



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

l'Université Toulouse III - Paul Sabatier

---

Présentée et soutenue par :

Renaud GANTOIS

Le 12/03/2012

Titre :

Contribution à la modélisation de l'écoulement de résine dans  
les procédés de moulage des composites par voie liquide

---

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED MEGEP : Génie Mécanique, Mécanique des Matériaux

Unité de recherche :

Institut Clément Ader : École des Mines d'Albi - IUT de Tarbes

Directeurs de thèse :

F. SCHMIDT, J.-N. FELICES

Rapporteurs :

F. CHINESTA	École Centrale de Nantes	Rapporteur
J. BRÉARD	Université du Havre	Rapporteur

Autres membres du jury :

F. COLLOMBET	IUT Paul Sabatier, Université Toulouse III	Examineur
L. SILVA	École des Mines de Paris	Examinatrice
P. LAURE	Université de Nice	Examineur
A. CANTAREL	IUT de Tarbes, Université Toulouse III	Examineur
J.-N. FELICES	IUT de Tarbes, Université Toulouse III	Examineur
F. SCHMIDT	École des Mines d'Albi	Examineur
P. HERMEL	DAHER-SOCATA	Invité



*à ma famille,  
à Marie*



# Remerciements

Ce travail a été réalisé à l'Institut Clément Ader (ICA), sur les sites de l'École des Mines d'Albi et de l'IUT de Tarbes. Mes premiers remerciements iront aux directeurs des centres, qui m'ont accueilli dans leurs laboratoires et mis à ma disposition les moyens nécessaires à la préparation de cette thèse. Merci à Gérard BERNHART et Thierry CUTARD à Albi, ainsi qu'à Gérard CASSOU, Jean-Noël FELICES et Florent EYMA à Tarbes.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements aux membres du jury, Francisco CHINESTA, Joël BRÉARD, Francis COLLOMBET, Luisa SILVA, Patrice LAURE et Pascal HERMEL, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux, les remarques constructives dont ils m'ont fait part, et les idées nouvelles qui ont émergé de la discussion.

J'exprime toute ma gratitude à mes directeurs de thèse, Fabrice SHMIDT et Jean-Noël FELICES, ainsi qu'à mon encadrant Arthur CANTAREL, pour leur soutien scientifique, leur confiance et leur disponibilité qui m'ont permis de mener à terme ce travail.

Je remercie également Daher-Socata, ainsi que l'ENIT et le CRCC de Tarbes, pour leur collaboration et leurs conseils avisés. Je remercie en particulier les chefs de projet, Pierrick VENISSE, Didier ACHÉRITOGARAY et Michael HUGON qui m'ont intégré à l'équipe du programme FUSCOMP. Je salue également l'ensemble des membres du projet, notamment les doctorants, techniciens et ingénieurs avec qui j'ai eu le plaisir de travailler durant ces trois ans.

Un grand merci aux personnes que j'ai sollicitées et qui m'ont apporté leur précieuse aide pendant mon séjour à l'ICA. Je remercie en particulier Gilles DUSSERE, pour son apport scientifique et ses qualités humaines. Merci également à Éric JOURDAIN et Romain BRAULT pour leur participation à la réalisation du banc de perméabilité, Benoît COSSON et Nicolas PIRC pour leur contributions numériques, Emmanuel LAUGT pour le développement du dispositif d'acquisition du banc, et Olivier PACSAL pour son implication dans le développement du solveur de Stokes durant son stage de Master 2.

Merci également à tous mes collègues et amis de l'ICA et de RAPSODEE, avec qui j'ai partagé d'excellents moments, que ce soit sur le lieu de travail ou à l'extérieur. Merci à l'ensemble du personnel des centres, doctorants, techniciens, ingénieurs de recherche,

## Remerciements

---

enseignants-chercheurs et assistantes de gestion, pour l'agréable ambiance qui règne dans les laboratoires et les bons souvenirs que j'emporte avec moi.

Pour finir, je voudrais remercier mes parents, ma soeur Laetitia, ma famille, la famille DIETEMANN ainsi que tous mes proches, pour votre soutien inconditionnel et vos encouragements qui ont été déterminants dans l'accomplissement de ce travail. Enfin, un immense merci à toi Marie, pour ta présence indispensable, ta patience sans limite et ton aide, qui m'ont permis ces derniers mois de finaliser ce manuscrit.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Table des matières</b>	<b>vi</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>6</b>
<b>Contexte</b>	<b>7</b>
1    Projet FUSCOMP . . . . .	7
2    Structure du projet . . . . .	8
<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
1    Matériaux composites . . . . .	10
2    Procédés d'élaboration par moulage voie liquide . . . . .	12
3    Problématiques industrielles . . . . .	16
4    Problématiques scientifiques . . . . .	17
5    Objectifs . . . . .	19
6    Organisation du manuscrit . . . . .	19
<b>1 Mesure de perméabilité</b>	<b>21</b>
Introduction . . . . .	22
1.1 Préambule bibliographique . . . . .	22
1.1.1 Loi de Darcy . . . . .	22
1.1.2 Perméabilités principales . . . . .	23
1.1.3 État de l'art . . . . .	24
1.2 Développement du dispositif expérimental . . . . .	30
1.2.1 Méthodologie retenue . . . . .	30
1.2.2 Mise en œuvre matérielle . . . . .	31
1.2.3 Exploitation des données expérimentales . . . . .	35
1.3 Premiers résultats : caractérisation du renfort G0986 . . . . .	41
1.3.1 Présentation du renfort . . . . .	41
1.3.2 Mesure 2D . . . . .	42
1.3.3 Mesure 3D . . . . .	45
Conclusion . . . . .	48

---

<b>2</b>	<b>Modélisation BEM de l'écoulement à l'échelle du procédé</b>	<b>51</b>
	Introduction . . . . .	52
2.1	Description du modèle d'écoulement . . . . .	54
2.1.1	Équations du mouvement . . . . .	54
2.1.2	Conditions aux limites . . . . .	54
2.1.3	Formulation forte . . . . .	56
2.2	Résolution BEM du problème potentiel anisotrope . . . . .	57
2.2.1	Formulation intégrale frontière . . . . .	57
2.2.2	Discrétisation de la frontière et résolution numérique . . . . .	60
2.2.3	Validation des solveurs et étude de sensibilité au maillage . . . . .	64
2.3	Traitement de l'avancée du front . . . . .	69
2.3.1	Formalisme de la méthode Level Set . . . . .	69
2.3.2	Couplage Level Set / BEM . . . . .	70
2.3.3	Génération du maillage frontière . . . . .	73
	Conclusion . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Applications et validations</b>	<b>83</b>
	Introduction . . . . .	84
3.1	Remplissage dans le plan d'une plaque carrée . . . . .	84
3.1.1	Injection centrale anisotrope . . . . .	84
3.1.2	Injection frontale à débit imposé . . . . .	88
3.1.3	Infusion périphérique . . . . .	90
3.2	Infusion plane d'un tricot : confrontation expérimentale . . . . .	93
3.2.1	Dispositif expérimental . . . . .	93
3.2.2	Mise en œuvre numérique . . . . .	94
3.2.3	Résultats et discussion . . . . .	95
3.3	Étude 2D de placement d'événements, multi-injection . . . . .	98
3.3.1	Géométrie du moule et stratégies d'injection . . . . .	98
3.3.2	Mise en œuvre numérique . . . . .	99
3.3.3	Résultats et discussion . . . . .	100
3.4	Infusion plane d'une plaque de grande dimension, gravité . . . . .	103
3.4.1	Dimensions de la plaque, paramètres rhéologiques et procédés . . . . .	103
3.4.2	Infusion par deux seuils circulaires . . . . .	104
3.4.3	Infusion par un réseau de canaux d'alimentation . . . . .	106
3.5	Infusion d'une pièce tridimensionnelle . . . . .	108
3.5.1	Géométrie et paramètres de la simulation . . . . .	108
3.5.2	Grille de fond . . . . .	109
3.5.3	Résultats et discussion . . . . .	110
	Conclusion . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Modélisation BEM de l'écoulement à l'échelle des fibres</b>	<b>113</b>
	Introduction . . . . .	114
4.1	Description du modèle d'écoulement . . . . .	116
4.1.1	Équations de Stokes . . . . .	116
4.1.2	Conditions aux limites . . . . .	117



4.1.3	Formulation forte . . . . .	118
4.2	Résolution BEM des équations de Stokes . . . . .	118
4.2.1	Formulation intégrale frontière . . . . .	119
4.2.2	Discrétisation de la frontière et résolution numérique . . . . .	121
4.2.3	Validation du solveur et étude de sensibilité au maillage . . . . .	123
4.3	Application au calcul de la perméabilité transverse . . . . .	126
4.3.1	Étude d'un arrangement idéal carré . . . . .	127
4.3.2	Génération d'une microstructure réaliste . . . . .	131
4.3.3	Étude d'une coupe micrographique . . . . .	132
	Conclusion . . . . .	134
<b>Conclusion générale et perspectives</b>		<b>135</b>
<b>Table des figures</b>		<b>142</b>
<b>Liste des algorithmes</b>		<b>143</b>
<b>Liste des tableaux</b>		<b>145</b>
<b>Références bibliographiques</b>		<b>159</b>
<b>A Modèle optique intégrant la réfraction dans le moule</b>		<b>161</b>
1	Loi de Snell-Descartes . . . . .	161
2	Expression du modèle . . . . .	161
<b>B Solutions analytiques : écoulements radiaux de type Darcy et Stokes</b>		<b>163</b>
1	Écoulement radial de Darcy à pression imposée, cas isotrope . . . . .	163
1.1	Écoulement 2D . . . . .	164
1.2	Écoulement 3D . . . . .	164
2	Écoulement radial de Stokes à pression imposée, déformation plane . . . . .	165
<b>C Solutions fondamentales, gradients et calcul aux points internes</b>		<b>167</b>
1	Problème potentiel anisotrope . . . . .	168
1.1	Domaine de calcul 2D . . . . .	168
1.2	Domaine de calcul 3D . . . . .	169
2	Problème de Stokes 2D . . . . .	171
2.1	Calcul de la vitesse interne . . . . .	171
2.2	Calcul des contraintes internes . . . . .	172
<b>D Algorithmes</b>		<b>173</b>
1	Assemblage des matrices $G$ et $H$ . . . . .	174
1.1	Problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D . . . . .	174
1.2	Problème de Stokes 2D . . . . .	175
2	Réorganisation et résolution du système linéaire . . . . .	176
2.1	Problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D . . . . .	176
2.2	Problème de Stokes 2D . . . . .	177

---

3	Calculs aux points internes . . . . .	178
3.1	Problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D . . . . .	178
3.2	Problème de Stokes 2D . . . . .	181
4	Remaillage frontière . . . . .	183
4.1	Régularisation du maillage . . . . .	183
4.2	Marching Triangles . . . . .	184
4.3	Marching Tetrahedra . . . . .	185
<b>E</b>	<b>Intégration numérique par la formule de Gauss</b>	<b>187</b>
1	Élément 1D : segment à 2 nœuds . . . . .	187
2	Élément 2D : triangle à 3 nœuds . . . . .	188
<b>F</b>	<b>Problème de Stokes : formulation et équivalence élastostatique</b>	<b>191</b>
1	Formulation des équations de Stokes . . . . .	191
2	Équivalence avec le problème d'élastostatique . . . . .	192
<b>G</b>	<b>Présentation du logiciel LCMBE</b>	<b>193</b>
1	Fenêtre principale . . . . .	194
2	Pré-traitement . . . . .	195
3	Post-traitement . . . . .	197
<b>H</b>	<b>Présentation du logiciel PERMCOMP</b>	<b>201</b>
1	Fenêtre principale . . . . .	201
2	Importation des données expérimentales . . . . .	202
3	Calibration des images . . . . .	204
4	Ajustement des ellipses . . . . .	204
<b>I</b>	<b>Plans</b>	<b>209</b>
1	Plan du bâti . . . . .	209
2	Plan du moule . . . . .	211
<b>J</b>	<b>Données constructeur</b>	<b>215</b>
1	Camera CCD Prosilica EC1350C . . . . .	215
2	Objectif Computar H2Z0414C-MP . . . . .	219
3	Balance électronique Sartorius CPA8201-0CE . . . . .	221
<b>K</b>	<b>Publications</b>	<b>223</b>
1	Recent patents on in-plane permeability measurement of LCM composite reinforcements . . . . .	223
2	BEM simulation of 3D updated resin front for LCM processes . . . . .	223
3	Numerical simulation of Resin Transfer Molding using BEM and Level Set method . . . . .	223
4	Mold filling simulation of Resin Transfer Molding combining BEM and Level Set method . . . . .	223
	<b>Résumé</b>	<b>225</b>

# Nomenclature

## Abréviations

ANRT	Agence Nationale de la Recherche et de la Technologie
BEM	Boundary Element Method
CCD	Charge Coupled Device
CER	Cellule Élémentaire Représentative
CMC	Composites à Matrices Céramiques
CMM	Composites à Matrices Métalliques
CMO	Composites à Matrices Organiques
CPU	Central Processing Unit
CRCC	Centre de Ressources et de Compétences Composites
CRTM	Compression Resin Transfer Molding
EADS	European Aeronautic Defence and Space Company
EMAC	École des Mines d'Albi-Carmaux
FUSCOMP	Fuselage composite
GD	Grande Diffusion
HP	Haute Performance
HR	Haute Résistance
ICA	Institut Clément Ader
IUT	Institut Universitaire de Technologie
LAPACK	Linear Algebra Package
LCM	Liquid Composite Molding
LCMBE	Liquid Composite Molding Boundary Element
LGP	Laboratoire Génie de Production
LJD	Lycée Jean Dupuis

LRI	Liquid Resin Infusion
LU	Low Up
MAC	Marker And Cell
PC	Personal Computer
PERMCOMP	Perméabilité Composite
PMMA	Polymethyl Methacrylate
RAM	Random Access Memory
RIFT	Resin Infusion under Flexible Tooling
RTM	Resin Transfer Molding
RTML	Resin Transfer Molding Light
SCRIMP™	Seeman's Composite Resin Infusion Molding Process
SIE	Système Isotrope Équivalent
SRIM	Structural Resin Injection Molding
TBM	Tarbes Mooney
TD	Thermodurcissable
TP	Thermoplastique
UD	Unidirectionnel
VARI	Vacuum Assisted Resin Infusion
VARTM	Vacuum Assisted Resin Transfer Molding
VI	Vacuum Infusion
VOF	Volume Of Fluid
WP	Work Package

## Lettres grecques

$\alpha_{ij}$	Rapport d'anisotropie dans le plan $(\vec{E}_i, \vec{E}_j)$
$\delta T$	Incrément de période du cycle d'acquisition
$\delta t$	Incrément de temps du cycle d'acquisition
$\delta$	Dimension de la plus petite arête de la grille
$\Gamma$	Frontière du domaine de calcul
$\Gamma_p$	Portion de la frontière à pression imposée
$\Gamma_q$	Portion de la frontière à vitesse normale imposée

$\Gamma_{T_k}$	Portion de la frontière à traction imposée
$\Gamma_{v_k}$	Portion de la frontière à vitesse imposée
$\hat{\Omega}$	Domaine de calcul étendu
$\mu$	Viscosité dynamique
$\mu_0$	Viscosité dynamique de référence
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\Omega$	Domaine de calcul
$\omega_p$	Poids du point de Gauss $p$
$\phi$	Fonction Level Set
$\phi_0$	Condition initiale sur la fonction Level Set
$\phi_m$	Fonction Level Set associée au moule
$\rho$	Masse volumique
$\rho_f$	Masse volumique de la fibre
$\rho_h$	Masse volumique de l'huile
$\Theta$	Angle interne sous lequel est vu $\Omega$ depuis le point source
$\theta$	Angle d'orientation du repère principal dans le plan du renfort
$\theta_1$	Angle d'incidence (air)
$\theta_2$	Angle de réfraction (moule)
$\varepsilon$	Porosité
$\varepsilon_\phi$	Tolérance Level Set
$\xi_p, \eta_p$	Coordonnées du point de Gauss $p$

## Lettres latines

$\bar{K}$	Perméabilité isotrope équivalente
$\bar{p}$	Valeur de la condition aux limites en pression
$\bar{r}_0$	Rayon isotrope équivalent du seuil
$\bar{r}_f$	Rayon isotrope équivalent du front
$\bar{v}_n$	Valeur de la condition aux limites en vitesse normale
$\ell$	Distance séparant la caméra du moule
$\hat{p}$	Pression modifiée
$\hat{r}$	Distance modifiée entre le point source et le point courant

## Nomenclature

---

$A$	Section du moule
$a$	Rayon de la paroi interne
$A_e$	Section d'écoulement à l'entrée
$b$	Rayon de la paroi externe
$c$	Constante de Kozeny
$c_1, c_3$	Constantes caractérisant l'arrangement des fibres
$cfl$	Nombre de Courant-Friedrichs-Levy
$D$	Débit
$d$	Distance inter-fibre
$D_e$	Débit imposé à l'entrée
$e$	Épaisseur du moule
$E_a$	Énergie d'activation de la viscosité
$e_r$	Épaisseur de l'échantillon de renfort
$F$	Fonctionnelle
$h$	Hauteur de l'entrefer
$J$	Jacobien
$K_i$	Perméabilité principale dans la direction $\vec{E}_i$
$L$	Longueur du moule
$M$	Point du domaine
$M_h$	Masse d'huile
$M_r$	Masse de l'échantillon de renfort
$N$	Nombre d'éléments frontières dans la discrétisation
$n_1$	Indice optique de l'air
$n_2$	Indice optique du moule
$p$	Pression
$p^*$	Pression virtuelle (fonction de Green)
$p_a$	Pression sur la paroi interne
$p_b$	Pression sur la paroi externe
$p_e$	Pression imposée à l'entrée
$p_f$	Pression imposée au front

---

$p_p$	Pression imposée sur une zone sèche enclavée (porosité)
$p_s$	Pression imposée à la sortie
$q$	Flux normal
$q^*$	Flux virtuel associé à $p^*$
$R$	Constante des gaz parfaits
$r_0$	Rayon du point d'injection
$R_f$	Rayon de la fibre
$r_f$	Rayon du front
$r'_f$	Rayon du front vu par la caméra
$r_{f_i}$	Demi-axe de l'ellipse ou ellipsoïde du front
$S$	Point source
$S_r$	Surface plane de l'échantillon de renfort
$T$	Température
$t$	Temps
$T_0$	Période initiale du cycle d'acquisition
$T_\infty$	Période finale du cycle d'acquisition
$V_a$	Fraction volumique de fibres accessible
$V_e$	Vitesse à l'entrée
$V_f$	Taux volumique de fibres
$v_n$	Vitesse normale
$V_p$	Volume de la zone sèche enclavée (porosité)
$x_f$	Abscisse du front

### **Autres symboles**

$\mathcal{C}$	Cercle
$\mathcal{G}_p$	Point de Gauss $p$
$\mathcal{S}$	Sphère
$\emptyset$	Diamètre

### **Tenseurs et matrices**

$\mathcal{P}$	Matrice de passage du repère quelconque au repère principal
$\bar{\bar{\varepsilon}}$	Tenseur des déformations

$\bar{\sigma}$	Tenseur des contraintes
$\bar{\sigma}^*$	Solution fondamentale de Kelvin
$\bar{\varepsilon}$	Tenseur des taux de déformation
$\bar{k}$	Tenseur de perméabilité
$A$	Matrice à inverser
$B$	Second membre
$H, G$	Matrices utilisées pour assembler le système algébrique
$P$	Pressions aux points de calcul
$Q$	Flux aux points de calcul
$T$	Tractions aux points de calcul
$V$	Vitesses aux points de calcul

## Vecteurs

$\langle \vec{v} \rangle$	Vitesse moyenne
$\vec{E}_i$	Vecteur unitaire dans la direction $i$ du repère principal
$\vec{e}_i$	Vecteur unitaire dans la direction $i$ d'un repère quelconque
$\vec{f}$	Force volumique
$\vec{g}$	Accélération de la pesanteur
$\vec{n}$	Normale sortante unitaire à la frontière
$\vec{T}$	Traction à la frontière
$\vec{v}$	Vitesse



# Contexte

Ce travail a été réalisé à l'Institut Clément Ader (ICA) dans les laboratoires de l'École des Mines d'Albi-Carmaux (EMAC) et de l'Institut Universitaire de Technologie (IUT) de Tarbes. La thèse s'inscrit dans le cadre du programme industriel FUSCOMP (FUSelage COMPosites), coordonné par Daher-Socata (ex EADS-Socata), avionneur et équipementier de rang 1 en aérostructures.

## 1 Projet FUSCOMP

Doté d'un montant total de 9,2 millions d'euros, le projet FUSCOMP a été retenu par le pôle Aerospace Valley lors du troisième appel à projet en décembre 2006. Il a été financé à hauteur de 64% par l'État (FUI), le Conseil Général Midi-Pyrénées, le Conseil Général des Hautes-Pyrénées et l'ANRT (Association Nationale de la Recherche et de la Technologie).

L'objectif du projet est la réalisation d'un prototype démonstrateur de fuselage en matériaux composites par infusion de résine liquide [1, 2]. Ce procédé de moulage, qui est proche de la technologie RTM (Resin Transfer Molding), permet de fabriquer en une seule opération des pièces complexes, fonctionnalisées, et de grandes dimensions sans utiliser d'autoclave. Le fuselage étudié porte sur le TBM 850, avion d'affaires d'une capacité de six places (figure 1). Cet avion, conçu et produit par Daher-Socata, est actuellement considéré comme le mono turbopropulseur le plus rapide du marché.



(a) TBM 850 [3]



(b) Représentation du fuselage

**Figure 1.** Fuselage du TBM 850 (Daher-Socata)

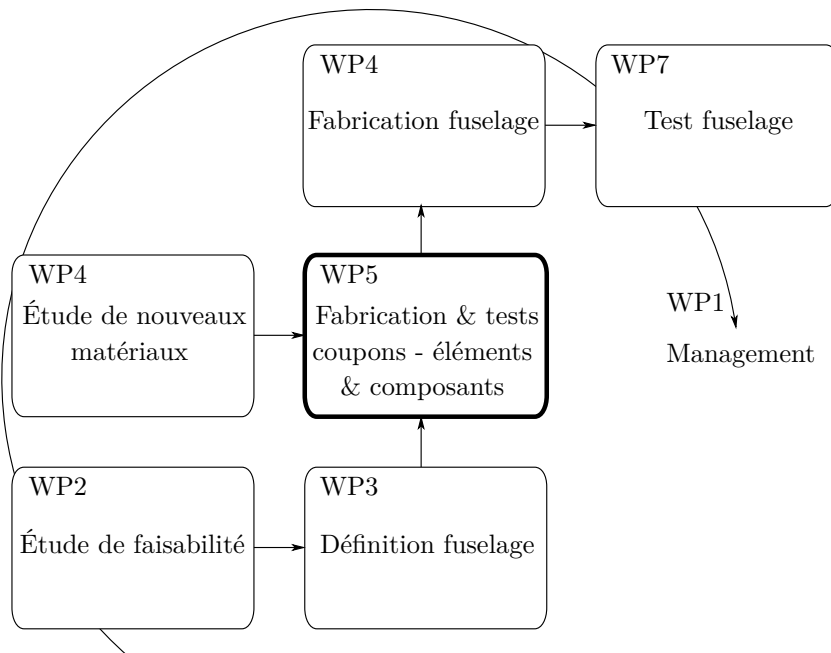
## 2 Structure du projet

Le projet FUSCOMP est organisé en sept Work Packages (WP) qui couvrent les différentes étapes de la conception du fuselage, de l'étude de faisabilité jusqu'à la réalisation des tests sur le prototype final (figure 2).

Daher-Socata s'est appuyé sur le savoir faire et l'expertise de plusieurs partenaires industriels et académiques pour la réalisation des tâches :

- Aerovac Système France pour le développement d'outillages et d'équipements du procédé d'infusion,
- Sicomin pour le développement de nouveaux matériaux,
- le LGP (Laboratoire Génie de Production) de l'ENIT (École Nationale d'Ingénieurs de Tarbes) pour la caractérisation des matériaux et la mise en œuvre de thèses,
- le Lycée Jean Dupuy (LJD) de Tarbes avec sa plate-forme de transfert de technologie, pour le paramétrage et le développement du procédé d'infusion,
- l'ICA pour les tests non destructifs et la mise en œuvre de thèses.

Les quatre thèses qui ont été lancées dans le cadre du projet portent respectivement sur le dimensionnement du fuselage (WP3), le développement de nouveaux matériaux pour l'infusion (WP4), le développement numérique et expérimental du procédé d'infusion (WP5) et la mesure de champs sur fuselage (WP7). Nos travaux portent sur l'étude numérique et expérimentale du procédé d'infusion.



**Figure 2.** Structure du projet FUSCOMP et position des travaux de thèse dans l'organigramme

# Introduction générale

## Sommaire

---

1	Matériaux composites . . . . .	10
2	Procédés d'élaboration par moulage voie liquide . . . . .	12
3	Problématiques industrielles . . . . .	16
4	Problématiques scientifiques . . . . .	17
5	Objectifs . . . . .	19
6	Organisation du manuscrit . . . . .	19

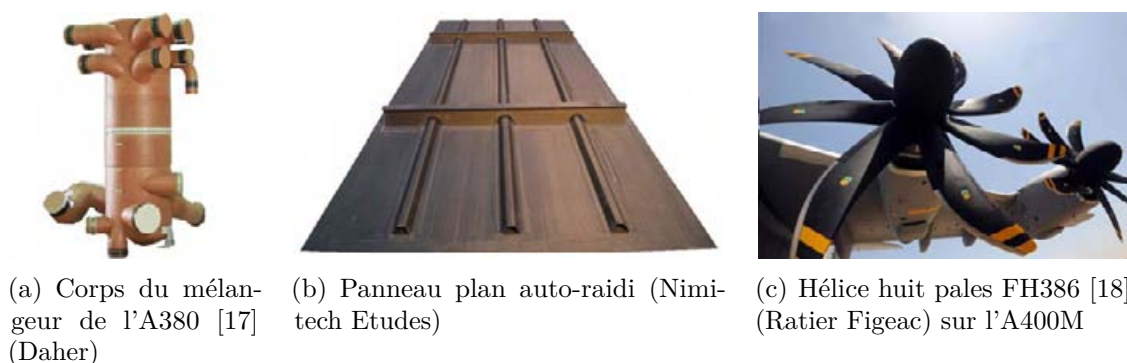
---

# 1 Matériaux composites

Les matériaux composites étaient auparavant réservés aux applications militaires de haute technicité. Désormais, ils remportent un vif succès auprès d'industries très variées, comme :

- l'aéronautique [4, 5] et le spatial [6, 7],
- le transport naval [8, 9] et terrestre [10–12],
- la construction et le génie civil [13, 14],
- l'industrie du sport et des loisirs [15, 16], etc.

Cette polyvalence s'explique par les exigences de légèreté, rigidité, résistance, ou encore de durée de vie qui sont présentes dans un large éventail d'applications, qui concernent à la fois le domaine de la Grande Diffusion (GD) et celui de la Haute Performance (HP). En particulier, ces matériaux sont très prisés dans le secteur de la construction aéronautique, où la problématique de réduction de la masse est au centre de toutes les préoccupations (figure 3).



**Figure 3.** Exemples de réalisations aéronautiques modernes en matériaux composites

Les composites se distinguent des matériaux « traditionnels » (métaux, polymères, céramiques, etc.) par leur hétérogénéité, leur anisotropie, mais aussi par leur mode d'élaboration. En effet, le matériau et la géométrie sont généralement obtenus simultanément, ce qui permet de générer la microstructure adaptée à l'usage prévu. Il en résulte un gain considérable en termes de propriétés spécifiques, permettant d'alléger significativement les structures mécaniques.

De part leur nature hétérogène, la mise en forme des matériaux composites est relativement complexe. Elle repose schématiquement sur l'association de deux constituants présentant des propriétés mécaniques complémentaires [19–21] :

- le renfort (squelette), qui confère la majorité des propriétés mécaniques au matériau et assure la reprise des efforts dans la structure,
- la matrice (liant), qui permet d'obtenir la géométrie de la pièce : elle transfère les charges au renfort et le protège des agressions environnementales (corrosion, oxydation, vieillissement humide, etc.).

En pratique, des charges et additifs sont également incorporés, soit pour obtenir des propriétés mécaniques et/ou physiques spécifiques (agents ignifugeants, anti-retrait, pigments, etc.) soit pour diminuer le coût des matières premières.

## Matrices

Suivant la matrice employée, on distingue trois familles au sein des matériaux composites :

- les Composites à Matrices Organiques (CMO) [22–24],
- les Composites à Matrices Céramiques (CMC) [25–27],
- les Composites à Matrices Métalliques (CMM) [28–31].

Les CMO sont les composites que nous étudions dans le cadre de ce travail. Ils se sont développés très rapidement dans l'industrie en raison de leur polyvalence et de leur facilité de mise en œuvre. Ils satisfont aujourd'hui à un large éventail d'applications. C'est précisément l'inverse pour les CMC et les CMM : les conditions d'élaboration complexes les cantonnent à des applications spécifiques pour lesquelles les matrices polymériques sont inutilisables (typiquement les hautes températures).

On différencie dans les CMO les résines thermoplastiques (TP) des résines thermodurcissable (TD) :

- les résines TP peuvent passer alternativement de l'état solide à l'état pâteux, ce qui autorise leur recyclage,
- les résines TD ne possèdent pas cette propriété, et passent irréversiblement de l'état liquide à solide [32].

Jusqu'à maintenant l'usage des résines TP dans les composites était plutôt marginal, mais il est probable que leur utilisation s'intensifie dans les prochaines années au regard des développements récents [33]. Les matrices les plus répandues à l'heure actuelle restent les TD, et plus précisément :

- les résines polyesters, majoritairement employées dans les composites GD,
- les résines époxydes, qui constituent les résines types des composites HP pour leurs caractéristiques mécaniques élevées,
- les résines phénoliques, principalement utilisées pour des applications nécessitant des propriétés de tenue au feu.

Ces résines sont caractérisées par leur cinétique de réaction et leur viscosité. La cinétique de réaction décrit l'avancement de la réaction chimique (polymérisation) conduisant au durcissement de la résine liquide. Le degré de réticulation du système permet de quantifier cet avancement : il dépend à la fois de la température et de la composition chimique. La viscosité de la résine est étroitement liée à la mobilité des chaînes macromoléculaires. On retiendra qu'elle est fortement dépendante du degré de réticulation (durcissement) et de la température.

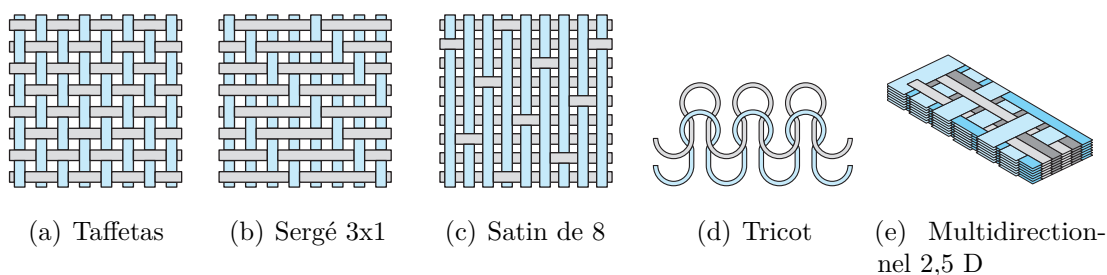
## Renforts

Bien qu'il existe des renforts sous des formes variées (particules, lamelles, fibres, etc.) nous nous intéressons plus particulièrement dans le cadre de ce travail aux renforts fibreux, qui constituent le squelette type des matériaux composites avancés.

Les principales fibres employées en association avec les CMO sont produites sous forme de filaments (fibres continues) de quelques micromètres de diamètre. On distingue principalement :

- les fibres de verre ( $\varnothing=5$  à  $24 \mu\text{m}$ ), largement répandues dans le domaine des composites GD pour leurs faibles coûts [34],
- les fibres de carbone ( $\varnothing=5$  à  $7 \mu\text{m}$ ), très utilisées en aéronautique dans la réalisation de composites structuraux pour leurs caractéristiques mécaniques élevées [35],
- les fibres d'aramide ( $\varnothing=12$  à  $15 \mu\text{m}$ ), généralement employées pour des applications plus ciblées, comme le renforcement des pneumatiques, la fabrication des câbles ou la confection d'articles de protection balistique [36].

Suivant le mode d'assemblage des fibres, on trouve dans l'industrie différents types de renforts. Les fibres longues sont généralement utilisées pour réaliser des unidirectionnels, tissés, tricotés, multidirectionnels, etc. L'élaboration de ces produits a bénéficié de l'expérience ancienne de l'industrie textile, si bien que les techniques de fabrication actuelles sont en grande partie issues de son savoir-faire (cf. figure 4). En général, les fibres sont regroupées sous forme de mèches avant d'être assemblées, chaque mèche comportant plusieurs milliers de fibres. Il existe également des produits élaborés à partir de fibres courtes, il s'agit essentiellement de feutres ou de mats.



**Figure 4.** Principaux types de tissage (a,b,c) et autres types de liaison (d,e), d'après [37]

## 2 Procédés d'élaboration par moulage voie liquide

Différents procédés ont été développés pour mettre en forme les composites à renforts fibreux. La sélection de la technologie de fabrication dépend essentiellement des contraintes technico-économiques, les principaux critères pris en compte étant :

- le type de pièce à réaliser (forme, dimensions, complexité etc.),
- les spécifications mécaniques,

- le volume (petites/grandes séries), la cadence, et le coût de production.

Les procédés les plus utilisés dans l'élaboration des composites avancés sont le moulage au contact, le moulage à l'autoclave, le moulage par voie liquide, l'enroulement filamentaire, et le placement filamentaire [32, 38].

Le moulage à l'autoclave est très répandu dans l'industrie aéronautique pour la réalisation des composites structuraux et semi-structuraux. Il se distingue des autres procédés par sa haute fiabilité (qualité des pièces et reproductibilité), il permet en outre un bon contrôle de la microstructure (taux de fibres et orientation). Deux contraintes limitent toutefois son utilisation : le faible rendement de fabrication et le coût élevé. Ceci s'explique par :

- l'utilisation des préimprégnés qui sont des produits à haute valeur ajoutée nécessitant un stockage à basse température,
- l'utilisation des autoclaves qui demande un investissement important.

Dans ce contexte, la filière d'élaboration par voie liquide s'est présentée comme une alternative économique, intéressant particulièrement le transformateur soucieux d'optimiser la performance de la production.

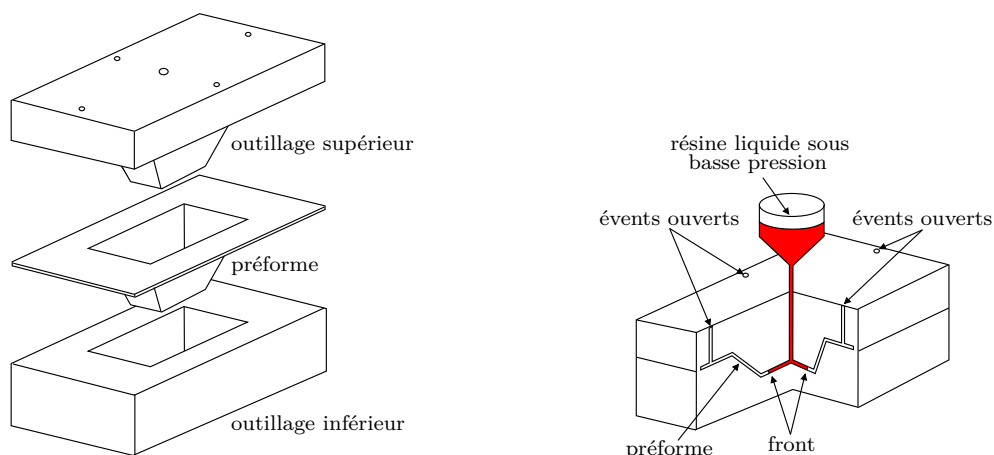
### Procédés LCM

Les procédés LCM (Liquid Composite Molding) regroupent l'ensemble des techniques de moulage des composites par voie liquide. Le concept date des années 1940 avec l'apparition du procédé RTM, mis au point pour limiter les émissions de produits nocifs pendant la mise en œuvre (moule fermé). Les progrès réalisés dans le domaine des systèmes therm durcissables ont permis des développements importants à partir des années 1970, qui ont abouti à l'industrialisation massive de techniques dérivées du RTM. Les procédés actuels sont utilisés dans plusieurs secteurs (aéronautique, automobile, etc.) et sous diverses formes, des plus artisanales, aux plus sophistiquées (voire automatisées).

Le moulage des composites est typiquement adapté à la réalisation des produits minces (2 à 10 mm d'épaisseur), les structures plus épaisses sont généralement obtenues par adjonction d'un matériau d'âme (nids d'abeille, mousses). Le procédé reste néanmoins très souple, et offre au concepteur des possibilités de réalisation particulièrement riches (intégration de nervures, raidisseurs, noyaux, inserts, etc.), permettant d'élaborer des pièces fonctionnalisées de géométries complexes en une seule étape.

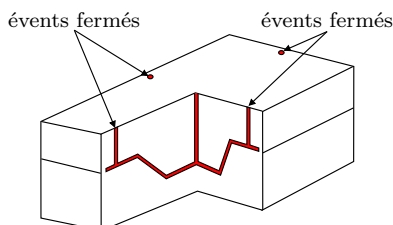
**Resin Transfer Molding (RTM)** Le RTM est la technique de moulage la plus populaire. Dans ce procédé, le renfort sec (mats, tissus, tricots, multi-directionnels, etc.) est injecté sous basse pression (typiquement entre 1 et 10 bars) en utilisant une résine liquide therm durcissable de faible viscosité (typiquement de l'ordre de 0,1 Pa.s).

Le cycle type de fabrication, schématisé figure 5, se décompose en quatre étapes comme suit :

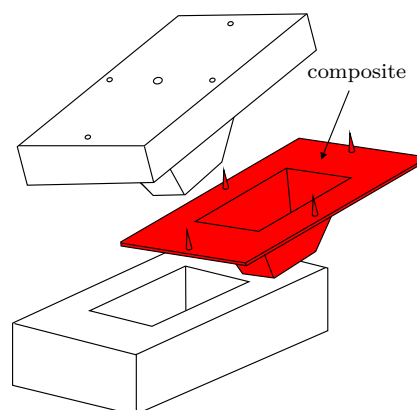


**1. Introduction du renfort :** Le renfort, éventuellement préformé, est inséré dans l’empreinte du moule. Le moule est ensuite fermé, généralement par une presse, pour maintenir le renfort en position.

**2. Remplissage :** La résine liquide est injectée dans le moule par une pompe basse pression, à pression ou débit imposé, et imprègne le renfort. Le temps de remplissage varie typiquement de quelques secondes à quelques minutes.



**3. Cuisson :** Le durcissement du composite est obtenu par réticulation de la résine au cours d’un cycle de cuisson, qui peut durer de quelques minutes à quelques heures.



**4. Démoulage :** En fin de cuisson, la pièce est évacuée du moule. Des opérations de finition sont ensuite réalisées avant sa mise en service.

**Figure 5.** Principe du procédé RTM [39]

**Variantes et procédés d’infusion** Le procédé RTM est généralement utilisé pour la réalisation des pièces de petites à moyennes dimensions : au delà, l’augmentation de la force de fermeture nécessite des outillages massifs qui se révèlent particulièrement coûteux. Les variantes qui ont été développées visent essentiellement à abaisser le coût des outillages et/ou optimiser les conditions d’imprégnation.

