



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse III - Paul Sabatier
Discipline ou spécialité : Génie mécanique, Mécanique des Matériaux

Présentée et soutenue par Marie-Fraise Ponge
Le 20 Juin 2012

Titre :

PROPAGATION D'ONDES ÉLASTIQUES DANS DES MULTICOUCHES AUTOSIMILAIRES:
APPLICATION AUX COMPOSITES STRATIFIÉS RENFORCÉS DE FIBRES DE CARBONE

JURY

Michel Castaings	I2M, Université Bordeaux 1	Président
Arnaud Tourin	Institut Langevin, ESPCI Paris	Rapporteur
Mabrouk Ben Tahar	Laboratoire Roberval, UTC Compiègne	Rapporteur
Claude Depollier	LAUM, Université du Maine, Le Mans	Examineur
Vincent Gibiat	Laboratoire PHASE, Université Toulouse III	Directeur de thèse
Xavier Jacob	Laboratoire PHASE, Université Toulouse III	Directeur de thèse

Ecole doctorale : MEGEP
Unité de recherche : Laboratoire PHASE
Directeur(s) de Thèse : Vincent Gibiat et Xavier Jacob

Résumé détaillé

Les matériaux composites renforcés de fibres de carbone sont de plus en plus utilisés dans l'industrie. L'association de leurs propriétés de drapage avec le concept d'autosimilarité nous a permis de fabriquer des matériaux innovants.

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude de la propagation des ondes élastiques dans ces milieux multicouches autosimilaires constitués de plis anisotropes. Nous avons d'abord étudié la géométrie fractale et les processus de fabrication des matériaux composites stratifiés renforcés de fibres de carbone. Nous avons ainsi mis en oeuvre des matériaux multicouches autosimilaires et les avons étudiés à l'aide de deux modèles numériques et d'essais expérimentaux.

La géométrie fractale décrit des objets complexes aux formes irrégulières, omniprésents dans la nature qui présentent des « brisures » à toutes les échelles. Les objets fractals se distinguent par leur autosimilarité : ils sont semblables à eux-mêmes à différentes échelles. L'ensemble de Cantor et la suite de Fibonacci génèrent des structures autosimilaires irrégulières. De plus, les composites stratifiés renforcés de fibres de carbone sont constitués par le drapage de plis orthotropes. Nous avons donc fabriqué des structures multicouches basées sur l'ensemble de Cantor et la suite de Fibonacci. Les processus autosimilaires sont appliqués tant sur l'empilement des couches, que sur l'orientation des couches les unes par rapport aux autres.

D'abord, un modèle numérique unidimensionnel, basé sur la méthode des matrices de transferts, a été développé. Les propriétés acoustiques en transmission de structures périodiques, désordonnées et autosimilaires sont alors comparées. Cette première partie montre que l'autosimilarité influence la transmission des ondes acoustiques. Le coefficient de transmission des empilements autosimilaires présente une forme et un comportement autosimilaire. Nous avons également démontré que les structures autosimilaires possèdent à la fois des propriétés de milieux périodiques et de milieux désordonnés : elles combinent bandes interdites et états localisés.

Des mesures ultrasonores comparant des empilements ordonnés et autosimilaires sont ensuite exposées. Le coefficient de transmission, les mesures de vitesse de phase et d'atténuation expérimentaux indiquent que plus l'empilement contient d'orientations, plus la baisse globale de transmission est prononcée. Finalement, nous étudions la propagation des ondes élastiques dans ces milieux anisotropes grâce à l'algorithme de la matrice de raideur. Nous étudions également l'influence des paramètres d'auto-similarité. Nous avons montré que les structures autosimilaires créent des milieux irréguliers de manière déterministe, elles permettent de réduire et d'optimiser la baisse de la transmission des ondes élastiques.

Detailed abstract

Fiber reinforced composites are more and more used in industry. The association of their draping properties with self-similarity allows to create innovative materials. Elastic wave propagation in such media is numerically and experimentally studied.

During this PhD work, elastic wave propagation in these self-similar multilayered media, made with orthotropic plies, has been investigated. First, we have considered the fractal geometry and the building process of stratified fiber reinforced composites. We have thus manufactured multilayered self-similar samples and have studied them thanks to two numerical models and experiences.

Fractal geometry describes complex and irregular objects that present irregularities at all scales. Such objects are characterized by their self-similarity : they are similar to themselves at different scales. The Cantor's set and the Fibonacci sequence generate self-similar irregular structures. Moreover, stratified fiber reinforced composites are constituted by a draping of orthotropic plies. Multilayered Cantor and Fibonacci stacks are manufactured. Self-similarity is applied on geometry and on plies orientation.

Periodic, disordered and self-similar structures are compared thanks to a unidirectional numerical model based on a transfer matrix formalism. It shows that stacks self-similarity influences the acoustic transmission properties. Self-similar stacks transmission coefficient presents a self-similar shape and behavior. It is demonstrated that self-similar structures possess periodic and disordered media properties. They combine band-gaps and localized states.

Ordered and self-similar samples are then experimentally compared through ultrasonic measures. Experimental transmission coefficients, phase velocities and attenuations indicate that the more disorder there is, the lower the global transmission is. Finally, elastic waves propagation in these multilayered anisotropic stacks is computed thanks to the stiffness matrix algorithm. It is shown that self-similar structures create determi-

nistic irregularities and enhance the drop of the acoustic transmission. The homothetic dimension allows to adapt the ratio heterogeneities and wavelength to optimize the self-similar stacks

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à M. Michel Castaings d'avoir accepté de présider mon jury de thèse, de son aide pendant le développement de mon code de calcul et de ses commentaires éclairés sur mon manuscrit.

Merci aussi à MM. Arnaud Tourin et Mabrouk Ben Tahar pour leur lecture critique et avisée de mon mémoire en tant que rapporteurs. Je remercie également M. Claude Depollier de m'avoir fait l'honneur d'être membre du jury.

J'adresse également tous mes remerciements à M. Vincent Gibiat pour m'avoir accueillie au sein du laboratoire PHASE, pour ses conseils, sa confiance et la liberté qu'il m'a accordés durant mon travail de thèse.

J'exprime ma gratitude à M. Xavier Jacob, pour avoir répondu avec patience aux questions que je lui ai posées, pour avoir corrigé mon mémoire, et pour m'avoir fait prendre le recul nécessaire quand il le fallait grâce à son humour décapant.

Ce travail a été réalisé sur la base d'un contrat de recherche en partenariat avec Airbus, je tiens donc à remercier tous les interlocuteurs que j'ai pu rencontrer lors de la mise en commun des avancées respectives des partenaires et la réalisation de mes échantillons.

Je remercie chaleureusement tous mes collègues du laboratoire PHASE :

- Didier, Sandra, Perrine, Mathieu, Alain, Benoît et Gary, pour leur sens de l'humour, leur soutien, leur patience et leurs conseils ;
- les deux Pierre pour leur aide technique et informatique si précieuse, Marie-Catherine pour ses conseils et sa gentillesse, et les autres membres permanents pour l'ambiance chaleureuse et accueillante qu'ils créent au laboratoire.

Enfin, je ne serais sûrement pas parvenue jusqu'ici sans la confiance et le soutien de ma famille et mes amis.

Merci à mes parents d'avoir accepté mes choix d'orientation et de m'avoir soutenue dans les difficultés qui en ont découlé. Merci à ma soeur de si bien me comprendre et d'être toujours là pour moi. Merci à mes oncles, tantes, cousins et cousines d'être venus si nombreux lors de ma soutenance.

Merci énormément à Adeline pour sa présence, son aide et son amitié infaillibles

dans les moments de doute, de crise et de joie. Merci à Serge pour les mêmes raisons.

J'ai également une pensée pour mon professeur de clarinette qui m'a permis de souffler pendant les moments difficiles. Merci aux gens que j'oublie et qui ont aidé à l'aboutissement de cette thèse.

Pour finir, je tiens à remercier Naël pour son soutien inébranlable, sa compréhension, sa présence apaisante et grâce à qui je crois avoir pu garder un pied dans la réalité même dans les moments de désespérance et d'effervescence. Merci pour tout.

Table des matières

Résumé détaillé	I
Detailed Abstract	III
Remerciements	V
Introduction	1
1 Généralités sur l'autosimilarité et les matériaux composites à fibres de carbone	5
1.1 Géométrie fractale pour la description et la création de l'irrégularité	6
1.1.1 Définition	6
1.1.2 Les phénomènes physiques comme générateurs d'autosimilarité	8
1.1.3 L'ensemble de Cantor : exemple d'autosimilarité stricte	9
1.1.4 Suite de Fibonacci et autosimilarité	11
1.1.5 L'autosimilarité au service de l'irrégularité	15
1.2 Matériaux composites	17
1.2.1 Définition	17
1.2.2 Renforts	18
1.2.3 Matrices	18
1.2.4 Procédé de fabrication	19
1.2.5 Difficultés de fabrication	22
1.2.6 Composites à plis croisés autosimilaires	23
1.3 Conclusion	23
2 Ondes acoustiques en milieux unidimensionnels autosimilaires	25
2.1 Propagation acoustique dans un milieu multicouche unidimensionnel	26
2.1.1 Formalisme matriciel pour la propagation des ondes acoustiques dans un multicouche unidimensionnel	26
2.1.2 Réduction de l'anisotropie à une dimension	29

2.2	Ondes et périodicité	32
2.2.1	Bref historique des cristaux phononiques	32
2.2.2	Propagation dans les milieux multicouches périodiques	33
2.3	Propagation des ondes en milieu désordonné	36
2.3.1	La localisation d'Anderson	36
2.3.2	Les différents régimes de diffusion	37
2.3.3	Milieux multicouches désordonnés	38
2.4	Variations autosimilaires sur la suite de Fibonacci	45
2.4.1	Multicouches concaténés selon le mot de Fibonacci	45
2.4.2	Suite de Fibonacci appliquée à l'orientation des plis	53
2.5	Variations autosimilaires sur l'ensemble de Cantor	56
2.5.1	Empilement de Cantor d'autosimilarité géométrique	56
2.5.2	Empilement de Cantor d'autosimilarité angulaire	61
2.6	Comparaison des empilements périodique, aléatoire, de Cantor et de Fibonacci	65
2.7	Conclusion : de la périodicité au désordre en passant par la quasi-périodicité	67
2.7.1	Récapitulatif des principaux résultats	67
2.7.2	Perspectives	67
3	Propagation d'ondes élastiques dans des matériaux composites autosimi-	
	lares	69
3.1	Influence de l'autosimilarité par expériences en transmission ultrasonore . .	70
3.1.1	Dispositif expérimental	70
3.1.2	Mesure de vitesses de phase et d'atténuations	72
3.1.3	Coefficient de transmission	77
3.1.4	Conclusion	80
3.2	Étude numérique de la transmission des ondes de volume dans un empile-	
	ment autosimilaire	80
3.2.1	Modèle de propagation en milieux multicouches anisotropes . .	81
3.2.2	Comparaison des empilements périodiques, désordonnés et auto-	
	similaires	85
3.3	Influence des paramètres d'autosimilarité sur la transmission des ondes élas-	
	tiques	92
3.3.1	Influence de l'angle de la seconde couche	92
3.3.2	Influence de l'ordre d'autosimilarité et de la dimension d'homo-	
	thétie	93
3.4	Conclusions et perspectives	96

3.4.1	Résumé des principaux résultats	96
3.4.2	Perspectives	97
	Discussion et perspectives	99
3.4.3	Utilisation de l'autosimilarité	101
3.4.4	Propriétés mécaniques	101
3.4.5	Comportement vibratoire	102
	Bibliographie	103
A	Résolution de l'équation de Christoffel	113
B	Homogénéisation des propriétés élastiques d'un composite unidirectionnel	115
C	Algorithme de la matrice de raideur	117
D	Courbes des coefficients de transmission en fonction de la dimension d'homothétie	123

Liste des tableaux

1.1	Création de l'ensemble de Cantor en subdivisant \mathbb{R}	10
1.2	Onze premiers nombres de Fibonacci.	11
1.3	Sept premiers mots de Fibonacci.	14
1.4	Succession de couches pour un empilement de Cantor triadique de l'ordre 0 (ligne 1) à l'ordre 3 (ligne 4).	16
1.5	Données mécaniques du fabricant (Toho Tenax) pour les fibres de carbone utilisées dans cette étude.	18
1.6	Propriétés générales des résines PEEK et époxyde. E est le module de Young, G , le module de cisaillement, σ_f , la contrainte à la rupture, et T_{max} la température maximale pour ces propriétés.	19
1.7	Comparaison des avantages et inconvénients des résines PEEK (thermoplastique) et époxyde (thermodurcissable).	20
2.1	Constantes élastiques d'un composite unidirectionnel en fibres de carbone et résine [Deschamps & Hosten, 1992; Balasubramaniam, 2000].	31
2.2	Ecart (%) entre les valeurs théoriques des fréquences centrales des bandes interdites (Eq. 2.11) et les valeurs obtenues graphiquement par rapport aux fréquences délimitant la bande d'arrêt.	36
2.3	Concaténation basée sur la suite de Fibonacci pour la confection d'empilements unidirectionnels autosimilaires.	46
2.4	Dénombrement des cellules BA et BAA dans les empilements de Fibonacci (ordre 4 à 8).	52
2.5	Rapports d'homothétie théorique (Eq. 2.23) et calculé à partir des coefficients de transmission de l'empilement de Cantor angulaire (Fig. 2.31).	63
3.1	Erreurs de mesure sur l'épaisseur de l'échantillon, le temps et la température lors des mesures de vitesses de phase.	74
3.2	Incertitudes de mesure sur l'angle d'incidence, θ_{inc} , la masse volumique, ρ , et l'épaisseur, h , des échantillons.	78

3.3	Rapport des aires sous les courbes de transmission par l'échantillon et d'une transmission totale en (%) pour tous les vecteurs d'ondes incidents à 5MHz.	80
B.1	Propriétés mécaniques des fibres de carbone.	116
B.2	Propriétés mécaniques de la résine PEEK.	116

Table des figures

1.1	Exemples d'objets autosimilaires : autosimilarité ponctuelle (plante succulente (a)), exacte (Flocon de Von Koch (b)) et statistique (chou romanesco (c)).	6
1.2	Dimension topologique et doublement de taille.	7
1.3	Mesure de la dimension de Hausdorff de la côte de la Grande-Bretagne.	8
1.4	Mesure de la dimension de Minkowski-Bouligand de la côte de la Grande-Bretagne par la méthode de comptage de boîtes.	9
1.5	Ensemble triadique de Cantor $\gamma = 3$: les segments sont divisés par 3.	10
1.6	Autosimilarité ponctuelle dans la nature : spirales logarithmiques.	12
1.7	Expérience de Douady et Couder à quelques secondes d'intervalle. Les gouttes de ferro-fluide se répartissent selon des spirales logarithmiques.	13
1.8	Spirale logarithmique autosimilaire : deux grossissements successifs de ϕ^4 . Sur la figure (a) sont dessinés les rectangles dont les largeurs varient selon la suite de Fibonacci.	13
1.9	Fractale du mot de Fibonacci après 23 itérations. L'étape 11 est similaire à une homothétie près à l'étape 1. L'étape 1 est similaire à une homothétie près à l'étape 14 et ainsi de suite.	15
1.10	Empilement basé sur l'ensemble de Cantor.	16
1.11	Empilement quasi-périodique basé sur la suite de Fibonacci.	17
1.12	Rouleau de nappe pré-imprégnée unidirectionnelle : fibres de carbone et résine PEEK (a). Exemple de stratification pour créer un multicouche (b).	20
1.13	Schéma du moule (a). I et III : plaques carrées pleines en acier ; II : cadre carré en acier. Photographie du moule dans la presse avant le lancement du cycle (b).	21
1.14	Effort exercé par la presse sur le moule (a) et cycle de montée et descente en température au sein de la presse (b).	22
1.15	Photographie du composite dans le film démoulant, après sortie du moule.	22

1.16	Empilement de Cantor angulaire (a) : l'orientation centrale est successivement divisée par 3. Empilement de Fibonacci angulaire (b) : l'orientation de la n ème couche est la somme des orientations des deux couches qui la précèdent.	24
2.1	Propagation dans un multicouche unidimensionnel. A_I est l'amplitude complexe de l'onde incidente, A_R et A_T celles des ondes réfléchies et transmises respectivement. Les A_n^+ sont les amplitudes complexes des ondes se propageant selon z croissant, A_n^- selon z décroissant.	27
2.2	Repère local (x'_1, x'_2, x'_3) associé à la couche unidirectionnelle de composite : l'axe A_6 est l'axe d'orthotropie. Il est orienté le long des fibres de carbone.	29
2.3	Multicouche anisotrope : l'axe d'orthotropie des plis tourne autour de l'axe de propagation.	30
2.4	Vitesse des ondes longitudinales c_L en km/s en fonction de l'orientation φ_0 de la couche par rapport aux axes du repère global (x_1, x_2, x_3)	31
2.5	Diffraction de Bragg des plans d'ondes sur les couches d'un réseau cristallin périodique.	34
2.6	Coefficient de transmission pour un empilement périodique $[0^\circ \ 90^\circ]_{20}$ ($d = 1$ mm). Quatre bandes interdites sont visibles ($T \rightarrow 0$).	35
2.7	Représentation schématique des différents régimes de diffusion en milieu désordonné. (a) diffusion simple : $L \cong l_e$; (b) diffusion multiple $L > l_e$; (c) diffusion multiple $L > l_e$, renormalisation de la constante de diffusion : localisation faible $l_e > \lambda$; (d) localisation forte : annulation de la constante de diffusion $\lambda > l_e$	37
2.8	Comparaison de deux exemplaires d'empilements désordonnés à $\sigma = 10\%$ (a) et $\sigma = 100\%$ (b).	39
2.9	Coefficients de transmission pour une réalisation d'empilements présentant 30% (a), 60% (a) et 90% (c) de désordre.	40
2.10	Moyenne du coefficient de transmission en fonction du nombre de couches à l'intérieur ($f = 2$ MHz) ((a) et (b)) et à l'extérieur ($f = 1.5$ MHz) des bandes interdites ((c) et (d)) pour différents degrés de désordre.	41
2.11	$\langle \ln T \rangle$ pour des empilements de désordre croissant.	41
2.12	Grossissement de la quatrième bande interdite pour visualiser l'évolution de $\langle \ln T \rangle$ avec le désordre.	42
2.13	Coefficients de transmission pour une réalisation d'empilements présentant 30% (a), 60% (a) et 90% (c) de désordre.	43

2.14	Moyenne du coefficient de transmission en fonction du nombre de couches à l'intérieur ($f = 2.4\text{MHz}$) ((a) et (b)) et à l'extérieur ($f = 1.5\text{MHz}$) des bandes interdites ((c) et (d)) pour différents degrés de désordre.	44
2.15	$\langle \ln T \rangle$ pour des empilements de désordre croissant.	45
2.16	Coefficients de transmission, T , pour des structures de type Fibonacci de l'ordre 4 à l'ordre 9 en fonction des fréquences normalisées : fd/c_{90} . Chaque figure présente un grossissement du pic de fréquence normalisée $fd/c_{90} = 3/4$: le comportement autosimilaire cyclique est visible. La courbe étoilée de la figure (a) représente T pour un empilement périodique de même nombre de couches.	47
2.17	Grossissement du pic de résonance en $fd/c_{90} = 0,2307$ pour le calcul du rapport d'homothétie α : ordre 6 (a), ordre 9 (b) et ordre 12 (c).	49
2.18	Coefficients de transmission pour les multicouches de Fibonacci : ordre 4 à 8.	50
2.19	Position des résonances pour un empilement de Fibonacci pour les ordres 4 à 10.	51
2.20	Autosimilarité de la position en fréquence des pics de résonance pour l'empilement de Fibonacci à l'ordre 12 (a) et grossissement (b).	51
2.21	Coefficients de transmission pour un empilement périodique de cellule élémentaire BAA (a) et pour un empilement de Fibonacci à l'ordre 7 (b).	52
2.22	Répartition des vitesses de propagation des ondes, c en km.s^{-1} , dans les empilements de Fibonacci angulaires d'ordre 30 ($N = 30$) pour différentes initialisations de la suite.	54
2.23	Coefficient de transmission de l'empilement de Fibonacci "angulaire" avec $\varphi_0 = 1^\circ$ et $\varphi_1 = 2^\circ$ (ordre 30).	55
2.24	Positions des pics de résonance (ordre 5 à ordre 30) pour l'empilement de Fibonacci angulaire : $\varphi_0 = 1$ et $\varphi_1 = 2$	55
2.25	Comparaison du coefficient de transmission d'un empilement périodique (ligne grise pleine) et d'un empilement triadique de Cantor $\gamma = 3$ d'ordre 2 (ligne en pointillés noire) ($N = 9$ couches).	57
2.26	L'empilement de Cantor est un empilement périodique comprenant un défaut.	57
2.27	Position des résonances en fonction de la fréquence normalisée : $f = fd/c_0$: apparition d'états localisés au sein des bandes interdites du multicouche périodique.	58

2.28	Loi d'échelle et autosimilarité géométrique de la structure de Cantor en épaisseur. Les fréquences sont normalisées par rapport à la fréquence centrale de la bande interdite pour que le facteur d'homothétie soit visible.	59
2.29	Coefficient de transmission en fonction de fd/c_{90} (fréquences normalisées), pour les structures de Cantor $\gamma = 3, 5, 7$ à l'ordre 1.	60
2.30	Equivalence entre un multicouche de Cantor angulaire ($\gamma = 3$, couche centrale orientée à $\pi/2$, ordre 3) et d'un empilement équivalent en épaisseur avec des couches orientées à 0 et $\pi/2$	62
2.31	Coefficient de transmission pour l'empilement de Cantor angulaire ($\varphi_0 = \pi/2$). Loi d'échelle et autosimilarité de l'ordre 2 (Fig. 2.31 (a)) à l'ordre 5 (Fig. 2.31 (d)).	63
2.32	Comparaison du coefficient de transmission de l'empilement de Cantor en angle à l'ordre 3 pour $\varphi_0 = \pi/2$ et $\gamma = 3, 5, 7$	64
2.33	Comparaison du ratio en transmission des empilements de Cantor (a) et de Fibonacci (b) avec les empilements périodiques et aléatoires associés en fonction de l'ordre de l'empilement de Cantor présentant une autosimilarité dans l'épaisseur. Les points sont reliés pour faciliter la lecture.	66
3.1	Photographie et schéma du banc de manipulation pour les expériences en transmission.	71
3.2	Procédure de réglage du banc de manipulation. B-Scan du signal reçu par la barrette après la procédure d'alignement (a). Superposition des signaux reçus par les éléments situés aux extrémités de la barrette pour le réglage de l'incidence normale (b). L'amplitude des signaux est en unités arbitraires.	72
3.3	Drapages réalisés et testés expérimentalement : unidirectionnel, empilement de Cantor d'autosimilarité angulaire et en épaisseur, empilement de Fibonacci angulaire.	73
3.4	(a) : signaux reçus par l'élément central de la barrette pour le signal se propageant dans l'eau (noir) et le signal rencontrant l'échantillon (gris). (b) : intercorrélation de ces deux signaux.	74
3.5	Mesures de la vitesse de phase des ondes longitudinales pour les différents échantillons.	75
3.6	Atténuation expérimentale calculée en cm^{-1} pour les différents échantillons.	77

3.7	Coefficients de transmission expérimentaux pour 4 types d'empilements : unidirectionnels (a), de Fibonacci (b), de Cantor angulaire (c) et en épaisseur (d). Les courbes noires en pointillés et grise pleine correspondent aux deux copies de l'empilement. Les erreurs de mesure tiennent compte de l'écart type obtenu en calculant le coefficient de transmission sur les différents éléments.	79
3.8	Représentation schématique d'un empilement de couches anisotropes. (x'_1, x'_2, x'_3) est le repère local associé à chaque couche. Les fibres sont parallèles à l'axe x'_3	81
3.9	Algorithme de la matrice de raideur de couche [Rokhlin & Wang, 2002]. Plus de précisions sur les calculs figurent en annexe C.	83
3.10	Superposition des coefficients de transmission calculés par le modèle fluide simplifié (courbe rouge) et par le modèle anisotrope en incidence normale (courbe bleue en pointillés).	84
3.11	Comparaison des résultats obtenus avec le code de calcul programmé ((b) et (d)) et des résultats obtenus par Castaings et Hosten [Castaings & Hosten, 1994] (a) et Balasubramaniam [Balasubramaniam, 2000] (c).	84
3.12	Repère associé au tenseur des rigidités (Eq. 3.14 (a)) et repère mis en situation expérimentale (b).	85
3.13	Surface des lenteurs pour un pli unidirectionnel (ks/m) (a) et vitesses de phase associées (m.s^{-1}) (b). Le plan d'incidence est le plan (x_1, x_3)	86
3.14	Empilements et leurs arrangements multicouches aléatoires associés.	87
3.15	Ratio en transmission à 5MHz des empilements ordonnés aux empilements désordonnés.	88
3.16	Variation du coefficient de transmission en fonction de la fréquence (MHz) et de l'angle d'incidence ($^\circ$) pour des empilements de 27 plis : unidirectionnel 0° , périodique $[0^\circ 90^\circ]$, à plis croisés $[0^\circ 45^\circ 90^\circ 135^\circ]$ et de Cantor angulaire d'orientation centrale $\varphi_0 = 90^\circ$	90
3.17	Variation du coefficient de transmission en fonction de la fréquence (MHz) et de l'angle d'incidence ($^\circ$) pour des empilements de Cantor et de Fibonacci présentant une autosimilarité dans l'épaisseur constitués de 27 couches orientées à 0° et 90° , et empilement de Fibonacci angulaire d'orientations initiales 0° et 1°	91
3.18	Ratio en transmission global τ (%) pour des empilements ordonnés (unidirectionnel, périodique et plis croisés), quasi-périodiques (Cantor et Fibonacci) et angulaires (Cantor et Fibonacci).	92

3.19 (a) : ratio en transmission en fonction de l'angle de la deuxième couche, φ_0 , utilisée dans la construction des empilements périodique et quasi-périodiques. (b) : différence de vitesse pour les ondes T1 entre deux couches orientées à φ_0 et θ°	93
3.20 Variation de la taille du segment conservé α lors de la construction de l'ensemble de Cantor.	94
3.21 Empilement de Cantor en épaisseur : étude du ratio en transmission en fonction de la dimension d'homothétie D et de l'ordre d'autosimilarité.	94
3.22 Coefficients de transmission pour l'empilement de Cantor en épaisseur ($\alpha = 0, 3$) des ordres 1 à 3.	95
3.23 Banc de mesure du module d'Young et du facteur de perte des poutres composites. Le pot vibrant et l'accéléromètre sont commandés par Matlab. L'accéléromètre permet de mesurer la réponse en fréquence de la plaque et l'identification des modes de vibration.	102
3.24 Banc de génération et de mesure d'ondes de Lamb.	103
A.1 Les trois polarisations des ondes par rapport à la direction de propagation \tilde{n}	114
C.1 Schématisation du problème de la propagation des ondes élastiques dans un milieu multicouche anisotrope.	118

Introduction

L'industrie aéronautique est en constante recherche de matériaux innovants et performants, capables de faire face aux exigences de ce domaine de pointe. C'est dans cette optique que le pôle Aerospace Valley Aquitaine-Midi-Pyrénées crée une synergie d'entreprises et de laboratoires de recherche.

Contexte de l'étude : le projet INMAT

Sous la coordination d'Airbus Operation, des partenaires académiques et industriels cherchent à concevoir, dans le cadre du projet INMAT (INnovative composite MATerials) un nouveau matériau composite. Le but est de créer des matériaux thermoplastiques dotés de propriétés électriques, électromagnétiques, thermiques et acoustiques adaptées aux usages exigeants de l'aéronautique. De tels matériaux ont pour objectif de dépasser le plateau de performances techniques et économiques des composites existants. Ces derniers ne permettent plus de répondre aux futures problématiques dictées par des contraintes de coût, de masse, de performances mécaniques et d'environnement.

Les composites à matrice "thermodurcissable", qui dominent aujourd'hui le marché, sont largement connus, étudiés et utilisés notamment dans les structures primaires des avions (caisson central de voilure pour l'A380 par exemple). La mutation des structures aéronautiques métalliques vers des structures composites conduit à envisager l'utilisation de nouvelles générations de matériaux tels que les composites à matrice "thermoplastique". Bien que ces matériaux soient utilisés dans l'industrie automobile (sans visées de hautes performances), leur technologie de mise en œuvre n'est pas compétitive. Ils possèdent pourtant de bonnes performances mécaniques, des conditions de stockage moins exigeantes (les matrices thermodurcissables ne se conservant longtemps (1 an) qu'à -18°C), des moyens de production moins onéreux et des facilités en termes de réparations.

Le projet INMAT implique de nombreux centres de recherche (ICA, CEMES, PHASE, CIRIMAT de l'Université de Toulouse et IPREM-CANBIO de l'Université

de Pau) et d'entreprises (EADS FRANCE INNOVATION WORK, SMAC, AIRBUS OPERATION) des régions Midi-Pyrénées et Aquitaine. Il se focalise sur l'étude des composites carbone/PEEK en abordant deux thématiques. D'une part, l'amélioration des propriétés diélectriques des matériaux thermoplastiques en champ électromagnétique par le dopage à cœur de la matrice thermoplastique et le dépôt de matière métallique à la surface des composites. Mon travail s'inscrit dans la seconde partie de ce projet : l'amélioration du comportement acoustique des matériaux composites thermoplastiques.

Le mécanisme d'atténuation des ondes combine à la fois les phénomènes d'absorption dus à la viscoélasticité des matériaux (dissipation d'énergie mécanique) et les phénomènes de diffusion géométrique créant des interférences (répartition spatiale de l'énergie). Dans les composites constitués de fibres et de résine, l'amortissement viscoélastique est principalement dû à la matrice. Pour augmenter la dissipation d'énergie mécanique, une partie des partenaires du projet travaille à l'échelle de la résine (CIRIMAT, CEMES, SMAC) en la modifiant par dopage (rajout de particules viscoélastiques, piezoélectriques ou de nanotubes de carbone).

À l'échelle de l'aéronef, les propriétés mécaniques et le comportement vibratoire des panneaux composites sont prépondérants. L'équipe d'EADS intervient pour les calculs à l'échelle des panneaux et de la cabine. Les dimensions, les méthodes d'assemblage, l'interaction avec le reste de la structure de l'aéronef sont autant de paramètres à optimiser.

Objectif

Nous travaillons sur l'axe de ce projet qui exploite les propriétés des matériaux phononiques (augmentation de l'atténuation par effet géométrique). L'idée est d'utiliser les propriétés particulières des milieux complexes sur la propagation des ondes pour créer des matériaux composites performants au niveau sonore dans le but d'atténuer les vibrations et de réduire la transmission acoustique. La première partie du projet se consacre à la validation du concept dans un domaine de longueurs d'onde de l'ordre de la taille des hétérogénéités du milieu : le domaine ultrasonore. Elle sera étendue ultérieurement au domaine des basses fréquences.

Les cristaux phononiques ont beaucoup été étudiés depuis les années 90 et ont donné lieu à de multiples applications dans tous les domaines faisant intervenir des ondes : quantique, optique, mécanique. En jouant sur la symétrie du milieu et en introduisant des cavités résonantes (métamatériaux), les chercheurs ont exploité leurs nombreuses

possibilités pour créer des dispositifs de précision pour des filtres fins, des guides d'ondes ou des transducteurs focalisés.

Les milieux complexes présentent des propriétés attractives de part leur géométrie spécifique. Les milieux périodiques créent des interférences destructives et présentent des bandes de fréquence qui interdisent la propagation des ondes sonores, les milieux désordonnés peuvent, quant à eux, localiser les ondes en leur sein entraînant ainsi des baisses de transmission. Les matériaux autosimilaires (semblables à eux-mêmes à différentes échelles) ont montré leur capacité à bloquer la propagation des ondes sonores. Ils sont notamment utilisés efficacement en tant que murs anti-bruits. Ils sont à mi-chemin entre la périodicité (ils présentent des processus répétitifs) et le désordre (ils représentent très bien les milieux irréguliers). Dans le domaine des ondes électromagnétiques, les scientifiques ont essayé de combiner les propriétés de localisation et de bandes interdites afin de créer des filtres optiques de plus en plus efficaces. De nombreuses études ont été menées sur des quasi-réseaux. Depuis le travail de Kohmoto *et al.* [Kohmoto *et al.*, 1987a], les quasi-cristaux autosimilaires de Fibonacci ont largement été étudiés et ont inspiré quelques travaux sur les ondes élastiques. Les travaux sur les milieux autosimilaires restent à ce jour marginaux en acoustique. Pourtant ces milieux possèdent des propriétés très intéressantes pour de nombreuses applications.

Problématique

Comment augmenter l'atténuation sonore des matériaux composites stratifiés par l'autosimilarité ? Que sont les matériaux autosimilaires ? Quelle est leur influence sur la propagation des ondes acoustiques ? Comment combiner autosimilarité et anisotropie pour optimiser la baisse de transmission acoustique ?

Angle d'approche : application des milieux complexes à la technologie de drapage des composites

L'idée originale de cette thèse est de rendre le processus de construction des matériaux composites autosimilaire. Les matériaux composites sont anisotropes, cette anisotropie complique l'étude des arrangements autosimilaires. Je répondrai à la problématique en trois phases. D'abord, je définirai la géométrie autosimilaire et je décrirai les matériaux composites étudiés (chapitre 1). Puis, je développerai un modèle de propagation unidimensionnel qui permettra de comprendre les propriétés particulières des milieux autosimilaires sur la propagation des ondes (chapitre 2). J'effectuerai en-

suite l'étude ultrasonore expérimentale et numérique de drapages autosimilaires pour extraire les paramètres à prendre en compte afin de créer des matériaux composites optima (chapitre 3). Je finirai en concluant et en présentant les perspectives de mon travail.

Définition

Dans ce travail, le terme “désordre” est employé dans le sens commun : “non ordonné” et non dans le sens statistique du terme. Cela nous permettra d'introduire la notion de degré de désordre.

CHAPITRE 1

Généralités sur l'autosimilarité et les matériaux composites à fibres de carbone

Le concept d'autosimilarité et les matériaux composites constituent le socle de notre étude. Nous définirons dans ce chapitre les objets autosimilaires et décrirons ceux que nous avons choisis d'étudier. Pour plus de clarté et de simplicité, nous ne nous lancerons pas dans une description exhaustive des matériaux composites (de nombreux ouvrages et thèses traitant déjà du sujet [Gay, 2005; Berthelot, 2005; Fuzessery, 1995; Chatain, 2001; Villoutreix, 1998; Blassiau, 2005; Monnier, 2001]). Seuls les aspects essentiels à la compréhension de la suite de l'étude seront abordés : description du procédé de fabrication des matériaux. Cela permettra d'introduire les empilements composites autosimilaires mis au point par l'association des concepts.

Sommaire

1.1 Géométrie fractale pour la description et la création de l'irrégularité	6
1.1.1 Définition	6
1.1.2 Les phénomènes physiques comme générateurs d'autosimilarité	8
1.1.3 L'ensemble de Cantor : exemple d'autosimilarité stricte	9
1.1.4 Suite de Fibonacci et autosimilarité	11
1.1.5 L'autosimilarité au service de l'irrégularité	15
1.2 Matériaux composites	17
1.2.1 Définition	17
1.2.2 Renforts	18
1.2.3 Matrices	18
1.2.4 Procédé de fabrication	19
1.2.5 Difficultés de fabrication	22
1.2.6 Composites à plis croisés autosimilaires	23
1.3 Conclusion	23

1.1 Géométrie fractale pour la description et la création de l'irrégularité

1.1.1 Définition

Les milieux très irréguliers sont difficilement descriptibles par la géométrie euclidienne classique. Ils peuvent cependant être approchés par des analyses statistiques et représentés par des processus aléatoires. A la recherche d'un outil déterministe adapté, Mandelbrot introduisit la notion de géométrie fractale et montra son universalité en 1982 dans *The Fractal Geometry of Nature* [Mandelbrot, 1983].

Le terme fractal vient du latin *fractus* qui dérive du verbe *frangere* signifiant briser. La géométrie fractale décrit des objets complexes qui ne peuvent être représentés par des lignes droites, des cercles, des cubes, *etc...* Aux formes irrégulières, ils sont omniprésents dans la nature (organes, plantes, reliefs, *etc...*) et présentent des « brisures » à toutes les échelles. Les objets fractals se distinguent par leur autosimilarité : ils sont semblables à eux-mêmes à différentes échelles. La plupart des objets gigognes construits mathématiquement par l'homme, comme l'ensemble de Cantor décrit au paragraphe 1.1.3 (Fig. 1.5), ou le flocon de Von Koch (Fig. 1.1 (b)), présentent une autosimilarité stricte. Mais la nature ne se reproduit pas à l'identique. On parle alors d'autosimilarité statistique. Le concept d'autosimilarité se comprend visuellement au travers des exemples présentés figure 1.1.

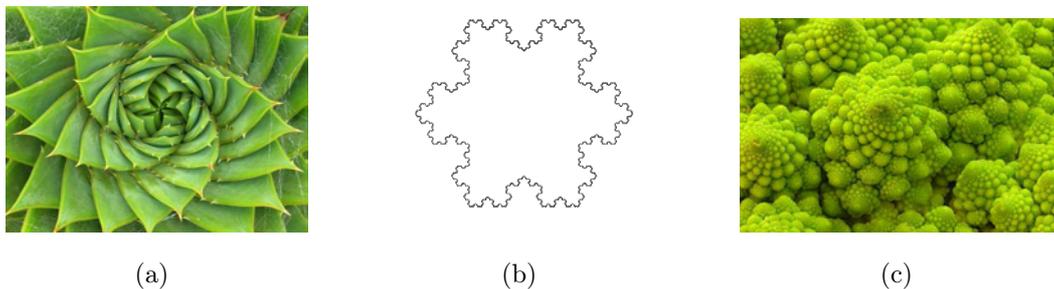


FIG. 1.1 – Exemples d'objets autosimilaires : autosimilarité ponctuelle (plante succulente (a)), exacte (Flocon de Von Koch (b)) et statistique (chou romanesco (c)).

L'auto-organisation des feuilles de nombreuses plantes grasses (Fig. 1.1 (a)) les répartit en spirales telles qu'un grossissement vers le centre conserve l'aspect général de la plante. Le flocon de Von Koch (Fig. 1.1 (b)) se construit de manière itérative en

remplaçant le tiers de tous les segments d'un triangle équilatéral par les deux arêtes d'un triangle équilatéral. Il présente une autosimilarité stricte. Le chou romanesco (Fig. 1.1 (c)) est l'allégorie même de la fractalité : il présente une autosimilarité statistique (son tout est semblable à une de ses parties, qui est elle-même semblable à une de ses parties, et ainsi de suite) et une structure spirale du même type que les plantes grasses.

La géométrie euclidienne ne décrivant pas bien les objets fractals, leur mesure au sens traditionnel est impossible. Leur taille dépend des échelles d'observation. La notion de dimension pour des objets fractals a du être adaptée et redéfinie [Mandelbrot, 1995]. Elle caractérise leur degré d'irrégularité et la manière dont ils remplissent l'espace. Cette dimension fractale D est généralement non entière. Il existe plusieurs définitions qu'on adapte en général au type d'objet étudié.

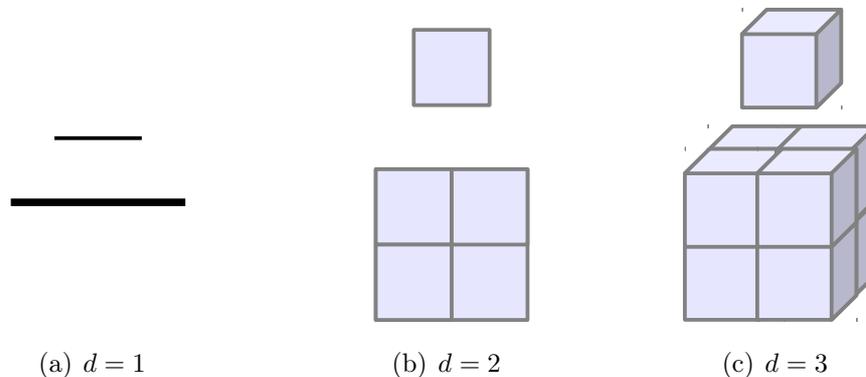


FIG. 1.2 – *Dimension topologique et doublement de taille.*

Les figures géométriques usuelles ont une dimension entière :

- La dimension d d'un segment, d'un cercle et d'une courbe régulière est de 1. Sa longueur est multipliée par 2 lorsque sa taille double (Fig. 1.2 (a)) ;
- La dimension d d'une surface simple et bornée est de 2. Elle a une aire finie qui est multipliée par 4 lorsque sa taille double (Fig. 1.2 (b)) ;
- La dimension D d'un volume simple et borné dans l'espace est de 3. Il a un volume fini qui est multiplié par 8 lorsque sa taille double (Fig. 1.2 (c)).

En généralisant, si un objet est de dimension D , alors la mesure associée à sa dimension est multipliée par n^D lorsque la taille de cet objet est multipliée par n .

Dans le cas du flocon de Von Koch, la longueur de la courbe de Koch est multipliée par 4 lorsque sa taille triple (En effet, cette courbe est précisément définie comme étant constituée de quatre copies d'elle-même, trois fois plus petites). D est tel que $3^D = 4$, donc $D = \ln 4 / \ln 3 \approx 1,26$. Le flocon de Von Koch n'est donc ni une ligne, ni une surface, sa dimension est non entière. On parle alors de dimension fractale.

Pour les milieux autosimilaires dont le rapport d'homothétie est constant avec l'ordre d'itération, on peut généraliser la procédure ci-dessus pour déterminer leur dimension fractale :

$$D = \frac{\ln N_h}{\ln(1/r)} \quad (1.1)$$

avec N_h le nombre d'homothéties créées à chaque itération et r , le rapport d'homothétie. D est alors appelée *dimension d'homothétie*.

Dans le cas d'objets irréguliers d'autosimilarité statistique, comme la côte de Bretagne, la mesure de la dimension fractale est effectuée par des méthodes de recouvrement. La plus générale est la détermination de la dimension de Hausdorff. Elle se calcule en recouvrant l'objet fractal par des cercles, disques ou sphères. Soit $N(r)$ le nombre minimal de boules ouvertes de rayon r nécessaires pour recouvrir l'objet. Si, lorsque r tend vers 0, $N(r)$ croît comme $1/r_H^D$, l'objet est dit de dimension D_H . D_H est telle que $\lim N(r)r^s \rightarrow 0$ si $s > D_H$, et $\lim N(r)r^s \rightarrow \infty$ si $s < D_H$. Cette définition permet de mesurer la dimension de la côte de Grande-Bretagne : $D = 1,24$ (Fig. 1.3) [Mandelbrot, 1995; Falconer, 2003].



Image créée par Alexis Monnerot-Dumaine

FIG. 1.3 – Mesure de la dimension de Hausdorff de la côte de la Grande-Bretagne.

La méthode la plus utilisée et la plus simple pour déterminer numériquement la dimension fractale est le calcul de la dimension de Minkowski-Bouligand (ou “Box-counting”) (Fig. 1.4). C’est aussi une méthode de recouvrement par boîtes. Elle peut être supérieure à la dimension de Hausdorff, mais jamais inférieure.

1.1.2 Les phénomènes physiques comme générateurs d'autosimilarité

La nature regorge d'objets irréguliers et autosimilaires. Ce serait faire une impasse de ne pas parler des processus physiques à leur origine [Mandelbrot, 1995; Sapoval,



Image créée par Alexis Monnerot-Dumaine

FIG. 1.4 – *Mesure de la dimension de Minkowski-Bouligand de la côte de la Grande-Bretagne par la méthode de comptage de boîtes.*

1997; Laguës & Lesne, 2003; Gouyet, 1992] :

- le mouvement brownien, ou marche de l'homme ivre, est inhérent à la physique statistique des gaz, à la formation du relief ou au processus de formation des fractures : il présente une trajectoire aléatoire fractale ;
- les phénomènes de turbulence et de chaos ;
- la percolation, processus décrivant la transition d'un état d'un système vers un autre ;
- l'agrégation de matière ;
- et bien d'autres.

Les structures autosimilaires résultent souvent de mécanismes antagonistes d'organisation et de contraintes entre lois micro et macroscopiques. La découverte de la géométrie fractale a fortement approfondi la compréhension de ces mécanismes. Les ouvrages de Mandelbrot [Mandelbrot, 1995], Sapoval [Sapoval, 1997], Laguës et Leyne [Laguës & Lesne, 2003] ou Gouyet [Gouyet, 1992] pourront éclairer le lecteur désireux de plus de détails sur le caractère fractal de ces phénomènes. L'autosimilarité peut ainsi servir à décrire l'irrégularité de la nature. Nous allons décrire deux objets qui y sont liés : l'ensemble de Cantor et la suite de Fibonacci.

1.1.3 L'ensemble de Cantor : exemple d'autosimilarité stricte

En 1883, Georg Cantor présenta à la communauté scientifique un monstre mathématique : l'ensemble triadique. C'est un sous ensemble de \mathbb{R} qui s'obtient en divisant l'intervalle $[0; 1]$ de manière itérative. A chaque étape (on parle aussi d'*ordre* d'itération, de pre-fractalité ou d'autosimilarité), les segments sont divisés par trois et l'intervalle central est ôté (Tab. 1.1).

$$\begin{aligned} & \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right] \\ & \left[0; \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}; 1\right] \\ & \left[0; \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}; \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}; \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}; \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}; \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}; 1\right] \\ & \text{et ainsi de suite ...} \end{aligned}$$

TAB. 1.1 – Création de l'ensemble de Cantor en subdivisant \mathbb{R} .

