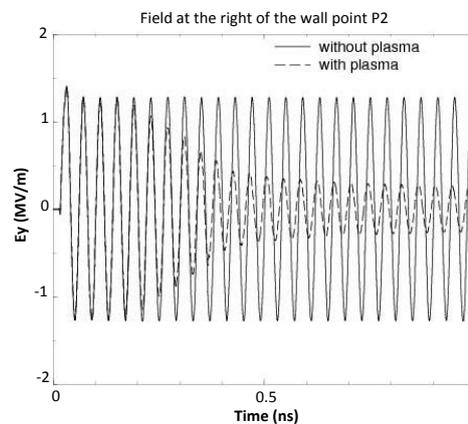


figure .4.27 – Variations temporelles du champ électrique calculé avec la méthode FVTD avec et sans plasma au point de mesure P2 situé au-delà du centre de l'ouverture (à $2,81mm$).

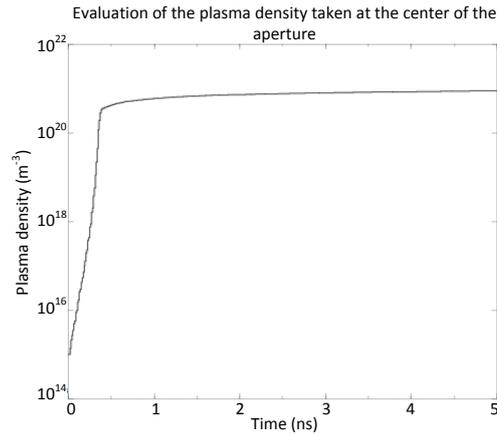


figure .4.28 – Variation temporelle de la densité plasma au centre de l'ouverture.

En conclusion de cette étude, un modèle Maxwell-plasma 2D, basé sur un schéma FVTD, approprié pour étudier le claquage micro-onde et la formation de plasma à haute pression dans une géométrie complexe a été proposé. La capacité du modèle a été illustrée dans le cas d'un claquage dans une ouverture métallique à 100Torr et dans l'air à pression atmosphérique. La formation de plasma dans l'ouverture, produite par un champ électrique élevé, conduit à une protection partielle dans un court laps de temps (0.5ns). Les résultats obtenus montrent que la méthode FVTD est bien adaptée pour prendre en compte le raffinement local du maillage nécessaire dans la région du plasma. Des stratégies de pas de temps local et de parallélisation ont été introduites dans le schéma et ont permis d'améliorer l'efficacité de la méthode en termes de temps calcul et de stockage mémoire.

4.4.2 Protection d'une électronique à l'intérieur d'une cavité

Dans ce nouveau problème, on s'intéresse encore à un problème de blindage par plasma. Dans ce cas, on cherche à protéger une électronique située dans une cavité parfaitement métallique possédant une ouverture et illuminée par une onde de forte puissance (voir figure .4.29). Pour éviter des dommages aux composants, nous suggérons d'utiliser un plasma sur l'ouverture. En effet, comme dans le cas des surfaces sélectives, le champ électromagnétique intense peut provoquer un claquage et initier un plasma. L'onde incidente est alors réfléchiée quand la densité du plasma atteint une valeur critique pour laquelle $\omega \sim \omega_p$, où ω_p est la fréquence de plasma et ω est la fréquence de l'onde incidente.

La figure .4.29 représente la configuration étudiée et la figure .4.30 donne le maillage utilisé dans le calcul FVTD.

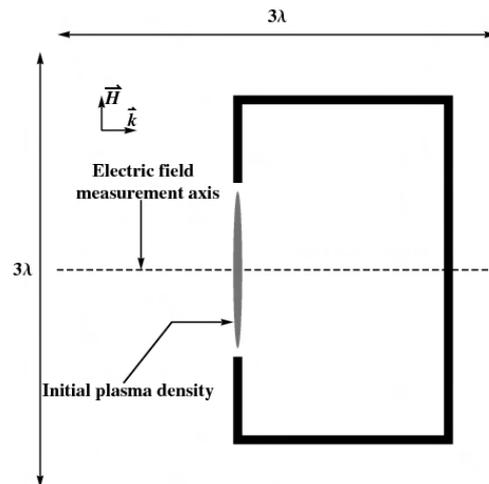


figure .4.29 – Configuration étudiée. Une onde EM incidente d'amplitude 6MV/m et de fréquence 110GHz illumine perpendiculairement l'ouverture située dans la cavité.

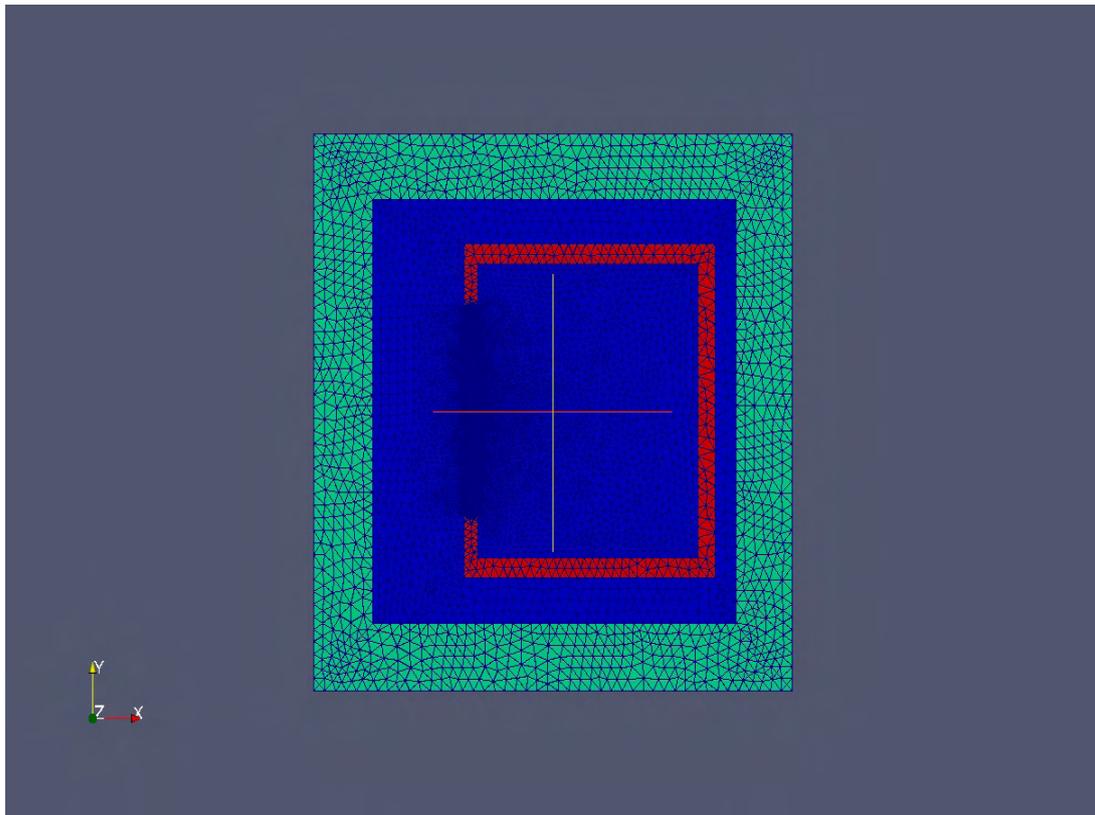


figure .4.30 – Maillage utilisé pour la cavité.

Dans nos simulations, on s'intéresse à l'évolution du champ effectif dans la cavité et à l'évolution de la densité plasma sur l'ouverture. La figure .4.31 représente la cartographie du champ effectif E_{eff} à l'instant $t = 0.1\text{ns}$. On voit sur cette figure que le champ EM pénètre dans la cavité, car le plasma (figure .4.33) n'est pas assez dense pour le réfléchir. A l'instant $t = 3\text{ns}$ (figure .4.32), le champ EM est réfléchi sur

l'ouverture de la cavité, car le plasma a atteint une densité critique suffisante pour réfléchir l'onde ($\omega_p > \omega$) (figure .4.33). Dans les simulations effectuées, nous avons aussi utilisé la méthode différences finies pour un maillage cartésien beaucoup plus fin. On remarque sur ces simulations que les résultats FVTD correspondent à ceux obtenus par la méthode FDTD.

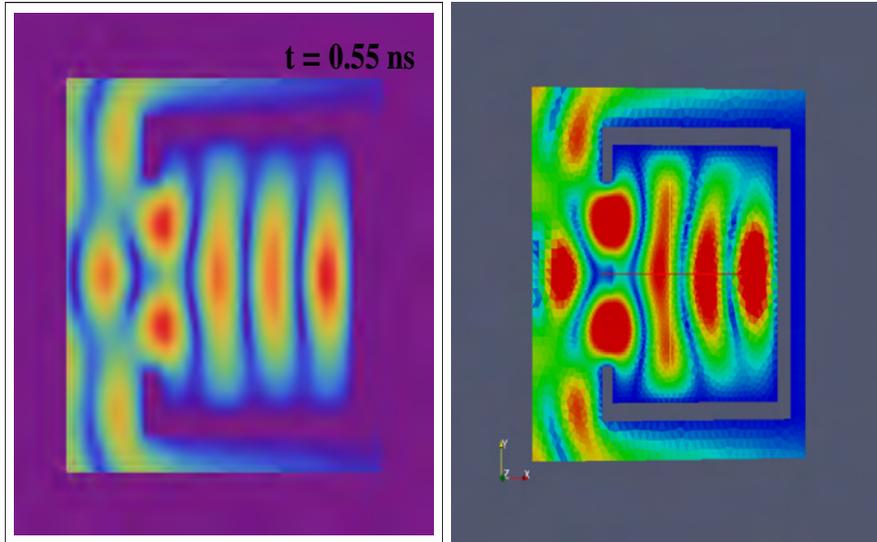


figure .4.31 – Cartographie du champ effectif E_{eff} au temps $t = 0.5ns$ pour une simulation FVTD (gauche) et FDTD(droite).

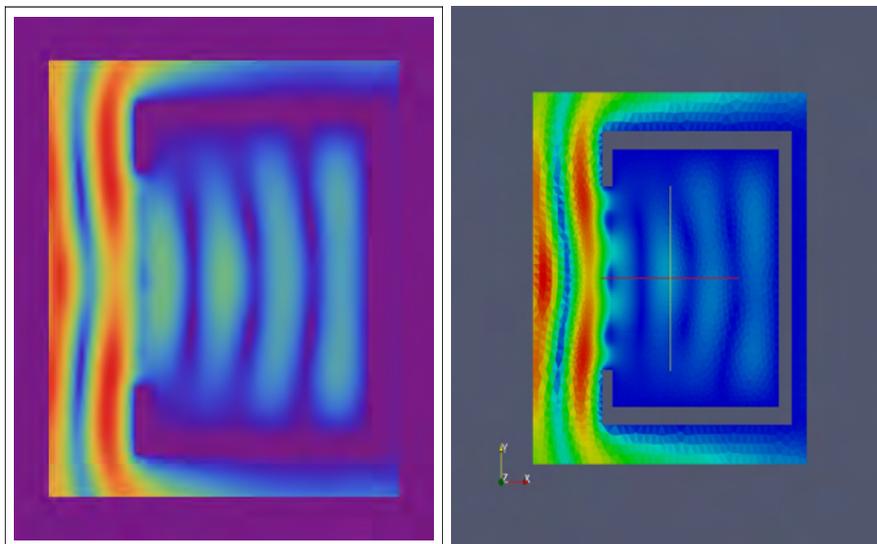


figure .4.32 – Cartographie du champ effectif E_{eff} au temps $t = 3ns$ pour une simulation FVTD (gauche) et FDTD (droite).

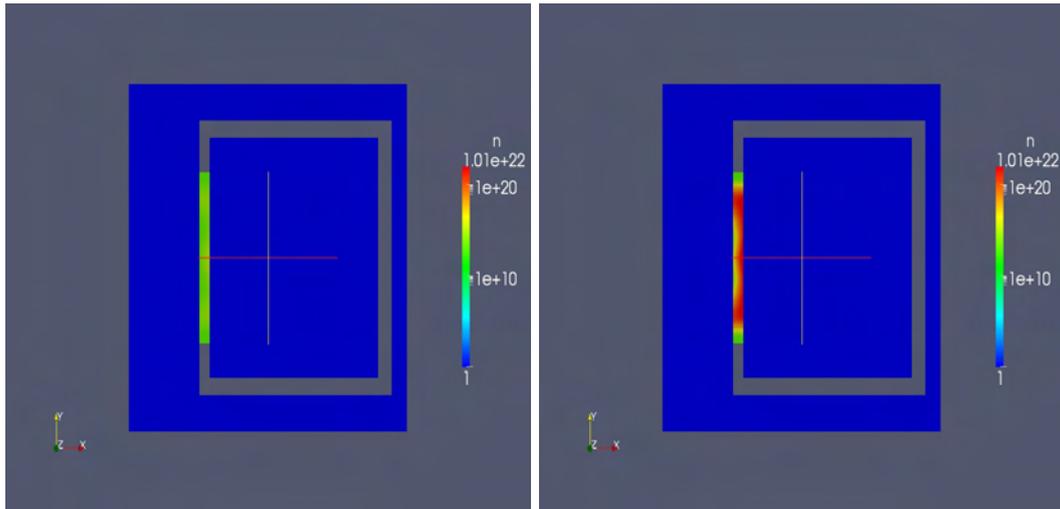


figure 4.33 – Cartographie de la densité électronique aux temps $t = 0.1ns$ (gauche), et $t = 3ns$ (droite)

Comme dans le cas de la surface selective en fréquence, la méthode FVTD mise en oeuvre pour résoudre notre problème de Maxwell/plasma couplé, permet d'avoir des résultats rapides sans trop de stockage mémoire, grâce à l'utilisation d'un raffinement de maillage local au niveau de l'ouverture. De plus, cet exemple a permis de mettre en oeuvre une comparaison FDTD/FVTD sur le problème global Maxwell/plasma qui montre le bon accord sur les résultats obtenus par les deux méthodes. Cela valide encore notre méthode FVTD.

4.5 LIGNE MICRO-RUBAN

En restant toujours dans le cas d'un plasma confiné, on s'intéresse maintenant à la simulation de l'effet sur la propagation du signal d'un plasma situé dans le substrat diélectrique d'une ligne micro-ruban.

L'utilisation de plasmas confinés est aujourd'hui très présente dans de nombreux dispositifs. On peut, par exemple, citer les tubes T/R qui sont utilisés dans les applications radar depuis longtemps [2]. Récemment, des condensateurs à plasma ont été étudiés en tant que composants accordables [105]. D'autres applications mettant en oeuvre le plasma, dans les circuits micro-ondes ou métamatériaux sont aussi à l'étude [5, 6]. Bien que l'utilisation des plasmas semble être plus adaptée aux applications haute puissance, on peut aussi s'en servir, compte tenu de la nécessité croissante, pour des dispositifs reconfigurables à plus faible puissance. Nous proposons ici d'étudier le cas d'un limiteur dans un guide planaire défini par une ligne micro-ruban.

Comme pour les tubes T/R, un plasma à faible pression peut être initié au niveau d'un trou dans le substrat diélectrique d'une ligne micro-ruban. Habituellement, il faut utiliser des micro-ondes de forte puissance pour pouvoir créer ce plasma, mais un champ électrique statique peut également être appliqué entre les deux conducteurs afin d'abaisser la puissance micro-onde requise pour déclencher le plasma. Un

tel dispositif laisse ainsi passer l'onde le long de la ligne pour des puissances inférieure à un seuil paramétrable par la tension statique appliqué. Au dessus de ce seuil, le déclenchement de la décharge dans le trou va réfléchir l'onde incidente le long de la ligne. On obtient donc, comme fonction, un limiteur de puissance.

En termes de résultats, on présente ici l'étude modélisée en 2D sans effet de bordde l'impact du plasma situé dans le substrat diélectrique d'une ligne micro-ruban pour une pression $p = 100\text{Torr}$, sur la propagation du signal électromagnétique. Dans la configuration géométrique que l'on étudie, le diamètre du trou est de 1mm . On utilise une ligne micro-ruban de 50Ω pour une largeur de $1,57\text{mm}$ et un substrat de d'alumine ($\epsilon_r = 10$). Le modèle est décrit sur la figure (.4.34).



figure .4.34 – configuration étudiée.

On envoie une onde TM sur l'entrée de la ligne micro-ruban. Il s'agit d'une onde plane avec un champ E polarisée normalement à la zone de propagation. Elle représente le meilleur modèle 2D possible de la propagation sur la ligne micro-ruban. La fréquence de la source est fixée à 15GHz et l'amplitude du champ électrique est de 2MV/m . Cette amplitude représente environ quatre fois celle du champ électrique critique obtenu par la relation (.4.1) et on n'utilise pas, dans ce cas, de champ statique complémentaire.

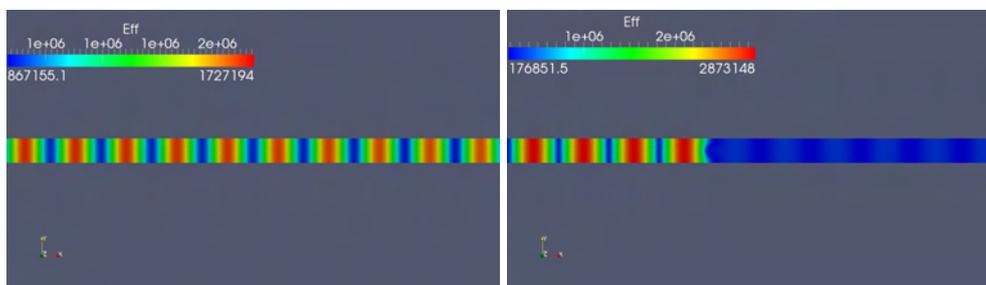


figure .4.35 – Cartographies du champ effectif E_{eff} à $t = 1\text{ns}$ et 50ns .

Nous pouvons voir sur la figure (.4.35) comment l'onde se propage sur la ligne après quelques périodes. Les deux graphiques ont été volontairement agrandis dans la largeur de la ligne, afin de donner une vue détaillée autour du disque qui se situe dans la zone centrale. Quand la densité plasma est faible, nous pouvons voir que le plasma n'affecte pas la propagation de l'onde le long de la ligne. Dès que le plasma atteint des densités électroniques importantes, l'onde est réfléchi. Un défilement temporel permettrait d'observer la nature propagative de l'onde sans plasma et la nature stationnaire de l'onde avec plasma. On peut alors conclure que le plasma agit bien comme un limiteur.

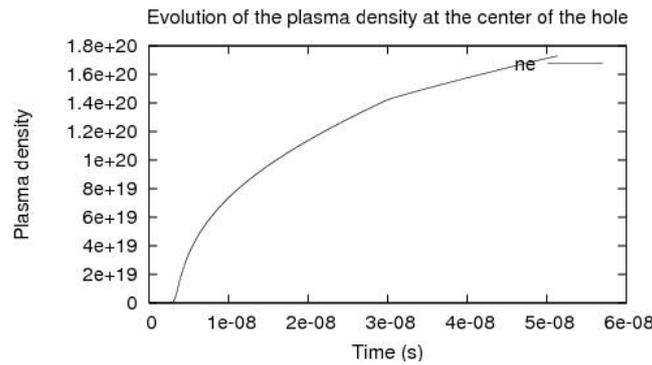


figure .4.36 – Evolution de la densité plasma au centre du disque.

La figure (.4.36) montre que l'évolution de la densité plasma au centre du disque passe par deux étapes. La première étape correspond à une forte ionisation induite par le champ électrique qui se traduit par une rapide augmentation de la densité plasma en $50ns$ jusqu'à atteindre des niveau de densité d'environ $10^{20}m^{-3}$. Dans la deuxième étape, on voit sur la figure que la densité plasma commence à atteindre une forme de saturation, elle réfléchit alors efficacement l'onde incidente.

Pour conclure, dans cette étude, nous avons appliqué une méthode FVTD pour simuler le fonctionnement d'un limiteur plasma 2D qui est essentiellement composé d'un trou dans le substrat d'une ligne micro-ruban. Les effets de base concernant la réflexion de l'onde et le temps nécessaire pour que le plasma atteigne la valeur critique, au-delà de laquelle le plasma commence à réfléchir l'onde ($\omega_p > \omega$), ont été démontrés. Dans nos simulations, un coût calcul d'une journée sur un PC classique, est nécessaire pour atteindre les résultats présentés en raison du maillage de l'ordre de $\lambda/200$.

Des travaux complémentaires sont toutefois nécessaires pour utiliser des configurations plus réalistes et estimer avec précision les coefficients de réflexion et de transmission sur la ligne. Une tension continue (DC) peut être ajoutée au modèle car elle n'affecte que la formule analytique du champ E_{rms} . Enfin, un modèle 3D complet doit être développé, car cela reste le seul moyen d'obtenir un comportement précis de la propagation sur la ligne (effets de bord et impédance caractéristique).

4.6 AUGMENTATION DE LA PRÉCISION DES CHAMPS CALCULÉS DANS UNE CAVITÉ PARFAITEMENT MÉTALLIQUE

Dans les calculs liés au problème de la protection d'une électronique située dans une cavité parfaitement métallique, il reste une difficulté liée aux erreurs de dispersion et de dissipation intrinsèques aux schémas différences finies et volumes finis. En effet, ces erreurs limitent fortement la précision sur le calcul des champs électromagnétiques au niveau de l'ouverture et peuvent donc modifier la forme du plasma. Il est donc important d'évaluer correctement les champs à l'intérieur de la cavité et sur l'ouverture. Pour cela nous nous sommes intéressés à un schéma plus précis comme le schéma Galerkin Discontinu, donné au précédent chapitre, que nous avons étudié sur une cavité fermée 2D.

L'exemple considéré consiste en la simulation d'une solution modale dans une cavité rectangulaire de dimension $a \times b = 1 \times 1$ dont les parois sont parfaitement métalliques.

Les expressions analytiques des modes de résonances sont connues pour cette géométrie et on propose ici de simuler l'évolution temporelle du mode propre (k, l) pour le cas transverse électrique TE_z . Pour cela, nous initialisons dans notre processus numérique, le champ électromagnétique par la solution analytique à $t = 0$, donnée par :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ H_z = \cos(k\pi \frac{x}{a}) \times \cos(l\pi \frac{y}{b}) \end{cases}$$

La solution exacte à un temps t est donnée par :

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\pi k}{\omega b \epsilon_0} \times \cos(k\pi \frac{x}{a}) \times \sin(l\pi \frac{y}{b}) \times \sin(\omega t) \\ E_y = \frac{\pi l}{\omega a \epsilon_0} \times \sin(k\pi \frac{x}{a}) \times \cos(l\pi \frac{y}{b}) \times \sin(\omega t) \\ H_z = \cos(k\pi \frac{x}{a}) \times \cos(l\pi \frac{y}{b}) \times \cos(\omega t) \end{cases}$$

où $\omega = 2\pi f = c_0 \sqrt{(k\frac{\pi}{a})^2 + (l\frac{\pi}{b})^2}$. Dans nos simulations, la fréquence f est prise à 212,13MHz et on choisit $(k, l) = (1, 1)$.

En utilisant la configuration précédente, nous avons réalisé plusieurs simulations en faisant varier le nombre de cellules n dans chaque direction de l'espace, ainsi que l'ordre d'approximation spatiale r du schéma GD. Nous avons commencé par choisir $r = 1$ pour plusieurs valeurs de n (10, 70, 100, 200), en considérant que le nombre de mailles (n_x, n_y) de la grille cartésienne 2D, respectivement en x et en y vérifie $n = n_x = n_y$. La figure .4.37 représente les solutions obtenues avec la méthode GD comparées avec la solution exacte. Les solutions sont très similaires mais en faisant un zoom (figure .4.38), on peut constater une dispersion de la solution pour $n = 10$, et un problème de convergence pour $n = 100$ et $n = 200$.