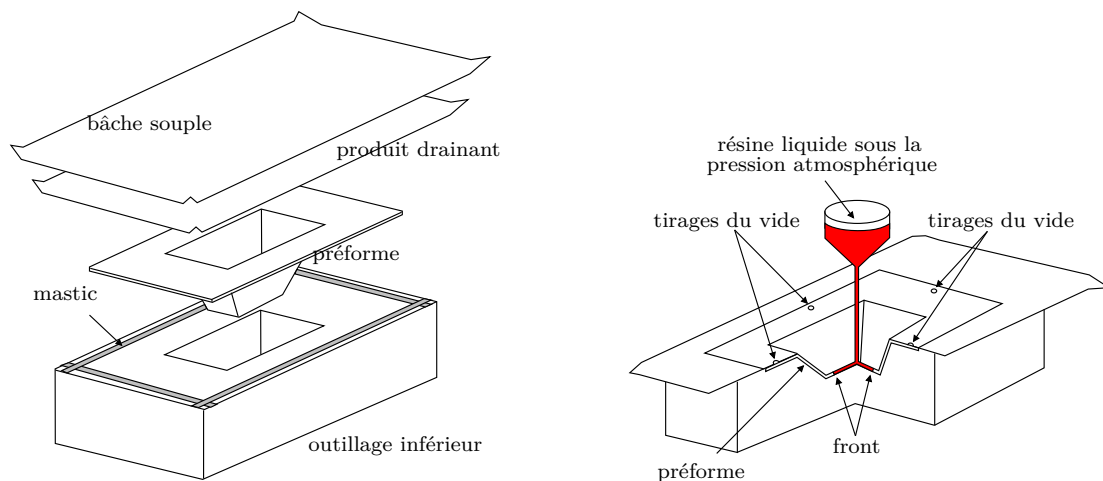
Les procédés les plus connus sont :

- le VARTM (Vacuum Assisted Resin Transfer Molding) : un vide primaire est appliqué dans la cavité en complément de la pression d’injection à l’entrée,



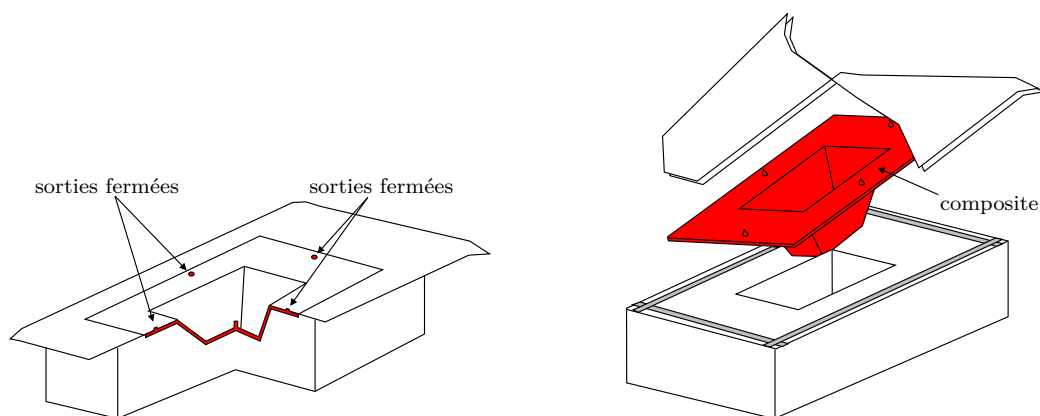
- le RTML (Resin Transfer Molding Light) : un outillage supérieur flexible est utilisé ; le remplissage est réalisé sous vide,
- les procédés par infusion (VI, VARI, RIFT, SCRIMP™, LRI, etc.) : l'outillage supérieur est remplacé par une bâche souple, et le remplissage est uniquement piloté par le vide appliqué dans la cavité.

Contrairement aux techniques d'injection traditionnelles, les procédés par infusion sont limités par un différentiel de pression de 1 bar. Pour réduire les temps de remplissage qui peuvent s'avérer longs, des systèmes de distribution optimisés ont été mis au point pour favoriser la progression de la résine dans le renfort (lignes d'injection, ramification des canaux, etc.). Certains procédés utilisent aussi des produits drainants (filets, grilles, tissus hautement perméables, etc.), destinés à forcer l'imprégnation dans la direction transverse à la préforme. C'est le cas du procédé LRI, dont le principe est explicité figure 6 :



**1. Placement du renfort :** Le renfort est placé sur le demi-moule inférieur puis recouvert d'un produit drainant et d'une bâche souple. Le mastic déposé sur la plage technique du moule assure l'étanchéité du montage.

**2. Remplissage :** La résine liquide est aspirée dans la préforme par une pompe à vide, plusieurs points de tirage peuvent être utilisés à cet effet. Le temps de remplissage varie typiquement de quelques secondes à quelques minutes.



**3. Cuisson :** Une fois le remplissage achevé, le composite est consolidé par réticulation de la résine au cours d'un cycle de cuisson, qui peut durer de quelques minutes à quelques heures.

**4. Démoulage :** À la fin du cycle de cuisson, la pièce est évacuée du moule et séparée des produits d'environnement. Des opérations de finition sont ensuite réalisées avant la mise en service du composite.

**Figure 6.** Principe du procédé LRI

### 3 Problématiques industrielles

Dans tous les procédés LCM, l'élaboration du composite fait intervenir une étape de remplissage de la préforme par la résine liquide. Le bon contrôle de cette étape est d'une importance capitale pour le transformateur, car il permet de maîtriser plusieurs aspects de la production :

1. la qualité des pièces, puisque les défauts de remplissage (porosité, zone sèche, accumulation de résine, etc.) dégradent considérablement les propriétés mécaniques et d'aspect, pouvant conduire jusqu'au rebut,
2. les temps de cycle, qui dépendent en grande partie des temps de remplissage.

Le défi auquel est confronté le mouliste est donc le choix d'une stratégie permettant une imprégnation complète de la pièce dans un laps de temps réduit, les principaux paramètres à déterminer étant :

- le positionnement des points d'injection,
- le positionnement des événements et/ou des points de tirage du vide,
- la pression ou le débit requis à l'entrée,
- la force de fermeture du moule (procédés en moule rigide).

Pour les géométries complexes, l'expérience et l'intuition se révèlent souvent insuffisantes pour aboutir à une solution appropriée. Un paramétrage satisfaisant du procédé est généralement atteint à l'issue d'un processus itératif relativement lourd (multiplication de prototypes physiques, retouches sur les outillages, etc.), qui repose sur l'usage de méthodes du type « essais - erreurs ». Même si les nombreuses réalisations industrielles attestent du succès de cette approche, deux aspects menacent aujourd'hui son développement :

- l’optimalité des choix de conception,
- les coûts et des délais de fabrication.

Dans les procédés d’infusion, la phase de développement est considérablement simplifiée pour plusieurs raisons :

- la bâche souple permet de s’affranchir du dimensionnement des outillages,
- l’utilisation du vide réduit le nombre de variables de conception (remplissage piloté par la pression de vide appliquée).

Pourtant, en dépit de ces avantages, la pratique montre que la mise au point reste relativement complexe, en effet :

- les mécanismes de transfert de matière du produit drainant au renfort sont encore mal contrôlés, et le choix du couple drainant/renfort est souvent délicat,
- l’utilisation de la bâche souple conduit à des variations d’épaisseur qui sont difficiles à anticiper.

En conséquence, ces procédés qui bénéficient d’une grande souplesse de conception souffrent finalement d’une mauvaise maîtrise des caractéristiques finales de la pièce (dimensions, taux volumique de fibres) et d’un manque de reproductibilité.

Enfin, les difficultés sont accentuées par un certain nombre d’anomalies qui peuvent perturber le remplissage, et conduire à des échecs (moule inutilisable, faiblesses mécaniques, incomplets, etc.). Parmi les plus classiques on peut citer :

- les effets de bords qui se manifestent par des écoulements préférentiels entre le bord du renfort et le moule,
- les déformations du réseau fibreux au passage de la résine dans le renfort, généralement observées au voisinage du point d’injection où la charge est la plus forte (« fibre washing »),
- la formation de bulles d’air qui sont transportées dans la résine,
- la gélification de la résine avant la fin du remplissage.

Même si ces dysfonctionnements sont bien connus des utilisateurs du procédé, il s’avère toujours délicat d’en anticiper les effets.

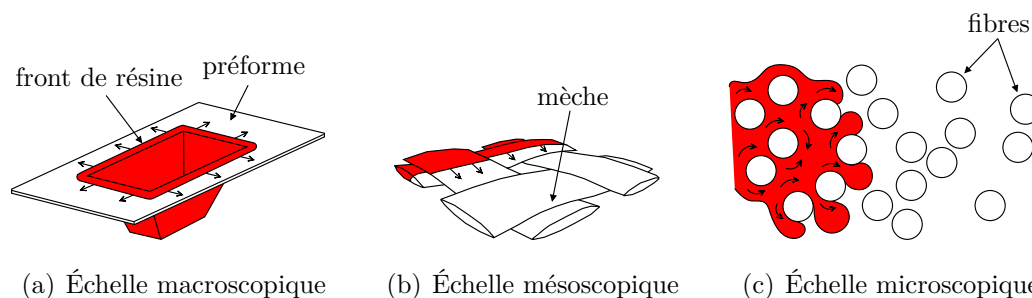
Dans une optique de compétitivité, l’optimisation des méthodes de fabrication est plus que jamais au centre des préoccupations industrielles. Dans ce contexte, la compréhension des mécanismes de remplissage représente un enjeu important, expliquant les nombreux développements dans le domaine de la modélisation. Aujourd’hui, de grands espoirs sont placés dans la simulation numérique pour limiter le recours aux méthodes empiriques.

## 4 Problématiques scientifiques

L’écoulement de la résine est caractérisé par une forte complexité géométrique provenant du milieu fibreux : la préforme comporte généralement plusieurs plis organisés en mèches, elles-mêmes composées de plusieurs milliers de fibres. On distingue ainsi trois

niveaux de description permettant d'étudier le remplissage : les échelles macroscopique, mésoscopique, et microscopique (figure 7).

A l'heure actuelle, la prise en compte des détails microscopiques à l'échelle de la pièce n'est pas envisageable. L'approche macroscopique est donc largement privilégiée dans l'industrie au travers de l'utilisation de la loi de Darcy.



**Figure 7.** Différentes échelles d'étude

Depuis les années 1980, le domaine de la modélisation numérique fait l'objet de développements soutenus impulsés par la forte demande industrielle. Le traitement de l'avancée du front est un aspect important qui suscite encore l'intérêt de nombreux auteurs. Pendant longtemps, la méthode Volume Of Fluid (VOF) s'est imposée comme une technique de référence, comme en attestent les logiciels commerciaux actuels (PAM-RTM<sup>TM</sup>, POLY-WORX<sup>TM</sup>, LIMS<sup>TM</sup>, etc.). Aujourd'hui, la tendance semble s'orienter vers les méthodes Level Set qui offrent des possibilités nouvelles en termes de suivi d'interface.

La perméabilité représente une donnée d'entrée importante dans les logiciels de simulation. Elle caractérise la résistance qu'oppose le renfort à l'écoulement. Derrière ce concept simple se dissimulent des mécanismes relativement complexes, englobant tous les effets induits par l'organisation des fibres à l'échelle microscopique. Il existe aujourd'hui plusieurs techniques de mesure permettant d'accéder à la perméabilité. Malheureusement, les difficultés expérimentales conduisent à d'importantes dispersions des résultats, qui mettent en péril la fiabilité des simulations numériques. Cette problématique est particulièrement d'actualité au sein de la communauté scientifique, qui œuvre aujourd'hui pour la standardisation d'une procédure d'identification robuste [40].

Des auteurs se sont intéressés à la détermination théorique de la perméabilité par des méthodes d'homogénéisation. Néanmoins, les modèles existants sont limités à des configurations « idéales », comme les arrangements carrés ou hexagonaux de fibres parallèles, et ne permettent pas de prédire le comportement de la majorité des renforts. Capables de prendre en compte les microstructures les plus complexes, les méthodes numériques offrent désormais de nouvelles perspectives qui intéressent particulièrement les industriels.

## 5 Objectifs

Le travail réalisé s'inscrit dans une démarche de modélisation, et vise à contribuer à une meilleure maîtrise de l'étape de remplissage dans les procédés LCM. Il s'articule autour d'une étude expérimentale et d'une étude numérique, dont les objectifs sont les suivants.

- 1. Étude expérimentale :** L'objectif est la réalisation d'un moyen d'essai permettant l'identification des trois composantes du tenseur de perméabilité. En l'absence de méthode normalisée, nous nous sommes appuyés sur la littérature et sur l'expertise du CRCC de Tarbes (Centre de Ressources et de Compétences Composites), avec qui nous avons collaboré.
- 2. Étude numérique :** L'objectif est le développement d'un premier modèle numérique capable de prédire l'écoulement de la résine dans le renfort, à la fois à l'échelle macroscopique et microscopique. L'expérience de l'ICA dans le domaine de la méthode des éléments frontières a été mise à profit pour mener à bien cette tâche.

## 6 Organisation du manuscrit

Le manuscrit est organisé en quatre chapitres comme suit.

**Chapitre 1 :** Ce chapitre est consacré à l'identification expérimentale de la perméabilité. Après une revue bibliographique sur les techniques de mesure, nous présentons le moyen d'essai développé dans le cadre de ce travail. Les résultats que nous avons obtenus sur le renfort G0986 d'Hexcel<sup>®</sup> sont confrontés aux données de la littérature.

**Chapitre 2 :** Ce chapitre concerne la modélisation numérique de l'écoulement à l'échelle macroscopique, en 2D et 3D. Nous avons programmé un algorithme de remplissage qui repose sur un couplage des méthodes éléments frontières et Level Set. Les grandes lignes de la méthode et les détails techniques d'implémentation sont donnés. Des confrontations analytiques sont également proposées.

**Chapitre 3 :** Dans ce chapitre nous présentons des exemples d'applications de la méthode développée dans le chapitre précédent. Nous avons fait varier les principaux paramètres du procédé (géométrie du moule, paramètres rhéologiques, etc.) pour explorer les possibilités du logiciel. La méthode est comparée à des solutions de référence.

**Chapitre 4 :** Ce dernier chapitre propose une étude numérique de l'écoulement à l'échelle microscopique en 2D. Nous avons à nouveau programmé une méthode de résolution par éléments frontières pour résoudre cette fois les équations de Stokes. La méthode est appliquée à la détermination de la perméabilité transverse et saturée dans la mèche. Nous étudions le cas d'un arrangement idéal carré et celui d'une microstructure plus réaliste, impliquant une distribution aléatoire des fibres.



# Chapitre 1

## Mesure de perméabilité

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>22</b>
<b>1.1 Préambule bibliographique</b> . . . . .	<b>22</b>
1.1.1 Loi de Darcy . . . . .	22
1.1.2 Perméabilités principales . . . . .	23
1.1.3 État de l'art . . . . .	24
<b>1.2 Développement du dispositif expérimental</b> . . . . .	<b>30</b>
1.2.1 Méthodologie retenue . . . . .	30
1.2.2 Mise en œuvre matérielle . . . . .	31
1.2.3 Exploitation des données expérimentales . . . . .	35
<b>1.3 Premiers résultats : caractérisation du renfort G0986</b> . . . . .	<b>41</b>
1.3.1 Présentation du renfort . . . . .	41
1.3.2 Mesure 2D . . . . .	42
1.3.3 Mesure 3D . . . . .	45
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>48</b>

---

Nous présentons dans ce chapitre un état de l'art sur la mesure de perméabilité d'un renfort fibreux, ainsi que le moyen d'essai que nous avons développé dans le cadre de ce travail. Nous avons testé notre dispositif en réalisant des mesures 2D et 3D sur le renfort aéronautique G0986 commercialisé par Hexcel®.

## Introduction

La perméabilité caractérise la résistance à l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux. Ce paramètre est issu de la loi empirique de Darcy, publiée en 1856 dans un traité consacré à l'étude de la filtration de l'eau dans un massif sableux [41]. Elle est aujourd'hui employée dans plusieurs domaines de l'ingénierie comme l'hydrogéologie, où elle constitue une relation fondamentale dans les problèmes d'écoulement souterrain. Elle est aussi très répandue dans le domaine du moulage composite pour décrire le remplissage du renfort.

La perméabilité d'un renfort synthétise un grand nombre d'informations relatives à l'organisation des fibres, à la fois à l'échelle microscopique et mésoscopique (taille et forme des pores, taux volumique de fibres, etc.). Il existe dans la littérature des modèles de prévision théorique, mais ils restent limités à des configurations idéales (faisceau de fibres parallèles, arrangements carrés, hexagonaux, etc.) qui ne prennent pas en compte toute la complexité géométrique de la majorité des renforts. On utilise donc principalement des méthodes expérimentales pour accéder à ce paramètre.

Le chapitre est divisé en trois sections. La section 1.1 fournit un état de l'art sur la mesure de perméabilité des renforts fibreux. La section 1.2 présente le moyen d'essai développé dans le cadre de ce travail. La section 1.3 est consacrée à la caractérisation des perméabilités du renfort aéronautique Hexcel® HexForce® G0986 D1200, les résultats obtenus sont confrontés à la littérature.

## 1.1 Préambule bibliographique

### 1.1.1 Loi de Darcy

L'écoulement macroscopique de la résine dans la préforme est régi par la loi de Darcy, dont l'expression tridimensionnelle est donnée comme suit :

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{\bar{k}}{\mu} \vec{\nabla} p \quad (1.1)$$

où  $\langle \vec{v} \rangle$  désigne la vitesse superficielle (i.e. moyennée sur le volume),  $p$  la pression,  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide et  $\bar{k}$  le tenseur de perméabilité du renfort.

**Remarque** Même si l'utilisation de la loi de Darcy est acceptée par la majorité des auteurs [42–44], son application n'est pas immédiate compte tenu des hypothèses auxquelles elle est soumise :



1. *Écoulement laminaire* : Cette hypothèse est généralement vérifiée, car les conditions d'élaboration dans les procédés LCM correspondent à des écoulements à faible nombre de Reynolds [45, 46].
2. *Fluide Newtonien incompressible* : Cette hypothèse est valide pour la majorité des résines utilisées avant la phase de gélification. Néanmoins, pour les systèmes les plus complexes, l'existence d'effets non-Newtoniens prononcés est signalée chez plusieurs auteurs [47–49].
3. *Milieu saturé et immobile* : La condition de saturation est partiellement vérifiée : si la zone en arrière du front est saturée, ce n'est pas le cas en avant du front où le milieu est encore sec. Par conséquent, seul l'écoulement à la frontière se déroule en régime insaturé. La condition d'immobilité est discutable, car au passage de la résine, le renfort est le siège de déformations liées à la flexibilité des fibres [50]. D'autre part, les déformations de la cavité (moule, bâche souple) peuvent modifier l'organisation du renfort fibreux.

**Vitesse réelle** La vitesse réelle de la résine est supérieure à la vitesse superficielle, car seule une fraction du matériau contribue à l'écoulement. Elle s'exprime en utilisant la porosité du renfort, ou encore le taux volumique de fibres :

$$\vec{v} = \frac{\langle \vec{v} \rangle}{\varepsilon} = \frac{\langle \vec{v} \rangle}{1 - V_f} \quad (1.2)$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse réelle du fluide, encore appelée vitesse interstitielle,  $\varepsilon$  la porosité (rapport du volume total de vide sur le volume total du matériau), et  $V_f$  le taux volumique de fibres.

### 1.1.2 Perméabilités principales

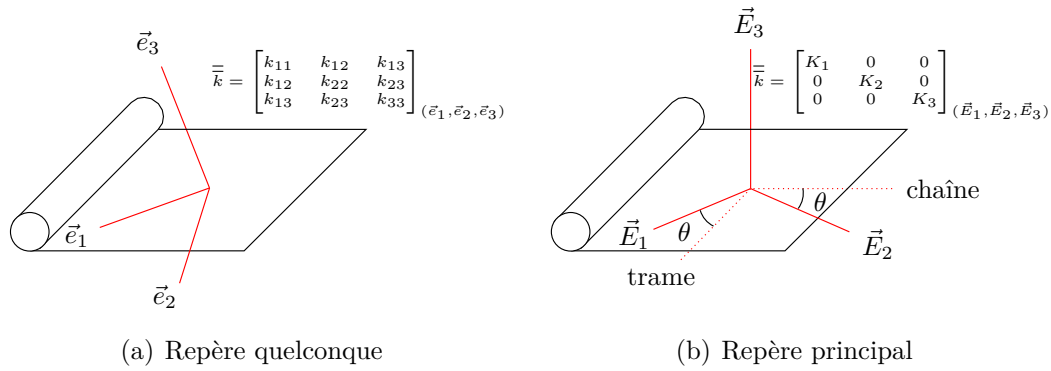
Le tenseur de perméabilité étant défini symétrique [46], sa caractérisation complète nécessite l'identification de six paramètres ( $k_{ij}$ ) :

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad (1.3)$$

où  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est le repère dans lequel le tenseur est exprimé. On montre que l'utilisation du repère principal réduit le tenseur à une forme diagonale. Ce repère dépend typiquement de l'architecture du renfort (i.e. le mode de liaison des fils). La relation de passage permettant de changer de repère s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix}_{(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)} = \mathcal{P} \times \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \times \mathcal{P}^{-1} \quad (1.4)$$

où  $(K_1, K_2, K_3)$  désignent les perméabilités principales du tenseur (valeurs propres),  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$  le repère principal (vecteurs propres) et  $\mathcal{P}$  la matrice de passage (figure 1.1).



**Figure 1.1.** Passage d'un repère quelconque au repère principal

Dans ce nouveau repère, la donnée des termes diagonaux détermine entièrement le tenseur de perméabilité. Pour les renforts plans, qui représentent la majorité des renforts utilisés, il est d'usage de supposer un axe principal dans la direction transverse<sup>1</sup>. On distingue alors les perméabilités planes (encore appelées perméabilités longitudinales) de la perméabilité transverse.

La mesure des perméabilités planes représente une part importante des travaux de la littérature comparée à la mesure de la perméabilité transverse. En effet, dans la plupart des cas, les pièces réalisées sont suffisamment minces pour supposer l'écoulement dans le plan du renfort. Néanmoins, la perméabilité transverse peut jouer un rôle important dans la mise en forme des composites épais, ou encore dans les procédés par infusion, où l'écoulement se fait à la fois dans le plan et dans l'épaisseur du renfort.

**Bilan** La caractérisation du tenseur de perméabilité passe finalement par l'identification de quatre paramètres :

- l'angle  $\theta$  permettant de repérer l'orientation des axes principaux  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  par rapport à une direction arbitraire (e.g. chaîne ou trame),
- les perméabilités principales  $(K_1, K_2, K_3)$  relatives aux axes principaux  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ .

### 1.1.3 État de l'art

La mesure de perméabilité est un sujet très discuté dans la littérature : même pour les mats qui présentent généralement une perméabilité isotrope, les résultats obtenus chez les auteurs révèlent d'importantes contradictions [51]. En l'absence de méthode normalisée, des approches concurrentes ont été développées, le lecteur pourra se reporter à la revue de littérature de Sharma et Siginer [52] pour une synthèse exhaustive des techniques existantes. On utilise essentiellement trois critères pour classifier les différentes méthodes :

- la géométrie de l'écoulement (1D, 2D, 3D),

1. Pour les renforts présentant des formes plus complexes (tresses, multi-directionnels, etc.), il n'existe pas à notre connaissance de règle spécifique pour orienter *a priori* le repère principal.

- les conditions de saturation (écoulement sur renfort saturé ou sec),
- la condition limite à l'entrée de l'écoulement (pression imposée, débit imposé).

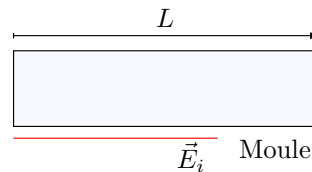
### 1.1.3.1 Fluide modèle

Bien que des résines polymériques soient utilisées dans les applications industrielles, le recours aux fluides modèles est très fréquent dans la littérature. Il s'agit généralement d'huiles végétales ou minérales, employées pour leur stabilité chimique, leur comportement Newtonien idéal, et leur facilité d'utilisation [53]. L'utilisation de fluide gazeux reste marginale malgré des résultats prometteurs [54].

Dans la loi de Darcy, la perméabilité est définie comme une propriété géométrique qui est intrinsèque au renfort. Pourtant, les auteurs ne sont pas unanimes quant au rôle du fluide dans la perméabilité mesurée. Hammond et Loos [55] concluent à l'issue d'une série d'essais réalisés avec de l'eau, de l'huile de maïs et de la résine époxy, que le fluide n'a aucune influence sur la perméabilité. A l'inverse, les travaux de Foley et Gutowski [56] ou Steenkamer *et al.* [57] indiquent que la perméabilité dépend du fluide utilisé. Les auteurs attribuent les différences observées aux mécanismes de mouillage, qui dépendent à la fois des propriétés de la fibre et du fluide (tension de surface du fluide, angle de contact du fluide sur la fibre). Il a été montré que la perméabilité résulte d'une compétition entre l'écoulement inter-mèche (porosités macroscopiques) et l'écoulement intra-mèche (porosités microscopiques). Pour ce dernier, les effets de capillarité semblent jouer un rôle important, notamment en présence de taux de fibre élevés.

### 1.1.3.2 Méthodes 1D

**Mesure en régime saturé** La méthode de mesure en régime saturé est dérivée du dispositif historique utilisé par Darcy [41]. Dans cette méthode, le fluide initialement présent dans l'échantillon est mis en mouvement par écoulement unidirectionnel, à pression ou à débit imposé (figure 1.2). La perméabilité est alors évaluée en mesurant soit la pression (écoulement à débit imposé), soit le débit (écoulement à pression imposée).



**Figure 1.2.** Principe de la mesure 1D en régime saturé

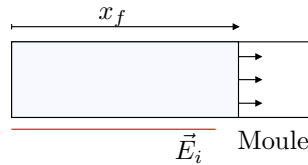
Pour un écoulement unidirectionnel, l'équation d'incompressibilité montre que le champ de pression est linéaire et le gradient de pression uniforme dans l'échantillon. La loi de Darcy fournit alors la relation d'identification suivante :

$$K_i = \frac{\mu \varepsilon D L}{A(p_e - p_f)} \quad (1.5)$$

où  $K_i$  est la perméabilité principale dans la direction de l'écoulement  $\vec{E}_i$ ,  $p_e$  la pression à l'entrée du moule,  $p_f$  la pression qui s'applique sur le front,  $D$  le débit,  $A$  la section du moule et  $L$  la longueur du moule.

Cette méthode est généralement employée pour la mesure de la perméabilité transverse, nous renvoyons le lecteur au brevet déposé par Cauchois *et al.* [58] pour une description technique d'un dispositif typique. La méthode est plus rarement employée pour déterminer une perméabilité plane car le renfort n'est pas maintenu dans la direction de l'écoulement, ce qui peut conduire à d'importantes déformations de l'échantillon.

**Mesure sur progression de front** La mesure 1D sur progression de front est une méthode classique pour identifier les perméabilités planes. Dans la direction principale, l'injection frontale conduit à la formation d'un front quasi-rectiligne progressant dans l'échantillon (figure 1.3). Le relevé de la position occupée par la frontière à des instants successifs permet alors l'identification de la perméabilité.



**Figure 1.3.** Principe de la mesure 1D sur progression de front

La perméabilité est identifiée par intégration de la loi de Darcy :

$$K_i = \begin{cases} \frac{\mu \varepsilon x_f^2}{2(p_e - p_f)t} & \text{à pression imposée} \\ \frac{\mu \varepsilon D x_f}{A(p_e - p_f)} & \text{à débit imposé} \end{cases} \quad (1.6a)$$

$$(1.6b)$$

où  $x_f$  est la position du front suivant l'axe  $\vec{E}_i$  à l'instant  $t$ .

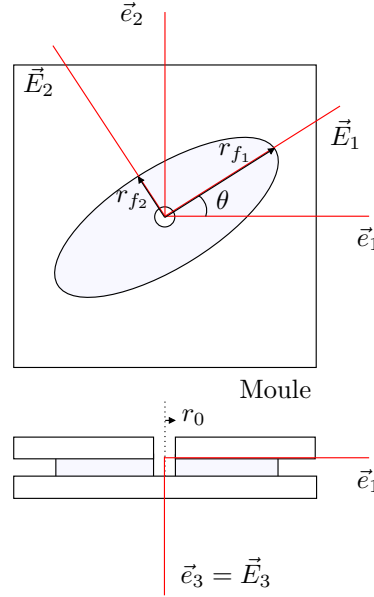
Les méthodes optiques classiques (caméra CCD) peuvent être utilisées pour suivre la progression du front dans l'échantillon. Des moules transparents, généralement conçus en PMMA sont classiquement employés [59]. Dans cette configuration, la déflexion du moule doit être minimisée pour garantir un bon contrôle de la porosité et de la section d'écoulement.

Bien que la méthode 1D soit la plus directe, des difficultés expérimentales peuvent perturber la mesure. Le problème le plus important est la présence d'écoulements préférentiels entre le renfort et le moule. Si ces effets sont bien visibles sur les méthodes par progression, ils sont difficilement détectés dans les méthodes en régime saturé. Pour pallier ces défauts, Diallo *et al.* [60] et Binetruy *et al.* [61] déposent un joint en silicone aux bords de l'échantillon, Lekakou *et al.* [62] utilisent un ruban adhésif. Par ailleurs, un défaut d'alignement de l'axe supposé principal avec la direction de la mesure conduit à des écoulements parasites dans les directions transverses mettant en péril la fiabilité de la mesure.

### 1.1.3.3 Méthodes 2D

L'essentiel des méthodes 2D existantes sont réalisées sur progression de front, même si des auteurs comme Han *et al.* ont mesuré des perméabilités en régime saturé [63].

Dans la mesure biaxiale, le renfort préalablement troué est imprégné par le fluide à pression ou débit imposé (figure 1.4). Dans cette configuration, l'écoulement caractéristique décrit une ellipse orientée suivant les directions principales.



**Figure 1.4.** Principe de la mesure 2D sur progression de front

Pour un renfort isotrope, l'ellipse est réduite à un cercle : l'intégration de la loi de Darcy permet alors d'identifier la perméabilité comme suit :

$$K = \begin{cases} \frac{\mu\varepsilon}{4(p_e - p_f)pt} \left\{ r_f^2 \left[ 2 \ln \left( \frac{r_f}{r_0} \right) - 1 \right] + r_0^2 \right\} & \text{à pression imposée [64] (1.7a)} \\ \frac{D\mu}{2\pi h(p_e - p_f)} \ln \left( \frac{r_f}{r_0} \right) & \text{à débit imposé [65] (1.7b)} \end{cases}$$

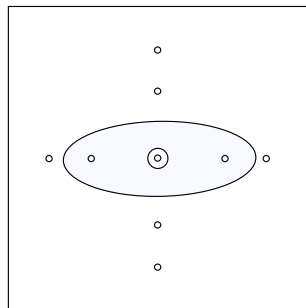
où  $r_f$  est le rayon du cercle à l'instant  $t$ ,  $r_0$  le rayon du seuil et  $h$  la hauteur de l'entrefer.

Ce modèle peut être généralisé aux renforts anisotropes en utilisant un Système Isotrope Équivalent (SIE), la méthode est bien documentée dans les travaux d'Adams *et al.* [64]. Dans cette approche, la condition aux limites sur la frontière interne est approchée (géométrie du seuil). Weitzenböck *et al.* montrent que cette approximation est valable si la mesure est réalisée à distance du point d'injection [66]. Chan et Hwang emploient un modèle proche de (1.7a) permettant de déterminer simultanément les deux perméabilités planes en mesurant les rayons principaux des ellipses à des instants successifs [67]. Han *et al.* utilisent une version modifiée de (1.7b), où les perméabilités sont identifiées en mesurant le gradient de pression dans différentes directions [63].

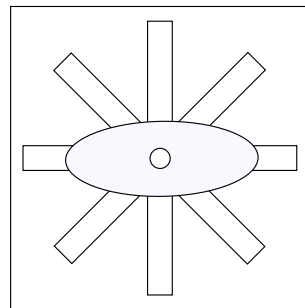
Une méthode originale proposée par Wu *et al.* consiste à employer la mesure 2D pour accéder à la perméabilité transverse [68], le principe repose sur l'enroulement d'une bandelette de renfort autour d'un axe.

Comme pour la méthode 1D, l'avancée du front peut être suivie par une caméra CCD en utilisant un moule transparent [69]. Néanmoins, la configuration 2D est davantage soumise aux problèmes de déflexion, en raison des grandes dimensions de l'échantillon (typiquement  $300 \times 300$  mm).

Pour pallier ce problème, certains auteurs utilisent des moules métalliques pour augmenter la rigidité de l'outillage. L'opacité du milieu nécessite alors des méthodes de suivi plus intrusives qui conduisent parfois à des perturbations locales de l'écoulement. Weitzenböck *et al.* utilisent des thermistances [70], Cauchois *et al.* utilisent des capteurs de pression [71] (figure 1.5 (a)), Kueh *et al.* des fibres optiques [72]. Comparées aux méthodes de suivi par caméra, la forme de la frontière demeure inconnue en raison du caractère ponctuel des capteurs. Une amélioration significative peut être obtenue par l'emploi de capteurs capacitifs linéaires qui permettent une capture continue de l'avancement du front le long des axes [73], cf. figure 1.5 (b).



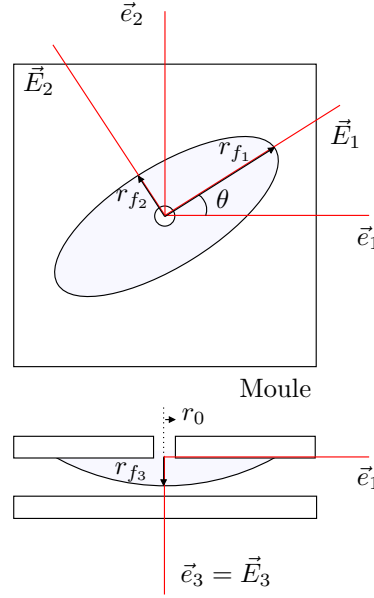
(a) Capteurs de pression [71]



(b) Capteurs capacitifs [73]

**Figure 1.5.** Exemples d'instrumentation de moules destinés à la mesure 2D

**Modèle 3D** La mesure 3D repose sur le suivi de l'écoulement à la fois dans le plan et dans la direction transverse au renfort. Le fluide est injecté par la face supérieure de l'échantillon et progresse dans la direction radiale. En présence d'un renfort anisotrope, le volume caractéristique supposé se développer dans l'épaisseur est un demi-ellipsoïde orienté suivant les directions principales du renfort (figure 1.6).



**Figure 1.6.** Principe de la mesure 3D

Dans le cas idéal d'un renfort isotrope, la perméabilité peut être estimée en considérant un seuil de forme hémisphérique :

$$K = \frac{\varepsilon\mu}{6(p_e - p_f)t} \left\{ r_f^2 \left[ 2 \left( \frac{r_f}{r_0} \right) - 3 \right] + r_0^2 \right\} \quad (1.8)$$

où  $r_f$  est le rayon de l'hémisphère progressant dans l'épaisseur,  $t$  le temps écoulé et  $r_0$  le rayon du seuil.

Plusieurs auteurs se sont intéressés aux écoulements 3D dans les renforts épais [43, 70, 74]. Weitzenböck *et al.* [70] montrent que le passage dans un SIE permet de généraliser le modèle (1.8) aux problèmes anisotropes. Les perméabilités principales sont alors identifiées en relevant les rayons principaux de l'ellipsoïde à des instants successifs.

Comas-Cardona *et al.* proposent une approche originale reposant sur la compression transverse d'un échantillon saturé [75, 76]. Le flot résultant permet de mesurer en une seule étape et de manière continue la perméabilité en fonction du taux de fibres.

En règle générale, le suivi du front dans la direction transverse représente un obstacle important qui limite l'utilisation de la mesure 3D. Des techniques issues du domaine du contrôle non-destructif ont été étudiées par plusieurs auteurs (e.g. ultra-sons [77], tomographie, radioscopie X [43]). Même si ces méthodes représentent des solutions très attractives, elles souffrent d'un manque de flexibilité associé à la complexité technologique (compatibilité matériaux, atténuations du signal, encombrement spatial, etc.). D'autres méthodes ont été employées dans la littérature. Ahn *et al.* utilisent des fibres optiques [78], Weitzenböck *et al.* utilisent des thermistors [70], Nedanov et Advani utilisent une caméra et une balance électronique [74].

### 1.1.3.4 Conclusions

Le choix de la méthode de mesure la plus performante est discutable. Selon Arbter *et al.*, la mesure uniaxiale sur progression de front apparaît comme la méthode la plus reproductible. Les résultats obtenus par la méthode 2D sont généralement en accord avec les mesures 1D, mais seraient plus dispersés. Néanmoins, cette dernière permet de déterminer en une seule étape les perméabilités principales et les directions principales, alors que deux mesures indépendantes sont nécessaires par la mesure 1D. La mesure 3D présente l'avantage unique de fournir les trois composantes du tenseur simultanément. Par ailleurs, la mesure 1D apparaît comme la méthode la plus vulnérable face aux écoulements préférentiels. Il est plus facile, de part la configuration du moule, de maîtriser les effets de bord dans les méthodes 2D et 3D.

Un des objectifs du projet porte sur la caractérisation de la perméabilité transverse, car elle représente une donnée importante dans les procédés d'infusion. Au vu de la littérature, seules deux méthodes permettent d'accéder à ce paramètre :

- la mesure 1D en régime saturé,
- la mesure 3D sur progression de front.

Il a été montré que les mécanismes d'imprégnation en régime saturé pouvaient différer de ceux en régime insaturé, car les effets de tension de surface à la frontière peuvent jouer un rôle important dans le processus de remplissage. Dans ce contexte nous avons choisi d'utiliser la mesure 3D pour accéder à la perméabilité transverse.

## 1.2 Développement du dispositif expérimental

Le moyen d'essai présenté dans cette section a été conçu et réalisé dans le cadre de ce travail en collaboration avec le CRCC de Tarbes.

### 1.2.1 Méthodologie retenue

Nous avons choisi de développer un moyen d'essai polyvalent permettant de réaliser des mesures 2D et 3D en utilisant le même moule. L'identification est réalisée sur progression de front, par écoulement radial et sous vide. La technique de mesure est non intrusive : nous utilisons une caméra CCD et une balance électronique pour suivre le front d'écoulement dans le renfort. La technique que nous avons employée pour le suivi du front 3D repose sur les travaux de Nedanov et Advani [74].

Les principales raisons qui nous ont orientés vers cette méthodologie sont les suivantes :

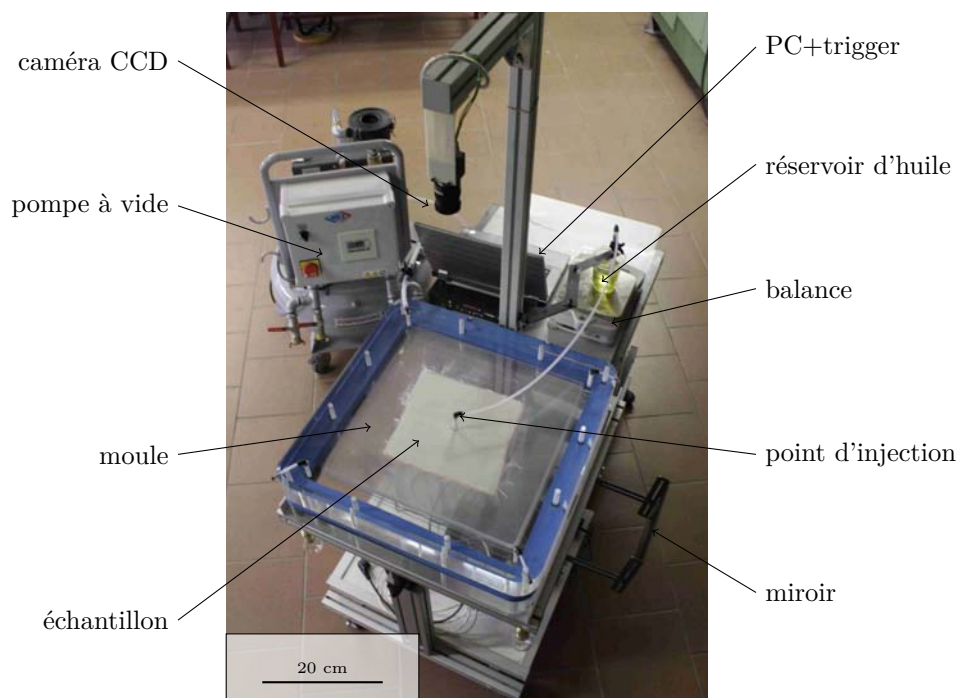
- l'écoulement est peu perturbé par les effets de bords et les capteurs,
- l'identification des perméabilités principales et du repère principal est simultanée,
- les conditions d'identification sont proches du procédé d'infusion,
- le moyen d'essai nécessite des équipements réduits, et peut être facilement transféré dans un environnement industriel.