L'ensemble de Cantor est la réunion de tous les intervalles quand l'ordre d'itération tend vers l'infini. C'est un ensemble de mesure nulle. Mandelbrot [Mandelbrot, 1995] le définit par le terme de « poussière » car les points qui le constituent sont si rares qu'on ne tomberait jamais dessus en prenant un point au hasard du segment $[0; 1]$. C'est un ensemble qui est pourtant non dénombrable : chaque segment, aussi minuscule soit-il, contient autant de points que \mathbb{R} . En dehors de ces propriétés mathématiques étonnantes, les physiciens s'y intéressent surtout pour son autosimilarité. En effet, l'image de l'ensemble de Cantor par l'homothétie de centre 0 et de rapport $1/3$ est elle-même une partie de l'ensemble de Cantor (cadres gris en pointillés sur la figure 1.5). L'ordre d'itération N donne naissance à deux ensembles de Cantor, qui, dilatés d'un facteur 3 y sont identiques. La dimension fractale de l'ensemble triadique de Cantor se calcule avec l'équation 1.1 et vaut $D = \ln(2)/\ln(3) = 0,6309\dots$.

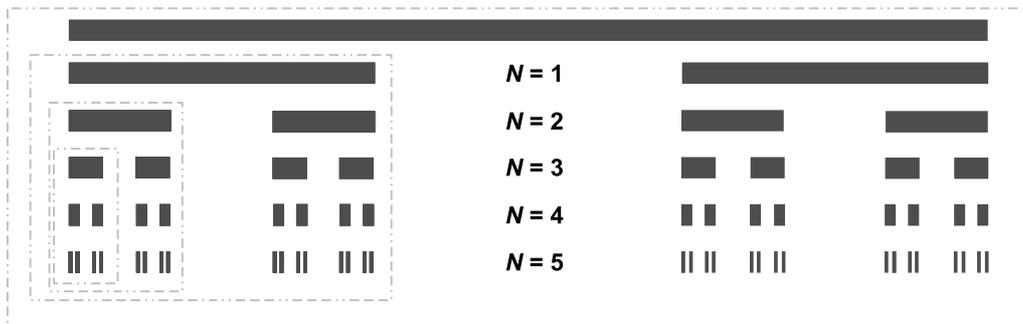


FIG. 1.5 – Ensemble triadique de Cantor $\gamma = 3$: les segments sont divisés par 3.

Il existe d'autres types d'ensembles de Cantor ($\gamma = 5, 7, 9$ etc...) pour lesquels les segments sont divisés à chaque ordre par 5, 7, 9 etc... respectivement. En généralisant,

ces structures fractales ont alors pour dimension :

$$D = \frac{\ln \frac{\gamma+1}{2}}{\ln \gamma}. \quad (1.2)$$

Il est possible de changer la part et la position du segment supprimé pour créer un ensemble de Cantor à deux échelles ou introduire une part de désordre dans le processus de construction. Par exemple, nous pouvons enlever au hasard, et n'importe où, l'un des tiers du segment à chaque ordre de pré-fractalité ou remplacer les segments restants par deux segments plus petits de longueur aléatoire. Addison [Addison, 1997] indique que ces figures présentent une autosimilarité statistique puisque leur construction implique le même type de processus aléatoire à chaque échelle.

1.1.4 Suite de Fibonacci et autosimilarité

Depuis le moyen âge, la suite de Fibonacci soulève l'intérêt des scientifiques. Dans cette partie, nous rappelons sa définition et montrons comment elle donne naissance à des géométries autosimilaires.

1.1.4.1 Définition

La suite de Fibonacci a été introduite au XIIIème siècle par Léonardo de Pise, fils de Guilielmo Bonacci (Fibonacci signifie fils de Bonacci), pour l'étude de la croissance d'une population de lapins. Les nombres de Fibonacci \mathcal{F}_n qui la suivent vérifient :

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \quad (1.3)$$

avec $\mathcal{F}_0 = 0$ et $\mathcal{F}_1 = 1$. Le tableau 1.2 rassemble les premières itérations de la suite de Fibonacci :

\mathcal{F}_0	\mathcal{F}_1	\mathcal{F}_2	\mathcal{F}_3	\mathcal{F}_4	\mathcal{F}_5	\mathcal{F}_6	\mathcal{F}_7	\mathcal{F}_8	\mathcal{F}_9	\mathcal{F}_{10}	\mathcal{F}_{11}	<i>etc...</i>
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	<i>etc...</i>

TAB. 1.2 – *Onze premiers nombres de Fibonacci.*

Quel est le rapport de cette suite avec l'autosimilarité ? Nous avons vu que la nature abonde de fractales et de structures autosimilaires. Bernard Sapoval montre l'universalité de la suite de Fibonacci dans son ouvrage *Universalités et fractales* [Sapoval, 1997]. De nombreux objets naturels et processus physiques présentent un ordre sous-jacent régi par la suite de Fibonacci : répartition des bourgeons le long des branches (Fig. 1.6

(a)), motifs géométriques au centre des tournesols (Fig. 1.6 (b)), forme des coquilles de certains crustacés (Fig. 1.6 (c)). Les nombres de Fibonacci sont liés à des structures d'autosimilarité ponctuelle : les spirales logarithmiques.

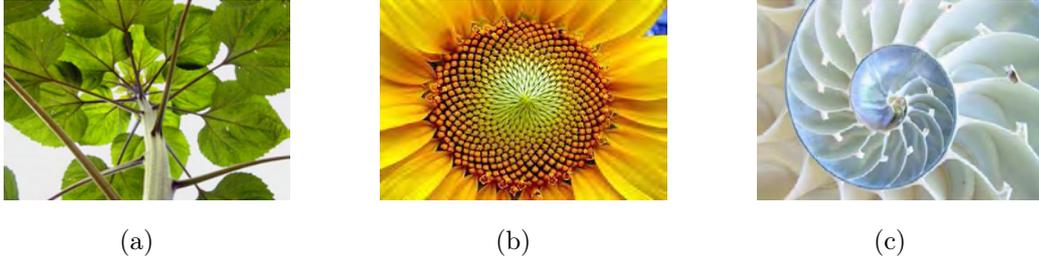


FIG. 1.6 – Autosimilarité ponctuelle dans la nature : spirales logarithmiques.

1.1.4.2 Fibonacci et spirales logarithmiques : autosimilarité ponctuelle

L'exemple le plus courant de la présence des nombres de Fibonacci dans la nature appartient au domaine de la phyllotaxie (domaine qui étudie la disposition des sous-structures d'une plante). Il a été remarqué empiriquement que ces structures font apparaître les nombres de Fibonacci associés à des lois en spirales. Ces dernières présentent une propriété d'autosimilarité ponctuelle : si on effectue une homothétie centrée sur leur cœur, la courbe est identique à elle-même tout en subissant une rotation.

En 1993, Douady et Couder [Douady & Couder, 1992] ont expliqué l'apparition de la suite de Fibonacci dans la nature. Ils ont reproduit l'apparition de spirales liées aux nombres de Fibonacci en faisant tomber au centre d'un récipient immobile un fluide goutte après goutte. Sous l'effet d'un champ magnétique, minimal au centre du récipient et maximal sur les bords, les gouttes polarisées sont à la fois attirées vers l'extérieur du plateau et repoussées les unes des autres. Dans ces conditions, les gouttes s'éloignent du centre en respectant un angle constant entre elles (Fig. 1.7). Cette universalité géométrique correspond simplement à une occupation optimale de l'espace par les gouttes de fluide. Ainsi, lorsque les éléments tous semblables d'une structure grandissent sans changer de forme, les restructurations permanentes qu'ils subissent pour minimiser les contraintes de compression tendent à les organiser le long de *spirales logarithmiques*.

Or, la suite de Fibonacci, apparaît dans l'approximation d'une spirale logarithmique particulière d'équation polaire :

$$r(\theta) = \phi^{-\frac{\theta}{\pi/2}} \quad (1.4)$$

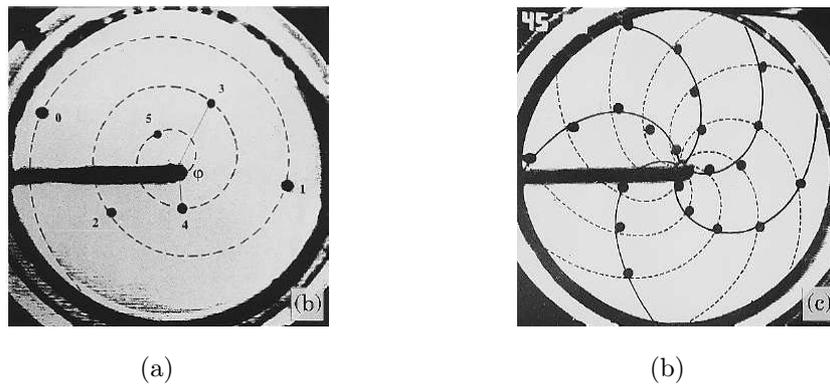


FIG. 1.7 – *Expérience de Douady et Couder à quelques secondes d'intervalle. Les gouttes de ferro-fluide se répartissent selon des spirales logarithmiques.*

avec $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$. r et θ sont les coordonnées polaires du plan. Elle possède une propriété d'autosimilarité ponctuelle : une homothétie de la spirale correspond à une rotation de celle-ci, et inversement. Les spirales logarithmiques d'équation $r = ae^{b\theta}$ (a et b constants) sont autosimilaires si elles suivent une loi d'échelle $e^{2\pi b}$.

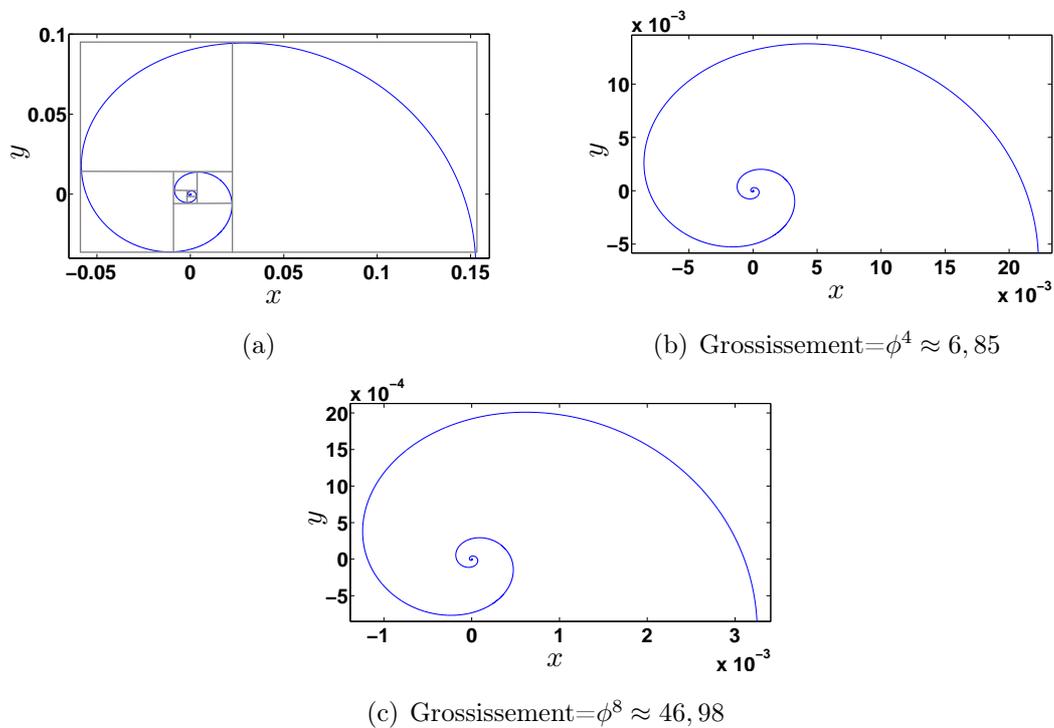


FIG. 1.8 – *Spirale logarithmique autosimilaire : deux grossissements successifs de ϕ^4 . Sur la figure (a) sont dessinés les rectangles dont les largeurs varient selon la suite de Fibonacci.*

La spirale de la figure 1.8 (a) est approximée par des arcs de cercles reliant les coins de rectangles dont le rapport des largeurs varie selon la suite de Fibonacci. Elle est visiblement autosimilaire par un grossissement de ϕ^4 (Fig. 1.8). Les grossissements successifs effectués de la figure (a) à la figure (c) sont de ϕ^4 et la forme de la spirale est inchangée. Les spirales logarithmiques, résultats de l'auto-organisation de structures, sont donc un exemple du lien de la suite de Fibonacci avec l'autosimilarité.

1.1.4.3 Mot de Fibonacci : concaténation autosimilaire

Le procédé de construction du mot de Fibonacci, est le même que celui de la suite de Fibonacci en remplaçant la somme par la concaténation. Le mot de Fibonacci à l'ordre d'itération n , \mathcal{M}_n , est la juxtaposition des mots de Fibonacci aux ordres $n - 1$ et $n - 2$, \mathcal{M}_{n-1} et \mathcal{M}_{n-2} (Eq. 1.5) :

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n-1}\mathcal{M}_{n-2}. \quad (1.5)$$

Soit un « alphabet » constitué de deux lettres A et B . Les étapes itératives de construction du mot de Fibonacci sont détaillées dans le tableau 1.3 :

A
 B
 BA
 BAB
 $BABBA$
 $BABBABAB$
 $BABBABABBABBA$
 \dots

TAB. 1.3 – *Sept premiers mots de Fibonacci.*

Mot et suite de Fibonacci sont étroitement liés. Chaque mot de Fibonacci étant la concaténation des deux précédents : la longueur du mot de Fibonacci \mathcal{M}_n est le nombre de Fibonacci \mathcal{F}_n . L'intérêt de ce processus de construction autosimilaire est qu'il produit des « mots » quasi-périodiques intéressants du point de vue cristallin. Les structures fractales basées sur le mot de Fibonacci sont autosimilaires.

Fractale du mot de Fibonacci : autosimilarité géométrique

La fractale du mot de Fibonacci est une courbe définie dans le plan à partir du mot de Fibonacci. Elle se construit de manière itérative en appliquant au mot de Fibonacci la règle OEDR (*Odd-Even Drawing Rule*). Pour chaque lettre en position n , on trace un segment, quand la lettre est B on effectue un quart de tour à droite si n est pair, à gauche si n est impair (Fig. 1.9).

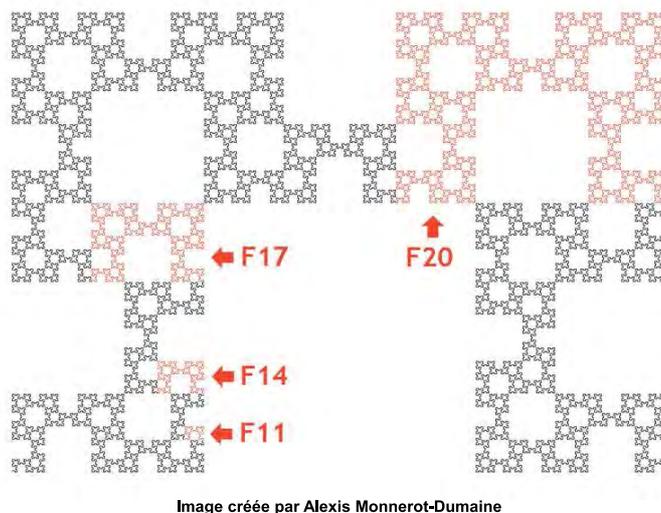


FIG. 1.9 – *Fractale du mot de Fibonacci après 23 itérations. L'étape 11 est similaire à une homothétie près à l'étape 1. L'étape 1 est similaire à une homothétie près à l'étape 14 et ainsi de suite.*

La figure engendrée par ce processus est autosimilaire (Fig. 1.9). L'étape 11 est similaire à une homothétie près à l'étape 1, qui l'est de même pour l'étape 14 et ainsi de suite. Ainsi, en faisant appel à des processus répétitifs, la suite de Fibonacci génère des structures autosimilaires telles que des spirales logarithmiques ou la fractale du mot de Fibonacci.

1.1.5 L'autosimilarité au service de l'irrégularité

La notion de fractalité a été introduite pour étudier et expliquer les irrégularités de la nature.¹ Il est possible de renverser ce mode de raisonnement et de se servir

1. L'introduction de la fractalité est fortement liée à l'explication des phénomènes invariants d'échelle (transition de phase, diffusion). Ils sont l'empreinte des phénomènes critiques et permettent d'étudier les phénomènes physiques, non plus à une seule échelle, mais en englobant les comportements à différentes échelles. Les fractales interviennent donc dans la création et le développement de

de l'autosimilarité pour créer l'irrégularité et le désordre. C'est sur ce principe qu'est basée la construction des matériaux stratifiés étudiés par la suite.

Nous construisons des matériaux multicouches autosimilaires en nous basant sur l'ensemble de Cantor et la suite de Fibonacci. Pour créer une stratification autosimilaire des couches sur la base de l'ensemble de Cantor, nous identifions les segments pleins et les segments vides de la figure 1.5 à des couches de propriétés différentes notées A et B . Le tableau 1.4 présente l'empilement de l'ordre 0 à l'ordre 3. A l'ordre N , le matériau est constitué de γ^N couches (ici $\gamma = 3$).

A
 ABA
 $ABA BBB ABA$
 $ABA BBB ABA BBBBBBBBBB ABA BBB ABA$
 \dots

TAB. 1.4 – Succession de couches pour un empilement de Cantor triadique de l'ordre 0 (ligne 1) à l'ordre 3 (ligne 4).

Ce type de multicouche monodimensionnel a déjà été étudié par Alexander Lavrinenko [Lavrinenko *et al.*, 2002], Gibiat *et al.* [Gibiat *et al.*, 2003; Bertaud du Chazaud & Gibiat, 2008] ou Allipi, Craciun *et al.* [Craciun *et al.*, 1992; Petri *et al.*, 1994]. L'empilement est autosimilaire (Fig. 1.10).

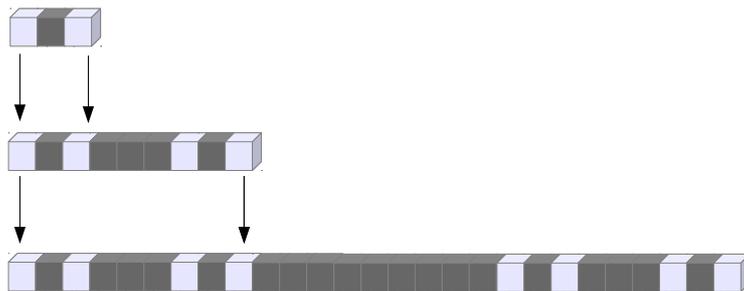


FIG. 1.10 – Empilement basé sur l'ensemble de Cantor.

De la même manière que pour le Cantor en épaisseur, nous associons aux deux lettres du mot de Fibonacci (Tab. 1.3) deux matériaux différents (Fig. 1.11).

modèles cherchant à décrire la nature, non plus par des approximations, mais par une classification des phénomènes. On parle de *classes d'universalité*. Elles touchent ainsi à la question (pour laquelle la sensibilité de chacun entrevoit sa propre réponse) de l'"ordre" intrinsèque de la nature [Laguës & Lesne, 2003].

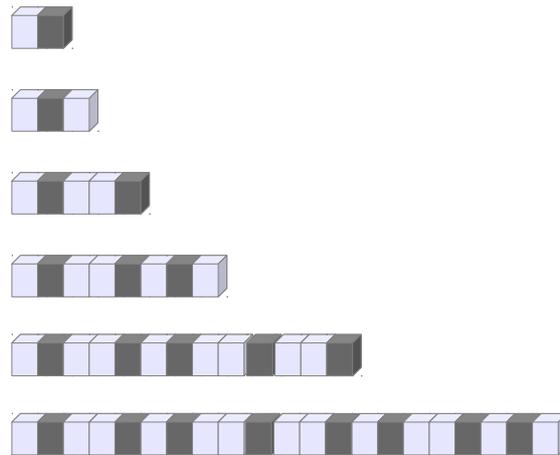


FIG. 1.11 – Empilement quasi-périodique basé sur la suite de Fibonacci.

Il est ainsi possible de créer des matériaux quasi-périodiques, c'est à dire des milieux périodiques présentant des défauts.

1.2 Matériaux composites

Le développement des applications des matériaux composites dans l'industrie s'est accru durant ces dernières années. Dans les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatiale, l'emploi des matériaux composites est aujourd'hui généralisé pour les structures secondaires. Ils sont introduits progressivement dans les structures primaires qui supportent les principales sollicitations sur l'appareil. Ils ont ainsi permis une diminution drastique du poids des avions. Pour répondre aux problématiques de réduction des coûts de production, d'augmentation de la sécurité et d'amélioration de la tenue mécanique des matériaux, l'objectif est d'en intégrer toujours plus dans les structures principales.

1.2.1 Définition

Un matériau composite résulte de l'assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles de nature différente se complétant et permettant d'obtenir un matériau dont les performances globales sont améliorées, vis-à-vis d'un besoin spécifique, par rapport à celles de ses constituants élémentaires. Il nécessite l'association intime d'au moins deux composants : le renfort et la matrice. Les composites les plus employés pour la conception des structures dites "froides" dans le domaine aéronautique sont constitués de résines organiques et de fibres. Ils peuvent être utilisés tant pour leurs propriétés structurales, que pour des applications électrique, thermique ou environnementale. Ils

sont en général optimisés pour atteindre un équilibre entre ces divers domaines. La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application finale visée. Nous décrivons et étudierons des composites en résine renforcés de fibres de carbone longues [Gay, 2005; Berthelot, 2005].

1.2.2 Renforts

Les fibres (majoritairement en carbone en aéronautique) assurent dans leur direction une grande partie de la rigidité et de la résistance du matériau final. Elles possèdent généralement une très bonne résistance à la traction mais une résistance faible à la compression. Elles peuvent être continues, on parle de fibres longues, ou discontinues : fibres coupées ou fibres courtes. Les composites utilisés ici contiennent des fibres longues en carbone. Les propriétés de ces dernières sont exposées dans le tableau 1.5.

Rupture en traction (MPa)	Module de Young (GPa)	Elongation (%)	Densité	Diamètre des fibres (μm)
4200	240	1,8	1,76	7,0

TAB. 1.5 – *Données mécaniques du fabricant (Toho Tenax) pour les fibres de carbone utilisées dans cette étude.*

Les fibres de carbone sont élaborées par pyrolyse d'un polymère de base (le polyacrylonitrile (PAN)), appelé précurseur. Leurs qualités finales dépendent fortement des qualités de ce dernier. Des fibres acryliques subissent une décomposition thermique aboutissant à la création de filaments de carbone. Ceux-ci sont ensuite soumis à un traitement de surface (imprégnation par un produit spécifique) afin d'améliorer l'adhérence à la matrice. Leurs principaux avantages sont une faible densité et d'excellentes propriétés mécaniques. Leur prix est cependant très élevé par rapport aux fibres de verre.

1.2.3 Matrices

La matrice assure la cohésion, la protection et le maintien des fibres dans une position pré-définie, ainsi que la transmission des efforts mécaniques au renfort. Il en existe trois types : les matrices organiques, céramiques et métalliques. Les matrices organiques, thermodurcissables ou thermoplastiques, sont les plus présentes dans l'industrie, les deux autres sont utilisées pour des applications où le composite est porté à

très haute température.

Les résines thermoplastiques possèdent la propriété de pouvoir fondre et durcir de manière réversible suivant qu'elles sont chauffées en dessous ou refroidies en dessus de leur température de transition vitreuse. Il est ainsi possible de réaliser facilement des moulages, et de recycler la matière. L'inconvénient majeur des polymères thermoplastiques est que leurs propriétés dépendent de la température. Nous étudions des matériaux élaborés à partir de résine PEEK : **P**oly**E**ther**E**ther**K**etone (en anglais). La résine PEEK possède de bonnes propriétés mécaniques, une très bonne tenue en température et une bonne stabilité dimensionnelle. Les températures de moulage et de mise en œuvre sont très élevées : un peu en dessous de 400°C. Cela implique l'utilisation de presses performantes. Son coût de fabrication est donc très élevé.

	ρ (kg/dm ³)	E (MPa)	G (MPa)	σ_f (MPa)	T_{max} (°C)
PEEK	1,3	4100	1300	90	240
Epoxyde	1,2	4500	1600	130	80 à 200

TAB. 1.6 – *Propriétés générales des résines PEEK et époxyde. E est le module de Young, G , le module de cisaillement, σ_f , la contrainte à la rupture, et T_{max} la température maximale pour ces propriétés.*

Les résines thermodurcissables sont constituées de polymères transformés en un produit infusible et insoluble après traitement thermique ou physico-chimique. Elles sont donc non recyclables. Il s'agit par exemple des résines époxydes, qui sont énormément employées dans l'aéronautique. Les polyépoxydes sont des polymères qui se forment par réaction de polymérisation entre un monomère époxyde et un agent durcisseur. Elles ont d'excellentes propriétés mécaniques, possèdent une bonne tenue en température (180°C), une bonne adhérence sur des matériaux métalliques. Cependant, le temps de polymérisation lors de leur fabrication est assez long (de 4 à 6 heures), ce sont des résines allergisantes qui nécessitent une protection, elles sont très sensibles à la fissuration et ont un coût élevé.

Le tableau 1.7 présente un récapitulatif et un comparatif des propriétés des résines PEEK (thermoplastique) et époxyde (thermodurcissable).

1.2.4 Procédé de fabrication

La première étape de la fabrication d'un matériau composite est la pré-imprégnation des fibres par la résine. Elle aboutit à la création de nappes monocouches : éléments de

	Avantages	Inconvénients
PEEK	Bonnes propriétés mécaniques	Température de moulage élevée (350°C)
	Excellente tenue en température	Utilisation de machines ultra performantes
	Matériau bio-compatible	Sensible aux UV
	Bonne stabilité dimensionnelle	Coût très élevé
	Conservation à température ambiante	
Epoxyde	Excellentes propriétés mécaniques	Temps de polymérisation long (4-6h)
	Bonne tenue en température (160°C)	Allergisants
	Très faible retrait au moulage	Sensibles à la fissuration
	Bonne adhérence sur métaux	Coût élevé
		Conservation à -18°C

TAB. 1.7 – Comparaison des avantages et inconvénients des résines PEEK (thermo-plastique) et époxyde (thermodurcissable).

base de la structure composite (pli). Dans notre cas, les nappes sont unidirectionnelles : toutes les fibres de carbone sont alignées dans la même direction (Fig. 1.12 (a)).

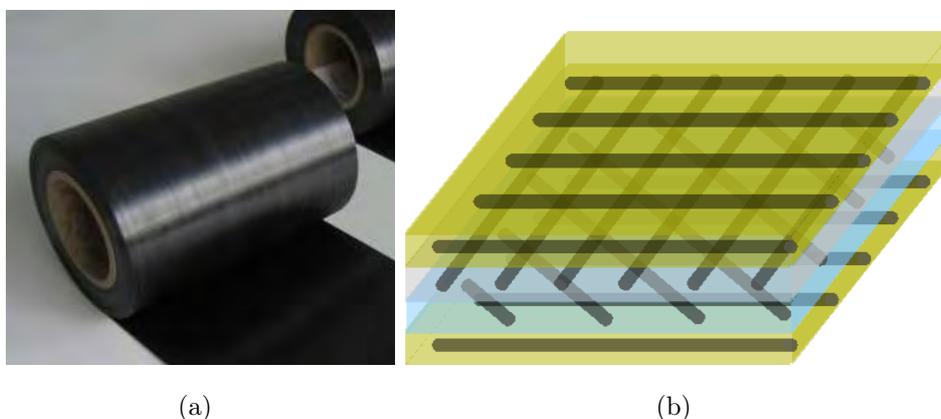


FIG. 1.12 – Rouleau de nappe pré-imprégnée unidirectionnelle : fibres de carbone et résine PEEK (a). Exemple de stratification pour créer un multicouche (b).

Les pièces sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir (Fig. 1.12 (b)). Ces empilements sont ensuite chauffés à la température de fusion de la résine puis refroidis pour obtenir le produit final. Le choix du cycle de chauffe et de mise sous pression, du moule et des produits d'environnement utilisés est déterminant dans la réalisation des composites. Ainsi, il est actuellement très complexe de produire une pièce sans que ses propriétés

mécaniques ne soient affectées par des défauts de mise en œuvre. Les contraintes résiduelles dues à la fonte et au durcissement de la résine, le délaminage et la porosité sont des défauts encore très courants.

Les échantillons que nous avons réalisés sont des échantillons de fibres de carbone imprégnées de résine PEEK. Nous avons mis au point une table de découpe pour pouvoir découper, à l'aide d'un gabarit, dans la nappe pré-imprégnée, des plis ayant une orientation comprise entre 0° et 90° . Les plis sont ensuite empilés les uns sur les autres et disposés dans un moule pour le cycle de fabrication en presse chauffante. Le moule est un moule en acier composé de trois parties s'emboitant les unes dans les autres (Fig. 1.13 (a)).

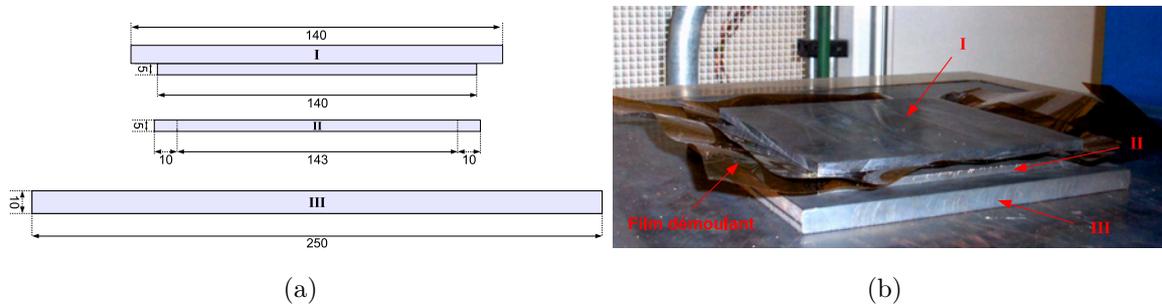


FIG. 1.13 – Schéma du moule (a). I et III : plaques carrées pleines en acier ; II : cadre carré en acier. Photographie du moule dans la presse avant le lancement du cycle (b).

La disposition des plis pré-imprégnés dans le moule nécessite l'utilisation de deux films démoulants. Le premier est placé entre le cadre et la partie I, le second entre le drapage de plis pré-imprégnés et la partie III du moule qui se clipse par dessus le tout (Fig. 1.13 (b)). L'empilement est ensuite inséré en presse chauffante. Le moule et le matériau subissent ensuite une montée en température et en pression pour réaliser la fusion de la résine (Fig. 1.14). Le palier de plus haute température se situe en dessous de 400°C , car une altération de la résine se produit au-delà de cette température.

Après refroidissement, le composite est démoulé (Fig. 1.15), débarrassé de ses films démoulants, et découpé au jet d'eau aux dimensions requises.

Un empilement composite est représenté par la suite des orientations des couches successives écrite entre crochets. Un empilement périodique de 6 couches dont les plis sont orientés à 0° et 90° sera ainsi noté : $[0^\circ 90^\circ 0^\circ 90^\circ 0^\circ 90^\circ]$, ou de manière abrégée : $[0^\circ 90^\circ]_3$. Si le matériau est symétrique, la symétrie est indiquée par le symbole S : $[0^\circ 90^\circ 0^\circ 0^\circ 90^\circ 0^\circ]$ devient $[0^\circ 90^\circ 0^\circ]_S$.

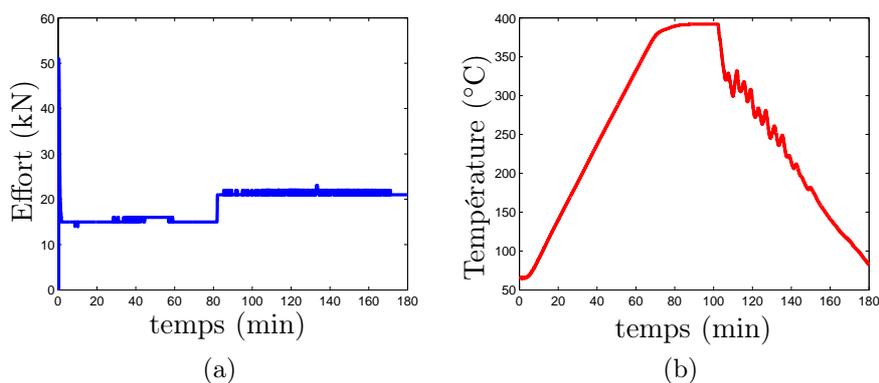


FIG. 1.14 – Effort exercé par la presse sur le moule (a) et cycle de montée et descente en température au sein de la presse (b).



FIG. 1.15 – Photographie du composite dans le film démoulant, après sortie du moule.

1.2.5 Difficultés de fabrication

Le procédé de fabrication des échantillons comporte cependant des imperfections : malgré l'ajustement du moule, la matière flue par les cotés de manière dissymétrique selon les orientations des couches. Il en résulte une courbure des fibres, augmentant à partir du centre, dans le plan de l'échantillon. Au sortir de la presse, certaines pièces sont également voilées. C'est une difficulté classique dans la fabrication des composites due aux contraintes résiduelles du cycle chauffe-refroidissement entre résine et fibres, et notamment à celles introduites par les fuites en bordure du moule. Ces dernières disparaissent après découpe au jet d'eau, et les échantillons sont pratiquement plans. De plus, la mise en œuvre de stratifiés épais pose problème car elle nécessite de grandes quantités de matière et multiplie les risques d'apparition de porosités et de délaminations (décollement des couches aux interfaces des plis).

1.2.6 Composites à plis croisés autosimilaires

Les drapages communs en aéronautique sont constitués de succession de couches orientées à 0° , 45° , 90° , 135° . Nous nous inspirons de ces propriétés de drapage des composites pour appliquer des processus autosimilaires sur l'orientation des couches et de créer un nouveau type de matériau composite stratifié.

En reprenant les empilements représentés dans les tableaux 1.3 et 1.4, on peut assimiler les deux matériaux A et B à deux couches de matériaux composites orientées différemment. On obtient ainsi un empilement autosimilaire constitué d'un même matériau en jouant sur son anisotropie.

De plus, en se basant sur l'ensemble de Cantor (Fig. 1.5) et la suite de Fibonacci, il est possible d'appliquer des processus autosimilaires sur l'orientation des couches.

Nous construisons un empilement basé sur une suite géométrique de raison $1/\gamma$. L'orientation de la couche centrale de l'échantillon est successivement divisée par γ vers l'extérieur de l'échantillon. Pour éviter de se rapprocher trop rapidement d'orientations trop faibles et proches de zéro, et pour favoriser le contraste entre les couches, nous intercalons des couches d'orientation 0° . Ce type d'empilement à l'ordre N , pour une couche d'orientation centrale φ_0 a la forme suivante :

$$\left[0 \frac{\varphi_0}{\gamma^N} 0 \dots 0 \frac{\varphi_0}{\gamma^2} 0 \frac{\varphi_0}{\gamma} 0 \frac{\varphi_0}{\gamma^2} 0 \dots 0 \frac{\varphi_0}{\gamma^N} 0 \right]. \quad (1.6)$$

Un processus de construction autosimilaire apparaît à travers la suite géométrique de rapport $1/\gamma$. L'empilement à l'ordre n apparaît dans l'empilement d'ordre $n + 1$ (Fig. 1.16 (a)).

Il est aussi possible de construire des empilements dont les couches suivent la suite de Fibonacci : 0° , 1° , 2° , 3° , 5° , 8° , 13° , 21° , 34° , 55° , 89° , *etc...* (Fig. 1.16 (b)).

1.3 Conclusion

Les matériaux composites sont source constante d'innovation. Pour un problème donné, leur diversité permet de créer un large éventail de possibilités adaptées. Leur processus de fabrication à partir de plis élémentaires permet d'intégrer de l'autosimilarité en jouant sur les arrangements de plis et d'orientations. Il est ainsi possible de créer des objets autosimilaires ou quasi-périodiques en se basant sur l'ensemble de Cantor ou la suite Fibonacci. Les chapitres suivants étudieront leurs effets sur la propagation des ondes acoustiques puis élastiques.

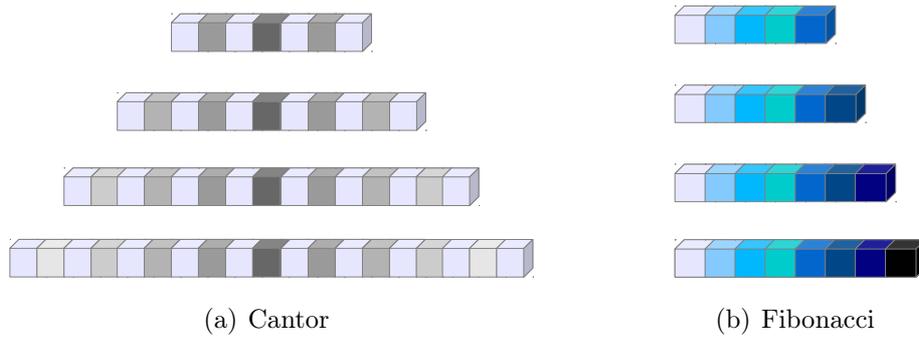


FIG. 1.16 – *Empilement de Cantor angulaire (a) : l'orientation centrale est successivement divisée par 3. Empilement de Fibonacci angulaire (b) : l'orientation de la n ième couche est la somme des orientations des deux couches qui la précèdent.*

CHAPITRE 2

Ondes acoustiques en milieux unidimensionnels autosimilaires

L'application des processus autosimilaires à la confection de composites à plis croisés débouche sur la création de matériaux complexes pour la propagation des ondes. Ce chapitre nous permet d'introduire les propriétés des milieux autosimilaires par l'utilisation d'un modèle de propagation unidimensionnel. Le problème de l'anisotropie des matériaux composites renforcés de fibres est réduit à la propagation d'ondes de compression dont la vitesse dépend de l'orientation du pli.

Le modèle unidimensionnel utilisé dérive d'un formalisme du type matrice de transfert. Nous verrons comment l'anisotropie peut être utilisée pour maximiser les effets de périodicité, de désordre et d'autosimilarité. Nous décrirons et expliquerons la propagation des ondes acoustiques dans des matériaux périodiques et désordonnés. Puis nous détaillerons les caractéristiques en transmission de milieux multicouches autosimilaires inspirés des figures fractales présentées au chapitre précédent.

Sommaire

2.1 Propagation acoustique dans un milieu multicouche unidimensionnel	26
2.1.1 Formalisme matriciel pour la propagation des ondes acoustiques dans un multicouche unidimensionnel	26
2.1.2 Réduction de l'anisotropie à une dimension	29
2.2 Ondes et périodicité	32
2.2.1 Bref historique des cristaux phononiques	32
2.2.2 Propagation dans les milieux multicouches périodiques	33
2.3 Propagation des ondes en milieu désordonné	36
2.3.1 La localisation d'Anderson	36
2.3.2 Les différents régimes de diffusion	37
2.3.3 Milieux multicouches désordonnés	38
2.4 Variations autosimilaires sur la suite de Fibonacci	45
2.4.1 Multicouches concaténés selon le mot de Fibonacci	45

2.4.2	Suite de Fibonacci appliquée à l'orientation des plis	53
2.5	Variations autosimilaires sur l'ensemble de Cantor	56
2.5.1	Empilement de Cantor d'autosimilarité géométrique	56
2.5.2	Empilement de Cantor d'autosimilarité angulaire	61
2.6	Comparaison des empilements périodique, aléatoire, de Cantor et de Fibonacci	65
2.7	Conclusion : de la périodicité au désordre en passant par la quasi-périodicité	67
2.7.1	Récapitulatif des principaux résultats	67
2.7.2	Perspectives	67

Les différents domaines de la physique mettent en jeu des phénomènes de propagation d'ondes s'enrichissant sans cesse les uns les autres : lorsqu'une avancée est faite dans l'un d'eux, elle rejaillit sur les autres. Il en a été ainsi lors de la découverte des cristaux photoniques [Yablonovitch, 1987; John, 1987] et de la symétrie cristalline d'ordre 5 [Shechtman *et al.*, 1984] dans des assemblages métalliques. La richesse de ces domaines fait que les résultats présentés ici s'inspirent tant de la propagation d'ondes acoustiques dans des systèmes présentant des ruptures d'impédance successives que de fonctions d'ondes électroniques au travers de barrières de potentiel ou d'ondes électromagnétiques dans des multicouches diélectriques.

2.1 Propagation acoustique dans un milieu multicouche unidimensionnel

Pour mettre en exergue l'influence de l'autosimilarité sur la propagation des ondes, nous allons réduire le problème de propagation en milieu multicouche anisotrope (possédant au moins deux dimensions) à un problème unidimensionnel. Pour cela, il suffit de considérer une onde d'incidence normale. Dans ce cas, quelle que soit la symétrie du matériau, seules les ondes de compression longitudinales sont générées. Le problème revient alors à la propagation d'ondes acoustiques dans une succession de couches fluides.

2.1.1 Formalisme matriciel pour la propagation des ondes acoustiques dans un multicouche unidimensionnel

Rappelons brièvement la description de la propagation des ondes dans un milieu multicouche par un formalisme de matrice de transfert.

Considérons une onde incidente plane se propageant dans un milieu fluide de masse volumique ρ_0 et de vitesse du son c_0 et arrivant sur un milieu constitué de N couches fluides de masse volumique ρ_n et de vitesse du son c_n . Dans chaque couche se propagent : une onde allant **vers le haut** (superposition de toutes les ondes se propageant vers le haut réfléchies ou transmises à l'interface z_n) et une onde allant **vers le bas** (superposition de toutes les ondes se propageant vers le bas réfléchies ou transmises par l'interface z_{n-1}) (Fig. 2.1).

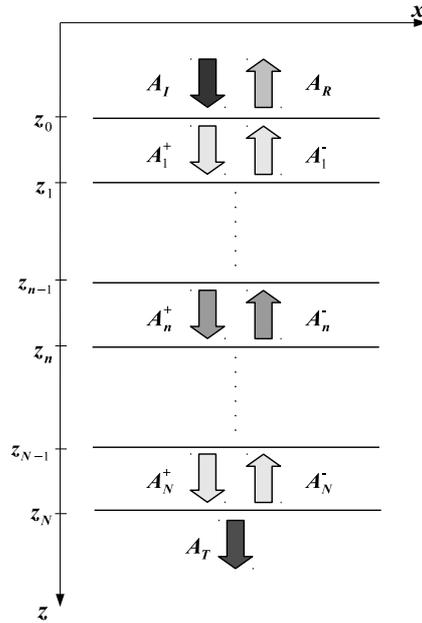


FIG. 2.1 – Propagation dans un multicouche unidimensionnel. A_I est l'amplitude complexe de l'onde incidente, A_R et A_T celles des ondes réfléchies et transmises respectivement. Les A_n^+ sont les amplitudes complexes des ondes se propageant selon z croissant, A_n^- selon z décroissant.

Le potentiel des vitesses dans la couche n s'écrit :

$$\phi_n(z, t) = (A_n^+ e^{-jk_{zn}z} + A_n^- e^{jk_{zn}z}) e^{j\omega t}, \quad (2.1)$$

avec ω , la pulsation, k_z et K , les projections respectives des vecteurs d'onde sur les axes z et x , et A_n^+ et A_n^- , les amplitudes des ondes se propageant selon $+z$ et $-z$. ϕ_n est tel que :

$$\begin{cases} p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ \vec{v} = \text{grad} \phi \end{cases} \quad (2.2)$$

Ainsi, nous pouvons relier vitesses et pressions au dessus ($z = z_{n-1}$) et en dessous ($z = z_n$) de la couche n :

$$\begin{pmatrix} p \\ v_z \end{pmatrix}_{z_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \Phi_n & jZ_n \sin \Phi_n \\ \frac{j}{Z_n} \sin \Phi_n & \cos \Phi_n \end{pmatrix}}_{M_n} \begin{pmatrix} p \\ v_z \end{pmatrix}_{z_{n-1}} \quad (2.3)$$

où M_n est la matrice de transfert de la couche, $Z_n = \frac{\omega\rho}{k_{zn}}$ son impédance et $\Phi = k_{zn}h_n$ avec $h_n = z_n - z_{n-1}$.