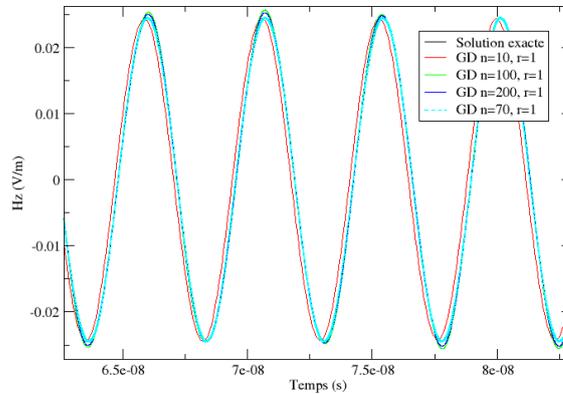


figure .4.37 – Comparaison entre les solutions obtenues avec le schéma GD pour $r = 1$ et la solution exacte.

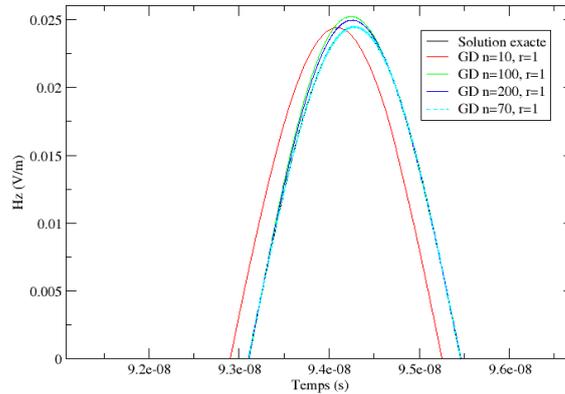


figure .4.38 – Zoom sur la comparaison des solutions GD pour $r = 1$ avec la solution exacte.

Au niveau du temps de calcul et des degrés de liberté (d.o.f) pour $r = 1$, nous avons :

	temps de calcul	d.o.f
$n_x = 10, r = 1$	0.4s	1200
$n_x = 70, r = 1$	10.4s	58800
$n_x = 200, r = 1$	1559s	480000

table .4.1 – Comparaison des temps de calcul et des d.o.f du schéma GD pour $r = 1$.

Si on résume les premiers résultats obtenus avec la méthode GD en considérant $r = 1$, nous constatons :

- une solution correcte pour $n = 70$ avec un gain de temps et de mémoire par rapport à une solution différences finies, puisqu'on a moins de degrés de liberté ;
- un problème de dissipation après quelques pas de temps pour $n = 10$. Notre discrétisation spatiale n'est alors visiblement pas assez précise ;
- concernant les autres valeurs de n , on voit que le schéma ne semble pas converger vers la solution exacte. Ceci n'est pas surprenant car une étude [89] avait déjà fait apparaître cet inconvénient sur l'approche GD centrée.

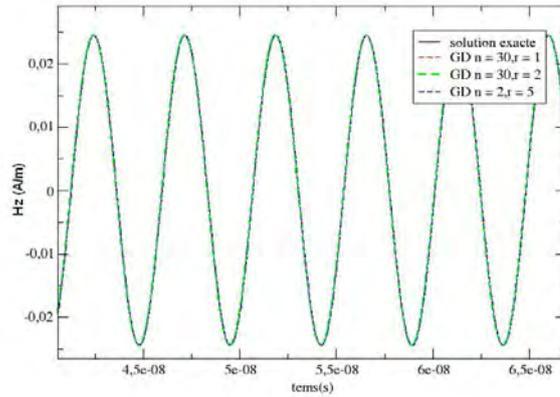


figure .4.39 – Comparaison des solutions GD pour différentes valeurs de r .

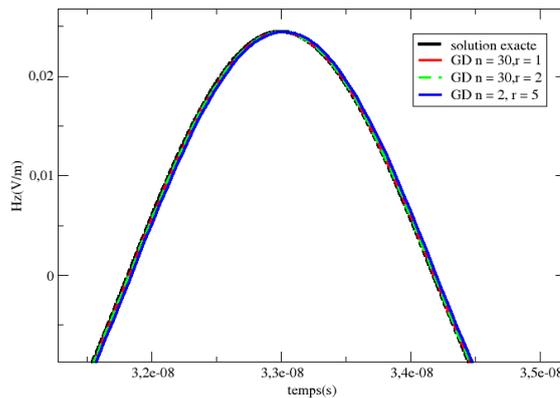


figure .4.40 – Zoom sur la comparaison des solutions GD pour différentes valeurs de r .

	temps de calcul	d.o.f
$n_x = 30, r = 1$	5.2s	10800
$n_x = 30, r = 2$	34.9s	24300
$n_x = 2, r = 5$	0.7s	432

table .4.2 – Comparaison des temps de calcul et des d.o.f de la méthode GD pour différentes valeurs de r .

Comme le montrent les figures (.4.39), (.4.40) et le tableau (.4.2), on a intérêt pour une précision équivalente à monter en ordre et à diminuer le nombre de mailles.

Dans un troisième jeu de simulation, pour une petite valeur de n fixe ($n = 2$) on fait varier r . La figure (.4.41) montre qu'avec $r = 1$, la solution ne converge pas vers la bonne solution alors qu'avec $r = 5$ ou 7 nous obtenons une bonne approximation de la solution exacte avec moins de mailles et donc, un important gain de temps

calcul et de stockage mémoire.

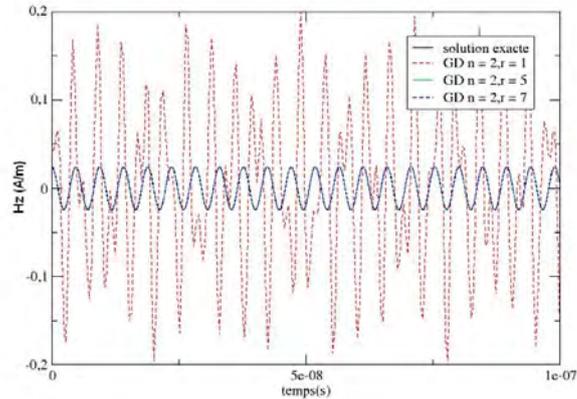


figure .4.41 – Comparaison des solutions GD pour $n = 2$ et pour différents valeurs de r .

Cet exemple confirme le bon comportement de la solution GD pour un ordre élevé du point de vue de la précision, du stockage et par conséquent, du temps CPU.

Comparaison entre GD et FDTD

Dans cette section, nous allons analyser le comportement des solutions FDTD vis-à-vis de celles obtenues par la méthode GD dans une même situation. Pour un calcul FDTD, une solution précise demande un nombre important de cellules dans chaque direction. La figure (.4.42) nous montre que plus on augmente le nombre de cellules, plus l'erreur de dispersion sur la solution est diminuée. La meilleure solution dans notre problème est obtenue pour $n = 300$, même si elle reste imparfaite comme le montre la figure (.4.43)

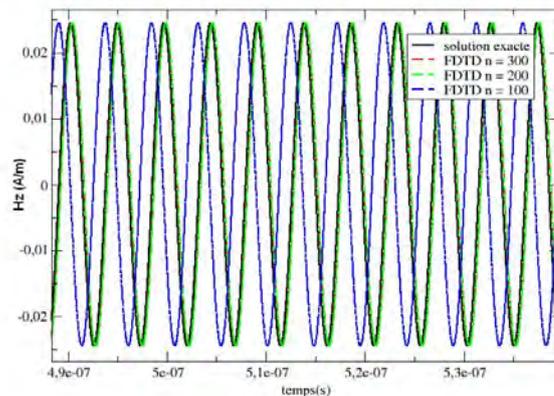


figure .4.42 – Comparaison des solutions FDTD pour différentes valeurs de n .

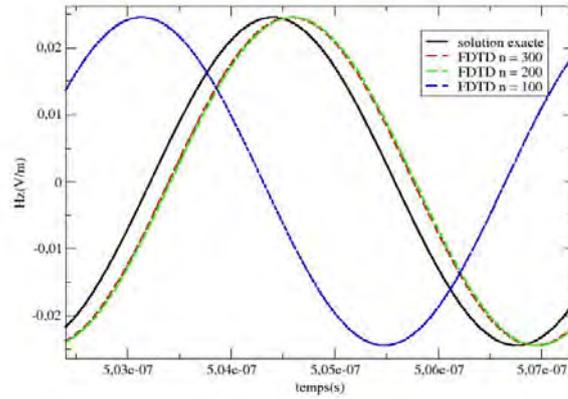


figure .4.43 – Zoom sur la comparaison des solutions FDTD pour différentes valeurs de n .

Au niveau du temps de calcul et du nombre de degrés de liberté, on remarque assez naturellement que ceux-ci évoluent avec le nombre de cellules utilisées dans le schéma.

	temps calcul	d.o.f
$n_x = 100$	18s	30000
$n_x = 200$	180s	120000
$n_x = 300$	223s	270000

table .4.3 – Comparaison des temps calcul et des d.o.f de la méthode FDTD pour différentes valeurs de n .

En comparant sur les figures (.4.44) et (.4.45) les solutions FDTD et GD, on observe le gain en précision, temps calcul et mémoire fournit par l'approche GD.

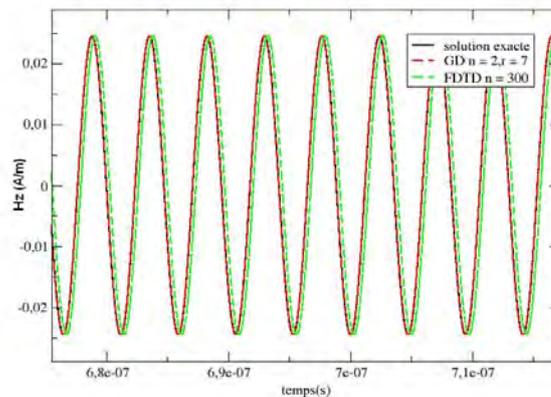


figure .4.44 – Comparaison des solutions GD et FDTD.

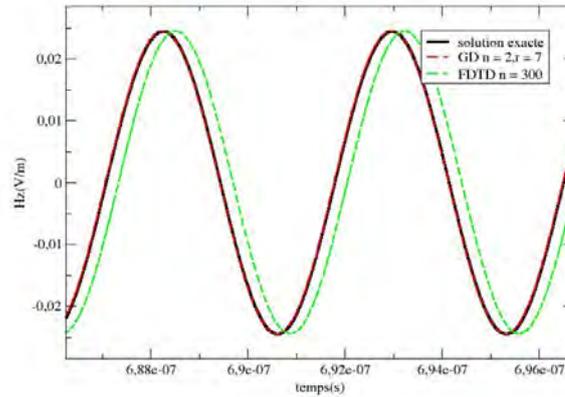


figure .4.45 – Zoom sur la comparaison des solutions GD et FDTD.

En ce qui concerne le temps de calcul et la mémoire, la méthode GD est beaucoup plus efficace que la méthode FDTD. En effet, celle-ci est plus rapide et demande moins de mémoire (voir table .4.4).

	temps de calcul	d.o.f
GD, $n_x = 2, r = 5$	0.7s	432
FDTD, $n_x = 300$	223s	270000

table .4.4 – Comparaison des temps de calcul et du nombre de d.o.f entre les méthodes GD et FDTD.

Comparaison entre FVTD, GD et solution exacte

Dans cette partie, on compare les résultats obtenus par les méthodes volumes finis et Galerkin Discontinue ($r = 2$) sur un même maillage avec la solution exacte (avec $(k, l) = (2, 2)$). On constate alors, que pour des temps courts (voir figure .4.46), les deux méthodes donnent une très bonne approximation de la solution. Toutefois, si on simule le même phénomène sur des temps plus longs, on observe une dissipation importante pour le schéma FVTD (voir figure .4.47). Ce phénomène de dissipation est connu et demande un pas de maillage plus petit pour être amélioré. Dans ce cas les gains obtenus, en termes de temps CPU et stockage mémoire, par la méthode GD par rapport au calcul FVTD sont évidents (voir table .4.5).

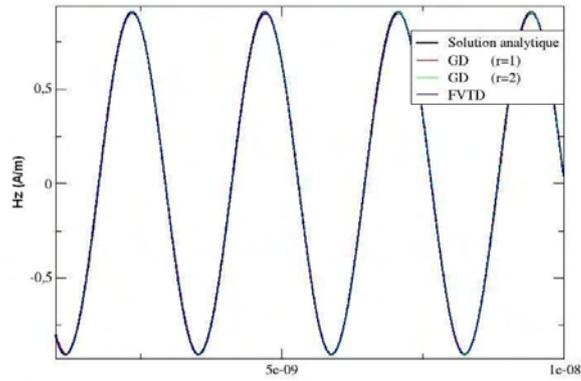


figure .4.46 – Comparaison de la solution FVTD et de la solution exacte pour des temps courts.

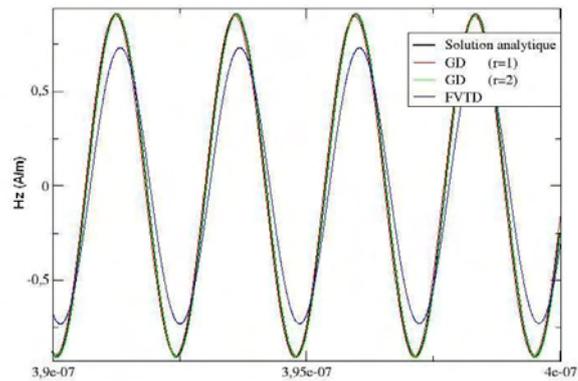


figure .4.47 – Comparaison de la solution FVTD et de la solution exacte pour des temps longs.

	temps de calcul	d.o.f
GD , $r = 1$	1020s	120000
GD , $r = 2$	6840s	270000
FVTD	1620s	30000

table .4.5 – Comparaison des temps de calcul et du nombre de d.o.f entre les méthodes GDTD et FVTD.

Conclusion

Les tests numériques en 2D ont montré la bonne précision des solutions obtenues par la méthode Galerkin Discontinue d'ordre élevé et un gain au niveau mémoire et temps calcul.

En comparaison avec des méthodes FDTD et FVTD, on remarque que la méthode

Galerkin Discontinue donne la meilleure approximation, alors que les méthodes différences finies et volumes finis présentent de la dispersion et de la dissipation. La méthode des différences finies est aussi plus lente et demande un plus grand stockage par rapport à la méthode de Galerkin Discontinue.

4.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons proposé et mis en oeuvre des stratégies de parallélisation pour les schémas différences finies et volumes finis adaptés à la résolution du problème Maxwell/plasma couplé. On a pu ainsi montrer une première simulation en 3D pour traiter l'interaction d'un champ électromagnétique avec une densité de plasma volumique. Ces premiers résultats sont encourageants, mais demandent encore à être affinés sur d'autres configurations. Concernant les problèmes auxquels on s'est intéressé, nous avons mis en avant :

- l'interaction micro-onde/plasma en espace libre ;
- l'effet de blindage par plasma ;
- la protection d'électronique située dans une cavité parfaitement métallique et présentant une petite ouverture ;
- l'effet limiteur dans une ligne micro-ruban.

Sur l'ensemble de ces configurations, on a pu montrer les avantages du schéma volume finis mis au point dans cette thèse, par rapport au schéma différences finies, pour traiter les problèmes où le plasma reste localement confiné dans le domaine de calcul.

Enfin, concernant les calculs mettant en jeu des cavités parfaitement métalliques, nous avons pu constater que les erreurs de dispersion ou de dissipation numériques peuvent modifier les niveaux et la forme de la densité plasma. Pour éviter cela, nous avons proposé et étudié une méthode GD.

MAILLAGE ADAPTATIF MONODIMENSIONNEL

SOMMAIRE

5.1	INTRODUCTION	129
5.2	PROBLÈME 1D MAXWELL/PLASMA COUPLÉ	130
5.2.1	Formulation mathématique et approximation	131
5.2.2	Configuration 1D	132
5.3	MAILLAGE ADAPTATIF	137
5.3.1	Principe du raffinement	138
5.3.2	Principe du déraffinement	138
5.3.3	Etudes numériques sur l'influence des paramètres de raffinement/déraffinement	138
5.4	CONCLUSION	147

5.1 INTRODUCTION

Lors des simulations numériques (éléments finis, volumes finis, différences finies) le coût calcul, la précision de la solution et la qualité du maillage sont étroitement liés. Ainsi, la simulation numérique de l'interaction micro-onde/plasma demande un maillage raffiné dans certaines régions du domaine près des zones où le gradient de densité est très grand afin de mieux décrire le déplacement des fronts du plasma. Pour réaliser cela à partir d'un maillage statique, il faudrait que celui-ci ait un pas spatial très petit sur tout le domaine de calcul. En effet le front se déplace sur la totalité du domaine. Un tel maillage conduit à des temps de calcul importants. Pour éviter cela, il apparaît intéressant de pouvoir utiliser un maillage qui s'adapte au cours du temps pour tenir compte du front plasma.

Il existe dans la littérature, plusieurs stratégies d'adaptation de maillage. Parmi cet ensemble, on distingue deux grandes classes :

- une première classe où le maillage adaptatif s'effectue sans changement de topologie ; c'est-à-dire sans l'ajout ou la suppression de points dans le maillage. A chaque instant les points du maillage changent de positions et définissent une dynamique que l'on peut modéliser par une équation aux dérivées partielles appelée MMPDE (Moving Mesh Partial Differential Equation) [106][107] [108] ou par un changement de métrique ;
- une seconde classe où le maillage adaptatif s'effectue avec un changement de topologie. Les méthodes de cette classe sont basées sur un raffinement/déraffinement des éléments du maillage.

Dans ce travail, on s'intéresse uniquement à la seconde classe de maillages où l'adaptation du maillage consiste à modifier la topologie en augmentant la concentration nodale là où l'erreur est élevée (en d'autres termes là où le gradient de densité est élevé) et, inversement, en diminuant cette densité nodale là où l'erreur est faible. Cette adaptation s'effectue dynamiquement au cours du temps et de façon simultanée avec l'intégration de la solution.

Cette stratégie conduit d'une part à diminuer la taille des cellules dans les régions de fort gradient de densité, ce qui doit avoir pour effet d'améliorer la qualité de la solution numérique, et d'autre part de réduire le temps calcul par un maillage plus grossier dans les régions de densité électronique uniforme. L'utilisation de l'adaptation du maillage est d'autant plus justifiée que le phénomène physique (diffusion de la densité de plasma) se déplace dans tout le domaine de calcul.

Dans cette thèse, la simulation de l'interaction micro-onde plasma est décrite par le couplage des équations de Maxwell avec celles du plasma (une équation de diffusion pour décrire la densité du plasma et une équation différentielle du premier ordre décrivant la vitesse).

La résolution des équations de Maxwell sur un maillage localement raffiné en utilisant un schéma de Yee (méthode FDTD) a été traitée dans plusieurs travaux [66] [109] [67] [110]. Malheureusement, les schémas résultant semblent être difficile à analyser et peuvent souffrir de certains phénomènes d'instabilité [65]. Plus récemment, Joly et Fouquet [111] ont proposés une méthode garantissant un raccord stable à l'interface des grilles. Cependant ils montrent que la qualité de la solution se dégrade après deux niveaux de raffinement à cause de la dispersion. Une méthode volumes finis (FVTD) peut être aussi utilisée sur un maillage localement raffiné. Citons par exemple les travaux de Osher et Sanders [112], et aussi les travaux de Canouet et al [113]. Le principal avantage de la méthode volumes finis par rapport à une méthode différences finies est l'extension directe au cas de maillage non structurés [114] en deux ou trois dimensions.

Dans ce chapitre, nous allons étudier la possibilité d'utiliser une stratégie de maillage auto-adaptatif dans le cas 1D sur un schéma volumes finis. Pour cela nous comparerons numériquement celle-ci par rapport à un calcul sur maillage statique très fin. On tirera ainsi les avantages et les inconvénients d'une telle approche pour traiter notre problème Maxwell/plasma. Ceci nous permettra de définir les bases d'une même approche dans les cas 2D et 3D pour les futures évolutions de notre méthode.

5.2 PROBLÈME 1D MAXWELL/PLASMA COUPLÉ

Dans ce paragraphe, nous présentons le problème 1D pour lequel nous étudions une approche de maillage adaptatif. Nous décrivons la formulation mathématique et son approximation dans un premier temps, puis nous donnons un exemple pour lequel des solutions sans et avec maillages adaptatifs sont comparées dans le paragraphe suivant.

5.2.1 Formulation mathématique et approximation

Dans cette partie, avant de nous intéresser à une stratégie de maillage adaptatif, nous décrivons le problème 1D et une approximation de celui-ci basée sur l'approche volumes finis.

Les équations de Maxwell dans un milieu hétérogène, linéaire et isotrope s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (.5.1)$$

où $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ et $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ définissent respectivement le champ électrique et le champ magnétique.

Pour avoir une version monodimensionnelle des équations de Maxwell (.5.1), nous considérons que la direction de propagation est $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$ et que la polarisation du vecteur de champ électrique est telle que $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$. La polarisation du vecteur magnétique est déduite du produit vectoriel $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mathbf{H} = (0, 0, H_z)$. De plus, nous supposons que E_y et H_z sont des fonctions de x et de t . Pour plus de simplicité, nous notons E au lieu de E_y et H au lieu de H_z . Les équations de Maxwell 1D peuvent être écrites comme :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \mu \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (.5.2)$$

En ce qui concerne le plasma, celui-ci est décrit en 1D par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial n_e}{\partial t} - (D_{eff} n_e')' = v_{eff} n_e \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v_m v = \frac{q}{m} E \end{cases} \quad (.5.3)$$

où n_e et v définissent respectivement la densité plasma et la vitesse de celui-ci. Les constantes m et q représentent la charge d'une particule du plasma (on ne considère ici que des électrons) et sa masse. Les termes D_{eff} , v_{eff} et v_m sont habituels.

Concernant la discrétisation du problème 1D, nous définissons $\Omega = [0, 1]$, $\Omega_0 = [a_0, b_0]$ et $\Omega_1 = [a_1, b_1]$ tels que $\Omega_1 \subset \Omega_0 \subset \Omega$ avec $0 < a_0 < a_1 < b_1 < b_0 < 1$. Les ensembles Ω , Ω_0 et Ω_1 représentent respectivement le domaine de calcul, le volume séparant le calcul du champ diffracté avec le champ total, sachant que ce dernier est calculé à l'intérieur de Ω_0 et enfin, le domaine où réside le plasma. En termes de conditions limites nous appliquons :

- une condition de Silver-Muller ou de non réflexion des ondes électromagnétiques, qui est une condition exacte en 1D, et définie sur $\partial\Omega$ par :
 $\varepsilon_0 \mathbf{n} \times \mathbf{E} + \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$ avec $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ ou $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$;
- une condition $n_e = 0$ sur $\partial\Omega_1$.

On définit ensuite une partition \mathcal{T}_h de n segments T_i telle que $\Omega = \bigcup_{i=1, n} T_i$. Le choix de Ω_1 , Ω_0 et de la partition \mathcal{T}_h est effectué afin que Ω_1 et Ω_0 soient définis par un recouvrement d'un sous ensemble de \mathcal{T}_h .