## 1.2.2 Mise en œuvre matérielle

### 1.2.2.1 Vue d'ensemble

Le moyen d'essai a été assemblé sur un bâti réalisé en profilés d'aluminium. Il supporte les principaux éléments destinés à la réalisation des mesures, i.e. un moule transparent, une caméra CCD, une balance électronique, un PC et un trigger externe. Une pompe à vide munie d'un manomètre est raccordée au moule pour transférer le fluide dans l'échantillon pendant l'essai. Le tuyau d'alimentation est équipé d'une valve pour contrôler l'arrivée du fluide. Une vue d'ensemble précisant l'organisation générale du dispositif est donnée figure 1.7. Une description détaillée du matériel est donnée plus loin.



**Figure 1.7.** Vue d'ensemble du moyen d'essai

**Principe** Le principe de fonctionnement du banc est le suivant. Le renfort est introduit dans le moule au début de l'essai, un jeu de cales permet de régler le taux de fibre de l'échantillon. L'huile est transférée dans l'échantillon par la face supérieure du moule en appliquant le vide dans la cavité.

En configuration 2D, l'écoulement décrit une ellipse centrée sur le point d'injection, la progression est suivie dans le domaine visible par la caméra CCD placée au-dessus du moule. En configuration 3D, un demi-ellipsoïde se développe dans l'épaisseur du renfort. Comme le suggèrent Nedanov et Advani [74], nous procédons par pesée du récipient d'huile pour suivre la progression dans la direction transverse. Le volume de l'ellipsoïde est reconstruit en utilisant les dimensions de l'ellipse visible en surface et la masse d'huile dans l'échantillon. Un jeu de miroirs permet de détecter l'arrivée de

l'huile à l'opposée du moule en n'utilisant qu'une seule caméra : cet instant correspond à la fin de la phase d'écoulement libre et marque la fin de l'essai. Un trigger externe cadence l'acquisition des données et synchronise la balance électronique avec la caméra.

### 1.2.2.2 Équipement et instrumentation

Les principales caractéristiques du matériel utilisé sont fournies ci-après, les plans des pièces et les données des constructeurs sont disponibles en annexes I et J.

**Bâti** Le bâti est une structure métallique réalisée en profilés d'aluminium NORCAN® (annexe I). Il comporte en particulier :

- un cadre destiné à maintenir le moule en position,
- un bras de 1 m de hauteur permettant de fixer la caméra au-dessus du moule,
- une tablette supportant la balance électronique, le réservoir d'huile et le PC,
- des roulettes permettant de déplacer l'appareil.

Le cadre, solidaire du bras, peut être incliné de 0° à 90° par rapport à l'horizontale pour évaluer l'effet de la gravité sur l'écoulement.

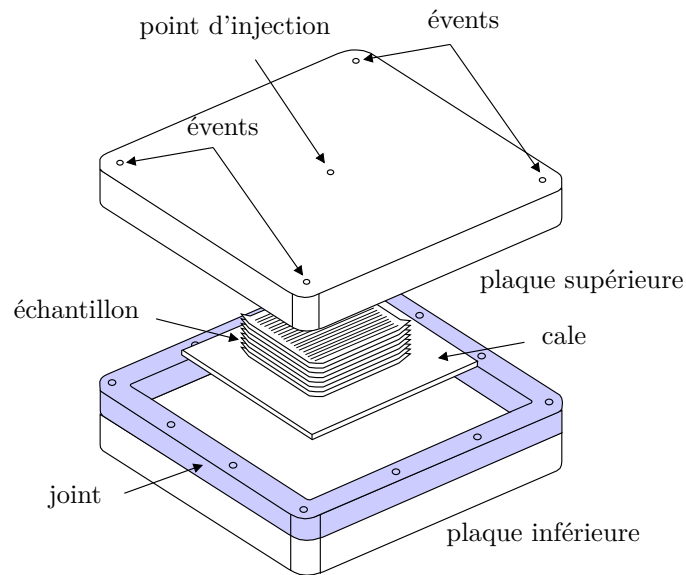
**Moule** Le moule transparent (figure 1.8) est composé de deux plaques carrées de 600 mm de côté et 80 mm d'épaisseur (annexe I). Ces dimensions ont été étudiées pour limiter la déflexion du moule à 0,08 mm pour un niveau de vide de 1 bar. Les plaques ont été réalisées en PMMA pour ses propriétés de transparence et son usinabilité. La face supérieure du moule comporte un seuil circulaire central ( $\varnothing 8$ ) et quatre événements.

Un joint périphérique en silicone a été conçu pour assurer l'étanchéité du moule. Des plots rigides sont insérés dans le joint pour maîtriser la dimension de l'entrefer. La cale placée sous l'échantillon consiste en un jeu de plaques en polycarbonate d'épaisseurs variables.

**Caméra CCD** L'acquisition des images est réalisée par une caméra couleur, équipée d'une interface Firewire™ et d'un port trigger (annexe J). Ce port est utilisé pour déclencher l'acquisition des images par l'intermédiaire du boîtier trigger.

Les dimensions de la matrice (1360 × 1024 pixels) permettent de couvrir l'ensemble de la scène. La résolution du capteur (1,4 Megapixels) associée à la focale de l'objectif (4 à 8 mm) conduit à des facteurs de magnification de l'ordre de 2 pixels par millimètre (annexe J).

**Balance électronique** Nous utilisons une balance électronique d'une capacité de 8,2 kg et d'une précision de 0,1 g (annexe J). Nedanov et Advani ont montré qu'une telle précision permet de suivre les variations de masses résultant de l'avancée du front dans l'échantillon. L'appareil est équipé d'un port série utilisé pour piloter l'acquisition par le signal du trigger.



**Figure 1.8.** Schéma du moule

**Boîtier trigger** Le signal électrique délivré par le trigger déclenche l'acquisition des données sur le front montant. Nous avons développé en collaboration avec E. Laugt (IUT de Tarbes) un dispositif permettant de régler le profil du cycle d'acquisition. À pression imposée, la progression du fluide dans le renfort est rapide au début de l'essai. Nous avons donc considéré deux phases d'acquisition :

- une rampe, qui démarre par une fréquence d'acquisition élevée et qui se termine par une fréquence d'acquisition faible,
- une phase de stabilisation, au cours de laquelle la fréquence d'acquisition atteinte en fin de rampe est maintenue constante jusqu'à la fin de l'essai.

Le profil du cycle d'acquisition, représenté figure 1.9, est paramétré par l'intermédiaire d'un « boîtier trigger » destiné à assurer l'interface avec l'utilisateur. Les paramètres utilisés pour définir le cycle sont les suivants :

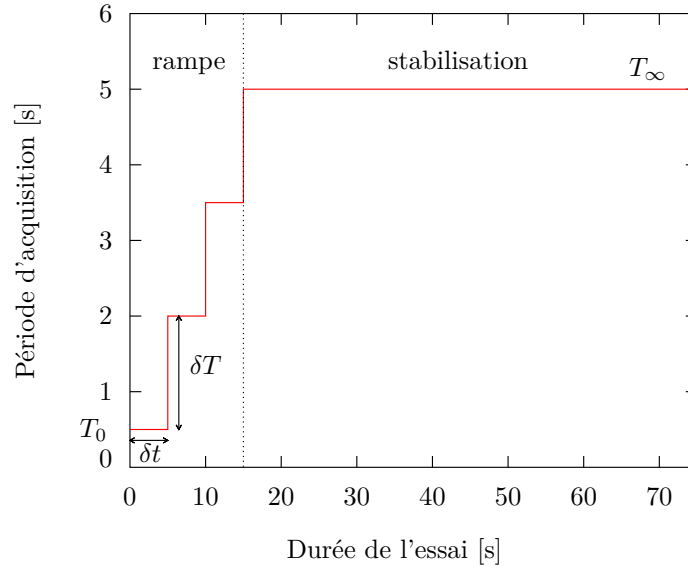
- durée du cycle,
- période d'acquisition initiale ( $T_0$ ),
- période d'acquisition finale ( $T_\infty$ ),
- incrément de période ( $\delta T$ ),
- incrément de temps ( $\delta t$ ).

Nous avons également implanté un mode de fonctionnement manuel permettant une utilisation plus souple du trigger (déclenchement des mesures par l'utilisateur).

### 1.2.2.3 Fluide modèle

Nous utilisons un fluide modèle pour la réalisation des essais. L'huile de colza a été sélectionnée pour des considérations pratiques, elle permet notamment :

- un bon contrôle de la viscosité durant l'essai (absence de polymérisation),



**Figure 1.9.** Profil du cycle d'acquisition et boîtier trigger

- une maintenance simplifiée du moule,
- une manipulation aisée (utilisation à température ambiante, absence de composés nocifs, etc.).

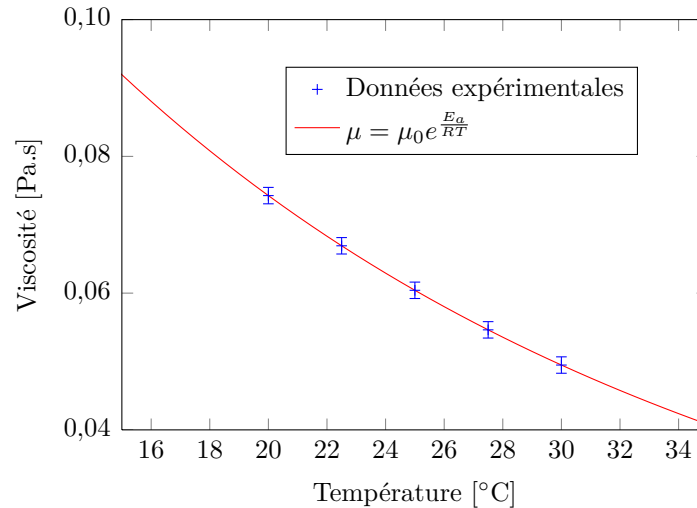
Cette huile a déjà été utilisée dans la littérature pour remplacer la résine dans des applications de mesure de perméabilité [45]. Utilisée à température ambiante, elle présente un comportement Newtonien et des propriétés rhéologiques proches des systèmes thermodurcissables industriels (tension superficielle de  $33,4 \text{ mN}\cdot\text{m}^{-1}$ , viscosité de  $0,075 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  à  $20^\circ\text{C}$ ). Néanmoins, sa viscosité est fortement thermodépendante : nous utilisons une loi exponentielle de type Arrhénius pour modéliser ce comportement :

$$\mu = \mu_0 e^{\frac{E_a}{RT}} \quad (1.9)$$

où  $\mu$  est la viscosité,  $\mu_0$  une viscosité de référence,  $E_a$  l'énergie d'activation de la viscosité,  $R$  la constante des gaz parfaits et  $T$  la température en Kelvin. Dans le cadre de ce travail nous avons utilisé les paramètres identifiés par Dusserre *et al.* [45] qui sont fournis dans le tableau 1.10 (a). Les variations de viscosité obtenues entre  $15^\circ\text{C}$  et  $35^\circ\text{C}$  sont représentées dans la figure 1.10 (b).

$\mu_0$ [Pa.s]	$E_a$ [J.mol <sup>-1</sup> ]	$R$ [J.mol <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$3,35.10^{-7}$	$3,00.10^4$	8,314472

(a) Paramètres utilisés dans l'équation (1.9)  
(d'après [45])



(b) Variations de viscosité entre 15°C et 35°C

**Figure 1.10.** Variations de la viscosité de l'huile de colza en fonction de la température

### 1.2.3 Exploitation des données expérimentales

Nous avons développé un logiciel complet dédié à l'exploitation des résultats issus des mesures (figure 1.11). Ce logiciel, que nous avons baptisé PERMCOMP (« Perméabilité Composite »), intègre des outils d'analyse d'images et des fonctions graphiques avancées destinées à faciliter le traitement des résultats.

Les principales fonctionnalités supportées par notre application sont les suivantes :

- prise en charge des données expérimentale issues de l'essai (série d'images, temps, masses),
- calibration de l'image,
- extraction de la frontière par traitement d'images,
- ajustement des ellipses par méthode graphique ou par moindres carrés,
- prise en compte de la réfraction dans le moule,
- calcul de porosité,
- calcul de perméabilité 2D et 3D.

Nous ne développerons pas ici le contenu détaillé du logiciel, qui est plus amplement décrit dans l'annexe H. Nous nous attarderons davantage sur trois étapes importantes de notre implémentation :

- le modèle optique intégrant la prise en compte de la réfraction,
- la méthode de calcul de la porosité,
- les procédures d'identification des perméabilités 2D et 3D.

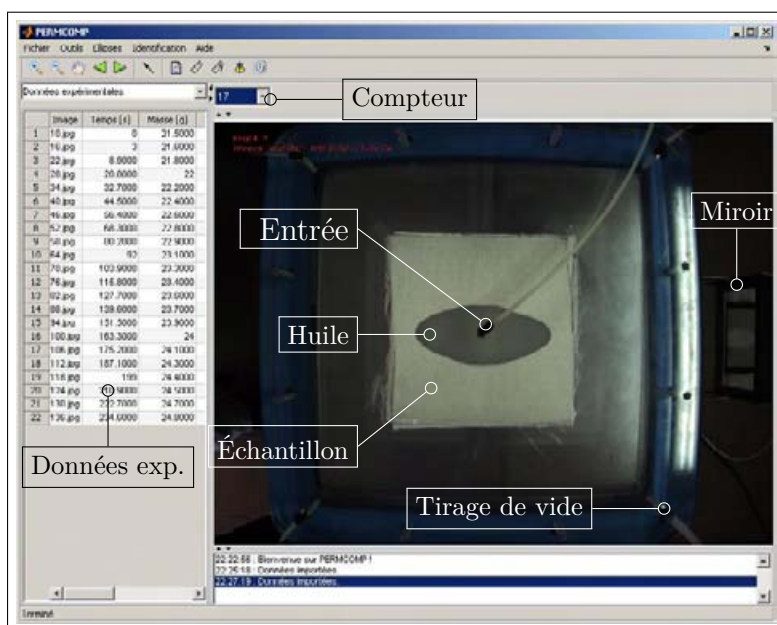


Figure 1.11. Logiciel développé pour exploiter les résultats (PERMCOMP)

### 1.2.3.1 Modèle optique

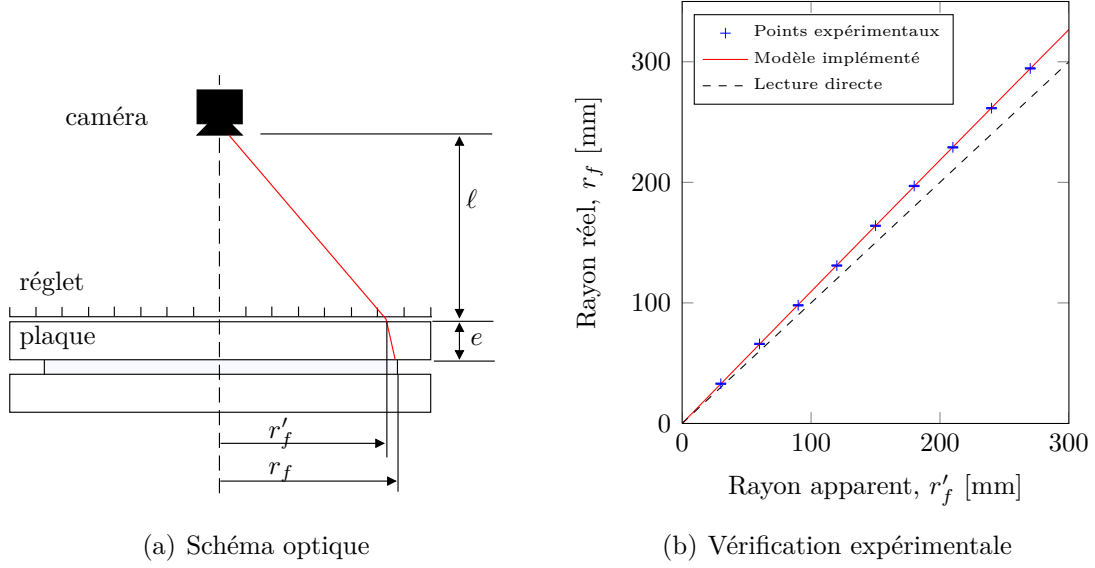
Un des aspects importants intervenant dans l'exploitation des images est l'extraction des dimensions de l'ellipse. Nous avons mis en évidence l'importance des effets liés à la réfraction de la lumière dans le moule. En effet, en présence d'une plaque de forte épaisseur (80 mm) nous obtenons des déformations importantes de l'ellipse qui faussent à la fois le rapport d'anisotropie et la cinétique de propagation. Pour pallier cette difficulté deux approches peuvent être envisagées :

- l'insertion d'une mire sous la plaque,
- la correction des dimensions de l'ellipse.

L'insertion de la mire pose un certain nombre de difficultés expérimentales (alignement suivant les directions principales, perte de visibilité en présence du renfort, perturbation de l'écoulement, etc.). Nous avons donc choisi de corriger les dimensions, en utilisant le modèle optique développé par Dusserre et Bernhart [79] (démonstré en annexe A) :

$$r_f = r'_f + e \frac{n_1}{n_2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{r_f}\right)^2}} \quad (1.10)$$

où  $r_f$  désigne le rayon du front,  $r'_f$  le rayon du front vu par la caméra,  $e$  l'épaisseur du moule,  $n_1$  l'indice optique de l'air,  $n_2$  l'indice optique du moule, et  $\ell$  la distance séparant la caméra du moule, cf. figure 1.12 (a).



**Figure 1.12.** Réfraction de la lumière dans le moule : modèle optique et validation expérimentale

Nous avons vérifié expérimentalement la validité du modèle (1.10) dans la configuration du montage : les paramètres géométriques et optiques que nous avons utilisés sont regroupés dans le tableau 1.1.

$e$ [mm]	$\ell$ [mm]	$n_1$ [-]	$n_2$ [-]
80	590	1	1,43

**Tableau 1.1.** Paramètres utilisés pour la validation expérimentale du modèle optique

La mesure a été réalisée en utilisant deux règles graduées placées de part et d'autre de la plaque. Les résultats, représentés figure 1.12 (b), indiquent un excellent accord entre le modèle implémenté et les données expérimentales. Les effets liés à la réfraction sont anticipés de manière très précises quelle que soit la dimension de l'ellipse (erreur inférieure à 0,2%), tandis qu'une lecture directe conduit à d'importants écarts qui faussent la mesure (10% d'erreur à 270 mm du point d'injection).

### 1.2.3.2 Porosité

L'identification de la perméabilité nécessite la connaissance préalable de la porosité, cf. équations (1.12) et (1.16). Nous utilisons une méthode classique issue de la littérature pour accéder à ce paramètre [40]. Celle-ci, identique pour une mesure 2D ou 3D, consiste à peser l'échantillon de renfort à l'état sec :

$$\varepsilon = 1 - \frac{M_r}{S_r h \rho_f} \quad (1.11)$$

où  $M_r$  est la masse de l'échantillon de renfort sec,  $S_r$  sa surface plane,  $h$  l'entrefer du moule (épaisseur de l'échantillon) et  $\rho_f$  la masse volumique de la fibre.

### 1.2.3.3 Identification 2D

En présence de renforts anisotropes, nous utilisons un Système Isotrope Equivalent (SIE) pour accéder aux perméabilités principales [64, 66, 80]. Dans le SIE, l'ellipse est transformée en cercle, dont la progression est régie par l'expression suivante :

$$\underbrace{\bar{r}_f^2 \left[ 2 \ln \left( \frac{\bar{r}_f}{\bar{r}_0} \right) - 1 \right]}_{F(\bar{r}_f, \bar{r}_0)} + \bar{r}_0^2 = \frac{4(p_e - p_f)}{\mu \varepsilon} \bar{K} t \quad (1.12)$$

où  $\bar{K} = \sqrt{K_1 K_2}$  est la perméabilité isotrope équivalente,  $\bar{r}_f$  le rayon isotrope équivalent du front à l'instant  $t$  et  $\bar{r}_0$  le rayon isotrope équivalent du seuil. Le rayon du cercle vérifie :

$$\bar{r}_f = \begin{cases} r_{f_1} \alpha_{21}^{\frac{1}{4}} & (1.13a) \\ r_{f_2} \alpha_{21}^{-\frac{1}{4}} & (1.13b) \end{cases}$$

où  $(r_{f_1}, r_{f_2})$  sont les demi-axes de l'ellipse et  $\alpha_{21} = \frac{K_2}{K_1}$  le rapport d'anisotropie dans le plan du renfort. Les perméabilités planes s'expriment en fonction de la perméabilité isotrope équivalente et du rapport d'anisotropie comme suit :

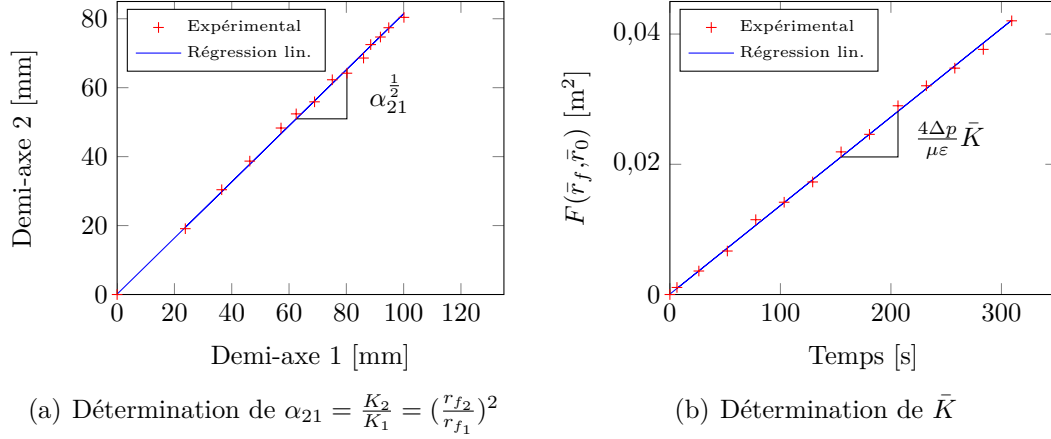
$$\begin{cases} K_1 = \bar{K} \alpha_{21}^{-\frac{1}{2}} & (1.14a) \\ K_2 = \bar{K} \alpha_{21}^{\frac{1}{2}} & (1.14b) \end{cases}$$

**Procédure** Dans le logiciel, les données expérimentales (temps, longueurs des demi-axes, et paramètres procédés) sont récupérées dans le tableau de données pour alimenter la procédure d'identification des perméabilités planes. Nous utilisons la méthode décrite par Bréard [80], qui se décline en quatre étapes comme suit (figure 1.13) :

1. Rapport d'anisotropie : Le rapport d'anisotropie  $\alpha_{21}$  est déterminé par régression linéaire sur la courbe  $r_{f_2} = f(r_{f_1})$  en utilisant l'équation (1.13).
2. Rayon isotrope équivalent : Le rayon isotrope équivalent  $\bar{r}$  est calculé en appliquant l'équation (1.13). Pour ne pas privilégier une direction par rapport à une autre, nous calculons une valeur moyenne sur les deux axes en utilisant les relations (1.13a) et (1.13b).
3. Perméabilité isotrope équivalente : La perméabilité isotrope équivalente  $\bar{K}$  est déterminée par régression linéaire sur la courbe  $F = f(t)$  en utilisant l'équation (1.12).
4. Perméabilités planes : Les perméabilités planes  $(K_1, K_2)$  sont calculées en appliquant les équations (1.14a) et (1.14b).

**Géométrie du seuil** Le passage au SIE transforme la frontière en cercle, mais transforme également le seuil en ellipse, ce qui conduit à une ambiguïté sur le choix du rayon (figure 1.14). Pour les renforts faiblement anisotropes, comme les mats ou les



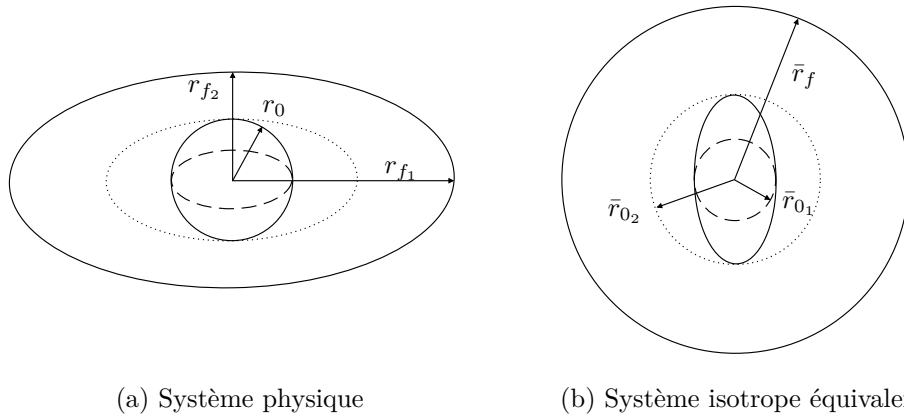


**Figure 1.13.** Détermination du taux d'anisotropie et de la perméabilité isotrope équivalente dans la mesure 2D

tissés, la déformation du seuil est faible : dans ce cas, nous assimilons  $\bar{r}_0$  à  $r_0$  dans le calcul de la fonctionnelle  $F$ . Toutefois, pour les renforts les plus anisotropes, comme les unidirectionnels (typiquement  $\alpha_{21} \leq 0,2$ ), le calcul des perméabilités dépend fortement de la géométrie du seuil. Dans ce cas, nous considérons les cercles inscrit et circonscrit à l'ellipse pour encadrer la perméabilité isotrope équivalente dans l'étape 3 :

$$\frac{\mu\varepsilon}{4(p_e - p_f)t} F(\bar{r}_f, \bar{r}_{0_2}) \leq \bar{K} \leq \frac{\mu\varepsilon}{4(p_e - p_f)t} F(\bar{r}_f, \bar{r}_{0_1}) \quad (1.15)$$

où  $\bar{r}_{0_1} = r_0 \alpha_{21}^{\frac{1}{4}}$  est le rayon du cercle inscrit dans l'ellipse et  $\bar{r}_{0_2} = r_0 \alpha_{21}^{-\frac{1}{4}}$  le rayon du cercle circonscrit (l'indice 1 désigne l'axe le plus perméable).



**Figure 1.14.** Encadrement du seuil dans le repère isotrope équivalent (trait plein : seuil, tiretés : seuil interne, pointillés : seuil externe)

### 1.2.3.4 Identification 3D

Nous utilisons encore une fois un SIE pour accéder aux perméabilités principales [70, 80]. Dans ce système, le demi-ellipsoïde physique est réduit à une hémisphère. Sa progression est gouvernée par l'expression suivante :

$$\underbrace{\bar{r}_f^2 \left[ 2 \left( \frac{\bar{r}_f}{\bar{r}_0} \right) - 3 \right]}_{F(\bar{r}_f, \bar{r}_0)} + \bar{r}_0^2 = \frac{6(p_e - p_f)}{\mu \varepsilon} \bar{K} t \quad (1.16)$$

où  $\bar{K}$  est la perméabilité isotrope équivalente,  $\bar{r}_f$  le rayon isotrope équivalent du front à l'instant  $t$  et  $\bar{r}_0$  le rayon isotrope équivalent du seuil. Dans le SIE, le rayon de l'hémisphère est défini comme suit :

$$\bar{r}_f = \begin{cases} \alpha_{21}^{\frac{1}{4}} \alpha_{13}^{-\frac{1}{4}} r_{f1} & (1.17a) \\ \alpha_{21}^{-\frac{1}{4}} \alpha_{13}^{-\frac{1}{4}} r_{f2} & (1.17b) \\ \alpha_{23}^{\frac{1}{4}} r_{f3} & (1.17c) \end{cases}$$

où  $(r_{f1}, r_{f2}, r_{f3})$  sont les demi-axes de l'ellipsoïde et  $\alpha_{ij}$  les rapports d'anisotropie du renfort ( $\alpha_{21} = \frac{K_2}{K_1}$ ,  $\alpha_{13} = \frac{K_1}{K_3}$ ,  $\alpha_{23} = \frac{K_2}{K_3} = \alpha_{21} \alpha_{13}$ ). Les perméabilités principales s'expriment en fonction de la perméabilité isotrope équivalente et des rapports d'anisotropie :

$$\begin{cases} K_1 = \bar{K} \alpha_{21}^{-1/2} \alpha_{13}^{1/2} & (1.18a) \\ K_2 = \bar{K} \alpha_{21}^{1/2} \alpha_{13}^{1/2} & (1.18b) \\ K_3 = \bar{K} \alpha_{23}^{-1/2} & (1.18c) \end{cases}$$

**Procédure** La procédure d'identification utilisée repose sur le même principe que le cas 2D, nous renvoyons aux travaux de Bréard pour plus de détails sur la méthode [80]. Cependant, la position du front dans l'épaisseur n'est pas explicitement mesurée. Elle est évaluée en utilisant à la fois la masse de fluide présente dans l'échantillon et les dimensions de l'ellipse visible en surface, en supposant que la tache d'huile forme un demi-ellipsoïde [74] :

$$r_{f3} = \frac{3}{2} \frac{M_h}{\rho_h \pi \varepsilon r_{f1} r_{f2}} \quad (1.19)$$

où  $M_h$  désigne la masse d'huile présente dans l'échantillon et  $\rho_h$  sa masse volumique. Une fois cette étape réalisée, nous procédons en quatre étapes pour accéder aux perméabilités principales du renfort :

1. Rapports d'anisotropies : Les rapports d'anisotropie  $\alpha_{21}$ ,  $\alpha_{13}$  et  $\alpha_{23}$  sont respectivement déterminés par régression linéaire sur les courbes  $r_{f2} = f(r_{f1})$ ,  $r_{f1} = f(r_{f3})$  et  $r_{f2} = f(r_{f3})$  en utilisant l'équation (1.17).
2. Rayon isotrope équivalent : Le rayon isotrope équivalent  $\bar{r}_f$  est calculé en appliquant l'équation (1.17). Pour ne pas privilégier une direction par rapport aux deux autres, nous calculons une valeur moyenne sur les trois axes principaux en utilisant les relations (1.17a), (1.17b) et (1.17c).

3. Perméabilité isotrope équivalente : La perméabilité isotrope équivalente  $\bar{K}$  est déterminée par régression linéaire sur la courbe  $F = f(t)$  en utilisant l'équation (1.16).
4. Perméabilités spatiales : Les perméabilités spatiales  $(K_1, K_2, K_3)$  sont calculées en appliquant les équations (1.18a), (1.18b) et (1.18c).

**Géométrie du seuil** En configuration 3D, la transformation appliquée déforme le seuil en demi-ellipsoïde, ce qui conduit à une ambiguïté sur le choix du rayon à utiliser dans le SIE. Pour la majorité des renforts (tissés, unidirectionnels, mats, etc.), la perméabilité transverse est nettement plus faible que les perméabilités planes (typiquement  $\alpha_{13} \geq 10$ ), car le fluide doit contourner un grand nombre de fibres pour progresser dans l'épaisseur. Il en résulte généralement une forte déformation du seuil au passage dans le SIE, et par conséquent le choix du rayon du seuil influe sur le résultat final. Nous procédons donc dans l'étape 3 à un encadrement de la perméabilité isotrope équivalente  $\bar{K}$ , en considérant tour à tour les hémisphères interne et externe au seuil déformé :

$$\frac{\mu\varepsilon}{6(p_e - p_f)t} F(\bar{r}_f, \bar{r}_{0_3}) \leq \bar{K} \leq \frac{\mu\varepsilon}{6(p_e - p_f)t} F(\bar{r}_f, \bar{r}_{0_1}) \quad (1.20)$$

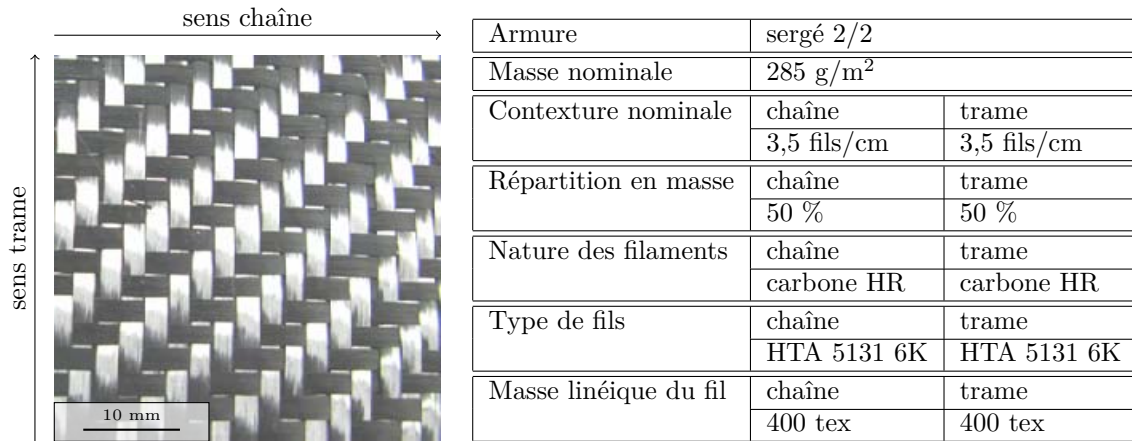
où  $\bar{r}_{0_1} = \alpha_{21}^{\frac{1}{4}} \alpha_{13}^{-\frac{1}{4}} \bar{r}_0$  représente le rayon de l'hémisphère interne et  $\bar{r}_{0_2} = \alpha_{23}^{-\frac{1}{4}} \bar{r}_0$  le rayon de l'hémisphère externe, l'indice 1 (respectivement l'indice 3) étant associé à l'axe le plus perméable (respectivement le moins perméable).

## 1.3 Premiers résultats : caractérisation du renfort G0986

Nous avons réalisé nos premières mesures sur le renfort aéronautique G0986. Ce renfort a été caractérisé par plusieurs laboratoires (perméabilités planes), suivant différentes méthodes, dans le cadre d'un benchmark international récent [40]. Bien que les résultats publiés révèlent de fortes dispersions entre les auteurs, ce travail représente une importante base de données que nous avons utilisée comme référence pour éprouver notre dispositif.

### 1.3.1 Présentation du renfort

Le renfort étudié est un sergé 2/2 en fibres de carbone Haute Résistance (HR), fabriqué par Hexcel<sup>®</sup> et commercialisé sous la référence HexForce<sup>®</sup> G0986 D1200 (figure 1.15). Il s'agit d'un renfort aéronautique standard utilisé dans la mise en œuvre des composites par voie liquide (injection, infusion). Le tissu est équilibré, la contexture chaîne (identique à la contexture trame), présente un compte de 3,5 fils/cm. La mèche comporte environ 6 000 filaments de 7  $\mu\text{m}$  de diamètre, correspondant à une masse linéique de fil de 400 tex.



(a) Photographie de l'armure du renfort (b) Caractéristiques du renfort (données fournisseur)

**Figure 1.15.** Caractéristiques du renfort étudié (Hexcel® HexForce® G0986 D1200)

### 1.3.2 Mesure 2D

Pour mesurer les perméabilités planes du renfort, nous avons découpé et superposé quatre plis de renfort de dimensions 250 × 250 mm, en conservant la même orientation pour chaque couche (i.e. sens chaîne et trame). Bien qu'en théorie la présence d'un trou soit l'assurance d'un écoulement purement plan, nous avons laissé l'échantillon intact, car une mauvaise maîtrise de la découpe (imprécision géométrique, effilochage du renfort, etc.) conduit à d'importantes perturbations de l'écoulement. Toutefois, l'absence de trou ne constitue pas un obstacle majeur à l'hypothèse d'écoulement plan, compte tenu de la faible épaisseur de l'échantillon (1,3 mm).

Les paramètres rhéologiques et procédés utilisés pour réaliser les essais sont regroupés dans le tableau 1.2. Le niveau de vide imposé a été mesuré au manomètre sur la pompe. La viscosité de l'huile a été mesurée par l'intermédiaire de la température ambiante. La porosité a été évaluée par pesée de l'échantillon.

$p_e$ [bar]	$p_f$ [mbar]	$\mu$ [Pa.s]	$\varepsilon$ [%]	$r_0$ [mm]
1,013	50	0,094	51,5	4

**Tableau 1.2.** Paramètres rhéologiques et procédés utilisés pour les mesures 2D

**Résultats** Nous avons réalisé trois mesures de perméabilité dans le plan. Pour illustrer la procédure de traitement des résultats, nous avons regroupé dans la figure 1.16 les images utilisées lors d'un essai, ainsi que les courbes permettant d'accéder aux perméabilités (figure 1.17).

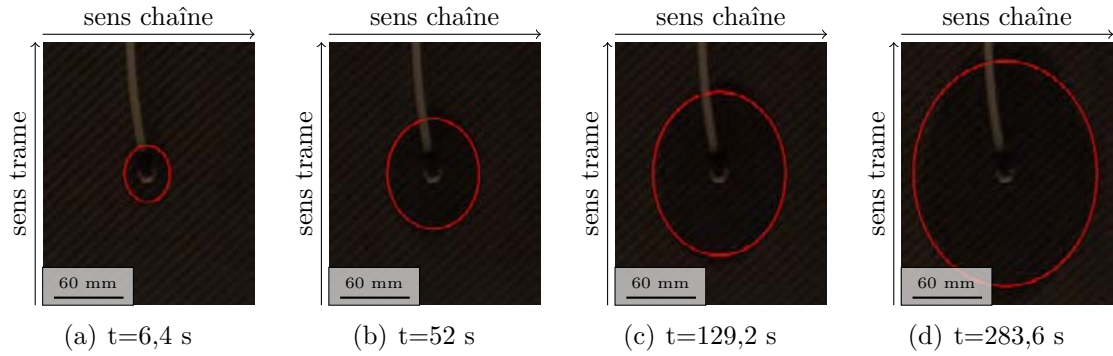
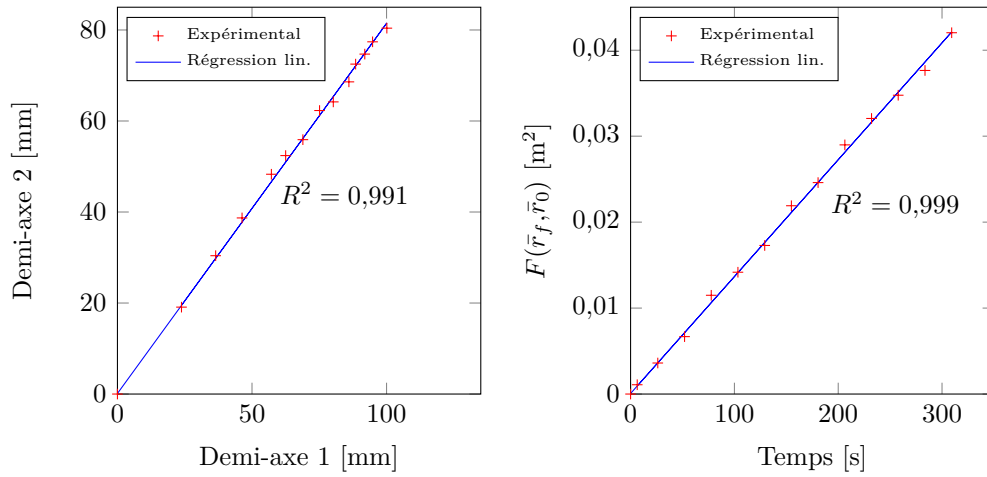
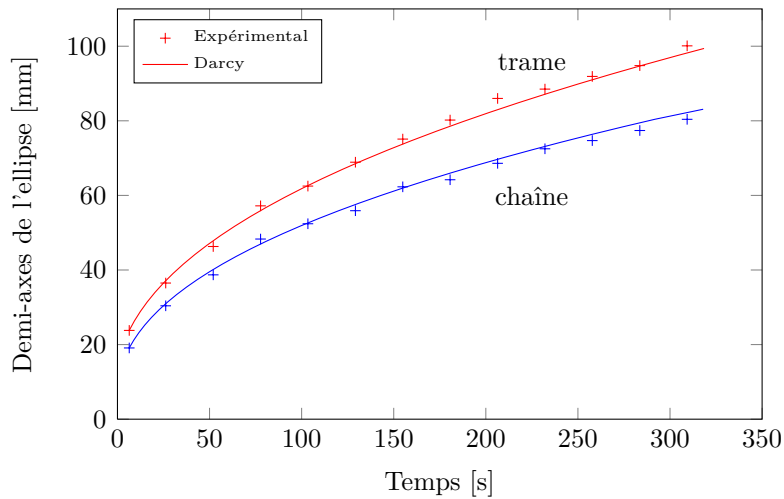


Figure 1.16. Progression de la tache d'huile dans le renfort et ellipses (mesure 2D)



(a) Détermination de  $\alpha_{21} = \frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{r_{f2}}{r_{f1}}\right)^2$

(b) Détermination de  $\bar{K}$



(c) Modèle obtenu avec les perméabilités identifiées

Figure 1.17. Détermination des perméabilités principales (mesure 2D)

Pour les trois essais que nous avons réalisés, l'angle d'orientation des ellipses montre clairement que la chaîne et la trame sont les directions principales du renfort (figure 1.16). La direction la plus perméable est la trame (direction du grand axe de l'ellipse). Nous utilisons par la suite l'indice 1 pour la perméabilité sens trame ( $K_1$ ) et l'indice 2 pour la perméabilité sens chaîne ( $K_2$ ).