La matrice de transfert globale d'un milieu multicouche est égale au produit des matrices de transfert des couches :

$$M = M_n M_{n-1} \cdots M_i \cdots M_2 M_1 \quad (2.4)$$

Les lois de Snell-Descartes permettent de connaître la projection du vecteur d'onde selon l'axe z (Eq. 2.5).

$$k_{zn}^2 = \omega^2 \left(\frac{1}{c_n^2} - \frac{\sin^2 \theta_{inc}}{c_0^2} \right) \quad (2.5)$$

L'expression des coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude de pression se déduit de M et de la connaissance des champs de pression incident p_I , réfléchi p_R et transmis p_T .

$$\begin{cases} p_I(z, t) = A_i e^{-j(k_{z0}z + \omega t)} \\ p_R(z, t) = r A_i e^{-j(k_{z0}z - j\omega t)} \\ p_T(z, t) = t A_i e^{-j(k_{zN+1}z + j\omega t)} \end{cases} \quad (2.6)$$

Comme $Z = p/(\vec{v} \cdot \vec{n})$,

$$\begin{pmatrix} t \\ \frac{t}{Z_{ext}} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 + r \\ \frac{1-r}{Z_{ext}} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

D'où :

$$\begin{cases} r = \frac{M_{12} + (M_{11} - M_{22})Z_{ext} - M_{21}Z_{ext}^2}{M_{12} - (M_{11} + M_{22})Z_{ext} + M_{21}Z_{ext}^2} \\ t = \frac{2(M_{12}M_{21} - M_{11}M_{22})Z_{ext}}{M_{12} - (M_{11} + M_{22})Z_{ext} + M_{21}Z_{ext}^2} \end{cases} \quad (2.8)$$

$R = |r|^2$ et $T = 1 - R = \left| \frac{p_{N+1}}{p_0} \right|^2$ sont les coefficients de réflexion et transmission en puissance. Le coefficient de transmission permet de visualiser le pouvoir d'atténuation global du matériau. Nous l'utilisons pour comparer les empilements.

2.1.2 Réduction de l'anisotropie à une dimension

La simplification du problème de l'anisotropie permet d'aborder simplement la propagation des ondes dans les milieux autosimilaires. Elle nous permettra de mieux comprendre le couplage anisotropie/autosimilarité (chapitre 3).

Tenseur d'élasticité des matériaux anisotropes étudiés

Les empilements que nous étudions sont constitués d'une succession de couches transverses isotropes. Ces couches ont une symétrie cristalline hexagonale : elles sont caractérisées par cinq constantes élastiques, possèdent deux plans de symétrie orthogonaux et sont invariantes par une rotation autour de l'axe d'orthotropie A_6 (dirigé ici le long des fibres de carbone (Fig. 2.2)) [Royer & Dieulesaint, 1996].

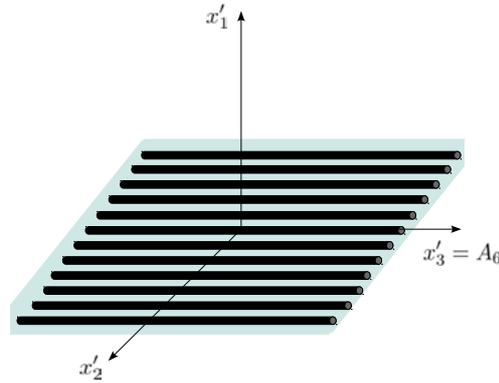


FIG. 2.2 – Repère local (x'_1, x'_2, x'_3) associé à la couche unidirectionnelle de composite : l'axe A_6 est l'axe d'orthotropie. Il est orienté le long des fibres de carbone.

Le tenseur des constantes élastiques dans ce repère s'écrit :

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & & & \mathbf{0} \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & \mathbf{0} & & & C_{44} & \\ & & & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Les empilements sont constitués de couches dont l'orientation des fibres varie par rapport au repère global (x, y, z) (Fig. 2.1). Le tenseur d'élasticité doit donc être ramené dans le repère principal (x, y, z) par une rotation. La matrice d'élasticité C ainsi exprimée dépend de l'angle de rotation φ_n de la couche. Les vitesses de propagation des ondes planes dans ce milieu découlent directement de ces constantes élastiques,

et dépendent de φ . Les vitesses de phase des ondes quasi-longitudinales c_L et quasi-transverses c_T sont déduites de l'équation de Christoffel : $C_{ijkl}n_j n_k P_l = \rho c^2 P_i$ (où \vec{n} correspond à la direction de propagation et \vec{P} à la polarisation de l'onde). La résolution de l'équation de Christoffel est détaillée en annexe A.

La vitesse la plus grande dans ces matériaux est la vitesse des ondes qui se propagent le long des fibres. Ainsi, si l'on considère un empilement de couches comme les empilements de composites classiques, l'onde qui se propage normalement au matériau traverse des couches presque identiques en terme d'impédance. Pour avoir un maximum de contraste d'impédance entre les couches, et pour dégager les propriétés classiques de propagation en milieu autosimilaire, nous allons considérer un matériau dont l'axe d'orthotropie principal est dirigé selon la direction de propagation. Ainsi, l'onde est affectée par les changements successifs de direction des fibres. Le système que nous considérons est présenté sur la figure 2.3.

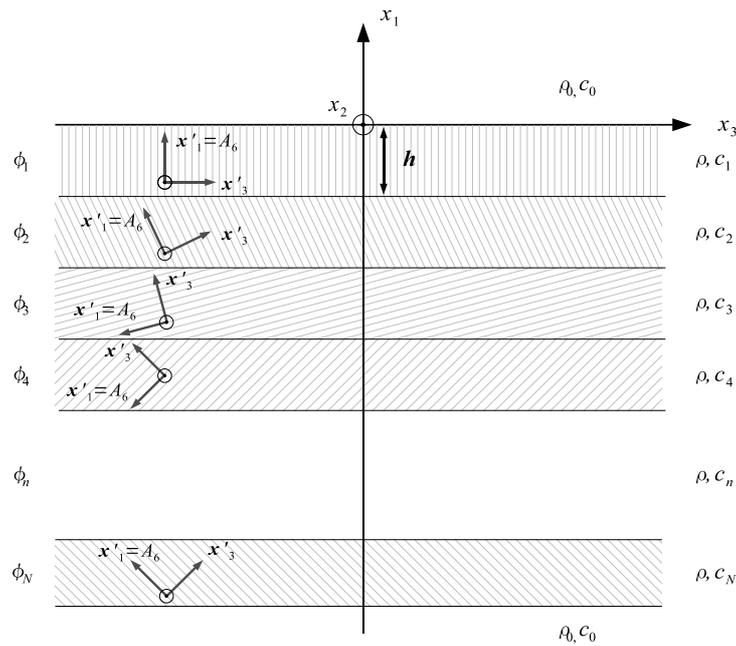


FIG. 2.3 – *Multicouche anisotrope : l'axe d'orthotropie des plis tourne autour de l'axe de propagation.*

Cette configuration n'a pas d'application directe dans le cadre des composites que nous étudions, mais elle pourrait s'appliquer à d'autres matériaux anisotropes isolants : brique et bois par exemple.

Quand l'axe d'orthotropie est orienté selon l'axe de propagation, le tenseur d'élasticité s'écrit :

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & & & \\ C_{12} & C_{33} & C_{23} & & & \mathbf{0} \\ C_{12} & C_{23} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & \mathbf{0} & & & C_{66} & \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Nous travaillerons avec des plis unidirectionnels en fibres de carbone et résine époxyde. Leurs constantes élastiques sont rappelées dans le tableaux 2.1 [Deschamps & Hosten, 1992; Balasubramaniam, 2000] .

C_{11} (GPa)	C_{12} (GPa)	C_{23} (GPa)	C_{33} (GPa)	C_{66} (GPa)	ρ (kg.m ⁻³)
132	5,9	6,9	12,3	6,21	1577

TAB. 2.1 – Constantes élastiques d'un composite unidirectionnel en fibres de carbone et résine [Deschamps & Hosten, 1992; Balasubramaniam, 2000].

L'évolution de la vitesse en fonction de l'orientation de la couche est représentée sur la figure 2.4. La différence d'orientation la plus grande correspond à des couches orientées à $\varphi_0 = 0^\circ$ (fibres selon l'axe 1) et $\varphi_0 = 90^\circ$ (fibres selon l'axe 3) pour lesquelles les vitesses de phase des ondes longitudinales passent de $c_0 = 9149$ m/s à $c_{90} = 2793$ m/s.

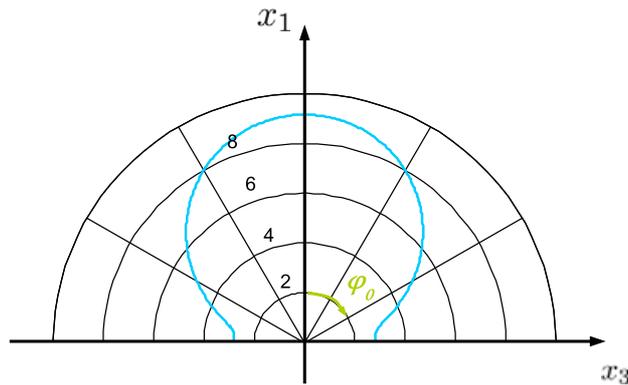


FIG. 2.4 – Vitesse des ondes longitudinales c_L en km/s en fonction de l'orientation φ_0 de la couche par rapport aux axes du repère global (x_1, x_2, x_3) .

Pour simplifier le problème, nous aborderons la propagation d'ondes acoustiques dans les matériaux autosimilaires en incidence normale. Ainsi, seules les ondes longitudinales (ou quasi-longitudinales) se propagent, et le problème est réduit à la propa-

gation des ondes dans un milieu constitué d'une succession de N couches semi-infinies de mêmes épaisseur d et densité ρ , et de vitesse de propagation c_{φ_0} variant suivant leur orientation φ_0 .

2.2 Ondes et périodicité

Cette partie aborde les aspects de la propagation des ondes dans des milieux périodiques. Nous présenterons un bref historique (non exhaustif!) des cristaux phononiques, en nous écartant légèrement du problème unidimensionnel. Puis nous décrirons le cadre théorique de la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu périodique unidimensionnel et l'appliquerons à notre étude.

2.2.1 Bref historique des cristaux phononiques

Les cristaux phononiques sont des structures ordonnées présentant une périodicité dans une ou plusieurs directions. Leur interaction avec des ondes acoustiques donne lieu à des phénomènes intéressants. Pour des gammes de longueurs d'ondes de l'ordre de la période de la structure, ils sont capables de "bloquer" totalement la propagation des ondes. On parle alors, comme en physique du solide, de bandes interdites. En acoustique, les cristaux phononiques ont été étudiés à partir des années 70 [Solie, 1976; Achenbach & Kitahara, 1987; Narayanamurti *et al.*, 1979]. C'est lorsque les théories se sont développées en optique, électromagnétisme et quantique que les recherches sur les ondes élastiques se sont intensifiées.

Le concept de cristal photonique pluridimensionnel a été découvert simultanément en 1987 par les équipes de Yablonovitch d'un côté et de Sajeev de l'autre [Yablonovitch, 1987; John, 1987]. Dans les années 90, des travaux similaires furent adaptés au domaine acoustique. En 1993, Kushwaha *et al.* simulent par le calcul l'obtention d'une bande interdite complète (la bande interdite existe quelle que soit la direction de propagation) pour des ondes transverses dans un arrangement périodique de cylindres [Kushwaha *et al.*, 1993; Kushwaha *et al.*, 1994]. Sigalas et Economou calculèrent la même année une bande interdite étroite mais complète pour les ondes longitudinales et transverses [Sigalas & Economou, 1993]. Les premières expériences dans le domaine audible sont publiées dans *Nature* par Martínez-Sala *et al.*. Elles montrent que la sculpture de Eusebio Sempere exposée dans les jardins de la Juan March Foundation à Madrid présente une bande interdite [Martínez-Sala *et al.*, 1995; Sánchez-Pérez *et al.*, 1998].

De nombreuses études théoriques proposèrent des matériaux susceptibles de présenter des bandes interdites complètes [Vasseur *et al.*, 1994; Kushwaha & Djafari-

Rouhani, 1996]. Les premières mesures démontrant leur existence ont été publiées en 1998 [Sánchez-Pérez *et al.*, 1998; Vasseur *et al.*, 1998; Montero de Espinosa *et al.*, 1998]. Elles ont conduit à une croissance considérable du nombre de travaux dédiés aux cristaux phononiques. Des variations ont commencé à apparaître notamment avec l'introduction, au sein des structures phononiques, de diffuseurs résonants [Liu *et al.*,]. Les réseaux ainsi constitués (appelés métamatériaux) peuvent posséder un paramètre de maille jusqu'à deux ordres de grandeur inférieurs à la longueur d'onde de travail. Ils permettent ainsi de réduire la taille des structures visant à atténuer les ondes sonores audibles. Il est également possible de mettre en œuvre des structures phononiques opérant pour des fréquences supérieures au GigaHertz et pouvant jouer sur les propriétés de conductibilité thermique, de capacité calorifique [Cleland *et al.*, 2001] ou sur les phénomènes acousto-optiques. De nombreuses études théoriques [Tanaka & Tamura, 1998] et expérimentales [Jeong *et al.*, 2004] portent en outre sur l'interaction des ondes de surface avec les cristaux phononiques.

L'avantage des cristaux phononiques sur leurs homologues optiques vient d'abord du fait qu'ils sont fabriqués à des échelles macroscopiques (en rapport avec les longueurs d'onde concernées). De plus, les mesures permettent de connaître l'amplitude et la phase des signaux tandis que les détecteurs optiques sont limités à la mesure de l'intensité du champ. Les cristaux phononiques sont donc particulièrement adaptés à la modélisation et la compréhension des phénomènes physiques sous-jacents.

2.2.2 Propagation dans les milieux multicouches périodiques

En 1887, Rayleigh étudie pour la première fois théoriquement la propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique périodique unidirectionnel. Depuis, de telles structures sont étudiées dans tous les domaines qui font intervenir des phénomènes ondulatoires : phonons dans un cristal, ondes électromagnétiques dans des milieux solides ou fluides, ondes quantiques dans les semi-conducteurs. Rayleigh avait déjà mis en évidence l'existence de bandes d'arrêt : une plage de longueurs d'onde qui n'autorise pas la propagation des ondes dans la structure.

Dans un cristal phononique unidimensionnel, les phénomènes de bandes interdites s'expliquent très bien par analogie avec la loi de Bragg. Les ondes se réfléchissant sur les différents plans du multicouche interfèrent constructivement lorsque leur différence de marche acoustique est telle que : $\delta = p\lambda/2$ (avec $p \in \mathbb{N}$). Or dans le cas de couches d'épaisseur d et d'une onde incidente monochromatique d'angle θ et de longueur d'onde λ , la différence de marche vaut $\delta = 2d \sin \theta$ (Fig. 2.5). Les frères Bragg ont mis en évidence cette loi en étudiant les figures d'interférences de rayons X se réfléchissant sur

un cristal. Les plans satisfaisant à la condition d'interférences constructives sont les plans qui délimitent la première zone de Brillouin. C'est à dire les plans qui définissent la maille élémentaire du réseau réciproque.

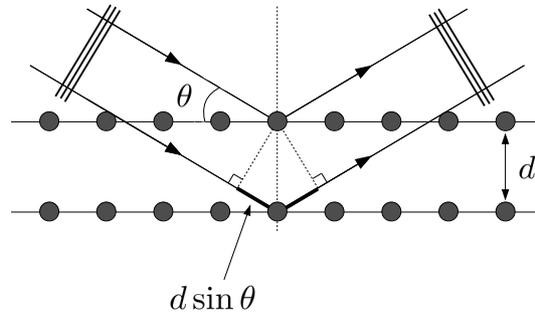


FIG. 2.5 – Diffraction de Bragg des plans d'ondes sur les couches d'un réseau cristallin périodique.

P. Santos et L. Ley [Santos *et al.*, 1987] expliquent comment calculer approximativement la largeur et les fréquences centrales des bandes interdites dans leur article traitant de l'étude des bandes interdites pour des phonons dans un réseau de silicium. Ils résolvent graphiquement l'équation de dispersion des phonons acoustiques longitudinaux dans le réseau périodique dont la cellule élémentaire est constituée de deux couches de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 et de vitesses de propagation des ondes c_1 et c_2 . Ils montrent que les vecteurs d'onde sont limités à une zone de Brillouin de taille $[-\pi/d, \pi/d]$ et qu'il existe deux types de bandes interdites : celles se situant au centre de la zone de Brillouin ($k_z = 0$) et celles se situant en bord de zone ($k_z = \pi/d$). Les fréquences centrales de ces zones dépendent des épaisseurs, $d_{1/2}$, des vitesses et des masses volumiques des deux couches (Eq. 2.11).

$$\begin{cases} f_m^c = \frac{m}{\frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2}} \\ f_m^b = \frac{2m-1}{2(\frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2})} \end{cases} \quad (2.11)$$

avec $m \in \mathbb{N}$. f_m^c est la fréquence centrale de la $m^{\text{ième}}$ bande interdite de centre de zone de Brillouin. f_m^b est la fréquence centrale de la $m^{\text{ième}}$ bande interdite de bord de zone de Brillouin.

La demi largeur de ces deux bandes interdites, pour un milieu de propagation infini, est également déterminée approximativement par Santos et Ley (Eq. 2.12) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta f_m^c = \pm(-1)^m M \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1} 2f_m^c \quad \text{pour} \quad \frac{m\pi(t_2 - t_1)}{t_2 + t_1} \ll 1 \\ \Delta f_m^b = \pm(-1)^m \frac{M}{(2m-1)\pi/2} 2f_m^b \quad \text{pour} \quad (2m-1)\frac{\pi}{2} \frac{(t_2 - t_1)}{t_2 + t_1} \ll 1 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

avec $M = (\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2)/(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)$ et $t_i = d_i/c_i$.

Dans les deux cas la largeur de la bande de fréquences interdites dépend de la différence de vitesse entre les deux couches : plus cette dernière est importante, plus la bande interdite est large.

Afin de maximiser le contraste de vitesse entre les couches pour les ondes longitudinales, nous choisirons des couches orientées à 0° et 90° (Fig. 2.4). Nous représentons sur la figure 2.6 le coefficient de transmission, T , pour un empilement périodique de 40 couches d'épaisseur $d = 1\text{mm}$. Quatre bandes interdites sont présentes.

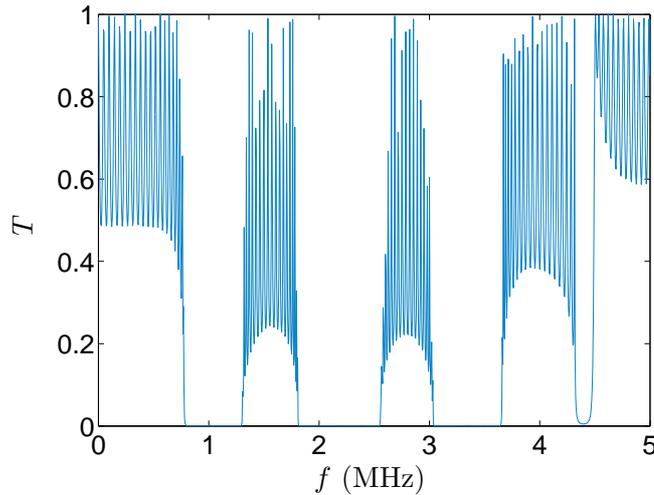


FIG. 2.6 – Coefficient de transmission pour un empilement périodique $[0^\circ 90^\circ]_{20}$ ($d = 1\text{mm}$). Quatre bandes interdites sont visibles ($T \rightarrow 0$).

Le tableau 2.2 présente l'écart en % des valeurs des fréquences théoriques calculées avec l'équation 2.11 et celles relevées sur la figure 2.6.

Les valeurs théoriques sont en accord avec les valeurs déduites de la simulation numérique. La position des bandes interdites dépend seulement de la différence de vitesse de propagation des ondes longitudinales entre les deux couches du réseau car on garde une épaisseur de couche constante (Eq. 2.11). Il en est de même pour la profondeur et la largeur de la bande interdite, car les couches possèdent toutes la même masse volumique (Eq. 2.12). L'écart entre les valeurs théoriques et numériques

Fréquences centrales	f_1^b	f_1^c	f_2^b	f_2^c	f_3^b
Ecart théorie-simulation (%)	5	0,5	1,8	0,3	0,5

TAB. 2.2 – *Ecart (%) entre les valeurs théoriques des fréquences centrales des bandes interdites (Eq. 2.11) et les valeurs obtenues graphiquement par rapport aux fréquences délimitant la bande d'arrêt.*

vient du fait que les expressions théoriques sont valables pour un milieu infini. Dans notre cas ($N = 40$), la bande interdite n'est pas creusée au maximum, d'où la légère différence entre théorie et calcul numérique.

2.3 Propagation des ondes en milieu désordonné

2.3.1 La localisation d'Anderson

Les milieux désordonnés peuvent piéger les ondes dans une région finie de l'espace. Ce phénomène est appelé "localisation forte" et résulte des interférences entre les ondes multiples diffusées par le désordre. P. W. Anderson a mis en évidence ce phénomène en 1958 alors qu'il tentait d'expliquer la transition métal-isolant dans les films métalliques [Anderson, 1958]. Les travaux de John [John, 1987] sur les cristaux photoniques lancèrent l'engouement des scientifiques sur l'étude de la localisation d'Anderson pour les ondes classiques (électromagnétiques et mécaniques) [Sheng, 1990]. D'un point de vue pratique, les ondes classiques sont plus faciles à utiliser du fait de leurs longueurs d'onde de l'ordre du milli ou micromètre (contrairement aux ondes quantiques qui avoisinent le nanomètre). L'apparition du phénomène d'interférences ne nécessite pas, comme les ondes quantiques, de basses températures.

La capacité à localiser les ondes dépend fortement de la dimension (*théorie d'échelle* [Abrahams *et al.*, 1979]). Quel que soit leur degré de désordre, il suffit d'augmenter la taille des milieux désordonnés de dimension 1 et 2 pour qu'ils localisent les ondes. En dimension 3, une énergie critique, le "*mobility edge*", sépare les états localisés des états étendus. Quand la valeur de la conductance adimensionnée g est inférieure à 1, les états sont localisés (Critère de Thouless [Edwards & Thouless, 1972; Abrahams *et al.*, 1979]).

De nombreuses études numériques et théoriques ont été menées pour ces différents types d'onde, avec le but premier de faciliter l'observation expérimentale du phénomène [Sheng & Zhang, 1986; Economou & Soukoulis, 1989; Wang & Luan, 2002; Sigalas

et al., 1996]. Pour les ondes élastiques, des preuves expérimentales ont été apportées par différentes équipes. Dans le domaine ultrasonore, Weaver observa en 1990 la localisation d'ondes élastiques dans une plaque d'aluminium rainurée [Weaver, 1990]. La localisation d'ondes de flexion dans une plaque d'acier agrémentée de blocs résonants placés aléatoirement a été observée en 1992 par l'équipe de Sheng [Ye *et al.*, 1992]. Plus récemment, Page et Van Tiggelen ont identifié la localisation forte d'ondes élastiques dans un échantillon désordonné de billes d'aluminium [Hu *et al.*, 2008].

2.3.2 Les différents régimes de diffusion

Le régime de diffusion des ondes élastiques est déterminé par les tailles relatives de l'épaisseur du système L et du libre parcours moyen élastique l_e . Ce dernier est lié au degré de désordre dans le milieu (distribution de taille, forme, propriétés et répartition spatiale des diffuseurs). Plus l'onde rencontre de diffuseurs, plus son parcours est désordonné et plus l_e est faible. La figure 2.7 présente différents régimes de diffusion.

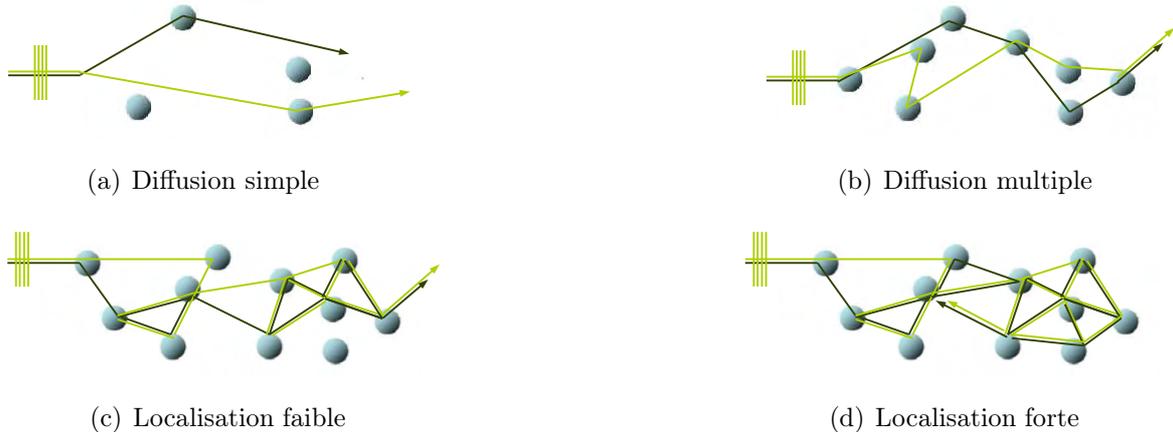


FIG. 2.7 – Représentation schématique des différents régimes de diffusion en milieu désordonné. (a) diffusion simple : $L \cong l_e$; (b) diffusion multiple $L > l_e$; (c) diffusion multiple $L > l_e$, renormalisation de la constante de diffusion : localisation faible $l_e > \lambda$; (d) localisation forte : annulation de la constante de diffusion $\lambda > l_e$.

Lorsque L est de l'ordre du libre parcours moyen, l'onde est diffusée une seule fois durant son parcours. Le régime de propagation est celui de la diffusion simple, ou régime balistique (Fig. 2.7 (a)). Au contraire, lorsque $L > l_e$, l'onde est diffusée en moyenne plus d'une fois le long de son parcours. C'est le régime de diffusion multiple (Fig. 2.7 (b)).

En milieux infinis 3D, la proximité du régime de localisation est alors déterminée par la comparaison entre la longueur d'onde λ et le libre parcours moyen l_e (Critère de

Ioffe-Regel). Pour un libre parcours moyen grand devant la longueur d'onde, le désordre est faible et l'équation de diffusion suffit à décrire le transport des ondes (Fig. 2.7 (c)). Pour des milieux extrêmement désordonnés : $\lambda > l_e$, l'onde se retrouve piégée dans une région finie de l'espace, elle est localisée au sens d'Anderson (Fig. 2.7 (d)). Elle présente alors une décroissance exponentielle dans l'espace caractérisée par la longueur de localisation l_{loc} .

John montre qu'il y a un lien entre la localisation des ondes dans des milieux désordonnés et l'existence de bandes interdites (ou bandes de faible densité d'états) dans les structures périodiques [John, 1987]. En introduisant progressivement du désordre dans une structure périodique, des états localisés¹ apparaissent au sein des bandes interdites. De nombreuses recherches se sont ainsi focalisées sur l'étude des milieux désordonnés périodiques en moyenne (c'est à dire dont le caractère désordonné résulte d'un écart par rapport à une structure périodique).

2.3.3 Milieux multicouches désordonnés

En pratique, la réalisation de milieux multicouches périodiques introduit irrémédiablement des défauts dans la structure. Pour les ondes électromagnétiques, des études ont été menées en introduisant du désordre à partir de variations d'épaisseur d'une des deux couches de base de l'empilement [Kondilis & Tzanetakis, 1992; McGurn *et al.*, 1993; Wang & Luan, 2002] ou de variations des constantes diélectriques d'un des deux matériaux [McGurn *et al.*, 1993]. Sigalas et Economou abordent le problème pour des ondes élastiques en 1995 et introduisent du désordre par des variations d'épaisseur. Leur principale conclusion est que l'introduction de désordre provoque une augmentation de la longueur de localisation à l'intérieur des bandes interdites. Cela est dû au fait que dans ces régions, la densité d'états augmente avec le désordre.

En ce qui nous concerne, nous considérerons des empilements initialement périodiques de couches d'épaisseur et de densité identique. Leurs propriétés vibratoires seront étudiées à l'aide de leur coefficient de transmission. La moyenne de celui-ci, réalisée sur 200 empilements, est relié, dans le cas d'un empilement unidimensionnel, à la longueur de localisation [Sigalas & Soukoulis, 1995; McGurn *et al.*, 1993] :

$$\langle \ln T \rangle = -\frac{L}{l_{loc}}. \quad (2.13)$$

L'introduction de désordre dans les empilements multicouches "anisotropes" est obtenue :

1. Ces états ne sont pas localisés au sens d'Anderson, mais la longueur caractéristique de décroissance spatiale de leur énergie est petite devant la taille de l'échantillon.

1. en partant d'un empilement périodique de maille AB (où A et B sont deux couches d'orientation différente) et en intervertissant aléatoirement un nombre croissant de couches ;
2. en choisissant au hasard les orientations des couches dans un intervalle d'angles de plus en plus large.

Nous créons ainsi deux types de désordre : l'un jouant sur l'introduction de défauts dans un milieu périodique, l'autre créant une diversité de vitesses de propagation dans le matériau.

2.3.3.1 Introduction de désordre par interversion de couche

Considérons un empilement de $N = 40$ couches initialement périodique : $[A B]_{20} = [0^\circ 90^\circ]_{20}$. Le désordre est obtenu en remplaçant un nombre donné de couches choisies au hasard par la couche opposée : les couches A sont remplacées par une couche B et inversement. L'empilement est donc le plus désordonné par rapport à l'empilement périodique quand la moitié des couches sont modifiées. Passé ce seuil, on se rapproche de l'empilement périodique inverse : $[B A]_{20}$. Le degré de désordre, σ est donné par le rapport du nombre de couches interverties, N_{modif} , par le nombre total de couches N (Eq. 2.14) :

$$\sigma = 2 \frac{N_{\text{modif}}}{N} \quad (2.14)$$

Deux exemples de tirages au sort d'empilement pour un désordre de 10% et 100% sont représentés sur la figure 2.8.

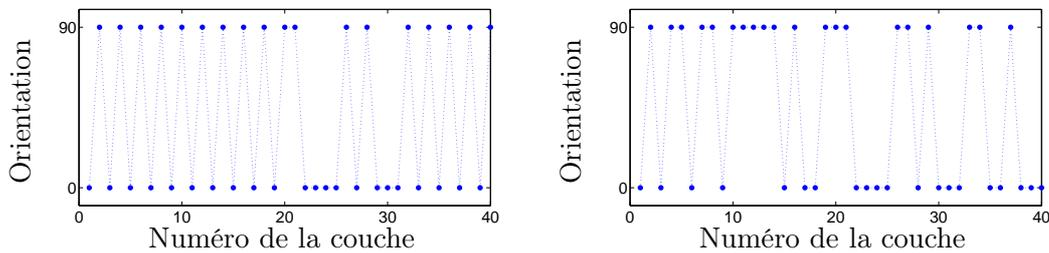


FIG. 2.8 – *Comparaison de deux empilements désordonnés à $\sigma = 10\%$ (a) et $\sigma = 100\%$ (b).*

Le coefficient de transmission pour une réalisation d'empilements comportant 30%, 60% et 90% de désordre est représenté Fig. 2.9.

Plus le degré de désordre augmente, plus le nombre de couches interverties est grand, et moins l'onde "perçoit" la périodicité. Cela entraîne un rehaussement des bandes

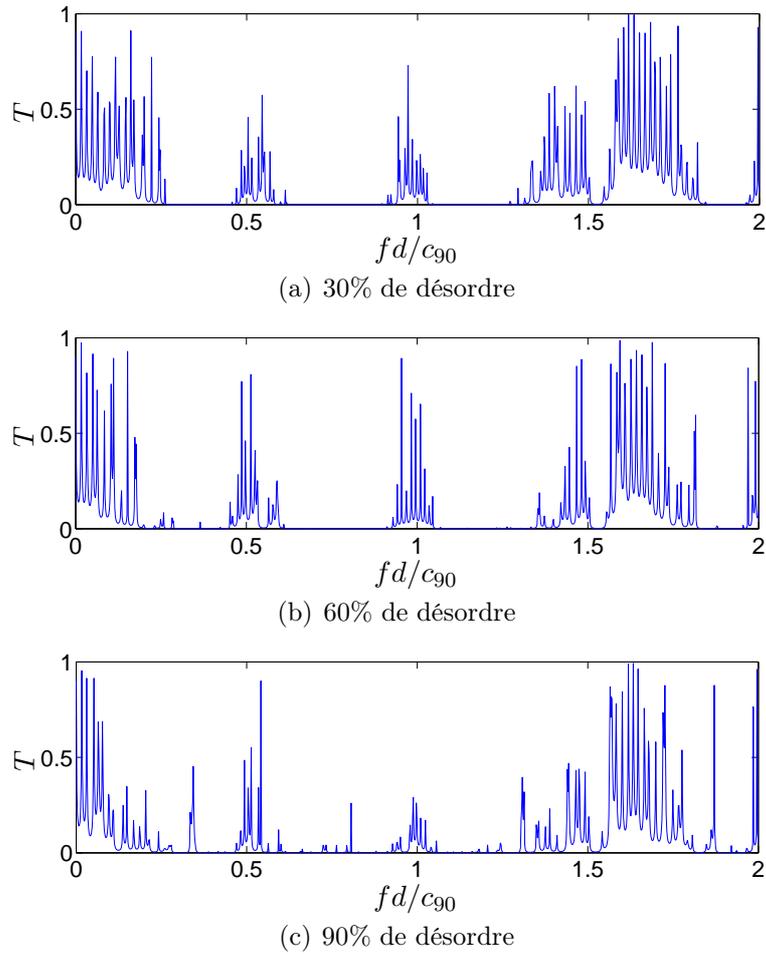


FIG. 2.9 – Coefficients de transmission pour une réalisation d'empilements présentant 30% (a), 60% (a) et 90% (c) de désordre.

interdites (Fig. 2.9). Par abus de langage, pour faciliter la lecture des interprétations des figures, nous continuerons à parler de bandes interdites.

La figure 2.10 montre qu'il est possible, à l'intérieur ($f = 2\text{MHz}$) et à l'extérieur ($f = 1.5\text{MHz}$) des bandes interdites, d'ajuster la moyenne du coefficient de transmission en fonction du nombre de couches par une courbe exponentielle décroissante. Les ondes sont donc localisées, et l'utilisation de Eq. 2.13 est justifiée.

Le coefficient de transmission et son logarithme sont calculés pour 200 réalisations d'empilements désordonnés. $\langle \ln T \rangle$ est la moyenne de $\ln T$ sur ces 200 réalisations (Fig. 2.11).

Les états localisés apparaissant avec l'introduction de désordre sont clairement visibles (Fig. 2.11). Ils correspondent aux états de vibration des nouvelles cellules créées : AA ou BB . Pour $\sigma = 20\%$, ils s'élevent à 1MHz , $1,9\text{MHz}$, $2,3\text{MHz}$, *etc...* Quand le désordre augmente, ces pics restent présents, s'élargissent et d'autres font leur appari-

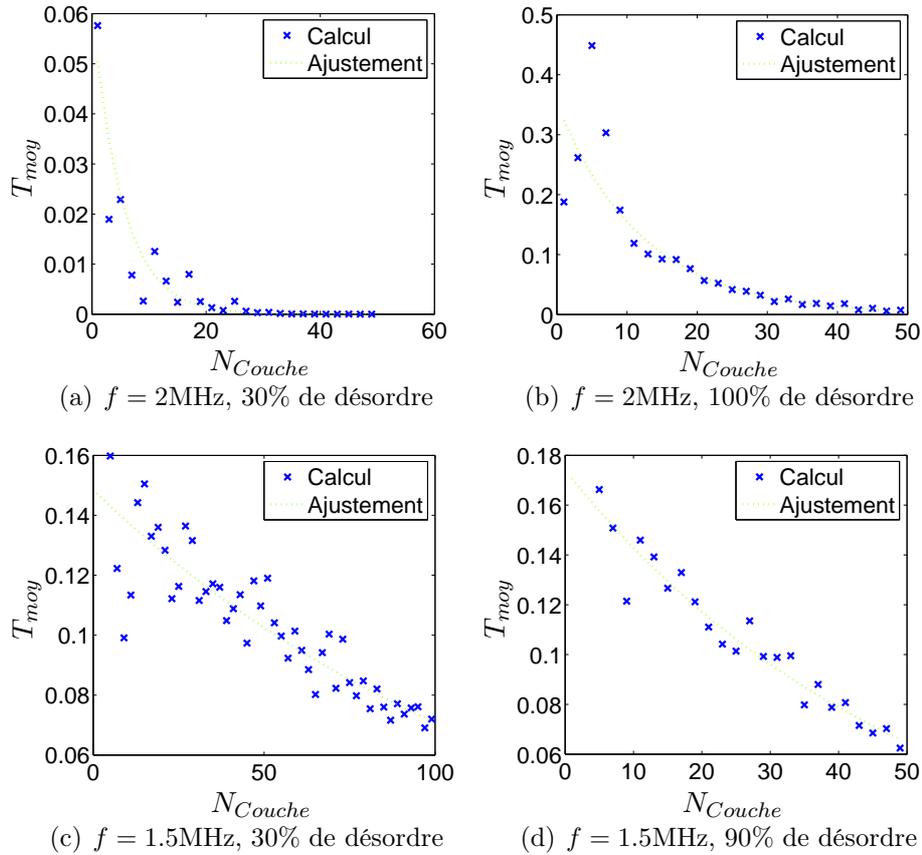


FIG. 2.10 – Moyenne du coefficient de transmission en fonction du nombre de couches à l'intérieur ($f = 2\text{MHz}$) ((a) et (b)) et à l'extérieur ($f = 1.5\text{MHz}$) des bandes interdites ((c) et (d)) pour différents degrés de désordre.

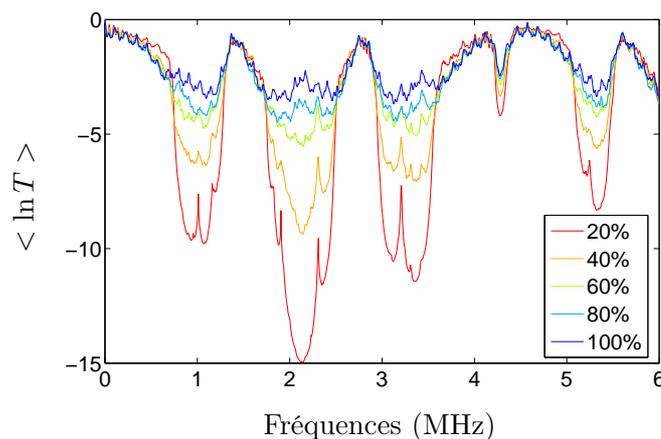


FIG. 2.11 – $\langle \ln T \rangle$ pour des empilements de désordre croissant.

tion. Pour $\sigma = 100\%$, ils apparaissent au sein des bandes interdites tous les 120kHz en moyenne à partir de 900kHz. Ils correspondent à des cellules élémentaires de plus en plus épaisses vibrant dans l'empilement.

Les sous-cellules composant l'empilement très désordonné sont des successions de la même couche de différentes tailles : AA , BB , AAA , BBB , *etc...* Pour un degré de désordre donné, la position en fréquence des résonances apparaissant au sein des bandes interdites dépend de la position et de la nature des cellules élémentaires dans la structure. Cela peut expliquer l'élargissement des modes localisés lors du calcul de la moyenne de T sur le désordre. Plus ce dernier augmente, plus les cellules élémentaires s'élargissent, et plus les fréquences des pics sont différentes d'un empilement tiré au sort à l'autre (pour un degré de désordre donné).

Concernant la longueur de localisation, deux remarques peuvent être faites. Elles rejoignent les travaux précédents portant sur les ondes électromagnétiques ou élastiques [Sigalas & Soukoulis, 1995; McGurn *et al.*, 1993]. $\langle \ln T \rangle$ (donc l_{loc}) évolue différemment selon que l'on se situe en dehors ou à l'intérieur des bandes interdites (Fig. 2.12).

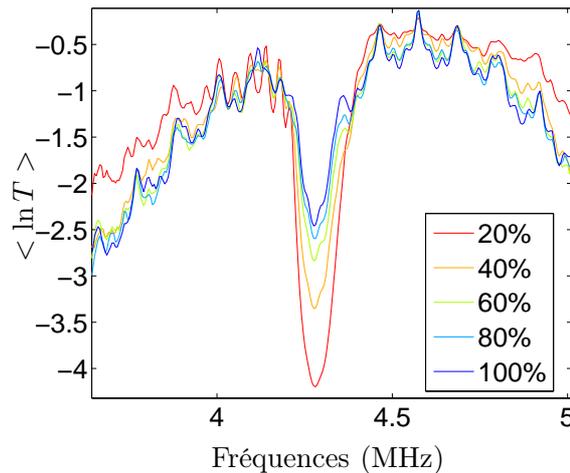


FIG. 2.12 – Grossissement de la quatrième bande interdite pour visualiser l'évolution de $\langle \ln T \rangle$ avec le désordre.

A l'intérieur des intervalles de fréquences définissant les bandes interdites pour un milieu périodique, $\langle \ln T \rangle$, donc l_{loc} , augmente avec le désordre. Cela est dû à l'augmentation de la densité d'états dans ces zones quand on introduit des défauts. À l'inverse, hors des bandes d'arrêt, la longueur de localisation décroît avec le degré de désordre : les ondes se localisent. La longueur de localisation moyenne dans ces zones est de l'ordre de la moitié de l'épaisseur de l'empilement (calcul effectué avec l'équation 2.13). Les ondes sont donc faiblement localisées. La longueur de localisation par le désordre dépend beaucoup des contrastes de vitesse et de masse volumique. L'augmentation de l'épaisseur totale de l'empilement (le nombre de couches), en multipliant les

structures différentes rencontrées par l'onde, diminuerait la longueur de localisation.

2.3.3.2 Introduction de désordre par ajout d'orientations

Une seconde manière d'introduire du désordre dans ces empilements est de faire varier l'angle φ_2 de la couche B de l'empilement périodique $[A B]_{N/2} = [\varphi_1 \varphi_2]_{N/2}$. Pour chaque couche de type B , l'orientation φ est tirée au sort dans l'intervalle $[\varphi_2 - \varphi_{\sigma max}; \varphi_2]$. Ainsi, le degré de désordre sera calculé par rapport à l'écart maximum, $|\varphi_2 - \varphi_{\sigma max}|$, entre les angles présents dans l'empilement :

$$\sigma = \frac{|\varphi_2 - \varphi_{\sigma max}|}{\varphi_2}. \quad (2.15)$$

Plus l'écart est grand, plus le désordre est grand.

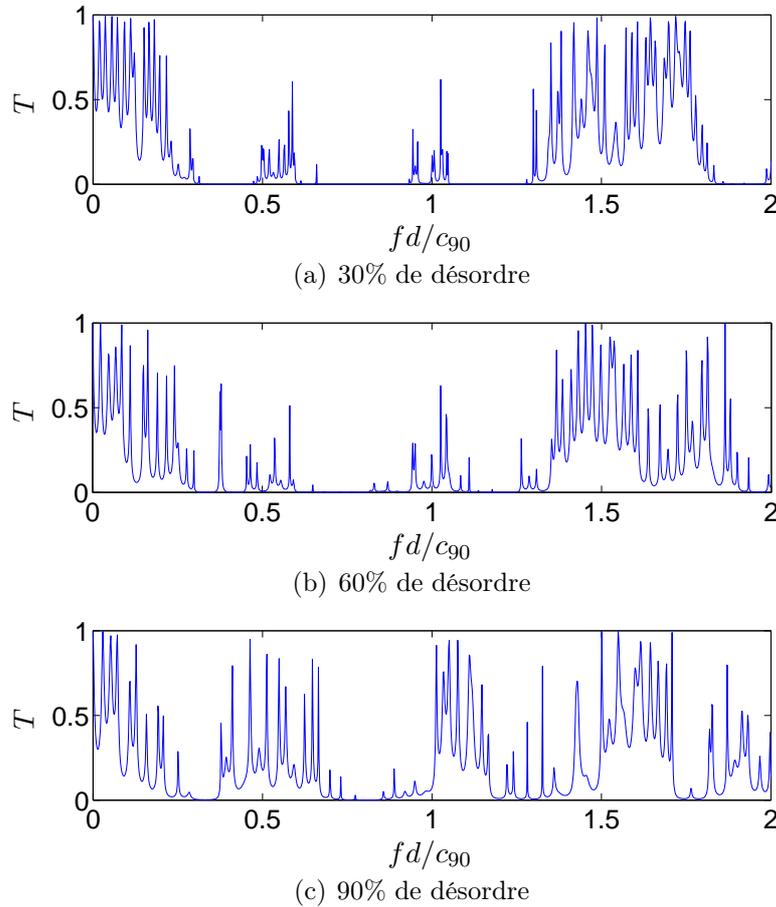


FIG. 2.13 – Coefficients de transmission pour une réalisation d'empilements présentant 30% (a), 60% (a) et 90% (c) de désordre.

La figure Fig. 2.13 représente le coefficient de transmission pour une réalisation des empilements présentant 30%, 60% et 90% de désordre. Les bandes interdites dues à la

périodicité persistent tant que la diversité des orientations n'est pas trop grande (Fig. 2.13 (a) et (b)). Plus les orientations de couches sont différentes, plus la variabilité de vitesses dans l'empilement est grande et plus des pics apparaissent dans le spectre (c).