Soit un élément $T_i = [x_i, x_{i+1}]$ de longueur dx_i , nous définissons sur celui-ci E_i , H_i , n_{ei} et v_i comme étant respectivement les champs électrique et magnétique, la

densité et la vitesse électronique supposés constants sur l'élément. La discrétisation des équations de Maxwell en utilisant un schéma leap-frog en temps est donnée par :

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{H_i^{n+1/2} - H_i^{n-1/2}}{dt} = \frac{FE_i^n}{dx_i} \\ \varepsilon_0 \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{dt} = \frac{FH_i^{n+1/2}}{dx_i} \end{cases} \quad (.5.4)$$

avec

$$\begin{cases} FE_i^n = \frac{1}{2}(E_{i+1}^n - E_{i-1}^n) + \alpha \frac{c_0}{2}(H_{i+1}^{n+1/2} + H_{i-1}^{n+1/2} - 2H_i^{n+1/2}) \\ FH_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(H_{i+1}^{n+1/2} - H_{i-1}^{n+1/2}) + \alpha \frac{c_0}{2}(E_{i+1}^n + E_{i-1}^n - 2E_i^n) \end{cases} \quad (.5.5)$$

où $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Dans l'approximation numérique choisie, nous ne considérons pas une correction des flux avec une méthode MUSCL.

En espace libre, le schéma volumes finis ainsi décrit est numériquement stable sous la condition $dt \leq \min_{i=1,N} dx_i / c_0$

Concernant le modèle de plasma fluide, dans l'approximation numérique, nous utilisons un schéma d'Euler implicite en temps pour le calcul des vitesses électroniques et un schéma d'Euler explicite en temps pour la densité électronique.

On obtient alors pour l'équation de la vitesse :

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{dt} + \nu_c v_i^{n+1} = \frac{q_e}{m_e} E_i^{n+1} \quad (.5.6)$$

avec q_e , m_e et ν_c des constantes du problème qui représentent respectivement la charge et la masse électronique et la fréquence de collision electron/neutre.

Pour l'équation de la densité électronique, nous avons :

$$\frac{n_{e_i}^{m+1} - n_{e_i}^m}{dt_{ne}} - \nu_{eff_i}^m n_{e_i}^m = \frac{Fm}{dx_i} \quad (.5.7)$$

où

$$\begin{cases} \nu_1 = 2 \frac{n_{e_{i+1}}^m - n_{e_i}^m}{dx_i + dx_{i+1}} \\ \nu_2 = 2 \frac{n_{e_{i-1}}^m - n_{e_i}^m}{dx_i + dx_{i-1}} \\ Fm = (\nu_1 + \nu_2) D_{eff_i}^m + \nu_1 D_{eff_{i+1}}^m + \nu_2 D_{eff_{i-1}}^m \end{cases} \quad (.5.8)$$

Les termes $\nu_{eff_i}^m$ et $D_{eff_i}^m$ dépendent des valeurs de champs E et sont définis comme décrit dans le chapitre 3. Dans cette approximation, on choisit un pas de temps dt_{ne} qui est un multiple de dt . En terme de critère de stabilité, l'équation sur la densité est stable sous la contrainte :

$$dt_{ne} \leq \frac{\min_{i=1,n} dx_i^2}{D_e} \quad (.5.9)$$

avec D_e constante définissant le coefficient de diffusion électronique et vérifiant $D_{eff_i}^m \leq D_e \forall i$ et m .

5.2.2 Configuration 1D

Dans cette partie nous décrivons la configuration de calcul qui nous servira par rapport à la stratégie de maillage auto-adaptatif présentée dans le paragraphe suivant.

Le domaine de calcul Ω est défini par $[0, 12mm]$. Nous positionnons sur celui-ci, une densité de plasma $n_e(t = 0, x) = n_{e0} \exp(-((x - x_0)/r_0)^2/2)$ avec $n_{e0} = 1.e14$, $x_0 = 8mm$ et $r_0 = 0.1mm$. Nous illuminons le domaine de calcul avec une onde plane donnée par $(k_x, E_y = E_0 \sin(\omega(t - k_x(x - x_s)/c_0)), H_z = k_x \times E_y)$, où $E_0 = 6MV/m$, $\omega = 2\pi/f_0$, $f_0 = 100GHz$ et $x_s = 0$.

Le plasma est confiné dans une zone $\Omega_1 = [0.4mm, 11.6mm]$ et nous travaillons à pression atmosphérique ($P = 760Torr$). Les figures .5.1 et .5.2 montrent respectivement l'évolution spatiale du champ effectif et de la densité électronique à différents instants et pour différents pas de maillage. Nous notons sur ces figures que l'on a une convergence de la solution pour un pas de maillage égal à $\lambda/500$ où λ définit la longueur d'onde associée à la source. En dessous de cette valeur, nous notons un décalage sur le front d'onde.

On note aussi sur ces figures qu'un front de densité plasma se propage vers la source de l'onde et que celle-ci disparaît au fur et à mesure. Dans la zone plasma, on retrouve un ensemble de pics et une forme du plasma en "fishbone". Ces différentes crêtes sont équidistantes en espace pour une longueur de l'ordre de $\lambda/5$. Ce type de résultats est similaire à celui obtenu dans la thèse de Guo Quiang-Zhu [22][115].

On note aussi sur cet exemple que les densités de plasma évoluent très rapidement sur des zones spatiales où le champ est élevé. On obtient alors spatialement de forts gradients de densités dans ces zones. Il apparaît alors nécessaire d'avoir une discrétisation de l'espace très précise à cet instant t dans ces zones spatiales. Ne pouvant pas raisonnablement mailler le domaine de calcul trop finement pour tenir compte de ce phénomène physique, une solution de maillage auto-adaptatif dans le temps semble être la solution la plus efficace.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés au même problème, mais avec une pression plus faible $P = 100Torr$ et une amplitude de l'onde incidente $E = 2MV/m$. Les figures .5.3 et .5.4 montrent l'évolution des densités électroniques et du champ effectif pour différentes discrétisations spatiales.

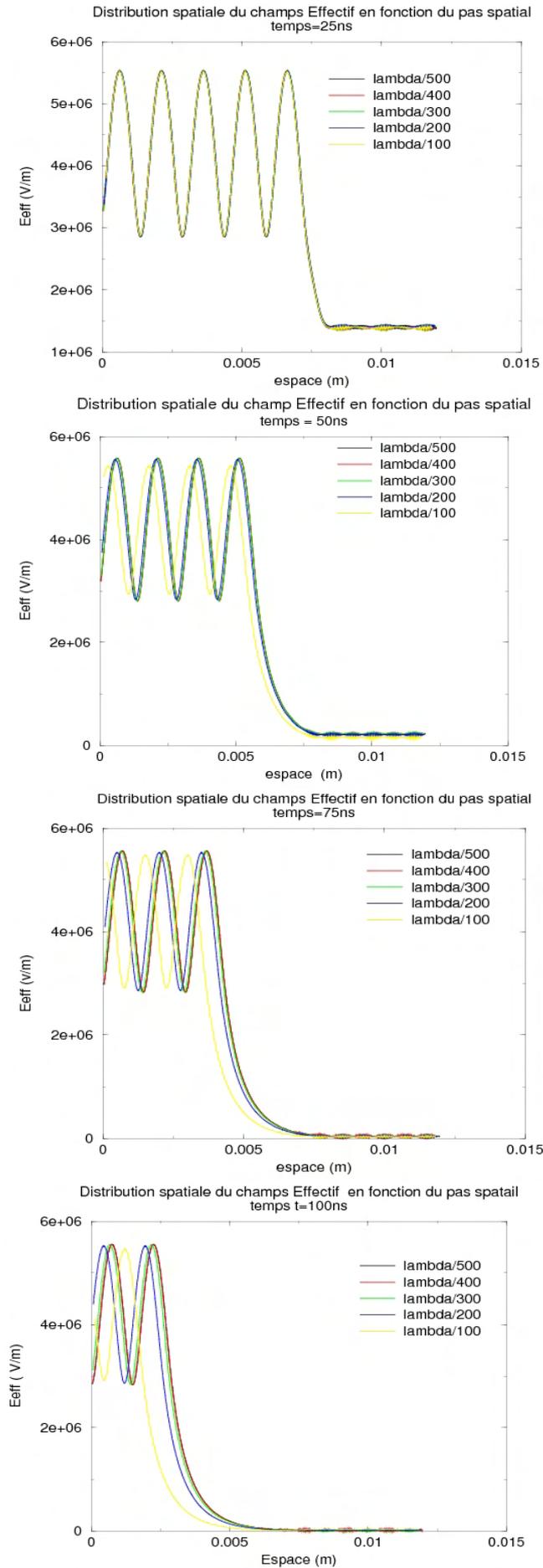


figure .5.1 – Evolution spatiale du champ effectif à différents instants et pour différents pas de maillage.

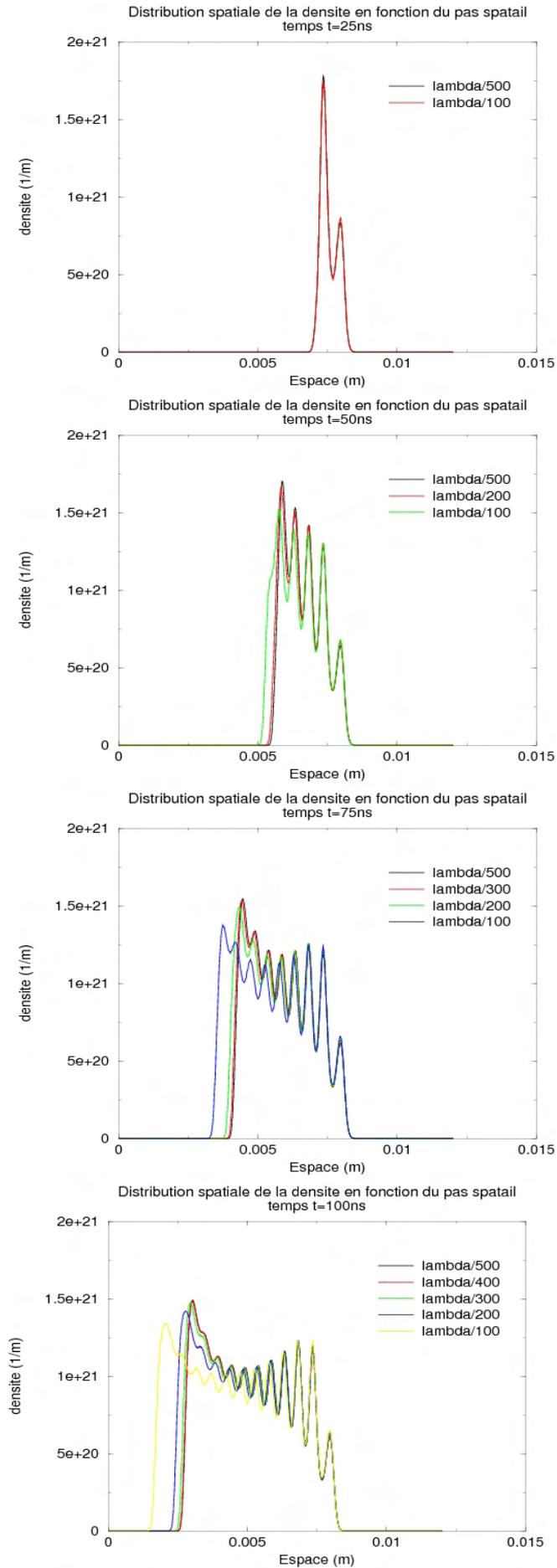


figure .5.2 – Evolution spatiale de la densité électronique à différents instants et pour différents pas de maillage.

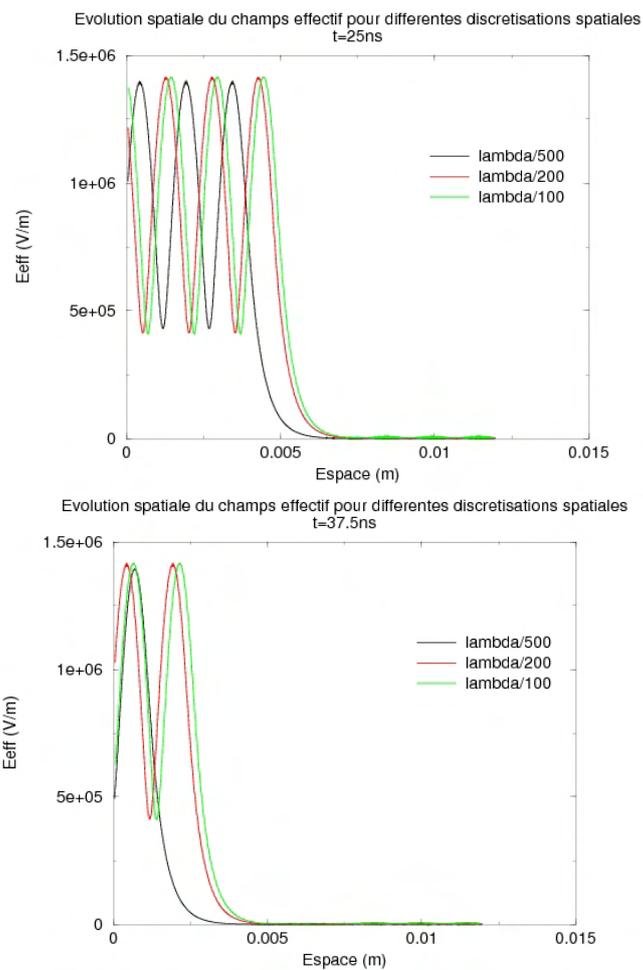


figure .5.3 – Evolution spatiale du champ effectif à différents instants et pour différents pas de maillage.

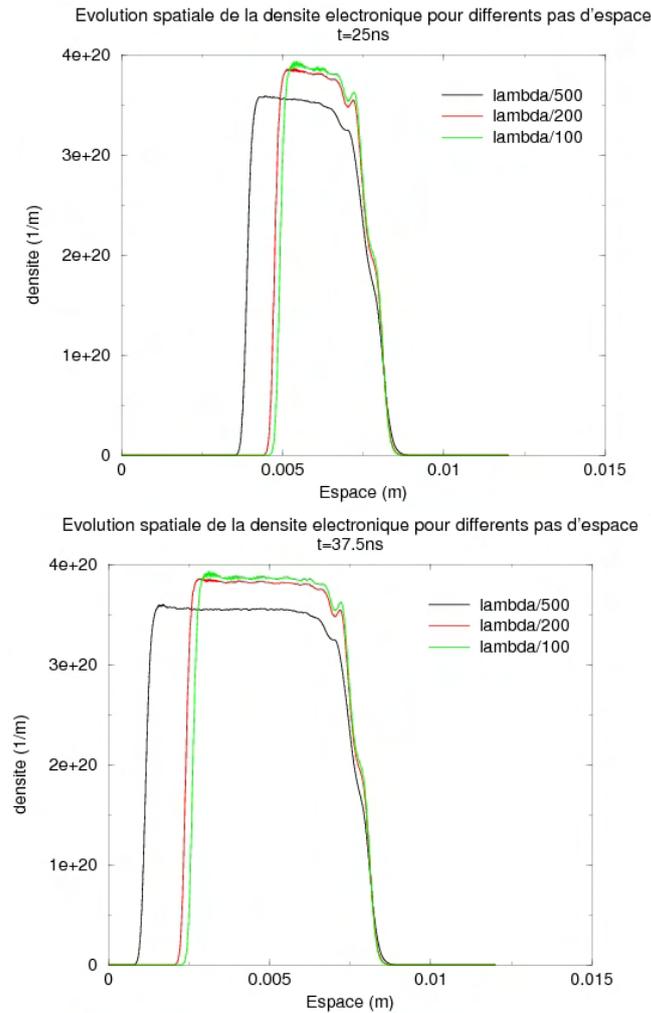


figure 5.4 – Evolution spatiale de la densité électronique à différents instants et pour différents pas de maillage.

On note sur ces résultats un comportement analogue à ceux obtenus avec une pression atmosphérique. De plus, dans ce cas, il n’y a création que d’un front de plasma évoluant dans le sens opposé à l’incidence. Cette particularité est intéressante pour tester une approche en maillage adaptatif car dans ce cas, le maillage devrait s’adapter au cours du temps sur ce front. C’est pourquoi, dans la suite de ce chapitre nous nous focaliserons plus particulièrement sur cette configuration.

5.3 MAILLAGE ADAPTATIF

A partir des équations du problème précédent, nous allons proposer un critère de raffinement puis de déraffinement des cellules, basé sur l’évolution de la densité du plasma. En effet, c’est lorsque celle-ci varie rapidement que l’on souhaite améliorer la précision de notre simulation. Il apparait donc naturel de travailler dans un premier temps sur un critère empirique basé sur la valeur du gradient de la densité électronique.

5.3.1 Principe du raffinement

Nous évaluons pour chaque cellule du maillage à un temps t donné la valeur du gradient de la densité électronique en utilisant les données des cellules voisines :

$$\tau_k = \int_K \frac{\partial n_e}{\partial x} dx = n_{e_k}^+ - n_{e_k}^- \quad (.5.10)$$

avec :

$$n_{e_k}^+ = \frac{n_{e_k} + n_{e_{k+1}}}{2}$$

$$n_{e_k}^- = \frac{n_{e_k} + n_{e_{k-1}}}{2}$$

En fait, on ne considérera pas τ_k , comme critère dans nos raffinements, mais plutôt le taux de variation relatif $\eta_k = \tau_k / n_{e_k}$. Les temps liés à cette évaluation correspondent aux temps de calcul liés à l'évolution du plasma.

Nous fixons ensuite un seuil pour lequel la cellule contenant une valeur de gradient de densité supérieure à ce seuil sera découpée en 2. On affectera ensuite à ces 2 cellules la valeur de la cellule avant découpage. Dans cette stratégie, nous définissons une hiérarchie de maillages où 2 cellules proviennent d'une cellule mère ou bien appartiennent au maillage initial. Pour éviter un raffinement trop important d'une zone, nous fixons le niveau maximal de découpage d'une cellule mère.

5.3.2 Principe du déraffinement

Au cours du temps, nous évaluons le gradient de la densité électronique en chaque cellule. Pour chaque cellule mère, nous comparons les gradients de densité des cellules appartenant à celle-ci. Dans le cas où ceux-ci sont inférieurs à une valeur donnée, nous regroupons les cellules entre-elles. Dans cette stratégie, nous voyons que partant d'un maillage donné, nous pouvons raffiner chaque cellule du maillage ou regrouper des cellules raffinées entre-elles, mais que nous ne pouvons pas avoir un maillage plus grossier en termes de dimensions de cellules que le maillage initial. Afin de mieux décrire la stratégie de raffinement/déraffinement, la figure (.5.5) montre différentes étapes du processus.

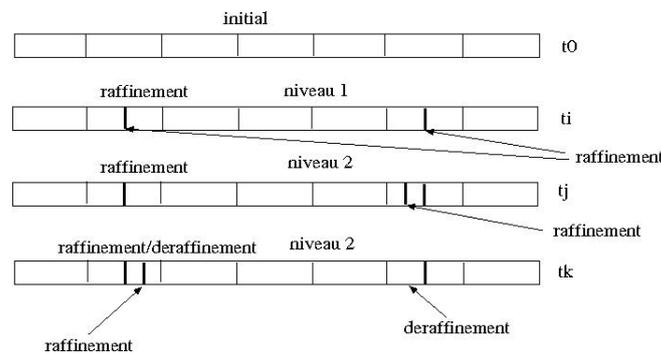


figure .5.5 – Différentes étapes du processus de raffinement/déraffinement.

5.3.3 Etudes numériques sur l'influence des paramètres de raffinement/déraffinement

La stratégie d'adaptation de maillage que l'on propose, comporte plusieurs choix de paramètres qui sont :

- le niveau hiérarchique de découpage de chaque cellule. Ce paramètre $ndiv$ est tel que partant d'une dimension h pour une cellule, on peut avoir des cellules découpées de dimension $h_{ndiv} = h/2^{ndiv}$;
- la valeur d'accroissement limite η_{max} au-delà de laquelle on découpe la cellule ;
- la valeur d'accroissement limite η_{min} en dessous de laquelle on regroupe deux cellules de même niveau de découpage.

Dans ce sous-paragraphe, on se propose d'étudier l'influence de ces paramètres sur la qualité de la solution et sur les gains que l'on peut attendre d'une méthode de maillage auto-adaptatif sur la résolution de notre problème.

Dans cette étude numérique, nous n'allons pas chercher à obtenir la solution la plus précise, mais plutôt chercher à voir comment à partir d'un maillage grossier, on peut, grâce à une stratégie de maillage adaptatif, obtenir une solution aussi précise que sur un maillage beaucoup plus fin. Pour cela, nous allons tout d'abord, évaluer la solution sur différents maillages statiques dont les longueurs de mailles sont données par $\lambda/50$, $\lambda/100$, $\lambda/200$ et $\lambda/400$ où λ définit la longueur d'onde correspondant à une fréquence de 110Ghz. Ce choix de maillages n'est pas fait au hasard. En effet, si on considère la solution du maillage en $\lambda/400$ comme étant la solution de référence, on utilisera des raffinements avec une hiérarchie de maillage en 1, 2 et 3 niveaux, partant de maillages initiaux, respectivement, en $\lambda/200$, $\lambda/100$ et $\lambda/50$. Dans ces configurations, chaque maillage final ne pourra pas être supérieur au maillage de référence en $\lambda/400$ en termes d'éléments. Il sera alors intéressant de comparer les solutions obtenues avec le maillage de référence.

Concernant les solutions sur maillages statiques, on évalue une dizaine de cartographies de la densité électronique sur un intervalle de temps allant de 0 à 35ns et on relève dans le tableau (.5.1) les temps de calculs, les pas de temps utilisés et le nombre de cellules dans le maillage.

Configurations	T_R ratio en temps	nombre de mailles	pas de temps
$\lambda/50$	0.02	200	18.e-14s
$\lambda/100$	0.07	400	9.e-14s
$\lambda/200$	0.26	800	4.5e-14s
$\lambda/400$	1	1600	2.25e-14s

table .5.1 – Comparaison temps calcul, nombre de mailles et pas de temps pour différentes configurations statiques. Le ratio en temps T_R correspond au temps de calcul de la configuration traitée divisé par le temps de calcul de la solution à $\lambda/400$.

La figure (.5.6) montre les résultats de la densité plasma pour les différents maillages de la solution statique. On note sur cette figure les pertes de précision sur la solution liées au choix du maillage.

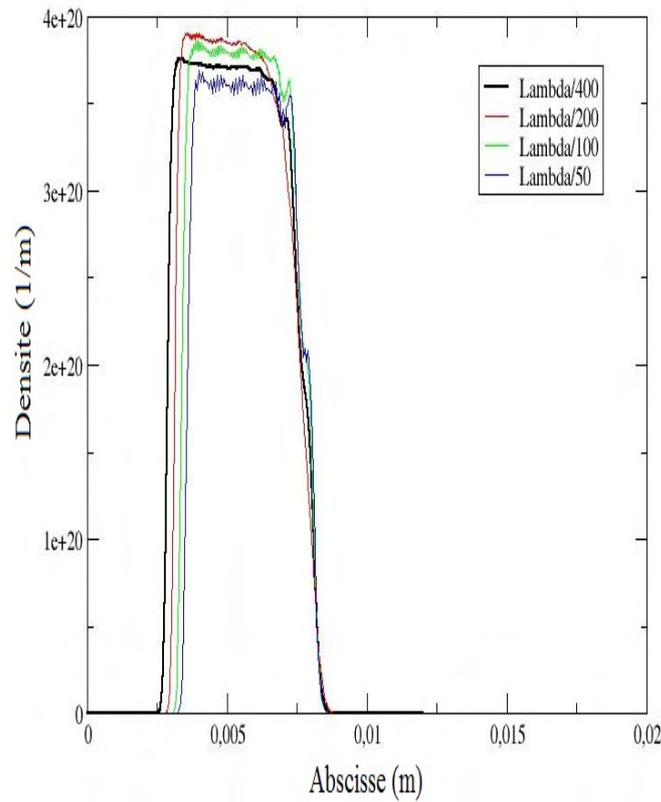


figure .5.6 – Cartographie de la densité plasma pour différents maillages statiques.