Les résultats que nous avons obtenus sont regroupés dans le tableau 1.3. Même si un traitement statistique sur un nombre d'essais réduit est discutable, nous avons calculé la moyenne et l'écart type des perméabilités principales et du rapport d'anisotropie. Le calcul d'incertitude est explicité dans le paragraphe suivant.

	Essai 1	Essai 2	Essai 3	Moyenne	Écart type
$\alpha_{21} = K_2/K_1$	$0,66 \pm 0,03$	$0,63 \pm 0,03$	$0,56 \pm 0,03$	$0,62 \pm 0,03$	0,05
$K_1/10^{-11}$ [m <sup>2</sup> ]	$2,13 \pm 0,19$	$2,75 \pm 0,24$	$2,51 \pm 0,22$	$2,46 \pm 0,22$	0,31
$K_2/10^{-11}$ [m <sup>2</sup> ]	$1,41 \pm 0,12$	$1,72 \pm 0,15$	$1,39 \pm 0,12$	$1,51 \pm 0,13$	0,19

**Tableau 1.3.** Synthèse des mesures 2D réalisées sur le renfort G0986

Les écarts types calculés révèlent une faible dispersion des résultats, ce qui indique une bonne répétabilité du dispositif.

Nous avons identifié un rapport d'anisotropie de  $0,62 \pm 0,03$  entre la chaîne et la trame. Ces résultats sont en accord avec les résultats publiés par les participants du benchmark (rapport d'anisotropie variant de 0,38 à 0,91) [40]. En présence d'un tissu équilibré, un comportement anisotrope peut sembler paradoxal, mais en réalité il est probable que les différences de tension entre le fil de chaîne et le fil de trame au cours du tissage soit à l'origine de ce résultat.

Les valeurs des perméabilités planes que nous avons identifiées ( $2,46 \pm 0,22 \times 10^{-11}$  m<sup>2</sup> suivant la trame et  $1,51 \pm 0,13 \times 10^{-11}$  m<sup>2</sup> suivant la chaîne) présentent un bon accord qualitatif avec les résultats du benchmark [40]. Néanmoins, celui-ci révèle une forte dispersion suivant les auteurs et les méthodes employées (variations d'un facteur supérieur à 10), ce qui confirme que les techniques existantes peuvent conduire à d'importants écarts, et ceci même pour des méthodes de mesures communes. Suivant Arbter *et al.* [40], cette dispersion peut être attribuée à divers facteurs : paramètres expérimentaux (nombre de plis, nature du fluide, niveau de pression, etc.), variabilité des renforts (différences suivant le lot), ou encore conditions opératoires (facteurs « humains »).

**Calcul d'incertitude** Nous avons suivi l'approche décrite dans la référence [45] pour évaluer les incertitudes expérimentales intervenant dans la mesure de perméabilité 2D. En utilisant la dérivée logarithmique, l'équation (1.12) fournit l'incertitude associée à la perméabilité isotrope équivalente :

$$\frac{\Delta \bar{K}}{\bar{K}} = \frac{\Delta \mu}{\mu} + \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\Delta(p_e - p_f)}{p_e - p_f} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta F(\bar{r}_f, \bar{r}_0)}{F(\bar{r}_f, \bar{r}_0)} \quad (1.21)$$

où  $\Delta X$  désigne l'erreur absolue sur la variable  $X$  et  $\frac{\Delta X}{X}$  l'erreur relative associée. L'erreur absolue pour la fonctionnelle  $F(\bar{r}_f, \bar{r}_0)$  est donnée comme suit :

$$\Delta F(\bar{r}_f, \bar{r}_0) = 4\bar{r}_f \ln\left(\frac{\bar{r}_f}{\bar{r}_0}\right) \Delta\bar{r}_f + 2\bar{r}_0 \left(1 - \frac{\bar{r}_f^2}{\bar{r}_0^2}\right) \Delta\bar{r}_0 \quad (1.22)$$

La contribution de chaque paramètre a été évaluée en fonction des incertitudes expérimentales (tableau 1.4). Pour le rayon isotrope équivalent, qui dépend du temps, nous utilisons la valeur moyenne sur toute la progression.

	$\mu$	$\varepsilon$	$p_e - p_f$	$t$	$\bar{r}_f$	$\bar{r}_0$
$X$	0,094 Pa.s	51,5 %	950 mbar	300 s	63 mm	4 mm
$\frac{\Delta X}{X}$	$\pm 2$ %*	$\pm 2$ %*	$\pm 2$ %*	$\pm 0,1$ %*	$\pm 1,6$ %	$\pm 2,5$ %
$\Delta X$	$\pm 1,9$ mPa.s	$\pm 1$ %	$\pm 19$ mbar	$\pm 0,3$ s	$\pm 1$ mm*	$\pm 0,1$ mm*

**Tableau 1.4.** Incertitudes expérimentales dans la mesure 2D (l'exposant \* désigne une incertitude imposée par l'expérience)

En utilisant les deux derniers paramètres et l'équation (1.22), l'erreur relative sur la fonctionnelle est évaluée à  $\pm 2,7$  %, et conduit à une erreur relative sur la perméabilité de  $\pm 8,8$  %.

### 1.3.3 Mesure 3D

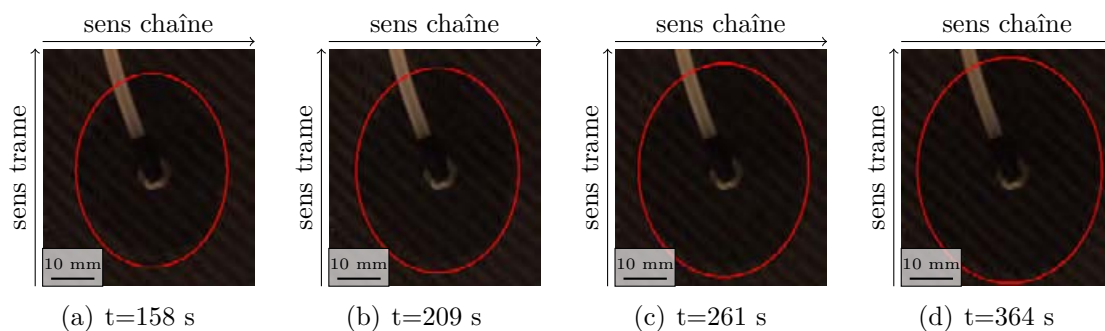
La mesure 3D a été réalisée en découpant 25 plis de renfort de dimensions  $125 \times 125$  mm. Les plis ont été empilés en respectant la même orientation (chaîne et trame) pour chaque couche. L'échantillon obtenu présente une épaisseur de 8,1 mm. Les paramètres rhéologiques et procédés utilisés pour réaliser l'essai sont regroupés dans le tableau 1.5.

$p_e$ [bar]	$p_f$ [mbar]	$\mu$ [Pa.s]	$\varepsilon$ [%]	$\rho_h$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$r_0$ [mm]
1,013	50	0,084	52	916	4

**Tableau 1.5.** Paramètres rhéologiques et procédés utilisés pour la mesure 3D

**Résultats** La figure 1.18 montre le profil des ellipses identifiées à la surface de l'échantillon pendant l'essai. Comme pour la mesure 2D, les directions principales sont alignées suivant la chaîne et la trame (axe le plus perméable). Nous utilisons l'indice 1 pour désigner la direction trame, l'indice 2 pour la chaîne et l'indice 3 pour la direction transverse. Les courbes utilisées pour identifier les perméabilités principales sont représentées figure 1.19.

Nous avons effectué un relevé expérimental à distance du point d'injection, afin de se placer en régime 3D établi. Nous avons obtenu un rapport d'anisotropie dans le plan proche de celui identifié lors de la mesure 2D ( $\frac{K_2}{K_1} = 0,66 \pm 0,02$ ), ce qui montre un bon accord entre l'étude 2D et l'étude 3D.



**Figure 1.18.** Progression de la tache d'huile dans le renfort et ellipses (mesure 3D)

Le coefficient de corrélation que nous avons obtenu (0,999) montre clairement la dépendance linéaire entre les rayons principaux de l'ellipse qui est visible en surface, dans la direction chaîne et trame, cf. figure 1.19 (a). Cette tendance n'est pas aussi nette pour les coefficients d'anisotropie  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ , qui font intervenir la composante transverse de l'écoulement : le relevé expérimental de la position transverse du front, dans les figures 1.19 (b) et 1.19 (c), indique que la dépendance linéaire est moins marquée. Il est probable que pour les premiers points de la série, la forme de l'ellipsoïde soit encore mal définie (ellipsoïde aplatie), mais cet effet semble s'estomper dans la seconde partie de la mesure. Nous avons obtenu un rapport d'anisotropie de  $60,4 \pm 1,93$  (respectivement  $38,5 \pm 1,23$ ) entre la trame et la direction transverse (respectivement entre la chaîne et la direction transverse). Ceci montre que la perméabilité dans la direction transverse est nettement plus faible que les perméabilités planes, ce qui est un résultat classique pour la majorité des renforts textiles, cf. tableau 1.6 (a).

La figure 1.19 (c) montre que la géométrie du seuil joue un rôle déterminant dans la détermination de la perméabilité isotrope équivalente, puisque la fonctionnelle est très affectée par le choix de la frontière interne. La perméabilité isotrope équivalente est comprise entre  $4,30 \pm 0,4410^{-12} \text{ m}^2$  et  $1,01 \pm 0,11.10^{-13} \text{ m}^2$ . Ceci montre qu'en présence d'une forte anisotropie entre le plan et la direction transverse, l'encadrement est large et ne fournit qu'une estimation de la valeur des perméabilités, cf. tableau 1.6 (b). Néanmoins, les bornes qui ont été identifiées permettent d'encadrer la progression expérimentale du fluide dans l'échantillon, cf. figure 1.19 (d). En particulier, l'encadrement des perméabilités planes est compatible avec les résultats que nous avons obtenus en 2D.

Les résultats de l'essai sont regroupés dans le tableau 1.6. Le calcul d'incertitude est développé dans le paragraphe suivant.



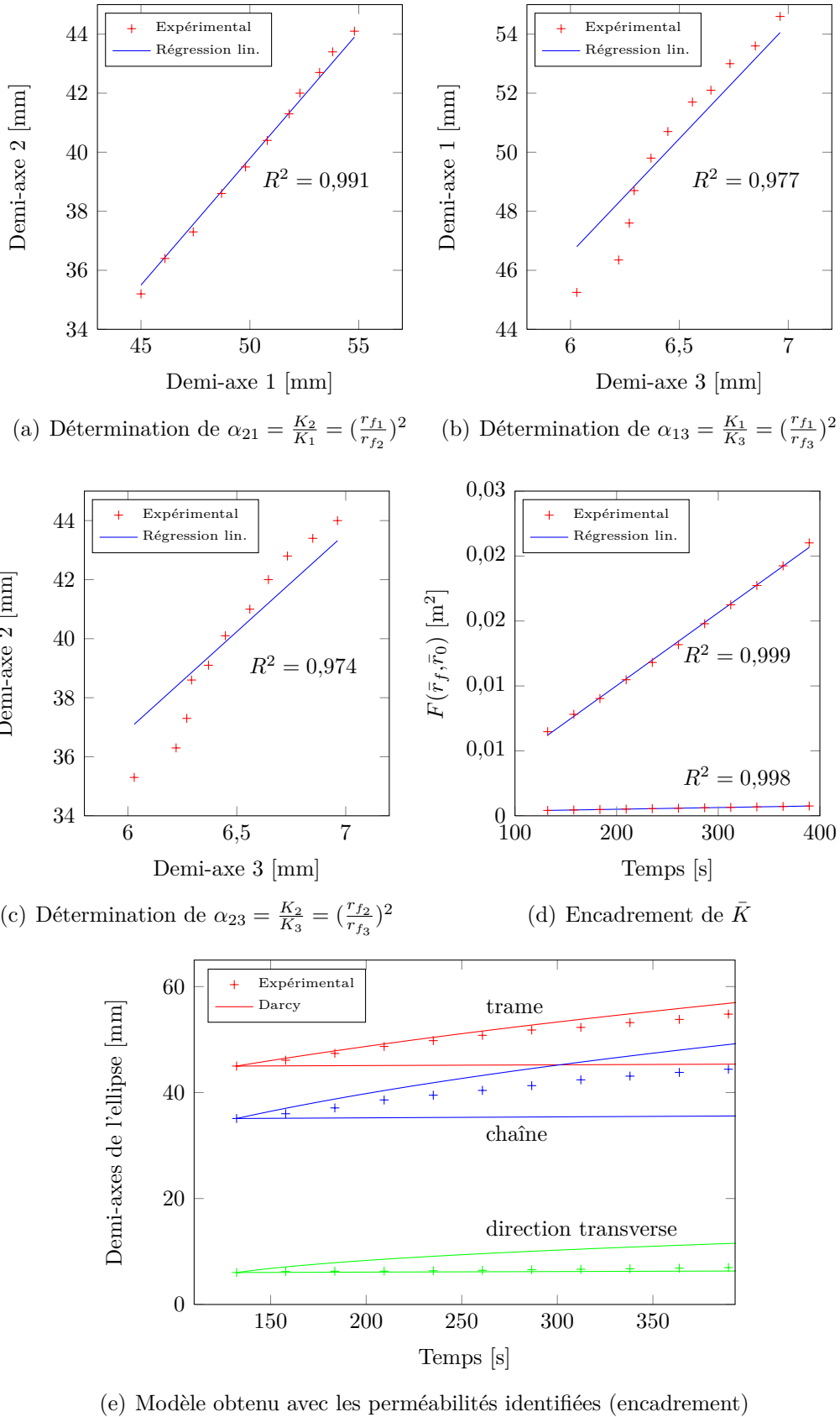


Figure 1.19. Détermination des perméabilités principales (mesure 3D)

		Borne inférieure	Borne supérieure
$\alpha_{21} = \frac{K_2}{K_1}$	$0,66 \pm 0,02$	$K_1$ [m <sup>2</sup> ]	$9,79 \pm 1,08 \times 10^{-13}$
$\alpha_{13} = \frac{K_1}{K_3}$	$60,4 \pm 1,93$	$K_2$ [m <sup>2</sup> ]	$6,25 \pm 0,69 \times 10^{-13}$
$\alpha_{23} = \frac{K_2}{K_3}$	$38,5 \pm 1,23$	$K_3$ [m <sup>2</sup> ]	$1,62 \pm 0,18 \times 10^{-14}$
			$4,18 \pm 0,46 \times 10^{-11}$
			$2,67 \pm 0,30 \times 10^{-11}$
			$6,93 \pm 0,77 \times 10^{-13}$

(a) Rapports d'anisotropie

(b) Perméabilités principales

**Tableau 1.6.** Synthèse des résultats obtenus par mesure 3D sur le renfort G0986

**Calcul d'incertitude** En employant la dérivée logarithmique à partir de l'équation (1.16), l'incertitude associée à la perméabilité isotrope équivalente est donnée comme suit :

$$\frac{\Delta \bar{K}}{\bar{K}} = \frac{\Delta \mu}{\mu} + \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\Delta(p_e - p_f)}{p_e - p_f} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta F(\bar{r}_f, \bar{r}_0)}{F(\bar{r}_f, \bar{r}_0)} \quad (1.23)$$

où  $\Delta X$  désigne l'erreur absolue sur la variable  $X$  et  $\frac{\Delta X}{X}$  l'erreur relative associée. Le calcul de l'erreur absolue pour la fonctionnelle  $F(\bar{r}_f, \bar{r}_0)$  conduit à :

$$\Delta F(\bar{r}_f, \bar{r}_0) = 6\bar{r}_f \left( \frac{\bar{r}_f}{\bar{r}_0} - 1 \right) \Delta \bar{r}_f + 2 \left( \bar{r}_0 - \frac{\bar{r}_f^3}{\bar{r}_0^2} \right) \Delta \bar{r}_0 \quad (1.24)$$

Le tableau 1.7 regroupe les incertitudes expérimentales calculées dans la configuration de l'essai. Pour évaluer la contribution de l'incertitude sur le rayon isotrope équivalent, qui dépend du temps, nous utilisons la valeur moyenne sur toute la progression.

	$\mu$	$\varepsilon$	$p_e - p_f$	$t$	$\bar{r}_f$	$\bar{r}_0$
$X$	0,084 Pa.s	52 %	950 mbar	400 s	16,1 mm	4 mm
$\frac{\Delta X}{X}$	$\pm 2$ %*	$\pm 2$ %*	$\pm 2$ %*	$\pm 0,1$ %*	$\pm 6,2$ %	$\pm 2,5$ %
$\Delta X$	$\pm 1,7$ mPa.s	$\pm 1$ %	$\pm 19$ mbar	$\pm 0,4$ s	$\pm 1$ mm*	$\pm 0,1$ mm*

**Tableau 1.7.** Incertitudes expérimentales dans la mesure 3D (l'exposant \* désigne une incertitude imposée par l'expérience)

En utilisant les deux derniers paramètres et l'équation (1.24), l'erreur relative sur la fonctionnelle est évaluée à  $\pm 4,9$  %, et conduit à une erreur relative sur la perméabilité de  $\pm 11$  %.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un état de l'art des méthodes d'identification expérimentales du tenseur de perméabilité. Parmi les trois géométries d'écoulement disponibles dans la littérature (1D, 2D, 3D), nous avons opté pour les méthodes 2D et 3D. En particulier, ces méthodes sont peu affectées par les écoulements préférentiels et permettent une détermination rapide du taux d'anisotropie, qui est d'une importance

capitale dans les problèmes de conception de moule pour anticiper le scénario de remplissage.

Le moyen d'essai développé permet de travailler dans les deux configurations en utilisant le même moule. Ce moule a été conçu en PMMA et fonctionne sous vide pendant la mesure. Le suivi du front d'écoulement dans le plan est réalisé par une caméra CCD (mesure 2D), à laquelle nous couplons une balance électronique pour le suivi transverse (mesure 3D). Aucun capteur interne n'est susceptible de perturber l'écoulement : la méthode est entièrement non intrusive. Nous avons également développé un logiciel de traitement des résultats qui intègre des outils d'analyse d'images ainsi qu'un modèle de correction de la réfraction de la lumière dans le moule.

Nous nous sommes appuyés sur les résultats d'un benchmark pour tester le dispositif. Un sergé 2/2 en fibres de carbone a été caractérisé par des mesures 2D et 3D. En 2D, les résultats que nous avons obtenus sont globalement en accord avec la littérature, et la méthode s'est révélée répétable sur les trois essais qui ont été réalisés. Néanmoins, il conviendrait de réaliser une comparaison sur un spécimen « modèle », car les résultats du benchmark, très dispersés, ne permettent pas de s'appuyer sur des valeurs de référence. En 3D, nous n'avons pas eu le temps de mener une campagne d'essais complète, mais les premiers résultats que nous avons obtenus sont encourageants ; en particulier, les valeurs sont compatibles avec les résultats issus des essais 2D. Toutefois, dans la mesure 3D, l'utilisation du modèle de type SIE s'est révélée limitée en termes de précision, car le renfort étudié présente une forte anisotropie transverse, ce qui conduit à une approximation sévère concernant la géométrie du seuil. Sur cet aspect, l'emploi d'une procédure d'identification inverse pourrait permettre d'affiner les résultats, comme le montrent les travaux de Nedanov et Advani [74]. Les travaux numériques que nous avons menés pour simuler des écoulements 3D peuvent être mis à profit dans cette démarche.



# Chapitre 2

## Modélisation BEM de l'écoulement à l'échelle du procédé

### Sommaire

---

<b>Introduction . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>2.1 Description du modèle d'écoulement . . . . .</b>	<b>54</b>
2.1.1 Équations du mouvement . . . . .	54
2.1.2 Conditions aux limites . . . . .	54
2.1.3 Formulation forte . . . . .	56
<b>2.2 Résolution BEM du problème potentiel anisotrope . . . . .</b>	<b>57</b>
2.2.1 Formulation intégrale frontière . . . . .	57
2.2.2 Discrétisation de la frontière et résolution numérique . . . . .	60
2.2.3 Validation des solveurs et étude de sensibilité au maillage . . . . .	64
<b>2.3 Traitement de l'avancée du front . . . . .</b>	<b>69</b>
2.3.1 Formalisme de la méthode Level Set . . . . .	69
2.3.2 Couplage Level Set / BEM . . . . .	70
2.3.3 Génération du maillage frontière . . . . .	73
<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>81</b>

---

Ce chapitre est consacré à la modélisation numérique du remplissage de la préforme à l'échelle du procédé, en 2D et 3D. L'étude est limitée à l'écoulement isotherme d'un renfort indéformable. Nous utilisons la loi de Darcy et l'équation d'incompressibilité pour décrire l'écoulement macroscopique. Le problème de remplissage est traité en associant les méthodes BEM et Level Set.

## Introduction

Le remplissage d'une pièce industrielle est une étape délicate qui demande une bonne expérience du procédé et des problèmes d'imprégnation. En particulier, le succès de cette étape demande un bon paramétrage du procédé (position des points d'injection, des événements, etc.). Un paramétrage approprié peut demander la mise au point de plusieurs prototypes physiques, ce qui représente des coûts de développement importants. Devant ce constat, la simulation numérique est devenu un outil particulièrement intéressant pour le concepteur, qui peut désormais s'appuyer sur des tests virtuels pour optimiser les méthodes de fabrication.

Dans le cadre du développement d'un nouveau logiciel, nous nous sommes intéressés à la méthode des éléments frontières, encore appelée BEM (Boundary Element Method). Cette méthode a été utilisée avec succès dans des travaux antérieurs [81]. Toutefois, la technique de suivi adoptée (actualisation lagrangienne) ne dispose pas d'un formalisme suffisamment souple pour traiter les écoulements complexes mis en jeu dans les situations industrielles. Cette limitation nous a conduit à développer une nouvelle technique d'actualisation reposant sur une approche Level Set. Le premier modèle numérique que nous avons développé est destiné à traiter le remplissage isotherme dans un renfort supposé indéformable.

Le chapitre est divisé en trois sections. La première section est consacrée à la description du modèle d'écoulement. La seconde section présente la méthode de résolution par éléments frontières. La troisième section aborde le traitement de l'avancée du front.

**Préambule bibliographique** Dès les années 1980, de nombreux travaux se sont intéressés à la simulation numérique des procédés LCM. La production scientifique indique que le traitement de l'avancée du front a été (et demeure encore) au centre des préoccupations des auteurs. Les différentes techniques qui ont été développées peuvent être regroupées en deux catégories :

- les méthodes de suivi de front (« front tracking »),
- les méthodes de capture de front (« front capturing »).

Les méthodes de suivi reposent sur une description lagrangienne du mouvement. La frontière est suivie de manière explicite par un ensemble d'objets déplacés à la vitesse locale. Il peut s'agir de marqueurs comme dans la méthode MAC (Marker And Cell), ou d'un maillage mobile. Hoareau [82] utilise un modèle éléments finis associé à une procédure de remaillage local du domaine. Schmidt *et al.* [81] combinent la méthode BEM à une technique d'actualisation lagrangienne. La réduction du maillage à la frontière facilite considérablement le traitement de l'interface mobile. García *et al.* [83] emploient la méthode des éléments naturels, et proposent un modèle permettant

---

de calculer l'âge des particules injectées dans le moule. Ces contributions montrent que le suivi explicite garantit une bonne description de la forme de la frontière, ce qui en fait son principal avantage. En revanche, il souffre d'un manque de flexibilité lorsqu'il s'agit de traiter les rencontres et divisions de front (changements topologiques) ou le contact avec l'outillage, qui nécessitent des algorithmes de reconstruction de maillage complexes, spécialement coûteux en 3D.

Par l'utilisation d'un maillage fixe, les méthodes « front capturing » s'avèrent plus adaptées au traitement des écoulements complexes. L'idée directrice est de « capturer » l'interface au lieu de la suivre. Ceci est réalisé au moyen d'une fonction indicatrice :

- la fraction volumique dans la méthode Volume Of Fluid (VOF) [84],
- la distance signée à l'interface dans la méthode Level Set [85].

La méthode VOF, initialement utilisée avec des volumes finis, a été employée en association avec des éléments finis par Bruschke et Advani [86] en 1990 pour des applications de type RTM. Les travaux de Trochu *et al.* [87] ont largement contribué au développement de cette technique, qui est ensuite devenue un standard dans les logiciels du commerce (PAM-RTM<sup>TM</sup>, RTM-WORX<sup>TM</sup>, LIMS<sup>TM</sup>, etc.). Malgré sa robustesse et sa capacité à conserver la masse, la méthode VOF affiche aussi certaines faiblesses liées à l'utilisation d'une fonction constante par morceau, en particulier :

- la capture peut se révéler grossière suivant la taille du maillage,
- le raffinement du maillage tend à augmenter significativement les temps de calcul,
- les propriétés géométriques de l'interface sont inconnues.

La méthode Level Set, dont le principe est décrit dans la section 2.3.1, est aujourd'hui considérée comme la technique la plus avancée dans le domaine des interfaces mobiles. La continuité de la fonction distance signée permet de capturer la frontière avec un niveau de précision supérieur à VOF. Une caractéristique importante de la méthode est le calcul des propriétés géométriques de l'interface (courbure, normale). Ceci permet de traiter des mouvements pilotés par la forme de l'interface (typiquement les problèmes de tension superficielle) [88]. La méthode dispose par ailleurs d'un formalisme étendu permettant d'aborder indifféremment les problèmes 2D et 3D.

Au vu de la littérature, la méthode Level Set semble encore peu employée dans le domaine du moulage composite, même si des équipes comme Zerguine *et al.* [89], Yang *et al.* [90] ou encore Levy *et al.* [91] l'ont utilisée avec succès dans la simulation numérique des procédés.

Nous nous sommes intéressés au couplage Level Set / BEM dans le cadre de ce travail. Nous nous sommes principalement appuyés pour cela sur les travaux de Soukane et Trochu qui proposent un modèle BEM destiné au calcul de remplissage 2D isotrope [92]. L'association des deux méthodes permet un calcul entièrement surfacique, contrairement aux méthodes par éléments finis qui font intervenir des calculs volumiques. Ceci offre des perspectives intéressantes sous au moins deux aspects :

- les problèmes liés au remaillage restent localisés à la frontière,
- le nombre d'inconnues diminue considérablement, ce qui participe à la réduction du temps de calcul.

## 2.1 Description du modèle d'écoulement

En première approche, nous avons limité l'étude à l'écoulement isotherme en milieu indéformable. Même si la physique de l'écoulement est bien plus complexe [93–95] (variation de viscosité de la résine, déformation du renfort, etc.), ce modèle relativement simple peut fournir une approximation raisonnable du remplissage dans des procédés industriels. En particulier, la réactivité de la résine ne joue pas un rôle déterminant dans l'écoulement si le temps de remplissage est court devant le temps de gel du polymère, ce qui est, en pratique, généralement vérifié dans les procédés de type injection ou infusion <sup>1</sup>.

**Remarque sur l'homogénéité** Dans le cadre de ce travail, nous supposons que le milieu est homogène (propriétés physiques invariantes dans l'espace), afin de simplifier au maximum l'implémentation de la méthode BEM. Néanmoins, l'hétérogénéité ne constitue pas une limitation majeure à l'utilisation de la méthode BEM qui dispose d'outils spécifiques qui ont été éprouvés (cf. approches « multi-domaines » [96]).

### 2.1.1 Équations du mouvement

Nous utilisons la loi de Darcy (équation 1.1) et l'équation d'incompressibilité du fluide (2.2) pour décrire le remplissage macroscopique du renfort [41, 97]. L'équation (2.1) correspond à l'expression de la vitesse réelle de la résine dans le renfort, et fait intervenir la porosité du milieu :

$$\forall M \in \Omega, \begin{cases} \vec{v} = -\frac{\bar{k}}{\mu\varepsilon} \vec{\nabla} p & (2.1) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 & (2.2) \end{cases}$$

où  $\Omega$  désigne le domaine fluide,  $p$  la pression,  $\vec{v}$  la vitesse,  $\mu$  la viscosité dynamique,  $\bar{k}$  le tenseur de perméabilité et  $\varepsilon$  la porosité.

### 2.1.2 Conditions aux limites

Deux types de conditions aux limites peuvent être assignées : la condition de Dirichlet ou la condition de Neumann. La condition de Dirichlet porte sur la pression :

$$\forall M \in \Gamma_p, \quad p = \bar{p} \quad (2.3)$$

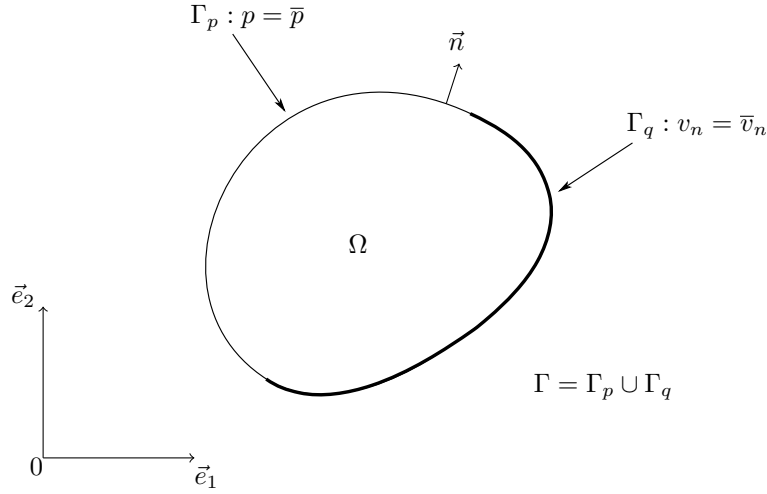
où  $\bar{p}$  est la pression imposée et  $\Gamma_p$  la portion de la frontière à pression imposée. La condition de Neumann porte sur la vitesse normale :

$$\forall M \in \Gamma_q, \quad v_n = \bar{v}_n \quad (2.4)$$

---

1. Il existe néanmoins des procédés utilisant des systèmes très réactifs, comme le Structural Reaction Injection Molding (SRIM), pour lesquels le remplissage est fortement affecté par la thermo-cinétique.





**Figure 2.1.** Domaine de calcul  $\Omega$  et partition de la frontière  $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$

où  $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$  désigne la vitesse normale,  $\bar{v}_n$  la vitesse normale imposée,  $\Gamma_q$  la portion de la frontière à vitesse normale imposée, et  $\vec{n}$  la normale sortante à la frontière (figure 2.1).

Le traitement des conditions aux limites dépend de la position du point  $M$  sur la frontière (entrée, bord libre, zone enclavée, paroi étanche) et des conditions d'injection (figure 2.2).

**Entrée** L'unité d'injection impose à l'entrée une consigne en pression ou débit, éventuellement fonction du temps. À pression imposée, la condition aux limites s'écrit comme suit :

$$\bar{p} = p_e(t) \quad \text{à l'entrée} \quad (2.5)$$

où  $p_e$  est la pression imposée à l'entrée, égale à la pression atmosphérique dans les procédés d'infusion. À débit imposé :

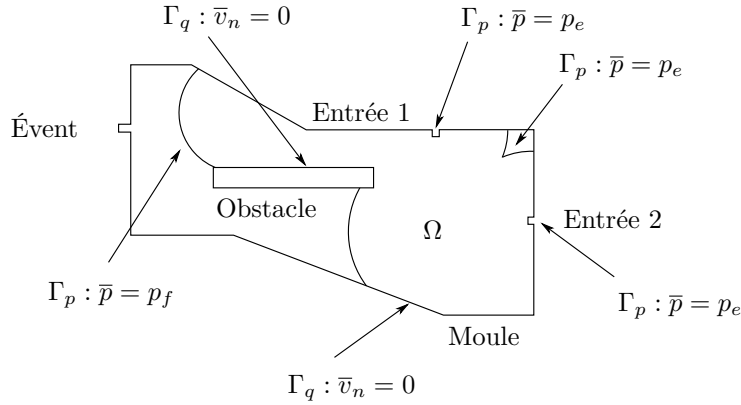
$$\bar{v}_n = \frac{D_e(t)}{A_e} \quad \text{à l'entrée} \quad (2.6)$$

où  $D_e$  est la valeur du débit imposé à l'entrée et  $A_e$  la section d'écoulement à l'entrée. En pratique, les conditions (2.5) et (2.6) ne peuvent pas être imposées simultanément sur un même point d'injection, mais il est possible de commuter pression / débit au cours du remplissage.

**Frontière libre** Le mode d'évacuation de l'air (évent, pompe à vide) détermine la pression appliquée sur la frontière libre :

$$\bar{p} = p_f(t) \quad \text{sur la frontière libre} \quad (2.7)$$

où  $p_f$  est la pression appliquée sur la frontière libre, égale à la pression atmosphérique pour un évent, ou à la pression de vide pour un point de tirage du vide, éventuellement fonction du temps.



**Figure 2.2.** Exemple d'affectation des conditions aux limites (cas d'une multi-injection à pression imposée)

**Zone enclavée** L'écoulement peut conduire à l'enclavement d'une zone sèche dans le renfort. La pression appliquée dépend alors de la pression initiale et augmente en fonction du temps pendant que le remplissage progresse :

$$\bar{p} = p_p(t) \quad \text{sur une frontière enclavée} \quad (2.8)$$

où  $p_p$  est la pression dans la zone enclavée (porosité). L'augmentation du niveau de pression peut être évalué par une loi de type Mariotte (gaz parfait) [98, 99] :

$$p_p(t + dt) = \frac{V_p(t)}{V_p(t + dt)} p_p(t) \quad (2.9)$$

où  $V_p(t)$  (respectivement  $V_p(t + dt)$ ) désigne le volume de la zone enclavée (ou porosité) à l'instant  $t$  (respectivement à l'instant  $t + dt$ ).

**Paroi étanche** Au contact d'une paroi étanche, la condition de non pénétration du fluide s'écrit :

$$\bar{v}_n = 0 \quad \text{sur une paroi étanche} \quad (2.10)$$

Cette condition s'applique sur les parois du moule et les obstacle intérieurs.

### 2.1.3 Formulation forte

En combinant les équations (2.1) et (2.2), nous obtenons une équation elliptique en pression :

$$\forall M \in \Omega, \quad \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{\bar{k}}{\mu \varepsilon} \vec{\nabla} p \right] = 0 \quad (2.11)$$

La formulation forte est obtenue en associant les conditions aux limites et la loi de comportement à l'équation (2.11) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall M \in \Omega, \quad \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{\bar{k}}{\mu\varepsilon} \vec{\nabla} p \right] = 0 \end{array} \right. \quad (2.12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall M \in \Omega, \quad \vec{v} = -\frac{\bar{k}}{\mu\varepsilon} \vec{\nabla} p \end{array} \right. \quad (2.12b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall M \in \Gamma_p, \quad p = \bar{p} \end{array} \right. \quad (2.12c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall M \in \Gamma_q, \quad v_n = \bar{v}_n \end{array} \right. \quad (2.12d)$$

où  $\Omega = \Omega(t)$  désigne le domaine fluide à l'instant  $t$ , et  $\Gamma = \Gamma(t)$  sa frontière mobile. Cette formulation permet de découpler les calculs de la pression et de la vitesse. La résolution de l'équation (2.12a) conduit à la détermination du champ de pression, puis l'application de la loi de comportement (2.12b) fournit le champ de vitesse.

## 2.2 Résolution BEM du problème potentiel anisotrope

L'écoulement est régi par un problème potentiel anisotrope. Ce type de problème a de nombreuses applications dans l'ingénierie, dont la conduction thermique fait partie. Contrairement aux milieux isotropes (problème de Laplace [100–102]), ou orthotropes [103], le traitement BEM de l'anisotropie est encore peu documenté dans la littérature, où il est généralement abordé par des transformations de domaine [81, 104, 105].

Nous aborderons simultanément les formulations BEM anisotropes en 2D et 3D, pour lesquelles seules les solutions fondamentales diffèrent. Nous nous appuyons principalement sur les approches introduites par Brebbia et Dominguez [100], et Marczak et Denda [106], en limitant l'étude aux milieux homogènes. On verra par ailleurs (section 2.2.2.3) que la formulation permet de prendre en compte les effets d'inertie par un changement de variables agissant sur les conditions aux limites, permettant notamment d'introduire sans difficulté la contribution de la gravité.

### 2.2.1 Formulation intégrale frontière

Nous nous limitons dans le cadre de ce travail au traitement d'un écoulement en milieu homogène, car il représente le cas le plus classique dans la méthode BEM. L'hétérogénéité peut néanmoins être traitée en utilisant une décomposition du domaine, la méthode est bien documentée dans les travaux de Mathey [96].