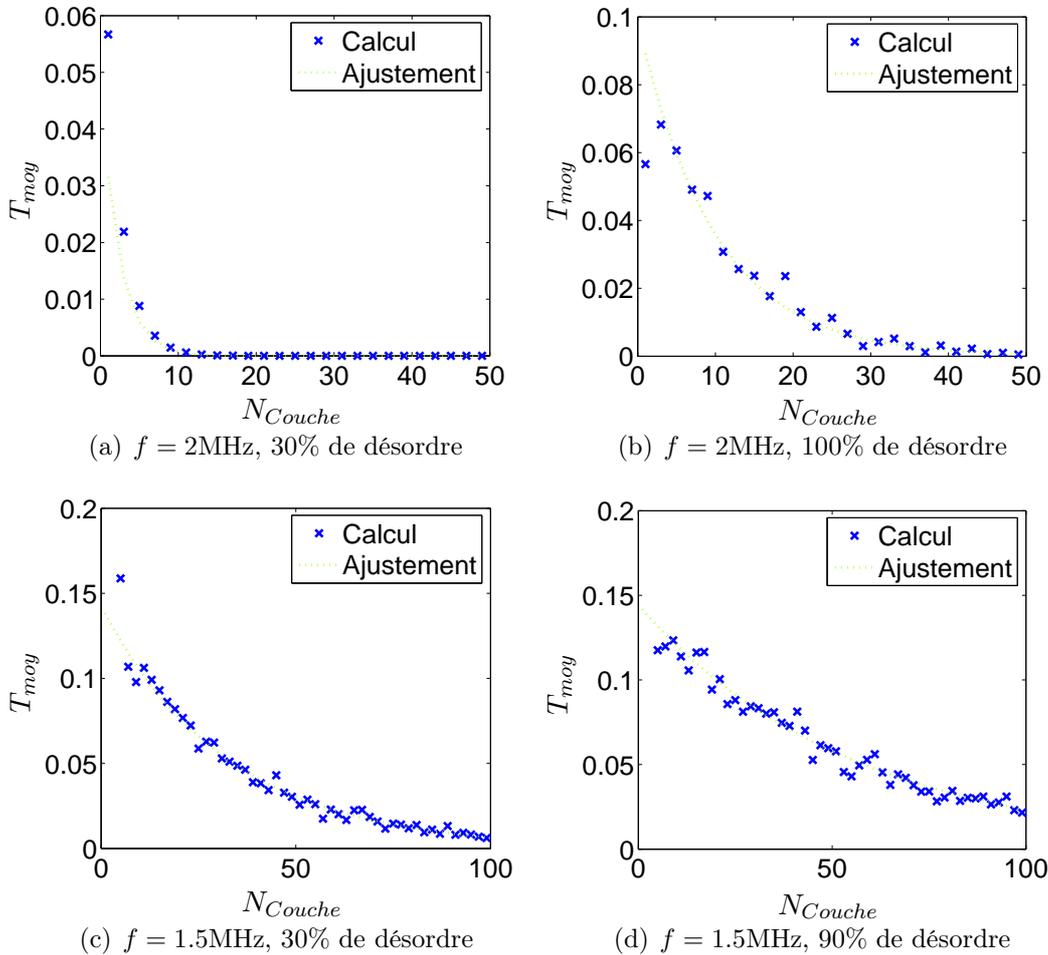


FIG. 2.14 – Moyenne du coefficient de transmission en fonction du nombre de couches à l'intérieur ($f = 2.4\text{MHz}$) ((a) et (b)) et à l'extérieur ($f = 1.5\text{MHz}$) des bandes interdites ((c) et (d)) pour différents degrés de désordre.

Comme dans le cas d'ajout de désordre par interversion de couche, la figure 2.14 montre que la moyenne du coefficient de transmission évolue en décroissance exponentielle avec l'augmentation du nombre de couches. La longueur de localisation est donc reliée au logarithme du coefficient de transmission (Fig. 2.15).

Les états localisés disparaissent rapidement (Fig. 2.15). En effet, la modification de la vitesse des couches se répercute directement sur la position des fréquences de résonance, et avec la moyenne, elles ont tendance à se recouvrir les unes les autres. La position des bandes interdites est toujours visible. Plus le désordre augmente, plus la vitesse moyenne dans l'empilement augmente ce qui a pour conséquence de déplacer

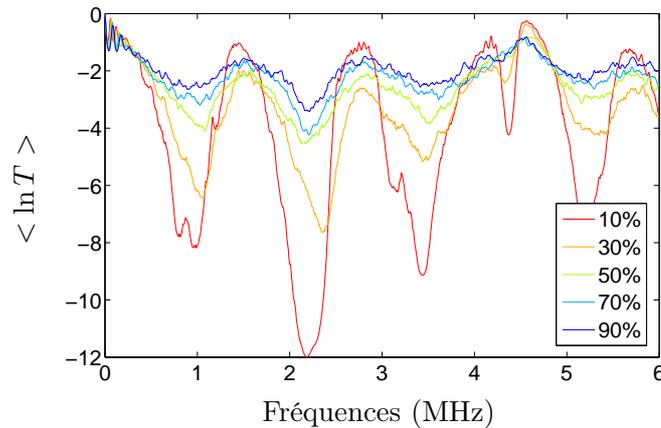


FIG. 2.15 – $\langle \ln T \rangle$ pour des empilements de désordre croissant.

les fréquences de résonance et des pseudo bandes interdites vers la droite.

Ce désordre permet “d’éteindre” les bandes interdites, de la même manière que dans l’article de Sigalas et Soukoulis [Sigalas *et al.*, 1996]. Il se rapproche d’une variation d’épaisseur. En effet, si l’on travaille par rapport au vecteur d’onde : un changement de la vitesse a le même effet qu’une modification de l’épaisseur (*cf.* 2.5.2.1). Le désordre est plus important du point de vue de la propagation acoustique que celui vu à la section précédente. Hors des bandes interdites la longueur de localisation n’évolue pas comme dans le cas précédent. Elle se rapproche de la moitié de la longueur totale de l’empilement. On a un phénomène de localisation faible.

2.4 Variations autosimilaires sur la suite de Fibonacci

2.4.1 Multicouches concaténés selon le mot de Fibonacci

Les structures quasi-périodiques basées sur la suite de Fibonacci (chapitre 1 paragraphe 1.1.4) sont de loin les plus étudiées. Moins d’un an après la découverte de la symétrie cristalline d’ordre 5 par Shechtman [Shechtman *et al.*, 1984], les premières expériences sur la diffusion des rayons X par un multicouche de Fibonacci en arsénure de Gallium et arsénure d’aluminium étaient publiées [Merlin *et al.*, 1985]. Les études successives concernant la propagation d’électrons au sein de potentiels quasi-périodiques de Fibonacci [Fu *et al.*, 1997; Kohmoto *et al.*, 1987b], d’onde électromagnétiques [Kohmoto *et al.*, 1987a; Gellermann *et al.*, 1994; Yang *et al.*, 1999; Aynaou *et al.*, 2005; Aissaoui *et al.*, 2006] et d’ondes élastiques [Fernández-Alvarez & Velasco, 1998; Hou *et al.*, 2004; Chen *et al.*, 2008], ont toutes démontré les propriétés particulières de cette structure. L’autosimilarité géométrique de la structure se répercute sur ses propriétés

spectrales. D'un ordre d'itération à l'autre, le coefficient de transmission présente une autosimilarité à plusieurs niveaux : processus de construction, répartition et forme des modes de résonance.

2.4.1.1 Concaténation de Fibonacci pour la construction d'empilements

Le processus de construction des empilements de Fibonacci est basé sur une opération de concaténation : l'empilement d'ordre n est formé de la concaténation des empilements d'ordre $n - 2$ et $n - 1$ (Tab. 2.3).

$$\begin{aligned}
 E_0 &= B \\
 E_1 &= A \\
 E_2 &= BA \\
 E_3 &= ABA \\
 E_4 &= BAABA \\
 E_5 &= ABABAABA \\
 &\dots \\
 E_N &= E_{N-2}E_{N-1}
 \end{aligned}$$

TAB. 2.3 – Concaténation basée sur la suite de Fibonacci pour la confection d'empilements unidirectionnels autosimilaires.

2.4.1.2 Cycle autosimilaire de période 6 pour certains modes de résonance

Dans cette sous-partie, nous nous appuyons sur les résultats des multiples études précédentes [Kohmoto *et al.*, 1987a; Gellermann *et al.*, 1994; Aynaou *et al.*, 2005] pour les comprendre et les adapter aux multicouches unidirectionnels “anisotropes”.

Le milieu environnant l'empilement est du même type que le milieu A . Les couches A et B sont orientées à 90° et 0° respectivement. Elles possèdent la même masse volumique ρ et épaisseur d , et des vitesses du son respectives c_{90} et c_0 .

Le coefficient de transmission, T , présente deux types de comportement : des zones de bandes d'arrêt et des zones où il est élevé. Les creux concordent avec les bandes interdites d'un milieu périodique constitué des couches A et B (courbe étoilée (Fig. 2.16 (a))). Les pics qui émergent des pseudo bandes interdites sont des états localisés dus au désordre introduit par la quasi-périodicité.

Kohmoto *et al.* [Kohmoto *et al.*, 1987a; Gellermann *et al.*, 1994] ont montré qu'il existe un invariant I constant à chaque étape de la procédure de construction :

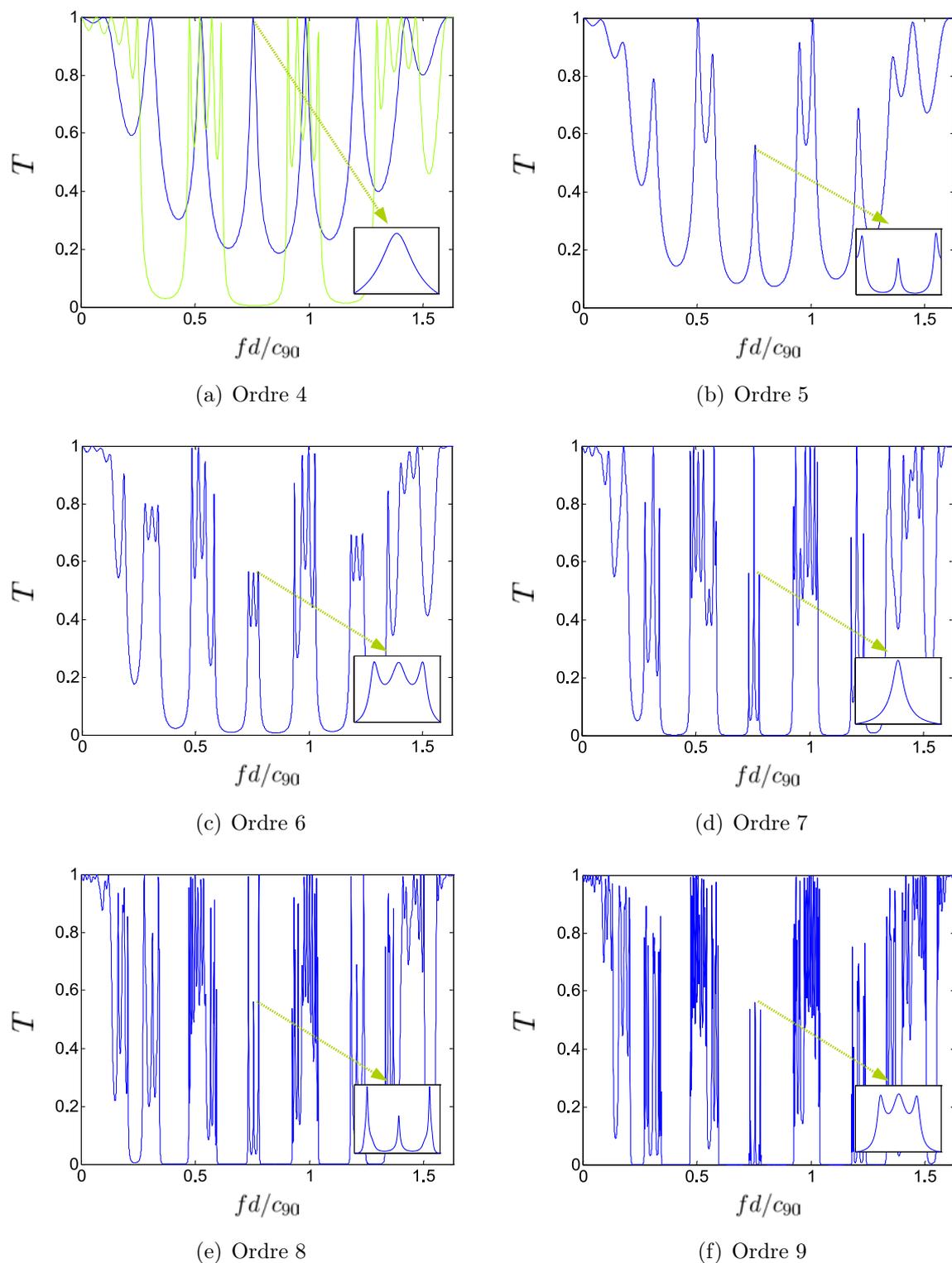


FIG. 2.16 – Coefficients de transmission, T , pour des structures de type Fibonacci de l'ordre 4 à l'ordre 9 en fonction des fréquences normalisées : fd/c_{90} . Chaque figure présente un grossissement du pic de fréquence normalisée $fd/c_{90} = 3/4$: le comportement autosimilaire cyclique est visible. La courbe étoilée de la figure (a) représente T pour un empilement périodique de même nombre de couches.

$$I = \frac{1}{4} \left(\frac{c_A}{c_B} - \frac{c_B}{c_A} \right)^2 \sin(\omega d/c_A)^2 \sin(\omega d/c_B)^2, \quad (2.16)$$

où c_A et c_B sont les vitesses du son respectives des couches A et B . I représente l'importance de l'effet de l'autosimilarité. Ils ont également démontré qu'un comportement autosimilaire du spectre pouvait être attendu autour des fréquences telles que I est maximum, c'est à dire pour

$$fd/c_A = (2m + 1)/4. \quad (2.17)$$

Etant donné le processus de construction, il est possible de montrer que le coefficient de transmission évolue selon un cycle de période 3 autour de ces fréquences [Kohmoto *et al.*, 1987b].

Nous pouvons vérifier ce phénomène sur le tracé du coefficient de transmission pour les différents ordres (Fig. 2.16). Autour de $fd/c_{90} = 3/4$ l'allure de T est identique pour les courbes d'ordres 4 et 7 ((a) et (d)), 5 et 8 ((b) et (e)) et 6 et 9 ((c) et (f)) et ainsi de suite. Dans le cas où le milieu extérieur est identique au milieu B , la périodicité est de 6.

Le facteur d'échelle, associé à cette similarité, est calculé théoriquement pour des ondes lumineuses [Kohmoto *et al.*, 1987a] et est rappelé par Aynaou *et al.* [Aynaou *et al.*, 2005] dans le cas d'ondes acoustiques, il est tel que :

$$\alpha = \sqrt{1 + 4(1 + I)^2} + 2(1 + I), \quad (2.18)$$

soit un agrandissement théorique $\alpha_{th} = 12,75$. Cette relation peut être vérifiée sur les tracés du pic de résonance pour l'ordre 6, l'ordre 9 et l'ordre 12 (Fig. 2.17).

Le facteur d'échelle calculé à partir du tracé du coefficient de transmission est de $\alpha_{sim} = 12,6$, soit un écart de 0,7% par rapport à la valeur théorique. Notre modèle concorde donc avec les études antérieures.

2.4.1.3 Autosimilarité de forme du coefficient de transmission

Considérons les mêmes empilements que précédemment entourés d'eau. Les coefficients de transmission des ordres 4 à 8 sont représentés sur la figure 2.18. Nous remarquons que le processus de construction des empilements est autosimilaire. D'un ordre à l'autre, les pics se divisent en deux. S'il existe une forte baisse de transmission entre deux pics successifs, une résonance apparaît au sein du creux (Fig. 2.18). Les baisses de transmission s'accroissent avec l'ordre car le nombre de sous-structures périodiques de l'empilement (responsables des bandes interdites) augmente avec l'ordre.

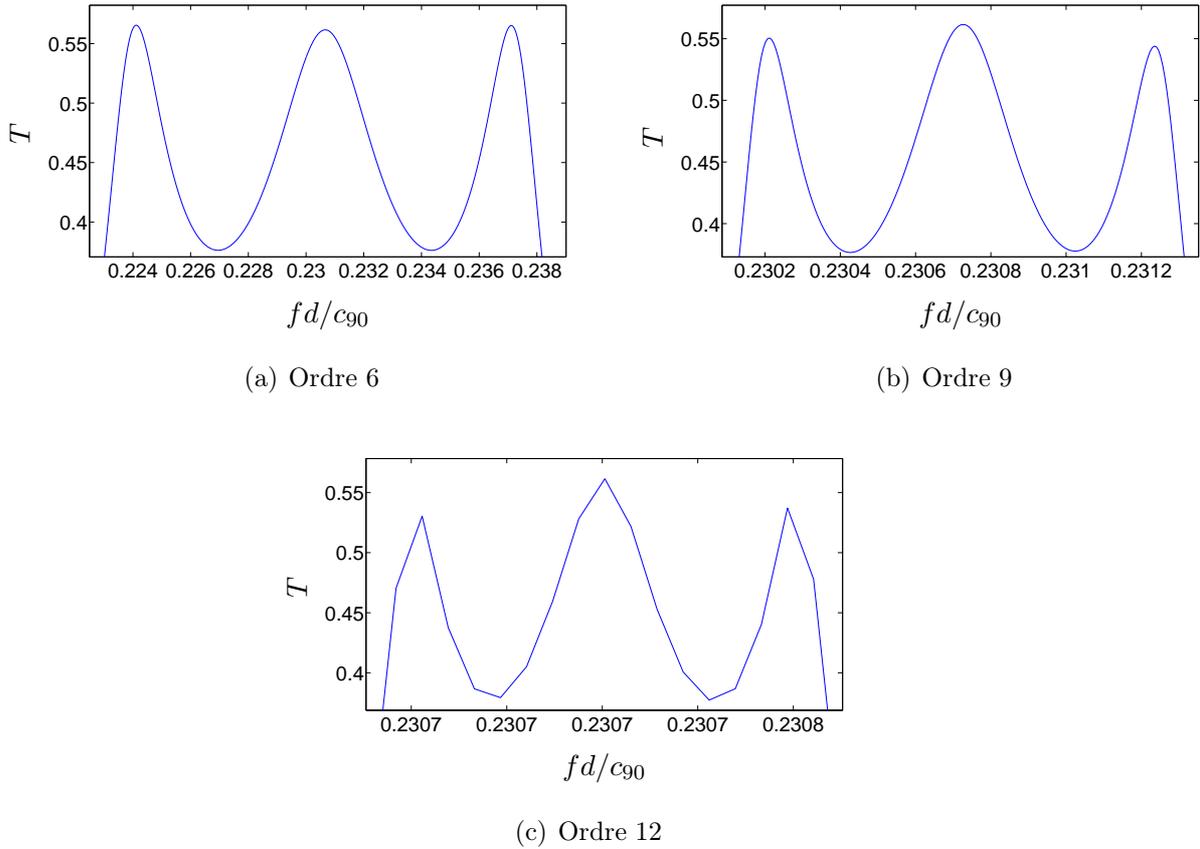


FIG. 2.17 – *Grossissement du pic de résonance en $fd/c_{90} = 0,2307$ pour le calcul du rapport d'homothétie α : ordre 6 (a), ordre 9 (b) et ordre 12 (c).*

2.4.1.4 Répartition des modes de résonances

Nous avons vu que lorsque le milieu comporte des défauts, les pics de résonance qui émergent dans les bandes interdites sont localisés. On parle de zones de quasi-localisation (notées Q.-L. sur la figure 2.19). En dehors des bandes d'arrêt, les états sont étendus (Et.).

Nous remarquons que dans les zones de quasi-localisation, la position des pics de résonance n'est pas uniforme (Fig. 2.19). Il a même été démontré par les auteurs cités précédemment que les états se localisent selon une poussière de Cantor. Cette propriété est une conséquence directe de la persistance des pseudo bandes interdites à tous les ordres d'itérations et de leur présence à différentes échelles.

Les figures 2.20 (a) et 2.20 (b) indiquent clairement une autosimilarité dans la répartition des modes de résonances.

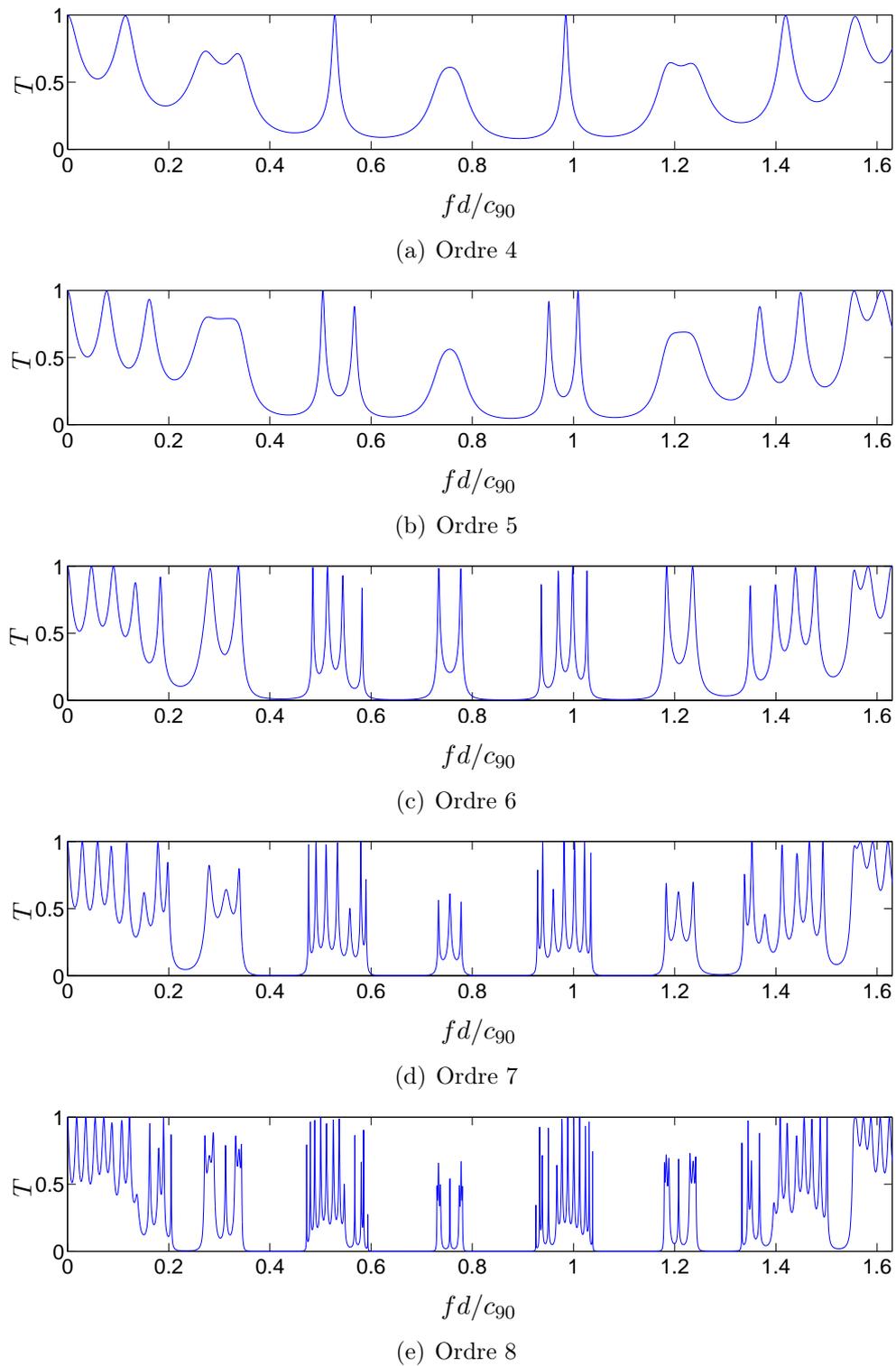


FIG. 2.18 – Coefficients de transmission pour les multicouches de Fibonacci : ordre 4 à 8.

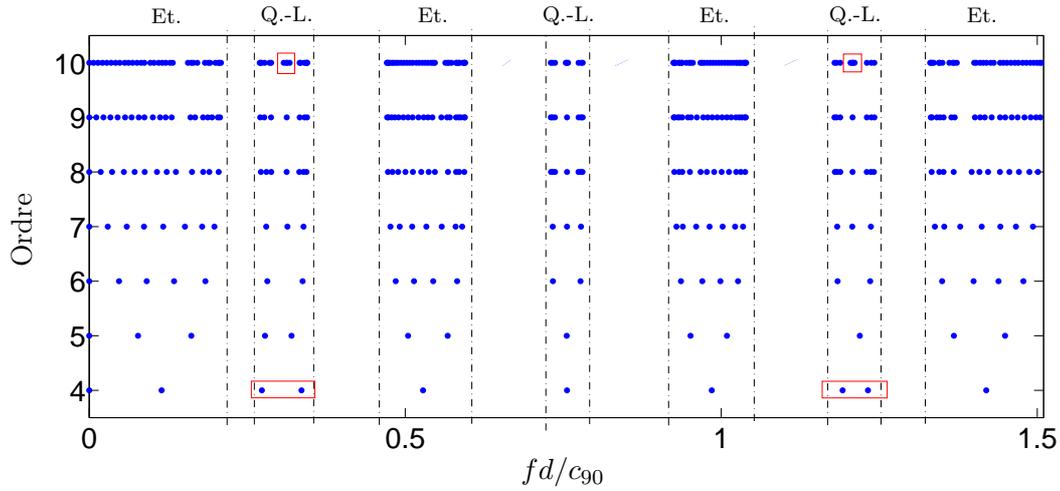


FIG. 2.19 – Position des résonances pour un empilement de Fibonacci pour les ordres 4 à 10.

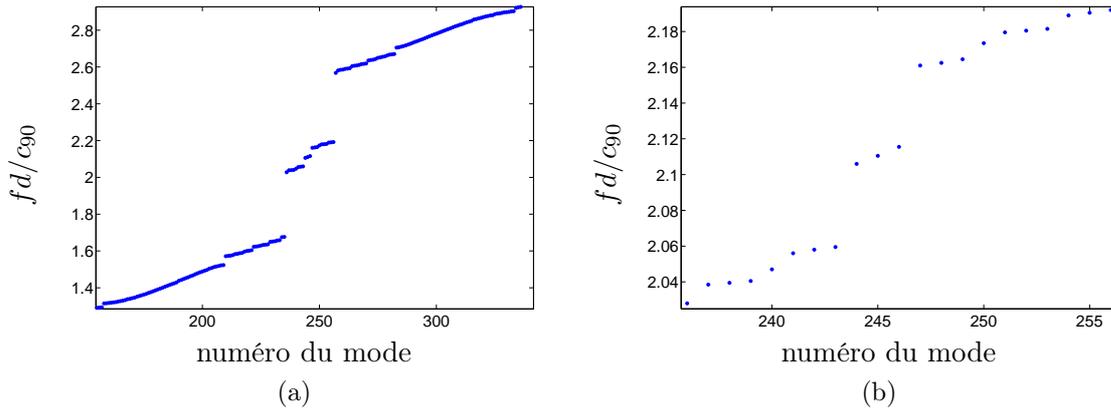


FIG. 2.20 – Autosimilarité de la position en fréquence des pics de résonance pour l'empilement de Fibonacci à l'ordre 12 (a) et grossissement (b).

2.4.1.5 Analyse de la structure géométrique de l'empilement pour l'explication des propriétés d'autosimilarité du coefficient de transmission

L'empilement de Fibonacci, pour un ordre donné, est très proche d'un empilement périodique de cellule élémentaire *BAA* de même nombre de couches. Leurs coefficients de transmission sont donc très semblables (Fig. 2.21).

Nous proposons ici une explication nouvelle pour comprendre la forme de ce coefficient de transmission. L'empilement de Fibonacci est assimilable à un empilement périodique de pas *BAA* comprenant des modifications d'épaisseur de la deuxième couche *A*. Celle-ci peut parfois avoir une épaisseur deux fois plus petite, et cela brise la périodicité. La comparaison des coefficients de transmission de l'empilement périodique *BAA*

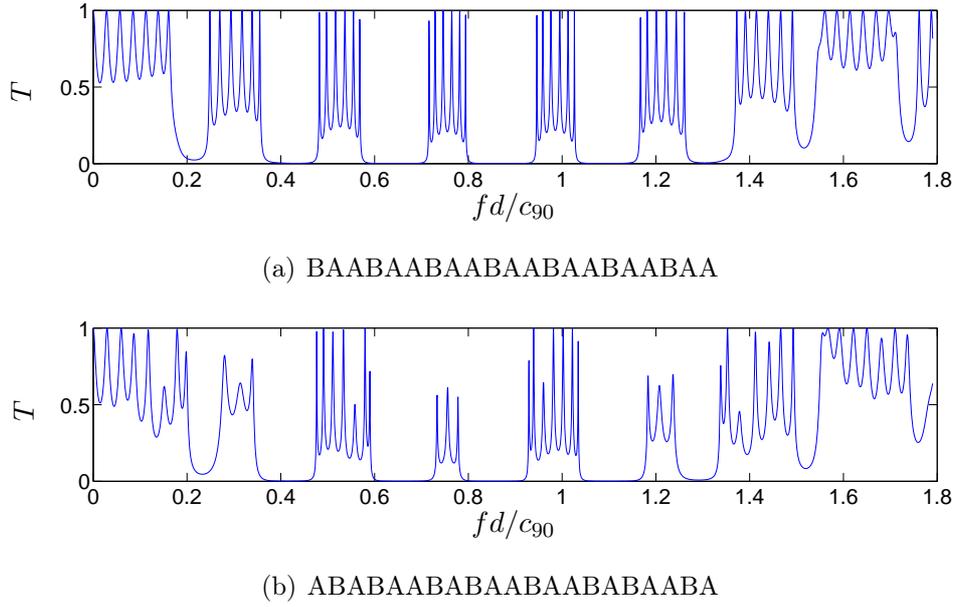


FIG. 2.21 – Coefficients de transmission pour un empilement périodique de cellule élémentaire BAA (a) et pour un empilement de Fibonacci à l'ordre 7 (b).

(Fig. 2.21 (a)), de l'empilement périodique AB (courbe étoilée de la figure 2.16 (a)) et de l'empilement de Fibonacci d'ordre 7 (Fig. 2.21 (b)) permet de déduire qu'il existe deux types de zones entre les pseudo bandes interdites. Les premières, centrées autour de $fd/c_{90} = (2m + 1)/4$ (Eq. 2.17), correspondant à la répétition du schéma BA , sont des zones où les modes sont étendus. Les secondes, centrées autour de $fd/c_{90} = m/2$ correspondant à la périodicité BAA , sont des zones de quasi-localisation.

N	Succession des couches	n_{BA}	n_{BAA}
4	BAABA	2	1
5	ABABAABA	3	1
6	BAABAABABAABA	5	3
7	ABABAABABAABAABAABA	8	4
8	BAABAABABAABAABAABAABAABAABAABAABAABA	13	8

TAB. 2.4 – Dénombrement des cellules BA et BAA dans les empilements de Fibonacci (ordre 4 à 8).

Ainsi, le nombre de modes dans les zones d'états étendus est relié au nombre de paires BA présentes dans l'empilement : $N_{\text{bande étendue } BA} = n_{BA} - 1$. Le nombre d'états quasi-localisés est relié au nombre de triplets BAA : $N_{\text{bande quasi-localisé } BAA} = n_{BAA} - 1$

(dans le cas où le motif se répète au moins 2 fois). Les courbes de la figure 2.18 et le tableau 2.4 sont en accord avec ces deux règles.

La construction des empilements étant autosimilaire, il est possible de déterminer analytiquement le nombre de pics dans les zones d'états étendus et les zones de quasi-localisation. Le coefficient de transmission des structures basées sur la concaténation d'empilements selon la suite de Fibonacci présente des propriétés caractéristiques de structures autosimilaires :

- la forme de certains pics suit un cycle autosimilaire ;
- d'un ordre à l'autre, le coefficient de transmission se construit suivant un processus déterministe ;
- présence de zones de quasi-localisation, de pseudo bandes interdites et de zones d'états étendus ;
- répartition autosimilaire des pics sur l'axe des fréquences.

Nous avons pu expliquer ces phénomènes en nous basant sur les études antérieures sur le sujet, en travaillant d'un point de vue vibratoire, et en analysant les structures pour comprendre et prévoir la position et le nombre de pics de résonance dans le spectre.

2.4.2 Suite de Fibonacci appliquée à l'orientation des plis

Les empilements de Fibonacci que nous nommons "angulaires" sont tels que l'orientation de la couche n vérifie $\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}$. Les multicouches sont donc constitués d'une succession de plis dont la vitesse croît pour des couches orientées de 0 à $\pi/2$ et décroît ensuite jusqu'à π , croît jusqu'à $3\pi/2$ et décroît jusqu'à 2π et ainsi de suite (Fig. 2.4).

La structure des coefficients de transmission de ces empilements est plus complexe que celles vues précédemment. Bien que l'arrangement des couches soit déterministe, la récursion sur les angles induit un grand nombre de vitesses dans l'empilement (Fig. 2.22).

La vitesse est une fonction sinusoidale de l'orientation de la couche. Les angles calculés par la suite de Fibonacci sont en degrés. Passé $\varphi_0 = 360^\circ$, les angles tournent sur le cercle trigonométrique et de même pour la vitesse. Les angles d'initialisation de la suite ont ainsi une importance capitale dans la répartition des vitesses au sein de l'empilement (Fig. 2.22).

Nous remarquons que dans certain cas, la succession de couches dans l'empilement revient sur elle même et crée un schéma périodique (Fig. 2.22 (c)). Notre but étant de créer des irrégularités déterministes, ces configurations ne sont pas les plus favorables. De plus, quand la suite de Fibonacci est initialisée avec des angles inférieurs à 10° (Fig.

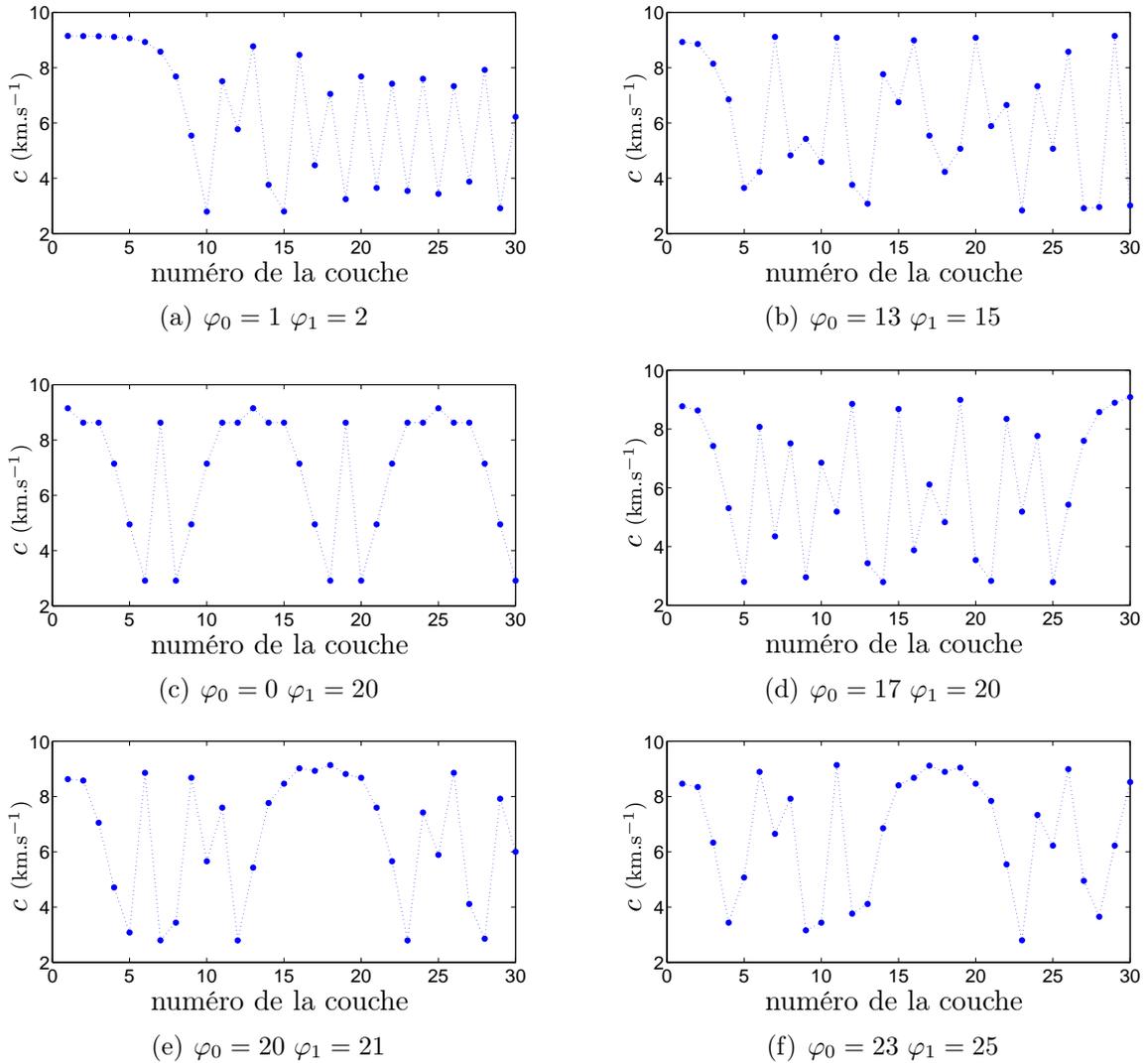


FIG. 2.22 – Répartition des vitesses de propagation des ondes, c en km.s^{-1} , dans les empilements de Fibonacci angulaires d'ordre 30 ($N = 30$) pour différentes initialisations de la suite.

2.22 (a)), il faut un certain nombre de couches pour que la vitesse varie subitement. Les premières valeurs de la suite balayent le cercle trigonométrique, avant de “sauter” d’une valeur à l’autre pour les angles élevés.

Nous étudierons trois types d’empilements à l’ordre 30 ($N = 30$ couches) : l’un initialisé avec des angles inférieurs à 10° , l’autre avec des angles initialisés au dessus de 20° et le dernier présentant une périodicité suivant l’empilement (c).

Les couches dont l’angle d’orientation est faible, qui possèdent donc une vitesse du son élevée, ont des fréquences de résonance élevées. De nombreux pics propres aux couches de vitesse différente émergent (Fig. 2.23). Nous notons également la présence de bandes de faibles transmission comprenant des pics localisés. Du fait de la multipli-

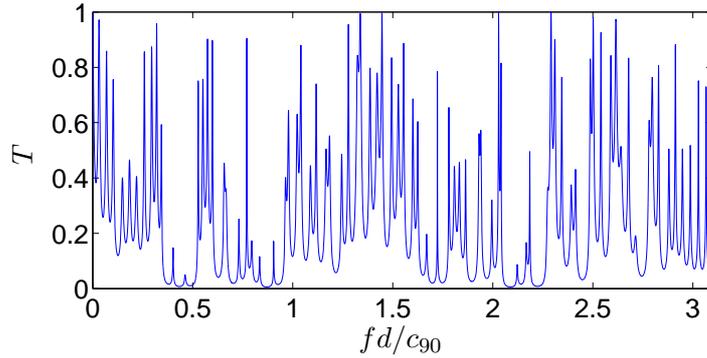


FIG. 2.23 – Coefficient de transmission de l’empilement de Fibonacci “angulaire” avec $\varphi_0 = 1^\circ$ et $\varphi_1 = 2^\circ$ (ordre 30).

cité des vitesses présentes dans l’empilement, les pseudo bandes interdites sont moins profondes et moins larges que celles des milieux périodiques, mais elles sont plus nombreuses. Cela est visible également sur le relevé de la position des pics en fonction de l’ordre (Fig. 2.24). Pour des ordres élevés, il est difficilement possible de repérer les baisses de transmission, car elles contiennent toujours des modes localisés. L’interprétation de ces figures doit donc être couplée aux courbes du coefficient de transmission.

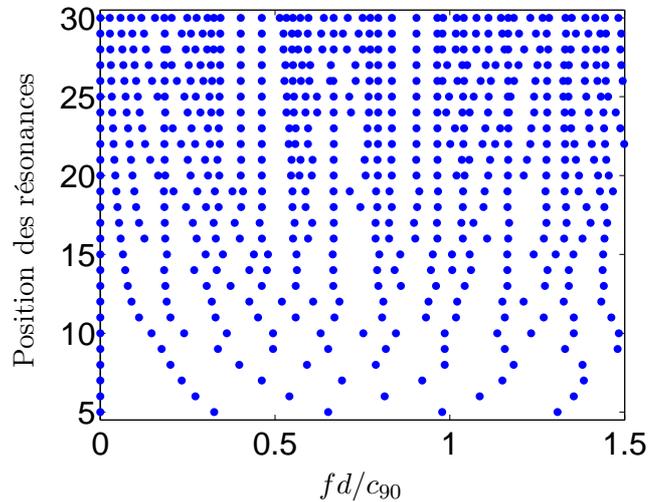


FIG. 2.24 – Positions des pics de résonance (ordre 5 à ordre 30) pour l’empilement de Fibonacci angulaire : $\varphi_0 = 1$ et $\varphi_1 = 2$.

Nous ne parlerons pas d’autosimilarité ici. En effet, la diversité des vitesses introduites dans l’empilement rend difficile l’identification d’un schéma autosimilaire. L’empilement de Fibonacci angulaire ouvre un grand nombre de possibilités pour la création d’empilements irr guli rs déterministes. L’étude précise de l’influence de l’ini-

tialisation sur la suite d'angles, et surtout sur les vitesses qui en découlent, ainsi qu'une "mesure du désordre" dans l'empilement, permettrait d'optimiser ces empilements pour qu'ils localisent mieux les ondes. La forme du coefficient de transmission, la répartition des pics de résonance et l'influence des conditions initiales font de cet empilement celui qui se rapproche intuitivement le plus du désordre.

2.5 Variations autosimilaires sur l'ensemble de Cantor

2.5.1 Empilement de Cantor d'autosimilarité géométrique

Les structures unidimensionnelles de type Cantor (chapitre 1 paragraphe 1.1.3) ont largement été étudiées pour les ondes électromagnétiques. Les articles traitant spécifiquement des ondes élastiques sont plus rares [Petri *et al.*, 1994; Bertaud du Chazaud & Gibiat, 2008; Gibiat *et al.*, 2003; Lavrinenko *et al.*, 2002]. L'autosimilarité de confection des empilements de type Cantor influence le coefficient de transmission des ondes sonores. Nous montrerons que ce dernier possède une allure et un processus de construction autosimilaires.

Pour $\gamma = 3$, l'empilement de Cantor en épaisseur est constitué de la succession de couches A et B telle que :

Ordre 1 : A

Ordre 2 : ABA

Ordre 3 : $ABABBBABA$

Ordre 4 : $ABABBBABABBBBBBBBBBABABBBABA$

...

2.5.1.1 Défauts et états localisés

L'empilement de Cantor en épaisseur est constitué de N couches, donc N oscillateurs couplés, d'épaisseur d et de vitesse du son c_n , ayant chacun pour fréquences de résonance $f_m = mc_n/2d$ ($m \in \mathbb{N}$). La première résonance correspond à la vibration de toute l'épaisseur de la structure, les autres sont associées aux vibrations de toutes les sortes de sous-couches. Alors qu'une structure constituée d'une seule couche présente des pics de résonance pour tous les multiples de sa fréquence propre, les modes de l'empilement de Cantor ne sont pas régulièrement distribués. Cela est dû au fait qu'il contient des hétérogénéités à des échelles multiples : B , ABA , BBB , AB etc...

L'empilement de Cantor présente une baisse de transmission qui correspond aux bandes interdites d'un milieu périodique (Fig. 2.25) :

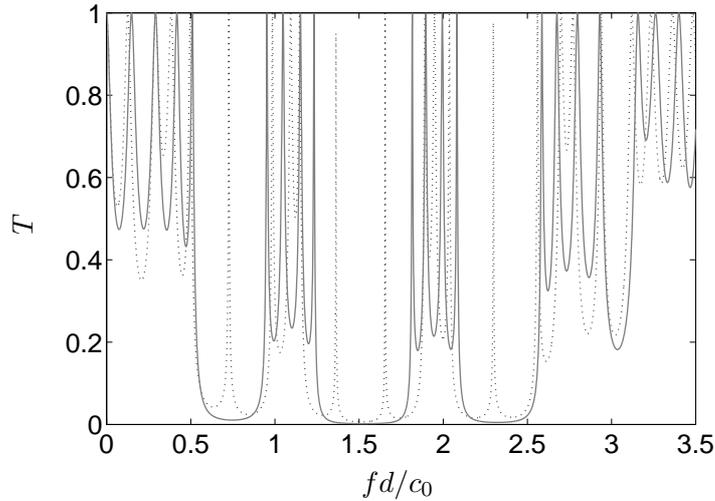


FIG. 2.25 – Comparaison du coefficient de transmission d'un empilement périodique (ligne grise pleine) et d'un empilement triadique de Cantor $\gamma = 3$ d'ordre 2 (ligne en pointillés noire) ($N = 9$ couches).

- pour la première bande interdite : $fd/c_0 \in [0, 4; 0, 98]$ pour l'empilement de Cantor et $fd/c_0 \in [0, 5; 0, 95]$ pour le cas périodique ;
- pour la seconde bande interdite : $fd/c_0 \in [1, 14; 1, 89]$ pour l'empilement de Cantor et $fd/c_0 \in [1, 23; 1, 81]$ pour le cas périodique ;
- pour la troisième bande interdite : $fd/c_0 \in [2, 03; 2, 56]$ pour l'empilement de Cantor et $fd/c_0 \in [2, 08; 2, 58]$ pour le cas périodique.