Tout d'abord, dans notre stratégie de maillage adaptatif nous allons nous focaliser sur le raffinement. Pour cela, considérons le maillage en $\lambda/100$ et autorisons nous une hiérarchie de découpage de cellule fixé à 2. Cela traduit que le maillage minimal sera au plus en $\lambda/400$. Le tableau (.5.2) donne pour différentes valeurs de η_{max} le pas de temps utilisé, le temps calcul et le nombre de mailles utilisés dans la simulation. Les figures (.5.7) et (.5.8) montrent respectivement la cartographie de la densité plasma à $t = 35ns$ pour différents paramètres η_{max} et l'évolution du nombre de mailles au cours du temps.

η_{max}	T_R	nombre de mailles	pas de temps
0.1	0.63	1358	2.25e-14s
0.2	0.62	1338	2.25e-14s
1	0.56	1186	2.25e-14s
5	0.3 s	527	2.25e-14s

table .5.2 – Comparaison temps calcul, nombre de mailles et pas de temps pour différentes valeurs de η_{max} en partant d'un maillage $\lambda/100$.

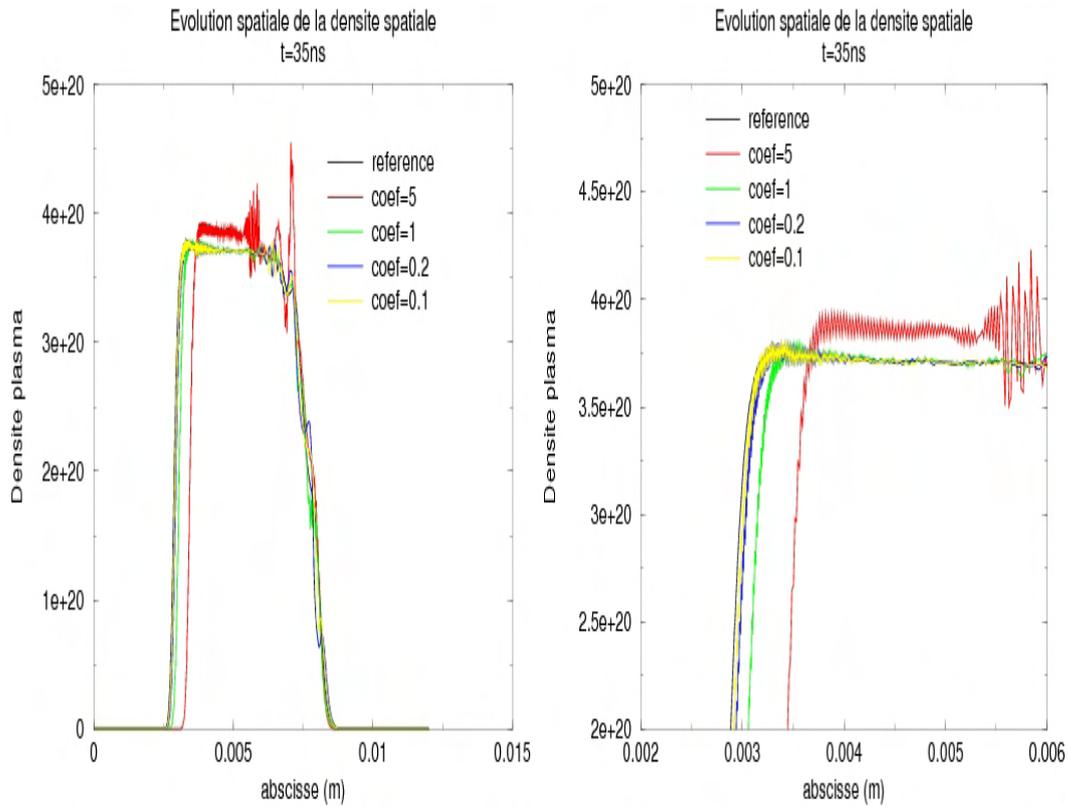


figure .5.7 – **a)** Cartographie de la densité plasma à $t = 35\text{ns}$ pour différentes valeurs de η_{max} avec un maillage initial en $\lambda/100$. **b)** zoom sur le front plasma.

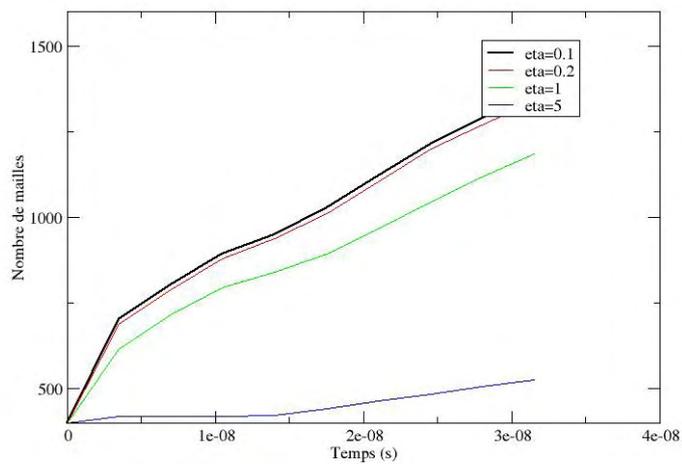


figure .5.8 – Evolution du nombre des cellules dans le maillage pour différentes valeurs de η_{max} avec un maillage initial en $\lambda/100$.

η_{max}	T_R	nombre de mailles	pas de temps
0.1	0.75	1448	2.25e-14s
0.2	0.73	1436	2.25e-14s
1	0.68	1269	2.25e-14s
5	0.51	800	2.25e-14s

table .5.3 – Comparaison temps calcul, nombre de mailles et pas de temps pour différentes valeurs de η_{max} en partant d'un maillage $\lambda/200$.

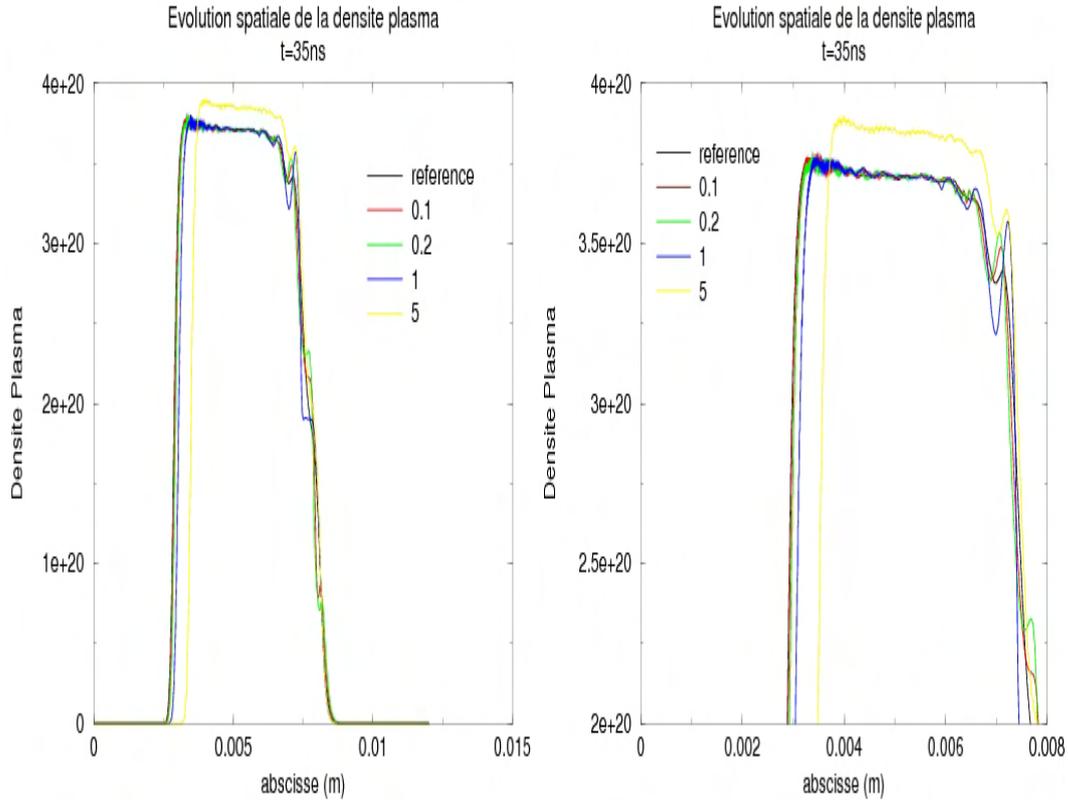


figure .5.9 – a) Cartographie de la densité plasma à $t = 35ns$ pour différentes valeurs de η_{max} (maillage initial en $\lambda/200$). b) zoom sur le front plasma.

η_{max}	T_R	nombre de mailles	pas de temps
0.1	0.584	1425	2.25e-14s
0.2	0.575	1408	2.25e-14s
1	0.51	1239	2.25e-14s
5	0.27	540	2.25e-14s

table .5.4 – Comparaison temps calcul, nombre de mailles et pas de temps pour différentes valeurs de η_{max} en partant d'un maillage $\lambda/50$.

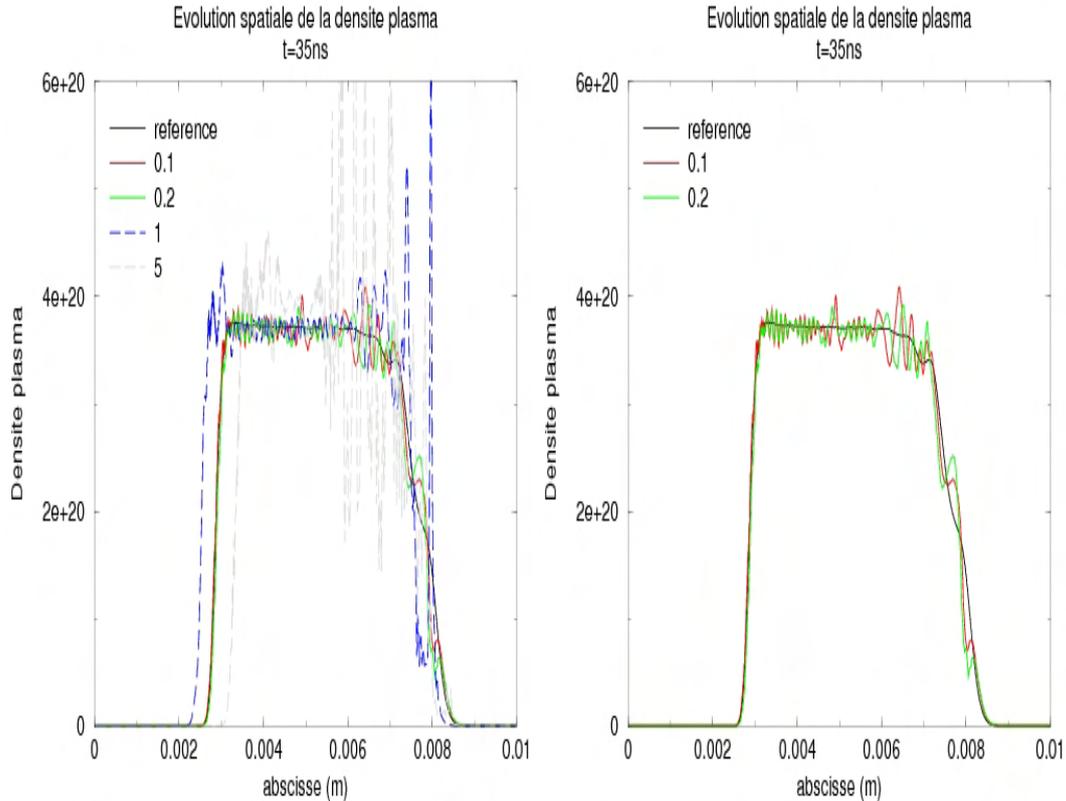


figure 5.10 – Cartographie de la densité plasma à $t = 35\text{ns}$ pour différentes valeurs de η_{max} en maillage initial en $\lambda/50$.

On note sur ces résultats qu'à partir d'un maillage en $\lambda/100$, on peut obtenir une solution assez proche de la solution de référence à moindre coût calcul et mémoire. Pour cela, le meilleur choix de η_{max} consiste à prendre une valeur qui ne soit ni trop grande ni trop petite. Il faut éviter de ne découper que très peu de cellules ou trop de cellules. En fait, on cherche un découpage relativement lisse où il n'y a pas que le front du plasma qui soit raffiné. Dans cette stratégie de raffinement, on peut lier les gains calcul/mémoire obtenus par le fait qu'on découpe les cellules au fur et à mesure que le plasma se crée et se déplace. On évite ainsi un surmaillage initial du domaine de calcul. Nous avons appliqué cette stratégie en partant d'un maillage en $\lambda/200$ et $\lambda/50$ avec des niveaux de raffinement de 1 et de 3. On note le même comportement sur les solutions avec toutefois un gain en temps et une perte en précision sur la solution si on part d'un maillage initial avec peu de cellules (5.11).

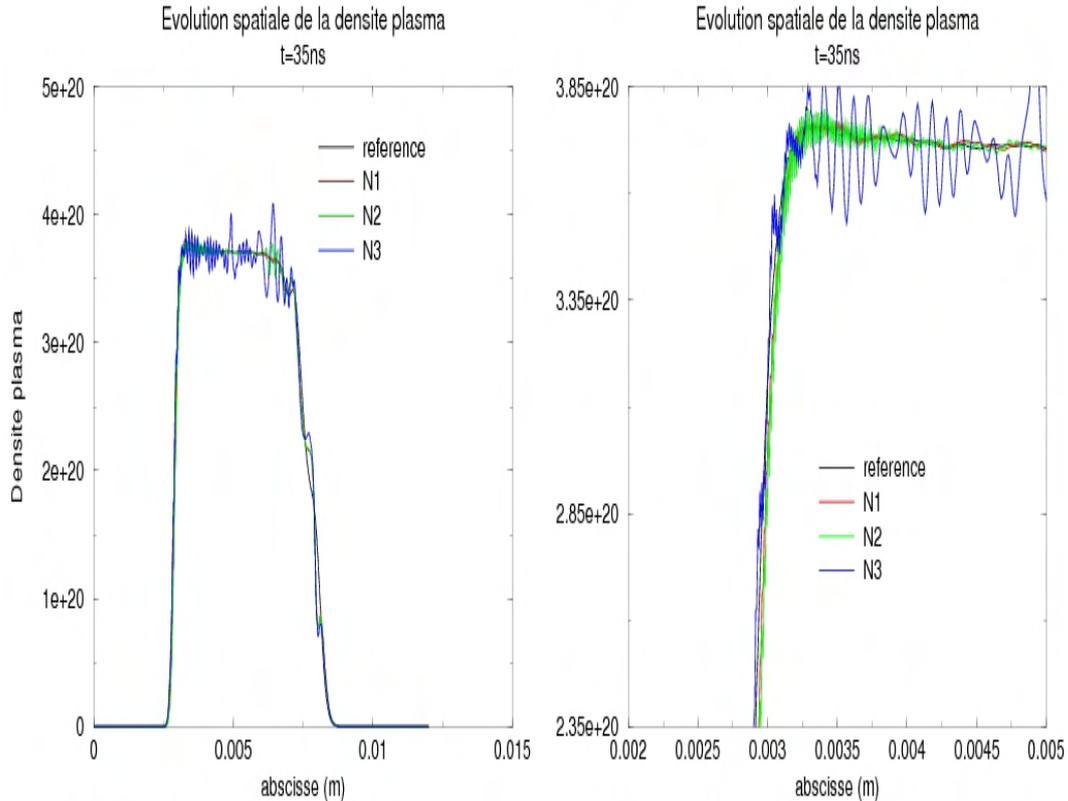


figure 5.11 – **a)** Cartographie de la densité plasma à $t = 35\text{ns}$ pour différents maillages initiaux. **b)** zoom sur le front plasma.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'introduction du déraffinement dans notre stratégie de maillage adaptatif. Pour cela, nous allons travailler sur les configurations correspondantes aux η_{max} optimaux et nous allons étudier l'influence du coefficient η_{min} . L'idée consiste ici à diminuer le nombre de cellules où la densité plasma n'évolue plus. Concernant la configuration en $\lambda/100$ avec $\eta_{max} = 1$ et un niveau de raffinement de 2, le tableau (5.5) et la figure (5.12) donnent les résultats des simulations pour différentes valeurs de η_{min} . On note sur ces résultats que le déraffinement permet de gagner en temps et en mémoire mais avec une solution plus dégradée. Cependant, dans le cas $\eta_{max} = 0.1$, on note que le gain en temps est moins important par rapport au cas $\eta_{max} = 1$ mais avec une solution qui approche bien mieux la solution de référence (5.12) pour $\eta_{min} = 0.01$ et $\eta_{min} = 0.005$. Concernant le gain mémoire la figure (5.13) donne l'évolution du maillage dans le temps. On note bien sur cette figure l'effet du déraffinement. Des tests similaires ont été effectués pour les configurations en $\lambda/200$ et en $\lambda/50$. Ils sont présentés dans la suite et donnent les mêmes résultats.

η_{max}/η_{min}	temps de calcul	nombre de mailles	pas de temps
1/0.01	0.42	977	2.25e-14s
1/0.05	0.40	911	2.25e-14s
1/0.1	0.38	790	2.25e-14s
0.1/0.005	0.56	1016	2.25e-14s
0.1/0.01	0.52	929	2.25e-14s
0.1/0.05	0.49	853	2.25e-14s

table .5.5 – Comparaison temps calcul, nombre de mailles et pas de temps pour différentes valeurs de η_{min} en partant d'un maillage $\lambda/100$.

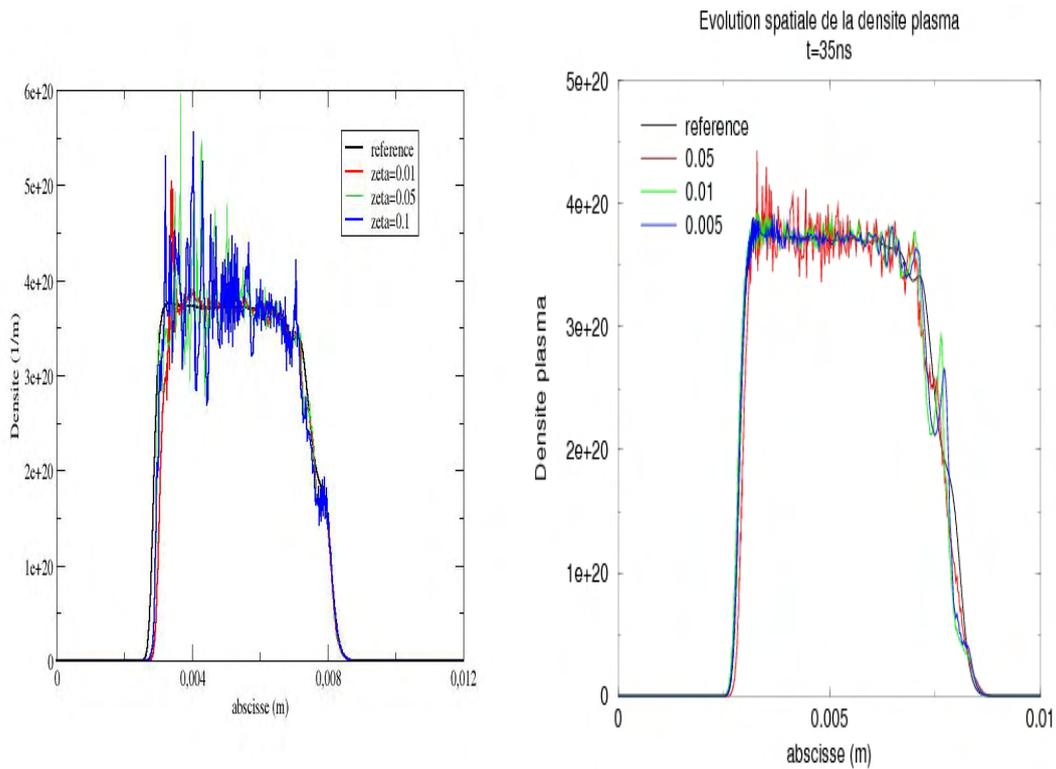


figure .5.12 – a) Cartographie de la densité plasma à $t = 35\text{ ns}$ pour différentes valeurs de η_{min} et $\eta_{max} = 1$ avec un maillage initial en $\lambda/100$ ($n_{div} = 2$). b) Cartographie de la densité plasma à $t = 35\text{ ns}$ pour différentes valeurs de η_{min} et $\eta_{max} = 0.1$ avec un maillage initial en $\lambda/100$ ($n_{div} = 2$).

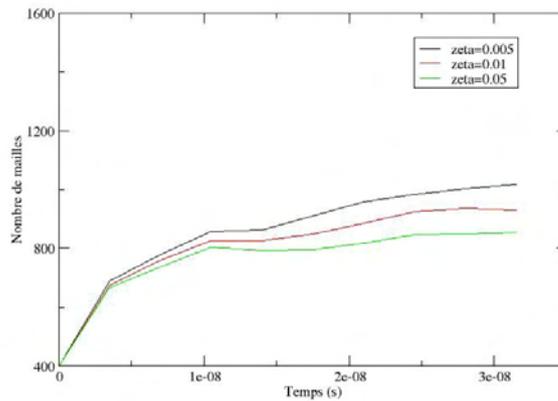


figure .5.13 – Evolution du maillage au cours du temps pour différentes valeurs de η_{min} et $\eta_{max} = 0.1$ dans un processus de raffinement déraffinement de niveau 2.

η_{max}, η_{min}	temps de calcul	nombre de mailles	pas de temps
0.1/0.005	0.69	1207	2.25e-14s
0.1/0.01	0.67	1146	2.25e-14s
0.1/0.05	0.66	1128	2.25e-14s

table .5.6 – Comparaison temps calcul, nombre de mailles et pas de temps pour différentes valeurs de η_{min} en partant d'un maillage $\lambda/200$.

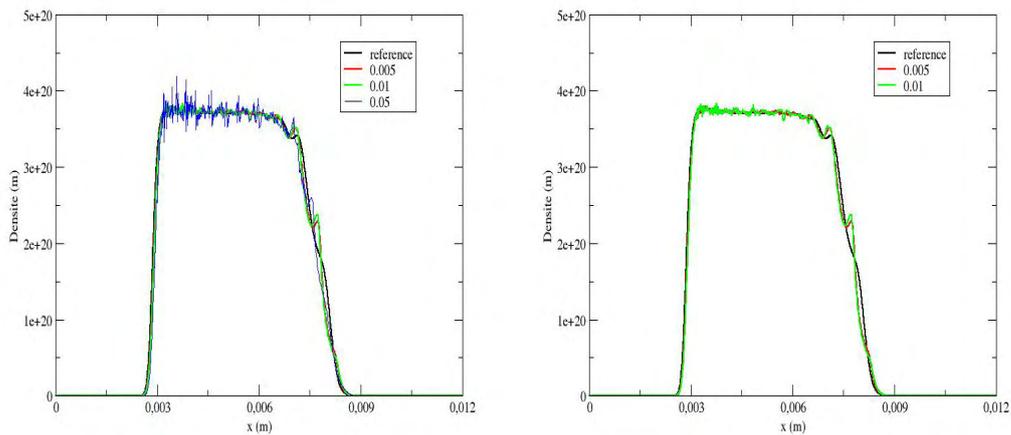


figure .5.14 – Cartographie de la densité plasma à $t = 35ns$ pour différentes valeurs de η_{min} et $\eta_{max} = 0.1$ avec un maillage initial en $\lambda/200$ ($ndiv = 1$).