**Équation intégrale** L'équation (2.12a) est multipliée par un champ de pression virtuel  $p^*$ , et intégrée sur le domaine de calcul comme suit :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \left( \bar{k} \vec{\nabla} p \right) p^* d\Omega = 0 \quad (2.13)$$

L'application d'une intégration par parties et du théorème de la divergence conduit à la formulation faible utilisée dans la méthode des éléments finis :

$$\int_{\Gamma} (\bar{k} \vec{\nabla} p \cdot \vec{n}) p^* d\Gamma - \int_{\Omega} \bar{k} \vec{\nabla} p \cdot \vec{\nabla} p^* d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

Dans la méthode des éléments frontières, on applique à nouveau une intégration par parties et le théorème de la divergence pour obtenir la forme suivante :

$$\int_{\Gamma} (\bar{k} \vec{\nabla} p \cdot \vec{n}) p^* d\Gamma - \int_{\Gamma} (\bar{k} \vec{\nabla} p^* \cdot \vec{n}) p d\Gamma + \int_{\Omega} p \vec{\nabla} \cdot (\bar{k} \vec{\nabla} p^*) d\Omega = 0 \quad (2.15)$$

**Solution fondamentale** L'intégrale de domaine restante dans l'équation (2.15) est éliminée en utilisant une fonction de Green pour  $p^*$ , vérifiant :

$$\forall S, \forall M \in \Omega, \vec{\nabla} \cdot (\bar{k} \vec{\nabla} p^*(M, S)) + \delta_M(S) = 0 \quad (2.16)$$

où  $\delta_M(S)$  est la distribution de Dirac, égale à zéro en tout point, excepté au « point source »  $S$ , où elle tend vers l'infini :

$$\delta_M(S) = \begin{cases} \infty & \text{si } S \equiv M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.17a)$$

$$(2.17b)$$

La propriété fondamentale de la distribution de Dirac vis à vis de l'intégration s'écrit :

$$\int_{\Omega} \delta_M(S) = 1 \quad \text{si } S \text{ est un point interne à } \Omega \quad (2.18)$$

Dans la méthode BEM, l'équation (2.18) permet de réduire une intégrale de domaine à une fraction de la valeur de la fonction intégrée au point source :

$$\int_{\Omega} \delta_M(S) p^* = c(S) p^*(S) \quad (2.19)$$

où  $c(S)$  est un facteur géométrique appelé « terme libre » et correspondant à une fraction de l'angle solide sous lequel est vu  $\Omega$  depuis le point  $S$  :

$$c(S) = \begin{cases} \frac{\Theta(S)}{2\pi} & \text{en 2D} \end{cases} \quad (2.20a)$$

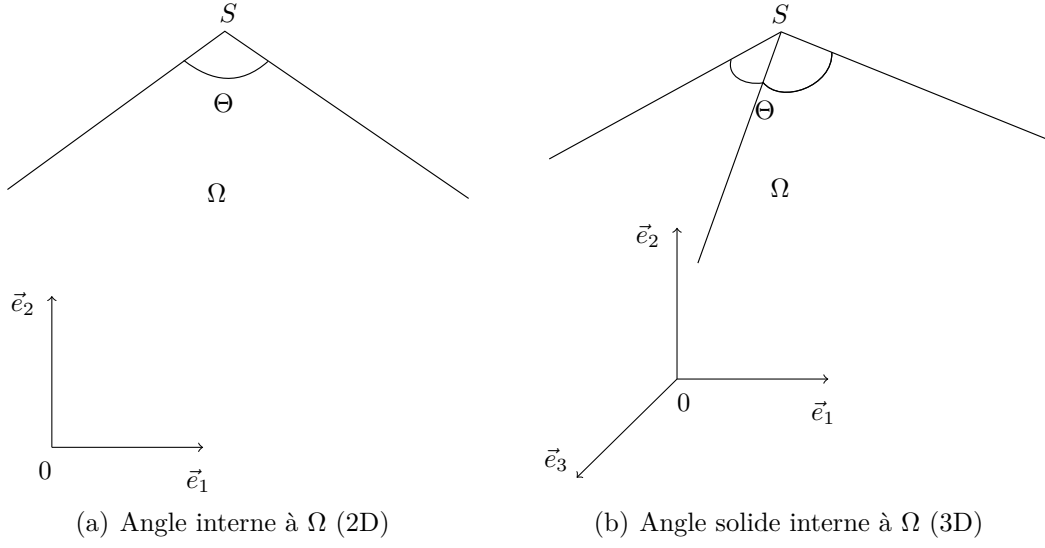
$$\begin{cases} \frac{\Theta(S)}{4\pi} & \text{en 3D} \end{cases} \quad (2.20b)$$

où  $\Theta$  est l'angle interne à  $\Omega$  (figure 2.3). En particulier,

$$c(S) = \begin{cases} 1 & \text{pour un point interne à } \Omega \end{cases} \quad (2.21a)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pour un point sur la frontière } \Gamma \text{ régulière en } S \end{cases} \quad (2.21b)$$

La fonction de Green  $p^*$  dépend de la dimension du problème : nous utilisons les expressions de Brebbia et Dominguez [100] (2D), et Marczak et Denda [106] (3D),


**Figure 2.3.** Angle interne  $\Theta$  au point source  $S$ 

données comme suit :

$$p^*(M,S) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{|\bar{k}|}} \ln \frac{1}{\hat{r}} & \text{en 2D} \\ \frac{1}{4\pi\sqrt{|\bar{k}|}} \frac{1}{\hat{r}} & \text{en 3D} \end{cases} \quad (2.22a)$$

$$p^*(M,S) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{|\bar{k}|}} \ln \frac{1}{\hat{r}} & \text{en 2D} \\ \frac{1}{4\pi\sqrt{|\bar{k}|}} \frac{1}{\hat{r}} & \text{en 3D} \end{cases} \quad (2.22b)$$

où  $|\bar{k}|$  désigne le déterminant du tenseur de perméabilité. L'expression de  $\hat{r}$ , explicitée en annexe C, dépend de la position relative du  $S$  par rapport au point  $M$ , du tenseur de perméabilité et de la dimension du problème (figure 2.4).

**Équation intégrale frontière** Finalement, l'utilisation de la distribution de Dirac dans l'équation (2.15) conduit à la formulation intégrale frontière, encore appelée équation de Somigliana [81, 100, 107] :

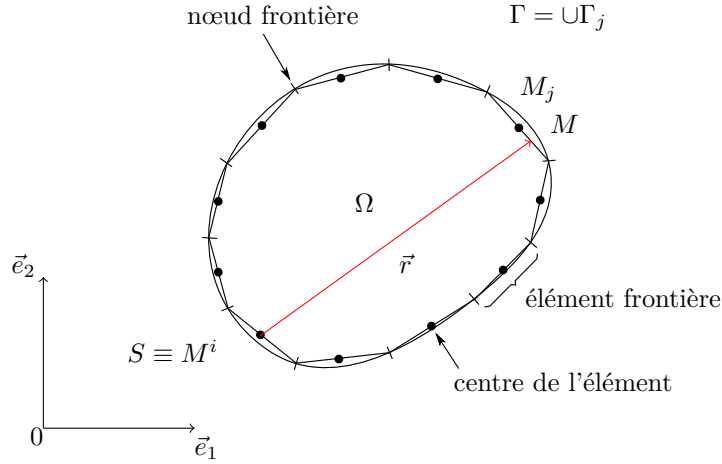
$$c(S)p(S) + \int_{\Gamma} q^*(M,S)p(M)d\Gamma(M) = \int_{\Gamma} p^*(M,S)q(M)d\Gamma(M) \quad (2.23)$$

où  $q$  désigne un flux normal à la frontière défini comme suit :

$$q(M) = \bar{k} \vec{\nabla}^M p(M) \cdot \vec{n}(M) \quad (2.24)$$

où  $q^*$  est le flux normal virtuel associé à  $p^*$  (annexe C).

La relation de Somigliana fournit l'expression exacte de la pression en tout point du domaine, à condition de connaître à la fois  $p$  et  $q$  à la frontière. Ces champs n'étant que partiellement connus par les conditions aux limites, la première étape est la détermination des inconnues à la frontière (section 2.2.2.1). Dans un second temps, la relation peut être appliquée à l'intérieur du domaine pour déterminer la pression et la vitesse en tout point interne (section 2.2.2.2).



**Figure 2.4.** Discretisation de la frontière et notations utilisées dans la méthode BEM, cas 2D (d'après [102])

## 2.2.2 Discrétisation de la frontière et résolution numérique

La frontière est discrétisée en un nombre fini d'éléments (figure 2.4), sur lesquels les variations des champs  $p$  et  $q$  sont supposées connues. Il existe dans la littérature différents types d'éléments, définis par le degré d'interpolation et la continuité (éléments constants, linéaires continus, linéaire discontinus, quadratiques, etc.). Nous avons utilisé des éléments constants, pour lesquels les deux champs sont supposés constants et égaux à la valeur au centre de l'élément. Les éléments frontières utilisés dans ce travail sont des segments à deux nœuds pour les domaines 2D et des triangles à trois nœuds pour les domaines 3D.

### 2.2.2.1 Calcul des inconnues à la frontière

Les inconnues à la frontière sont déterminées par l'assemblage d'un système algébrique comportant  $N$  équations indépendantes issues de la relation de Somigliana (2.23). Dans la méthode de collocation, on montre que ceci peut être obtenu en considérant tour à tour  $N$  les points de calcul sur la frontière. Au point de calcul  $i$ , l'équation obtenue s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p(M^i) + \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} q^*(M, M^i) d\Gamma_j(M) \right] p(M^j) \\ = \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} p^*(M, M^i) d\Gamma_j(M) \right] q(M^j) \end{aligned} \quad (2.25)$$

où  $i$ , variant de 1 à  $N$  désigne l'indice de l'élément et  $M^i$  le point de calcul.

**Système algébrique** Le système algébrique à assembler peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} & \dots & H_{1,N} \\ H_{2,1} & H_{2,2} & \dots & H_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N,1} & H_{N,2} & \dots & H_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,N} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N,1} & G_{N,2} & \dots & G_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

où  $P_i$  (respectivement  $Q_i$ ) est la pression (respectivement le flux normal à la frontière) au point  $i$ , et  $H_{ij}$ ,  $G_{ij}$  des constantes d'intégration définies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \int_{\Gamma_j} q^*(M, M^i) d\Gamma_j(M) \end{array} \right. \quad (2.27a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{ij} = \int_{\Gamma_j} p^*(M, M^i) d\Gamma_j(M) \end{array} \right. \quad (2.27b)$$

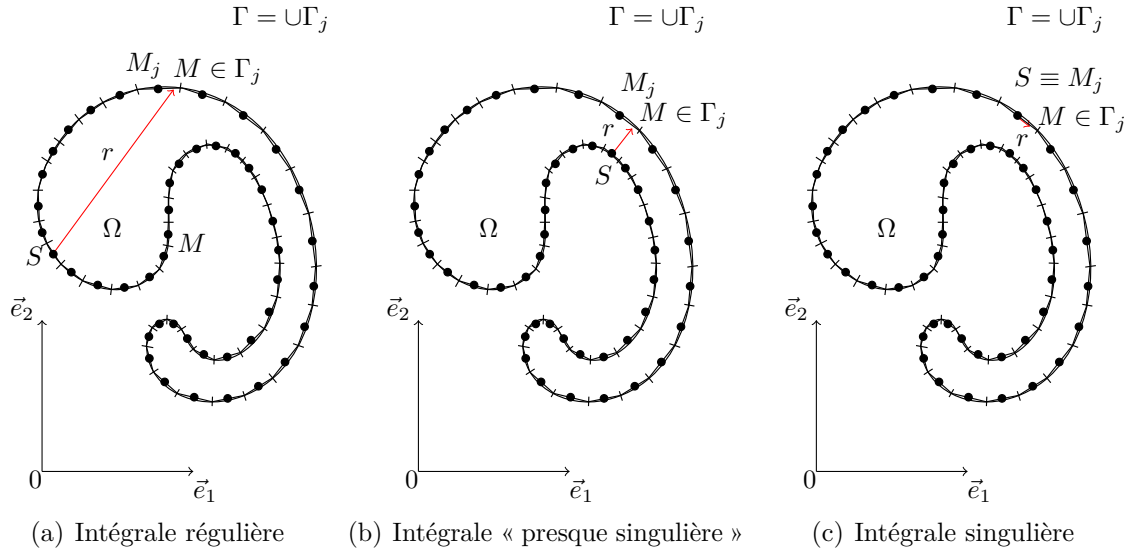
où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker.

**Intégration** L'évaluation des intégrales frontières (2.27a) et (2.27b) est une étape décisive dans l'implémentation de la méthode BEM. En raison de la forme des solutions fondamentales en puissance négative de  $r$ , l'intégrande peut prendre des valeurs infinies lorsque le point source se rapproche de l'élément d'intégration, ce qui rend le traitement de l'intégrale délicat. On distingue généralement trois types d'intégrales (figure 2.5) :

- les intégrales dites régulières : quelle que soit la position du point courant sur l'élément d'intégration, la distance  $r$  est suffisamment grande pour que l'intégrande reste bornée,
- les intégrales dites « presque singulières » : l'intégrale est régulière, mais l'intégrande prend des valeurs *quasi*-infinies en certains points ( $r \rightarrow 0$ ), c'est typiquement le cas dans les zones minces,
- les intégrales singulières : cette fois l'intégrale est impropre car l'intégrande prend une valeur infinie en un point ( $r = 0$ ), comme c'est le cas lorsque le point source est positionné sur l'élément d'intégration.

Comme le dernier type d'intégrales apparaît systématiquement dans l'étape d'assemblage (termes diagonaux), il est particulièrement important de mettre en œuvre une stratégie de calcul adaptée. Ceci est d'autant plus vrai que les matrices obtenues sont à diagonales dominantes : la solution dépend fortement du niveau de précision apportées à l'évaluation de ces termes. Il existe dans la littérature différents types d'approches pour traiter ce problème : l'intégration analytique [108], l'intégration par subdivision d'élément, ou les techniques de transformation de domaine [109]. Pour cette dernière méthode, la contribution de Telles [110] est l'une des plus populaires.

À l'exception de la diagonale de  $H$ , dont le calcul est direct, nous avons employé une quadrature de Gauss pour évaluer l'ensemble des intégrales. Les intégrales singulières sont traitées en augmentant le nombre de points de Gauss, comme suggéré par Hunter et Pullan [111]. La procédure d'assemblage est détaillée dans l'algorithme D.1.



**Figure 2.5.** Illustration des intégrales régulière, « presque singulière » et singulière, en fonction de la distance  $r$  entre le point source  $S$  et le point courant  $M$  sur l'élément d'intégration  $\Gamma_j$

**Réorganisation en un système linéaire standard** Le système algébrique (2.26) est ensuite réorganisé en un système linéaire standard du type  $AX = B$ . Cette étape, détaillée dans l'algorithme D.3, consiste à regrouper les inconnues du problème dans le vecteur  $X$  pour obtenir le système suivant :

$$AX = B \quad (2.28)$$

où  $A$  est une matrice  $N^2$ , pleine et non symétrique, issue de la réorganisation de  $H$ .  $X$  est un vecteur contenant les inconnues du problème et  $B$  une matrice obtenue en multipliant la matrice issue de la réorganisation de  $G$  par le vecteur des conditions aux limites  $C$ .

**Résolution du système linéaire** Il existe deux grandes méthodes pour l'inversion numérique d'une matrice : les méthodes itératives (e.g. Gauss-Seidel) et les méthodes directes (e.g. élimination de Gauss). Les méthodes itératives sont particulièrement adaptées aux matrices creuses et de grande dimension, comme c'est le cas dans la méthode des éléments finis qui manipulent des matrices par bande. Pour inverser les matrices pleines obtenues dans la méthode BEM, le choix d'une méthode directe est recommandé. Nous appliquons donc au système (2.28) un algorithme de décomposition LU, en faisant appel à la bibliothèque LAPACK (Linear Algebra Package) de MATLAB®.

### 2.2.2.2 Calcul aux points internes

Si nécessaire, le calcul des champs de pression et de vitesse aux points internes peut être réalisé en post-traitement, à l'issue de la détermination des inconnues à la



frontière. Les intégrales frontières à calculer peuvent être évaluées par une quadrature de Gauss si le point interne n'est pas trop près de la frontière. Dans le cas contraire, une intégrale « presque singulière » apparaît : des schémas d'intégration spécifiques sont alors recommandés (cf. section 2.2.2.1). Les procédures sont développées dans les algorithmes D.5, D.6 et D.7.

**Pression interne** L'application de la relation de Somigliana discrétisée (2.25) au point  $S$  conduit à la détermination de la pression comme suit :

$$p(S) = \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} p^*(M,S) d\Gamma_j(M) \right] q(M^j) - \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} q^*(M,S) d\Gamma_j(M) \right] p(M^j) \quad (2.29)$$

où  $p^*$  est la fonction de Green et  $q^*$  le flux normal associé à  $p^*$ .

**Gradient de pression interne** Le gradient de pression interne est obtenue en dérivant (2.29) au point  $S$  :

$$\vec{\nabla}^S p(S) = \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} \vec{\nabla}^S p^*(M,S) d\Gamma_j(M) \right] q(M^j) - \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} \vec{\nabla}^S q^*(M,S) d\Gamma_j(M) \right] p(M^j) \quad (2.30)$$

où  $\vec{\nabla}^S p^*$  et  $\vec{\nabla}^S q^*$  sont les gradients de  $p^*$  et  $q^*$  évalués au point source  $S$ . Les expressions sont développées dans l'annexe C. Une fois le gradient de pression interne déterminé, l'application de la loi de Darcy conduit aux vitesses internes.

### 2.2.2.3 Prise en compte de la gravité

La contribution de la gravité peut être négligée lorsque le gradient de pression associé au procédé est prépondérant devant le terme  $\rho g$ . Cette hypothèse reste valable pour la majorité des procédés RTM, dans lesquels les pressions d'injection peuvent atteindre 10 bars, ainsi que pour les pièces de petites dimensions. En revanche pour les procédés d'infusion, l'effet de la gravité peut être important car la différence de pression est limitée à la pression atmosphérique, et les dimensions des pièces peuvent atteindre plusieurs mètres.

La gravité, et plus généralement toute force dérivant d'un potentiel, peut être prise en compte en introduisant une pression modifiée [97] définie comme suit :

$$\hat{p} = p + \rho g z \quad (2.31)$$

où  $\hat{p}$  est la pression modifiée,  $p$  la pression liée au procédé,  $z$  la coordonnée verticale,  $\rho$  la masse volumique du fluide et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Dans la méthode BEM,

la technique de résolution reste inchangée en substituant  $\hat{p}$  à  $p$  dans les équations du mouvement. Nous définissons donc le flux modifiée  $\hat{q}$  associé à  $\hat{p}$ , comme suit :

$$\hat{q} = \overline{k} \nabla \hat{p} \cdot \vec{n} \quad (2.32)$$

En pratique, seules les conditions aux limites en pression sont modifiées, nous superposons le terme hydrostatique à la pression  $\bar{p}$  imposée par le procédé :

$$\forall M \in \Gamma_p, \hat{p} = \bar{p} + \rho g z \quad (2.33)$$

Un exemple d'application est détaillé dans le chapitre 3.

### 2.2.3 Validation des solveurs et étude de sensibilité au maillage

Les solveurs BEM 2D et 3D sont validés sur des écoulement de Darcy radiaux et isotropes, pour lesquels les solutions analytiques sont connues. En faisant varier la densité du maillage frontière, nous calculons l'écart entre la solution analytique et la solution numérique, d'abord à la frontière, puis en un point interne défini au milieu du domaine de calcul.

#### 2.2.3.1 Écoulement radial 2D

Le domaine considéré est une couronne de rayon intérieur  $a$  et de rayon extérieur  $b$ , nous utilisons un repère polaire pour décrire la position d'un point dans la matière (figure 2.6). Les pressions imposées sur les parois interne et externe sont notées  $p_a$  et  $p_b$ , avec  $p_a > p_b$  pour un un écoulement sortant. Les valeurs numériques utilisées sont données dans le tableau 2.1, les paramètres rhéologiques correspondent à des grandeurs représentatives des procédés d'injection.

En milieu isotrope, les champs de pression et de vitesse sont axisymétriques, le calcul des solutions analytiques est détaillé en annexe B. La pression dans le domaine est donnée par :

$$p(r) = p_a - (p_a - p_b) \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \quad (2.34)$$

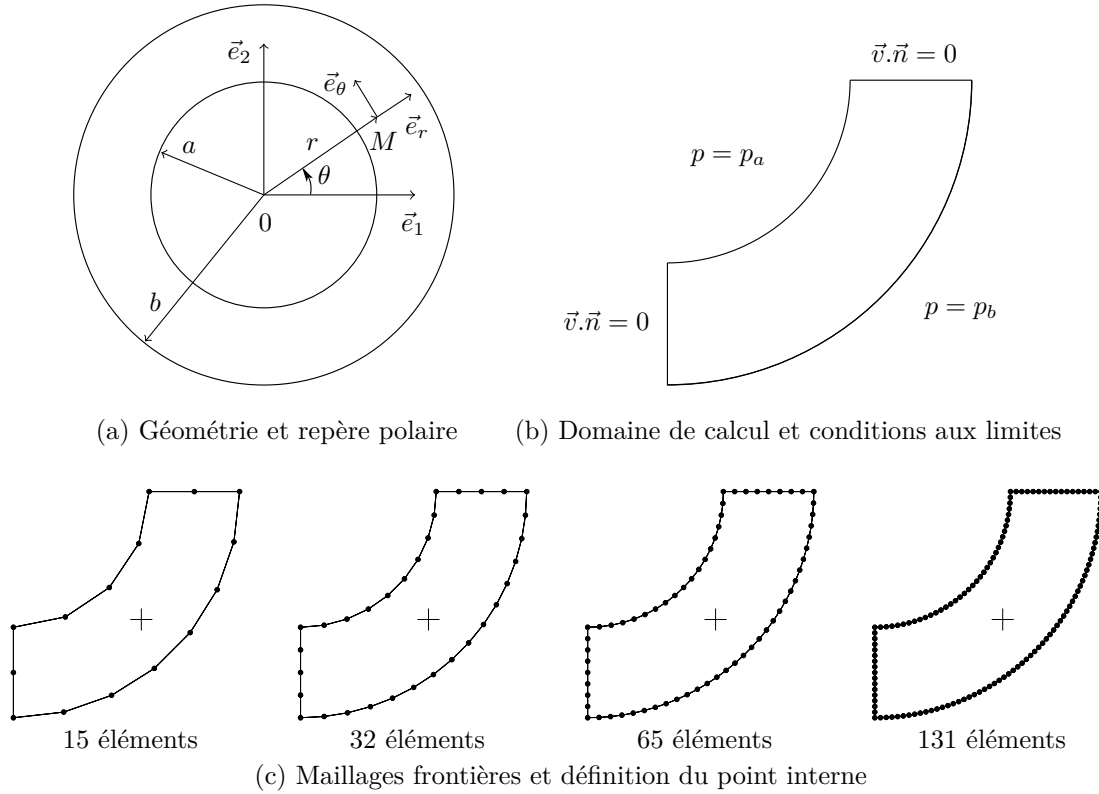
La vitesse, radiale, s'exprime comme suit :

$$v_r(r) = \frac{k}{\mu \varepsilon} \frac{(p_a - p_b)}{r \ln \frac{b}{a}} \quad (2.35)$$

Pour des raisons de symétrie, le calcul est réalisé sur un quart du domaine. Les conditions aux limites imposées sont données sur la figure 2.6 (b), les plans de symétrie sont modélisés par une vitesse normale nulle. Nous avons discrétisé le domaine en utilisant quatre maillages frontières différents, comportant 15, 32, 65 et 131 éléments.

$a$ [m]	$b$ [m]	$p_a$ [Pa]	$p_b$ [Pa]	$\mu$ [Pa.s]	$k$ [m <sup>2</sup> ]	$\varepsilon$ [%]
$6.10^{-3}$	$1.10^{-2}$	$5.10^5$	$1.10^5$	$1.10^{-1}$	$1.10^{-10}$	50

**Tableau 2.1.** Paramètres utilisés pour la simulation des écoulements de Darcy radiaux, en 2D et 3D



**Figure 2.6.** Écoulement 2D de Darcy : géométrie, conditions aux limites, et maillages frontières

**Résultats** Pour chaque maillage, nous avons calculé l'écart entre les solutions analytiques et les résultats numériques pour évaluer l'erreur en pression et en vitesse. Nous avons procédé ainsi pour les champs à la frontière (erreur moyenne sur la frontière), et les champs au point interne (erreur locale). Les résultats de l'étude paramétrique sont résumés dans les graphes (a) et (b) de la figure 2.7.

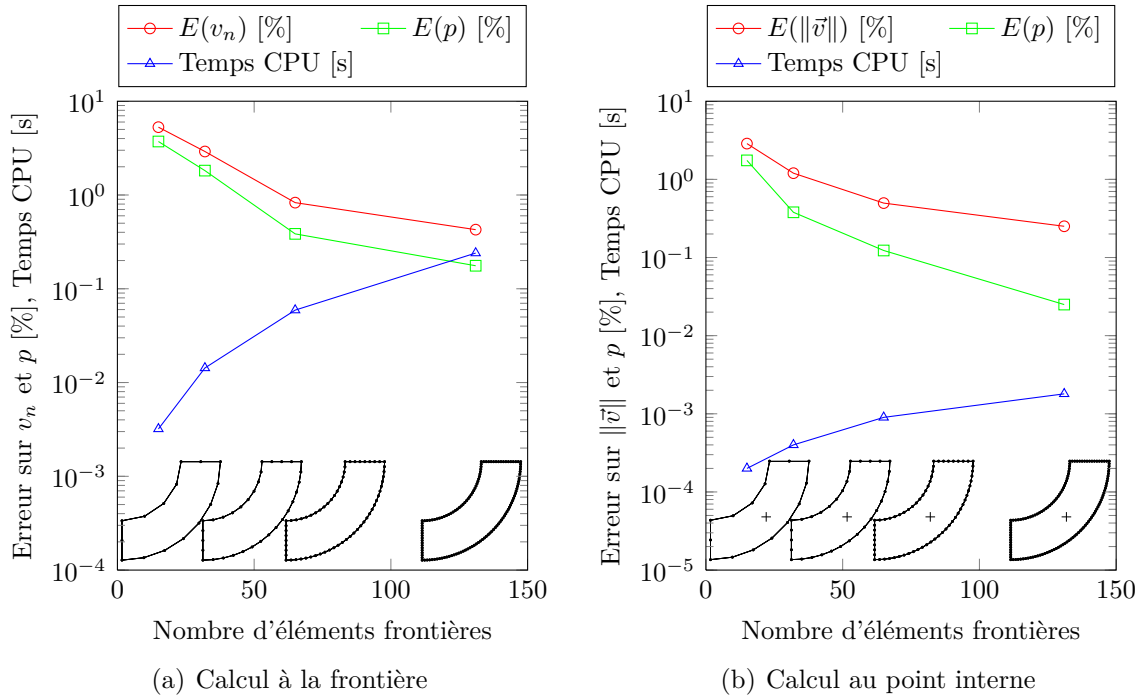
On constate un bon accord général avec la solution analytique, et un gain de précision avec le raffinement du maillage. Même si l'ordre d'interpolation (constant) est le même pour les deux champs, le niveau de précision obtenu pour la pression est supérieur à celui obtenu pour la vitesse. Ceci s'explique par les variations rapides de la vitesse en  $O(\frac{1}{r})$ , comparée à la pression qui varie en  $O(\ln \frac{1}{r})$ . En particulier, nous obtenons pour le calcul à la frontière :

- 5,3 % d'erreur en vitesse et 3,7 % en pression avec le maillage le plus grossier,
- 0,4 % d'erreur en vitesse et 0,2 % en pression avec le maillage le plus fin.

Au point interne, nous avons obtenu une meilleure précision pour tous les maillages, notamment :

- 2,9 % d'erreur en vitesse et 1,7 % en pression avec le maillage le plus grossier,
- 0,2 % d'erreur en vitesse et 0,03 % en pression avec le maillage le plus fin.

Dans notre implémentation, la phase d'assemblage constitue environ 85 % du temps CPU. Comme il existe une inconnue scalaire par nœud, la complexité de l'assemblage



**Figure 2.7.** Étude paramétrique BEM sur la taille de maille (Darcy 2D)

est en  $O(N^2)$ , où  $N$  désigne le nombre d'éléments. Les temps de calcul évalués pour chaque cas sont donnés figure 2.7. A titre d'exemple, le calcul complet sur le maillage frontière de 131 éléments est réalisé en 0,27 s CPU (PC 2,26 GHz / 1,93 Go RAM), dont :

- 0,24 s allouées à l'assemblage,
- 0,03 s allouées à l'inversion du système,
- 2 ms allouées au calcul au point interne.

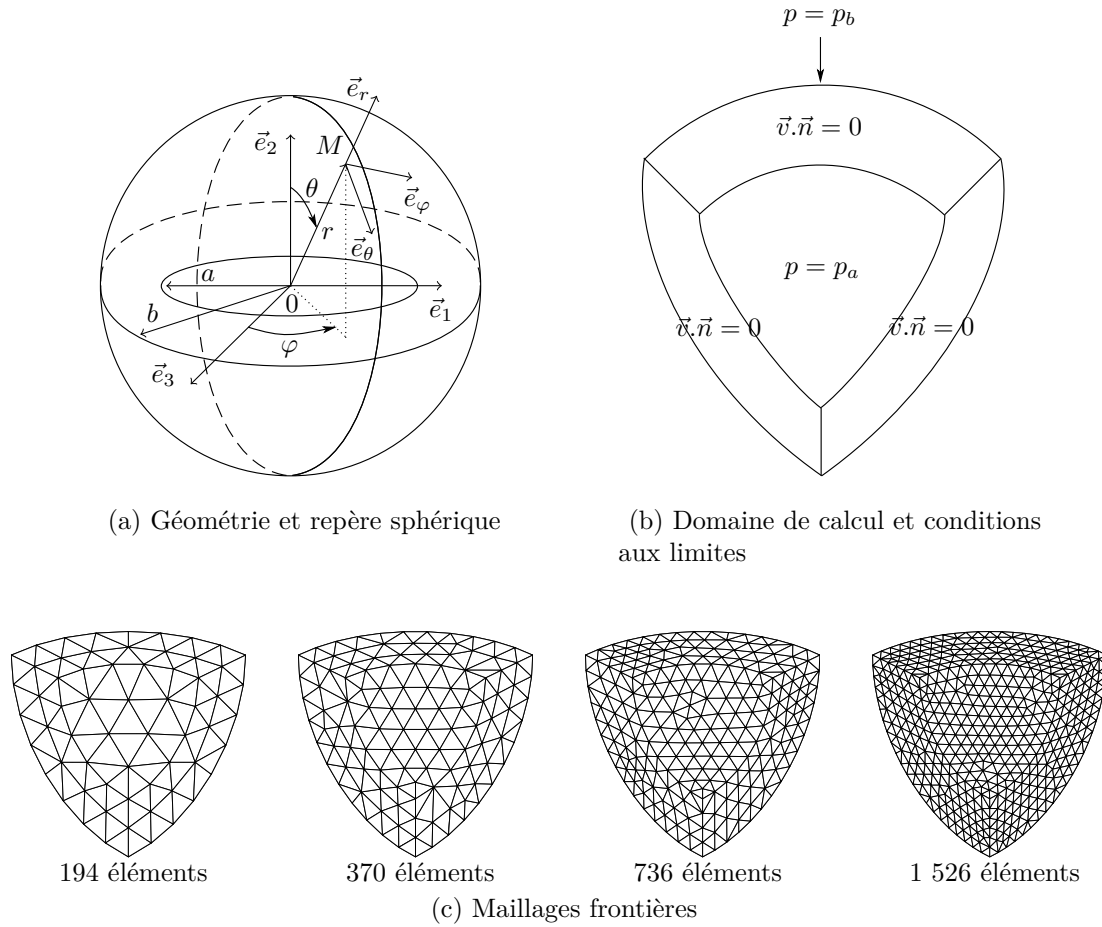
Le temps CPU dédié au calcul au point interne est dérisoire, car la complexité de l'algorithme est en  $O(N)$  par inconnue scalaire.

### 2.2.3.2 Écoulement radial 3D

Nous considérons cette fois une sphère creuse de rayon intérieur  $a$  et de rayon extérieur  $b$ . Les pressions imposées sur les faces interne et externe sont notées  $p_a$  et  $p_b$ , avec  $p_a > p_b$  pour un écoulement sortant. Les valeurs numériques, données dans le tableau 2.1, sont identiques à celles employées pour le cas 2D.

On montre que l'écoulement est axisymétrique, les solutions analytiques sont détaillées en annexe B. L'expression du champ de pression est donnée comme suit :

$$p(r) = p_a + (p_b - p_a) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (2.36)$$



**Figure 2.8.** Écoulement 3D de Darcy : géométrie, conditions aux limites, et maillages frontières

La vitesse radiale s'écrit :

$$v_r = \frac{k}{\mu\varepsilon} \frac{(p_a - p_b)}{r^2 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \quad (2.37)$$

En mettant à contribution la symétrie par rotation, nous avons réduit l'étude à un quart de domaine pour réaliser le calcul, les conditions aux limites imposées sont données figure 2.8. Les quatre maillages frontières utilisés dans l'étude paramétriques ont été réalisés sous IDEAS<sup>®</sup>, ils comportent respectivement 194, 370, 736 et 1 526 éléments.

**Résultats** Nous avons comparé, comme précédemment, les numériques aux solutions analytiques en évaluant l'erreur relative pour chaque maillage frontière, d'abord à la frontière, puis au point interne défini au milieu du domaine de calcul (figure 2.9).

L'accord est bon, même pour les maillages les plus grossiers qui impliquent des approximations géométriques importantes. Le raffinement du maillage améliore nettement

la précision des résultats. Pour les mêmes raisons que celles évoquées précédemment, le niveau de précision obtenu pour la pression, qui varie en  $O(\frac{1}{r})$ , est supérieur à celui obtenu pour la vitesse qui varie en  $O(\frac{1}{r^2})$ . Un raffinement local autour de la paroi interne permettrait d'approximer les variations rapides de la vitesse avec plus de précision. Nous avons obtenu à la frontière :

- 6,4 % d'erreur en vitesse et 4,7 % en pression avec le maillage le plus grossier,
- 2,9 % d'erreur en vitesse et 1,1 % en pression avec le maillage le plus fin.

Au point interne, le niveau de précision atteint est encore meilleur, avec notamment :

- 6,1 % d'erreur en vitesse et 3,4 % en pression avec le maillage le plus grossier,
- 0,5 % d'erreur en vitesse et 0,1 % en pression avec le maillage le plus fin.

Nous avons par ailleurs procédé à une évaluation des temps de calcul, qui suivent la même complexité que dans le cas 2D, c'est à dire :

- $O(N^2)$  pour l'assemblage des matrices  $G$  et  $H$  intervenant dans le calcul à la frontière,
- $O(N)$  pour le calcul d'une inconnue au point interne.

Sur un PC 2,26 GHz / 1,93 Go RAM, le calcul complet sur le maillage comportant 1 526 éléments frontières est réalisé en 2,8 s, dont

- 2,4 s allouées à l'assemblage,
- 0,4 s allouées à l'inversion du système,
- 3 ms allouées au calcul au point interne.

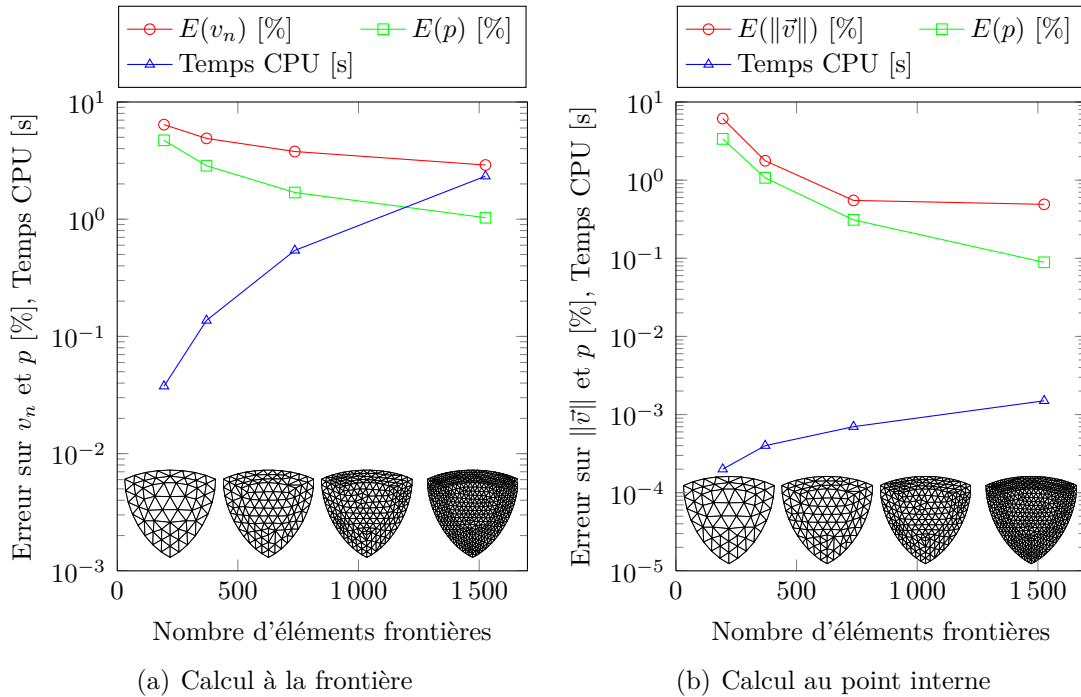


Figure 2.9. Étude paramétrique BEM sur la taille de maille (Darcy 3D)

## 2.3 Traitement de l'avancée du front

### 2.3.1 Formalisme de la méthode Level Set

Le formalisme de la méthode Level Set a été développé par Osher et Sethian [85], suite aux travaux de Sethian [112, 113] sur la propagation d'un front de flamme. La méthode a ensuite été appliquée à différents domaines mettant en jeu des interfaces mobiles, comme l'imagerie médicale [114], la robotique [115], la science des matériaux [116], la géophysique [117], la chimie [118], ou la mécanique des fluides [92, 119, 120]. Le principe de la méthode, bien documentée dans [121], est de décrire l'interface  $\Gamma$  comme l'ensemble de niveau 0 d'une fonction distance signée dépendant de l'espace et du temps :

$$\Gamma(t) = \{M \in \mathbb{R}^n / \phi(M,t) = 0\} \quad (2.38)$$

où  $M$  désigne un point fixe,  $n$  est la dimension du problème et  $\phi$  la fonction Level Set. Par convention, la distance est définie négative à l'intérieur du domaine, positive à l'extérieur :

$$\phi(M,t) = \begin{cases} -d(M,\Gamma(t)) & \text{si } M \in \Omega(t) \\ +d(M,\Gamma(t)) & \text{si } M \notin \Omega(t) \end{cases} \quad (2.39a)$$

$$(2.39b)$$

où  $d(M,\Gamma(t))$  désigne la distance euclidienne du point  $M$  à la frontière  $\Gamma(t)$ .

Le champ de distance signée obéit à une équation de transport pour l'isovaleur 0, donnée comme suit :

$$\forall M \in \Gamma, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(M,t) + \vec{v}(M,t) \cdot \vec{\nabla} \phi(M,t) = 0 \quad (2.40)$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse de l'interface. Une formulation en vitesse normale peut être obtenue en utilisant l'expression de la normale  $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} \phi}{|\vec{\nabla} \phi|}$  qui conduit à :

$$\forall M \in \Gamma, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(M,t) + v_n(M,t) |\vec{\nabla} \phi|(M,t) = 0 \quad (2.41)$$

On montre que (2.41) peut être généralisée sans contrainte sur  $\hat{\Omega}$  (domaine étendu) en définissant une vitesse « étendue » à tous les ensembles de niveaux, qui n'a en pratique pas de sens physique en dehors de la frontière. L'introduction d'une condition initiale sur la fonction Level Set conduit finalement au problème d'évolution suivant, régi par les équations Level Set :

$$\forall M \in \hat{\Omega}, \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(M,t) + F |\vec{\nabla} \phi| = 0 & (2.42a) \\ \phi(M,t_0) = \phi_0 & (2.42b) \end{cases}$$

où  $\hat{\Omega}$  désigne le domaine dans lequel la résine  $\Omega(t)$  s'écoule (i.e. le moule) et  $F$  est la vitesse normale étendue dans  $\hat{\Omega}$ .

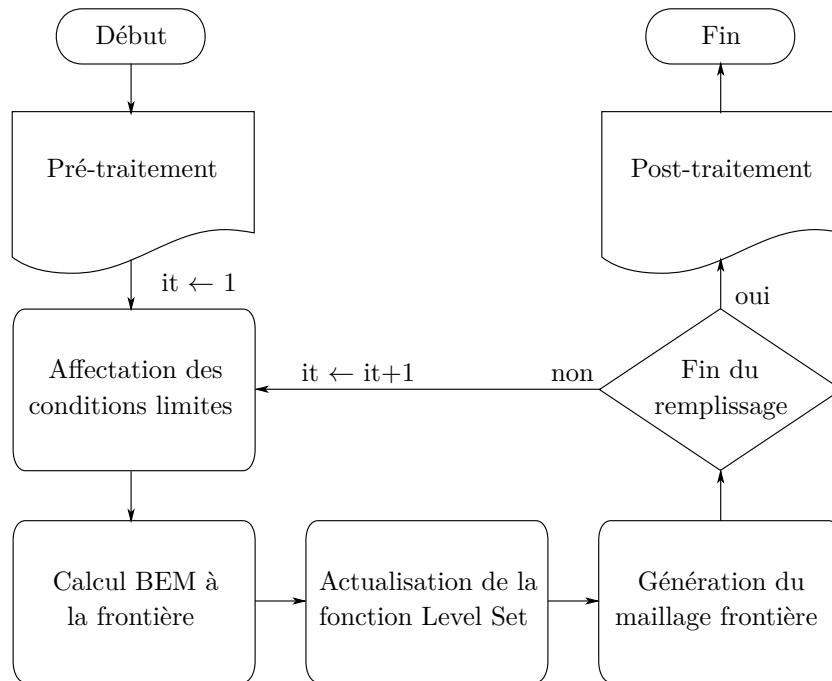


Figure 2.10. Organisation du calcul de remplissage

## 2.3.2 Couplage Level Set / BEM

### 2.3.2.1 Organisation générale du calcul

Le remplissage est divisé en un nombre fini d'états quasi-statiques, sur lesquels un calcul BEM est réalisé pour alimenter un solveur level set. Une fois la frontière localisée, elle est maillée à chaque pas de temps. Ceci est répété jusqu'à la fin du remplissage ou l'arrêt du calcul. L'organigramme du programme, que nous avons baptisé LCMBE (« Liquid Composite Molding Boundary Element »), est donné figure 2.10. Pour des raisons historiques [96, 122], nous avons implémenté LCMBE sous MATLAB®, qui offre un environnement de développement puissant, doté de bibliothèques de calcul comme LAPACK [123] et de fonctionnalités graphiques avancées pour la visualisation 2D et 3D. Une description des grandes lignes du programme est donnée ci-après, le lecteur pourra se référer à l'annexe G pour une présentation plus détaillée du logiciel.