Cependant, une résonance apparaît près de la fréquence centrale de la bande interdite. Une seule chose change entre l'empilement périodique et l'empilement triadique de Cantor à l'ordre 2 : la couche centrale à 0° est remplacée par une couche à 90° . L'empilement de Cantor comprend donc une couche centrale résonante d'épaisseur $3d$: *BBB* entourée de deux couches *ABA* (Fig. 2.26).

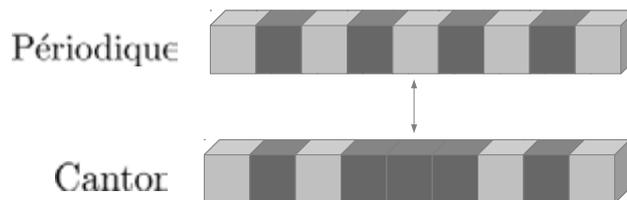


FIG. 2.26 – L'empilement de Cantor est un empilement périodique comprenant un défaut.

Cela rappelle les phénomènes vus pour les systèmes très faiblement désordonnés :

l'introduction d'un défaut dans la structure périodique fait apparaître un état localisé interdit dans la structure périodique (paragraphe 2.3.3). Le même phénomène a lieu pour les ondes électromagnétiques dans une structure de Fabry-Perot. La figure 2.27 illustre cette propriété pour les ordres supérieurs. Elle représente les positions des pics de résonance pour des empilements de Cantor de l'ordre 2 à l'ordre 4 et pour des empilements périodiques de même nombre de couche.

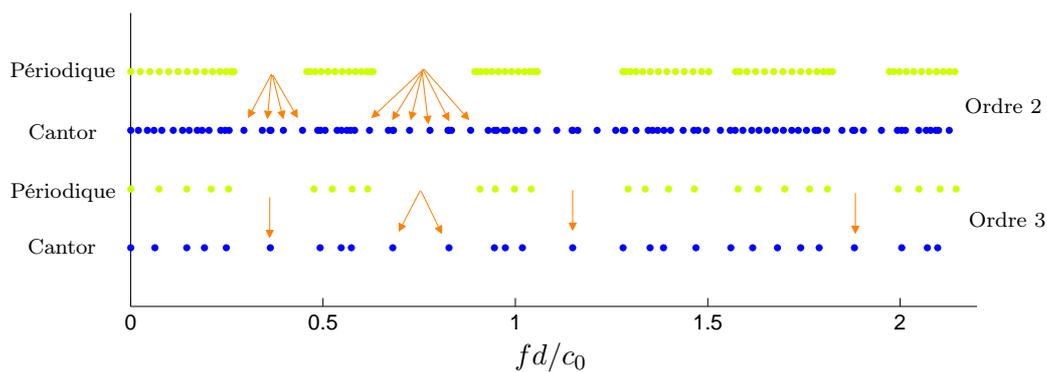


FIG. 2.27 – Position des résonances en fonction de la fréquence normalisée : $f = fd/c_0$: apparition d'états localisés au sein des bandes interdites du multicouche périodique.

Nous constatons également que les “bandes interdites” de la structure en Cantor sont plus larges que celles des empilements périodiques associés. Ces résultats sont en accord avec les articles précédemment cités . Tout en étant déterministe, l'empilement de Cantor permet d'introduire des défauts, donc du désordre, dans la structure périodique. Nous verrons dans la suite que cette propriété est caractéristique des milieux quasi-périodiques ou autosimilaires.

2.5.1.2 Coefficient de transmission autosimilaire

L'une des autres propriétés connues de l'empilement de Cantor en épaisseur est la répercussion de l'autosimilarité géométrique en une autosimilarité fréquentielle. Les processus de construction géométriques répétitifs sont directement en rapport avec les longueurs d'ondes correspondantes [Gibiat *et al.*, 2003; Lavrinenko *et al.*, 2002]. A épaisseur de couche élémentaire constante, l'autosimilarité géométrique de l'ensemble de Cantor fait que la structure à l'ordre $n + 1$ contient toutes les structures d'ordres inférieurs et est trois fois plus épaisse que la structure d'ordre n . Cela crée une dilatation du coefficient de transmission sur l'axe des fréquences (Fig. 2.28).

Même si le coefficient de transmission devient complexe avec l'ordre, le spectre

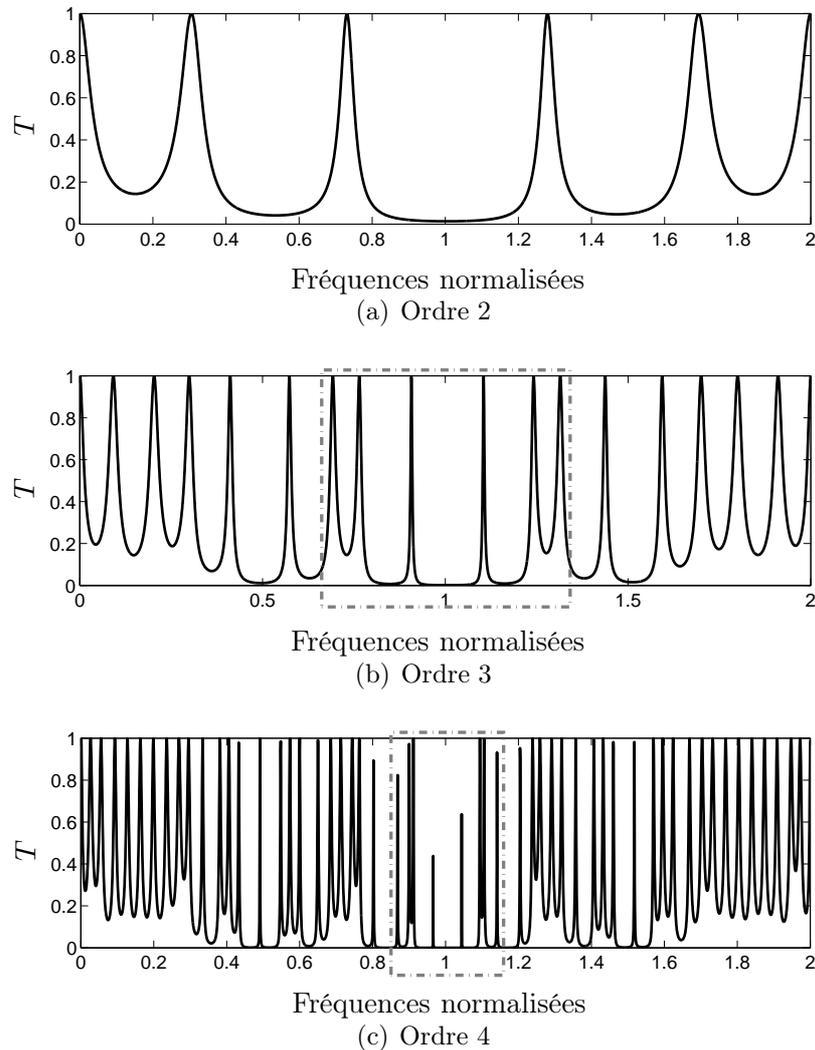


FIG. 2.28 – *Loi d'échelle et autosimilarité géométrique de la structure de Cantor en épaisseur. Les fréquences sont normalisées par rapport à la fréquence centrale de la bande interdite pour que le facteur d'homothétie soit visible.*

de l'ordre 2 se retrouve dans celui de l'ordre 3, et pareillement pour les ordres 3 et 4 (parties encadrées en gris Fig. 2.28 (a), (b) et (c)). La largeur fréquentielle de ce spectre "commun" est divisée par trois d'une étape à l'autre.

Nous retrouvons une propriété mise en évidence par Lavrinenko : la répartition des résonances d'une étape à l'autre est quasiment autosimilaire. En effet, de l'ordre 2 à l'ordre 3, chaque résonance est divisée en 2 pics, et un pic fin apparaît à l'intérieur des bandes interdites. La structure d'ordre $N + 1$ contient $(3 + 1)/2$ fois la structure d'ordre N . Ainsi, le pic de résonance dû à la cellule ABA se dédouble quand l'ordre augmente. De plus, l'introduction de nouvelles cellules résonantes, non présentes à l'ordre N est

responsable de l'apparition de pics isolés au sein des bandes interdites.

2.5.1.3 Transmission et dimension fractale

L'autosimilarité influence l'allure du coefficient de transmission. Elle est reliée à la dimension fractale de l'empilement D . Nous allons étudier l'influence de D sur la forme du coefficient de transmission.

Lors de la création des empilements de Cantor plusieurs paramètres rentrent en compte. Le premier est γ : le nombre de subdivisions du segment (égal à 3 pour l'empilement de Cantor triadique). Nous allons expliquer l'effet de ce paramètre en calculant les coefficients de transmission pour des empilements de Cantor avec $\gamma = 5$ et $\gamma = 7$ (Fig. 2.29).

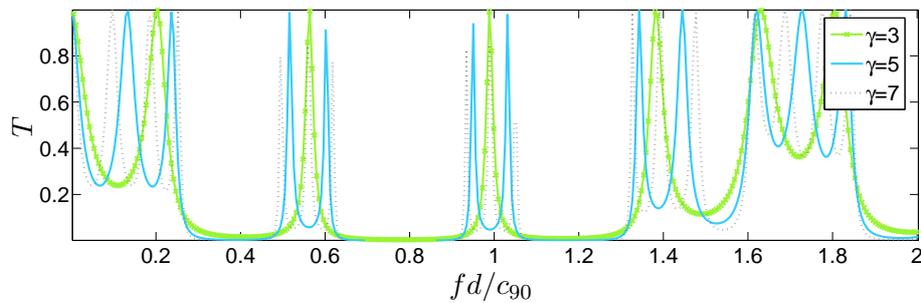


FIG. 2.29 – Coefficient de transmission en fonction de fd/c_{90} (fréquences normalisées), pour les structures de Cantor $\gamma = 3, 5, 7$ à l'ordre 1.

Nous remarquons que suivant la valeur de γ le coefficient de transmission présente $(\gamma - 1)/2$ pics de résonance au sein des pseudo bandes interdites. Ce nombre d'apparitions correspond au nombre d'exemplaires de la cellule élémentaire ABA apparaissant dans la structure. Cela revient au même problème que précédemment avec l'apparition de nouveaux pics avec l'ordre.

L'arrangement de Cantor triadique est construit en séparant l'empilement en trois segments égaux et en en sélectionnant les deux extrémités ($\alpha = 1/3$). Si au lieu de séparer le segment en trois parts égales, nous modifions la proportion des deux segments extrêmes (par exemple $\alpha = 1/4$), nous modifions le rapport d'homothétie et donc la loi d'échelle du coefficient de transmission.

Dimension fractale et spectre

Ainsi, un pic isolé au centre d'une bande interdite correspond à $\gamma = 3$, un doublet, à $\gamma = 5$ et un triolet, à $\gamma = 7$ (Fig. 2.29). Nous avons vu que le paramètre α est relié

au rapport d'homothétie (géométrique et fréquentielle) d'un ordre à l'autre. Il est ainsi possible, en observant le spectre d'une structure de Cantor, de connaître les paramètres α et γ et de remonter ainsi à la structure géométrique du matériau et à sa dimension fractale. Est-il possible en observant la forme du spectre en fréquence d'un matériau quelconque, de remonter à sa dimension fractale, et à sa structure géométrique ? D'une manière plus générale, le spectre retranscrit l'autosimilarité géométrique à condition que les longueurs d'onde soient du même ordre de grandeur que les hétérogénéités. Il serait intéressant de pouvoir automatiser les processus de comptage, de comparaison des spectres avec celui du périodique pour remonter à ces deux paramètres.

2.5.2 Empilement de Cantor d'autosimilarité angulaire

Après avoir étudié les empilements de Cantor en épaisseur, nous allons étudier des empilements dits de Cantor en "angle" décrits au chapitre 1 (paragraphe 1.6). Le processus autosimilaire de construction porte alors sur l'angle d'orientation des couches. D'un ordre à l'autre, les multicouches de Cantor angulaires possèdent une géométrie autosimilaire : l'ordre $N-1$ se retrouve dans l'ordre N . Le spectre de la structure d'ordre $N+1$ contient donc le spectre de l'ordre N et il est possible de montrer l'existence d'un rapport d'homothétie à partir de l'analyse de la proportion de la structure d'ordre N par rapport à celle d'ordre $N+1$ (Eq. 2.23).

2.5.2.1 Equivalence vitesse-épaisseur

L'empilement de Cantor angulaire s'écrit :

$$\left[0 \frac{\varphi_0}{\gamma^N} 0 \dots 0 \frac{\varphi_0}{\gamma} 0 \varphi_0 0 \frac{\varphi_0}{\gamma} 0 \dots 0 \frac{\varphi_0}{\gamma^N} 0 \right]. \quad (2.19)$$

Les modifications d'orientation créent une différence de vitesse de propagation des ondes longitudinales. Du point de vue de la propagation d'ondes acoustiques, il est possible de créer des empilements constitués de seulement deux orientations différentes équivalents en variations d'épaisseur. Une couche L_1 d'épaisseur δ_1 possédant une célérité des ondes sonores c_1 est équivalente à une couche L_0 d'épaisseur $\delta_0 = c_0\delta_1/c_1$ et de célérité des ondes c_0 .

Cela peut être démontré à partir de l'écriture de la matrice de transfert d'une couche (Eq. 2.3). L'équivalence entre vitesse et épaisseur revient à travailler à $\Phi = k_z h = \frac{\omega}{c} h$ constant (Eq. 2.21).

En effet, pour la couche L_1

$$\Phi_1 = \frac{\omega}{c_1} \delta_1, \quad (2.20)$$

et pour la couche L_0 :

$$\Phi_0 = \frac{\omega}{c_0} \delta_0 = \frac{\omega}{c_0} \frac{c_0 \delta_1}{c_1} = \Phi_1. \quad (2.21)$$

Ainsi, pour un empilement où les vitesses de couche varient, il est possible de construire un empilement équivalent en variation d'épaisseur (plus facile à interpréter en terme de propagation acoustique).

La figure 2.30 montre la correspondance entre un empilement de Cantor angulaire $\gamma = 3$ avec $\varphi_0 = \pi/2$ et un empilement équivalent en terme d'épaisseur composé de deux types de plis orientés à 0 et $\pi/2$.

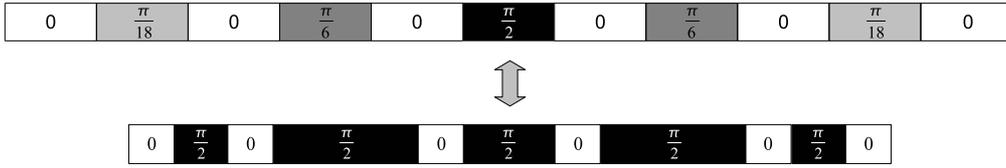


FIG. 2.30 – *Equivalence entre un multicouche de Cantor angulaire ($\gamma = 3$, couche centrale orientée à $\pi/2$, ordre 3) et d'un empilement équivalent en épaisseur avec des couches orientées à 0 et $\pi/2$.*

2.5.2.2 Rapport d'homothétie des empilements en angle

Avec des empilements équivalents en épaisseur, nous pouvons calculer la loi d'échelle qui gouverne la construction de l'empilement de Cantor angulaire à partir de la structure géométrique des différents ordres. A l'ordre N , la longueur totale de l'empilement est :

$$L_N = \delta \left(2N + 1 + 2 \sum_{n=1}^N \frac{c(\varphi_0)}{c(\varphi_0/\gamma^n)} \right). \quad (2.22)$$

Le rapport d'homothétie, H , entre l'ordre $N - 1$ et l'ordre N est donné, après quelques calculs, par (Eq. 2.23) :

$$H = \frac{N - 1/2 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{c(\varphi_0)}{c(\varphi_0/\gamma^n)}}{N + 1/2 + \sum_{n=1}^N \frac{c(\varphi_0)}{c(\varphi_0/\gamma^n)}}. \quad (2.23)$$

Il dépend donc de l'ordre de la structure.

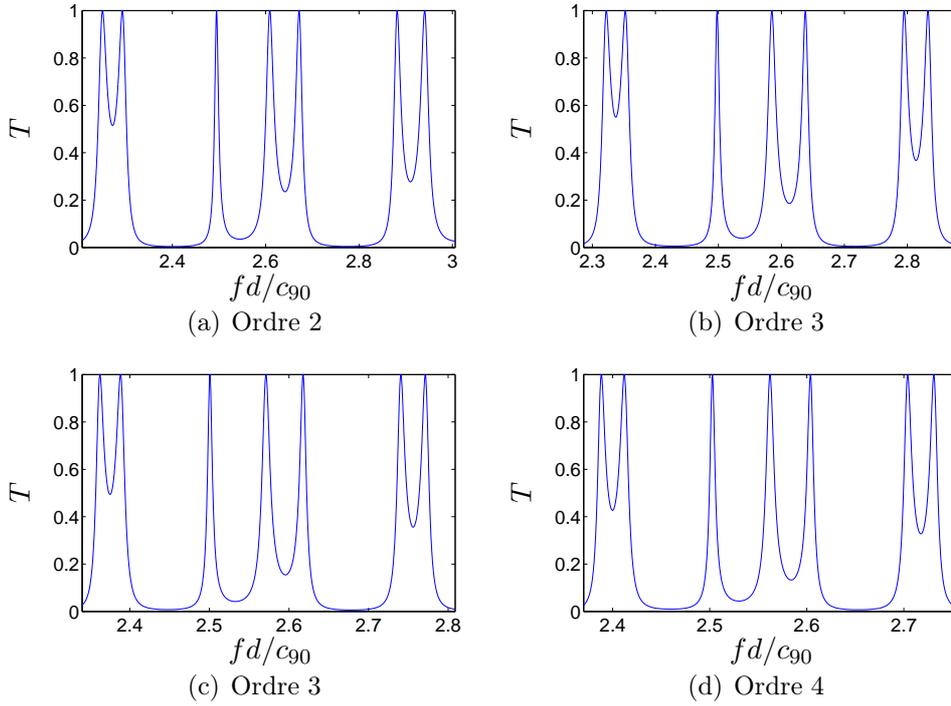


FIG. 2.31 – Coefficient de transmission pour l'empilement de Cantor angulaire ($\varphi_0 = \pi/2$). Loi d'échelle et autosimilarité de l'ordre 2 (Fig. 2.31 (a)) à l'ordre 5 (Fig. 2.31 (d)).

Nous remarquons que contrairement aux empilements “en épaisseur”, le coefficient de transmission ne présente pas de processus autosimilaire. Les coefficients de transmission des ordres 2 à 5 sont représentés sur la figure 2.31. Tous les ordres possèdent un pic commun autour de $fd/c_{90} = 2,5$ et l'échelle en fréquence se contracte quand l'ordre augmente. Cette contraction est en très bon accord avec le rapport d'homothétie théorique (Eq. 2.23). Le tableau 2.5 présente une comparaison entre les valeurs retrouvées à partir des spectres et les valeurs théoriques.

Ordre	2 à 3	3 à 4	4 à 5	5 à 6
Théorie	0,701	0,748	0,796	0,843
Simulation	0,7	0,740	0,801	0,837

TAB. 2.5 – Rapports d'homothétie théorique (Eq. 2.23) et calculé à partir des coefficients de transmission de l'empilement de Cantor angulaire (Fig. 2.31).

2.5.2.3 Influence de γ

Plus γ augmente, plus les couches externes se rapprochent d'une couche unidirectionnelle car φ_0 est divisé par des nombres de plus en plus grands : γ^{N-1} . Le contraste entre la couche centrale, orientée à φ_0 et les autres couches augmente. Ainsi, la forme générale du coefficient de transmission, à un ordre donné, est très similaire d'une valeur de γ à l'autre (Fig. 2.32).

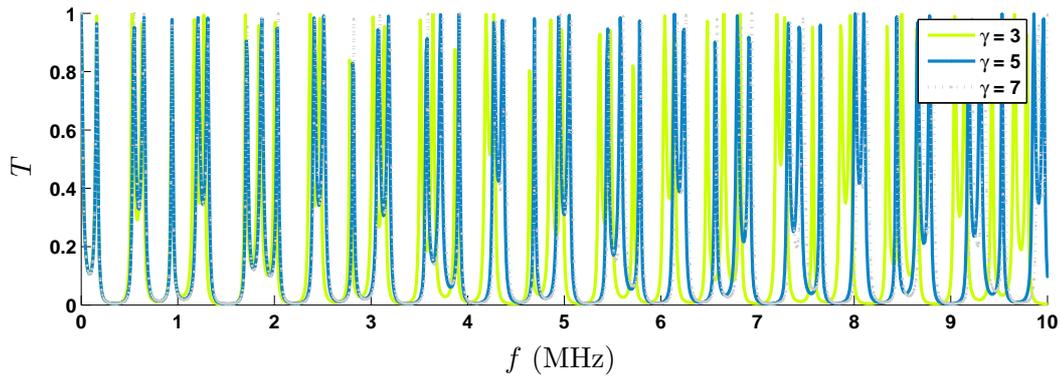


FIG. 2.32 – Comparaison du coefficient de transmission de l'empilement de Cantor en angle à l'ordre 3 pour $\varphi_0 = \pi/2$ et $\gamma = 3, 5, 7$.

L'augmentation de γ produit un décalage vers les hautes fréquences. En effet, quand γ augmente, la vitesse du son dans les couches augmente et l'épaisseur totale de l'empilement en épaisseur équivalente diminue. Les fréquences de résonance ($\propto 1/\delta$) augmentent donc avec γ .

Pour les empilements de Cantor angulaires, γ nous permet de contrôler (pour un ordre donné), la position des bandes "interdites" en fréquence, ou celle des pics de résonance.

2.5.2.4 Caractérisation de l'empilement de Cantor en angulaire

En terme de contraste d'impédance, les ondes acoustiques se propageant dans un empilement de Cantor angulaire rencontrent une rupture d'impédance périodique, mais la valeur du contraste change à chaque cellule élémentaire. En terme d'épaisseur équivalente, la rupture d'impédance est la même tout au long de la structure, mais la longueur de la deuxième couche de la cellule périodique change. Cela peut expliquer la présence de pseudo bandes interdites visibles sur le coefficient de transmission. Etant donné que le milieu n'est pas exactement périodique, et que le contraste entre couches est fort au centre de la structure et plus faible sur les bords, les baisses de transmission ne sont

pas aussi fortes que des bandes interdites. En revanche, elles sont plus nombreuses, car de nombreux motifs apparaissent deux fois dans la structure. L'empilement de Cantor angulaire est donc comme un milieu **quasi-périodique**.

2.6 Comparaison des empilements périodique, aléatoire, de Cantor et de Fibonacci

Pour comparer globalement la transmission des différents empilements, nous utilisons le rapport de l'aire sous la courbe du coefficient de transmission comparativement à une transmission totale (nous appelons cette grandeur *ratio en transmission* et la notons τ) :

$$\tau = \frac{1}{f_2 - f_1} \int_{f_1}^{f_2} T_{\text{stack}}(f) df. \quad (2.24)$$

τ ne nous informe pas sur l'allure précise du coefficient de transmission, mais il permet une comparaison globale des effets des pseudo bandes interdites (profondeur, nombres). Le nombre de couches N dans les différents empilements est ajusté sur le nombre de couches de l'empilement de Cantor en épaisseur pour les ordres 2 à 5 (respectivement $N = 3, 9, 27, 81$). Nous considérons les multicouches suivants :

- Cantor autosimilaire dans l'épaisseur : $\gamma = 3$, $\varphi_0 = 0^\circ$ et $\varphi_1 = 90^\circ$;
- périodique : $[0^\circ \ 90^\circ]_{N/2}$;
- Cantor autosimilaire en angulaire : $\gamma = 3$ et orientation centrale : $\varphi_0 = 90^\circ$;
- Fibonacci concaténé : $\varphi_0 = 0^\circ$ et $\varphi_1 = 90^\circ$;
- Fibonacci angulaire : $\varphi_0 = 1^\circ$ et $\varphi_1 = 2^\circ$ (I) et $\varphi_0 = 9^\circ$ et $\varphi_1 = 25^\circ$ (II) ;
- aléatoire : orientation de chaque couche choisie au hasard parmi les orientations présentes dans l'empilement de référence (Fibonacci I, Fibonacci II, Cantor autosimilaire en épaisseur ou Cantor autosimilaire en angle), pour les empilements aléatoires, $\tau = \langle \tau \rangle_{50}$ (moyenne de τ sur 50 réalisations).

Pour plus de lisibilité, les résultats associés aux empilements de Cantor et de Fibonacci sont présentés sur deux figures distinctes (Fig. 2.33 (a) et (b)).

De manière générale, l'augmentation de l'ordre est synonyme d'une baisse de τ car les motifs périodiques (ou quasi-périodiques) sont plus présents et donc les pseudo bandes interdites s'approfondissent et les pics s'affinent. Pour les arrangements de Cantor, l'empilement en angle est plus proche du périodique que l'empilement en épaisseur. Le multicouche de Fibonacci en épaisseur transmet globalement moins les ondes acoustiques que son homologue en Cantor. Les empilements déterministes avec varia-

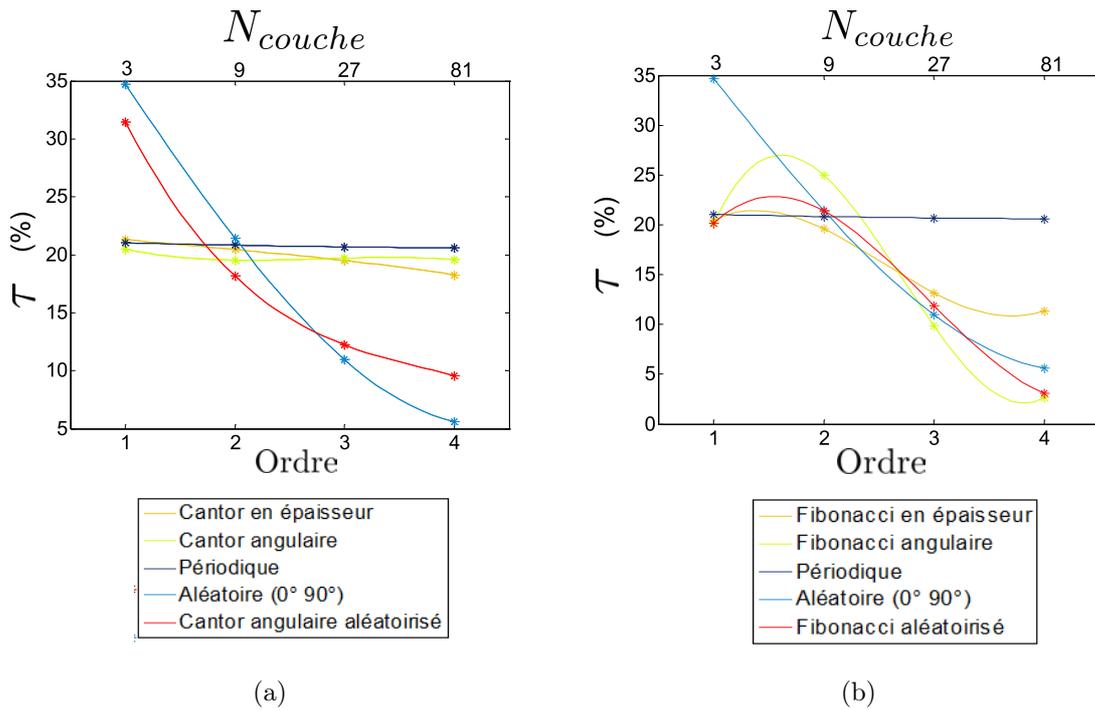


FIG. 2.33 – Comparaison du ratio en transmission des empilements de Cantor (a) et de Fibonacci (b) avec les empilements périodiques et aléatoires associés en fonction de l'ordre de l'empilement de Cantor présentant une autosimilarité dans l'épaisseur. Les points sont reliés pour faciliter la lecture.

tion angulaire montrent des efficacités comparables à celle des milieux aléatoires dès l'ordre 3. L'initialisation de l'empilement influence le "degré de désordre". Le processus de fabrication des multicouches de Fibonacci angulaires restant déterministe, le degré de désordre dans ces deux empilements est plus important que celui introduit par l'autosimilarité dans l'épaisseur. Le ratio en transmission τ permet de comparer la quasi-périodicité des empilements en les situant plus ou moins proches des empilements périodiques ou désordonnés.

Contrairement aux autres arrangements, l'empilement périodique et l'empilement de Fibonacci concaténé comprennent des bandes interdites sans états localisés. Pour les autres, les bandes interdites sont plus petites et parsemées d'états localisés, mais elles sont profondes, et la figure 2.33 montre que l'apparition des modes localisés ne compromet pas la capacité d'atténuation sonore des empilements (au contraire).

2.7 Conclusion : de la périodicité au désordre en passant par la quasi-périodicité

2.7.1 Récapitulatif des principaux résultats

Le modèle de propagation de la matrice de transfert en milieu fluide nous a permis d'étudier et de mettre en avant les caractéristiques de la propagation dans des milieux périodiques, désordonnés, et, à mi-chemin entre les deux, quasi-périodiques. Notre modèle permet de mettre en évidence que les milieux périodiques unidimensionnels présentent des bandes interdites en accord avec les résultats de la littérature. Les milieux désordonnés possèdent quant à eux la possibilité de localiser les ondes dans les zones des bandes interdites des milieux périodiques.

Nous avons ensuite caractérisé la propagation des ondes dans des milieux autosimilaires. Qu'ils soient basés sur l'empilement de Cantor ou de Fibonacci, leur autosimilarité géométrique apparaît dans la forme du coefficient de transmission et dans la répartition de leurs modes de résonance. Il est ainsi possible de connaître théoriquement les propriétés de ces structures pour les utiliser pour des applications (filtres sélectifs par exemple). De plus, que ce soit pour les empilements où l'autosimilarité s'exerce sur l'épaisseur des couches, ou ceux où elle s'applique sur leur orientation, de nombreux paramètres permettent de faire varier les caractéristiques géométriques. Ils peuvent ainsi permettre, si leurs effets sont compris et connus, d'optimiser les empilements en fonction de l'utilisation visée.

La comparaison des différents empilements nous a également permis de constater qu'à faible nombre de couches, les empilements autosimilaires unidimensionnels sont quasi-périodiques. Leurs propriétés se situent entre celles des milieux périodiques et désordonnés : bandes interdites et localisation. Avec l'augmentation de l'ordre, certains peuvent permettre d'atteindre les mêmes caractéristiques globales que les milieux désordonnés tout en étant déterministes.

2.7.2 Perspectives

La diversité des empilements autosimilaires et les résultats obtenus dans ce chapitre soulèvent des questions fondamentales.

- Comment mesurer le degré de désordre de la structure ?
- Quel est l'indicateur pertinent, décrivant la structure géométrique, qui permettrait de prédire leurs performances ?
- Peut-on, à partir du coefficient de transmission caractériser le degré d'autosimilarité ou de désordre d'une structure ?

- Comment adapter le désordre et les processus déterministes par rapport à des objectifs et des structures précis ?
- Comment créer des désordres capables d'agir pour un faible nombre de couches ?

La réponse à ces questions ne peut se faire qu'en prenant en compte les échelles de travail et en comprenant les phénomènes physiques qui rentrent en jeu pour contribuer à l'atténuation sonore.

CHAPITRE 3

Propagation d'ondes élastiques dans des matériaux composites autosimilaires

Le chapitre précédent nous a permis, grâce à un modèle de propagation simplifié, de mettre en avant les propriétés des milieux autosimilaires du point de vue de la propagation des ondes acoustiques. Nous avons souligné les propriétés géométriques qui conduisent à un comportement entre ordre et désordre. Et nous avons identifié les paramètres géométriques jouant un rôle prépondérant pour la diminution de la transmission des ondes. Nous allons ainsi pouvoir adapter ces résultats au cas concret des composites stratifiés renforcés de fibres de carbone.

Le choix des drapages étudiés expérimentalement s'est fait parallèlement au développement d'un code de calcul numérique pour simuler analytiquement la propagation des ondes dans les matériaux multicouches anisotropes. Pour mettre en évidence l'influence de l'autosimilarité, nous avons étudié la transmission acoustique à travers les échantillons à 5MHz. Après une brève description du banc de mesures expérimental, nous présenterons et commenterons les résultats expérimentaux en vitesse de phase, atténuation et coefficient de transmission. Nous détaillerons ensuite un modèle de propagation d'ondes en milieux multicouches anisotropes. Il permet de conforter les résultats expérimentaux et d'identifier les paramètres influençant la propagation des ondes de volume dans les composites autosimilaires. Nous comparerons les propriétés des empilements périodiques, aléatoires, et quasi-périodiques. Nous verrons ensuite comment l'ordre d'autosimilarité et la dimension d'homothétie influencent les propriétés des matériaux autosimilaires.

Sommaire

3.1 Influence de l'autosimilarité par expériences en transmission ultrasonore	70
3.1.1 Dispositif expérimental	70
3.1.2 Mesure de vitesses de phase et d'atténuations	72

3.1.3	Coefficient de transmission	77
3.1.4	Conclusion	80
3.2	Étude numérique de la transmission des ondes de volume dans un empilement autosimilaire	80
3.2.1	Modèle de propagation en milieux multicouches anisotropes	81
3.2.2	Comparaison des empilements périodiques, désordonnés et autosimilaires	85
3.3	Influence des paramètres d'autosimilarité sur la transmission des ondes élastiques	92
3.3.1	Influence de l'angle de la seconde couche	92
3.3.2	Influence de l'ordre d'autosimilarité et de la dimension d'homothétie	93
3.4	Conclusions et perspectives	96
3.4.1	Résumé des principaux résultats	96
3.4.2	Perspectives	97
3.4.3	Utilisation de l'autosimilarité	101
3.4.4	Propriétés mécaniques	101
3.4.5	Comportement vibratoire	102

3.1 Influence de l'autosimilarité par expériences en transmission ultrasonore

3.1.1 Dispositif expérimental

3.1.1.1 Banc de manipulation

Dans une cuve à ultrasons remplie d'eau, un transducteur piezo-électrique plan, de fréquence centrale 5MHz, émet un signal sinusoïdal à 5MHz modulé par une fenêtre de Hanning à 5MHz. Ce signal traverse la plaque de composite et est réceptionné par une barrette constituée de 32 éléments piézoélectriques de fréquence centrale 5MHz. La plaque de composite est placée parallèlement aux transducteurs (Fig. 3.1 (a) et (b)). Une tête goniométrique permet le réglage de son assiette et une rotation autour de son axe pour faire varier l'angle d'incidence du faisceau ultrasonore. Le transducteur et la barrette sont écartés d'une dizaine de centimètres de la plaque. Le transducteur à ondes planes ayant un diamètre de $D_{trans} = 1,3$ cm, l'hypothèse d'ondes planes est vérifiée puisque la longueur de la zone de Fresnel est alors de $l_F = D_{trans}/4\lambda = 14.2$ cm.

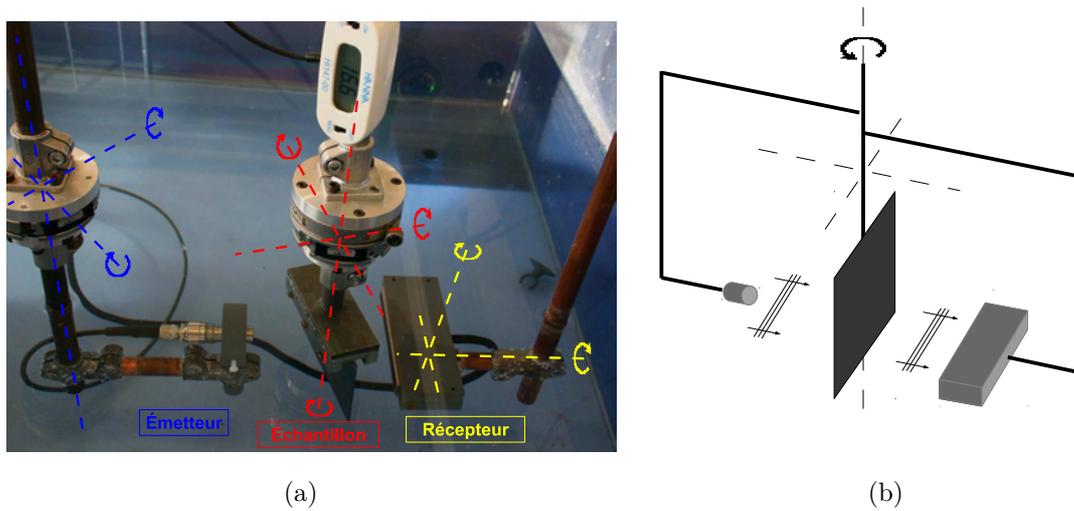


FIG. 3.1 – Photographie et schéma du banc de manipulation pour les expériences en transmission.

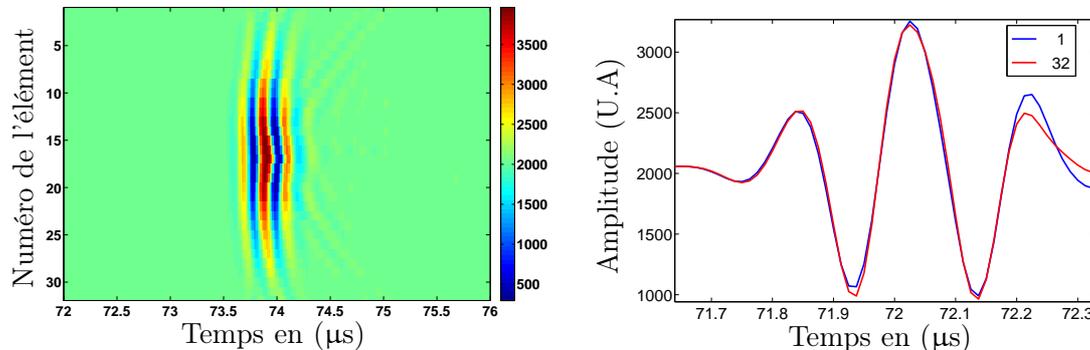
Les axes de rotation servant à régler l'orientation des transducteurs et de la plaque sont représentés en rouge (tête goniométrique et plaque), bleu (tête goniométrique et monoélément) et jaune (barrette échographique). La température de l'eau ayant une influence sur la vitesse des ondes acoustiques, un thermomètre est placé à proximité des transducteurs. L'émetteur et le récepteur sont commandés par Matlab via un système d'émission et d'acquisition électronique.

3.1.1.2 Protocole expérimental

L'anisotropie des plaques composites rend nécessaire un réglage de précision du parallélisme transducteur/barrette et un ajustement fin de l'incidence normale. Nous détaillerons ici les procédures employées pour ces deux réglages.

Le parallélisme monoélément/barrette s'obtient en jouant de manière itérative sur l'assiette du transducteur, son orientation et sa hauteur tout en observant le signal reçu. Le réglage de l'incidence normale s'effectue avec la tête goniométrique qui autorise le réglage de l'assiette et de l'angle de rotation de la plaque autour de son axe. L'échantillon est ajusté par dichotomie afin qu'en réflexion les signaux des deux éléments extrêmes de la barrette arrivent en même temps et avec la même amplitude et qu'en transmission, le faisceau reçu soit centré sur la barrette et à son maximum. Le signal transmis est maximal à l'incidence normale quand les ondes longitudinales seules se propagent. En effet, autour de l'incidence normale, les ondes transverses sont excitées et l'énergie reçue par la barrette diminue du fait de la conversion des polarisations

à la deuxième interface échantillon/eau. La figure Fig. 3.2 (a) représente le signal pour la position optimisée de l'ensemble barrette/monoélément.



(a) Réglage du parallélisme mono-élément/barrette

(b) Réglage de l'incidence normale

FIG. 3.2 – Procédure de réglage du banc de manipulation. *B-Scan* du signal reçu par la barrette après la procédure d'alignement (a). Superposition des signaux reçus par les éléments situés aux extrémités de la barrette pour le réglage de l'incidence normale (b). L'amplitude des signaux est en unités arbitraires.

J'ai conçu quatre types d'échantillons selon le procédé décrit au chapitre 1 (paragraphe 1.2.4) : découpe de la nappe pré-imprégnée, drapage des plis, passage en presse chauffante et découpe au jet d'eau. Un empilement est unidirectionnel, les autres sont basés sur la suite de Fibonacci et l'ensemble de Cantor.

La figure 3.3 schématise les quatre drapages. Les numéros associés aux échantillons servent de références pour le tracé des graphes. Les empilements sont caractérisés par le type de structure autosimilaire auxquels ils sont associés et l'orientation de leurs couches.

Les expériences en transmission nous permettent également d'avoir accès à la vitesse de phase, à l'atténuation intrinsèque des échantillons ainsi qu'au coefficient de transmission en fonction de l'incidence à 5MHz. Elles nous permettent de comparer de trois manières différentes les propriétés des échantillons unidirectionnels et autosimilaires.

3.1.2 Mesure de vitesses de phase et d'atténuations

3.1.2.1 Mesure de la vitesse de phase par intercorrélation

La vitesse de propagation des ondes longitudinales dans les matériaux composites est presque deux fois supérieure à leur vitesse dans l'eau. Le signal correspondant à la propagation à travers le système eau-échantillon-eau arrive donc avant le signal dans

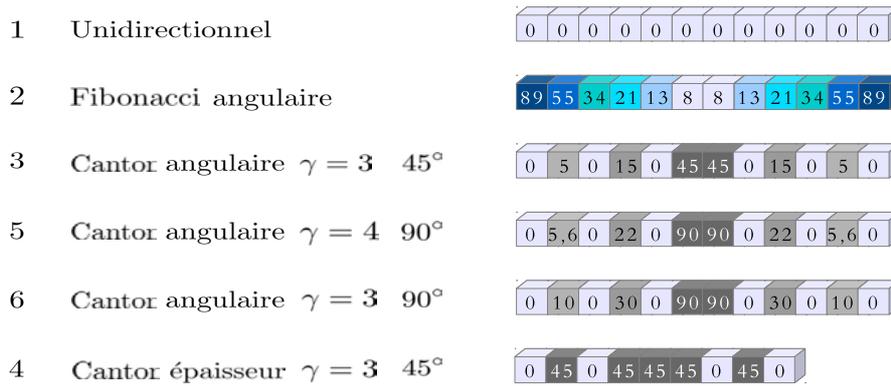


FIG. 3.3 – *Drapages réalisés et testés expérimentalement : unidirectionnel, empilement de Cantor d'autosimilarité angulaire et en épaisseur, empilement de Fibonacci angulaire.*

l'eau. L'épaisseur de l'échantillon étant connue, il est possible de déterminer la vitesse de propagation des ondes. La mesure précise de l'écart de temps de vol τ entre le signal se propageant dans l'eau $S_{eau}(t)$ et le signal obtenu en intercalant l'échantillon, $S_{éch}$, s'effectue par la méthode d'intercorrélacion. La fonction d'intercorrélacion $C(t)$ calcule la similarité de forme et de position de deux signaux :

$$C(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} S_{eau}(u)S_{éch}(u-t)du \quad (3.1)$$

La fonction d'intercorrélacion des signaux est maximale au temps $t = \tau$ (écart entre les deux signaux). Une fois τ déterminé, la vitesse de phase des ondes dans l'échantillon, $c_{éch}$, se calcule à l'aide de l'expression suivante :

$$c_{éch} = \frac{dc_{eau}}{d - \tau c_{eau}} \quad (3.2)$$

L'épaisseur de l'échantillon d est mesurée à l'aide d'un comparateur mécanique à cadran (à tige rentrante radiale) d'une précision de 0,01mm. La vitesse de phase des ondes dans l'eau dépend de la température T selon l'équation 3.3 :

$$c_{eau}(T) = \sum_{i=5}^{i=0} a_i T^i \quad (3.3)$$

avec

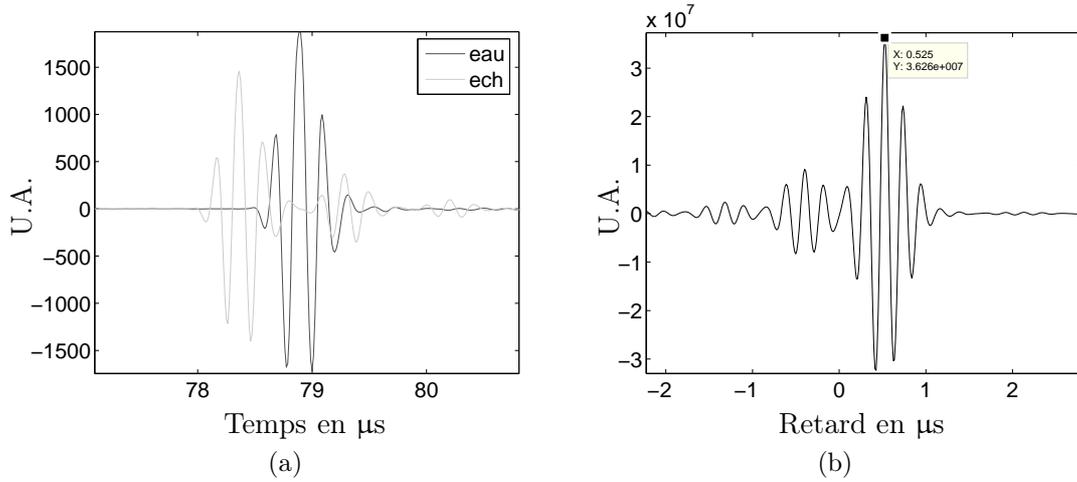


FIG. 3.4 – (a) : signaux reçus par l'élément central de la barrette pour le signal se propageant dans l'eau (noir) et le signal rencontrant l'échantillon (gris). (b) : intercorrélation de ces deux signaux.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 14,02 \cdot 10^2 & a_1 &= 50,37 \cdot 10^{-1} & a_2 &= -58,09 \cdot 10^{-3} \\
 a_3 &= 33,42 \cdot 10^{-5} & a_4 &= -14,78 \cdot 10^{-7} & a_5 &= 31,46 \cdot 10^{-10}
 \end{aligned}$$

La température est mesurée à l'aide d'un thermomètre d'une précision de $0,1^\circ\text{C}$. Pour chaque échantillon, en incidence normale, on extrait les faisceaux centraux des signaux, et on calcule τ_i pour chaque élément i de la barrette. Une mesure moyenne de la vitesse de phase dans l'échantillon est ainsi obtenue. L'incertitude sur ces mesures est calculée à partir des erreurs de mesure sur chacun des paramètres (Tab. 3.1).