η_{max}/η_{min}	temps de calcul	nombre de mailles	pas de temps
0.1/0.005	0.52	1156	2.25e-14s
0.1/0.01	0.50	1016	2.25e-14s
0.1/0.05	0.42	717	2.25e-14s

table .5.7 – Comparaison temps calcul, nombre de mailles et pas de temps pour différentes valeurs de η_{min} en partant d'un maillage $\lambda/50$.

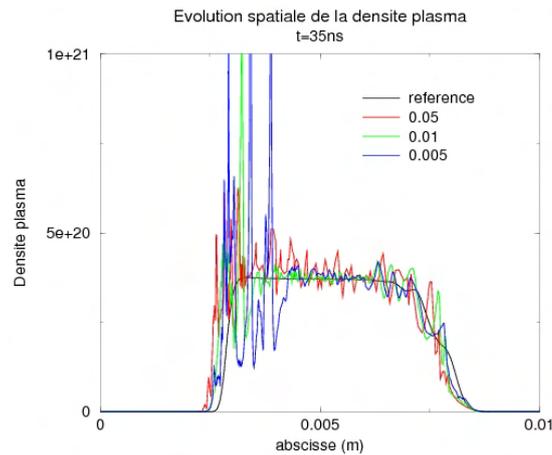


figure .5.15 – Cartographie de la densité plasma à $t = 35\text{ns}$ pour différentes valeurs de η_{min} et $\eta_{max} = 0.1$ avec un maillage initial en $\lambda/50$ ($n_{div} = 3$).

Pour le moment, au vu des tests réalisés le déraffinement n'apporte pas une totale satisfaction. Il faut donc encore réfléchir à une stratégie plus efficace sur le déraffinement. En effet, dans ce travail, nous n'avons réalisé pour l'instant qu'une étude préliminaire de ce que pourrait être une stratégie de maillage auto-adaptatif.

5.4 CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre, une solution de maillage adaptatif pour essayer d'améliorer les performances liées à la simulation 1D d'un problème micro-onde/plasma par une méthode volumes finis. Cette solution présente trois principaux paramètres qui sont les seuils de raffinement et de déraffinement ainsi que le niveau hiérarchique de découpage d'une cellule. Une étude numérique sur l'influence de ces paramètres a été menée et montre qu'une stratégie de raffinement peut effectivement apporter des gains calcul et mémoire pour une solution relativement précise. Pour essayer d'augmenter ces performances, nous nous sommes ensuite intéressés à un aspect déraffinement. Malheureusement, si on améliore les coûts calcul et mémoire, on détériore aussi la précision de la solution. En effet, il apparaît sur celle-ci de plus ou moins fortes oscillations selon le choix du paramètre η_{min} . Pour le moment le meilleur choix tendrait vers une solution sans déraffinement. Ceci est loin d'être optimal et quelques pistes dans le futur sont envisagées pour améliorer ce point. On pense en particulier à :

- éviter les raffinements/déraffinements successifs sur les mêmes mailles en fixant un délai avant tout déraffinement ou raffinement après une opération contraire sur la même maille ;

- éviter de raffiner une cellule alors que ses voisines sont à un niveau de raffinement très faible. Il faut essayer de garder un niveau de raffinement entre cellules qui soit assez lisse.

En plus de ces deux pistes non exhaustives, il serait aussi intéressant d'étudier la possibilité d'avoir une stratégie de pas de temps local évolutive par rapport au maillage. Ce point n'a pas été étudié dans notre travail.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Les procédés exploitant les plasmas froids, dont notamment les traitements de surface, utilisent souvent des sources micro ondes. A ces fréquences, le mécanisme de transfert de puissance de l'onde vers le plasma est en effet assez simple à mettre en œuvre et très efficace. Il permet de déclencher et d'entretenir des plasmas aux propriétés intéressantes. L'inconvénient majeur réside alors dans l'obligation de travailler à basse pression dans une enceinte adaptée. Plus rarement, on recherche l'action en retour du plasma sur l'onde. C'est pourtant essentiellement vers ce registre que sont tournés les travaux de cette thèse. Les applications, modestement abordées ici, concernent principalement le blindage plasma ou la reconfigurabilité plasma. Elles sont évidemment plus pertinentes dans le contexte d'ondes de moyennes ou fortes puissances. Dans ce cadre, on souhaite que l'interaction entre onde et plasma s'opère avec des matériaux et une géométrie appropriés. Cela permettra de garantir l'opérabilité de tels dispositifs mais les outils requis pour les modéliser doivent encore être développés. C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux de cette thèse. Leur objectif premier porte donc sur la modélisation de l'interaction micro onde/plasma. Ces développements doivent constituer le point de départ de la mise en œuvre d'un outil efficace capable de rendre compte de configurations réalistes et tridimensionnelles. La modélisation est ici régie par les équations de Maxwell décrivant la propagation des ondes électromagnétiques et par un modèle fluide décrivant l'évolution du plasma froid dans les premiers instants de la décharge.

La méthode la plus utilisée, et en général pour des cas 2D, afin de traiter de l'interaction onde/plasma est une méthode de différences finies basée sur le schéma de Yee ou FDTD. Au cours de ce travail, on a pu montrer sur des exemples que celle-ci n'est pas optimale en termes de coûts calcul et mémoire liés à la durée d'observation des phénomènes physiques et à la variation spatiale du plasma. De plus, elle nécessite un maillage structuré et n'est pas adaptée à des stratégies de raffinement local du maillage. Pour dépasser cette limitation, nous avons proposé dans cette thèse, une méthode numérique basée sur une méthode volumes finis. A l'origine développée pour les équations de Maxwell seules, nous l'avons adaptée au problème Maxwell/plasma et partiellement validée (2D). Pour cela, après avoir décrit les équations du problème physique nous avons donné un théorème sur l'existence et l'unicité de solutions. Nous nous sommes ensuite intéressés à l'approximation numérique des équations. Nous avons montré comment l'approche volumes finis permet, par l'utilisation d'un maillage non-structuré, d'adapter localement le maillage à la zone plasma et donc de réduire le nombre de cellules du maillage en modulant de façon importante sa densité. De plus, nous avons décrit une stratégie de pas de temps local. Elle a permis de gagner en efficacité pour la résolution du problème physique, en évitant de calculer les valeurs de toutes les cellules à chaque itération temporelle. L'étude numérique de cette méthode et son application en 2D, nous ont permis de montrer l'efficacité de cette approche pour

des applications telles que le blindage d'une ouverture par plasma. Dans ce cas, on peut en effet localiser le plasma dans une zone fixe du domaine de calcul. Toutefois, le schéma volumes finis proposé présente des difficultés dans la simulation de problèmes résonants, de type cavité. La dissipation numérique s'avère alors rapidement pénalisante. Pour cette raison, nous avons introduit un schéma Galerkin Discontinu. Il permet de s'affranchir de cet inconvénient, tout en conservant une possibilité de raffinement local de maillage avec, en plus, une adaptation de l'ordre d'approximation spatiale sur chaque cellule que nous n'avons cependant pas mise en oeuvre. Enfin dans le cas d'une évolution spatiale du plasma, nous avons entamé l'étude d'une stratégie de maillage adaptatif par raffinement et dé raffinement successifs en temps, dans le cas 1D. Nous avons d'abord défini un cas d'étude approprié et ne présentant qu'un unique front de plasma. Grâce à ce cas, nous avons pu mettre en évidence la possibilité d'un gain en temps CPU et stockage mémoire à précision équivalente. Tout en montrant l'importance de s'appuyer sur les bons critères et d'ajuster finement les seuils de raffinement/dé raffinement nous avons proposé une piste très intéressante fondée sur la variation spatiale relative de la densité plasma. Ces travaux devront être poursuivis pour aboutir à des outils opérationnels en dimensions supérieures et robustes.

L'ensemble des travaux de cette thèse a permis d'établir une méthode de simulation de type volumes finis plus efficace que le classique schéma différences finies. Néanmoins, il reste à finaliser certaines actions dont les plus significatives sont les suivantes :

- Enrichir la validation de la méthode FDTD 3D parallélisée par d'autres cas tests et par d'autres confrontation avec les cas 2D.
- Introduire une solution FVTD 3D et comparer celle-ci avec la solution FDTD 3D. On pourra ainsi confirmer les gains attendus sur les solution FVTD 3D.
- Affiner la stratégie du maillage auto adaptatif 1D. Des études paramétriques intensives permettront de rechercher un jeu optimal de seuils et évalueront l'intérêt de les coupler avec des conditions temporelles.

Dans la suite des travaux de cette thèse, nous pensons qu'il serait intéressant d'approfondir certains axes de recherche. Une liste, forcément non exhaustive, est proposée ci-dessous.

- Pour limiter les erreurs de dissipations, on pourrait chercher à hybrider Galerkin Discontinu pour les équations de Maxwell et volumes finis pour les équations de plasma. Un maillage hybride structuré - non structuré permettrait alors de jouer sur l'approximation spatiale du schéma.
- Des gains en temps de calcul peuvent également être obtenus en implémentant la stratégie de pas de temps local pour le schéma GD-FV en 2D et 3D.
- De la même façon, le perfectionnement de la stratégie de maillage auto adaptatif en 2D et 3D en choisissant un bon critère de raffinement/dé raffinement et en

intégrant une stratégie de pas de temps évolutif apparaît comme complexe mais prometteuse.

- Profitant de l'environnement qui s'enrichit en résultats expérimentaux, au fil des thèses sur ces sujets, des confrontations simulations mesures seront enfin un précieux support de validation. Elles fourniront en outre la matière pour tester le domaine de validité du modèle plasma utilisé et le faire évoluer afin d'accroître sa représentativité.

LISTE DES FIGURES

1	Classification des plasmas selon leurs densité et leur température électronique.	7
1	Ordres de grandeurs de quelques plasmas en fonction de leur température T_e , leur densité n_e , leur fréquence plasma f_p et la longueur de Debye λ_D	10
2	Classification des plasmas par Hallahan et Bell.	11
.1.1	Position des couches absorbantes et des matériaux affectés à celles-ci.	21
.3.1	Localisation des inconnues dans la cellule FDTD 3D.	49
.3.2	Position de la grille duale par rapport aux cellules du maillage initial.	50
.3.3	Localisation des inconnues sur une surface duale.	51
.3.4	Prise en compte des matériaux volumiques.	52
.3.5	Position des inconnues liées au plasma dans la cellule.	53
.3.6	Position des couches absorbantes et des matériaux affectés à celles-ci.	56
.3.7	Position du calcul en champ diffracté et en champ total.	58
.3.8	Cellules d'intégration pour une formulation centré aux nœuds en 2D.	62
.3.9	Cellules d'intégration pour une formulation centré aux élément en 2D.	63
.3.10	Coupe partielle du volume de calcul avec représentation des cellules dans la zone PML.	71
.3.11	Avancée d'une itération temporelle dans la stratégie de pas de temps local. On considère un exemple à 3 classes (p : étape prédictrice et c : étape correctrice).	84
.3.12	Localisation des fonctions de bases sur l'élément de référence pour une approximation Q_3	87
.4.1	Découpage de l'espace de calcul total en sous volumes.	93
.4.2	Positionnement des processeurs $P_c, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ et P_6	94
.4.3	Positionnement des champs calculés sur le processeur courant P_c dans une coupe 2D (y,z).	94
.4.4	Communications entre processeurs pour le calcul des champs électriques.	95
.4.5	Communications entre processeurs pour le calcul des champs magnétiques.	95
.4.6	Communications entre processeurs pour le calcul des densité. magnétiques.	96
.4.7	Gain en temps CPU en augmentant le nombre de processeurs.	96
.4.8	Gauche : maillage des différentes zone du domaine de calcul. Droite : les 4 zones de processeur.	98
.4.9	Définition des zones et des opérations d'échange dans une configuration avec 3 processeurs(P_1, P_2, P_3).	98

.4.10	Protocole d'échange utilisé sur un processeur courant $P_c = P_2$ entouré de trois processeurs P_1, P_3, P_4	99
.4.11	Gain en temps CPU en augmentant le nombre de processeurs. . . .	100
.4.12	Evolution spatiale de la densité électronique pour différents temps et une excitation en mode TM. La fréquence f est de 110GHz, le champ électrique E d'amplitude $6MV/m$ est polarisé selon \vec{z} (direction perpendiculaire à la figure). La direction de propagation de l'onde est suivant l'axe \vec{x} (direction horizontale, de gauche à droite). En partie inférieure : zoom temporel sur la formation d'un filament.	102
.4.13	a) Résultat expérimental de la cartographie de la densité [97] en mode TM. b) Cartographie de la densité obtenue dans [21] en mode TM	102
.4.14	Evolution spatiale de la densité électronique pour différents temps et une excitation en mode TE. La fréquence f est de 110GHz, le champ électrique E d'amplitude $6MV/m$ est polarisé selon l'axe \vec{y} (direction verticale sur la figure). La direction de propagation de l'onde est suivant la direction \vec{x} (direction horizontale, de gauche à droite).	102
.4.15	a) Résultat expérimental de la cartographie de la densité [97] en mode TE. b) Cartographie de la densité obtenue dans [21] en mode TE	103
.4.16	Evolution temporelle de la densité électronique aux points P_1, P_2 et P_3	104
.4.17	Evolution spatiale de la densité électronique aux temps $8ns, 29ns, 40ns$ et $80ns$	105
.4.18	Evolution spatiale du module du champ électrique aux temps $0ns, 8ns, 29ns, 40ns$ et $80ns$	106
.4.19	Champ rms pour différentes longueurs de l'ouverture. La ligne pointillée représente le champ rms d'une onde plane incidente dans le vide. (Simulation FDTD)	108
.4.20	Evolution de la densité sur l'ouverture dans un plan métallique à différents instants.	109
.4.21	Configuration 2D utilisée dans les simulations.	110
.4.22	Amplitude du champ électrique à $t = 1.12ns$ obtenue en utilisant les méthodes FDTD (à gauche) et FVTD (à droite) sans plasma. L'amplitude du champ incident est de $2 MV/m$	111
.4.23	Amplitude du champ électrique à $t = 1.15ns$ obtenue en utilisant les méthodes FDTD (à gauche) et FVTD (à droite) sans plasma.	111
.4.24	Variations temporelles du champ électrique E_y calculé avec les méthodes FVTD et FDTD au centre de l'ouverture.	112
.4.25	Spectres des solutions FDTD and FVTD.	112
.4.26	Amplitude du champ électrique à $t = 2.05ns$ obtenue avec les méthodes FVTD avec plasma (à droite) et sans plasma (à gauche). La densité initiale du plasma est égale à $10^{13}m^{-3}$ dans le cas avec le plasma. La dimension de l'échantillon est égale à $\lambda/3 \times \lambda/3$	113
.4.27	Variations temporelles du champ électrique calculé avec la méthode FVTD avec et sans plasma au point de mesure P2 situé au-delà du centre de l'ouverture (à $2,81mm$).	113
.4.28	Variation temporelle de la densité plasma au centre de l'ouverture. .	114

.4.29	Configuration étudiée. Une onde EM incidente d'amplitude $6MV/m$ et de fréquence $110GHz$ illumine perpendiculairement l'ouverture située dans la cavité.	115
.4.30	Maillage utilisé pour la cavité.	115
.4.31	Cartographie du champ effectif E_{eff} au temps $t = 0.5ns$ pour une simulation FVTD (gauche) et FDTD(droite).	116
.4.32	Cartographie du champ effectif E_{eff} au temps $t = 3ns$ pour une simulation FVTD (gauche) et FDTD (droite).	116
.4.33	Cartographie de la densité électronique aux temps $t = 0.1ns$ (gauche),et $t = 3ns$ (droite)	117
.4.34	configuration étudiée.	118
.4.35	Cartographies du champ effectif E_{eff} à $t = 1ns$ et $50ns$	118
.4.36	Evolution de la densité plasma au centre du disque.	119
.4.37	Comparaison entre les solutions obtenues avec le schéma GD pour $r = 1$ et la solution exacte.	120
.4.38	Zoom sur la comparaison des solutions GD pour $r = 1$ avec la solution exacte.	121
.4.1	Comparaison des temps de calcul et des d.o.f du schéma GD pour $r = 1$	121
.4.39	Comparaison des solutions GD pour différentes valeurs de r	122
.4.40	Zoom sur la comparaison des solutions GD pour différentes valeurs de r	122
.4.2	Comparaison des temps de calcul et des d.o.f de la méthode GD pour différentes valeurs de r	122
.4.41	Comparaison des solutions GD pour $n = 2$ et pour différents valeurs de r	123
.4.42	Comparaison des solutions FDTD pour différentes valeurs de n	123
.4.43	Zoom sur la comparaison des solutions FDTD pour différentes valeurs de n	124
.4.3	Comparaison des temps calcul et des d.o.f de la méthode FDTD pour différentes valeurs de n	124
.4.44	Comparaison des solutions GD et FDTD.	124
.4.45	Zoom sur la comparaison des solutions GD et FDTD.	125
.4.4	Comparaison des temps de calcul et du nombre de d.o.f entre les méthodes GD et FDTD.	125
.4.46	Comparaison de la solution FVTD et de la solution exacte pour des temps courts.	126
.4.47	Comparaison de la solution FVTD et de la solution exacte pour des temps longs.	126
.4.5	Comparaison des temps de calcul et du nombre de d.o.f entre les méthodes GDTD et FVTD.	126
.5.1	Evolution spatiale du champ effectif à différents instants et pour différents pas de maillage.	134
.5.2	Evolution spatiale de la densité électronique à différents instants et pour différents pas de maillage.	135
.5.3	Evolution spatiale du champ effectif à différents instants et pour différents pas de maillage.	136
.5.4	Evolution spatiale de la densité électronique à différents instants et pour différents pas de maillage.	137

.5.5	Différentes étapes du processus de raffinement/déraffinement. . . .	138
.5.1	Comparaison temps calcul, nombre de mailles et pas de temps pour différentes configurations statiques. Le ratio en temps T_R correspond au temps de calcul de la configuration traitée divisé par le temps de calcul de la solution à $\lambda/400$	139
.5.6	Cartographie de la densité plasma pour différents maillages statiques.	140
.5.2	Comparaison temps calcul, nombre de mailles et pas de temps pour différentes valeurs de η_{max} en partant d'un maillage $\lambda/100$	140
.5.7	a) Cartographie de la densité plasma à $t = 35ns$ pour différentes valeurs de η_{max} avec un maillage initial en $\lambda/100$. b) zoom sur le front plasma.	141
.5.8	Evolution du nombre des cellules dans le maillage pour différentes valeurs de η_{max} avec un maillage initial en $\lambda/100$	141
.5.3	Comparaison temps calcul, nombre de mailles et pas de temps pour différentes valeurs de η_{max} en partant d'un maillage $\lambda/200$	142
.5.9	a) Cartographie de la densité plasma à $t = 35ns$ pour différentes valeurs de η_{max} (maillage initial en $\lambda/200$). b) zoom sur le front plasma.	142
.5.4	Comparaison temps calcul, nombre de mailles et pas de temps pour différentes valeurs de η_{max} en partant d'un maillage $\lambda/50$	142
.5.10	Cartographie de la densité plasma à $t = 35ns$ pour différentes valeurs de η_{max} en maillage initial en $\lambda/50$	143
.5.11	a) Cartographie de la densité plasma à $t = 35ns$ pour différents maillages initiaux. b) zoom sur le front plasma.	144
.5.5	Comparaison temps calcul, nombre de mailles et pas de temps pour différentes valeurs de η_{min} en partant d'un maillage $\lambda/100$	145
.5.12	a) Cartographie de la densité plasma à $t = 35ns$ pour différentes valeurs de η_{min} et $\eta_{max} = 1$ avec un maillage initial en $\lambda/100$ ($ndiv = 2$). b) Cartographie de la densité plasma à $t = 35ns$ pour différentes valeurs de η_{min} et $\eta_{max} = 0.1$ avec un maillage initial en $\lambda/100$ ($ndiv = 2$).	145
.5.13	Evolution du maillage au cours du temps pour différentes valeurs de η_{min} et $\eta_{max} = 0.1$ dans un processus de raffinement déraffinement de niveau 2.	146
.5.6	Comparaison temps calcul, nombre de mailles et pas de temps pour différentes valeurs de η_{min} en partant d'un maillage $\lambda/200$	146
.5.14	Cartographie de la densité plasma à $t = 35ns$ pour différentes valeurs de η_{min} et $\eta_{max} = 0.1$ avec un maillage initial en $\lambda/200$ ($ndiv = 1$).	146
.5.7	Comparaison temps calcul, nombre de mailles et pas de temps pour différentes valeurs de η_{min} en partant d'un maillage $\lambda/50$	147
.5.15	Cartographie de la densité plasma à $t = 35ns$ pour différentes valeurs de η_{min} et $\eta_{max} = 0.1$ avec un maillage initial en $\lambda/50$ ($ndiv = 3$).	147
5.16	Position des matériaux absorbants (PML) en 3D.	159
5.17	Une coupe 2D de la position des matériaux absorbants (PML). . . .	159
5.8	Les valeurs des constantes A , B dans la formule du coefficient d'ionisation et le domaine de validité [117][116].	165
5.18	Fréquence effective d'ionisation en fonction du champ électrique à la pression atmosphérique et à température ambiante (300K) calculée à l'aide de la formule (5.23) dans (symboles carrés) et de l'expression analytique (5.25) (symboles triangulaires) [22].	166

5.19	a) (droite) Maillage non structuré du domaine de calcul, Ω_H (domaine en bleu), Ω_S (rouge), Ω_s (vert). b) (gauche) zoom sur une partie du maillage	171
5.20	Cartographie du champ électrique E_z à $t = 1ns$	172
5.21	Cartographie du champ effectif E_{eff} à $t = 70ns$	172
5.22	Cartographie de la densité électronique n_e à $t = 70ns$	173
5.23	Configuration du domaine global de calcul ($\Omega_2 = 2, \Omega_3 = 3, \Omega_4 = 4$) et un zoom sur une partie du maillage	174
5.24	Cartographie de la densité en $t = 30ns$	174
5.25	Cartographie de la densité en $t = 40ns, 50ns$	175
5.26	Cartographie de E_{eff} en $t = 30ns, 50ns$	175

ANNEXES

ANNEXE A : FORMALISME PML PAR CHANGEMENT DE VARIABLE DANS LE PLAN COMPLEXE

On considère un domaine de calcul Ω entouré par des couches absorbantes (milieu PML) comme cela est montré dans la figure (5.17) et caractérisé électriquement par les deux fonctions scalaires ϵ et μ_0 . On suppose que le milieu PML est défini par :

$$\Omega_{pml} = \cup_{i=1} \Omega_i$$

On suppose que les sources éventuelles et les conditions initiales sont nulles pour l'écriture du formalisme puisqu'elles sont à support dans Ω et donc n'intéragissent pas avec le milieu PML.

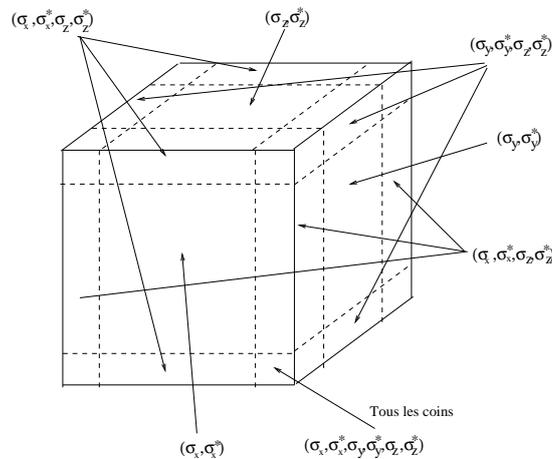


figure 5.16 – Position des matériaux absorbants (PML) en 3D.