**Pré-traitement** Dans le module de pré-traitement l'utilisateur importe le maillage de la préforme que nous appellerons « grille de fond », définit les points d'injection et les paramètres du procédé. La mise en donnée est complétée par l'initialisation du remplissage qui fournit le premier maillage frontière (nous procédons à un calcul direct de la distance signée aux points d'injection). A l'issue du pré-traitement, deux maillages sont stockés : la grille de fond, utilisée tout au long du calcul pour actualiser la frontière, et le maillage frontière décrivant le front de résine, qui sera successivement généré puis détruit à chaque itération pour supporter le calcul BEM.



**Affectation des conditions aux limites** Les conditions aux limites sont affectées en examinant la position des éléments frontières dans la grille de fond. Les zones stratégiques (parois du moule, frontière des obstacles internes, points d'injection) sont identifiées automatiquement par le programme qui impose pour chaque élément la condition limite correspondante.

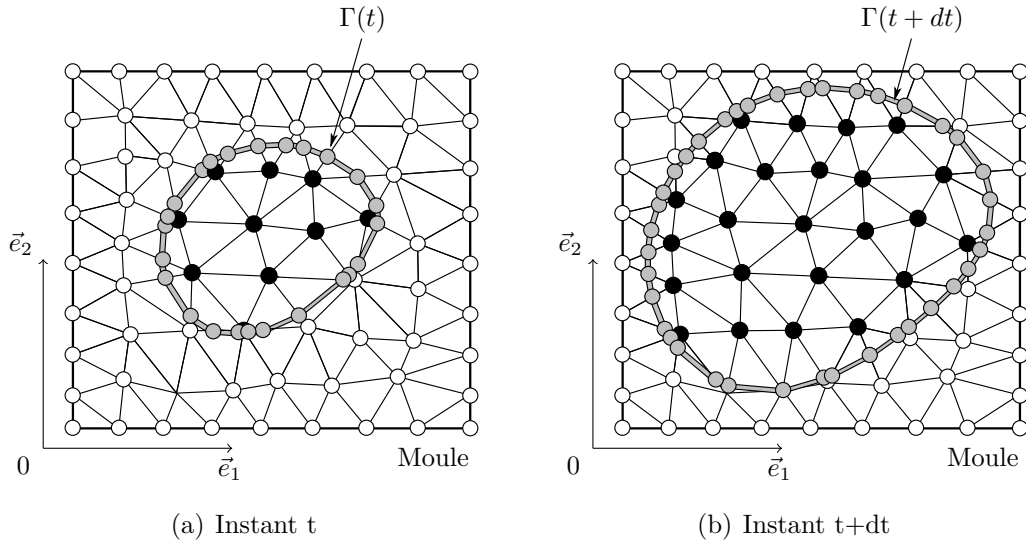
**Calcul BEM à la frontière** Le solveur BEM prend en charge le calcul des inconnues à la frontière, en utilisant le maillage frontière et les conditions aux limites. L'assemblage du système linéaire et son inversion occupe environ 70% du temps CPU du programme. À l'issue du calcul, la pression et la vitesse normale sont déterminées à la frontière. Même si seule la vitesse normale est utilisée par la suite pour actualiser la frontière, nous procédons à une sauvegarde des deux champs pour post-traiter ultérieurement les résultats aux points internes.

**Actualisation de la fonction Level Set** La vitesse normale à la frontière est dans un premier temps étendue sur la grille de fond, puis introduite dans les équations Level Set (2.42a) et (2.42b), dont la résolution conduit à l'actualisation de la distance signée (section 2.3.2.2). Le traitement de l'étanchéité et la question de la ré-initialisation est abordée section 2.3.2.2. Cette dernière notion est importante car elle assure un maintien de la distance signée qui tend à se dégrader au cours des itérations. La nouvelle position de la frontière, implantée dans l'isovaleur 0 de la fonction Level Set est alors prête à être maillée.

**Génération du maillage frontière** Le maillage de la frontière dépend de la dimension du problème, nous utilisons les algorithmes Marching Triangles (2D) ou Marching Tetrahedra (3D). La méthode est détaillée dans la section 2.3.3, l'idée directrice est d'interpoler le long des arêtes de la grille de fond l'isovaleur 0, qui fournit la position des nœuds frontières (figure 2.11). La connectivité est ensuite calculée par l'examen des signes de la fonction Level Set sur chaque cellule. Nous sauvegardons à chaque itération le maillage frontière ainsi généré : il décrit explicitement la position du front et permettra de reconstituer le scénario du remplissage.

**Détection de la fin du remplissage** Les quatre dernières étapes sont répétées jusqu'à ce que la préforme soit entièrement remplie. A cet instant la fonction Level Set est négative en tout point de la grille, ce qui est facilement repérable par un test numérique. Le rapport du nombre de nœuds « mouillés » sur le nombre de nœuds « secs » constitue un bon indicateur du niveau de remplissage de la pièce, permettant à l'utilisateur d'évaluer l'avancement du calcul.

**Post-traitement** En fin de calcul le post-traitement permet à l'utilisateur de visualiser les résultats. La lecture des données sauvegardées fournit le schéma du remplissage et les champs de vitesse normale et de pression à la frontière. L'information à l'intérieur du domaine nécessite un nouveau calcul qui est réalisé en temps réel par le programme.



**Figure 2.11.** Configuration du domaine de calcul à l'instant  $t$  et  $t+dt$

### 2.3.2.2 Détails complémentaires sur le traitement de l'avancée du front

**Discretisation temporelle des équations Level Set** Il existe plusieurs méthodes pour la discrétisation temporelle des équation Level Set (2.42a) et (2.42b), comme les schémas d'Euler, de Runge-Kutta ou d'Adams-Bashforth [124]. Nous avons implémenté un schéma d'Euler explicite, précis à l'ordre 1, pour sa simplicité : la fonction Level Set à l'instant ultérieur est déduite de la valeur à l'instant courant par la relation suivante :

$$\phi(M, t + \Delta t) = \phi(M, t) - F(M, t) |\vec{\nabla} \phi(M, t)| \Delta t(t) \quad (2.43)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps. La valeur initiale de la fonction Level Set,  $\phi_0$ , est évaluée dans la phase de pré-traitement par un calcul direct de la grille de fond au maillage frontière. Comme le schéma employé est explicite, la stabilité est soumise à des conditions sur le pas de temps. Nous utilisons la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Levy, qui restreint le mouvement de la frontière à une cellule de la grille de fond sur un incrément de temps. Le pas de temps est calculé à chaque incrément comme suit :

$$\Delta t(t) = cfl \frac{\delta}{\max v_n(t)} \quad (2.44)$$

où  $\delta$  est la dimension de la plus petite arête de la grille,  $cfl$  le nombre de Courant-Friedrichs-Levy compris entre 0 et 1, et  $\max v_n$  la vitesse normale maximale à la frontière.

**Évaluation de  $F$  et extrapolation des vitesses** L'évaluation de  $F$  est réalisée par extrapolation des vitesses à la frontière, comme suggéré par Malladi *et al.* [125]. Le principe est d'attribuer en chaque point de la grille la vitesse normale de l'élément frontière le plus proche.

**Évaluation de  $|\vec{\nabla}\phi|$  et ré-initialisation** L'initialisation de la fonction Level Set par la distance signée garantit  $|\vec{\nabla}\phi_0| = 1$ . En revanche, l'actualisation de  $\phi$  tend à dégrader la distance signée. Dans le but d'assurer son maintien nous procédons à une ré-initialisation à chaque incrément de temps permettant de restituer la propriété  $|\vec{\nabla}\phi(M,t)| = 1$ . Cette étape est réalisée par un calcul explicite de la distance signée au maillage frontière.

**Implémentation du contact** La méthode Level Set manipule directement les changements topologiques apparaissant lorsque plusieurs fronts fusionnent. Cependant ceci ne garantit pas la non-pénétration de la résine aux parois étanches. Cette condition est traitée en utilisant une autre Level Set fixe décrivant la frontière de la cavité. À chaque pas de temps, la Level Set de la frontière mobile est corrigée en réalisant l'opération suivante, correspondant à une intersection de domaines [99] :

$$\phi = \max(\phi, \phi_m) \quad (2.45)$$

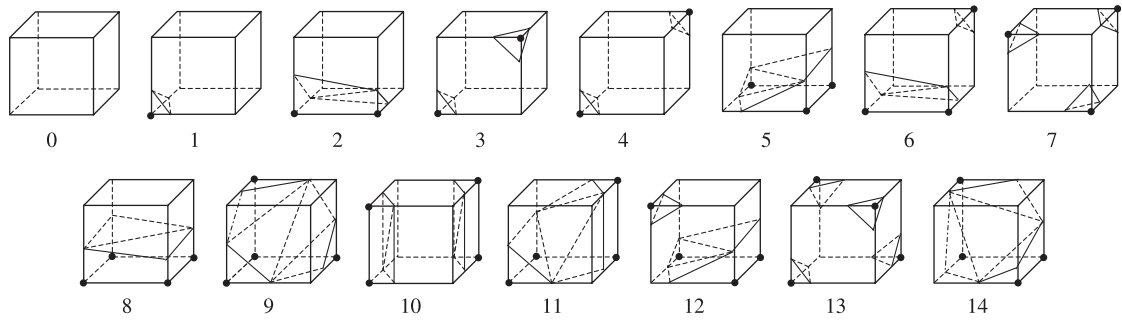
où  $\phi_m$  est la distance signée aux parois étanches du moule.

### 2.3.3 Génération du maillage frontière

La technique utilisée est dérivée de l'algorithme des Marching Cubes, une des méthodes les plus populaires dans les problèmes d'extraction d'isosurface. Il s'agit d'une technique de triangulation surfacique introduite en 1987 par Lorensen et Cline [126]. Initialement développée pour l'imagerie médicale, elle a été par la suite largement employée pour diverses applications de visualisation scientifique.

La méthode développée par Lorensen et Cline repose sur la discrétisation de la scène par des cubes régulièrement répartis dans l'espace. Les niveaux de densité, définis aux sommets des cubes, sont comparés à un seuil définissant l'isosurface. L'extraction est réalisée en examinant successivement l'état de chaque cube, dont les sommets ont été définis à l'intérieur ou à l'extérieur de l'objet. En considérant que chaque sommet peut prendre deux états différents, il existe 256 ( $2^8$ ) cas d'intersection à l'intérieur d'un cube. En exploitant les invariances par rotation, les symétries de réflexion et symétries miroir, le nombre de cas est réduit à 15 configurations de référence réunies dans une table (figure 2.12). Les points d'intersection, définissant les sommets des triangles, sont interpolés linéairement le long des arêtes reliant deux points de part et d'autre de la frontière. La connectivité de la triangulation dans le cube est établie en se référant à la topologie correspondante. Finalement, le maillage surfacique est obtenu par assemblage des facettes ainsi générées dans les volumes élémentaires. Un grand nombre de contributions ont suivi ces travaux, visant principalement à améliorer la qualité de l'extraction, limiter le nombre de triangles générés et optimiser la recherche des cellules intersectées. Une revue de littérature présentant l'algorithme et les évolutions récentes est proposée par Newman et Yi [127].

Nous nous sommes intéressés aux méthode de type Marching pour la génération du maillage frontière. Notre choix s'est porté sur une extension des Marching Cubes utilisant comme volume élémentaire le tétraèdre. Cette variante appelée « Marching



**Figure 2.12.** Marching Cubes : configurations de référence (d'après [127]). Les éléments frontières (triangles) sont représentés en pointillés, les arêtes comportant un seul point noir correspondent à un changement d'état.

Cas	0	1	2	3	4	5	6	7	8
États	0	-	-	-	-	+	+	+	+
	0	-	-	+	+	-	-	+	+
	0	-	+	-	+	-	+	-	+
Config.	0*	0	1	1	1	1	1	1	0

**Tableau 2.2.** Marching Triangles : cas possibles et configurations associées

Tetrahedra » a été introduite par Shirley et Tuchman dans [128] en 1990. Elle présente plusieurs avantages :

- le nombre de cas à traiter est considérablement réduit ( $2^4=16$  cas), en raison de la diminution du nombre de sommets,
- la triangulation est robuste, contrairement aux Marching Cubes standards qui peuvent générer des défauts (trous) liés à la présence de cas ambigus.

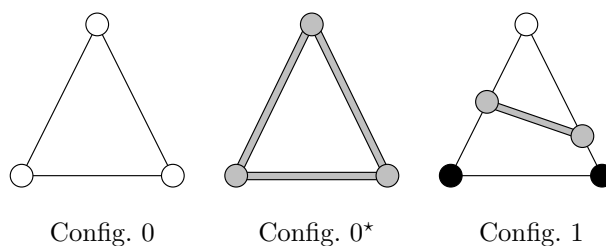
Nous avons appliqué la méthode à des maillages libres, dans le but de faciliter la discrétisation de la préforme, les maillages tétraédriques étant supportés par la majorité des maillages actuels. Nos premiers développements ont porté sur une version 2D que nous appellerons Marching Triangles, utilisant comme cellule élémentaire le triangle. Nous avons dans un second temps développé la version 3D. Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec B. Cosson (École des Mines de Douai).

### 2.3.3.1 Marching Triangles

**États « + » et « - »** Pour chaque triangle de la grille, nous définissons aux sommets deux états possibles, notés « + » ou « - » suivant le signe de la Level Set :

- à l'intérieur du domaine, le point est étiqueté « - »,
- à l'extérieur du domaine, le point est étiqueté « + ».

Ceci fournit  $2^3=8$  cas possibles numérotés de 1 à 8 dans le tableau 2.2.



**Figure 2.13.** Marching Triangles : configurations de référence. Les éléments frontières (segments) et leurs nœuds sont représentés en gris, les arêtes reliant un point blanc à un point noir indiquent un changement d'état  $+ \leftrightarrow -$ .

**État « 0 »** L'état « 0 », correspondant à une Level Set nulle, n'intervient pas explicitement dans le dénombrement des cas : nous traitons tout point situé sur la frontière comme s'il était à l'intérieur du domaine. Une attention particulière doit alors être portée aux éléments dégénérés (extrémités confondues) à exclure du maillage frontière.

**Cas additionnel** Le cas 0 apparaissant dans le tableau 2.2 est un cas particulier que nous avons introduit pour autoriser le remplissage des triangles dans les coins de la grille, lorsque les trois nœuds sont simultanément à l'état « 0 ». En association avec la configuration 1, un élément double est alors généré à l'intérieur du moule : ils sont automatiquement supprimés en fin de routine.

**Interpolation linéaire** Les coordonnées des nœuds frontières sont calculées par interpolation linéaire de l'isovaleur 0 le long des arêtes intersectées.

**Normales sortantes** Les normales sortantes aux éléments frontières sont calculées en repérant dans le triangle un sommet à l'extérieur : nous procédons à un test par produit scalaire pour vérifier que l'orientation est correcte.

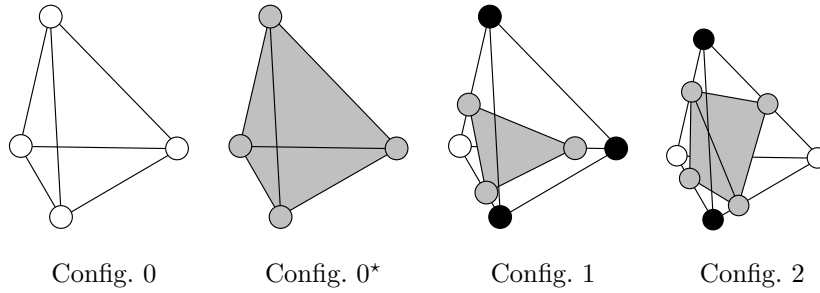
**Bilan** En mettant à contribution les symétries, les 9 cas ainsi définis ( $2^3+1$ ) sont réduits à 3 configurations de référence (tableau 2.2 et figure 2.13). La méthode implémentée est décrite dans l'algorithme D.11.

### 2.3.3.2 Marching Tetrahedra

La méthode des Marching Tetrahedra est une extension directe des Marching Triangles, nous nous contenterons donc d'une description rapide, et renvoyons le lecteur à l'algorithme D.12 pour plus de détails.

Comme précédemment, les états « + » et « - » sont utilisés pour dénombrer les cas possibles, auxquels nous rajoutons le cas 0 destiné à traiter le remplissage des tétraèdres dans les coins. Nous considérons donc 17 cas possibles ( $2^4+1$ ), réduits à 4 configurations de référence données dans le tableau 2.3 et représentées figure 2.14.

Cas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
États	0	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+
	0	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+
	0	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+
	0	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
Config.	0*	0	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	0

**Tableau 2.3.** Marching Tetrahedra : cas possibles et configurations associées

**Figure 2.14.** Marching Tetrahedra : configurations de référence. Les éléments frontières (triangles) et leurs nœuds sont représentés en gris, les arêtes reliant un point blanc à un point noir indiquent un changement d'état  $+ \leftrightarrow -$ .

### 2.3.3.3 Régularisation du maillage

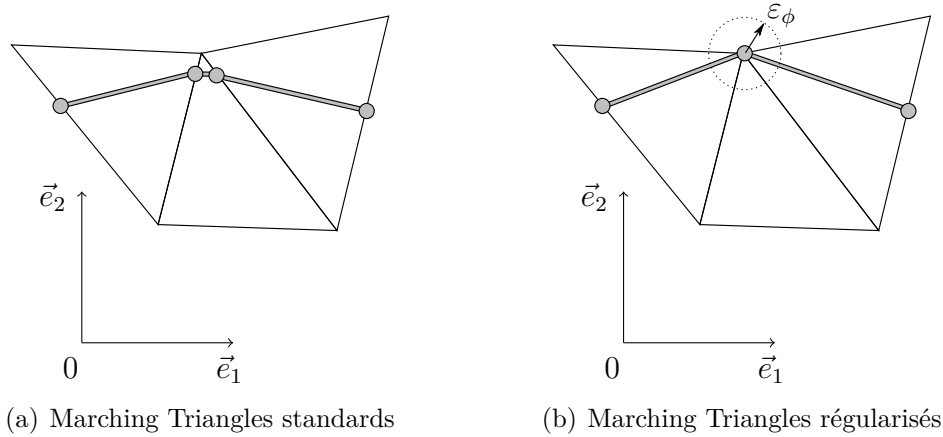
La méthode de maillage employée, aussi bien en 2D qu'en 3D, fournit un maillage frontière consistant. Néanmoins, le principal inconvénient est la grande quantité d'éléments présents comparée à la complexité géométrique de l'objet. La plupart des éléments superflus sont de petite taille, et présentent généralement un mauvais « aspect ratio ». Ces éléments sont créés au voisinage d'un sommet et correspondent de ce fait à de faibles valeurs de la fonction Level Set. L'objectif de la régularisation est de conserver l'approximation géométrique en éliminant ces éléments superflus. Les bénéfices sur le calcul sont les suivants :

- gain en précision lié à l'amélioration de l'aspect ratio des éléments,
- gain en temps de calcul dans les phases d'assemblage et résolution.

On distingue dans la littérature deux approches visant à régulariser un maillage de type Marching :

- les méthodes de perturbation des données volumiques,
- les méthodes de correction explicites du maillage.

Nous avons opté pour la méthode de perturbation car elle permet d'agir en pré-traitement, ce qui simplifie considérablement la mise en œuvre. L'idée directrice, introduite par Seungtaik et Koo [129] est de repositionner tout nœud situé dans un voisinage proche d'un sommet sur le sommet lui-même (figure 2.15). Ce voisinage est défini par une tolérance de la fonction Level Set, notée  $\varepsilon_\phi$ , qui peut être typiquement choisie de l'ordre de  $1/5$  de la longueur de la plus petite arête de la grille. En pratique, avant



**Figure 2.15.** Illustration du procédé de régularisation dans les Marching Triangles

de procéder au maillage de la frontière, nous attribuons la valeur 0 à toute Level Set inférieure à la tolérance  $\varepsilon_\phi$ . La procédure est décrite dans l'algorithme D.10.

### 2.3.3.4 Test et validation sur des objets de référence

Les méthodes implémentées ont été testées sur un cercle et une sphère, en utilisant les expressions analytiques de la distance signée. Nous avons étudié l'influence de la grille de fond sur le maillage obtenu.

#### Marching Triangles

**Distance signée à un cercle** Soit  $\mathcal{C}(O,R)$  le cercle de rayon  $R$  centré à l'origine. Le contour peut être défini de manière implicite par :

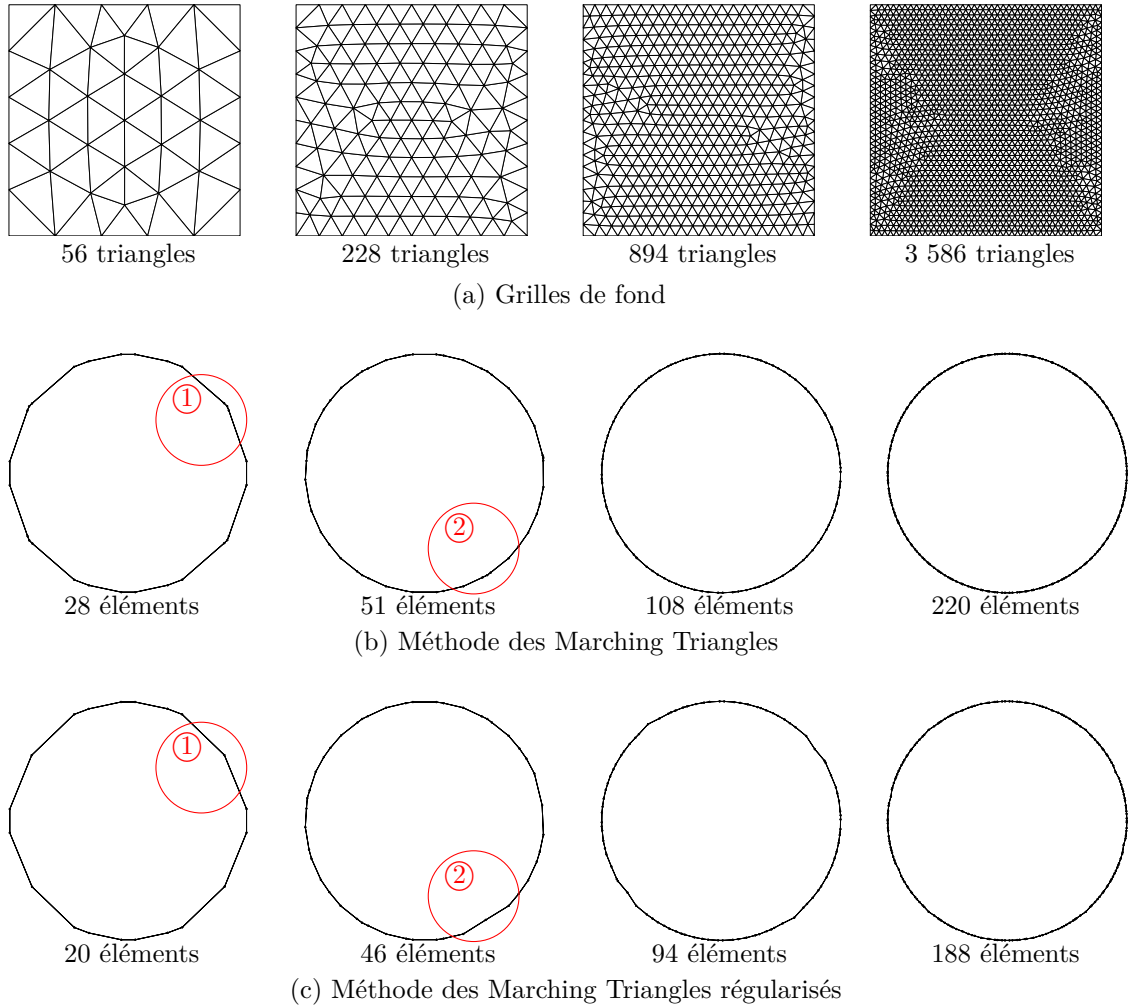
$$\mathcal{C} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / \phi(x_1, x_2) = 0\} \quad (2.46)$$

où  $\phi$  est la distance signée à  $\mathcal{C}$ , dont l'expression analytique est donnée comme suit :

$$\phi(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R \quad (2.47)$$

**Grilles de fond** Nous avons immergé un cercle de rayon  $R = 1$  mm, centré à l'origine, au milieu d'un carré de côté 2,5 mm en utilisant l'expression (2.47). Nous utilisons quatre grilles de fond différentes pour étudier l'influence de la taille de maille sur le cercle obtenu. Les maillages représentés figure 2.16 (a), ont été réalisés sous IDEAS®. Ils comportent respectivement 56, 228, 894 et 3 586 triangles.

**Résultats** Les maillages frontières obtenus pour chacune des grilles sont donnés dans la figure 2.16 (b) et (c). Il est clair que le raffinement de la grille conduit à une meilleure approximation du cercle et une augmentation du nombre d'éléments frontières. Ce résultat est dû à l'augmentation du nombre d'arêtes intersectées au voisinage du



**Figure 2.16.** Marching Triangles : cercle immergé dans un carré

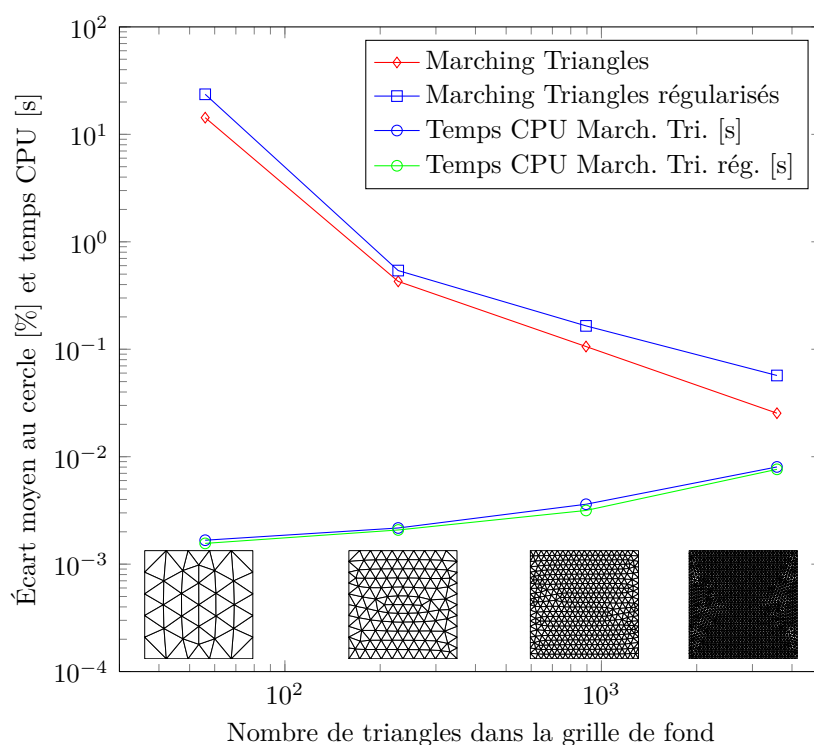
cercle. Pour la procédure de régularisation (figure 2.16 (c)), nous avons utilisé une tolérance  $\varepsilon_\phi$  égale à  $1/5$  de la plus petite arête de la grille. Ceci conduit à une réduction moyenne du nombre d'éléments de 16 %, les effets de la régularisation sont visibles dans les zones ① et ②.

Nous avons calculé l'écart moyen au cercle, défini comme suit :

$$E(C) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |R_i^2 - R| \quad (2.48)$$

où  $N$  désigne le nombre d'éléments frontières et  $R_i$  la distance de l'origine au centre de l'élément frontière  $i$ . Pour les Marching Triangles standards (respectivement régularisés), l'écart maximal, obtenu avec le maillage le plus grossier, s'élève à 14,3 % (respectivement 23,6 %). L'écart minimal, obtenu avec le maillage le plus fin, atteint 0,025 % (respectivement 0,057 %), cf. figure 2.17. Ceci montre un bon accord général, et confirme la légère dégradation du contour par la perturbation de la distance signée dans la version régularisée.





**Figure 2.17.** Comportement des Marching Triangles en fonction de la densité de la grille de fond (temps CPU évalués sur Intel® Core™2 Duo Processor P8400 2,26 GHz /1,93 Go RAM)

Le raffinement de la grille conduit à une augmentation du temps de calcul pour deux raisons :

- le nombre d'éléments frontières à générer est plus important,
- le nombre de cellules à inspecter est plus important.

Le temps d'exécution dépend en grand partie du nombre d'éléments frontières générés, et dans une moindre mesure du nombre de cellules dans la grille. La version régularisée est donc légèrement plus rapide que la version standard, capable de produire environ 400 000 éléments par seconde sur un PC 2,26 GHz /1,93 Go RAM.

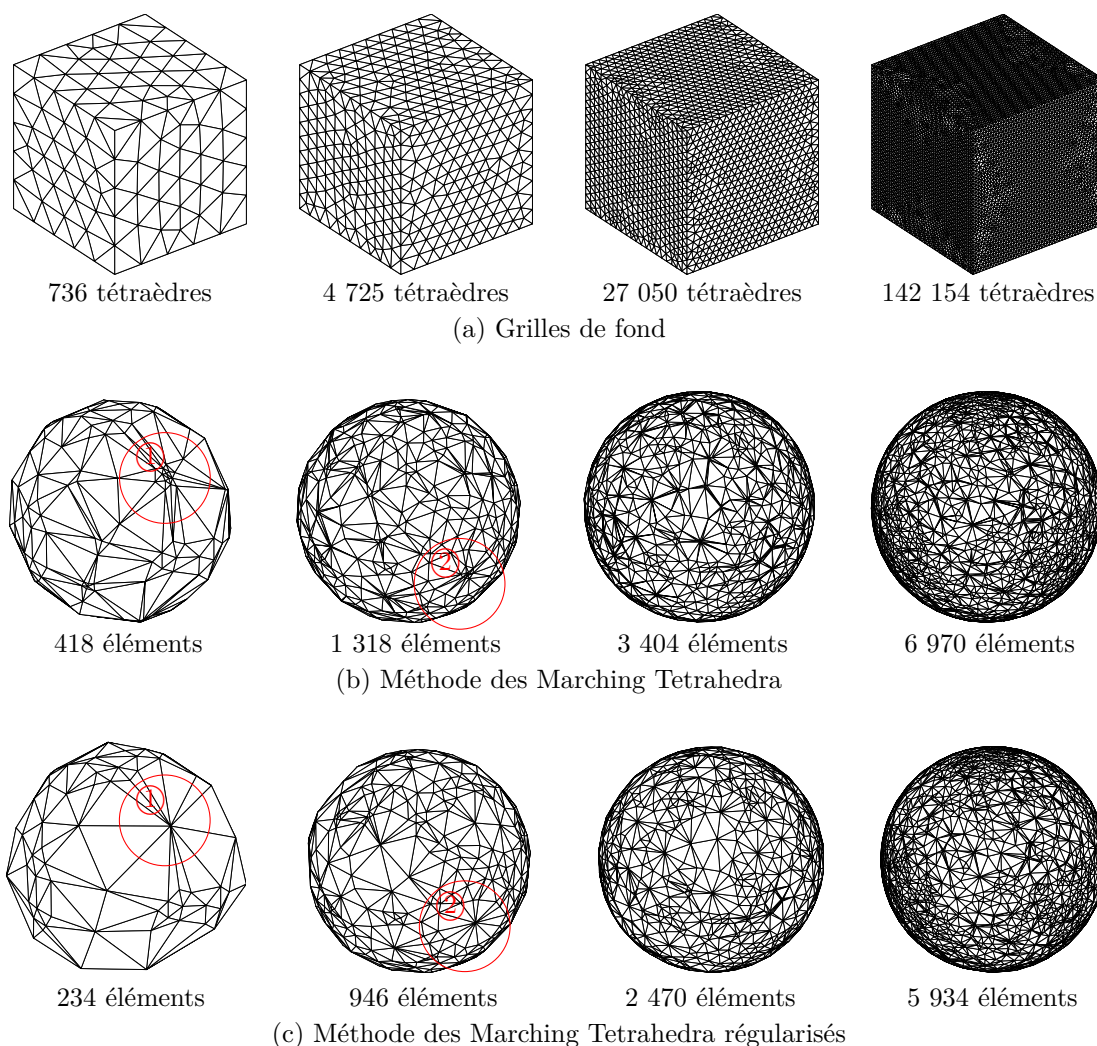
### Marching Tetrahedra

**Distance signée à une sphère** Nous considérons maintenant  $\mathcal{S}(O,R)$  la sphère de rayon  $R$  centrée à l'origine, dont la surface peut être définie comme suit :

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \phi(x_1, x_2, x_3) = 0\} \quad (2.49)$$

avec  $\phi$  la distance signée à  $\mathcal{S}$ , donnée par l'expression suivante :

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - R \quad (2.50)$$

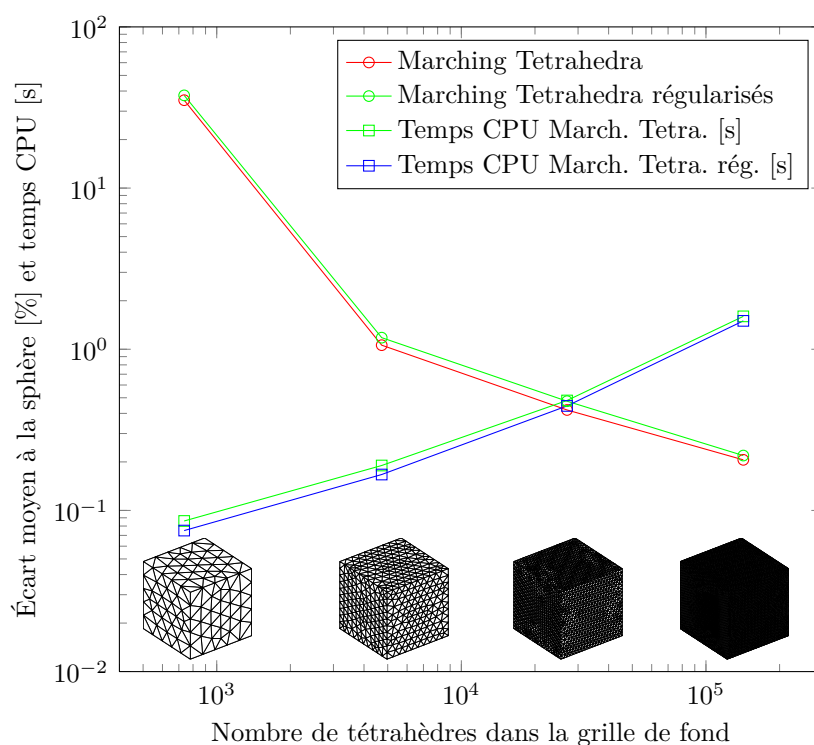


**Figure 2.18.** Marching Tetrahedra : sphère immergée dans un cube

**Grilles de fond** La sphère, de rayon  $R = 1$  mm et centrée à l'origine, est immergée au milieu d'un cube de côté 2,5 mm en utilisant l'expression (2.50). Les quatre grilles de fond utilisées dans l'étude paramétrique sont représentées sur la figure 2.18 (a) : elles comportent respectivement 736, 4 725, 27 050 et 142 154 tétraèdres, et ont été réalisées sous IDEAS® en utilisant des maillages tétraédriques libres.

**Résultats** Les maillages frontières obtenus pour chacune des grilles sont regroupés dans la figure 2.18 (b) et (c), les graphes associés sont donnés dans la figure 2.19. Les tendances observées sont très proches de celles obtenues avec les Marching Triangles, à savoir :

- L'écart entre la surface analytique et la surface numérique diminue par un raffinement de la grille. Nous avons calculé, en utilisant l'expression (2.48), un écart de 35,1 % pour la grille la plus grossière et 0,21 % pour la grille la plus fine.



**Figure 2.19.** Comportement des Marching Tetrahedra en fonction de la densité de la grille de fond (temps CPU évalués sur Intel® Core™2 Duo Processor P8400 2,26 GHz /1,93 Go RAM)

- La régularisation diminue le nombre de triangles générés (réduction moyenne de 28 %), mais dégrade légèrement la surface. Nous avons utilisé comme précédemment une tolérance  $\varepsilon_\phi$  égale à  $1/5$  de la longueur de la plus petite arête. Dans ces conditions, l'écart est de 37,6 % pour la grille la plus grossière et 0,22 % pour la grille la plus fine. Les effets de la régularisation sont mis en évidence dans les zones ① et ② de la figure 2.18.
- Les temps de calcul dépendent en grande partie du nombre d'éléments générés, le nombre de cellules dans la grille jouant un rôle mineur. La routine de maillage 3D est plus coûteuse qu'en 2D, car la génération d'un triangle est plus complexe que la génération d'un segment. Notre implémentation permet actuellement de générer environ 40 000 éléments par seconde sur un PC 2,26 GHz /1,93 Go RAM. Nous estimons qu'elle peut atteindre sans difficulté 50 000 éléments par seconde en optimisant la gestion des cas.

## Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre le modèle d'écoulement isotherme régissant le remplissage de la préforme (supposée indéformable). Il repose sur la loi de Darcy, bien connue dans le domaine des écoulements en milieux poreux, et l'utilisation de l'équation

d'incompressibilité. La résolution du problème de Darcy pour des domaines 2D et 3D est réalisée par méthode BEM, dont la caractéristique principale est la réduction du maillage d'une dimension. Nous avons présenté la formulation de l'équation intégrale frontière, l'expression des solutions fondamentales, ainsi que des détails d'implémentation de la méthode. Les solveurs sont validés sur des solutions analytiques, à la frontière et à l'intérieur du domaine.

L'avancée du front de résine est traitée par une approche Level Set, dont la formulation permet de prendre en compte les écoulements à topologies complexes, notamment la fusion de plusieurs fronts de matière. Par l'utilisation de la fonction distance signée, la méthode permet une capture continue de la frontière mobile, ce qui permet de calculer précisément la forme du front d'écoulement. L'intérêt d'associer les méthodes BEM et Level Set est la réduction du calcul à la frontière, dont le mouvement est entièrement déterminé par sa vitesse normale. Contrairement aux méthodes du type « volume tracking », nous n'utilisons pas la contribution des points internes pour résoudre le problème de remplissage. Le calcul de la pression et de la vitesse peut néanmoins être réalisé en post-traitement, avec un niveau de précision dépendant uniquement de la discrétisation frontière.

La génération du maillage frontière est réalisée par les algorithmes Marching Triangles (2D) et Marching Tetrahedra (3D). La description implicite de l'interface par l'isovaleur 0 du champ de distance signée permet de repérer la frontière, qui est maillée en intersectant la grille de fond avec des segments (2D) ou des triangles (3D). La méthode appliquée à des objets de référence (cercle et sphère) montre un bon accord entre la frontière réelle et numérique.