Δd	Δt	ΔT
0,01mm	12,5ns	0,1 $^\circ\text{C}$

TAB. 3.1 – Erreurs de mesure sur l'épaisseur de l'échantillon, le temps et la température lors des mesures de vitesses de phase.

L'incertitude de mesure sur $c_{éch}$, $\Delta c_{éch}$, est calculée à partir de ses dérivées partielles par rapport à chacune des variables introduisant une erreur de mesure (Eq. 3.4 et Eq. 3.5) :

$$\Delta c_{éch} = \left| \frac{\partial c_{éch}}{\partial d} \right| \Delta d + \left| \frac{\partial c_{éch}}{\partial \tau} \right| \Delta \tau + \left| \frac{\partial c_{éch}}{\partial c_{eau}} \right| \Delta c_{eau} \quad (3.4)$$

donc

$$\Delta c_{éch} = \left| \frac{-\tau c_{eau}^2}{(d - \tau c_{eau})^2} \right| \Delta d + \left| \frac{d c_{eau}^2}{(d - \tau c_{eau})^2} \right| \Delta \tau + \left| \sum_{n=5}^{n=1} n a_n T^{n-1} \right| \Delta T. \quad (3.5)$$

Les résultats obtenus pour différents types d'échantillons sont exposés par la figure 3.5. Les empilements associés sont représentés sur la figure 3.3.

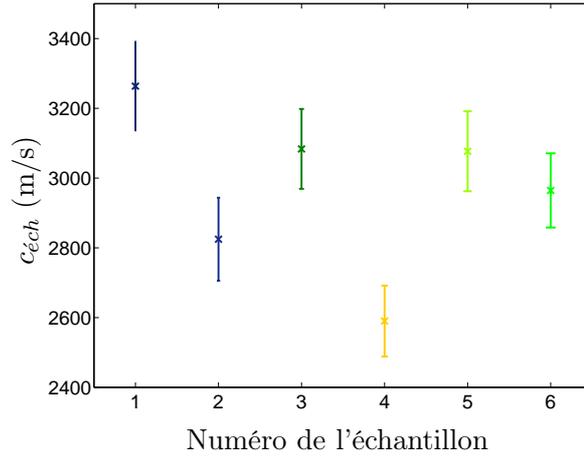


FIG. 3.5 – Mesures de la vitesse de phase des ondes longitudinales pour les différents échantillons.

La vitesse de propagation mesurée en incidence normale pour l'empilement unidirectionnel est de $c_{uni}^{exp} = 3263 \pm 130$ m/s. En tenant compte des incertitudes de mesure, des différences notables existent entre les échantillons. La figure 3.5 montre que les vitesses de phase pour les échantillons pré-fractals sont plus faibles que celle de l'unidirectionnel. Il n'y a cependant pas de nette différence entre eux, à l'exception du Cantor en épaisseur.

3.1.2.2 Mesure de l'atténuation

L'atténuation, apparaissant dans la partie imaginaire du vecteur d'onde, peut être obtenue par le traitement des signaux expérimentaux. Nous utilisons ici la même méthode que Marie-Aude Ploix dans sa thèse [Ploix, 2006].

En régime d'ondes planes, les signaux reçus après propagation à travers l'eau et l'échantillon s'écrivent :

$$\begin{cases} s_{eau}(t) = A_0 \exp(i(\omega t - k_{eau} D)) \\ s_{éch}(t) = T A_0 \exp(i(\omega t - k_{eau}(D - d) - k_{éch} d)) \end{cases} \quad (3.6)$$

où D est la distance entre l'émetteur et le récepteur, et

$$\begin{cases} k_{eau} = \frac{\omega}{c_{eau}} - i\alpha_{eau} \\ k_{éch} = \frac{\omega}{c_{éch}} - i\alpha_{éch} \end{cases} \quad (3.7)$$

Les coefficients α_{eau} et $\alpha_{éch}$ sont les coefficients d'atténuation respectifs de l'eau et de l'échantillon. Ils sont positifs. L'atténuation des ondes sonores dans l'eau est négligée ($\alpha_{eau} = 0, 19\text{m}^{-1}$). $\alpha_{éch}$ se déduit donc du rapport des transformées de Fourier du signal traversant l'échantillon, $S_{éch}(\omega)$, et du signal se propageant dans l'eau, $S_{eau}(\omega)$. En effet,

$$\frac{S_{éch}(\omega)}{S_{eau}(\omega)} = T \exp((\alpha_{eau} - \alpha_{éch})d) \exp(j(\frac{\omega}{c_{eau}} - \frac{\omega}{c_{éch}})d). \quad (3.8)$$

Et donc,

$$\alpha_{éch} = \frac{1}{d} \left(\ln T - \ln \left| \frac{S_{éch}(\omega)}{S_{eau}(\omega)} \right| \right) + \alpha_{eau}. \quad (3.9)$$

Le coefficient de transmission T est le coefficient global en incidence normale dû à la transmission du signal à travers les deux interfaces eau/échantillon et échantillon/eau :

$$T = \frac{4\rho_{eau}c_{eau}\rho_{éch}c_{éch}}{(\rho_{eau}c_{eau} + \rho_{éch}c_{éch})^2}. \quad (3.10)$$

Il s'obtient avec $\rho_{éch}$ et $c_{éch}$ mesurées expérimentalement. Pour plus de précision, l'atténuation est calculée en effectuant la moyenne du rapport de $S_{éch}$ et S_{eau} pour une bande de fréquence centrée sur 5MHz. De plus, comme pour les mesures de vitesses de phase et de coefficients de transmission, nous réalisons la moyenne des résultats pour les éléments centraux de la barrette. Les incertitudes sur l'atténuation proviennent des erreurs de mesure sur $\rho_{éch}$, $c_{éch}$, l'épaisseur de l'échantillon d et sur le calcul du rapport des transformées de Fourier. L'estimation de l'erreur commise sur $\alpha_{éch}$ est calculée par la méthode des dérivées partielles par rapport à chacune des grandeurs mesurées.

La figure 3.6 présente les résultats expérimentaux.

Les ordres de grandeur obtenus pour l'atténuation sont cohérents. En effet, Fitch [Fitch *et al.*, 2010] trouve expérimentalement une atténuation de l'ordre de 230cm^{-1} à 5MHz pour des composites unidirectionnels à 30% de fibres de carbone dans une résine PEEK. Dans sa thèse, Loné [Loné, 2003] indique que l'atténuation peut perdre 50% de sa valeur entre des fractions volumiques de 30 et 65%. Cela corrobore la valeur d'atténuation déduite ici pour l'échantillon unidirectionnel n°1 : $\alpha_{Uni} = 121\text{cm}^{-1}$.

Les relations de Kramers-Kronig [Odonnell *et al.*, 1981; Waters *et al.*, 2000], héritées de la théorie du traitement du signal sont basées sur les notions de linéarité et de causalité. Elles lient partie réelle et imaginaire d'une grandeur et peuvent également servir

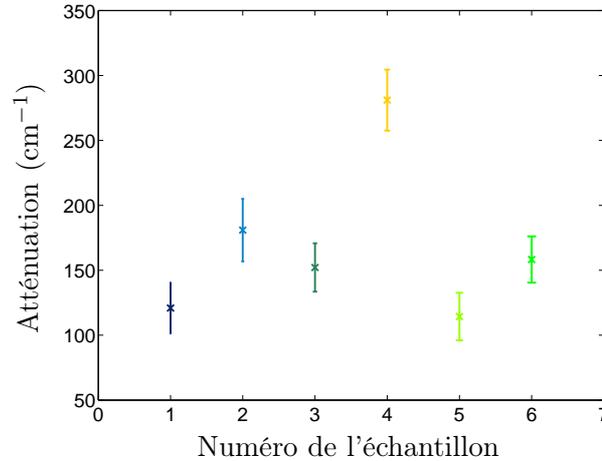


FIG. 3.6 – Atténuation expérimentale calculée en cm^{-1} pour les différents échantillons.

de critère de causalité pour une mesure. Or, dans le cas du vecteur d'onde, les parties réelle et imaginaire sont liées respectivement à la vitesse de phase et à l'atténuation. Les relations de Kramers-Kronig suggèrent ainsi qu'une diminution de la vitesse de phase entraîne une augmentation de l'atténuation. Mes mesures de vitesse (Fig. 3.5) et d'atténuation (Fig. 3.6) sont en accord avec ces relations : l'atténuation augmente avec la diminution de la vitesse de phase. Les empilements pré-fractals présentent (en général) une atténuation plus importante que l'échantillon unidirectionnel.

3.1.3 Coefficient de transmission

3.1.3.1 Calculs et incertitudes de mesure

Pour caractériser ces échantillons aux fréquences ultrasonores, nous mesurons également leur coefficient de transmission en amplitude de pression T (Eq. 3.11). La barrette permet de connaître le signal dans l'espace. Il est ainsi possible d'utiliser chacun de ses éléments pour plus de précision. La réalisation des calculs s'effectue en sélectionnant la partie centrale du faisceau reçu sur N_e éléments. Le coefficient de transmission T est déduit de la moyenne des rapports des amplitudes reçues avec, $S_{éch}^i(t)$, et sans, $S_{eau}^i(t)$, échantillon sur chaque élément i :

$$T = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} T_i = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \frac{S_{éch}^i(t)}{S_{eau}^i(t)}. \quad (3.11)$$

Les incertitudes de mesure sont évaluées par l'écart-type, $\hat{\sigma}(S_{eau}, S_{éch})$, obtenu en calculant le coefficient de transmission sur les N_e éléments centraux de la barrette (Eq. 3.12).

$$\hat{\sigma}(S_{eau}, S_{éch}) = \Delta T = \left(\frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \left(\left(\frac{\max S_{éch}}{\max S_{eau}} \right)_i - \overline{\left(\frac{\max S_{éch}}{\max S_{eau}} \right)} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (3.12)$$

Les mesures réalisées dépendent également des erreurs de mesures commises sur l'angle d'incidence, θ_{inc} , la masse volumique, ρ , et l'épaisseur totale, h , des échantillons. Elles sont récapitulées dans le tableau 3.2 :

$\Delta\theta_{inc}$	$\Delta\rho$	Δh
0,03°	1kg.m ⁻³	0,1mm

TAB. 3.2 – Incertitudes de mesure sur l'angle d'incidence, θ_{inc} , la masse volumique, ρ , et l'épaisseur, h , des échantillons.

3.1.3.2 Résultats expérimentaux

Le procédé de fabrication des échantillons nécessite une grande précision car les empilements pré-fractals contiennent de nombreuses orientations et il y a des risques de s'écarter des modèles d'empilements (Fig. 3.3). Pour tester la reproductibilité, j'ai réalisé deux copies de chaque drapage. La figure 3.7 présente les résultats expérimentaux en fonction de l'angle d'incidence.

Les résultats expérimentaux sont du même ordre de grandeur pour les deux copies des empilements. A l'exception des échantillons basés sur la suite de Fibonacci entre 25° et 50° (Fig. 3.7 (b)), les graphes, sinon superposés, suivent la même évolution. Le procédé de fabrication est donc fiable. Les différences apparaissant pour l'empilement de Fibonacci peuvent être expliquées par une erreur dans l'orientation ou la découpe d'une couche. Les ondes transverses sont très sensibles à l'orientation, et cela peut donc affecter fortement le coefficient de transmission après l'angle critique des ondes longitudinales.

Les coefficients de transmission pour les empilements de Fibonacci et de Cantor sont très différents de l'empilement unidirectionnel. Une importante baisse de transmission apparaît à partir d'une incidence de 10° (angle critique pour les ondes longitudinales). Cependant, cette perte de transmission est compensée par un élargissement de la bande des angles d'incidence (vecteurs d'onde) autorisant la propagation des ondes. Pour les échantillons unidirectionnels, la transmission des ondes de volume s'arrête autour de 50° alors que les empilements autosimilaires transmettent de l'énergie jusqu'à environ

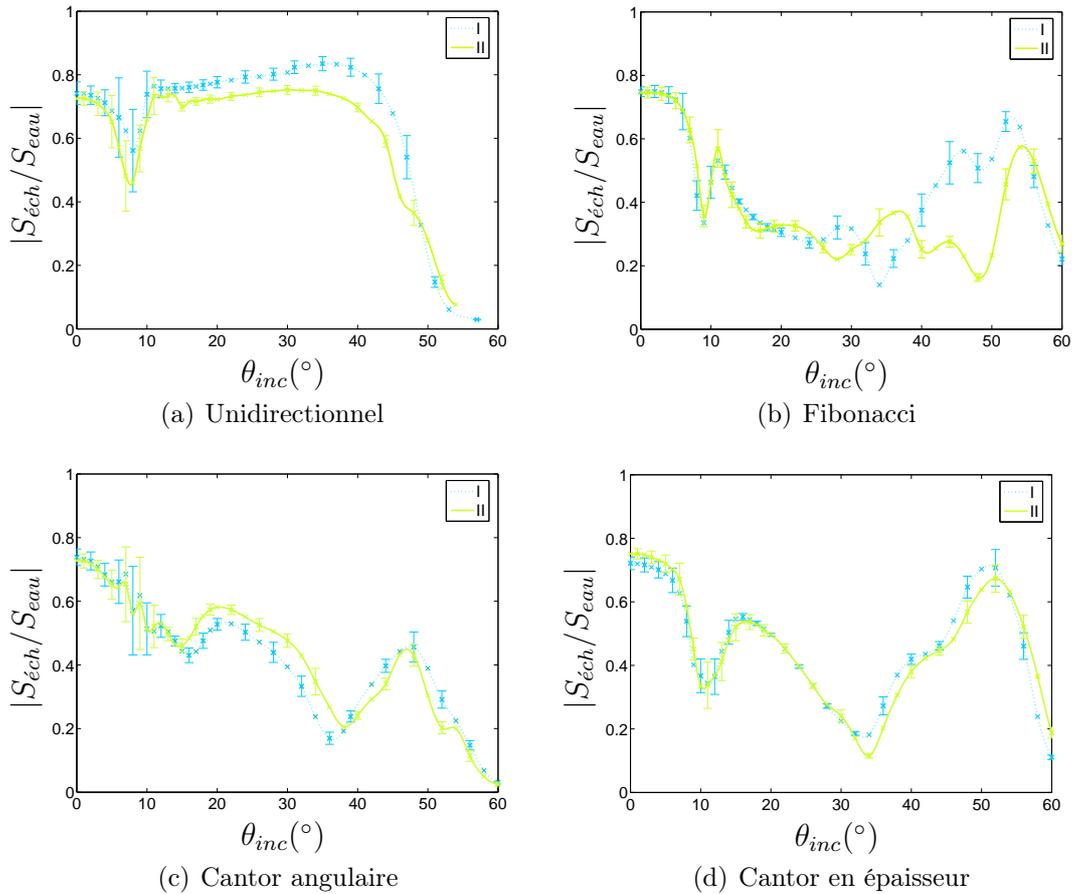


FIG. 3.7 – Coefficients de transmission expérimentaux pour 4 types d'empilements : unidirectionnels (a), de Fibonacci (b), de Cantor angulaire (c) et en épaisseur (d). Les courbes noires en pointillés et grise pleine correspondent aux deux copies de l'empilement. Les erreurs de mesure tiennent compte de l'écart type obtenu en calculant le coefficient de transmission sur les différents éléments.

60°. Malgré ce, la comparaison du rapport entre l'aire sous la courbe expérimentale et l'aire pour une transmission totale (ratio en transmission) montre que les empilements pre-fractals transmettent globalement moins qu'un empilement unidirectionnel (Tab. 3.3). Plus l'empilement contient d'orientations, plus la transmission est basse : le Cantor angulaire (n°3) et l'empilement de Fibonacci (n°2) transmettent moins d'énergie que le Cantor en épaisseur (n°4).

Ces résultats montrent que plus les empilements contiennent d'orientations moins ils transmettent globalement les ondes de volume. Les différences de comportement en transmission peuvent également indiquer une différence de comportement des modes de Lamb. Le nombre de couches expérimental est limité par l'ordre de grandeur de l'épais-

Empilement	1	2	3	4
Rapport des aires (%)	64,08	39,78	39,20	43,34

TAB. 3.3 – *Rapport des aires sous les courbes de transmission par l'échantillon et d'une transmission totale en (%) pour tous les vecteurs d'ondes incidents à 5MHz.*

seur de la peau de l'avion (quelques millimètres) et la barrette a une fréquence centrale fixée de 5MHz. La deuxième partie de ce chapitre 3.2.1 nous permettra de confronter ces résultats à un modèle théorique en s'affranchissant des contraintes expérimentales et de les comparer aux propriétés de transmission des empilements classiques : $[0^\circ 90^\circ]$ et $[0^\circ 45^\circ 90^\circ - 45^\circ]$ (qui n'ont pu être fabriqués pour des raisons pratiques).

3.1.4 Conclusion

Nous avons prouvé expérimentalement que l'atténuation intrinsèque des empilements autosimilaires est plus importante que celle de l'empilement unidirectionnel. De plus, la mesure du coefficient de transmission en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence de 5MHz montre que les échantillons pré-fractals transmettent globalement moins les ondes de volume qu'un échantillon unidirectionnel. La faible épaisseur des matériaux introduit cependant une grande incertitude de mesure. Expérimentalement, il serait possible de confirmer ces premiers résultats en réalisant des échantillons comportant un grand nombre de couches. Les calculs numériques confirment-ils ces premiers résultats ?

3.2 Étude numérique de la transmission des ondes de volume dans un empilement autosimilaire

Dans cette partie, nous calculons numériquement le coefficient de transmission pour comparer des empilements ordonnés, désordonnés et quasi-périodiques. Les simulations permettent de mettre en avant les effets de l'ordre et du désordre en travaillant sur un grand nombre de couches ($N = 27$). Cela permet de créer un désordre effectif pour les ondes de volume en réalisant un empilement assez épais comparativement à la longueur d'onde. Afin que les empilements soient totalement désordonnés, nous nous affranchissons de la symétrie miroir nécessaire à mise en œuvre des composites.

Nous exposerons en premier lieu le modèle théorique de propagation des ondes de volume dans un matériau stratifié constitué de couches anisotropes. Puis nous compa-

rerons le coefficient de transmission d'empilements présentant des degrés de désordre différents. Nous étudierons pour finir l'influence des paramètres qui régissent les empilements : angle d'orientation des couches et dimension d'homothétie.

3.2.1 Modèle de propagation en milieux multicouches anisotropes

3.2.1.1 Algorithme de la matrice de raideur de couche

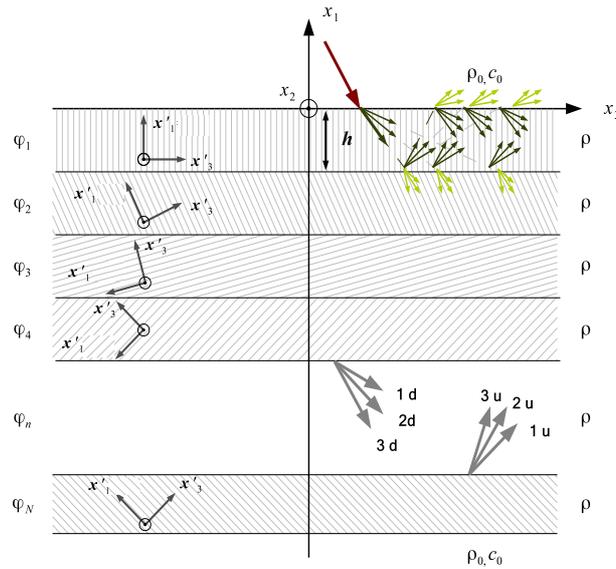


FIG. 3.8 – Représentation schématique d'un empilement de couches anisotropes. (x'_1, x'_2, x'_3) est le repère local associé à chaque couche. Les fibres sont parallèles à l'axe x'_3 .

Les empilements sont constitués de couches orthotropes d'épaisseur h et de masse volumique ρ superposées les unes sur les autres et orientées d'un angle φ_i par rapport à l'axe x_3 du repère global (x_1, x_2, x_3) . À chacune peut être associé un repère local (x'_1, x'_2, x'_3) avec x'_3 parallèle aux fibres (Fig. 3.8 (gauche)). Considérons une onde d'incidence θ_{inc} provenant d'un milieu environnant de masse volumique ρ_0 et de célérité du son c_0 . Le jeu des réflexions et transmissions multiples aux interfaces fait que dans chaque couche, l'onde élastique globale \vec{u} est la superposition de six ondes (Fig. 3.8 droite) : trois ondes, quasi-longitudinale, quasi-transverse et transverse se propageant vers le haut et trois ondes se propageant vers le bas (Eq. 3.13).

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^3 \left(A_{\mathbf{d}j}^n \vec{P}_{\mathbf{d}j}^n \exp [ik_{\mathbf{d}j}^n(x_1 - x_1^{m-1})] + A_{\mathbf{u}j}^n \vec{P}_{\mathbf{u}j}^n \exp [k_{\mathbf{u}j}^n(x_1 - x_1^m)] \right) e^{i(k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t)} \quad (3.13)$$

où $A_{\mathbf{u}/\mathbf{d}j}^n$, $\vec{P}_{\mathbf{u}/\mathbf{d}j}^n$ et $k_{\mathbf{u}/\mathbf{d}j}^n$ ($j = 1..3$) sont les amplitudes, les polarisations et la projection du vecteur d'onde sur l'axe x_1 des ondes se propageant vers le haut ou le bas. Il existe une multitude d'algorithmes pour modéliser la propagation des ondes de volume et résoudre les équations de dispersion dans des multicouches anisotropes. De la matrice de transfert [Thomson, 1950; Haskell, 1953] à la matrice d'impédance de surface [Hosten & Castaings, 2003], ils ont d'abord été développés pour étudier les ondes sismiques dans la croûte terrestre (constituée d'une succession de couches isotropes transverses), puis pour modéliser la propagation des ultrasons dans les composites stratifiés [Nayfeh, 1991; Potel & de Belleval, 1993; Nayfeh, 1995]. Leurs principales différences résident dans l'arrangement sous forme matricielle des contraintes et déplacements dans les couches ou aux interfaces, et dans la manière de neutraliser l'apparition d'exponentielles réelles rendant le calcul instable pour de grands produits fréquence×épaisseur. Nous utilisons ici la méthode publiée par Rokhlin et Wang en 2002 [Rokhlin & Wang, 2002] : l'algorithme de la matrice de raideur de couche (*cf.* Annexe C).

Pour chaque couche, nous résolvons d'abord l'équation de Christoffel pour une onde plane progressive se propageant dans un milieu infini possédant les propriétés mécaniques de la couche. Elle donne, à partir des propriétés mécaniques du matériau (rigidité C , masse volumique ρ) et de propagation (épaisseur d'un pli h , angle d'incidence θ_{inc} , fréquence f), les vecteurs d'ondes autorisés $\vec{k}_{\mathbf{u}/\mathbf{d}j}^n$ et les polarisations $\vec{P}_{\mathbf{u}/\mathbf{d}j}^n$ associées dans les couches. Ceux-ci sont utilisés pour calculer contraintes et déplacements dans chaque couche qui sont reliés par la matrice de raideur. A partir des matrices de raideur de chacune des couches, nous calculons la matrice de raideur totale de l'empilement, K_{totale} , grâce à un algorithme récursif. A partir de la connaissance des potentiels acoustiques incidents, transmis et réfléchis, et des coefficients de K_{totale} nous déterminons les coefficients de transmission et de réflexion (Fig. 3.9). J'ai programmé ce code sous MATLAB et je tiens particulièrement à remercier Michel Castaings pour l'aide qu'il m'a apportée pour finaliser la première étape de l'algorithme (choix des vecteurs d'ondes et des polarisations).

3.2.1.2 Validation du code de calcul

La validation du code de simulation est effectuée en deux étapes. Tout d'abord, nous vérifions que le modèle de propagation anisotrope concorde avec le modèle simplifié présenté au chapitre précédent (2.1). Pour une incidence nulle, seuls les modes longitudinaux sont excités et la simplification en matrice de raideur de dimension 2 est valable. La figure 3.10 présente la superposition des coefficients de transmission calculés par les deux modèles pour un empilement périodique $[0^\circ \ 90^\circ]_{20}$ de carbone

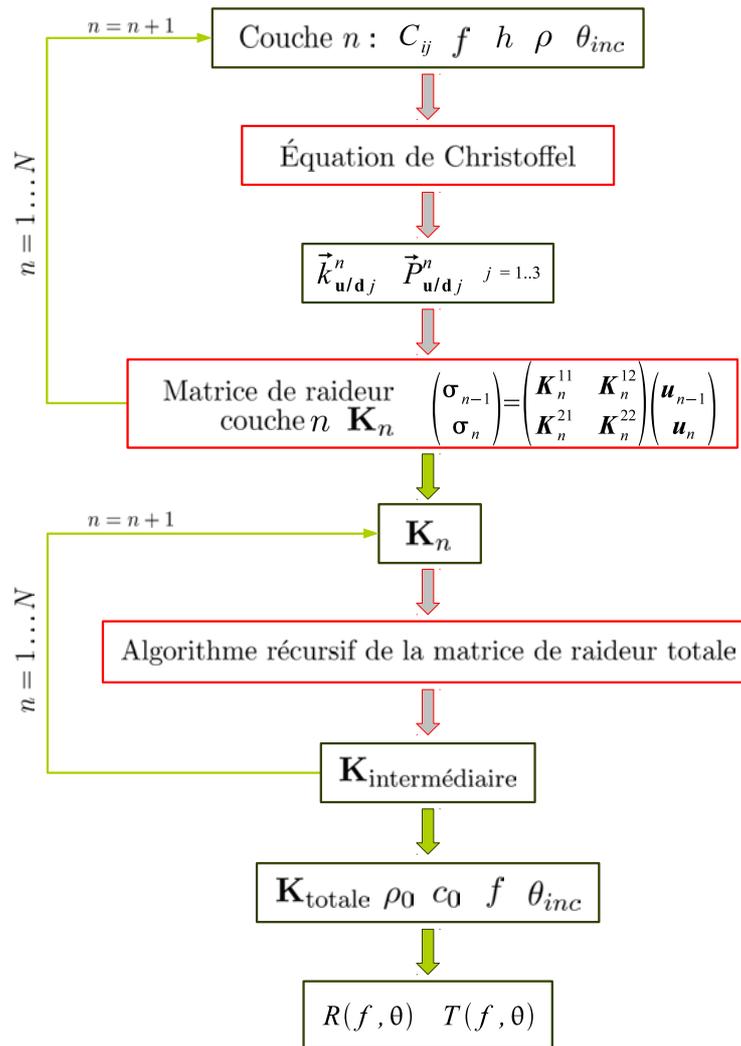


FIG. 3.9 – Algorithme de la matrice de raideur de couche [Rokhlin & Wang, 2002]. Plus de précisions sur les calculs figurent en annexe C.

époxyde, des fibres selon l'axe x_3 (avec rotation de l'axe des fibres autour de l'axe x_1) et une propagation selon l'axe x_1 (l'atténuation introduite par la partie imaginaire du tenseur des constantes élastiques n'est pas prise en compte).

Pour le cas de la propagation dans les matériaux multicouches anisotropes, j'ai validé le code de calcul par comparaison avec les courbes publiées par Castaings et Hosten en 1994 [Castaings & Hosten, 1994] et Balasubramaniam en 2000 [Balasubramaniam, 2000] (Fig. 3.11).

Les courbes obtenues par le code de calcul sont identiques à celles de la littérature pour les mêmes jeux de paramètres. Nous avons ainsi validé le programme de calcul en multicouche anisotrope. Son utilisation est donc possible dans le cas des composites carbone-PEEK.

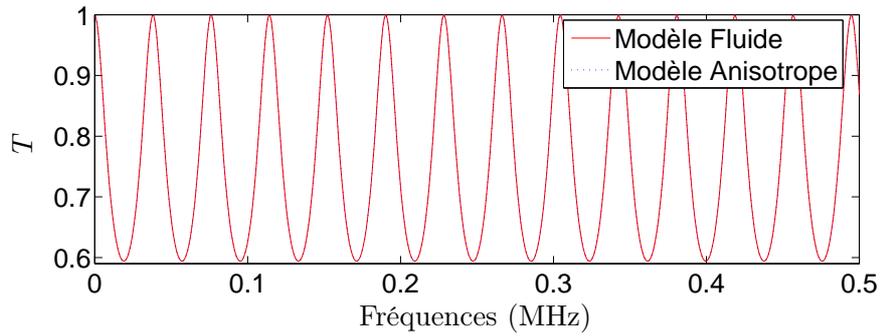
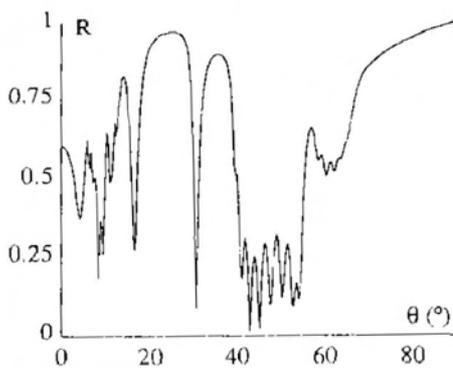
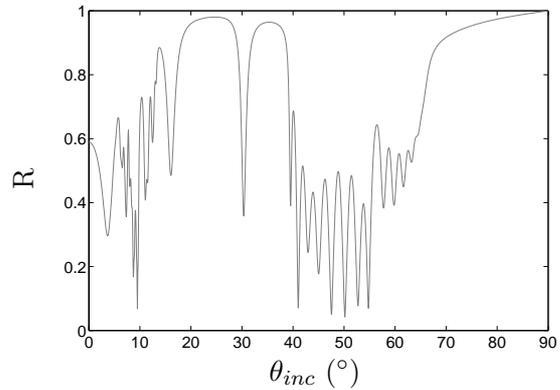


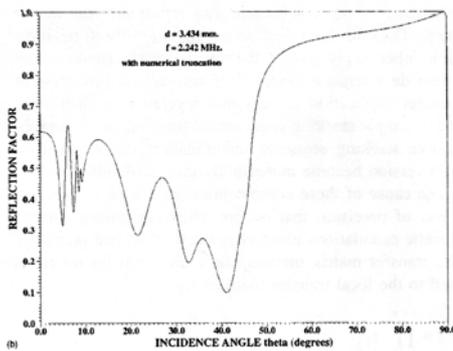
FIG. 3.10 – Superposition des coefficients de transmission calculés par le modèle fluide simplifié (courbe rouge) et par le modèle anisotrope en incidence normale (courbe bleue en pointillés).



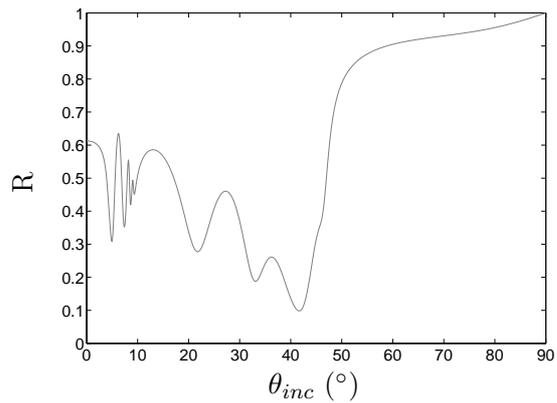
(a) [Castaings & Hosten, 1994]



(b) Code numérique de la matrice de raideur



(c) [Balasubramaniam, 2000]



(d) Code numérique de la matrice de raideur

FIG. 3.11 – Comparaison des résultats obtenus avec le code de calcul programmé ((b) et (d)) et des résultats obtenus par Castaings et Hosten [Castaings & Hosten, 1994] (a) et Balasubramaniam [Balasubramaniam, 2000] (c).

3.2.2 Comparaison des empilements périodiques, désordonnés et autosimilaires

Pour les simulations numériques, nous utilisons le tenseur des rigidités calculé par homogénéisation (à partir des caractéristiques élastiques de la matrice et des fibres). Cela permet d'isoler la partie d'atténuation due simplement à la géométrie du matériau sans introduire d'atténuation due à l'amortissement (partie imaginaire du vecteur d'onde).

3.2.2.1 Tenseur des rigidités homogénéisé

La théorie de la micro-mécanique permet d'estimer, par homogénéisation, les propriétés élastiques d'un pli unidirectionnel à partir de la proportion de chaque constituant (fibres et résine) et de leurs constantes élastiques. Les détails du calcul du tenseur des rigidités sont fournis en annexe B [Datta *et al.*, 1984]. Quand l'axe des fibres est dirigé selon x_3 (Fig. 3.12), la matrice des rigidités obtenue par homogénéisation est donnée par l'équation 3.14 :

$$C = \begin{pmatrix} 13.88 & 7.41 & 5.68 & & & \\ 7.41 & 13.88 & 7.41 & & & \\ 5.68 & 5.68 & 157.75 & & & \\ & & & 6.16 & & \\ & & & & 6.16 & \\ & & & & & 3.24 \end{pmatrix} \text{ GPa.} \quad (3.14)$$

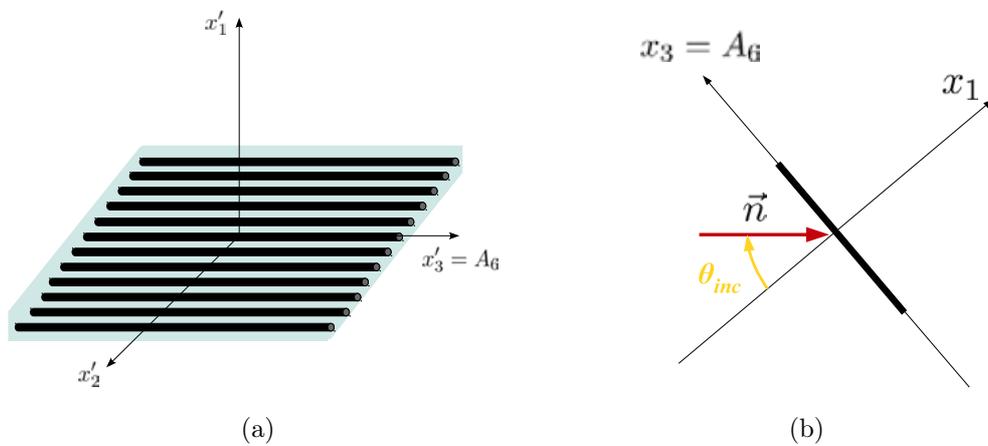


FIG. 3.12 – Repère associé au tenseur des rigidités (Eq. 3.14 (a)) et repère mis en situation expérimentale (b).

Le tracé des surfaces des lenteurs pour un échantillon unidirectionnel permet de comprendre les phénomènes de réflexion et réfraction à l'interface eau/échantillon (Fig. 3.13).

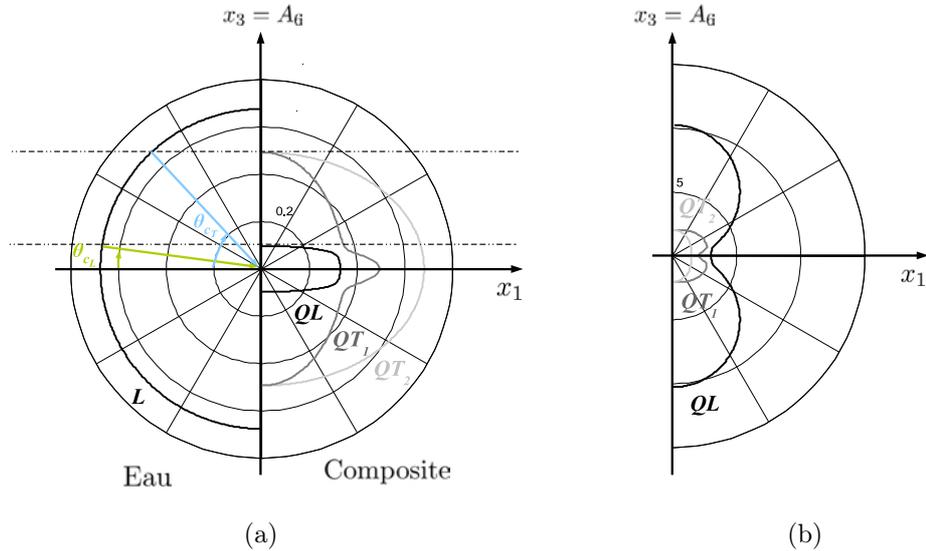


FIG. 3.13 – Surface des lenteurs pour un pli unidirectionnel (ks/m) (a) et vitesses de phase associées (m.s⁻¹) (b). Le plan d'incidence est le plan (x₁, x₃).

La configuration du système implique la présence de deux angles critiques. Le premier, $\theta_{c_L} = 8,5^\circ$, pour les ondes longitudinales, apparaît quand la projection de leur vitesse à l'interface dépasse celle de la vitesse de phase du son dans l'eau (environ 1480m.s⁻¹). Cela se produit pour une incidence faible car plus l'angle d'incidence augmente, plus les ondes longitudinales sont guidées par les fibres, et donc plus leur vitesse est grande. La vitesse de phase le long des fibres est de l'ordre de 10000m.s⁻¹. Le coefficient de transmission expérimental (Fig. 3.7) est en accord avec ces résultats : une diminution de T se produit au premier angle critique $\theta_{c_L}^{exp} = 8 \pm 1^\circ$. Le second angle critique pour les ondes transverses est égal à $\theta_{c_T} = 42,5^\circ$. La vitesse de propagation mesurée en incidence normale pour l'empilement unidirectionnel est de $c_{uni}^{exp} = 3263 \pm 130$ m/s (Fig. 3.5), soit un écart de $7 \pm 4\%$ par rapport à la vitesse théorique calculée à partir du tenseur des constantes élastiques homogénéisé $c_{uni}^{exp} = 3045$ m/s (Eq. 3.14).

3.2.2.2 Caractérisation numérique des empilements

Leur orientation est choisie aléatoirement parmi les angles de l'empilement autosimilaire auquel il est comparé.

Pour mettre en avant les propriétés particulières des milieux autosimilaires, nous

les comparons, comme au chapitre 2 (2.6), à des empilements ordonnés et désordonnés.

Nous considérons qu'un empilement est ordonné quand il présente des structures géométriques répétitives : empilement unidirectionnel ou empilement périodique constitué par la répétition d'un bi-couche formé de deux plis d'orientations différentes : $[\varphi_0 \varphi_1]_N$.

Comme au chapitre précédent, nous comparons deux types d'empilements autosimilaires. Ceux dont le caractère autosimilaire porte sur l'allure géométrique (empilement de Cantor en épaisseur (Fig. 1.10), et de Fibonacci en épaisseur (Fig. 1.11)) et ceux dont le processus itératif porte sur l'orientation des plis (Fig. 1.16). Contrairement au premier chapitre, à moins de considérer un équivalent pour chacune des polarisations, il n'est pas plus simple de raisonner en terme d'empilements équivalents en longueur (paragraphe 2.5.2.1).

A chacun de ces empilements est associé un empilement désordonné. Ses couches sont orientées aléatoirement en tirant au hasard un angle parmi les orientations de l'empilement associé.

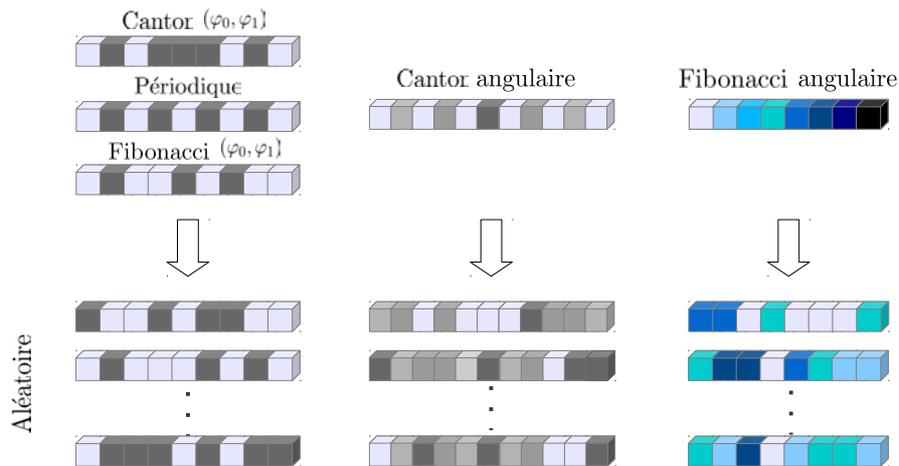


FIG. 3.14 – *Empilements et leurs arrangements multicouches aléatoires associés.*

Les empilements sont classés selon leur degré de désordre. Nous considérons que plus l'empilement contient d'orientations différentes plus il est désordonné. Entre ordre et désordre, les empilements qui sont créés selon une séquence déterministe mais non périodique sont dits quasi-périodiques. Pour augmenter le contraste en vitesse pour les ondes longitudinales, les bi-couches sont constitués de plis orientés à 0° et 90° , et la couche centrale de l'empilement de Cantor en angle est de 90° .

Bien que les arrangements contiennent le même nombre de couches, il est difficile de les comparer à l'aide du coefficient de transmission. Comme au chapitre 2 (2.6), nous utiliserons le calcul de l'aire sous la courbe du coefficient de transmission normalisée

par celle d'une courbe de transmission totale : *ratio en transmission* τ . Plus le τ est proche de 1, plus la transmission est grande (Fig. 3.15).

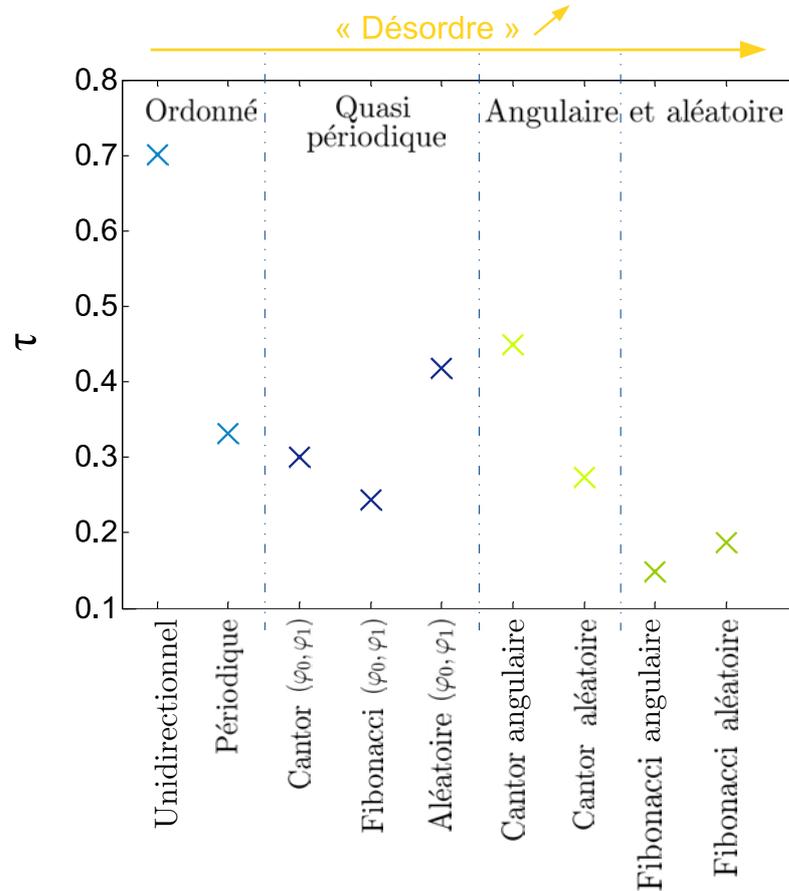


FIG. 3.15 – Ratio en transmission à 5MHz des empilements ordonnés aux empilements désordonnés.

Nous pouvons tirer trois principaux résultats du calcul du ratio en transmission (Fig. 3.15). Tout d'abord, plus les empilements sont désordonnés (plus ils contiennent d'orientations différentes), moins le ratio en transmission est élevé. Cela confirme les résultats expérimentaux précédents. Les empilements de Fibonacci angulaire et aléatoire possèdent la transmission la plus basse car ils sont formés d'un très grand nombre de couches d'orientations différentes. Les empilements de Fibonacci en angle, tout en étant déterministes, réalisent la même perte en transmission que les empilements aléatoires associés.