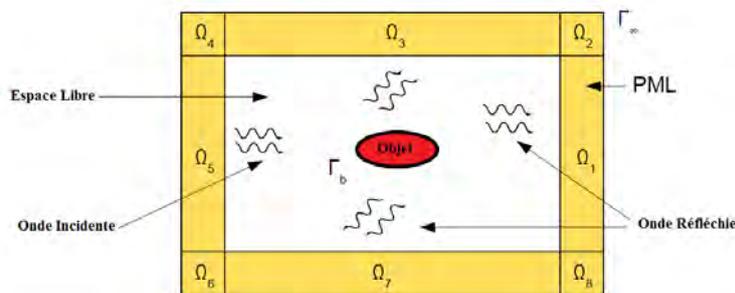


figure 5.17 – Une coupe 2D de la position des matériaux absorbants (PML).

On introduit six facteurs absorbants artificiels, trois conductivités électriques $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ et trois conductivités magnétiques $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*$ vérifiant une condition d'adaptation :

$$\frac{\sigma_x}{\epsilon} = \frac{\sigma_x^*}{\mu_0'}, \frac{\sigma_y}{\epsilon} = \frac{\sigma_y^*}{\mu_0'}, \frac{\sigma_z}{\epsilon} = \frac{\sigma_z^*}{\mu_0} \quad (5.11)$$

Remarque 26 *Le choix des conductivités électriques et magnétiques est très important pour assurer une réflexion nulle. Soit (e_x, e_y, e_z) une base orthonormée de \mathbb{R}^3 alors :*

Si e_x est la seule normale d'une interface vide/couche PML $\Rightarrow \sigma_y = \sigma_z = \sigma_y^ = \sigma_z^* = 0$.*

Si e_y est la seule normale d'une interface vide/couche PML $\Rightarrow \sigma_x = \sigma_z = \sigma_x^ = \sigma_z^* = 0$.*

Si e_z est la seule normale d'une interface vide/couche PML $\Rightarrow \sigma_y = \sigma_x = \sigma_y^ = \sigma_x^* = 0$.*

Si e_x et e_y sont les deux normales d'une interface vide/couche PML $\Rightarrow \sigma_z = \sigma_z^ = 0$.*

Si e_x et e_z sont les deux normales d'une interface vide/couche PML $\Rightarrow \sigma_y = \sigma_y^ = 0$.*

Si e_y et e_z sont les deux normales d'une interface vide/couche PML $\Rightarrow \sigma_x = \sigma_x^ = 0$.*

On se place dans le domaine fréquentiel par la transformée de Fourier-Laplace en temps des équations de Maxwell, ce qui donne :

$$i\omega\epsilon\hat{\mathbf{E}} - \nabla \times \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \quad (5.12a)$$

$$i\omega\mu\hat{\mathbf{H}} + \nabla \times \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad (5.12b)$$

Où $\hat{\mathbf{E}}$ et $\hat{\mathbf{H}}$ sont les transformées de Fourier-Laplace de \mathbf{E} et \mathbf{H} respectivement.

Considérons maintenant le changement de coordonnées complexes :

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \frac{i}{\omega} \int_0^x \sigma_x(s) ds \\ \tilde{y} = y + \frac{i}{\omega} \int_0^y \sigma_y(s) ds \\ \tilde{z} = z + \frac{i}{\omega} \int_0^z \sigma_z(s) ds \end{cases} \quad (5.13)$$

Ce changement de coordonnées permet de définir un prolongement analytique qu'on notera aussi $(\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}})$ de la solution de système de Maxwell (5.12) et qui possède la propriété de décroissance exponentielle dans le milieu PML. Cette construction s'effectue à l'aide d'un prolongement analytique de noyau de Green du système de Maxwell [49].

Remarque 27 *Il faut évidemment définir des conditions de radiation à l'infini pour pouvoir effectuer les constructions précédentes. Nous ne les spécifions pas ici car elles servent juste à définir correctement la solution de Maxwell dans \mathbb{R}^3 . Dans la réalité nous bornerons notre domaine et des conditions de métal parfait ou Silver-Müller seront alors appliquées.*

Le système (5.14) devient après dérivation :

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{x}} = \left(1 + \frac{i}{\omega} \sigma_x\right) \partial_x \\ \partial_{\tilde{y}} = \left(1 + \frac{i}{\omega} \sigma_y\right) \partial_y \\ \partial_{\tilde{z}} = \left(1 + \frac{i}{\omega} \sigma_z\right) \partial_z \end{cases} \quad (5.14)$$

$(\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}})$ est alors la solution du problème PML :

$$i\omega\epsilon\hat{\mathbf{E}} - \nabla_s \times \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \quad (5.15a)$$

$$i\omega\mu\hat{\mathbf{H}} + \nabla_s \times \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad (5.15b)$$

où

$$\nabla_s \times = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{S_z} \partial_z & \frac{1}{S_y} \partial_y \\ \frac{1}{S_z} \partial_z & 0 & -\frac{1}{S_x} \partial_x \\ -\frac{1}{S_y} \partial_y & \frac{1}{S_x} \partial_x & 0 \end{pmatrix}$$

avec $S_j = 1 + i \frac{\sigma_j}{\omega \epsilon}$ pour $j = x, y, z$.

Soit M la matrice jacobienne de la transformation (5.14) telle que :

$$M = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix}$$

alors

$$\nabla_s \times = N((\nabla \times)M) \quad \text{avec} \quad N = \frac{1}{\det(M)} (M^t) \quad (5.16)$$

où

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{S_y S_z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_x S_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S_x S_y} \end{pmatrix}$$

Comme les matrices M et N sont inversibles, on peut alors faire le changement de variables suivant :

$$\hat{\mathbf{E}} = M^{-1} \hat{\mathbf{E}}' \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{H}} = M^{-1} \hat{\mathbf{H}}' \quad (5.17)$$

On peut écrire (5.15) sous la forme :

$$i\omega \epsilon N^{-1} M^{-1} \hat{\mathbf{E}}' - \nabla \times \hat{\mathbf{H}}' = \mathbf{0} \quad (5.18a)$$

$$i\omega \mu N^{-1} M^{-1} \hat{\mathbf{H}}' + \nabla \times \hat{\mathbf{E}}' = \mathbf{0} \quad (5.18b)$$

Au lieu de décomposer la matrice $N^{-1} M^{-1}$, on choisit le changement de variable de Gedney défini par :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{D}}'_x = \epsilon \frac{S_z}{S_x} \hat{\mathbf{E}}_x, \quad \hat{\mathbf{D}}'_y = \epsilon \frac{S_x}{S_y} \hat{\mathbf{E}}_y, \quad \hat{\mathbf{D}}'_z = \epsilon \frac{S_y}{S_z} \hat{\mathbf{E}}_z \\ \hat{\mathbf{B}}'_x = \mu_0 \frac{S_z}{S_x} \hat{\mathbf{H}}'_x, \quad \hat{\mathbf{B}}'_y = \mu_0 \frac{S_x}{S_y} \hat{\mathbf{H}}'_y, \quad \hat{\mathbf{B}}'_z = \mu_0 \frac{S_y}{S_z} \hat{\mathbf{H}}'_z \end{cases} \quad (5.19)$$

Le système (5.18) devient :

$$i\omega \begin{pmatrix} S_y & 0 & 0 \\ 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & S_x \end{pmatrix} \hat{\mathbf{D}}' - \nabla \times \hat{\mathbf{H}}' = \mathbf{0} \quad (5.20a)$$

$$i\omega \begin{pmatrix} S_y & 0 & 0 \\ 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & S_x \end{pmatrix} \hat{\mathbf{B}}' + \nabla \times \hat{\mathbf{E}}' = \mathbf{0} \quad (5.20b)$$

Système PML instationnaire

Pour passer dans le domaine temporel, on applique la transformée inverse de Fourier-Laplace sur les systèmes (5.19) et (5.20). Nous désignons par \mathbf{D}' , \mathbf{B}' , \mathbf{E}' et \mathbf{H}' respectivement les relèvements temporels des champs $\hat{\mathbf{D}}'$, $\hat{\mathbf{B}}'$, $\hat{\mathbf{E}}'$ et $\hat{\mathbf{H}}'$.

Si de plus on remplace les $S_j, j = x, y, z$ dans (5.19) et (5.20), on obtient le système PML temporel suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}' + \frac{1}{\epsilon} K_{x,y,z} \mathbf{D}' = \epsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}' + K_{z,x,y} \mathbf{E}' \right) \quad (5.21a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}' + \frac{1}{\epsilon} K_{y,z,x} \mathbf{D}' - \nabla \times \mathbf{H}' = \mathbf{0} \quad (5.21b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}' + \frac{1}{\epsilon} K_{x,y,z} \mathbf{B}' = \mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}' + K_{z,x,y} \mathbf{H}' \right) \quad (5.21c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}' + \frac{1}{\epsilon} K_{y,z,x} \mathbf{B}' + \nabla \times \mathbf{E}' = \mathbf{0} \quad (5.21d)$$

où

$$K_{l,m,n} = \begin{pmatrix} \sigma_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Pour pouvoir simuler le problème (5.21), il faut borner le milieu PML. On choisira une condition de type métal parfait sur la frontière de Ω_{pml} pour \mathbf{E}' afin de ne pas alourdir l'algorithme de calcul. Les ondes électromagnétiques sont réfléchies dans le domaine après la traversée des couches, cependant, les PML permettent de contrôler ces réflexions résiduelles en augmentant la conductivité ou l'épaisseur de la couche. Le choix de l'épaisseur est important car une épaisseur trop petite de couches PML risque de renvoyer dans le domaine physique des ondes d'amplitude non négligeable qui influent d'une manière importante sur la solution. Pour obtenir

une meilleure absorption, une condition de type Silver-Müller est aussi envisageable et mieux adaptée.

Finalement, on obtient le problème instationnaire :

trouver $\mathbf{D}', \mathbf{B}', \mathbf{E}', \mathbf{H}' : \tilde{\Omega} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}' + \frac{1}{\epsilon} K_{x,y,z} \mathbf{D}' = \epsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}' + K_{z,x,y} \mathbf{E}' \right) \text{ dans } \tilde{\Omega} \times (0, T) \quad (5.22a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}' + \frac{1}{\epsilon} K_{y,z,x} \mathbf{D}' - \nabla \times \mathbf{H}' = \mathbf{0} \text{ dans } \tilde{\Omega} \times (0, T) \quad (5.22b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}' + \frac{1}{\epsilon} K_{x,y,z} \mathbf{B}' = \mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}' + K_{z,x,y} \mathbf{H}' \right) \text{ dans } \tilde{\Omega} \times (0, T) \quad (5.22c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}' + \frac{1}{\epsilon} K_{y,z,x} \mathbf{B}' + \nabla \times \mathbf{E}' = \mathbf{0} \text{ dans } \tilde{\Omega} \times (0, T) \quad (5.22d)$$

$$\mathbf{E}' \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial \tilde{\Omega} \times (0, T) \quad (5.22e)$$

Ici \mathbf{n} représente la normale unitaire extérieure de $\tilde{\Omega} = \Omega_{pml} \cup \Omega$ à $\partial \tilde{\Omega}$.

Remarque 28 *La formulation de Gedney dérive directement des équations de Maxwell classique contrairement à celle de Bérenger qui est basée sur des équations de Maxwell modifiées. De plus, elle peut être étendue aux maillages non structurés plus facilement que celle de Bérenger.*

ANNEXE B : FORMULES DE LA FRÉQUENCE D'IONISATION EFFECTIVE

On présente dans cette annexe, la fréquence d'ionisation effective utilisée dans l'équation de densité. Celle-ci est une fonction du champ effectif réduit (E_{eff}/p) et décrit à la fois les phénomènes d'ionisation et d'attachement. Une expression analytique basée sur un ajustement analytique des données expérimentales est généralement utilisée dans la littérature[116][117]. Cette expression est de la forme :

$$\frac{v_{eff}}{p} = Av_d \exp\left(-B \frac{p}{E_{eff}}\right) \text{ pour } 50 < \frac{E_{eff}}{p} V/cm.Torr \quad (5.23)$$

où : $v_d = \frac{e}{m_e v_m} E_{eff}$ est la vitesse de dérive, E_{eff} est le champ effectif. Les constantes A et B sont déterminées par une analyse de régression des données expérimentales (voir la table 5.8).

Gaz	E/p $V/(cm.Torr)$	A $(cm.Torr)^{-1}$	B $V/(cm.Torr)$
He	20-150	2	24
Ar	100-600	12	180
H ₂	150-600	5	120
N ₂	27-200	8.8	275
	100-600	12	342
Air	50-200	8.805	258.45
	200-800	15	365
CO ₂	500-1000	20	466
H ₂ O	150-1000	12	290

table 5.8 – Les valeurs des constantes A , B dans la formule du coefficient d'ionisation et le domaine de validité [117][116].

Quand le processus d'attachement est important, cas où le champ réduit est inférieur à $50V/(cm \cdot Torr)$, la formule (5.23) est modifiée et devient alors [116] :

$$\frac{v_{eff}}{p} = Av_d \left(\exp\left(-B_0 \left(\frac{p}{E_{eff}} - \frac{p}{E_c}\right)\right) - 1 \right) \text{ pour } 0 < \frac{E_{eff}}{p} < 50V/cm.Torr \quad (5.24)$$

avec : $A = 0.005V/cm.Torr$, $B = 200V/cm.Torr$ et $\frac{E_c}{p} = 31.25V/cm.Torr$.

On trouve dans la littérature [118] [119][120], une autre expression analytique de la fréquence d'ionisation effective utilisée dans de nombreux articles en cas de claquage micro-onde. Elle est donnée par :

$$\frac{v_{eff}}{p} = \frac{v_a}{p} \left[\left(\frac{E_{eff}}{E_c} \right)^\beta - 1 \right] \quad (5.25)$$

avec :

- ν_a est la fréquence de d'attachement donnée par : $\frac{\nu_a}{p} = 5 \times 10^4 (sTorr)^{-1}$.
- E_c est le champ critique de claquage dans l'air : $\frac{E_c}{p} = 32V/cm.Torr$.
- $\beta = 5.3$.

La figure (5.18) montre que la fréquence d'ionisation effective dans l'air donnée par la formule (5.23) est proche de l'expression analytique (5.25).

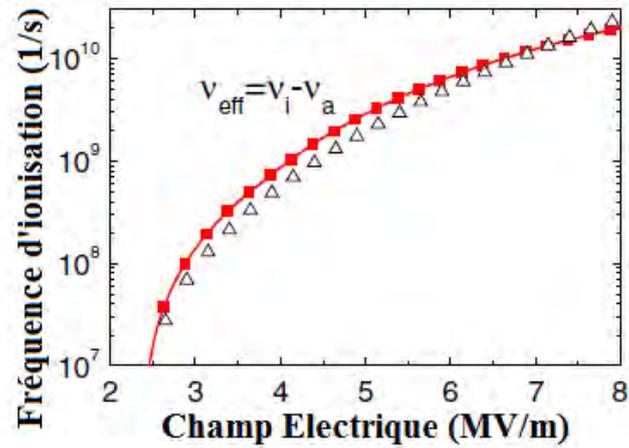


figure 5.18 – Fréquence effective d'ionisation en fonction du champ électrique à la pression atmosphérique et à température ambiante (300K) calculée à l'aide de la formule (5.23) dans (symboles carrés) et de l'expression analytique (5.25) (symboles triangulaires) [22].

ANNEXE C : MÉTHODE VOLUMES FINIS 2D POUR LE PROBLÈME COUPLÉ MAXWELL/PLASMA

RAPPEL DU MODÈLE PHYSIQUE

L'étude que nous présentons a été faite dans un cadre bidimensionnel. Dans ce cas, le système de Maxwell se décompose en deux systèmes de trois équations associés l'un à une polarisation transverse électrique (TE) et l'autre à une polarisation transverse magnétique (TM). Pour le modèle plasma, l'équation de la vitesse électronique se décompose en une équation scalaire dans le cas d'un mode TM et en deux équations scalaires dans le cas d'un mode TE. L'équation de densité ne change pas.

En choisissant comme direction d'invariance l'axe Oz , le système de Maxwell/plasma s'écrit en mode TM :

$$\begin{aligned}
 \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} &= 0 \\
 \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0 \\
 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} &= -J_z \\
 \frac{\partial v_z}{\partial t} + \nu_m v_z &= \frac{qE_z}{m_e} \\
 \frac{\partial n_e}{\partial t} - \text{div}(D_{eff} \nabla n_e) &= \nu_{eff} n_e - r_{ei} n_e^2 \\
 J_z &= q n_e v_z
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Dans le cas TE, le système de Maxwell s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} &= -J_x \\
 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -J_y \\
 \epsilon_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \nu_m v_x &= \frac{qE_x}{m_e} \\
 \frac{\partial v_y}{\partial t} + \nu_m v_y &= \frac{qE_y}{m_e} \\
 \frac{\partial n_e}{\partial t} - \text{div}(D_{eff} \nabla n_e) &= \nu_{eff} n_e - r_{ei} n_e^2 \\
 J_x &= q n_e v_x \\
 J_y &= q n_e v_y
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

où (\mathbf{E}, \mathbf{H}) sont les champs électromagnétiques, \mathbf{J} est la densité de courant et q , n_e , \mathbf{v}_e sont respectivement les charge, densité et vitesse électroniques. m_e est la masse électronique, et $\nu_m = 5.3 \times 10^9 p$ est la fréquence des collisions électron-neutre dans l'air, p la pression en Torr. $\nu_{eff} = \nu_i - \nu_a$ est la fréquence effective d'ionisation tenant compte des fréquences d'ionisation (ν_i) et d'attachement (ν_a). r_e est le coefficient de recombinaison qu'on va négliger dans nos simulations. Les valeurs de ν_i et ν_a sont

des fonctions du champ effectif local E_{eff} et l'on obtient dans l'air à partir de BOLSIG + [51]. Le champ effectif local peut être écrit comme :

$$E_{eff} = \frac{E_{rms}}{\sqrt{1 + \omega^2/\nu_m^2}} \quad (5.28)$$

où E_{rms} est la valeur efficace du champ électrique, et ω est la pulsation du champ incident.

D_{eff} est le coefficient effectif de diffusion défini par : $D_{eff} \simeq \frac{\alpha D_e + D_a}{1 + \alpha}$ où $\alpha = \nu_i \tau_M$. D_e est le coefficient de diffusion électronique, D_a est le coefficient de diffusion ambipolaire, et $\tau_M = \frac{\epsilon_0}{q n_e \mu_e}$ est le temps de relaxation local de Maxwell ($D_e = \mu_e k_B T_e / q$, $D_a = \mu_i k_B T_e / q$, T_e est la température électronique, $\mu_e = q / (m_e \nu_m)$ est la mobilité électronique, μ_i est la mobilité ionique et k_B la constante de Boltzmann).

Nous supposons que dans nos simulations T_e est constante et égale à 2 eV et que le ratio entre la mobilité des ions et celle des électrons est de 10^{-2} (de sorte que $D_a = 10^{-2} D_e$).

APPROXIMATION FVTD DU MODE TM

Soit $(T_i)_{i>0}$ une triangulation du domaine de calcul Ω telle que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 = \bigcup_{i=1}^{nt} T_i$, T_i est un volume de contrôle, n_i est le nombre total de triangles et le plasma est localisé seulement dans Ω_1 qui peut être différent de Ω_2 .

Pour compléter le problème Maxwell/plasma en mode TM, nous considérons les conditions aux limites :

$$\begin{cases} n_e = 0 & (x, y) \in \partial\Omega_1 \\ \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{n} \times \mathbf{E} + \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0} & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.29)$$

Elles correspondent respectivement à :

- l'absorption d'électrons à la limite de Ω_1 pour empêcher la propagation du plasma vers l'extérieur.
- la condition de non réflexion (de type Silver-Müller) aux bords de Ω [121].

Discrétisation spatiale

Dans cette partie, nous utiliserons la méthode volumes finis développée dans le chapitre 3, et nous garderons la structure 3D des équations pour décrire le cas 2D. Les équations de Maxwell peuvent être écrites sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \text{div} F(\mathbf{U}) = - \frac{(0, 0, J_z)^t}{\epsilon_0} \quad (5.30)$$

où $\mathbf{U} = \mathbf{H} + \mathbf{E}$, $\mathbf{H} = (H_x, H_y, 0)^t$, $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)^t$, et $F(\mathbf{U}) = (F_1(\mathbf{U}), F_2(\mathbf{U}))^t$ où $F_1(\mathbf{U}) = (0, -E_z/\mu_0, -H_y/\epsilon_0)^t$, et $F_2(\mathbf{U}) = (E_z/\mu_0, 0, H_x/\epsilon_0)^t$.

Après intégration de l'équation 5.30 sur le volume T_i , avec $\partial T_i = \bigcup_{k=1}^3 l_{i,k}$ ($l_{i,k}$ est le segment commun entre deux triangles adjacents T_i et T_k). En utilisant le théorème de divergence en prenant les champs au centre de gravité du volume T_i on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + \frac{1}{S_i} \sum_{k=1}^3 |l_{i,k}| F(\mathbf{U}_k^*) \cdot \mathbf{n}_k = - \frac{(0, 0, J_{zi})^t}{\epsilon_0} \quad (5.31)$$

Avec :

- U_i : valeur de U sur T_i , U_k^* valeur de U au centre de $l_{i,k}$.
 - S_i : la surface de T_i , \mathbf{n}_k la normale à l'arête $l_{i,k}$.
 - $|l_{i,k}|$: la longueur de l'arête entre deux volumes adjacents T_i, T_k .
- Le flux numérique peut être écrit comme :

$$F(\mathbf{U}_k^*) \cdot \mathbf{n}_k = F(\mathbf{E}_k^*) \cdot \mathbf{n}_k + F(\mathbf{H}_k^*) \cdot \mathbf{n}_k = \frac{\mathbf{n}'_k \times \mathbf{E}_{i,k}^*}{\mu_0} - \frac{\mathbf{n}'_k \times \mathbf{H}_{i,k}^*}{\epsilon_0}$$

En tenant compte des conditions aux limites pour les composantes tangentielles du champ électromagnétique sur les éléments de bord et les équations caractéristiques du problème de Maxwell, on peut évaluer $F(\mathbf{E}_{i,k}^*) \cdot \mathbf{n}_k$ et $F(\mathbf{H}_{i,k}^*) \cdot \mathbf{n}_k$ [19] :

$$\begin{cases} F(\mathbf{E}_{i,k}^*) \cdot \mathbf{n}_k = \frac{\mathbf{n}'_k \times \mathbf{E}_{i,k}^*}{\mu_0} = \frac{1}{2} [\mathbf{n}_k \cdot F(\mathbf{E}_i) + \mathbf{n}_k \cdot F(\mathbf{E}_k)] - \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \mathbf{n}'_k \times \mathbf{n}'_k \times (\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_k) \\ F(\mathbf{H}_{i,k}^*) \cdot \mathbf{n}_k = -\frac{\mathbf{n}'_k \times \mathbf{H}_{i,k}^*}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} [\mathbf{n}_k \cdot F(\mathbf{H}_i) + \mathbf{n}_k \cdot F(\mathbf{H}_k)] - \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \mathbf{n}'_k \times \mathbf{n}'_k \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_k) \end{cases}$$

Dans les équations précédentes, $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i), (\mathbf{E}_k, \mathbf{H}_k)$ définissent respectivement les valeurs du champ électromagnétique aux centres de gravité des deux volumes adjacents au segment $l_{i,k}$. \mathbf{n}'_k est donnée par $(\mathbf{n}_k, 0)^t$

Considérant l'équation de diffusion :

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} - \text{div}(D_{eff} \nabla n_e) = (v_{eff} - r_e n_e) n_e \\ n_e(t, x, y) = 0 \quad (x, y) \in \partial\Omega_1 \\ n_e(0, x, y) = n_{e0}(x, y) \quad (x, y) \in \partial\Omega_1 \end{cases}$$

On l'intègre sur une cellule T_i et on obtient, en utilisant le théorème de divergence, comme pour les champs électromagnétiques :

$$\frac{\partial n_{e(i)}}{\partial t} - \frac{1}{S_i} \sum_k F_{e,ik} = (v_{eff,i} - r_e n_{e(i)}) n_{e(i)}$$

où $n_{e(i)}$ est la valeur de n_e au centre de T_i , $F_{e,ik} = \int_{l_{i,k}} D_{eff(ik)} \nabla n_{e(i)} \cdot \mathbf{n}_k ds$ est le flux sur $l_{i,k}$ et $D_{eff(ik)} = (D_{eff(i)} + D_{eff(k)})/2$.