# Chapitre 3

## Applications et validations

### Sommaire

---

<b>Introduction . . . . .</b>	<b>84</b>
<b>3.1 Remplissage dans le plan d'une plaque carrée . . . . .</b>	<b>84</b>
3.1.1 Injection centrale anisotrope . . . . .	84
3.1.2 Injection frontale à débit imposé . . . . .	88
3.1.3 Infusion périphérique . . . . .	90
<b>3.2 Infusion plane d'un tricot : confrontation expérimentale . . . . .</b>	<b>93</b>
3.2.1 Dispositif expérimental . . . . .	93
3.2.2 Mise en œuvre numérique . . . . .	94
3.2.3 Résultats et discussion . . . . .	95
<b>3.3 Étude 2D de placement d'événements, multi-injection . . . . .</b>	<b>98</b>
3.3.1 Géométrie du moule et stratégies d'injection . . . . .	98
3.3.2 Mise en œuvre numérique . . . . .	99
3.3.3 Résultats et discussion . . . . .	100
<b>3.4 Infusion plane d'une plaque de grande dimension, gravité . . . . .</b>	<b>103</b>
3.4.1 Dimensions de la plaque, paramètres rhéologiques et procédés . . . . .	103
3.4.2 Infusion par deux seuils circulaires . . . . .	104
3.4.3 Infusion par un réseau de canaux d'alimentation . . . . .	106
<b>3.5 Infusion d'une pièce tridimensionnelle . . . . .</b>	<b>108</b>
3.5.1 Géométrie et paramètres de la simulation . . . . .	108
3.5.2 Grille de fond . . . . .	109
3.5.3 Résultats et discussion . . . . .	110
<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>112</b>

---

Nous présentons dans ce chapitre différentes applications destinées à tester le logiciel LCMBE (annexe G). Les cas de calcul, choisis pour se rapprocher des problématiques industrielles, permettront de vérifier la validité des résultats numériques et explorer les possibilités du programme. Des détails pratiques de la méthode implémentée sont également présentés.

## Introduction

Dans les simulations que nous avons réalisées, nous avons fait varier plusieurs paramètres influant sur le remplissage, notamment :

- la complexité géométrique des pièces (forme de la cavité, présence d’obstacles intérieurs dans le moule),
- les propriétés matériaux, et en particulier le tenseur de perméabilité du renfort,
- les conditions d’alimentation en résine (mode d’injection, forme, position et nombre de seuils d’alimentation),
- les dimensions du moule, permettant d’évaluer les effets de la gravité sur l’écoulement.

La section 3.1 est consacrée à l’étude du remplissage plan d’une plaque carrée. Nous avons simulé une injection centrale anisotrope à pression imposée, une injection frontale à débit imposé, et une infusion par alimentation périphérique. Dans la section 3.2 nous avons simulé l’infusion 2D d’une plaque comportant des obstacles internes et deux points d’injection. Nous avons procédé à un essai expérimental pour valider les résultats obtenus. La section 3.3 présente une étude 2D de positionnement des événements. Le moule considéré comporte un changement de section et un insert : deux stratégies de remplissage par multi-injection sont étudiées. Dans la section 3.4 nous avons simulé l’infusion 2D d’une pièce de grande dimension en prenant en compte la gravité. Nous présentons le cas d’une alimentation par deux seuils ponctuels et par un réseau de canaux d’alimentation. La section 3.5 présente un cas de faisabilité 3D. Nous simulons le remplissage par infusion frontale d’un quart de tube percé.

## 3.1 Remplissage dans le plan d’une plaque carrée

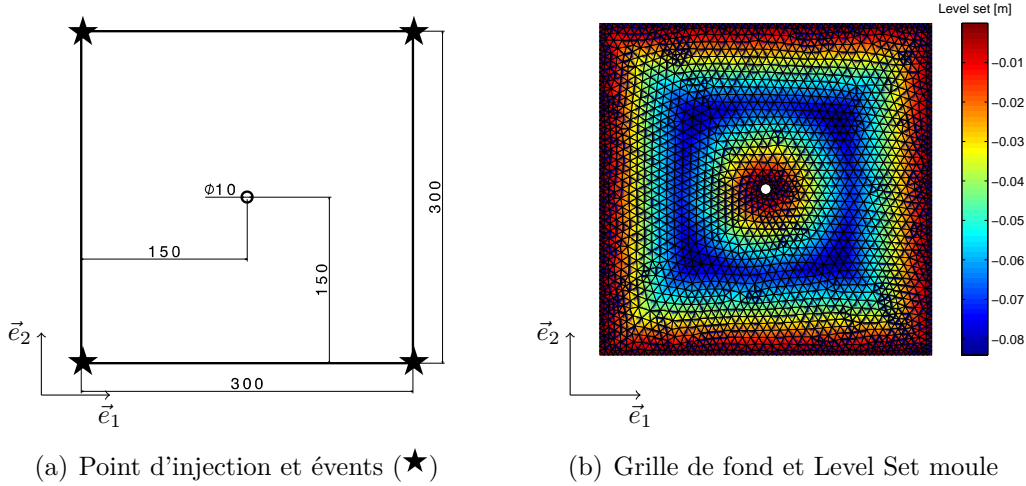
### 3.1.1 Injection centrale anisotrope

**Description du cas de calcul** Nous avons simulé l’injection centrale d’une plaque carrée de 300 mm de côté. Les paramètres rhéologiques et procédés utilisés sont donnés dans le tableau 3.1. Il s’agit de valeurs typiquement rencontrées dans les technologies d’injection à basse pression, comme le procédé RTM. Le renfort placé dans le moule est anisotrope, et orienté à  $45^\circ$  par rapport à l’axe  $\vec{E}_1$ . La résine est injectée sous pression dans le moule par un seuil d’injection circulaire de rayon 5 mm, cf. figure 3.1 (a). L’évacuation de l’air est assurée par quatre événements positionnés aux coins du moule.

$\bar{k} \times 10^{11}$ [m <sup>2</sup> ]	$\mu$ [Pa.s <sup>-1</sup> ]	$\varepsilon$ [-]	$p_e$ [bar]	$p_f$ [bar]
$\begin{bmatrix} 4 & 2,5 \\ 2,5 & 4 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}$	0,1	0,6	5	1,013

**Tableau 3.1.** Paramètres rhéologiques et paramètres procédés

**Grille de fond** La grille de fond utilisée pour discrétiser la plaque a été réalisée sous IDEAS<sup>®</sup>. Il s'agit d'un maillage libre comportant 2 293 nœuds et 4 278 éléments (triangles à trois nœuds), cf. figure 3.1 (b). La taille moyenne des éléments à l'intérieur du moule est de 8 mm. Le maillage est raffiné aux bords pour augmenter la résolution dans la méthode des Marching Triangles : nous avons imposé une taille moyenne de 4 mm. Le seuil d'injection est discrétisé par 8 éléments. Nous avons représenté sur la grille le champ de distance signée aux parois du moule, il s'agit de la Level Set fixe utilisée pour traiter la condition d'étanchéité.


**Figure 3.1.** Injection centrale : positionnement du point d'injection et des événements, grille de fond et Level Set moule

**Résultats et discussion** La durée du calcul, réalisé sur un PC 2,26 GHz / 1,93 Go RAM, est estimée à 145 s CPU. Nous avons post-traité la pression interne à quatre instants différents (figure 3.2). La discrétisation utilisée pour le calcul aux points internes a été générée à partir du maillage frontière par le programme « Mesh2D » [130], cf. figure 3.3.

La pression calculée à l'entrée est constante, égale à 5 bars, ce qui correspond à la pression d'injection imposée. Sur la frontière libre, l'air, chassé par l'avancée de la résine, est évacué librement par l'événement, et exerce sur la matière un niveau de pression égal à la pression atmosphérique. Une fois que la résine est entrée en contact avec les parois du moule, la pression augmente car le fluide est bloqué contre l'outillage, cf. figure 3.2 (d).

Nous avons considéré la solution analytique utilisée par Schmidt *et al.* [81] pour

valider la progression du front dans la phase d'écoulement libre :

$$\left[ \frac{r_{fi}}{r_{0_i}} \right]^2 \cdot \left[ 2 \ln \left( \frac{r_{fi}}{r_{0_i}} \right) - 1 \right] + 1 = \frac{4K_i(p_e - p_f)t}{\mu \varepsilon r_{0_i}^2} \quad (3.1)$$

où  $r_{fi}$  est le demi-axe de l'ellipse dans la direction  $i$ ,  $r_{0_i}$  le rayon du seuil d'injection,  $K_i$  la perméabilité principale dans la direction  $i$ , et  $t$  le temps écoulé. Il s'agit d'une expression approchée, qui est établie en considérant un repère isotrope équivalent qui transforme le seuil en ellipse. Un encadrement peut être obtenu en utilisant l'ellipse inscrite (solution analytique 1) et circonscrite (solution analytique 2), cf. figure 3.4.

La diagonalisation du tenseur de perméabilité conduit à sa forme orthotrope  $\bar{k} = \begin{bmatrix} 6,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ , le repère principal forme un angle de  $45^\circ$  par rapport au repère du moule, ce qui correspond à l'orientation des ellipses calculées. Nous avons tracé dans la figure 3.4 l'évolution des demi-axes principaux en fonction du temps. À tout instant, les ellipses obtenues sont situées entre les deux positions théoriques, ce qui montre un bon accord au modèle.

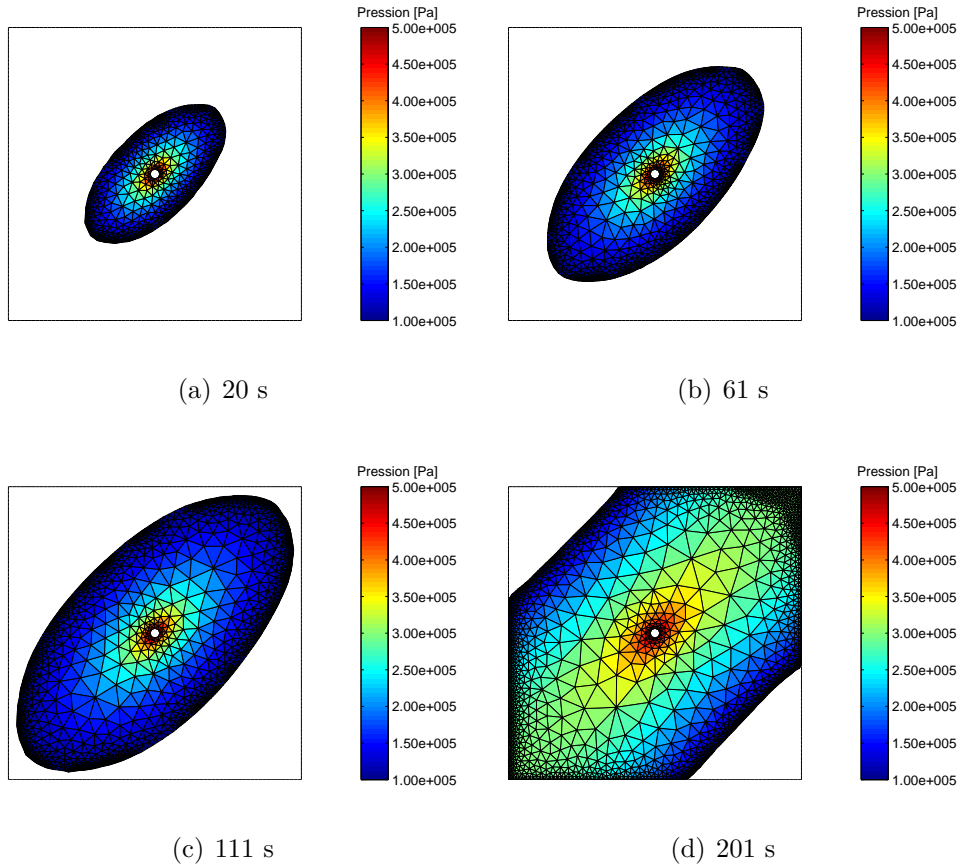
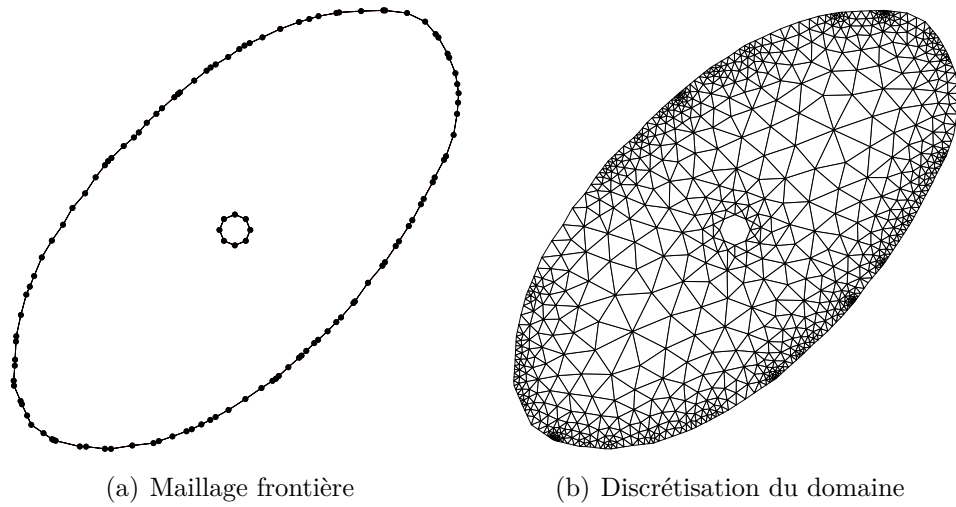
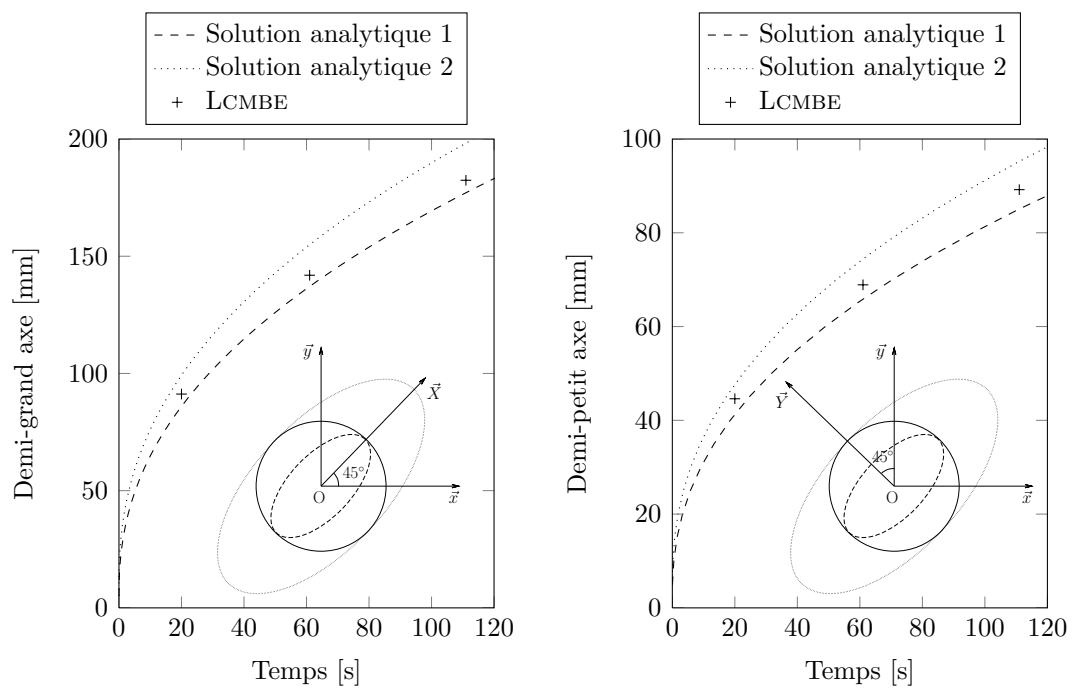


Figure 3.2. Injection centrale anisotrope : pression interne





**Figure 3.3.** Discrétisation du domaine à partir du maillage frontière pour le calcul aux points internes ( $t=20$  s)



(a) Progression direction  $\vec{E}_1$  (demi-grand axe) (b) Progression direction  $\vec{E}_2$  (demi-petit axe)

**Figure 3.4.** Progression du front en injection centrale anisotrope : solutions analytiques et résultats numériques

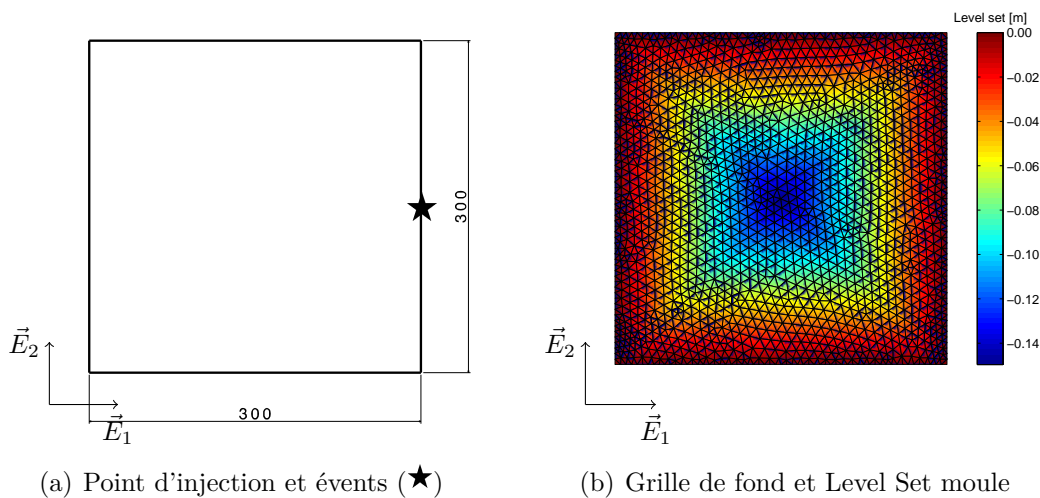
### 3.1.2 Injection frontale à débit imposé

**Description du cas de calcul** Nous avons repris la géométrie du moule précédent (plaque carrée de 300 mm de côté) pour simuler une injection frontale à débit imposé. La résine est injectée par la face gauche du moule, un évent est positionné sur la face opposée pour évacuer l'air de la cavité, cf. figure 3.5 (a). Les paramètres rhéologiques et procédés utilisés sont regroupés dans le tableau 3.2 : le débit d'entrée est fixé à 1,5 mL/s, soit une vitesse d'entrée de la résine de 5 mm/s pour une plaque de 1 mm d'épaisseur. Le tenseur de perméabilité est isotrope, ce qui est typiquement le cas pour des renforts de type mat.

$\bar{k} \times 10^{10} [\text{m}^2]$	$\mu [\text{Pa.s}^{-1}]$	$\varepsilon [-]$	$V_e [\text{m.s}^{-1}]$	$p_f [\text{bar}]$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{E}_1, \vec{E}_2)}$	0,1	0,5	$5 \cdot 10^{-3}$	1

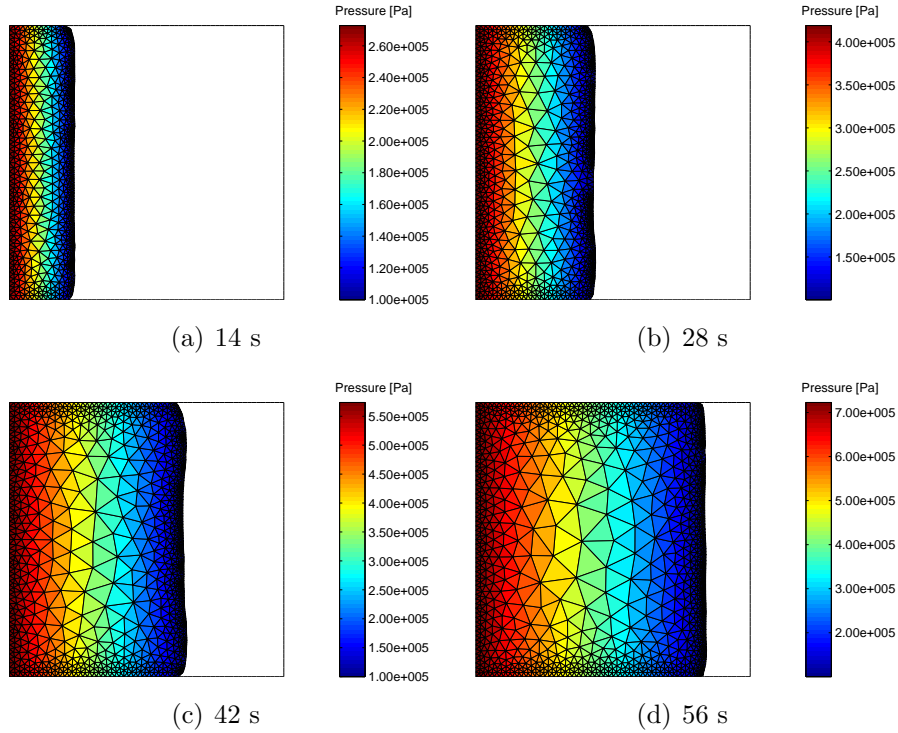
**Tableau 3.2.** Paramètres rhéologiques et paramètres procédés

**Grille de fond** La grille de fond utilisée pour réaliser le calcul comporte 1 735 nœuds et 3 228 éléments, cf. figure 3.5 (b). Bien que la géométrie du moule soit identique au cas précédent, nous n'utilisons pas le même maillage, car le moule est approvisionné par un côté de la plaque. Nous avons délibérément utilisé un maillage libre pour tester la robustesse de la méthode. La grille de fond comporte des éléments de taille 8 mm à l'intérieur du moule et 4 mm à proximité des bords : ce raffinement est destiné à améliorer la description de la frontière au voisinage des parois. Le champ de distance signée au moule est représenté sur le maillage, le niveau le plus bas (-150 mm) est atteint au centre du moule et correspond à la demi-longueur de la plaque.



**Figure 3.5.** Injection frontale : position de l'évent, grille de fond et Level Set moule

**Résultats et discussion** La durée du calcul est de 100 s CPU (PC 2,26 GHz /1,93 Go RAM). A l'issue de la simulation, nous avons procédé au calcul de la pression aux points internes, les résultats à différents instants sont regroupés dans la figure 3.6.



**Figure 3.6.** Injection frontale à débit imposé : pression interne

Compte tenu des conditions d'injection et de la géométrie du moule, la progression théorique du front, unidirectionnelle, ne dépend que de la vitesse d'entrée et s'écrit simplement :

$$x_f = V_e t \quad (3.2)$$

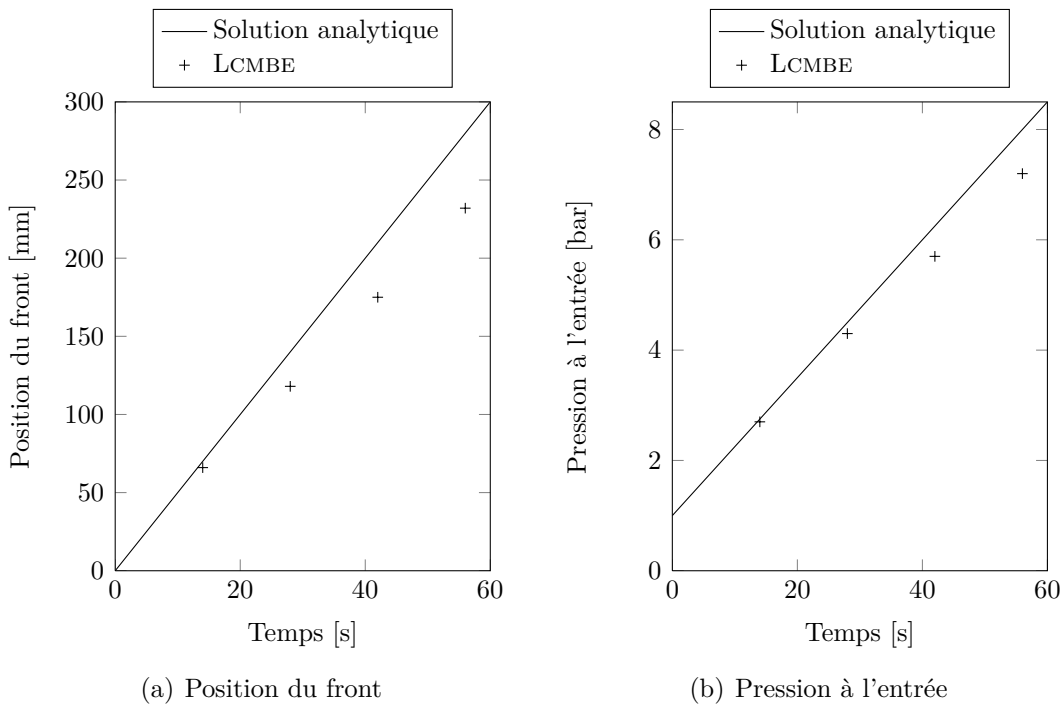
où  $x_f$  est la position du front,  $V_e$  la vitesse d'entrée et  $t$  le temps écoulé. Nous avons comparé l'évolution théorique aux résultats numériques, cf. figure 3.7 (a). La forme du front est rectiligne, même si la grille utilisée est un maillage libre qui ne présente aucune orientation favorisant ce type de profil. La comparaison montre un bon accord général entre la position théorique et la position numérique. Néanmoins, l'écoulement simulé est plus lent que le modèle analytique : nous avons relevé un écart de 5 mm en début de remplissage ( $t=14$  s), atteignant 5 cm en fin de remplissage ( $t=60$  s). Nous attribuons en grande partie ce retard au traitement du contact par notre approche géométrique : il conduit à une perte de masse correspondant à la quantité de résine traversant le moule pendant l'incrément de temps. Il est probable qu'une technique plus élaborée (pénalisation, multiplicateurs de Lagrange) permette de corriger ce problème.

Nous avons par ailleurs évalué l'évolution de la pression à l'entrée : la loi de Darcy

fournit l'expression suivante :

$$p_e(t) = p_f + \frac{\mu\varepsilon}{K}V_e^2t \quad (3.3)$$

où  $t$  est le temps écoulé. L'équation 3.3 montre que la pression augmente linéairement avec le temps, et dépend du carré de la vitesse : une pression de 8,5 bar est atteinte en fin de remplissage. Les résultats obtenus sont en accord avec le modèle, cf. figure 3.7 (b), même si, en raison du retard sur le remplissage, la pression numérique est sous-évaluée (environ 10 %).



**Figure 3.7.** Injection frontale à débit imposé : progression du front et pression à l'entrée, comparaison des résultats numériques aux solutions analytiques

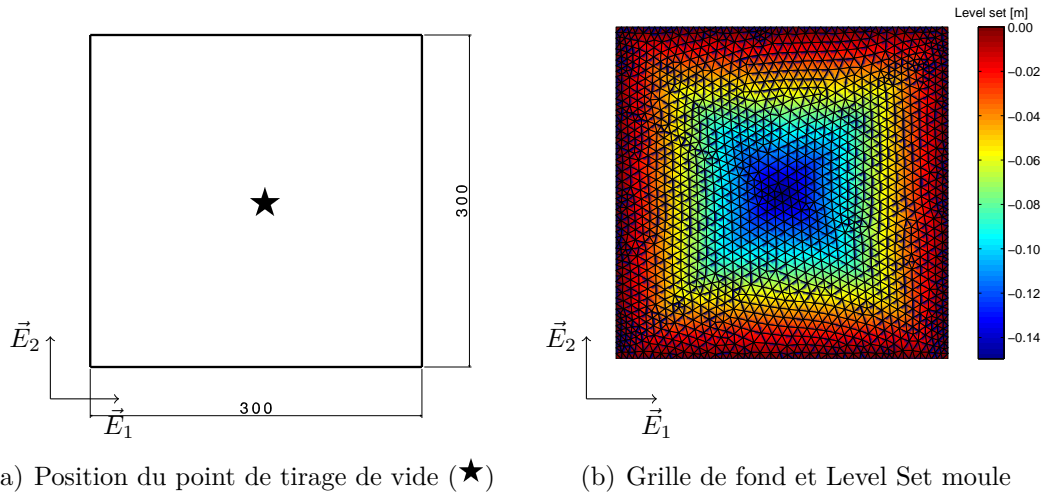
### 3.1.3 Infusion périphérique

**Description du cas de calcul** La plaque carrée de 300 mm de côté est maintenant utilisée pour simuler une infusion périphérique. Les paramètres de la simulation sont donnés dans le tableau 3.3, le renfort considéré est isotrope. La résine, admise à pression atmosphérique, rentre dans la cavité par les quatre bords de la plaque ; un point de tirage du vide, positionné au centre, aspire le fluide dans le moule, cf. figure 3.8 (a). La pression imposée dans la cavité est fixé à 1,2 mbar, les technologies utilisées en infusion permettent généralement d'atteindre ce niveau de vide.

$\bar{k} \times 10^{11} \text{ [m}^2\text{]}$	$\mu \text{ [Pa.s}^{-1}\text{]}$	$\varepsilon \text{ [-]}$	$p_e \text{ [bar]}$	$p_f \text{ [bar]}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{E}_1, \vec{E}_2)}$	0,1	0,5	1,013	$1,2 \cdot 10^{-3}$

**Tableau 3.3.** Paramètres rhéologiques et paramètres procédés

**Grille de fond** La grille de fond est identique à celle utilisée pour la simulation de l'injection radiale, elle comporte 1 735 nœuds et 3 228 éléments. Le maillage, sur lequel nous avons représenté la Level Set du moule, est donné figure 3.8 (b).


**Figure 3.8.** Infusion périphérique : position du point de tirage de vide, grille de fond et Level Set moule

**Résultats et discussion** Le temps de calcul estimé pour réaliser la simulation est de 115 s CPU (PC 2,26 GHz /1,93 Go RAM). La pression interne a été évaluée en fin de calcul, cf. figure 3.9 (a). Nous avons comparé la progression du remplissage avec le logiciel PAM-RTM<sup>®</sup>, la même grille de fond a été utilisée dans les deux cas, cf. figure 3.9 (b).

La résine, aspirée de la périphérie vers le centre, s'organise d'abord en carré ( $t=24$  s,  $t=67$  s) puis en cercle ( $t=159$  s,  $t=300$  s), en raison de l'isotropie du milieu. Les profils de remplissage obtenus par les deux méthodes sont très proches, même si la fonction de capture employée est différente. La régularité de la distance signée nous permet d'évaluer précisément la forme de la frontière. Pour PAM-RTM<sup>®</sup>, la capture est plus grossière, car le champ utilisé est discontinu : la fraction volumique définit un taux de présence par cellule compris entre 0 et 1, cf. figure 3.10.

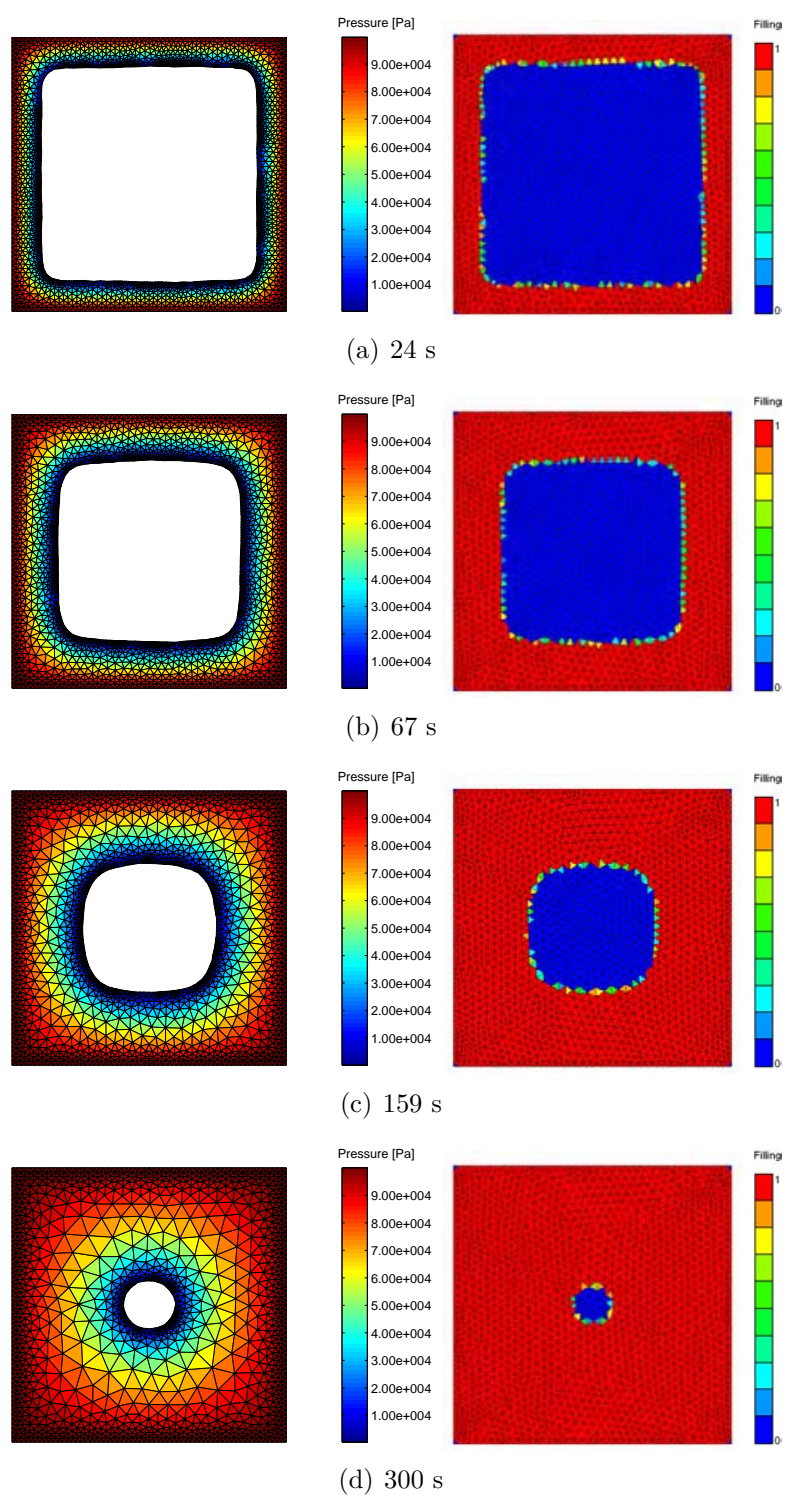
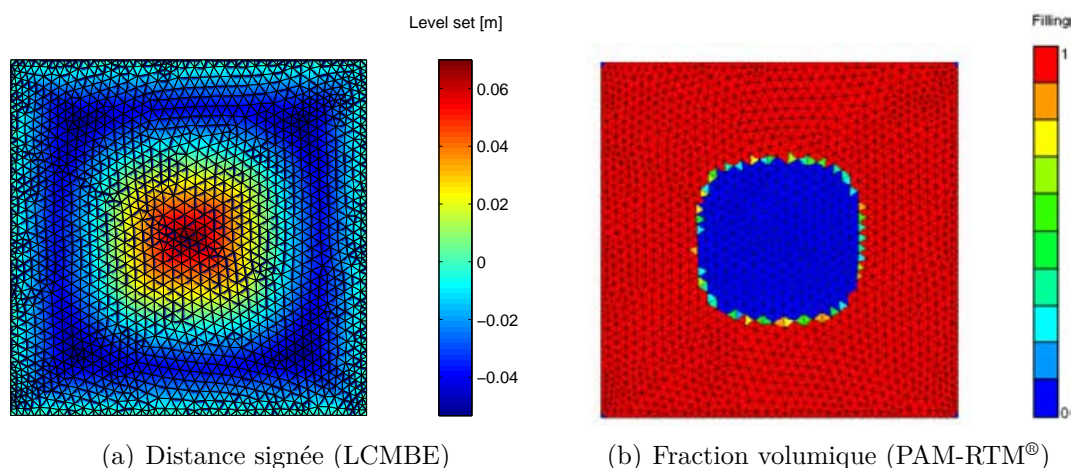


Figure 3.9. Infusion périphérique : comparaison entre LCMBE et PAM-RTM®



**Figure 3.10.** Comparaison des fonctions de capture utilisées dans les méthodes Level Set (distance signée) et Volume Of Fluid (fraction volumique), à  $t=159$  s

## 3.2 Infusion plane d'un tricot : confrontation expérimentale

### 3.2.1 Dispositif expérimental

**Géométrie** Nous avons développé en collaboration avec G. Dusserre (ICA Albi) un dispositif expérimental destiné à suivre l'infusion dans le plan d'un tricot. L'échantillon que nous avons utilisé, confectionné par *Textile Aéro Tarn*, est un tricot côte 1/1 en fibres de verre, il se présente sous la forme d'une plaque rectangulaire de 300 mm par 350 mm de côtés. La préparation de la préforme a consisté à modeler la géométrie, nous avons inséré un mastic étanche entre les mailles du tricot pour réaliser cette opération. La plaque ainsi obtenue comporte des obstacles internes, les dimensions sont indiquées figure 3.11 (a). Deux seuils circulaires de 10 mm de diamètre ont été aménagés pour approvisionner le tricot en résine.

**Montage** La préforme, disposée sur une plaque métallique rigide et plane, est recouverte par une bâche souple, un joint de mise sous vide a été utilisé pour assurer l'étanchéité du montage, cf. figure 3.11 (b). Nous avons utilisé de l'huile de colza comme fluide modèle. Elle est stockée dans un réservoir à pression atmosphérique, et acheminée vers la cavité par un tuyau d'alimentation de 10 mm de diamètre, un raccord en T divise l'écoulement en deux pour distribuer le fluide vers les seuils. Une vanne permet de contrôler l'arrivée de l'huile. Pendant le remplissage, un niveau de vide constant est imposé dans la cavité par une pompe à vide, un manomètre mesure la pression en continu. Les points de tirage de vide sont positionnés sur les bords supérieurs et inférieurs, nous avons utilisé un textile drainant pour répartir l'aspiration le long des parois.

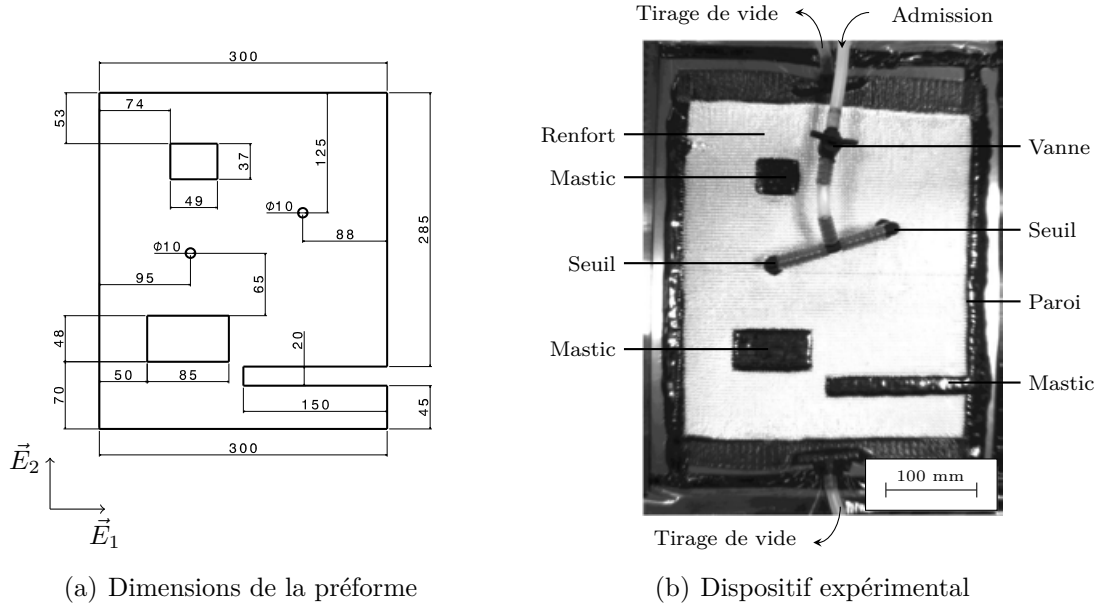


Figure 3.11. Dimensions du moule et positions des seuils

**Suivi du front** Pendant le remplissage, le front est suivi par une caméra CCD ( $1\,350 \times 1\,024$  px<sup>2</sup>) placée au-dessus de la plaque : elle est fixée à l'extrémité d'un bras rigide et orientée parallèlement au plan d'écoulement. Le facteur de magnification des images est de 2,7 px/mm. Un chronomètre est utilisé en association avec la caméra pour mesurer le temps écoulé.

**Paramètres rhéologiques et procédés** L'identification des paramètres rhéologiques, notamment la perméabilité dans le plan du tricot, a fait l'objet d'une étude détaillée par Dusserre *et al.* [45], nous avons utilisé ces résultats pour réaliser la simulation, cf. tableau 3.4.