Ensuite, nous pouvons remarquer que les empilements quasi-périodiques (Cantor et Fibonacci présentant une autosimilarité en épaisseur) sont plus transmettent moins les ondes que les empilements ordonnés (unidirectionnel et périodique bi-couche). Pour un faible nombre de couches, il est difficile de créer un désordre effectif. Les empilements

quasi-périodiques permettent alors d'introduire du désordre facilement et de changer aisément les propriétés en transmission par rapport à un empilement périodique.

Finalement, le multicouche de Cantor présentant un processus autosimilaire sur les angles et l'empilement aléatoire associé sont les multicouches les moins efficaces. En effet, pour 27 couches, l'orientation des couches externes φ_0/γ^n tend rapidement vers zéro à cause de la séquence de construction (Eq. 1.6). Par conséquent, l'empilement est proche d'un stratifié unidirectionnel à l'exception des couches centrales. A 5MHz, son ratio en transmission est néanmoins presque deux fois inférieur à celui d'un empilement unidirectionnel. A fréquence donnée, l'utilisation d'un faible degré de désordre peut avoir une grande influence sur la transmission acoustique. Pourtant, sur l'ensemble des fréquences et des angles d'incidence, il est difficile de voir une différence entre les coefficients de transmission $T(f, \theta_{inc})$ de l'empilement unidirectionnel (Fig. 3.16 (a)) et de l'empilement angulaire (Fig. 3.16 (b)).

Les empilements de Cantor angulaires peuvent ainsi être qualifiés de quasi-périodiques. Ils introduisent des défauts, non dans la disposition géométrique des plis les uns par rapport aux autres (comme les empilements qui présentent une autosimilarité dans l'épaisseur), mais dans le contraste entre les couches à chaque maille. La différence d'orientation, $[0 \ \varphi_0/\gamma^n \ 0 \ \varphi_0/\gamma^{n-1} \ 0 \ \dots]$ se traduit par une variation périodique de la vitesse de propagation des ondes. Ainsi, pour minimiser la transmission globale par diffusion multiple dans ce type de multicouche, le désordre doit être privilégié.

Observons l'allure du coefficient de transmission sur une large bande de fréquences, f , et d'angles d'incidence, θ_{inc} , pour les empilements (Fig. 3.16 et Fig. 3.17).

Dans le domaine des ondes longitudinales, $\theta_{inc} < \theta_{cL} = 10^\circ$, il y a peu d'effet des empilements sur la transmission. L'angle critique longitudinal θ_{cL} est trop faible pour qu'elles puissent percevoir les différences d'orientation entre les couches. Cependant, au delà de θ_{cL} , des zones de faible transmission apparaissent (en bleu sur les figures). Ces zones ne sont pas visibles pour l'empilement de Cantor angulaire car il est très proche de l'empilement unidirectionnel. Les modes de résonance, en rouge foncé, se déplacent en fonction de l'angle d'incidence. Pour le milieu périodique, une forte diminution de transmission se produit entre 4 et 8 MHz, pour des angles d'incidence allant de 10° à 50° . Pour le stratifié à plis croisés (traditionnellement utilisé dans l'industrie), la multiplicité d'angles provoque un agrandissement et une complexification de cette zone.

Les empilements autosimilaires géométriquement sont constitués de couches à 0° et 90° mais les courbes montrent que l'empilement de Cantor en épaisseur influence la transmission des ondes pour des fréquences inférieures au MHz (Fig. 3.17 (a)). Cela

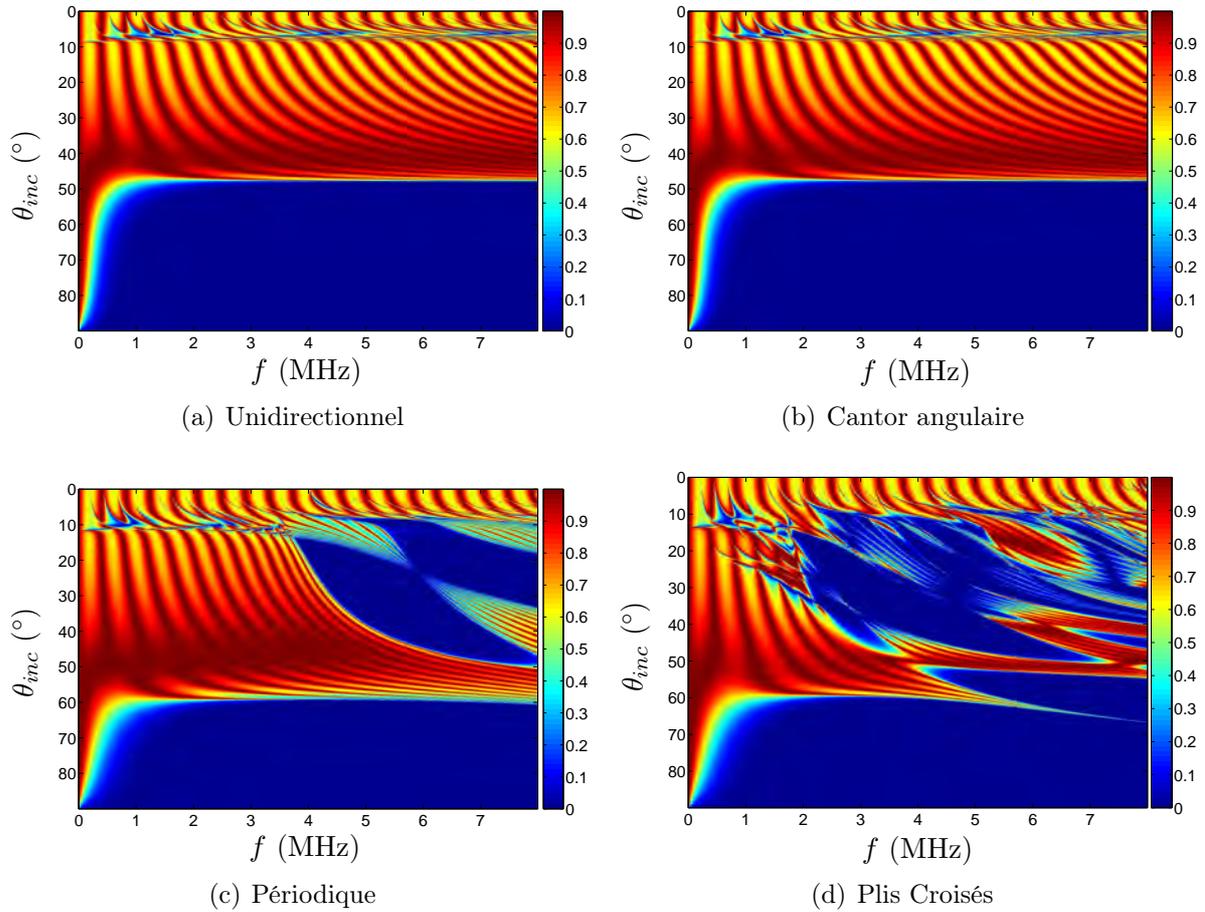


FIG. 3.16 – Variation du coefficient de transmission en fonction de la fréquence (MHz) et de l'angle d'incidence ($^{\circ}$) pour des empilements de 27 plis : unidirectionnel 0° , périodique $[0^{\circ} 90^{\circ}]$, à plis croisés $[0^{\circ} 45^{\circ} 90^{\circ} 135^{\circ}]$ et de Cantor angulaire d'orientation centrale $\varphi_0 = 90^{\circ}$.

peut être dû à la diversité des longueurs caractéristiques qui le constituent. La zone de faible transmission introduite par l'empilement de Fibonacci en angle est beaucoup plus **large et uniforme** que les autres empilements de 2 à 8 MHz et de 10° à 50° . Ainsi, le nombre d'angles présents dans le multicouche et l'arrangement des plis influencent la forme du coefficient de transmission.

En tenant compte de toutes les fréquences et tous les angles d'incidence, les empilements ordonnés classiques créent des bandes de coupures contrairement à l'empilement de Cantor angulaire. L'empilement en plis croisés et l'empilement de Fibonacci angulaire créent les plus grandes zones de baisse de transmission. Cela semble suggérer que outre l'arrangement des plis les uns par rapport aux autres, c'est aussi la multiplicité des angles présents dans l'empilement qui permet de créer de larges bandes interdites (à condition d'avoir une différence significative entre les orientations). Les structures

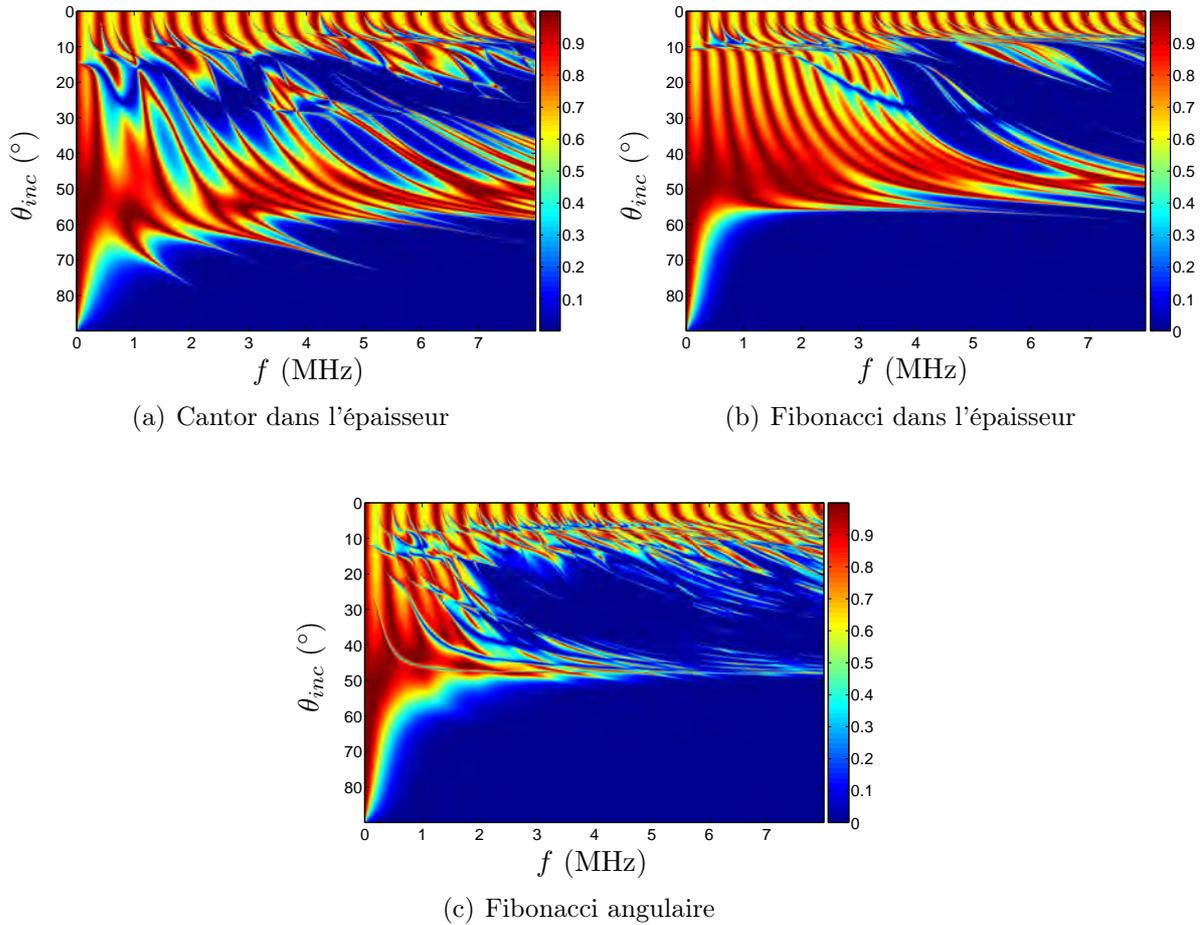


FIG. 3.17 – Variation du coefficient de transmission en fonction de la fréquence (MHz) et de l'angle d'incidence ($^{\circ}$) pour des empilements de Cantor et de Fibonacci présentant une autosimilarité dans l'épaisseur constitués de 27 couches orientées à 0° et 90° , et empilement de Fibonacci angulaire d'orientations initiales 0° et 1° .

autosimilaires ajoutent des configurations permettant ainsi d'adapter le matériau en fonction de la forme de la bande de coupure souhaitée.

Nous avons calculé le ratio en transmission sur toute la bande de fréquence et d'angles d'incidence et cela conforte les conclusions tirées plus tôt (Fig. 3.18). Nous retrouvons bien ici que globalement, l'empilement de Cantor angulaire n'est pas plus efficace qu'un empilement unidirectionnel, la différence d'orientation entre les couches n'est pas assez grande. Le désordre faible des empilements quasi-périodiques provoque des baisses de transmission par interférences des ondes dans le matériau.

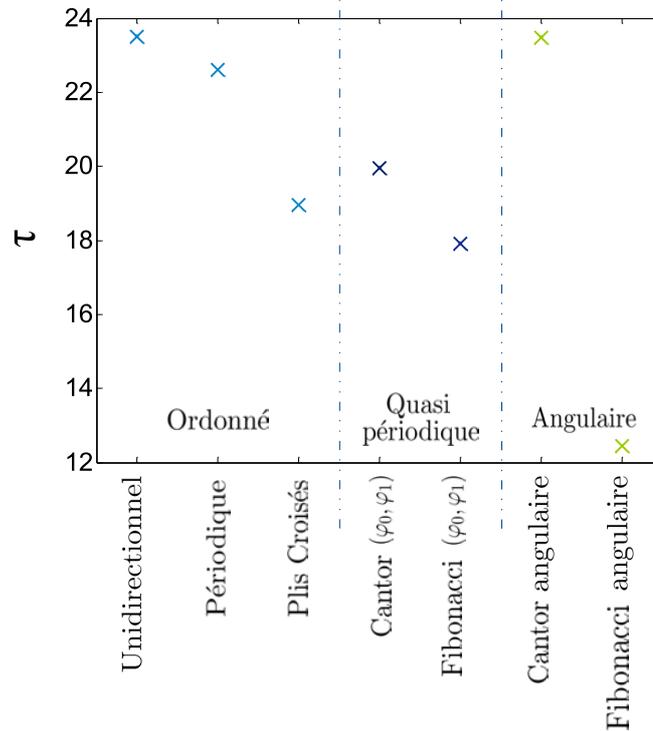


FIG. 3.18 – Ratio en transmission globale τ (%) pour des empilements ordonnés (unidirectionnel, périodique et plis croisés), quasi-périodiques (Cantor et Fibonacci) et angulaires (Cantor et Fibonacci).

3.3 Influence des paramètres d'autosimilarité sur la transmission des ondes élastiques

Dans la section précédente, nous avons démontré que les empilements quasi-périodiques créent un désordre faible qui permet de réduire la transmission des ondes élastiques. Nous allons à présent analyser l'influence des paramètres de construction des stratifiés : orientation préférentielle des couches constituant les empilements en épaisseur, ordre d'autosimilarité et dimension d'homothétie.

3.3.1 Influence de l'angle de la seconde couche

Testons d'abord l'influence de l'angle de la deuxième couche dans les empilements périodiques et quasi-périodiques. Pour effectuer cette comparaison, nous calculons le ratio en transmission pour des empilements constitués d'arrangements de couches d'orientation 0° et φ_0 . τ permet de comparer globalement les propriétés en transmission pour tous les angles d'incidence et toutes les fréquences (Fig. 3.19 (a)).

Les empilements présentent une baisse optimale pour un angle de la deuxième

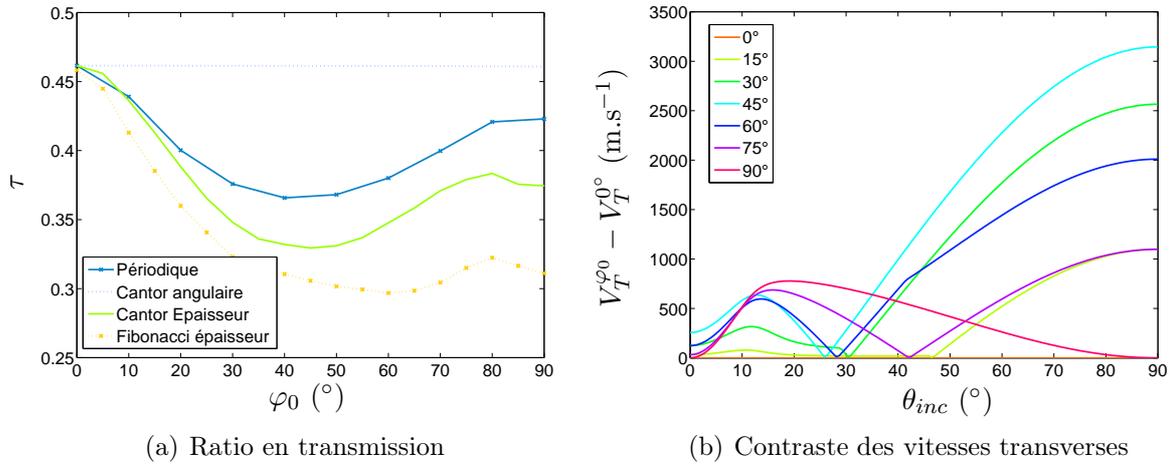


FIG. 3.19 – (a) : ratio en transmission en fonction de l'angle de la deuxième couche, φ_0 , utilisée dans la construction des empilements périodique et quasi-périodiques. (b) : différence de vitesse pour les ondes T1 entre deux couches orientées à φ_0 et 0° .

couche φ_0 égal à 45° . Il correspond, comme le montre la figure 3.19 (b) à l'angle pour lequel la différence de vitesse transverse entre deux couches est la plus élevée, sur l'ensemble des angles d'incidence. Il permet ainsi de favoriser les effets de la quasi-périodicité et de réduire le coefficient de transmission.

3.3.2 Influence de l'ordre d'autosimilarité et de la dimension d'homothétie

Nous faisons maintenant varier deux grandeurs propres aux empilements autosimilaires et analysons leur influence pour l'empilement de Cantor en épaisseur constitué de couches orientées à 0° et 90° .

L'ordre d'autosimilarité indique le nombre d'itérations du processus autosimilaire dans la construction des empilements (paragraphe 1.1.3). L'allure de l'empilement en fonction de l'ordre est décrite au chapitre 1 (Fig. 1.5).

Nous faisons ensuite varier la dimension d'homothétie de l'empilement de Cantor. Pour cela, nous choisissons de garder une division par $\gamma = 3$, mais de faire varier la proportion de segment conservée d'un ordre à l'autre (Fig. 3.20).

Cette proportion est définie par α et est en lien direct avec le facteur d'homothétie d'un ordre au suivant. Nous avons vu au premier chapitre que pour un ensemble auto-similaire, la dimension d'homothétie peut se calculer à partir du nombre d'homothéties $(\gamma + 1)/2$ apparaissant dans la structure et du facteur d'agrandissement (Eq. 3.15) :

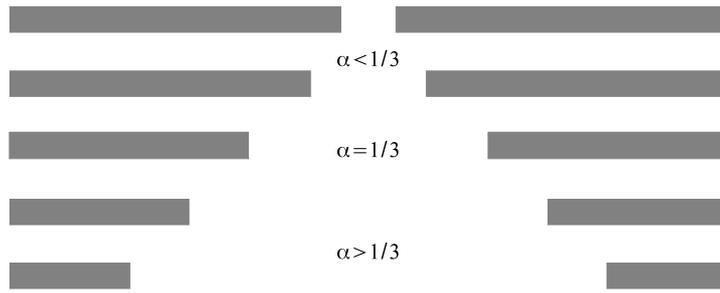


FIG. 3.20 – Variation de la taille du segment conservé α lors de la construction de l'ensemble de Cantor.

$$D = \frac{\ln((\gamma + 1)/2)}{\ln(1/\alpha)} \quad (3.15)$$

α varie entre 0 et 1/2. D varie donc entre 0 et 1. Plus alpha est petit, plus il y a de “vide” dans la structure, et donc plus la dimension d’homothétie diminue. Les résultats obtenus pour le ratio en énergie (pour des fréquences comprises entre 1 et 8 MHz) sont présentés sur la figure 3.21 pour des ordres d’autosimilarité allant de 1 à 3.

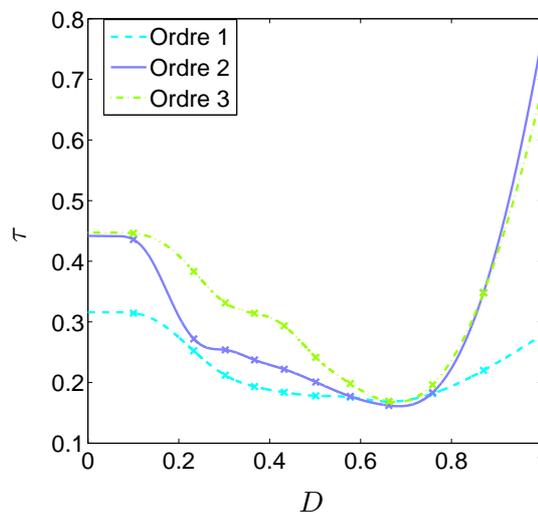


FIG. 3.21 – Empilement de Cantor en épaisseur : étude du ratio en transmission en fonction de la dimension d’homothétie D et de l’ordre d’autosimilarité.

3.3.2.1 Effet de l’ordre d’autosimilarité

Nous remarquons tout d’abord que plus l’ordre augmente, plus le ratio en énergie de l’empilement augmente. Ici, l’ordre influence la taille des inhomogénéités présentes dans l’empilement, elle est multipliée par α d’un ordre à l’autre. Les fréquences de

résonance associées à ces couches sont donc divisées par α . α étant inférieur à 1, une augmentation de l'ordre est synonyme d'un grossissement de facteur $1/\alpha$ sur l'échelle des fréquences. Nous avons illustré cette idée sur la figure 3.22 pour $\alpha = 0,3$.

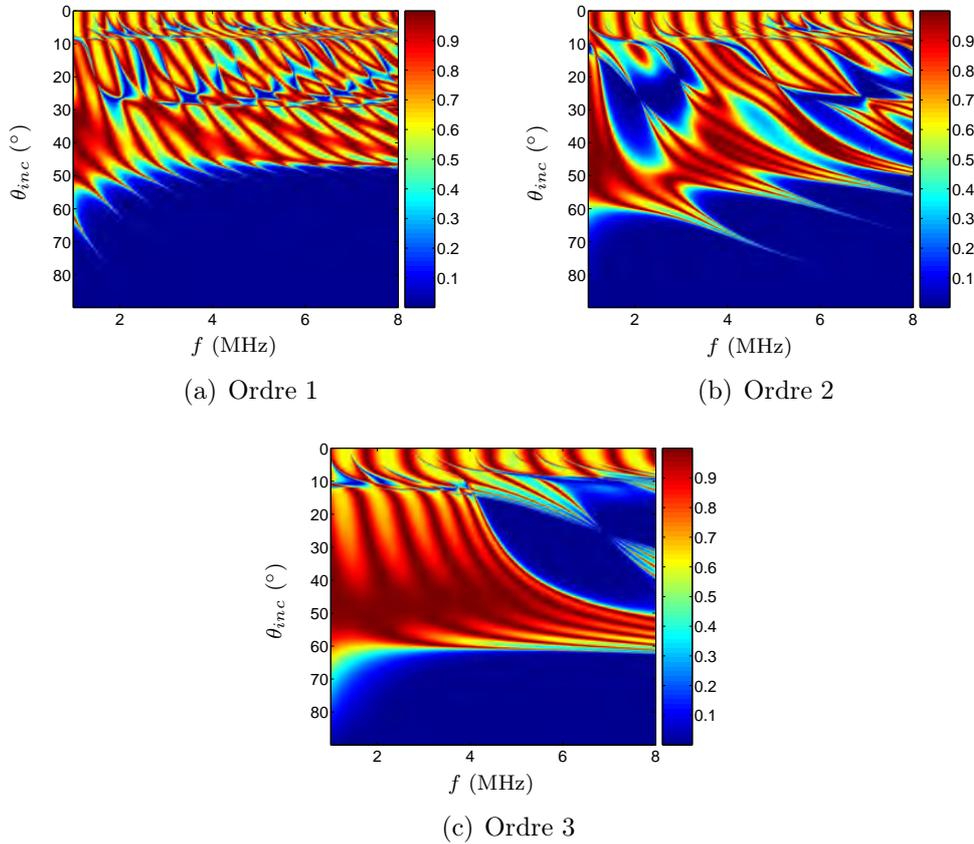


FIG. 3.22 – Coefficients de transmission pour l'empilement de Cantor en épaisseur ($\alpha = 0,3$) des ordres 1 à 3.

Toujours dans cette idée, nous pouvons ajouter que plus la taille caractéristique des inhomogénéités diminue, plus elle diffère de la longueur d'onde, et moins les ondes perçoivent l'autosimilarité. Cela explique l'augmentation du ratio en transmission avec l'ordre et le fait que passé $D = 0,6$, l'ordre 2 et l'ordre 3 se confondent.

3.3.2.2 Impact de la dimension d'homothétie sur le ratio en énergie

En ce qui concerne l'influence de la dimension d'homothétie, donc de α , on remarque que, quelque soit l'ordre, il existe une valeur optimale de la dimension d'homothétie $D \approx 0,67$ ($\gamma = 3$ et $\alpha \approx 0,35$) pour laquelle le ratio en transmission est minimal. Pour α se rapprochant de 0,5 (D se rapprochant de 1), l'empilement est en majorité orienté à 0° , avec une couche centrale fine à 90° . Il se rapproche donc d'un empilement

unidirectionnel, et c'est pour cela que le ratio en transmission devient grand. Pour α diminuant, le phénomène inverse se produit : l'empilement est formé de deux couches fines sur les bords orientées à 0° et d'une large couche centrale à 90° , le désordre diminue et donc le ratio en transmission augmente. $D = 0,67 \cong 2/3$ optimise le rapport longueur d'onde, vitesse de propagation des ondes transverses et taille d'inhomogénéités et permet ainsi "d'optimiser le désordre", ou la quasi-périodicité créée par l'empilement de Cantor en épaisseur.

La dimension d'homothétie optimisant la baisse de transmission globale dépend donc du matériau et des paramètres qui influencent le rapport longueur d'onde/taille des inhomogénéités : angle des deux couches le constituant, taille totale d'empilement, vitesse de propagation des différentes ondes et bande de fréquences considérée.

3.3.2.3 Impact de la dimension d'homothétie sur le coefficient de transmission

L'annexe D présente les courbes de variation du coefficient de transmission pour différentes valeurs de la dimension d'homothétie. Les modes de résonance du coefficient de transmission sont fortement liés aux modes de propagation dans la plaque, et donc, aux relations de dispersion. La dimension d'homothétie a une grande influence sur la déformation des modes et leur transmission. Le tracé des courbes de dispersion n'a pas été possible durant ce travail, mais il permettrait de mettre en évidence concrètement l'influence de la dimension d'homothétie sur les modes de Lamb des multicouches.

3.4 Conclusions et perspectives

3.4.1 Résumé des principaux résultats

Ce chapitre porte sur l'étude et la caractérisation expérimentale des matériaux composites pré-fractals carbone-PEEK en hautes fréquences. Pour cela, nous avons réalisé des mesures de vitesse de phase, d'atténuation et du coefficient de transmission, à 5MHz des empilements. Ces trois types de mesure semblent tous mener à la même conclusion : plus l'empilement contient d'orientations moins il transmet les ondes élastiques.

Pour conforter ce résultat, nous avons simulé la propagation des ondes de volume dans les empilements à l'aide de l'algorithme de la matrice de raideur de couche. Après comparaison des résultats pour des empilements ordonnés, autosimilaires et désordonnés, nous avons confirmé la conclusion des résultats expérimentaux. Ces résultats sont à nuancer par le fait que c'est surtout la multiplicité d'angles qui semble permettre la création de larges bandes de coupure. Deux paramètres sont à prendre en compte : le

nombre d'orientations dans l'empilement, et à nombre d'orientations fixé, la disposition des couches les unes par rapport aux autres.

Dans une troisième partie, nous nous sommes attachés à explorer l'influence de divers paramètres sur l'efficacité des empilements. Nous avons ainsi démontré que l'angle qui maximise la différence de vitesse de phase des ondes transverses pour tous les angles d'incidence est l'angle de contraste de couche le plus efficace. Quant aux paramètres de l'autosimilarité, nous avons pu voir qu'ils ont une importance capitale sur la forme du coefficient de transmission et donc de l'énergie diffusée par les empilements. Il existe une dimension d'homothétie qui optimise l'influence de la quasi-périodicité, c'est à dire la diffusion multiple des ondes par le matériau, elle dépend des caractéristiques du milieu et des fréquences de travail.

3.4.2 Perspectives

Ces conclusions ouvrent des perspectives d'application et d'approfondissement. Elles montrent en effet qu'il est possible de rendre autosimilaires des empilements multicouches pour créer des matériaux composites capables de réduire la transmission sonore. Les empilements autosimilaires, comparativement aux empilements désordonnés, ont l'avantage d'être déterministes, leur production serait donc envisageable industriellement. Nous avons également constaté que dans le cas de ces empilements, c'est après le premier angle critique que la propagation des ondes est affectée. Dans cette configuration d'anisotropie, les ondes transverses sont donc très sensibles à l'autosimilarité.

Dans le cas de plaques infinies, le développement d'autres outils de calcul pourraient permettre de connaître et d'explorer les relations de dispersion de ces matériaux autosimilaires, les propriétés et l'évolution des modes de Lamb, l'effet des drapages sur un faisceau ultrasonore et les déplacements et contraintes à l'intérieur du stratifié.

Enfin, pour mettre en avant seulement les effets de la géométrie, la viscoélasticité n'a pas été prise en compte ici. Or elle influence grandement le coefficient de transmission des ondes élastiques. Une étude ultérieure sera donc menée afin d'analyser son influence et son impact sur les conclusions de cette partie.

Conclusions et perspectives

Récapitulatif des principaux résultats

Ce travail de doctorat a porté sur l'étude acoustique de composites renforcés de fibres de carbone constitués de drapages autosimilaires. L'objectif, dans le cadre du projet INMAT, est d'augmenter l'atténuation des composites et de diminuer leur transmission. Deux modèles de propagation et des mesures ultrasonores ont permis de comparer l'effet de l'autosimilarité, de l'ordre et du désordre. Mon travail a été à la fois numérique et expérimental. J'ai développé deux codes de calcul pour simuler la propagation d'ondes de volume dans des milieux multicouches anisotropes unidimensionnel et bidimensionnel. J'ai confectionné des échantillons de matériaux composites, de la découpe de la nappe pré-imprégnée au passage en presse. Puis, je les ai testés expérimentalement dans une cuve à ultrasons.

Les milieux autosimilaires (semblables à eux-mêmes à différentes échelles) sont irréguliers. L'ensemble de Cantor et la suite de Fibonacci génèrent des structures autosimilaires. Nous les avons utilisés pour créer des matériaux composites irréguliers et déterministes. L'idée sur laquelle s'appuie mon travail est de conjuguer l'autosimilarité avec la manière de construire les matériaux composites stratifiés renforcés de fibres de carbone. Nous pouvons ainsi agir sur les drapages pour rendre l'empilement autosimilaire.

Un premier modèle, assimilant les plis à des couches fluides dont la vitesse varie avec la direction de propagation, a été programmé avec Matlab. Nous avons ainsi pu voir comment utiliser l'anisotropie pour accentuer les effets de la géométrie du milieu. Les résultats que j'ai obtenus avec ce modèle concordent avec les études réalisées précédemment pour les ondes électromagnétiques, quantiques ou acoustiques : l'autosimilarité géométrique se retrouve dans l'allure du coefficient de transmission et la répartition des modes de résonance. J'ai alors pu relier la structure géométrique et les réponses en fréquence, et mettre ainsi en évidence l'influence des paramètres géométriques sur la propagation des ondes. Le ratio en transmission a permis de comparer les différents empilements et de montrer que les empilements angulaires sont quasi-périodiques. Les

propriétés des arrangements de Fibonacci angulaires sont comparables à des empilements désordonnés.

Le troisième chapitre a traité de la propagation des ondes élastiques dans les composites à plis croisés. J'ai d'abord caractérisé expérimentalement les échantillons autosimilaires fabriqués à l'aide d'essais en transmission. L'analyse du coefficient de transmission en fonction de l'angle d'incidence à 5MHz a montré que ces drapages influencent la propagation des ondes. De même, les mesures de vitesse de phase et d'atténuation indiquent que les empilements autosimilaires présentent une atténuation plus importante qu'un empilement unidirectionnel. Pour approfondir l'étude et conforter ces résultats, j'ai développé un programme de calcul numérique basé sur la matrice de raideur de couche. Il modélise la propagation d'ondes de volume dans les milieux stratifiés anisotropes. J'ai pu ainsi étudier l'effet des drapages autosimilaires sur des bandes de fréquence plus larges. Les variations d'orientation et le désordre influencent les ondes transverses et le coefficient de transmission. La dimension d'homotétie apparaît permet alors d'optimiser la forme du coefficient du matériau en jouant sur le rapport taille des hétérogénéités sur longueur d'onde.

L'anisotropie crée des contrastes de vitesse entre les couches. Elle permet ainsi de confectionner des arrangements phononiques avec un seul matériau. Selon l'orientation de l'axe d'anisotropie par rapport à la direction de propagation, il est possible de choisir le type de polarisation influencé : ondes longitudinales pour l'axe d'orthotropie orienté dans le sens de propagation, ondes T_1 pour les plis perpendiculaires à la direction de propagation. Pour créer des bandes interdites larges, la géométrie du milieu doit être telle que les bandes interdites des différentes polarisations se recoupent.

Limites de l'étude

Le modèle que nous utilisons considère des couches semi-infinies. Il est valable à hautes fréquences, mais en basses fréquences, les conditions aux limites doivent être prises en compte. Les courbes du coefficient de transmission ne montrent pas d'effet visible des variations géométriques en dessous de 1MHz (figures en annexe D). Or, nous pouvons supposer qu'en basses fréquences, les plis orientés dans de nombreuses directions permettent de répartir les contraintes et d'influencer la propagation des ondes. Pour une modélisation vibratoire, il serait préférable d'utiliser des méthodes de calcul par éléments finis, ou des méthodes analytiques de rayonnement de plaques tenant compte des conditions aux limites.

La difficulté de la mise en œuvre de méthodes numériques (par différences finies

ou éléments finis) vient ici de la grande différence des échelles de l'épaisseur des plis (0.1mm) et l'échelle des longueurs d'onde audible ($\lambda \propto 1\text{m}$). Afin de tenir compte du drapage, le maillage doit être très fin par rapport à λ , les calculs deviennent donc très lourds (en temps et en mémoire). Ces études sont très efficaces pour des calculs fréquentiels considérant un milieu équivalent homogène (dans l'épaisseur). Dans le cas de matériaux ne présentant pas de symétrie particulière (comme nos empilements), l'homogénéisation est difficile à implémenter. De plus, elle fait perdre, par moyennage, l'effet géométrique des empilements sur l'atténuation.

Expérimentalement, il faudrait confectionner des plaques de grandes dimensions et mesurer l'influence des drapages autosimilaires sur les ondes guidées. Si l'on considère les empilements composites autosimilaires dans le contexte structural de l'avion, les conditions aux limites et la forme de la pièce jouent un rôle prépondérant. Une étude vibratoire par éléments finis est alors indispensable pour évaluer l'amortissement global introduit par les nouveaux drapages.

Perspectives

Les milieux autosimilaires sont assez peu étudiés, pourtant, ils touchent à des notions autant fondamentales qu'appliquées. La compréhension des phénomènes de propagation laisse entrevoir de nombreuses perspectives et applications.

3.4.3 Utilisation de l'autosimilarité

La variabilité des paramètres qui régissent les processus autosimilaires dans les structures étudiées, laisse espérer qu'il est possible d'optimiser les empilements en fonction des applications et des domaines de fréquences correspondants : matériaux isolants, transducteurs à fine(s) bande(s) passante(s), *etc...* Les matériaux anisotropes sont présents tant dans les technologies de génération d'ondes (matériaux piezo-électriques) que dans les domaines de l'acoustique du bâtiment (bois, brique, *etc...*). Il est possible d'adapter notre étude à des épaisseurs de matériaux et des échelles fréquentielles différentes.

3.4.4 Propriétés mécaniques

L'atout majeur de drapages autosimilaires est qu'ils ne sont pas symétriques, et n'ont pas de direction privilégiée. On peut donc penser que lors d'un choc, les contraintes se répartissent de manière plus homogène que dans un matériau périodique classique (composites à plis croisés). Cette propriété se révélerait très intéressante par rapport

aux composites actuels qui, comparés aux matériaux métalliques, ont une très mauvaise résistance aux chocs. De plus, ils pourraient permettre de répartir les contraintes au niveau des encastremets.

3.4.5 Comportement vibratoire

Un banc de mesure vibratoire a été mis au point au laboratoire pour réaliser des mesures des propriétés élastiques effectives des plaques ou des poutres. A partir de l'identification et de l'analyse des modes de vibration, il permettra la détermination du module d'Young et du facteur de perte effectifs (Fig. 3.23). Les résultats de ces mesures seront comparés à un modèle d'homogénéisation et seront utilisés comme paramètres d'entrée pour de futurs calculs de vibro-acoustique.

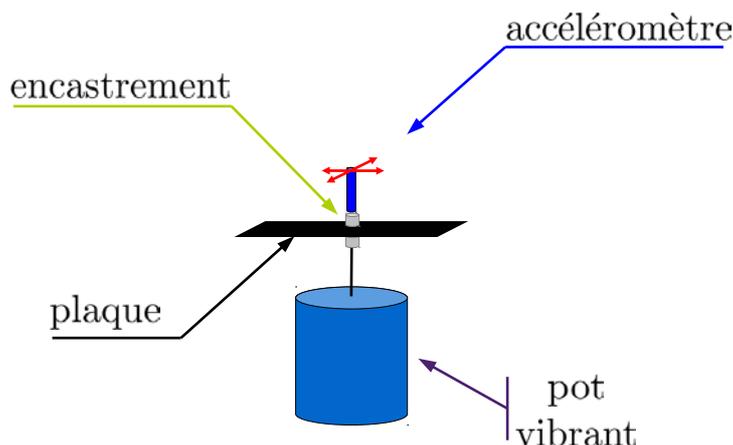


FIG. 3.23 – Banc de mesure du module d'Young et du facteur de perte des poutres composites. Le pot vibrant et l'accéléromètre sont commandés par Matlab. L'accéléromètre permet de mesurer la réponse en fréquence de la plaque et l'identification des modes de vibration.

Ce montage peut être adapté en remplaçant le pot vibrant par un marteau d'impact. L'échantillon de composite est excité successivement en plusieurs points et la réponse impulsionnelle est mesurée par l'accéléromètre. Pour une méthode non invasive et ne modifiant pas les caractéristiques vibratoires des plaques, nous pourrions utiliser un détecteur capacitif ou un vibromètre laser. Le but de cette expérience est ici aussi de pouvoir comparer les différents drapages, et en particulier d'étudier leur influence sur le facteur de perte. Il serait possible de mesurer l'effet des drapages autosimilaires sur la forme des modes. On peut supposer que le désordre dû aux multiples orientations rendrait le rayonnement de la plaque moins efficace.

J'ai participé au montage d'une troisième expérience : un banc de mesure pour générer des ondes de Lamb dans les plaques. En effet, le mode de Lamb A_0 est un mode de flexion responsable des vibrations et de la génération du bruit. Son étude permettrait d'observer d'une autre manière l'influence des drapages sur les modes de vibration. La génération des ondes de Lamb est effectuée par un transducteur ultrasonore placé à une incidence judicieusement choisie par rapport à la plaque. Cette incidence se calcule à partir de la connaissance de la vitesse de phase des ondes et du mode que l'on souhaite exciter (Fig. 3.24).

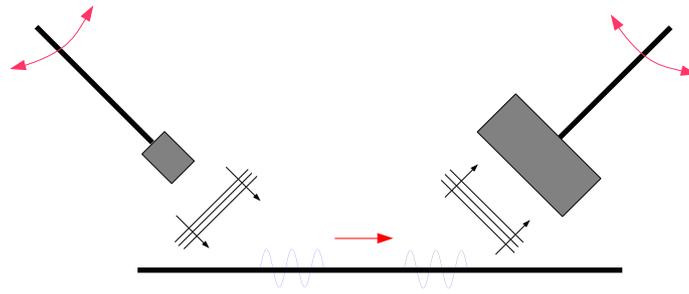


FIG. 3.24 – Banc de génération et de mesure d'ondes de Lamb.

Ce montage nécessite donc une connaissance précise des propriétés élastiques et des équations de dispersion du matériau. Les constantes élastiques sont mesurables par des techniques ultrasonores classiques à partir d'échantillons unidirectionnels épais [Lhermitte, 1991]. Il est théoriquement possible de calculer les équations de dispersion numériquement, à partir de l'annulation du déterminant de la matrice de raideur de couche. Une méthode est en cours de développement au laboratoire (annexe C). Les partenaires du projet INMAT de EADS Suresnes disposent quant à eux d'une méthode semi-analytique par éléments finis pour le calcul des équations de dispersion [Bartoli *et al.*, 2006].

La durée du projet INMAT, initialement de 3 ans, a été allongée d'un an. Cela permettra d'explorer dans les six mois à venir, la plupart de ces perspectives.

Bibliographie

- [Abrahams *et al.*, 1979] Abrahams, E., Anderson, P. W., Licciardello, D. C., & Ramakrishnan, T. V. (1979). Scaling theory of localization : Absence of quantum diffusion in two dimensions. *Physical Review Letters* *42*(10), 673–676.
- [Achenbach & Kitahara, 1987] Achenbach, J. D. & Kitahara, M. (1987). Harmonic waves in a solid with a periodic distribution of spherical cavities. *Journal of the Acoustical Society of America* *81*(3), 595–598.
- [Addison, 1997] Addison, P. S. (1997). *Fractals and Chaos : an illustrated course* (Institute of Physics Pub.).
- [Aissaoui *et al.*, 2006] Aissaoui, M., Zaghdoudi, J., Kanzari, M., & Rezig, B. (2006). Optical properties of the quasi-periodic one-dimensional genarilized multilayer fibonacci structures. *Progress In Electromagnetics Research* *59*, 69–83.
- [Anderson, 1958] Anderson, P. W. (1958). Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical Review* *109*(5), 1492–1505.
- [Aynaou *et al.*, 2005] Aynaou, H., El Boudouti, E. H., Djafari-Rouhani, B., Akjouj, A., & Velasco, V. R. (2005). Propagation and localization of acoustic waves in fibonacci phononic circuits. *Journal of Physics : Condensed Matter* *17*(27), 4245–4262.
- [Balasubramaniam, 2000] Balasubramaniam, K. (2000). On a numerical truncation approximation algorithm for transfer matrix method. *Journal of the Acoustical Society of America* *107*(2), 1053–1056.
- [Bartoli *et al.*, 2006] Bartoli, I., Marzani, A., Lanza di Scalea, F., & Viola, E. (2006). Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section. *Journal of Sound and Vibration* *295*(3–5), 685–707.
- [Bertaud du Chazaud & Gibiat, 2008] Bertaud du Chazaud, E. & Gibiat, V. (2008). A numerical study of 1D self-similar waveguides : Relationship between localization, integrated density of state and the distribution of scatterers. *Journal of Sound and Vibration* *313*(3–5), 631–642.
- [Berthelot, 2005] Berthelot, J. M. (2005). *Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures (4^{eme} Ed.)* (Lavoisier).

- [Blassiau, 2005] Blassiau, S. (2005). *Modélisation des phénomènes microstructuraux au sein d'un composite unidirectionnel carbone/epoxy et prédiction de durée de vie : contrôle et qualification de réservoirs bobinés* PhD thesis École Nationale Supérieure des mines de Paris.
- [Castaings & Hosten, 1994] Castaings, M. & Hosten, B. (1994). Delta operator technique to improve the Thomson-Haskell method stability for propagation in multi-layered anisotropic absorbing plates. *Journal of the Acoustical Society of America* 95(4), 1931–1941.
- [Chatain, 2001] Chatain, M. (2001). (Techniques de l'Ingénieur).
- [Chen *et al.*, 2008] Chen, A. L., Wang, Y. S., Guo, Y. F., & Wang, Z. D. (2008). Band structures of fibonacci phononic quasicrystals. *Solid State Communications* 145(3), 103–108.
- [Cleland *et al.*, 2001] Cleland, A. N., Schmidt, D. R., & Yung, C. S. (2001). Thermal conductance of nanostructured phononic crystals. *Physical Review B* 64(17), 172301.
- [Craciun *et al.*, 1992] Craciun, F., Bettucci, A., Molinari, E., Petri, A., & Alippi, A. (1992). Direct experimental observation of fracton mode patterns in one-dimensional cantor composites. *Physical Review Letters* 68(10), 1555–1558.
- [Datta *et al.*, 1984] Datta, S. K., Iedbetter, H. M., & Kriz, R. D. (1984). Calculated elastic constants of composites containing anisotropic fibers. *International Journal of Solids and Structures* 20(5), 429–438.
- [Deschamps & Hosten, 1992] Deschamps, M. & Hosten, B. (1992). The effects of viscoelasticity on the reflection and transmission of ultrasonic waves by an orthotropic plate. *Journal of the Acoustical Society of America* 91(4), 2007–2015.
- [Douady & Couder, 1992] Douady, S. & Couder, Y. (1992). Phyllotaxis as a physical self-organized growth process. *Physical Review Letters* 68(13), 2098–2101.
- [Dunkin, 1965] Dunkin, J. W. (1965). Computation of modal solutions in layered, elastic media at high frequencies. *Bulletin of the Seismological Society of America* 55(2), 335–358.
- [Economou & Soukoulis, 1989] Economou, E. N. & Soukoulis, C. M. (1989). Calculation of optical transport and localization quantities. *Physical Review B* 40(11), 7977–7980.
- [Edwards & Thouless, 1972] Edwards, J. T. & Thouless, D. J. (1972). Numerical studies of localization in disordered systems. *Journal of Physics C : Solid State Physics* 5(8), 807–820.