Pour approcher l'intégrale précédente, nous avons pris :

$$F_{e,ik} \approx \begin{cases} D_{eff(ik)} \frac{|l_{i,k}|(n_{e(k)} - n_{e(i)})}{\|x_{g_i} x_{g_k}\|^2} (\overrightarrow{x_{g_i} x_{g_k}}, \mathbf{n}_k) & l_{i,k} \notin \partial\Omega_1 \\ D_{eff(i)} \frac{|l_{i,\sigma}|(n_{e(\sigma)} - n_{e(i)})}{\|x_{g_i} x_{g_\sigma}\|^2} (\overrightarrow{x_{g_i} x_{g_\sigma}}, \mathbf{n}_k) & l_{i,k} \in \partial\Omega_1 \end{cases}$$

où $n_{e(\sigma)}$ est la valeur de n_e sur $\partial\Omega_1$ et $x_{g_i}, x_{g_k}, x_{g_\sigma}$ sont respectivement les centres de T_i, T_k et $l_{i,\sigma} \in \partial\Omega_1$.

Remarque 29 Dans l'approximation du flux de densité, on suppose que le maillage est fait de telle façon à ce que l'angle θ entre la normale \mathbf{n}_k et le vecteur $(\overrightarrow{x_{g_i} x_{g_k}})$ soit petit. Pour les maillages

structurés $\theta = 0$ et les vecteurs \mathbf{n}_k , $(\overline{x_{g_i} x_{g_k}})$ sont colinéaires. Le flux numérique de densité se réduit à :

$$F_{e,ik} \approx \begin{cases} D_{eff(ik)} \frac{|l_{i,k}|(n_{e(k)} - n_{e(i)})}{\|x_{g_i} x_{g_k}\|} & l_{i,k} \notin \partial\Omega_1 \\ D_{eff(i)} \frac{|l_{i,\sigma}|(n_{e(\sigma)} - n_{e(i)})}{\|x_{g_i} x_{g_\sigma}\|} & l_{i,k} \in \partial\Omega_1 \end{cases}$$

Enfin concernant l'équation de vitesse des électrons, les inconnues sont prises aux centres de gravité des cellules. Il en est de même pour les champs électromagnétiques et le plasma densité.

Discrétisation temporelle et stabilité :

Comme dans le chapitre 3, on utilise le schéma prédicteur/correcteur (RK 2) pour les équations de Maxwell avec un pas de temps dt_M et une condition de stabilité $dt_M \leq \min_i \left(\frac{S_i}{c \sum_{k=1}^3 l_{i,k}} \right)$ et le schéma d'Euler explicite pour l'équation de la densité avec un pas de temps dt_{ne} et une condition de stabilité $dt_{ne} \leq \min_i \left(\frac{S_i}{\sqrt{De} \sum_{k=1}^3 l_{i,k}} \right)^2$ Pour l'équation de la vitesse on utilise un schéma d'Euler implicite avec le même pas de temps que les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{U}_i^n - \frac{dt_M}{2} \left[\sum_{j=1}^{m_i} \frac{|S_{ij}|}{|V_i|} (\Phi(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n \mathbf{n}_{ij}) + \mathbf{J}_i^n) \right] & \text{Predictor step (P)} \\ \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^{n+\frac{1}{2}} - dt_M \left[\sum_{j=1}^{m_i} \frac{|S_{ij}|}{|V_i|} (\Phi(\mathbf{U}_i^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{U}_j^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{ij}) + \mathbf{J}_i^{\frac{1}{2}}) \right] & \text{Corrector step (C)} \\ \mathbf{v}_i^{n+1} = \left(\mathbf{v}_i^n + dt_M \frac{q \mathbf{E}_i^{n+1}}{m_e} \right) / (1 + dt_M \nu_m) \\ n_{ei}^{N+1} = n_{ei}^N \left[1 + dt_{ne} \left(v_{eff,i}^N - r_e n_{ei}^N \right) \right] + \frac{dt_{ne}}{S_i} \sum_j^{m_i} F_{e,ij}^N \end{cases} \quad (5.32)$$

où le couplage plasma/champ est donné par :

$$\mathbf{J}_i^{n+1/2} = q \frac{n_{ei}^{N-1} + n_{ei}^N}{2} \mathbf{v}_i^{n+1/2} \quad (5.33)$$

On notera que les deux pas de temps dt_{ne} et dt_M sont proportionnels i.e $dt_{ne} = m dt_M$ où m est un entier, $t^n = n dt_M$ et $t^N = Nm dt_M$.

ANNEXE D : CLAQUAGE DANS L'AIR EN 2D

On présente dans cette annexe deux exemples de simulation en mode TM d'un claquage dans l'air à pression atmosphérique dans un cadre bidimensionnel. Dans le premier exemple, on utilise une configuration sous forme de disque et on maillle avec un maillage non structuré. Dans le second exemple, on utilise une configuration rectangulaire maillée avec un maillage hybride (structuré et non structuré).

Dans les deux exemples, une condition de non réflexion (de type Silver-Müller) est appliquée sur le bord circulaire pour la première configuration et sur le bord rectangulaire pour la deuxième configuration. La condition de Silver-Müller traduit simplement le fait qu'au niveau de la frontière du domaine de calcul il n'y a pas d'onde entrante mais seulement une onde sortante de celui-ci. En utilisant cette condition, seules les ondes sortantes qui arrivent à incidence normale sur le bord ne sont pas réfléchies.

Première configuration

On s'intéresse au comportement du plasma confiné dans un volume illuminé par une onde de forte puissance à travers deux configurations. Dans la première configuration, on se donne un domaine sous forme d'un disque Ω_S de rayon 9mm . Ce type de maillage est plus propice à un calcul FVTD à cause de la condition limite utilisée. La densité plasma initiale est donnée par une gaussienne de module 10^{13}m^{-3} et d'écart type $500\mu\text{m}$, cette densité va évoluer dans un domaine plus petit $\Omega_s \in \Omega_S$ de rayon 6mm . L'onde incidente est injectée sur la couronne $\Omega_H = \Omega_S - \Omega_s$.

On utilise un maillage non structuré (des triangles) pour mailler tout le domaine. Ω_s est maillé à $\lambda/35$ et Ω_H à $\lambda/20$ et le reste du domaine à $\lambda/10$. Le maillage ainsi défini est localement raffiné (Fig. 5.19).

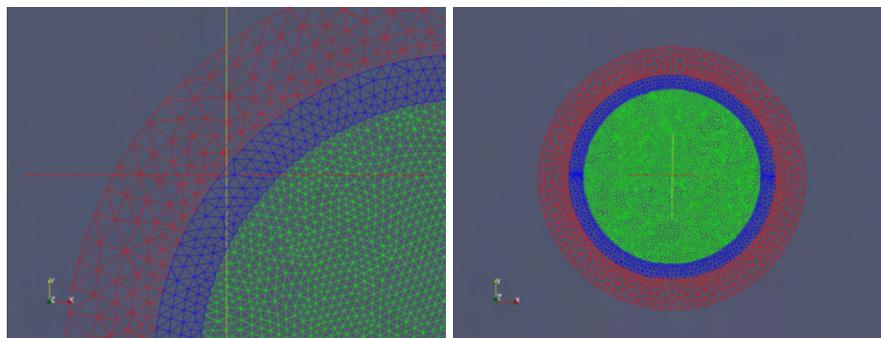


figure 5.19 – a) (droite) Maillage non structuré du domaine de calcul, Ω_H (domaine en bleu), Ω_S (rouge), Ω_s (vert). b) (gauche) zoom sur une partie du maillage

La figure (5.19) donne un maillage non structuré (triangles) utilisé pour la résolution de notre problème.

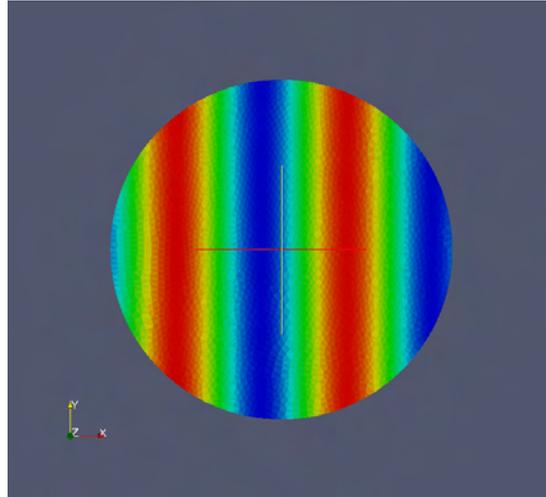


figure 5.20 – Cartographie du champ électrique E_z à $t = 1\text{ns}$.

La figure (5.20) montre l' répartition du champ électrique E_z dans le domaine de calcul sans plasma. Il correspond aux champs sources donnés par une amplitude de $6\text{MV}/\text{m}$, une fréquence de 50GHz ($\lambda = 6\text{mm}$) et a comme direction de propagation $\vec{k} = \vec{e}_x$. Le champ effectif E_{eff} est de l'ordre de $4.2\text{MV}/\text{m}$.

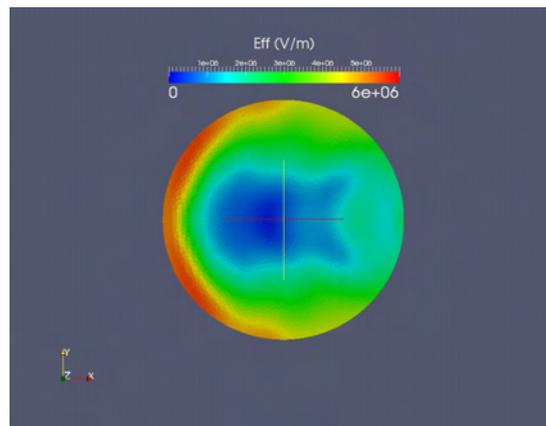


figure 5.21 – Cartographie du champ effectif E_{eff} à $t = 70\text{ns}$.

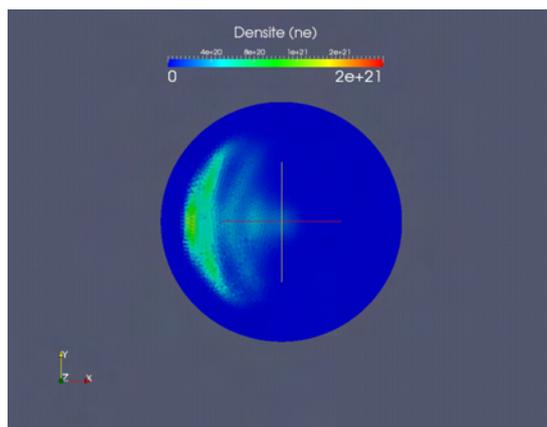


figure 5.22 – Cartographie de la densité électronique n_e à $t = 70ns$.

La figure (5.21) correspond à la cartographie du champ électrique effectif E_{eff} en présence d'un plasma à l'instant $t = 70ns$. On remarque que le champ électrique est réfléchi et que l'amplitude du champs effectif est plus grande dans la zone avant le plasma.

La figure (5.22) est la cartographie de la densité à l'instant $t = 70ns$, on voit la formation de filaments se propageant vers la source. Le mécanisme de formation et de propagation peut être décrit de la manière suivante : le filament de plasma à l'avant réfléchit et disperse l'onde électromagnétique. L'onde stationnaire résultante présente des maxima de champ hors axes qui génèrent deux filaments hors-axes à travers une combinaison de diffusion et d'ionisation dans le domaine renforcé. L'addition du champ réfléchi par cette structure de plasma et du champ incident conduit à la formation d'un maxima de champ sur l'axe, ce qui donne un nouveau filament dans l'axe. On reproduit bien ainsi ce qui été constaté par Y. Hidaka et al[97] et reproduit par J-P. Boeuf et al [20, 52].

Seconde configuration

Dans la seconde configuration, on s'intéresse aussi au comportement du plasma confiné dans un volume illuminé par une onde de forte puissance. L'amplitude est de $6MV/m$, la fréquence de $100GHz$ ($\lambda = 3mm$). La densité initiale est donnée par une gaussienne de module $10^{13}m^{-3}$ et d'écart type $500\mu m$. On se donne un domaine de calcul Ω (Fig. 5.23) tel que $\Omega = \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$ où

$$\begin{cases} \Omega_3 = [2.8\lambda, 2.8\lambda] \times [2.8\lambda, 2.8\lambda] \\ \Omega_2 = [2.93\lambda, 2.93\lambda] \times [2.93\lambda, 2.93\lambda] - \Omega_3 \\ \Omega_4 = [3.7\lambda, 3.7\lambda] \times [3.7\lambda, 3.7\lambda] - \Omega_3 - \Omega_2 \end{cases} \quad (5.34)$$

On utilise un maillage non structuré (des triangles) pour mailler les domaines Ω_2 , Ω_4 et un maillage structuré pour mailler le domaine Ω_3 avec un pas d'espace de l'ordre de $\lambda/100$. Ω_2 est maillé à $\lambda/17$ et Ω_4 à $\lambda/7$. Le maillage ainsi défini est localement raffiné (Fig. 5.23). Cette forme de maillage est plus proche de notre problème, mais n'est pas très adaptée à la condition limite utilisée. Cependant, on note sur les résultats que cela n'influe par trop sur la précision de la solution. Les

figures (5.24) à (5.26) illustrent les résultats en densité et champs effectifs que l'on peut obtenir.

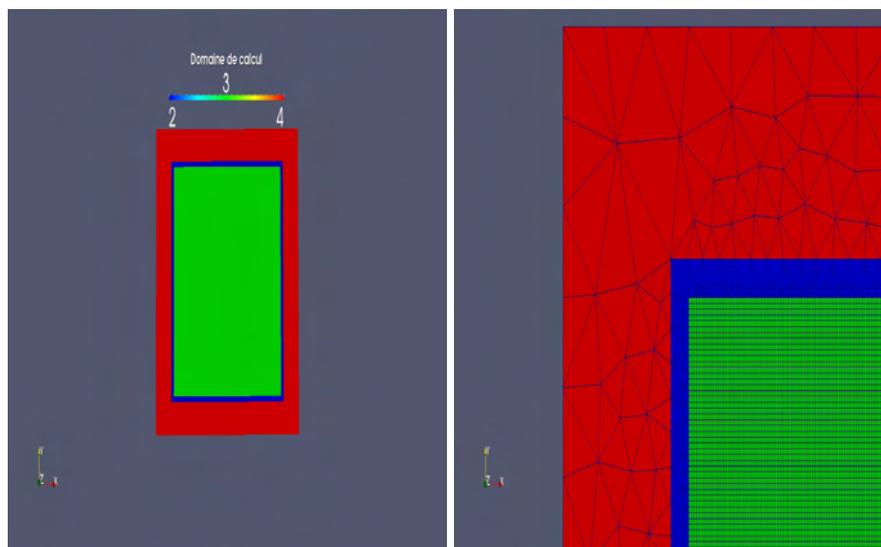


figure 5.23 – Configuration du domaine global de calcul ($\Omega_2 = 2, \Omega_3 = 3, \Omega_4 = 4$) et un zoom sur une partie du maillage

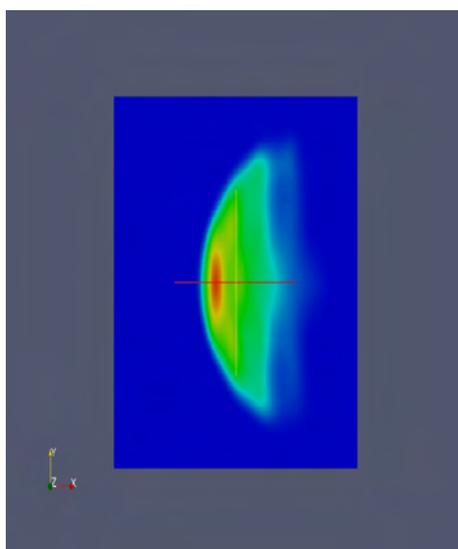


figure 5.24 – Cartographie de la densité en $t = 30ns$

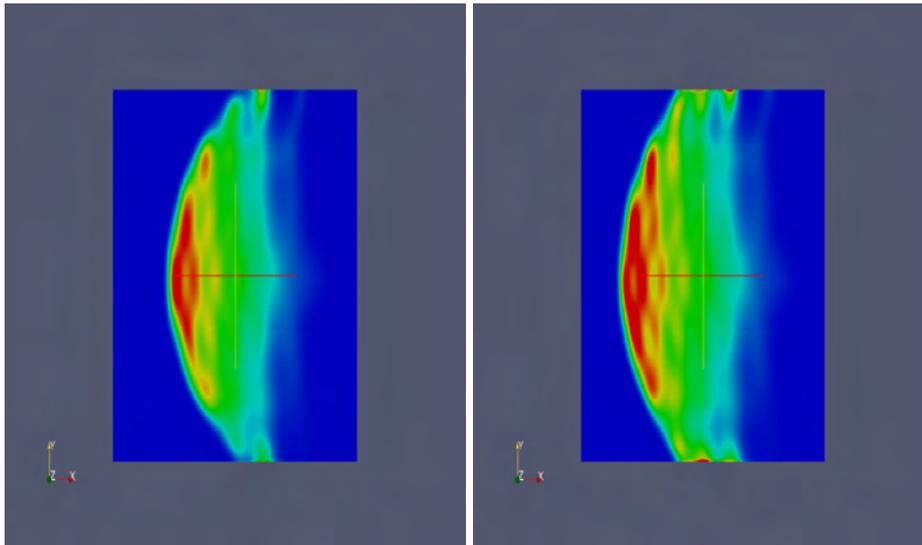


figure 5.25 – Cartographie de la densité en $t = 40 \text{ ns}, 50 \text{ ns}$

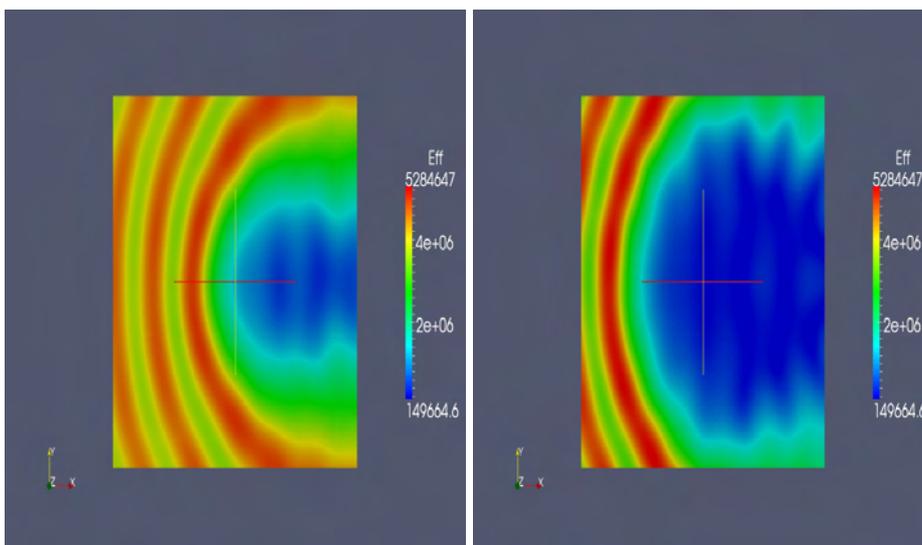


figure 5.26 – Cartographie de E_{eff} en $t = 30 \text{ ns}, 50 \text{ ns}$

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. D. Mac-Donald. *Microwave breakdown in gases*. Wiley, New-York, 1966. (Cité page 1.)
- [2] L.D. Smullin and C.G. Montgomery. *Microwave Duplexers*. McGrawâHill Book Company, United States, 1948. (Cité pages 1 et 117.)
- [3] G. Quinio. *Modélisation numérique de la génération d'un plasma d'air dans un écoulement aérodynamique*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, décembre 2005. (Cité pages 1 et 6.)
- [4] Giovanni Antonio Coduti. *Etude de l'interaction d'une onde électromagnétique avec un plasma d'air à température ambiante*. PhD thesis, Université de Paris XI Orsay-ONERA, janvier 2005. (Cité page 1.)
- [5] G. Prigent, N.Raveu, O.Pigaglio, and Th.Callegari. Conception d'un micro-commutateur plasma. *17 Journées Nationales Microondes*, Brest, May 2011. (Cité pages 1 et 117.)
- [6] S. Varault, B. Gabard, J. Sokoloff, and S. Bolioli. Plasma-based localized defect for switchable coupling applications. *Applied Physics Letters*, 98(13), Mar. 2011. (Cité pages 1 et 117.)
- [7] J. Lo, J. Sokoloff, Th. Callegari, and J. P. Boeuf. Reconfigurable electromagnetic band gap device using plasma as a localized tunable defect. *Applied Physics Letters*, 96(25) :251501, 2010. (Cité page 1.)
- [8] P. LEPRINCE. Le plasma : milieu chimiquement actif pour le traitement de surface. **Dans** : Les plasmas froids dans l'industrie, Réseau Plasma froid Rhône Alpes, 16 Octobre 2003, Lyon. (Cité page 1.)
- [9] E.A.H. TIMMERMANS, J. JONKERS, I.A.J. THOMAS, A. RODERO, M.C. QUINTERO, A. SOLA, A. GAMERO, and J.A.M VANDER MULLEN. The behavior of molecules in microwave-induced plasmas studied by optical emission spectroscopy : 1.plasmas at atmospheric pressure. *Spectrochemica Acta Part B*, 53(11) :1553–1566, 1998. (Cité page 1.)
- [10] P.P. WOSKOV and K. HADIDI. Large electrodeless plasmas at atmospheric pressure sustained by a microwave waveguide. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 30(1) :156–157, 2002. (Cité page 1.)
- [11] H. MATUSIEWICZ. A novel microwave plasma cavity assembly for atomic emission spectrometry. *Spectrochemica Acta*, 47B(10) :1221–1227, 1992. (Cité page 1.)
- [12] C.I.M BEENAKKER. A cavity for microwave induced plasmas operated in helium and argon at atmospheric pressure. *Spectrochemica Acta Part B*, 31 :483–486, 1976. (Cité page 1.)
- [13] R.P. Cardoso. *Plasmas micro-ondes en cavité résonnante à la pression atmosphérique : étude des plasmas d'hélium et applications au traitement des matériaux*. PhD thesis, Université de Nancy-INPL, 2007. (Cité page 1.)