- [Falconer, 2003] Falconer, K. J. (2003). *Fractal geometry : mathematical foundations and applications* (John Wiley & Sons Inc).
- [Fernández-Alvarez & Velasco, 1998] Fernández-Alvarez, L. & Velasco, V. R. (1998). Sagittal elastic waves in fibonacci superlattices. *Physical Review B* 57(22), 14141–14147.
- [Fitch *et al.*, 2010] Fitch, D. A., Hoffmeister, B. K., & de Ana, J. (2010). Ultrasonic evaluation of polyether ether ketone and carbon fiber-reinforced PEEK. *Journal of Materials Science* 45(14), 3768–3777.
- [Fryer & Frazer, 1984] Fryer, G. J. & Frazer, L. N. (1984). Seismic waves in stratified anisotropic media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 78(3), 691–710.
- [Fu *et al.*, 1997] Fu, X., Liu, Y., Zhou, P., & Sritrakool, W. (1997). Perfect self-similarity of energy spectra and gap-labeling properties in one-dimensional fibonacci-class quasilattices. *Physical Review B* 55(5), 2882–2889.
- [Fuzessery, 1995] Fuzessery, S. (1995). *Polyaryléthercétones* (Techniques de l'ingénieur).
- [Gay, 2005] Gay, D. (2005). *Matériaux composites - 5^{eme} éd. révisée* (Lavoisier).
- [Gellermann *et al.*, 1994] Gellermann, W., Kohmoto, M., Sutherland, B., & Taylor, P. C. (1994). Localization of light waves in Fibonacci dielectric multilayers. *Physical Review Letters* 72(5), 633–636.
- [Gibiat *et al.*, 2003] Gibiat, V., Barjau, A., Castor, K., & Bertaud Du Chazaud, E. (2003). Acoustical propagation in a prefractal waveguide. *Physical Review E* 67, 066609.
- [Gouyet, 1992] Gouyet, J. F. (1992). *Physique et structures fractales* (Masson).
- [Haskell, 1953] Haskell, N. A. (1953). The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bulletin of the Seismological Society of America* 43(1), 17–34.
- [Hosten & Castaings, 2003] Hosten, B. & Castaings, M. (2003). Surface impedance matrices to model the propagation in multilayered media. *Ultrasonics* 41(7), 501–507.
- [Hou *et al.*, 2004] Hou, Z., Wu, F., & Liu, Y. (2004). Acoustic wave propagating in one-dimensional Fibonacci binary composite systems. *Physica B : Condensed Matter* 344(1–4), 391–397.
- [Hu *et al.*, 2008] Hu, H., Strybulevych, A., Page, J. H., Skipetrov, S. E., & Van Tiggelen, B. A. (2008). Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network. *Nature Physics* 4(12), 945–948.

- [Jeong *et al.*, 2004] Jeong, T. S., Kim, J. E., Park, H. Y., & Lee, I. W. (2004). Experimental measurement of water wave band gaps. *Applied Physics Letters* 85(9), 1645–1647.
- [John, 1987] John, S. (1987). Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Physical Review Letters* 58(23), 2486–2489.
- [Kohmoto *et al.*, 1987a] Kohmoto, M., Sutherland, B., & Iguchi, K. (1987a). Localization of optics : Quasiperiodic media. *Physical Review Letters* 58(23), 2436–2438.
- [Kohmoto *et al.*, 1987b] Kohmoto, M., Sutherland, B., & Tang, C. (1987b). Critical wave functions and a cantor-set spectrum of a one-dimensional quasicrystal model. *Physical Review B* 35(3), 1020–1033.
- [Kondilis & Tzanetakis, 1992] Kondilis, A. & Tzanetakis, P. (1992). Numerical calculations on optical localization in multilayer structures with random-thickness layers. *Physical Review B* 46(23), 15426–15431.
- [Kushwaha & Djafari-Rouhani, 1996] Kushwaha, M. S. & Djafari-Rouhani, B. (1996). Complete acoustic stop bands for cubic arrays of spherical liquid balloons. *Journal of Applied Physics* 80(6), 3191–3195.
- [Kushwaha *et al.*, 1993] Kushwaha, M. S., Halevi, P., Dobrzynski, L., & Djafari-Rouhani, B. (1993). Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical Review Letters* 71(13), 2022–2025.
- [Kushwaha *et al.*, 1994] Kushwaha, M. S., Halevi, P., Martínez, G., Dobrzynski, L., & Djafari-Rouhani, B. (1994). Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical Review B* 49(4), 2313–2322.
- [Laguës & Lesne, 2003] Laguës, M. & Lesne, A. (2003). *Invariances d'échelle* (Paris, Belin).
- [Lavrinenko *et al.*, 2002] Lavrinenko, A. V., Zhukovsky, S. V., Sandormirski, K. S., & Gaponenko, S. V. (2002). Propagation of classical waves in nonperiodic media : Scaling properties of an optical cantor filter. *Physical Review E* 65, 036621.
- [Lhermitte, 1991] Lhermitte, T. (1991). *Anisotropie des propriétés élastiques des composites carbone/époxy. Etude de la propagation, de la dispersion et de la rétrodiffusion ultrasonores* PhD thesis Université Paris 6.
- [Liu *et al.*,] Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y. Y., Yang, Z., Chan, C. T., & Sheng, P. Locally resonant sonic materials. *Science* 289.
- [Lonné, 2003] Loné, S. (2003). *Modélisation de la propagation ultrasonore dans les matériaux composites obtenus par le procédé de fabrication RTM (Resin Transfer Molding)* PhD thesis Université Bordeaux 1.

- [Lowe, 1995] Lowe, M. J. S. (1995). Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 42(4), 525–542.
- [Mandelbrot, 1983] Mandelbrot, B. B. (1983). *The fractal geometry of nature* (WH Freeman).
- [Mandelbrot, 1995] Mandelbrot, B. B. (1995). *Les objets fractals* (Flammarion).
- [Martínez-Sala *et al.*, 1995] Martínez-Sala, R., Sancho, J., Sánchez, J. V., Gómez, V., Llinares, J., & Meseguer, F. (1995). Sound attenuation by sculpture. *Nature* 378, 241.
- [McGurn *et al.*, 1993] McGurn, A. R., Christensen, K. T., Mueller, F. M., & Maradudin, A. A. (1993). Anderson localization in one-dimensional randomly disordered optical systems that are periodic on average. *Physical Review B* 47(20), 13120–13125.
- [Merlin *et al.*, 1985] Merlin, R., Bajema, K., Clarke, R., Juang, F. Y., & Bhattacharya, P. K. (1985). Quasiperiodic GaAs-AlAs heterostructures. *Physical Review Letters* 55(17), 1768–1770.
- [Monnier, 2001] Monnier, T. (2001). *Ondes de Lamb dans les milieux stratifiés : application à la surveillance in situ et en temps réel de l'endommagement de structures composites* PhD thesis Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [Montero de Espinosa *et al.*, 1998] Montero de Espinosa, F. R., Jiménez, E., & Torres, M. (1998). Ultrasonic band gap in a periodic two-dimensional composite. *Physical Review Letters* 80(6), 1208–1211.
- [Narayanamurti *et al.*, 1979] Narayanamurti, V., Störmer, H. L., Chin, M. A., Gossard, A. C., & Wiegmann, W. (1979). Selective transmission of high-frequency phonons by a superlattice : The " dielectric" phonon filter. *Physical Review Letters* 43(27), 2012–2016.
- [Nayfeh, 1991] Nayfeh, A. H. (1991). The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media. *Journal of the Acoustical Society of America* 89(4), 1521–1531.
- [Nayfeh, 1995] Nayfeh, A. H. (1995). *Wave propagation in layered anisotropic media : with applications to composites* (North Holland).
- [Odonnell *et al.*, 1981] Odonnell, M., Jaynes, E. T., & Miller, J. G. (1981). Kramers-kronig relationship between ultrasonic attenuation and phase velocity. *Journal of the Acoustical Society of America* 69(3), 696–701.

- [Petri *et al.*, 1994] Petri, A., Alippi, A., Bettucci, A., Craciun, F., Farrelly, F., & Molinari, E. (1994). Vibrational properties of a continuous self-similar structure. *Physical Review B* *49*(21), 15067–15075.
- [Ploix, 2006] Ploix, M. A. (2006). *Etude de l'atténuation des ondes ultrasonores. application au contrôle non destructif des soudures d'acier inoxydable austénitique* PhD thesis INSA de Lyon.
- [Potel & de Belleval, 1993] Potel, C. & de Belleval, J. F. (1993). Propagation in an anisotropic periodically multilayered medium. *Journal of the Acoustical Society of America* *93*, 2669–2677.
- [Rokhlin & Wang, 2002] Rokhlin, S. I. & Wang, L. (2002). Stable recursive algorithm for elastic wave propagation in layered anisotropic media : Stiffness matrix method. *Journal of the Acoustical Society of America* *112*, 822–834.
- [Royer & Dieulesaint, 1996] Royer, D. & Dieulesaint, E. (1996). *Ondes élastiques dans les solides : Propagation libre et guidée* (Masson).
- [Sánchez-Pérez *et al.*, 1998] Sánchez-Pérez, J. V., Caballero, D., Martínez-Sala, R., Rubio, C., Sánchez-Dehesa, J., Meseguer, F., Llinares, J., & Gálvez, F. (1998). Sound attenuation by a two-dimensional array of rigid cylinders. *Physical Review Letters* *80*(24), 5325–5328.
- [Santos *et al.*, 1987] Santos, P. V., Ley, L., Mebert, J., & Koblinger, O. (1987). Frequency gaps for acoustic phonons in a-Si : H/a-SiN_x : H superlattices. *Physical Review B* *36*(9), 4858–4867.
- [Sapoval, 1997] Sapoval, B. (1997). *Universalités et Fractales* (Flammarion).
- [Shechtman *et al.*, 1984] Shechtman, D., Blech, I., Gratias, D., & Cahn, J. W. (1984). Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Physical Review Letters* *53*(20), 1951–1953.
- [Sheng, 1990] Sheng, P. (1990). *Scattering and localization of classical waves in random media* (World Scientific Pub Co Inc).
- [Sheng & Zhang, 1986] Sheng, P. & Zhang, Z. Q. (1986). Scalar-wave localization in a two-component composite. *Physical Review Letters* *57*(15), 1879–1882.
- [Sigalas & Economou, 1993] Sigalas, M. & Economou, E. N. (1993). Band structure of elastic waves in two dimensional systems. *Solid State Communications* *86*(3), 141–143.
- [Sigalas & Soukoulis, 1995] Sigalas, M. M. & Soukoulis, C. M. (1995). Elastic-wave propagation through disordered and/or absorptive layered systems. *Physical Review B* *51*(5), 2780–2789.

- [Sigalas *et al.*, 1996] Sigalas, M. M., Soukoulis, C. M., Chan, C. T., & Turner, D. (1996). Localization of electromagnetic waves in two-dimensional disordered systems. *Physical Review B* *53*(13), 8340–8348.
- [Solie, 1976] Solie, L. P. (1976). Surface acoustic wave reflective dot array (RDA). *Applied Physics Letters* *28*(8), 420–422.
- [Tanaka & Tamura, 1998] Tanaka, Y. & Tamura, S. (1998). Surface acoustic waves in two-dimensional periodic elastic structures. *Physical Review B* *58*(12), 7958–7965.
- [Thomson, 1950] Thomson, W. T. (1950). Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of Applied Physics* *21*(2), 89–93.
- [Vasseur *et al.*, 1998] Vasseur, J. O., Deymier, P. A., Frantziskonis, G., Hong, G., Djafari-Rouhani, B., & Dobrzynski, L. (1998). Experimental evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional periodic composite media. *Journal of Physics : Condensed Matter* *10*(27), 6051–6064.
- [Vasseur *et al.*, 1994] Vasseur, J. O., Djafari-Rouhani, B., Dobrzynski, L., Kushwaha, M. S., & Halevi, P. (1994). Complete acoustic band gaps in periodic fibre reinforced composite materials : the carbon/epoxy composite and some metallic systems. *Journal of Physics : Condensed Matter* *6*(42), 8759–8770.
- [Villoutreix, 1998] Villoutreix, J. (1998). *Polyetherethercetone PEEK* (Techniques de l'Ingénieur).
- [Wang & Luan, 2002] Wang, C. C. & Luan, P. G. (2002). Effect of dielectric responses on localization in one-dimensional random periodic-on-average layered systems. *Physical Review E* *65*(6), 066602.
- [Waters *et al.*, 2000] Waters, K. R., Hughes, M. S., Mobley, J., Brandenburger, G. H., & Miller, J. G. (2000). On the applicability of kramers–krönig relations for ultrasonic attenuation obeying a frequency power law. *Journal of the Acoustical Society of America* *108*(2), 556–563.
- [Weaver, 1990] Weaver, R. L. (1990). Anderson localization of ultrasound. *Wave Motion* *12*(2), 129–142.
- [Yablonovitch, 1987] Yablonovitch, E. (1987). Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Physical Review Letters* *58*(20), 2059–2062.
- [Yang *et al.*, 1999] Yang, X., Liu, Y., & Fu, X. (1999). Transmission properties of light through the fibonacci-class multilayers. *Physical Review B* *59*(7), 4545–4548.
- [Ye *et al.*, 1992] Ye, L., Cody, G., Zhou, M., Sheng, P., & Norris, A. N. (1992). Observation of bending wave localization and quasi mobility edge in two dimensions. *Physical Review Letters* *69*(21), 3080–3083.

ANNEXE A

Résolution de l'équation de Christoffel

Propagation des ondes de volumes en milieu anisotrope : équation de Christoffel

Dans un solide anisotrope quelconque et illimité, l'équation de propagation des ondes (équation A.1)

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}, \quad (\text{A.1})$$

découle de la combinaison des lois fondamentales de la dynamique (équation A.2) et de Hooke (équation A.3) en négligeant les forces de pesanteur et d'inertie :

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}, \quad (\text{A.3})$$

avec $i, j = 1 : 3$, ρ la masse volumique, u_i les projections du vecteur déplacement sur les axes du repère des coordonnées, σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes et C_{ijkl} , les composantes du tenseurs des rigidités.

Les solutions cherchées sont sous la forme d'**ondes de volume planes progressives** d'amplitude u_i^0 , se propageant dans la direction \vec{n} à la vitesse de phase c_φ :

$$u_i = u_i^0 F\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{c_\varphi}\right) = u_i^0 F(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (\text{A.4})$$

L'équation de Christoffel s'obtient en injectant cette expression (A.4) dans l'équation du mouvement (A.1).

$$(\rho c_\varphi^2) u_i^0 = (C_{ijkl} n_j n_k) u_l^0 = \Gamma_{il} u_l^0 \quad (\text{A.5})$$

Les vitesses de phase et les polarisations des ondes planes se propageant suivant une direction \vec{n} , dans un cristal de rigidité C_{ijkl} , sont les valeurs et vecteurs propres du tenseur de Christoffel Γ_{ij} . Le vecteur déplacement \vec{u} n'est pas en général colinéaire ou perpendiculaire à la direction de propagation \vec{n} . L'onde dont la polarisation est la plus proche de \vec{n} est dite *quasi-longitudinale*, les autres sont dites *quasi-transversales* (figure A.1). Ce n'est que suivant des directions de propagation particulières que les ondes sont purement longitudinales ou transverses.

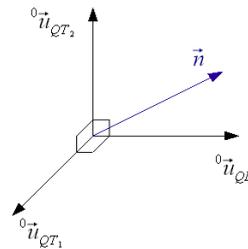


FIG. A.1 – Les trois polarisations des ondes par rapport à la direction de propagation \vec{n} .

En développant sur les indices j et k on a les termes de Γ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11} = C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 + C_{55}n_3^2 + 2C_{16}n_1n_2 + 2C_{15}n_1n_3 + 2C_{56}n_2n_3 \\ \Gamma_{12} = C_{16}n_1^2 + C_{26}n_2^2 + C_{45}n_3^2 + (C_{12} + C_{66})n_1n_2 + (C_{14} + C_{56})n_1n_3 + (C_{46} + C_{25})n_2n_3 \\ \Gamma_{13} = C_{15}n_1^2 + C_{46}n_2^2 + C_{35}n_3^2 + (C_{14} + C_{56})n_1n_2 + (C_{13} + C_{55})n_1n_3 + (C_{36} + C_{45})n_2n_3 \\ \Gamma_{22} = C_{66}n_1^2 + C_{22}n_2^2 + C_{44}n_3^2 + 2C_{26}n_1n_2 + 2C_{46}n_1n_3 + 2C_{24}n_2n_3 \\ \Gamma_{23} = C_{56}n_1^2 + C_{24}n_2^2 + C_{34}n_3^2 + (C_{46} + C_{25})n_1n_2 + (C_{36} + C_{45})n_1n_3 + (C_{23} + C_{44})n_2n_3 \\ \Gamma_{33} = C_{55}n_1^2 + C_{44}n_2^2 + C_{33}n_3^2 + 2C_{45}n_1n_2 + 2C_{35}n_1n_3 + 2C_{34}n_2n_3 \end{array} \right.$$

Pour une explication détaillée de ce problème, vous pouvez vous référer au livre de Daniel Royer [Royer & Dieulesaint, 1996] qui présente exhaustivement les ressorts de la propagation des ondes élastiques dans les solides isotropes et anisotropes.

ANNEXE B

Homogénéisation des propriétés élastiques d'un composite unidirectionnel

Les développements qui permettent de calculer les constantes élastiques homogénéisées d'un pli unidirectionnel à partir des propriétés des constituants élémentaires sont exposés dans l'article de Datta [Datta *et al.*, 1984]. Les expressions finales des modules élastiques sont présentées ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_L = E_m(1 - V_f) + E_{fL}V_f + \frac{4V_f(1 - V_f)(\nu_{fL} - \nu_m)^2}{((1 - V_f)/K_{fT}) + V_f/K_m + 1/\mu_m} \\ \nu_L = \nu_{fL}V_f + \nu_m(1 - V_f) + \frac{V_f(1 - V_f)(\nu_{fL} - \nu_m)(1/K_m - 1/K_{fT})}{((1 - V_f)/K_{fT}) + V_f/K_m + 1/\mu_m} \\ \mu_T = \mu_m \left(1 + \frac{2V_f(\mu_{fT} - \mu_m)(K_m + \mu_m)}{2\mu_m(K_m + \mu_m) + (1 - V_f)(K_m + 2\mu_m)(\mu_{fT} - \mu_m)} \right) \\ \mu_L = \mu_m \frac{\mu_{fL}(1 + V_f) + \mu_m(1 - V_f)}{\mu_{fL} * (1 - V_f) + \mu_m * (1 + V_f)} \\ K_T = K_m + (K_m + \mu_m) \frac{V_f(K_{fT} - K_m)}{(1 - V_f)K_{fT} + V_fK_m + \mu_m} \end{array} \right. \quad (B.1)$$

Les indices f , m se réfèrent respectivement aux caractéristiques des fibres et de la matrice. V_f est la fraction volumique de fibres dans le matériau. E_L , ν_L , μ_L , μ_T et K_T sont les modules de l'ingénieur du matériau. La matrice des rigidités se calcule à partir de ces modules. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_L + 4(\nu_L^2)K_T \\ C_{12} &= 2K_T\nu_L \\ C_{22} &= K_T + \mu_T \\ C_{23} &= K_T - \mu_T \\ C_{66} &= \mu_L \end{aligned} \quad (B.2)$$

et

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & & & \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & & & \mathbf{0} \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & & & \\ & & & (C_{22} - C_{23})/2 & & \\ & \mathbf{0} & & & C_{66} & \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \text{ GPa.} \quad (\text{B.3})$$

Les valeurs numériques utilisées pour homogénéiser le composite constitué de fibres de carbone et de résine PEEK sont récapitulées ci-après.

– La fraction volumique de fibres est : $V_f = 66\%$;

Les propriétés des fibres de carbone sont extraites de la thèse de Sébastien Lonné [Lonné, 2003] :

Modules d'Young :	$E_{fL} = 232\text{GPa}$
	$E_{fT} = 13,4\text{GPa}$
Coefficients de Poisson :	$\nu_{fL} = 0,215$
	$\nu_{fT} = 0,33$
Modules de cisaillement :	$\mu_{fL} = 24\text{GPa}$
	$\mu_{fT} = 3,3\text{GPa}$
Module de compression latérale :	$K_{fT} = 14,8\text{GPa}$

TAB. B.1 – *Propriétés mécaniques des fibres de carbone.*

Et les propriétés de la résine PEEK figurent dans l'article de Fitch [Fitch *et al.*, 2010].

Module d'Young :	$E_m = 4,6\text{GPa}$
Module de cisaillement :	$\mu_m = 1,7\text{GPa}$
Module d'élasticité isostatique :	$K_m = 6,6\text{GPa}$
Coefficient de Poisson :	$\nu_m = 0,38$

TAB. B.2 – *Propriétés mécaniques de la résine PEEK.*

Algorithme de la matrice de raideur

La modélisation de la propagation des ondes élastiques dans des milieux anisotropes se déroule en deux étapes :

1. La détermination des ondes pouvant se propager dans le matériau anisotrope par l'équation de Christoffel (annexe A) ;
2. La modélisation, à l'aide des conditions aux limites, de la propagation dans le multicouche.

Nous rappellerons ici les hypothèses de notre étude et verrons rapidement la résolution de l'équation de Christoffel. Puis nous exposerons un bref historique des méthodes de calcul dans les milieux multicouches et décrirons en détails la méthode de la matrice de raideur de couche développée par Rokhlin et Wang et publiée en 2002 [Rokhlin & Wang, 2002].

Modèle général de propagation des ondes élastiques dans des matériaux multicouches anisotropes : méthode de la matrice de raideur de couche

Ainsi, une onde plane monochromatique d'angle d'incidence θ génère, dans une couche anisotrope, une onde quasi-longitudinale, et deux ondes quasi-transverses. Ces ondes, réfléchies et réfractées sur les deux interfaces de la couche, en génèrent chacune six autres. Ainsi, il y a une infinité d'ondes présentes dans la couche (Fig. C.1). La superposition de toutes ces ondes crée en fait seulement six types d'onde dans chaque couche : deux ondes quasi-longitudinales (l'une se propageant vers le haut, l'autre vers le bas), deux ondes quasi-transversales de type 1, et deux ondes quasi-transversales de type 2 (Fig. C.1).

Pour étudier la propagation globale dans les multicouches anisotropes, plusieurs méthodes ont été développées depuis les années 50. La méthode de la matrice de raideur

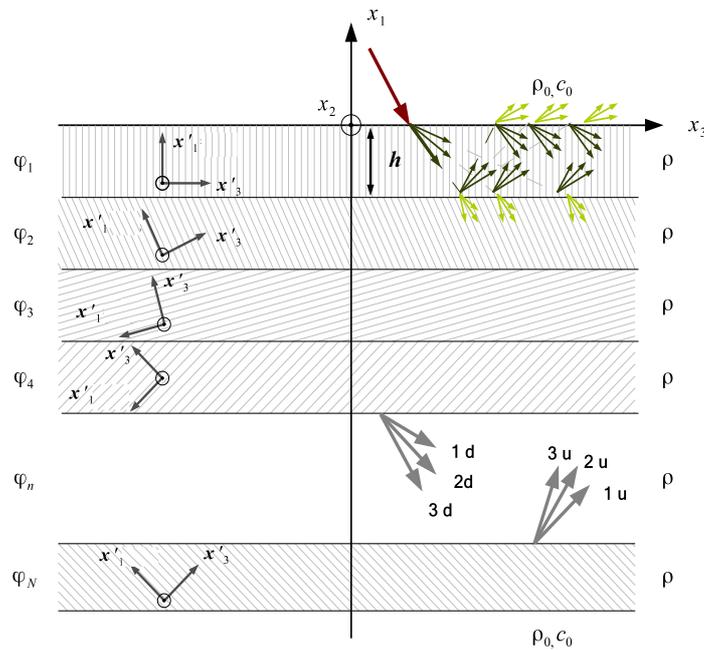


FIG. C.1 – Schématisation du problème de la propagation des ondes élastiques dans un milieu multicouche anisotrope.

de couche, utilisée dans ce travail, a été publiée en 2002 par Rokhlin et Wang [Rokhlin & Wang, 2002]. Elle dérive de la méthode de la matrice de transfert [Thomson, 1950; Haskell, 1953] développée pour des études géophysiques. Cette dernière s'est révélée instable pour des épaisseurs de quelques longueurs d'onde. Dans les milieux anisotropes, le couplage des ondes polarisées verticalement et horizontalement et l'apparition d'ondes évanescentes compliquent la mise en équation. Dans le cas où des ondes évanescentes sont présentes, des exponentielles croissantes sont générées et créent des instabilités [Dunkin, 1965]. D'autres méthodes ont par la suite été développées pour généraliser le problème [Fryer & Frazer, 1984] et par Nayfeh [Nayfeh, 1991] et pour améliorer les temps de calcul et gérer les instabilités :

1. la méthode de l'opérateur Delta [Dunkin, 1965] généralisée aux milieux anisotropes par Castaings en 1993 [Castaings & Hosten, 1994] ;
2. la méthode de la matrice globale qui est une méthode stable et robuste mais très coûteuse en temps de calcul [Lowe, 1995] ;
3. la méthode de réflexion (ou réverbération) qui nécessite une implémentation numérique lourde : milieux isotropes [Fryer & Frazer, 1984] ;
4. la méthode de la matrice de raideur de couche basée sur un algorithme récursif [Rokhlin & Wang, 2002] ;

5. et la méthode de la matrice d'impédance de surface basée sur le même genre de schéma [Hosten & Castaings, 2003].

Toutes ces méthodes utilisent des matrices qui connectent les contraintes et déplacements (ou vitesses) appliqués aux interfaces supérieure et inférieure d'une couche.

Définition du repère global et expression des déplacements

Les axes du repère d'étude sont tels que : x_1 est normal à l'empilement et dirigé vers le fluide supérieur, x_3 est orienté le long de l'axe d'orthotropie de la première couche, et x_2 est normal à x_1 et x_3 .

Dans la n ème couche, le déplacement s'écrit comme la superposition des 6 ondes solutions de l'équation de Christoffel :

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^3 \left(A_{\mathbf{d}j}^n \vec{P}_{\mathbf{d}j}^n \exp [ik_{\mathbf{d}j}^n(x_1 - x_1^{m-1})] + A_{\mathbf{u}j}^n \vec{P}_{\mathbf{u}j}^n \exp [k_{\mathbf{u}j}^n(x_1 - x_1^m)] \right) e^{i(k_2x_2+k_3x_3-\omega t)} \quad (\text{C.1})$$

où $A_{\mathbf{u}/\mathbf{d}j}^n$, $\vec{P}_{\mathbf{u}/\mathbf{d}j}^n$ et $k_{\mathbf{u}/\mathbf{d}j}^n$ ($j = 1..3$) sont les amplitudes, les polarisations et la projection du vecteur d'onde sur l'axe x_1 des ondes se propageant vers le haut (respectivement le bas).

Relation déplacements-contraintes

Les déplacements aux interfaces de la couche m , \mathbf{u}_{m-1} et \mathbf{u}_m , peuvent être reliés aux amplitudes des ondes par une matrice :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{m-1} \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{d}} & \mathbf{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{H}_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{d}}\mathbf{H}_{\mathbf{d}} & \mathbf{P}_{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{d}} \\ \mathbf{A}_{\mathbf{u}} \end{pmatrix}_m = \mathbf{E}_{\mathbf{u}}^m \mathbf{A}^m \quad (\text{C.2})$$

$\mathbf{P}_{\mathbf{d}/\mathbf{u}}$ et $\mathbf{A}_{\mathbf{d}/\mathbf{u}}$ contiennent les trois polarisations et amplitudes des ondes se propageant vers le bas \mathbf{d} et vers le haut \mathbf{u} .

Et,

$$\mathbf{H}_{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} e^{-ik_{\mathbf{d}}^1 h} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_{\mathbf{d}}^2 h} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_{\mathbf{d}}^3 h} \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} e^{ik_{\mathbf{u}}^1 h} & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik_{\mathbf{u}}^2 h} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_{\mathbf{u}}^3 h} \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

où h est l'épaisseur de la couche.

La loi de Hooke (Eq. C.4) lie les déplacements et les contraintes $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})^T$.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}. \quad (\text{C.4})$$

Et donc :

$$\sigma^m = \sum_{j=1}^3 (A_{\mathbf{d}}^j \mathbf{d}_{\mathbf{d}}^j e^{ik_{\mathbf{d}}^j (x_1^m - x_1^{m-1})} + A_{\mathbf{u}}^j \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^j e^{ik_{\mathbf{u}}^j (x_1 - x_m)}) e^{i(k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t)} \quad (\text{C.5})$$

De la même manière que pour les déplacements, les contraintes peuvent être reliées aux amplitudes des ondes :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{m-1} \\ \sigma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{d}} & \mathbf{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{H}_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{D}_{\mathbf{d}} \mathbf{H}_{\mathbf{d}} & \mathbf{D}_{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{d}} \\ \mathbf{A}_{\mathbf{u}} \end{pmatrix}_m = \mathbf{E}_{\sigma}^m \mathbf{A}^m. \quad (\text{C.6})$$

Matrice de raideur

Ainsi il est possible de connecter les contraintes et les déplacements sur le dessus et le dessous des couches, et de déterminer la matrice de raideur de chacune des couches \mathbf{K} :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{m-1} \\ \sigma_m \end{pmatrix} = \mathbf{E}_{\sigma}^m \mathbf{E}_{\mathbf{u}}^{m-1} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{m-1} \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} = \mathbf{K}^m \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{m-1} \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^m & \mathbf{K}_{12}^m \\ \mathbf{K}_{21}^m & \mathbf{K}_{22}^m \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Algorithme récursif de la matrice de raideur

On peut calculer la matrice de raideur totale de l'empilement \mathbf{K}^N à l'aide d'un algorithme récursif (Fig. 3.9), avec la matrice de raideur de la couche n , \mathbf{K}^n , et la matrice de raideur totale des $n - 1$ couches du dessus \mathbf{K}^{N-1} (Eq. C.8).

$$\mathbf{K}^N = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^{N-1} + \mathbf{K}_{12}^{N-1} (\mathbf{K}_{11}^n - \mathbf{K}_{22}^{N-1})^{-1} \mathbf{K}_{21}^{N-1} & -\mathbf{K}_{12}^{N-1} (\mathbf{K}_{11}^n - \mathbf{K}_{22}^{N-1})^{-1} \mathbf{K}_{12}^n \\ \mathbf{K}_{21}^n (\mathbf{K}_{11}^n - \mathbf{K}_{22}^{N-1})^{-1} \mathbf{K}_{21}^{N-1} & \mathbf{K}_{22}^n - \mathbf{K}_{21}^n (\mathbf{K}_{11}^n - \mathbf{K}_{22}^{N-1})^{-1} \mathbf{K}_{12}^n \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Coefficients de réflexion et transmission

Les coefficients de la matrice de raideur de couche totale relient contraintes et déplacements aux deux interfaces du matériau multicouche. Il est ainsi possible, en connaissant les caractéristiques du milieu environnant, d'avoir accès aux coefficients de réflexion et transmission.

Le potentiel acoustique dans le fluide (de vitesse de propagation du son c_f) situé au dessus de l'empilement, pour une onde plane de fréquence ω et d'incidence θ_{inc} par rapport à l'axe x_1 s'écrit :

$$\phi_1(k_{x_2}, x_1, \omega) = (A_{inc} \exp(-i\omega \cos \theta_{inc} x_1 / c_f) + R \exp(i\omega \cos \theta_{inc} x_1 / c_f)) e^{i(k_{x_2} x_2 - \omega t)}. \quad (C.9)$$

Pour l'onde transmise, le potentiel acoustique est donné par :

$$\phi_2(k_{x_2}, x_1, \omega) = T \exp(-i\omega \cos \theta_{inc} x_1 / c_f) e^{i(k_{x_2} x_2 - \omega t)}. \quad (C.10)$$

Dans le fluide, pression et vitesse sont reliées à ϕ : $-\text{grad} p = \rho_f \partial \vec{v} / \partial t$ et $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$. On peut ainsi écrire :

$$\begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ \sigma_{11}^0 \\ \sigma_{12}^0 \\ \sigma_{13}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta / c_f & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -i\omega \rho_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos \theta_{inc} / c_f \\ 0 \\ 0 \\ -i\omega \rho_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} A_{inc} \quad (C.11)$$

et sur la face inférieure :

$$\begin{pmatrix} u_1^N \\ u_2^N \\ u_3^N \\ \sigma_{11}^N \\ \sigma_{12}^N \\ \sigma_{13}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta / c_f & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -i\omega \rho_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ u_2^N \\ u_3^N \end{pmatrix} \quad (C.12)$$

En sachant que les déplacements et contraintes sont reliés par la matrice des souplesses ($\mathbf{S}^N = \mathbf{K}^{N-1}$) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_N \end{pmatrix}. \quad (C.13)$$

En égalant Eq. C.11, Eq. C.12 et Eq. C.13, on peut exprimer les coefficients de réflexion et transmission en amplitude de pression à partir des coefficients de la matrice de souplesse :

$$\mathcal{R} = \frac{-(S_{11}^{11} - \Lambda)(S_{22}^{11} - \Lambda) + S_{12}^{11}S_{21}^{11}}{(S_{22}^{11} - \Lambda)(S_{11}^{11} + \Lambda) - S_{12}^{11}S_{21}^{11}} \quad (\text{C.14})$$

$$\mathcal{J} = \frac{2\Lambda S_{21}^{11}}{(S_{22}^{11} - \Lambda)(S_{11}^{11} + \Lambda) - S_{12}^{11}S_{21}^{11}} \quad (\text{C.15})$$

avec les S_{ij}^{11} qui sont les éléments de rang (1, 1) des sous matrices \mathbf{S}_{ij} , $\Lambda = \frac{\cos \theta_{inc}}{i\omega \rho_f c_f}$, ρ_f et c_f la densité et la célérité des ondes dans le fluide, θ_{inc} l'angle d'incidence et ω la pulsation.

Relation de dispersion

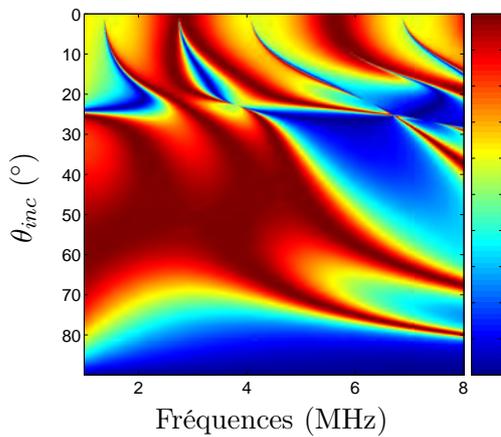
Les relations de dispersion des ondes de Lamb peuvent être déduites de l'annulation du déterminant de la matrice de raideur totale :

$$\text{Det}(\mathbf{K}^N) = 0. \quad (\text{C.16})$$

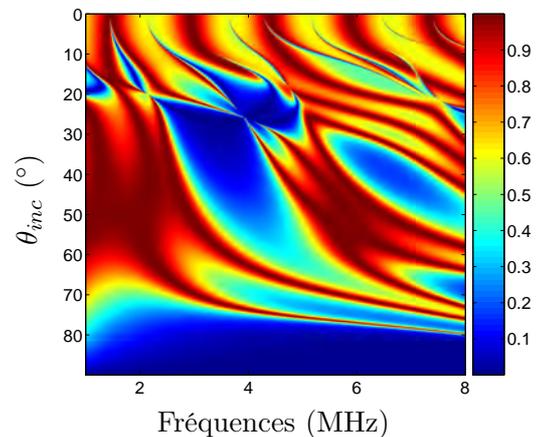
Dans le cas de matériaux symétriques, nous sommes parvenus à résoudre ces équations. Des développements sont en cours pour adapter la méthode à des empilements présentant des orientations quelconques (ce qui complique la recherche des minima du déterminant).

ANNEXE D

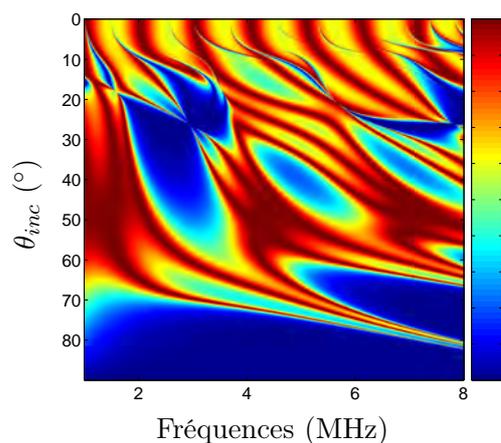
Courbes des coefficients de transmission en fonction de la dimension d'homothétie



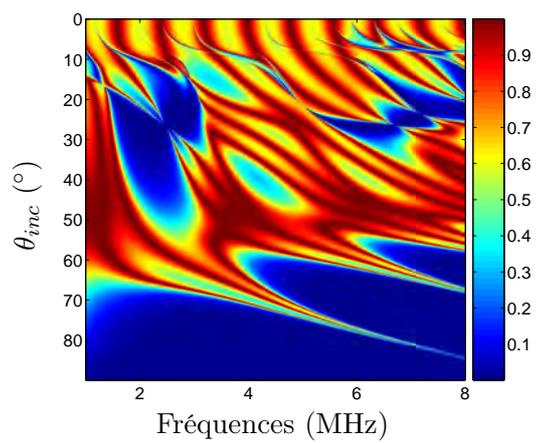
(a) $\alpha = 0,05$



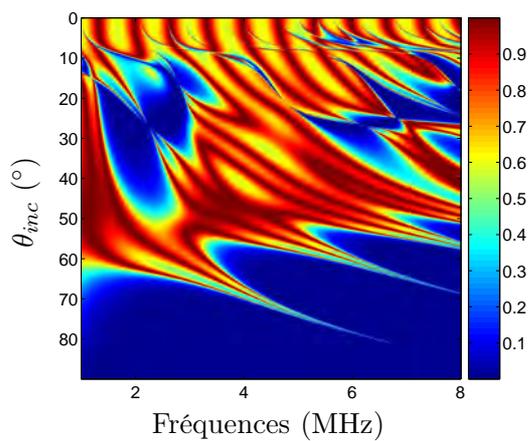
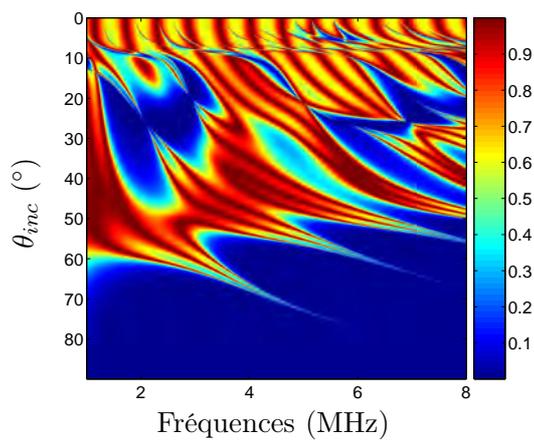
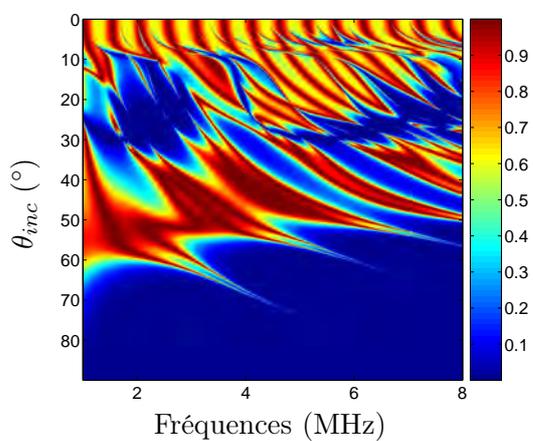
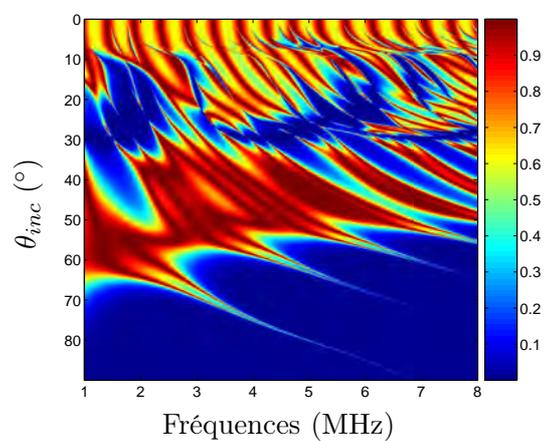
(b) $\alpha = 0,1$



(c) $\alpha = 0,15$



(d) $\alpha = 0,2$

(e) $\alpha = 0,25$ (f) $\alpha = 0,3$ (g) $\alpha = 0,35$ (h) $\alpha = 0,4$

AUTHOR : Marie-Fraïse PONGE

TITLE : Elastic waves propagation in multilayered self-similar media : Applicability to stratified carbon fiber reinforced composites

SUPERVISORS : Vincent GIBIAT and Xavier JACOB

LOCATION AND DATE OF DEFENCE :

University of Toulouse III Paul Sabatier - The 20th of june 2012

ABSTRACT :

Fiber reinforced composites are more and more used in industry. The association of their **draping** properties with **self-similarity** allows to create innovative materials. Elastic wave propagation of in such media is numerically and experimentally studied.

The **Cantor's** set and the **Fibonacci** sequence generate self-similar structures. Moreover, stratified fiber reinforced composites are constituted by a draping of orthotropic plies. Multilayered Cantor and Fibonacci stacks are manufactured. Self-similarity is applied on **geometry** and on **plies orientation**.

Periodic, disordered and self-similar structures are compared thanks to a **unidirectional numerical model** based on a **transfer matrix formalism**. It shows that stacks self-similarity influences the acoustic transmission properties. Self-similar stacks transmission coefficient presents a self-similar shape and behavior. It is demonstrated that self-similar structures possess periodic and disordered media properties. They combine **band-gaps** and **localization** phenomena. Ordered and self-similar samples are then **experimentally** compared through **ultrasonic measures**. Experimental transmission coefficients, phase velocities and attenuations indicate that the more disorder there is, the lower the global transmission is and the higher the intrinsic attenuation is. Finally, elastic waves propagation is computed thanks to the **stiffness matrix algorithm**. It is shown that self-similar structures create **deterministic irregularities** enhancing the drop of the acoustic transmission and the increase of attenuation. The homothetic dimension allows to adapt the ratio heterogeneities and wavelength to optimize the self-similar stacks.

KEY WORDS :

composite materials, self-similarity, elastic waves, propagation, acoustics, multilayer, anisotropy, disorder, Cantor, Fibonacci, quasi-periodicity, transfer matrix, stiffness matrix method, complex media

LABORATORY ADDRESS :

Laboratoire PHASE (Physique de l'Homme Appliquée à Son Environnement)

Université Toulouse III - Paul Sabatier

118, route de Narbonne

31062 TOULOUSE CEDEX 09 - FRANCE

AUTEUR : Marie-Fraise PONGE

TITRE : Propagation d'ondes élastiques dans des multicouches autosimilaires :
Application aux composites stratifiés renforcés de fibres de carbone

DIRECTEURS DE THESE : Vincent GIBIAT et Xavier JACOB

LIEU ET DATE DE SOUTENANCE :

Université de Toulouse III Paul Sabatier - Le 20 juin 2012

RESUME :

Les matériaux composites renforcés de fibres de carbone sont largement utilisés dans l'industrie. L'association de leurs propriétés de **drapage** avec le concept d'**autosimilarité** permet de créer des matériaux innovants. Nous étudions numériquement et expérimentalement la propagation des ondes élastiques dans ces milieux. Un code de calcul **unidimensionnel** permet de comparer structures périodiques, désordonnées et autosimilaires. Il montre que l'autosimilarité des arrangements apparaît dans la **transmission acoustique**. L'étude **expérimentale ultrasonore** d'échantillons composites carbone/PEEK et l'**algorithme de la matrice de raideur** modélisant la propagation des ondes dans ces matériaux, montrent que les empilements autosimilaires créent des **irrégularités déterministes** favorables à la réduction de la transmission acoustique.

MOTS-CLES :

matériaux composites, autosimilarité, ondes élastiques, propagation, acoustique, multicouche, anisotropie, Cantor, Fibonacci, quasi-périodicité, désordre, matrice de transfert, matrice de raideur de couche, milieux complexes

DISCIPLINE ADMINISTRATIVE :

Génie mécanique, Mécanique des matériaux

LABORATOIRE DE RATTACHEMENT :

Laboratoire PHASE (Physique de l'Homme Appliquée à Son Environnement)

Université Toulouse III - Paul Sabatier

118, route de Narbonne

31062 TOULOUSE CEDEX 09 - FRANCE