- [14] C. Tendero. *Torche plasma micro-onde à la pression atmosphérique : application au traitement de surfaces métalliques*. PhD thesis, Université de Limoges, 2005. (Cité page 1.)
- [15] Kane Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 14(3) :302–307, May 1966. (Cité pages 2 et 49.)
- [16] A. Taflove and S. Hagness. *Computational Electrodynamics : The Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House, 2005. (Cité pages 2 et 49.)
- [17] A. Ern and J.L. Guermond. *Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*, volume 36. Springer Verlag, 2002. (Cité page 2.)
- [18] M. Remaki. *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène*. PhD thesis, Ecole nationale des Ponts et Chaussées, 1999. (Cité pages 2, 24, 34, 38, 39, 63, 71 et 72.)
- [19] P. Bonnet. *Résolution des équations de Maxwell instationnaires et harmoniques par une technique de volumes finis. Application à des problèmes de compatibilité électromagnétique*. PhD thesis, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 1998. (Cité pages 2, 48, 72 et 169.)
- [20] B. Chaudhury and J. P. Boeuf. Computational studies of filamentary pattern formation in a high power microwave breakdown generated air plasma. *IEEE ; trans. Plasma Sci.*, 38, 2010. (Cité pages 3, 31, 101, 107 et 173.)
- [21] B. Chaudhury, J. P. Boeuf, and G. Q. Zhu. Pattern formation and propagation during microwave breakdown. *Phys. Plasma*, 17, 2010. (Cité pages 3, 101, 102, 103, 107 et 153.)
- [22] G. Q. Zhu, J-P. Boeuf, and B. Chaudhury. Ionizationâdiffusion plasma front propagation in a microwave field. *Plasma Sources Science and Technology*, 20(3) :035007, 2011. (Cité pages 3, 107, 133, 155 et 166.)
- [23] I. Langmuir. Oscillations in ionized gases. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 14(8) :627–637, 1928. <http://www.jstor.org/stable/85270>. (Cité page 5.)
- [24] J. L. Delcroix and A. Bers. *Physique des plasmas 1*. Edp Sciences, 1994. (Cité pages 5 et 6.)
- [25] J-M Rax. *Physique des plasmas*. Dunod, 2005. (Cité pages 6 et 29.)
- [26] J. R. Hollahan and A. T. Bell. *Techniques and Applications of Plasma Chemistry*. Techniques and Applications of Plasma Chemistry, 1974. (Cité page 10.)
- [27] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique : Modèles physiques*. volume 1. INSTN CEA Collection enseignement. (Cité pages 13, 34, 37, 38 et 39.)
- [28] J.A. Stratton. *Electromagnetic theory*. New-York, Mc Graw-Hill, 1941. (Cité page 13.)
- [29] J.A. Stratton. *Electromagnetic theory*, volume 33. Wiley-IEEE Press, 2007. (Cité page 13.)
- [30] D. Cheng. *Field and Wave Electromagnetics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1983. (Cité page 13.)
- [31] R.E. Collin. *Foundations for microwave engineering*. John Wiley & Sons, 2007. (Cité page 13.)

- [32] MAXWELL James Clerk. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Royal Society Transactions*, 155, 1865. (Cité page 14.)
- [33] A. Waser. On the notation of maxwell's field equations. 2000. <http://www.jstor.org/stable/85270>. (Cité page 14.)
- [34] HEAVISIDE Oliver. On the forces, stresses and fluxes of energy in the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 183A, 1892. (Cité page 14.)
- [35] E. B. WILSON. *Vector Analysis of Josiah Willard Gibbs - The History of a Great Mind*. Charles Scribner's Sons New York, 1901. (Cité page 14.)
- [36] L. Pebernet. *Etude d'un modèle Particle-In-Cell dans une approximation Galerkin Discontinue pour les équations de Maxwell-Vlasov. Recherche d'une solution hybride non conforme efficace*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2010. (Cité page 16.)
- [37] A. Bossavit. Solving Maxwell equations in closed cavity and the question of spurious modes. *IEEE Trans. Magnetics*, 26 :702–705, 1990. (Cité page 18.)
- [38] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139) :629–651, 1977. (Cité page 19.)
- [39] Gerrit Mur. Absorbing Boundary Conditions for the finite-difference approximation of Time-Domain Electromagnetic-Field Equations. *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, 21(4) :377–382, 1981. (Cité page 19.)
- [40] A. Bendali and L. Halpern. Conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell dans le vide et en dimension trois d'espace. *C.R.A.S.*, 307 :1011–1013, 1988. (Cité pages 19 et 70.)
- [41] P. Joly and B. Mercier. Une nouvelle condition transparente d'ordre 2 pour les équations de Maxwell en dimension 3. Technical Report 1047, INRIA, 1989. (Cité pages 19 et 70.)
- [42] F. Collino and P. Joly. New absorbing boundary conditions for the finite element solution of 3d Maxwell's equations. *IEEE Trans. on magnetics*, 31(3) :1696–1701, 1995. (Cité page 19.)
- [43] J.-P. Bérenger. A perfectly matched layer for absorption electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114(2) :185–200, 1994. (Cité page 20.)
- [44] J.P. Bérenger. Three-Dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. *J. of Comp. Phys.*, 127 :363–379, 1996. (Cité pages 20 et 55.)
- [45] J.P. Bérenger. Improved PML for the FDTD Solution of Wave-structure Interaction Problems. *IEEE transactions on Antennas and Propagation*, 45(3) :466–473, March 1997. (Cité pages 20 et 55.)
- [46] Stephen D. Gedney. An Anisotropic PML Absorbing Media for the FDTD Simulation of Fields in Lossy and Dispersive Media. *Electromagnetics*, 16 :399–415, 1996. (Cité pages 20, 21 et 24.)
- [47] P.A. Mazet, S. Paintandre, and A. Rahmouni. Interprétation dispersive du milieu PML de Bérenger. *C.R.A.S., I Math.*(327) :59–64, 1998. (Cité page 20.)
- [48] P.-A. Mazet, L. Ségui, and B. Dah. Sur l'existence et l'unicité des solutions pour le système de Maxwell harmonique en présence de couches de bérenger. *CRAS*, 333(6) :599–604, 2001. (Cité pages 20 et 21.)

- [49] Bilkité Dah. *Sur la modélisation de milieux fictifs absorbants de type couches de Bérenger*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, 2001. (Cité pages 20 et 160.)
- [50] G. J. M. Hagelaar. Bolsig+ : electron boltzmann equation solver. 2008. <http://www.bolsig.laplace.univ-tlse.fr>. (Cité page 30.)
- [51] G. J. M. Hagelaar and L. C. Pitchford. Solving the boltzmann equation to obtain electron transport coefficients and rate coefficients for fluid models. *Plasma sources science and technology*, 14(4), 2005. (Cité pages 30 et 168.)
- [52] J. P. Boeuf, B. Chaudhury, , and G. Q. Zhu. Theory and modelling of self-organization and propagation of filamentary plasma arrays in microwave breakdown at atmospheric pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 104, Jan 2010. (Cité pages 31, 54, 101, 107 et 173.)
- [53] W. Rotman. Plasma simulation by artificial dielectrics and parallel-plate media. *Antennas and Propagation, IRT Transsaction on*, 10(1) :82–95, january 1962. (Cité page 31.)
- [54] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications : Fixed-Point Theorems*, volume 1. Springer-Verlag, New York, 1992. (Cité pages 34 et 38.)
- [55] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and application to partial differential equations*. Lecture Note Univ. of Maryland, 1974. (Cité page 34.)
- [56] H. Tanabe. *Equations of evolution*. Pitman, 1979. (Cité page 34.)
- [57] T. Cazenave and A. Haraux. *An introduction to semilinear evolution equations*. Clarendon Press. Oxford, 1998. (Cité pages 34, 37, 38 et 39.)
- [58] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1983. (Cité pages 34, 38, 43 et 44.)
- [59] K. Yosida. *Functionnel Analysis*. Springer-Verlag, 1975. (Cité pages 34 et 43.)
- [60] H. Baruq and B. Hanouzet. Asymptotic behavior of solutions to maxwell's system in bounded domains with absorbing silver-müller's condition on the exterior boundary. *Asymptotic Analysis*, 15 :25–40, 1997. (Cité page 38.)
- [61] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer-Verlag New York Inc, 2010. (Cité page 38.)
- [62] S. Piperno, M. Remaki, and L. Fezoui. A non diffusive finite volume scheme for the 3d maxwell equations on unstructured meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(6), 2002. (Cité pages 48 et 78.)
- [63] J.S. Hesthaven and T. Warburton. Nodal high-order methods on unstructured grids : I. time-domain solution of maxwell's equations. *Journal of Computational Physics*, 181(1) :186–221, September 2002. (Cité page 48.)
- [64] P. Bonnet, X. Ferrieres, F. Issac, F. Paladian, J. Grando, J.C. Alliot, and J. Fontaine. Numerical modeling of scattering problems using a time domain finite volume method. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 11(8) :1165–1189, 1997. (Cité pages 48 et 63.)
- [65] F. Collino T. Fouquet and P. Joly. A conservative space-time mesh renement method forthe 1-d wave equation. *I. Construction, Numer. Math*, 95 :197–221, 2003. (Cité pages 58 et 130.)
- [66] I. S. Kim and W. J. R. Hoefer. A local mesh refinement algorithm for fdtd method to solve maxwell's equations. *IEEE Trans. Microwave Theory Thec*, 38(6) :812–815, 1990. (Cité pages 58 et 130.)

- [67] M. W. Chevalier and R. J. Luebbers. FDTD local grid with material tranverse. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 45(3) :411–421, 1997. (Cité pages 58 et 130.)
- [68] R. J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Combridge University Press, 2002. (Cité page 59.)
- [69] E. Godlewskie and P. A. Raviart. *Hyperbolic systems of conservation laws*. Ellipses, 1991. (Cité page 59.)
- [70] J.P. Cioni. *Résolution numérique deséquation de Maxwell instatinnaires par une méthode de volumes finis*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 1995. (Cité pages 62 et 71.)
- [71] JP Cioni. Parallelisation of maxwell/fv and 3d simulations in electromagnetism using clusters of workstations. *Rapport CERMICS*, 97-85, 1997. (Cité page 62.)
- [72] JP Cioni, L. Fezoui, and H. Steve. A parallel time-domain maxwell solver using upwind schemes and triangular meshes. *IMPACT in computing in science and engeneering*, 5 :215–247, 1993. (Cité page 62.)
- [73] L.J. Durlofsky, S. Osher, and B. Engquist. Triangle based tvd scheme for hyperbolic conservation laws. *Rapport ICASE*, 90-10, Janvier 1990. (Cité pages 63 et 72.)
- [74] X. Ferrières, J. P. Parmentier, S. Bertuol, and R. Ruddle. Application of an hybride finite difference/finite volume method to solve an automatic emc problem. *IEEE Transactions on EMC*, 46 :624–634, 2005. (Cité page 63.)
- [75] JP Cioni and M.Remaki. Comparaison de deux méthodes de volumes finis en électromagnétisme. *Rapport de recherche de INRIA*, 3166, Mai 1997. (Cité pages 63, 71 et 72.)
- [76] H. Paillere. *Multidimensional upwind residual distribution schemes for the Euler ans Navier-Stokes equations on unstructured grids*. PhD thesis, Université libre de Bruxelles, 1995. (Cité page 64.)
- [77] D.R Lindquist and M.B Giles. A compaison on numerical schemes on triangular and quadrilateral meshes. *In Lecture Notes in Physics*, 323 :369–373, 1989. (Cité page 64.)
- [78] A. Harten, P. D. Lax, and B. Van Leer. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1) :35–61, 1983. (Cité pages 65 et 66.)
- [79] A. Dervieux, L. Fezoui, and F. Leriote. On high resolution extensions of lagrange-galerkin finite-element schemes. *Rapport de Recherche INRIA*, 1703, 1992. (Cité page 65.)
- [80] B. Van Leer. Lux-vector splitting for the euleur equations. *Lecture Notes in Physics*, 170 :405–512, 1982. (Cité pages 65 et 71.)
- [81] L. Fezoui and B. Stoufflet. A class of implicit upwind schemes for euler simulations with unstructured meshes. *J. Comp. Phy.*, 84 :174–206, 1989. (Cité pages 66 et 71.)
- [82] P.D. Lax. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 7 :159–193, 1954. (Cité page 66.)

- [83] P.L. Roe. Approximation riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 135 :250–258, 1997. (Cité page 66.)
- [84] V.V. Rusanov. Calculation of interaction of non steady shock waves with obstacles. *Journal of Computational Physics*, 1 :267–279, 1961. (Cité page 66.)
- [85] J. L. Steger and R. F. Warming. Flux vector splitting for the inviscid gas dynamic with applications to finite-difference methods. *Journal of Computational Physics*, 40 :263–293, 1981. (Cité page 66.)
- [86] C.Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*. John Wiley and Sons, 1988. (Cité page 71.)
- [87] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme v. a second order sequel to godunov’s method. *Journal of Comp. Physics*, 32, 1979. (Cité page 71.)
- [88] R. LOHNER and J. AMBROSIANO. A finite element solver for the maxwell equation. *SMAI conference on numerical methods for the solution of Maxwell equation*, 1989. (Cité page 71.)
- [89] S. Pernet. *Etude de méthodes d’ordre élevé pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel. Application à la détection et à la compatibilité électromagnétique*. PhD thesis, Université Paris dauphine-Paris IX, U.F.R Mathématiques de la Décision, 2004. (Cité pages 76, 85 et 121.)
- [90] G. Cohen, X. Ferrieres, and S. Pernet. A spatial high-order hexahedral discontinuous galerkin method to solve maxwell’s equations in time domain. *Journal of Computational Physics*, 217(2) :340–363, 2006. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4JBGKMW-3/2/2af9faec9883079eefadb6d9cadcb772>. (Cité page 76.)
- [91] T. Gallouet R. Eymard and R. Herbin. *Finite Volume methods in Handbook*. 2000. (Cité pages 78 et 80.)
- [92] F. Hermeline. A finite volume method for solving maxwell equations in inhomogeneous media on arbitrary meshes. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 339, 2004). (Cité page 78.)
- [93] Olivier Labergerieb Raphade Herbin. Finite volume schemes for elliptic and elliptic-hyperbolic problems on triangular meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 147, 1997. (Cité pages 78 et 80.)
- [94] I. Faille. A control volume method to solve an elliptic equation on a two-dimensional irregular meshing. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 100, 1992. (Cité page 80.)
- [95] I. Faille. *Modélisation bidimensionnelle de la genèse et la migration des hydrocarbures dans un bassin sédimentaire*. PhD thesis, Université Î de Grenoble, 1992. (Cité page 80.)
- [96] R. Herbin. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles (electronic)*. University Aix Marseille I. (Cité page 80.)
- [97] Y. Hidaka, E. M. Choi, I. Mastovsky, M. A. Shapiro, J. R. Sirigiri, , and R. J. Temkin. Observation of large arrays of plasma filaments in air breakdown by 1.5 mw 110 ghz gyrotron pulses. *Phys. Rev. Lett*, 100, 2008. (Cité pages 101, 102, 103, 153 et 173.)
- [98] B. Chaudhury, J. P. Boeuf, G. Q. Zhu, and O. Pascal. Physics and modelling of microwave streamers at atmospheric pressure. *Journal of Applied Physics*, 110(11) :113306–113306, 2011. (Cité page 101.)

- [99] G.S. Sieger, J.H. Yee, and D. J. Mayhall. Computer simulation of nonlinear coupling of high-power microwaves with slots. *IEEE Trans. On Plasma Science*, 17(4), August 1989. (Cité page 107.)
- [100] M. Lofgren, D. Anderson, H. Bonder, H. Hamnén, and M. Lisak. Breakdown phenomena in microwave transmit-receive switches. *J. Applied physics*, 69(4), 15 Feb. 1991. (Cité page 107.)
- [101] U. Jordan, D. Anderson, M. Backstrom, A. V. Kim, M. Lisak, and O. Lunden. Microwave breakdown in slots. *IEEE. Transaction on plasma science*, 32(6), Dec. 2004. (Cité page 107.)
- [102] M. Backstrom, U. Jordan, D. Andersson, A.V Kim, M. Lisak, and O. Lunden. Can intentional electrical discharges be used for hpm protection? *Electromagnetic Compatibility (EMC), 2011 IEEE International Symposium on*, 14-19 Aug.2011. (Cité page 107.)
- [103] S. K. Nam and J. P. Verboncoeur. Theory of filamentary plasma array formation in microwave breakdown at near-atmospheric pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 103, 2009. (Cité page 107.)
- [104] Peter Felsenthal and Joseph M. Proud. Nanosecond-pulse breakdown in gases. *Physical Review*, 139(6A), september 1965. (Cité page 112.)
- [105] P. Lindarkis and G. Borg. Small signal impedance of a radio frequency plasma capacitor. *IEEE Microwave and Wireless components letters*, 17(11), Nov 2007. (Cité page 117.)
- [106] W. Huang, Y. Ren, and R. D. Russell. Moving mesh partial differential equations (mmpdes) based on the equidistribution principle. *SIAM J. Numer. Anal*, 31(3) :709–730, 1994. (Cité page 129.)
- [107] W. Huang and R. D. Russell. Adaptative mesh movement- the mmpde approach and its applications. *J. Comput. Appl. Math.*, 128 :383–398, 2001. (Cité page 129.)
- [108] E. A. Dorfy and L. O’C. Drury. Simple adaptative grids dor 1d initial vlue problems. *J. Comput. Phys.*, 69 :175–195, 1987. (Cité page 129.)
- [109] D. T. Prescott and N. V. Shuley. A method for incorporatong different sized cells into the ftdt analysis technique. *IEEE Microweve Guided Wave Lett*, 2 :434–436, 1992. (Cité page 130.)
- [110] P. Monk. Sub-gridding ftdt schemes. *ACES Journal*, 11 :37–46, 1996. (Cité page 130.)
- [111] T. Fouquet. *Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell*. PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, 2000. (Cité page 130.)
- [112] S. Osher and R. Sanders. Numerical approximations to nonlinear conservation laws with locally varying time and space grids. *Math. Comp.*, 41 :321–336, 1983. (Cité page 130.)
- [113] N. Canouet, L. Fezoui, and S. Piperno. Méhode volumes finis pour la résolution du système de maxwell 1d sur des grilles raffinées localement. *Rapport de Recherche INRIA*, 4301, 2001. (Cité page 130.)
- [114] S. Piperno, M. Remaki, and L. Fezoui. A centred second-order finite volume scheme for heterogenous maxwell equations in three dimensions on arbitrary unstructured meshes. *Rapport de Recherche INRIA*, 4161, 2001. (Cité page 130.)

- [115] Guo-Qiang Zhu. *Modeling of plasma dynamics and pattern formation during high pressure microwave breakdown in air*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse III, Jan 2012. (Cité page 133.)
- [116] L.K. Warne, R.E. Jorgenson, and S.D. Nicolaysen. Ionization coefficient approach to modeling breakdown in nonuniform geometries. *Sandia Report SAND2003-4078*, 2003. (Cité pages 155 et 165.)
- [117] Yu. P. Raizer. *Gas discharge physics*. Springer, Berlin, 1991. (Cité pages 155 et 165.)
- [118] A. Aleksandrov, V. Bychkov, L. Grachev, I. Esakov, and A. Lomteva. Air ionization in a near-critical electric field. *Technical Physics*, 51 :330–335, 2006. (Cité page 165.)
- [119] D. Anderson, M. Lisak, and T. Lewin. Self-consistent structure of an ionization wave produced by microwave breakdown in atmospheric air. *Physics of Fluids*, 29(2) :446, 1986. (Cité page 165.)
- [120] H. Hamnén, D. Anderson, and M. Lisak. A model for steady-state breakdown plasmas in microwave transmit-receive tubes. *J. Appl. Phys*, 70(1) :93–98, 1991. (Cité page 165.)
- [121] A. Bendali and L. Halpern. Absorbing boundary conditions for the three-dimensional maxwell system. *C.R.A.S Série 1, Mathématique*, 307, 1988. (Cité page 168.)

PUBLICATIONS

Publications

ARTICLES DANS DES REVUES INTERNATIONALES

- A. Hamiaz, R. Klein, X. Ferrieres, O. Pascal, J.P. Boeuf, J.R. Poirier, "Finite Volume Time Domain modelling of microwave breakdown and plasma formation in a metallic aperture". Computer Physics Communications, Volume 183, Issue 8, p. 1634-1640 (2012)

CONFÉRENCES INTERNATIONALES AVEC ACTES ÉDITÉS ET COMITÉ DE LECTURE

1. A. Hamiaz, R. Klein, X. Ferrieres, O. Pascal, J. P. Boeuf, "Modelization of Plasma Breakdown by Using Finite Volume Time Domain Method". Applied Computational Electromagnetic Society (ACES 27-31 March 2011) in Williamsburg, Virginia (USA).
2. A. Hamiaz, O. Pascal, X. Ferrieres, J. P. Boeuf, J. R. Poirier, "Development of 3D finite volume solver for plasma/microwave simulation". Scientific Computing in Electrical Engineering (SCEE 2010) in Toulouse.
3. R. Klein, A. Hamiaz, X. Ferrieres, O. Pascal, J. P. Boeuf, "Study of Plasma Breakdown Located in Apertures to Shield Electronic Components inside Cavities". PIERS March 2011 in Marrakesh
4. A. Hamiaz, O. Pascal, X. Ferrieres, J. R. Poirier, R. Klein " FVTD modelling of a localized microwave plasma discharge in microstrip wave guide ". Ampère 2011 : 13th International Conference on Microwave and High Frequency Heating, Toulouse, France, September 5-8 2011.

Titre Etude d'une méthode volumes finis pour la résolution d'un modèle non linéaire de couplage Maxwell/Plasma dans le domaine temporel.

Résumé Cette thèse présente l'étude d'une méthode numérique efficace pour résoudre les équations de Maxwell couplées à un modèle de plasma fluide. Le travail est organisé en cinq chapitres dans lesquels nous présentons la formulation du modèle physique, l'étude mathématique pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution, l'approximation numérique du problème, des résultats de validation et enfin, dans un cas simplifié, la mise en oeuvre et l'étude numérique d'une stratégie de maillage auto-adaptatif en 1D. Dans ces travaux de recherche, nous nous sommes plus focalisés sur le choix d'une approximation numérique qui soit la plus performante pour résoudre notre problème couplé. En particulier, après avoir donné une approximation différences finies actuellement utilisée en 2D dans ce contexte, nous avons proposé une solution parallèle d'un outil FDTD et traité en 3D un couplage micro-onde/plasma en espace libre. Ensuite, dans le cas de problèmes de blindage, nous avons mis en avant les inconvénients de la méthode FDTD et proposé une approche basée sur un schéma volumes finis qui offre les avantages du raffinement local. Pour améliorer cette méthode, nous avons mis en oeuvre une stratégie de pas de temps local et montré les gains obtenus dans le cas de plasma confinés.

Mots-clés Équations de Maxwell dans le domaine temporel, modèle de plasma fluide, méthode volumes finis, maillage adaptatif, pas de temps local, parallélisation.

Title Study of a finite volume method for solving a nonlinear model coupling Maxwell/Plasma in the time domain.

Abstract This thesis presents the study of an efficient numerical method to solve the Maxwell equations coupled with a fluid plasma model. The document is split into five chapters where we introduce the formulation of the physical model, a mathematical study to demonstrate the existence and uniqueness of a solution for the problem, numerical approximations of the equations, simulations and validations on 3D and 2D examples and a prospective work on a finite volume method with adaptive mesh for the 1D case. The accent is continuously put on the choice of the most efficient numerical approximation to solve the coupled problem. In this work, we exhibit the drawbacks of the finite difference method usually employed in this context. To overcome these drawbacks, we propose a method based upon a finite volume scheme which allows the capability to use local refinements. Then, to increase the gain in time CPU and memory storage, we introduce a local time-stepping scheme.

Keywords Time domain Maxwell equations, Fluid plasma model, Finite volume method, adaptive mesh method, local time-stepping, parallelization.