Le renfort, anisotrope, est plus perméable suivant la direction colonne ( $\vec{E}_1$ ) que suivant la direction rangée ( $\vec{E}_2$ ). Ces directions correspondent aux axes principaux du tenseur de perméabilité. La porosité a été estimée à 0,705 : nous avons procédé par pesée, en utilisant la masse volumique des fibres et les dimensions de l'échantillon. L'épaisseur de l'échantillon a été mesurée avec un comparateur une fois le vide obtenu dans la cavité. La viscosité de l'huile de colza, connue pour son comportement Newtonien, a été évaluée à  $0,067$  Pa.s<sup>-1</sup> à la température ambiante. Nous supposons que la pression de l'huile à l'entrée est égale à la pression atmosphérique, nous avons placé le réservoir à la hauteur du renfort pour minimiser la pression hydrostatique. Le niveau de vide obtenu dans la cavité est de 1,2 mbar.

### 3.2.2 Mise en œuvre numérique

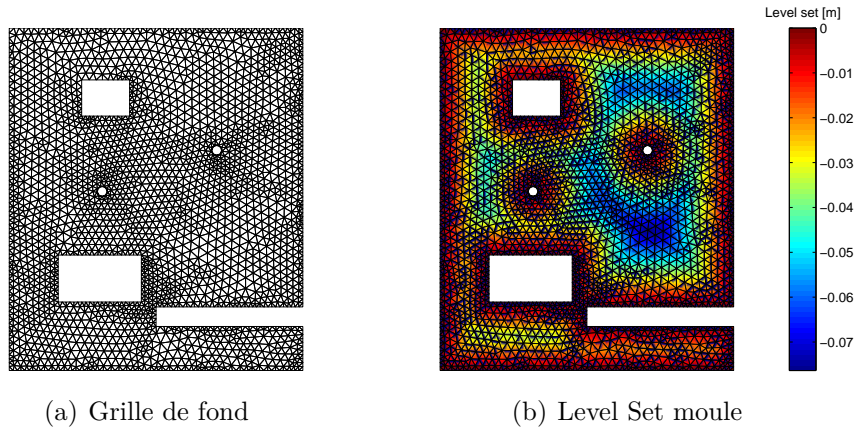
La grille de fond utilisée pour discrétiser la cavité a été réalisée sous IDEAS<sup>®</sup> : elle comporte 2 560 nœuds et 4 624 éléments, cf. figure 3.12 (a). Nous avons utilisé un



$\bar{k} \times 10^{10} \text{ [m}^2\text{]}$	$\mu \text{ [Pa.s}^{-1}\text{]}$	$\varepsilon \text{ [-]}$	$p_e \text{ [bar]}$	$p_f \text{ [bar]}$
$\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 7,75 \end{bmatrix}_{(\vec{E}_1, \vec{E}_2)}$	0,067	0,705	1,03	$1,20 \cdot 10^{-3}$

**Tableau 3.4.** Paramètres rhéologiques et paramètres procédés

maillage libre, la taille moyenne des éléments est de 3,5 mm, un raffinement aux parois a été réalisé. La Level Set fixe utilisée pour décrire les parois du moule est représentée figure 3.12 (b).


**Figure 3.12.** Grille de fond et Level Set associée au moule

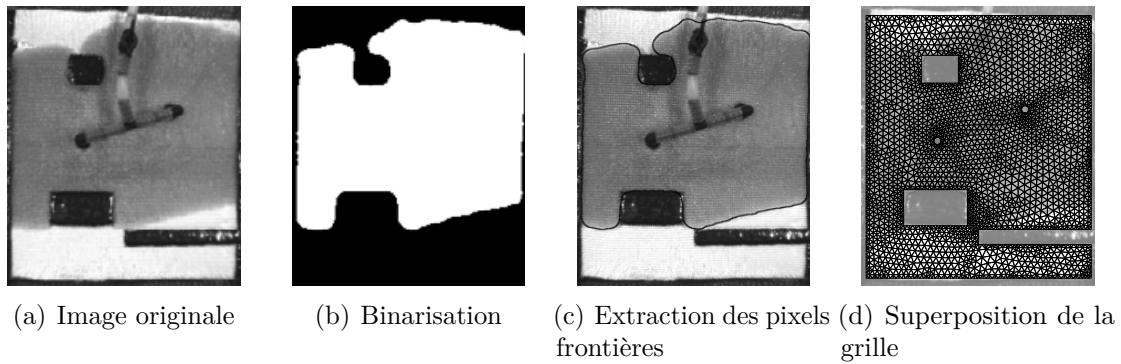
Nous avons utilisé comme données d'entrée les paramètres de la simulation identifiés au cours du test (tableau 3.4) .

### 3.2.3 Résultats et discussion

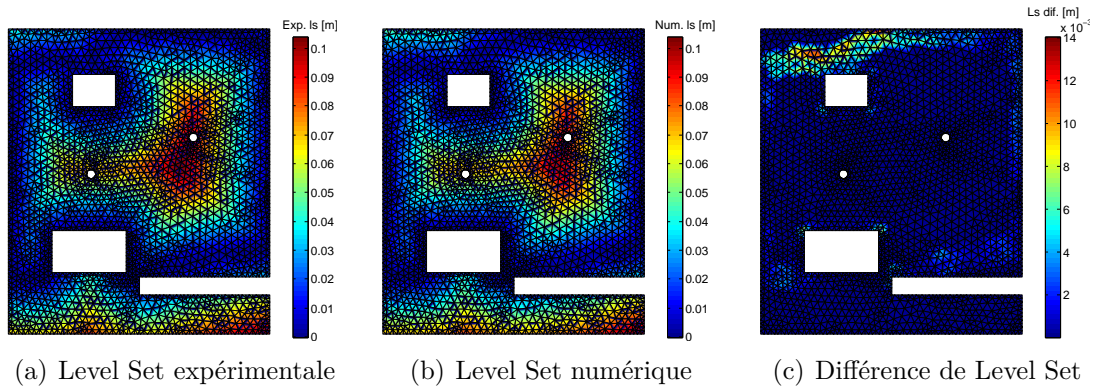
La durée du calcul est estimée à 110 s CPU (PC 2,26 GHz /1,93 Go RAM). Nous avons évalué la validité des résultats en comparant les frontières expérimentales et numériques. Au lieu de travailler directement sur le contour, nous avons considéré les champs de distance signée dans le but de réaliser une étude quantitative des écarts obtenus entre chaque image.

Les images expérimentales ont été analysées avec le logiciel APHELION<sup>®</sup> en vue d'extraire les pixels frontières, cf. figure 3.13. La grille de fond utilisée dans la simulation a été superposée à chaque image pour définir les points de calcul de la Level Set expérimentale. Le champ de distance signée aux pixels frontières a été évalué par une procédure que nous avons développée sous MATLAB<sup>®</sup>, une calibration de l'image permet de convertir la distance en mètre. La cartographie des écarts est finalement obtenue en calculant la différence absolue entre les deux Level Sets (figure 3.14).

Nous avons comparé les Level Sets expérimentales et numériques à plusieurs instants du remplissage, cf. figure 3.15. Les images expérimentales présentées ont été traitées pour faire apparaître les pixels contours. L'accord entre les profils de remplissage expérimental et numérique est bon, à tous les instants, avec notamment :



**Figure 3.13.** Traitement d'image réalisé pour extraire les pixels frontières (APHELION<sup>®</sup>) et superposition de la grille de fond ( $t=8$  s)



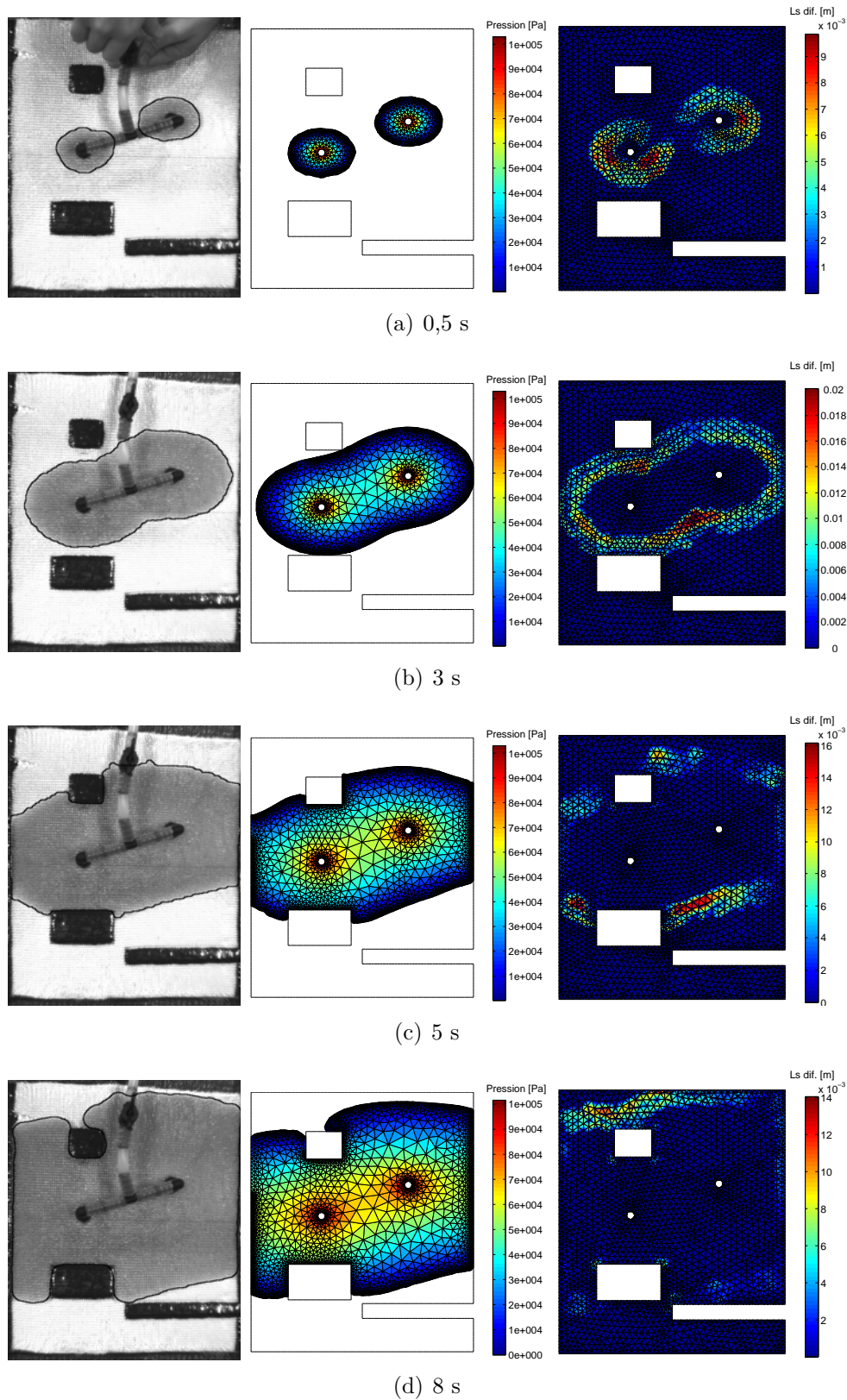
**Figure 3.14.** Estimation de l'écart entre le front expérimental et le front numérique par différence sur les Level Sets ( $t=8$  s)

- une bonne gestion de la fusion des deux ellipses au début du test,
- un bonne prédiction du contournement des obstacles.

La cartographie des écarts révèle une excellente adéquation entre les fronts expérimentaux et numériques : l'écart maximal entre les contours n'excède pas 2 cm, ce qui montre les capacités de la méthode à simuler précisément les changements d'allure de la frontière. Les écarts observés peuvent s'expliquer par les incertitudes expérimentales introduites dans l'essai, notamment :

- les approximations géométriques, liées au placement des obstacles et au cisaillement du tricot,
- les incertitudes associées à l'identification des paramètres rhéologiques utilisés,
- les défauts de synchronisation, particulièrement importants au début de l'essai où le remplissage est plus rapide,
- les incertitudes associées à l'analyse d'images, notamment le réglage des opérations destinées à extraire le contour.

### 3.2. Infusion plane d'un tricot : confrontation expérimentale



**Figure 3.15.** Écoulement dans le tricot : clichés expérimentaux, résultats LCMBE (pression interne), et différence entre le contour expérimental et le contour numérique

### 3.3 Étude 2D de placement d'évents, multi-injection

**Préambule** Le placement des points d'injection et des évents est une étape décisive dans le paramétrage du procédé. Elle détermine en grande partie le bon déroulement du remplissage, les temps de cycle, ou encore le niveau de pression ou le débit requis à l'entrée. Pourtant, l'expérience seule du concepteur se révèle généralement insuffisante pour mener à bien cette tâche. Pour élaborer une stratégie de remplissage adaptée, deux catégories d'approches sont employées :

- les méthodes itératives du type « essais-erreurs », qui s'appuient sur la réalisation de simulations numériques [131–133] ou de prototypes physiques,
- les méthodes numériques reposant sur des algorithmes d'optimisation [134–138].

Le temps nécessaire à la réalisation de prototypes physiques et les coûts liés aux outillages a fait de l'approche numérique un outil avantageux permettant d'assister le concepteur dans la phase de développement.

Dans la version actuelle du programme LCMBE, les évents ne sont pas explicitement pris en compte dans le calcul : il sont supposés assurer la fonction d'évacuation de l'air quelle que soit la configuration du remplissage. L'analyse du scénario de remplissage permet de décider *a posteriori* du placement de ces points.

#### 3.3.1 Géométrie du moule et stratégies d'injection

**Géométrie** Nous avons simulé l'injection d'une plaque comportant un insert et des changements de section. Les dimensions du moule sont données dans la figure 3.16.

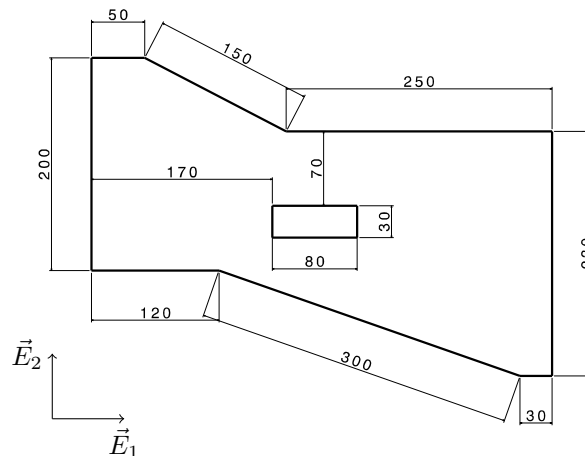
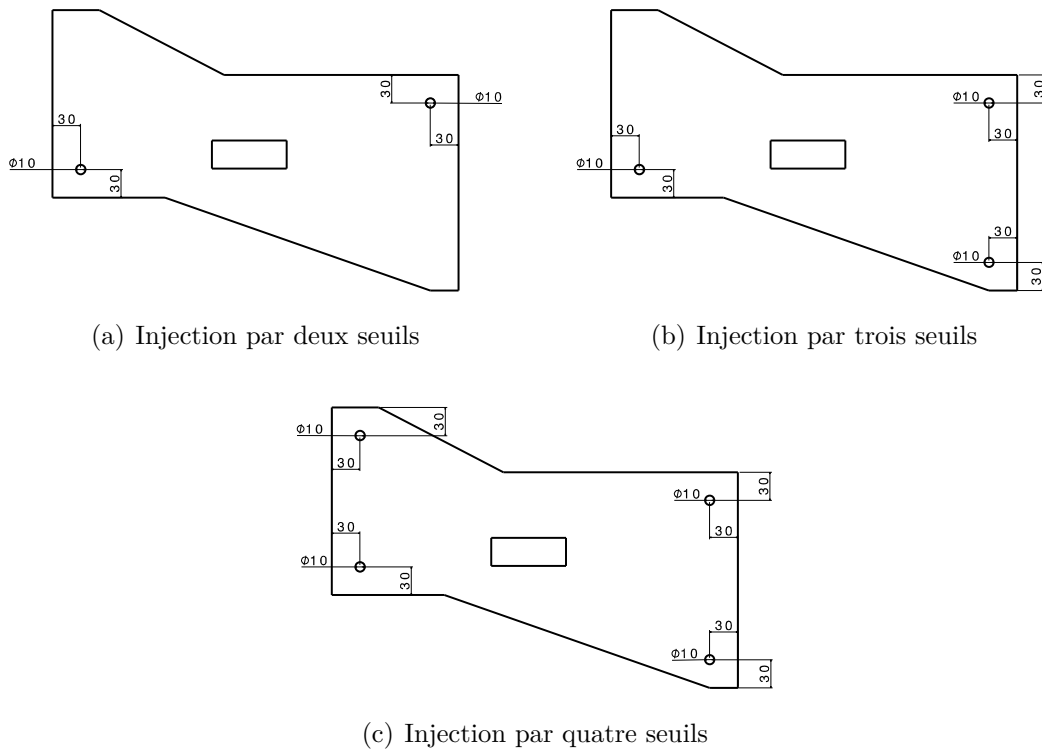


Figure 3.16. Dimensions du moule

**Stratégies d'injection** Pour le remplissage du moule, trois configurations d'injection ont été étudiées, comportant respectivement deux, trois et quatre seuils circulaires positionnés aux coins de la plaque (figure 3.17). Les paramètres rhéologiques et procédés (tableau 3.5) ont été maintenus constants pour les trois cas de calcul afin d'évaluer l'effet du positionnement sur le remplissage.



**Figure 3.17.** Positionnement des points d'injection

$\bar{k} \times 10^{11} \text{ [m}^2\text{]}$	$\mu \text{ [Pa.s}^{-1}\text{]}$	$\varepsilon \text{ [-]}$	$p_e \text{ [bar]}$	$p_f \text{ [bar]}$
$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{(\vec{E}_1, \vec{E}_2)}$	0,1	0,5	5	1,03

**Tableau 3.5.** Paramètres rhéologiques et paramètres procédés

### 3.3.2 Mise en œuvre numérique

Pour chaque cas de calcul, une nouvelle grille a été utilisée, elle ont été réalisées sous IDEAS® par une méthode de maillage libre. La taille moyenne des éléments est de 6 mm, la taille des éléments à proximité des parois est d'environ 4 mm. Les maillages sur lesquels nous avons représenté la Level Set moule sont donnés dans la figure 3.18.

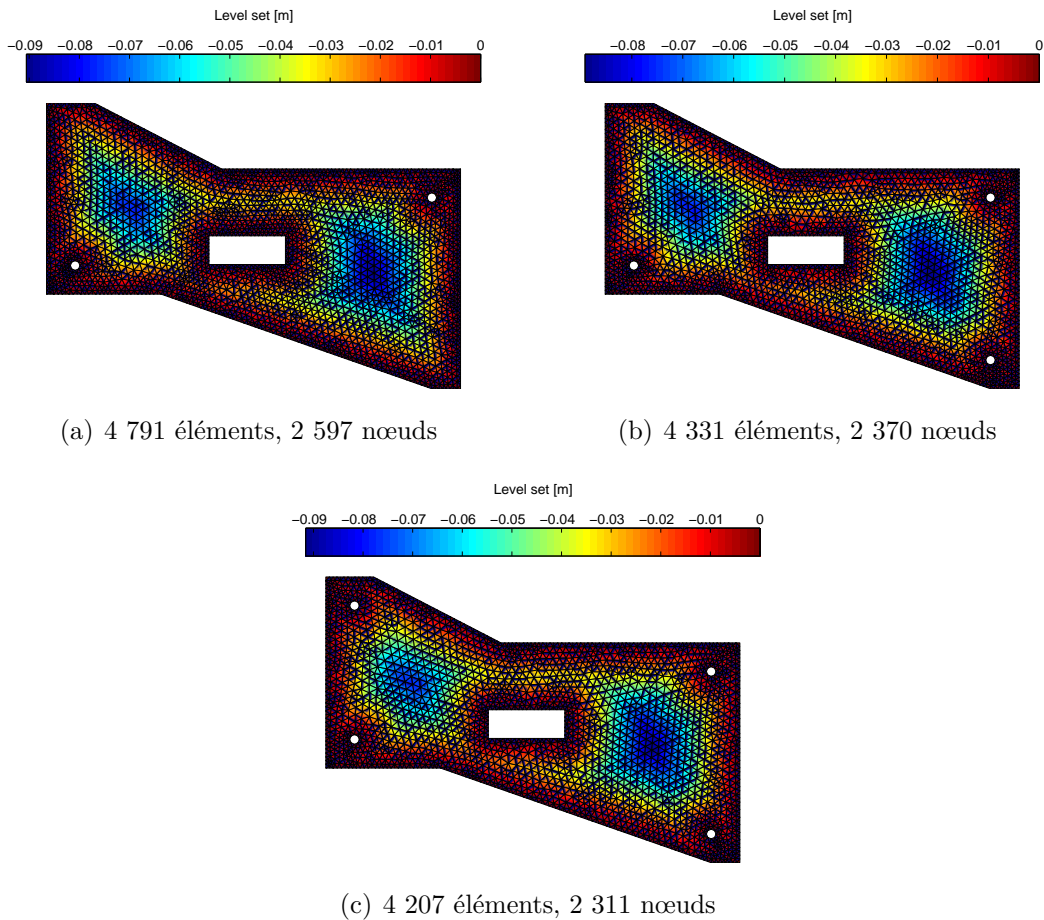


Figure 3.18. Grilles de fond et Level Set moule

### 3.3.3 Résultats et discussion

La durée de la simulation pour chacun des cas est estimée à 120 s CPU (PC 2,26 GHz /1,93 Go RAM). Nous avons, en post-traitement, réalisé le calcul de la pression aux points internes, néanmoins cette étape n'est pas nécessaire pour déterminer la position des événements. Les résultats sont présentés dans les figures 3.19, 3.20 et 3.21.

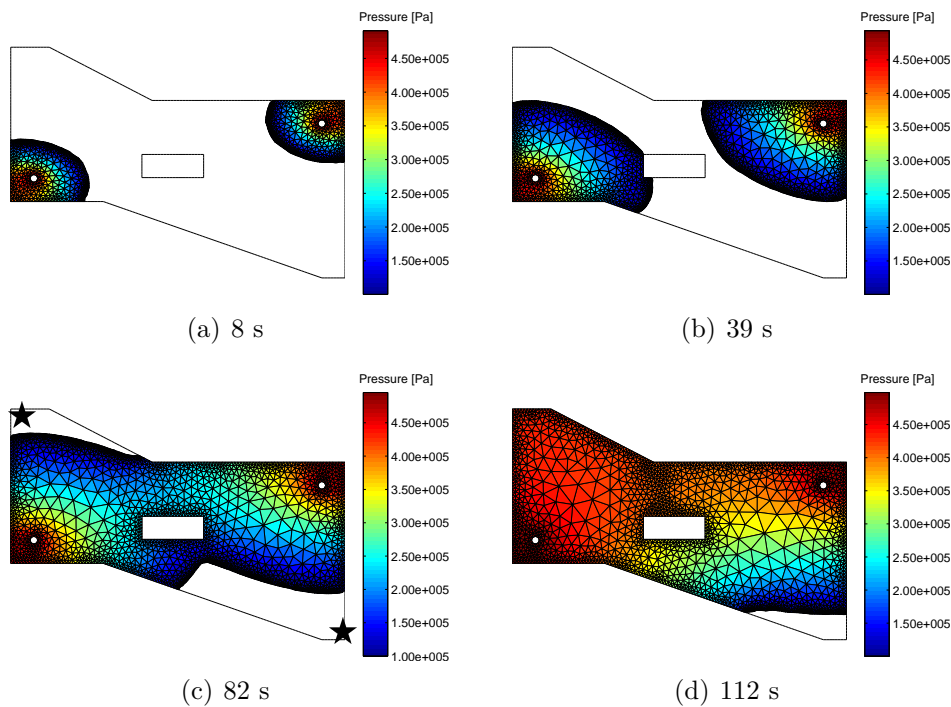
**Injection par deux seuils** L'anisotropie du renfort est bien visible dans la première partie du remplissage ( $t=8$  s et 39 s) : la résine s'écoule préférentiellement dans la direction la plus perméable. La progression conduit ensuite à la fusion des deux frontières au niveau de l'obstacle interne. La résine rejoint ensuite le coin supérieur gauche ( $t=82$  s) puis inférieur droit ( $t=112$  s) pour finir de remplir la pièce. Cette dernière étape nécessite deux événements pour évacuer l'air restant dans la cavité, cf. figure 3.19 (c).

**Injection par trois seuils** Après une phase de progression séparée ( $t=9$  s), la première fusion apparaît entre les fronts de matière issus des seuils à droite ( $t=37$  s). La résine avance ensuite vers le centre et emprisonne une zone sous l'insert ( $t=47$  s),

ce qui justifie le placement d'un premier événement, cf. figure 3.20 (c). Après une seconde fusion, la résine, guidée par les parois du moule, progresse dans le coin supérieur gauche où le remplissage s'achève ( $t=73$  s). Cette dernière phase nécessite un autre événement, cf. figure 3.20 (d).

**Injection par quatre seuils** Une première rencontre conduit à la fusion des deux frontières issues des seuils à gauche ( $t=19$  s), puis à celle des deux frontières à droite ( $t=30$  s). La résine se concentre ensuite au centre du moule, et enclave deux zones de part et d'autre de l'obstacle ( $t=45$  s) : nous plaçons deux événements dans ces régions pour assurer la fin du remplissage, cf. figure 3.21 (d).

**Bilan** Les simulations réalisées montrent que le temps de remplissage du moule étudié est réduit par l'ajout de points d'injection. Néanmoins la multiplication des seuils conduit à des écoulements complexes, nécessitant un placement approprié des événements qui n'est pas nécessairement immédiat. L'étude complète est réalisée en moins de 7 min CPU sur un ordinateur portable (PC 2,26 GHz /1,93 Go RAM), et peut être généralisée sans contrainte particulière à des géométries plus complexes.



**Figure 3.19.** Scénario de remplissage par deux points d'injection (événement ★)

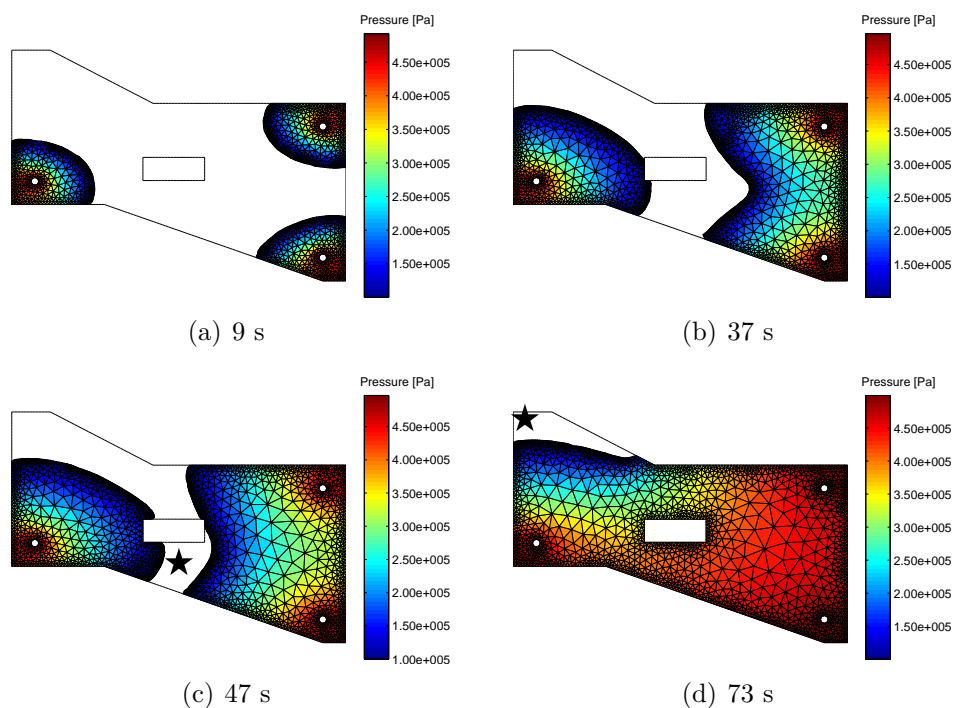


Figure 3.20. Scénario de remplissage par trois points d'injection (évent ★)

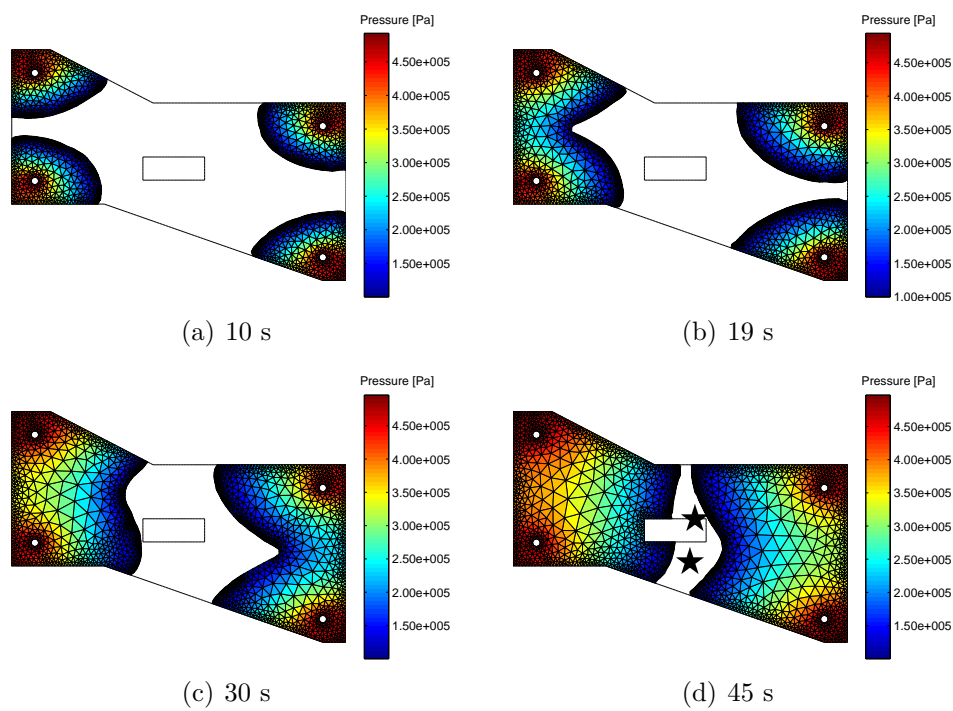


Figure 3.21. Scénario de remplissage par quatre points d'injection (évent ★)



## 3.4 Infusion plane d'une plaque de grande dimension, gravité

**Préambule** La gravité est souvent négligée dans les procédés de moulage composites, car sa contribution dans le remplissage est jugée mineure dans la grande majorité des cas, notamment pour les procédés où les pressions mises en jeu sont importantes. Néanmoins, la tendance actuelle semble s'orienter vers l'utilisation croissante des procédés d'infusion qui permettent d'élaborer des pièces de grandes dimensions, souvent difficile à mettre en forme par des procédés à moule rigide en raison des contraintes liées aux outillages.

Les progrès technologiques réalisés dans le domaine de l'infusion permettent aujourd'hui de mettre en forme des pièces structurales complexes, comme une coque de bateaux ou un fuselage d'avion. Pour ces pièces dont les dimensions peuvent atteindre plusieurs mètres, le remplissage des portions verticales est généralement perturbé par les effets de gravité.

### 3.4.1 Dimensions de la plaque, paramètres rhéologiques et procédés

**Géométrie du moule** Le moule considéré, de forme élancée, comporte un insert rectangulaire dans sa partie supérieure et un insert circulaire dans sa partie inférieure. Il mesure environ 4 m de long, ses dimensions sont indiquées figure 3.22.

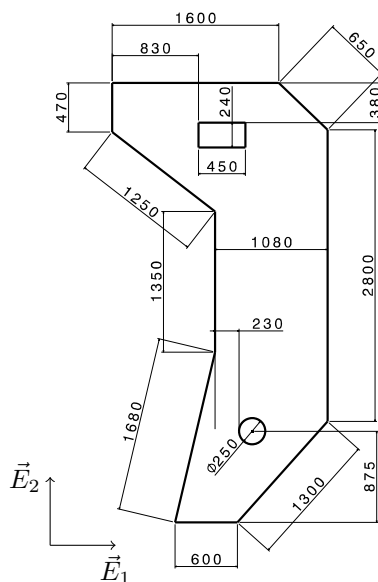


Figure 3.22. Dimensions du moule

**Paramètres rhéologiques et procédés** Nous avons utilisé des valeurs courantes rencontrées en infusion pour fixer les paramètres de simulation, cf. tableau 3.6. En particulier, le renfort considéré présente une perméabilité orthotrope, la perméabilité

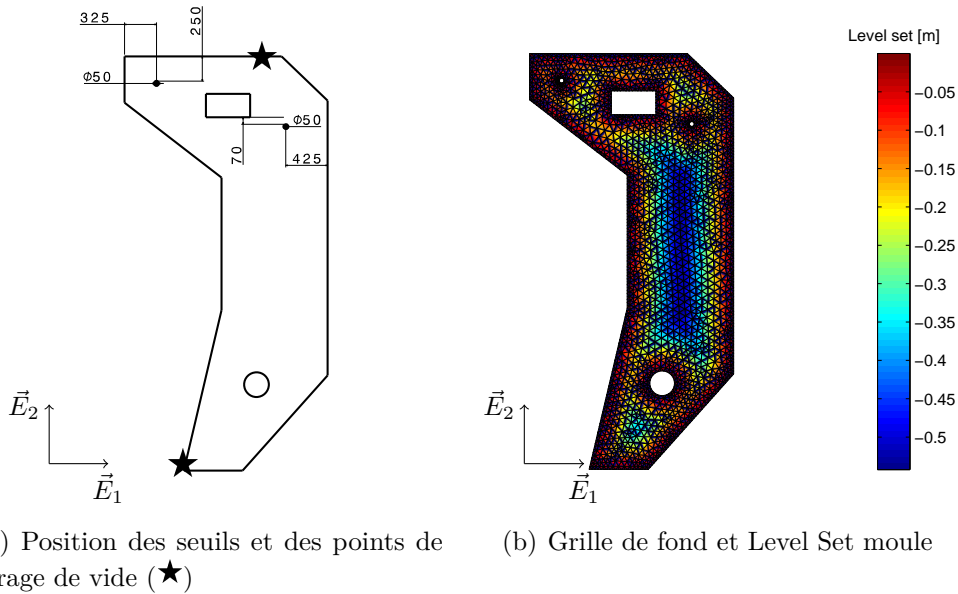
est supérieure dans la direction  $\vec{E}_1$ . La pression de vide est fixée à 1 mbar, les pompes utilisées en infusion permettent typiquement d'atteindre cette valeur. Pour prendre en compte la gravité dans le calcul, nous avons utilisé la masse volumique de la résine, fixée à  $1,14.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

$\bar{k} \times 10^{10} [\text{m}^2]$	$\mu [\text{Pa.s}^{-1}]$	$\rho [\text{kg.m}^{-3}]$	$\varepsilon [-]$	$p_e [\text{bar}]$	$p_f [\text{bar}]$
$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{(\vec{E}_1, \vec{E}_2)}$	0,1	$1,14.10^3$	0,55	1,013	$1.10^{-3}$

**Tableau 3.6.** Paramètres rhéologiques et paramètres procédés

### 3.4.2 Infusion par deux seuils circulaires

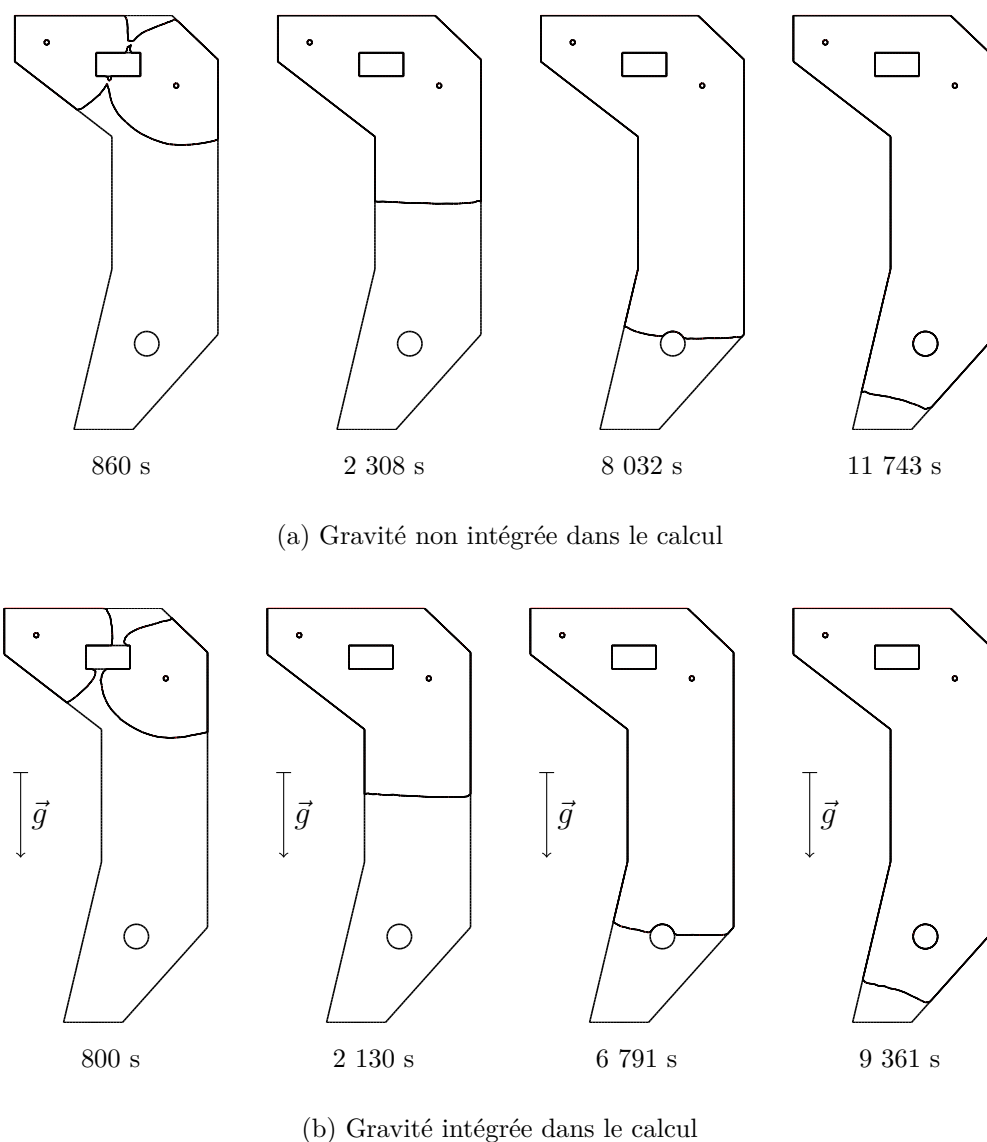
**Stratégie de remplissage** Nous avons simulé dans un premier temps l'infusion de la plaque par deux seuils circulaires, de 50 mm de diamètre, placés de part et d'autre de l'insert supérieur, cf. figure 3.23 (a). Les points de tirages de vide représentés sur la figure ont été positionnés *a posteriori* en utilisant les résultats de la simulation : ils sont placés sur les bords supérieurs et inférieurs du moule.



**Figure 3.23.** Position des points d'injection et des points de tirage du vide (★), grille de fond et Level Set moule

**Grille de fond** La grille de fond élaborée sous IDEAS® est un maillage libre triangulaire comportant 3 862 éléments et 2 167 nœuds, une taille moyenne de 7 cm est imposée dans le moule et 3 cm aux parois. Les seuils sont discrétisés en utilisant 8 éléments. La grille sur laquelle nous avons représenté la Level Set moule est donnée figure 3.23 (b).

**Résultats et discussion** Pour évaluer la contribution de la gravité dans le remplissage, nous avons réalisé deux simulations, avec et sans prise en compte de la gravité. Le temps nécessaire à la réalisation d'un calcul est évalué à 300 s CPU (PC 2,26 GHz /1,93 Go RAM). Les résultats des simulations sont regroupés dans la figure 3.24, où nous avons représenté le maillage frontière. Le calcul de la pression interne nécessite un traitement particulier que nous aborderons plus loin.



**Figure 3.24.** Infusion par deux seuils circulaires (maillage frontière)

Les deux scénarios de remplissage sont voisins : après une fusion des frontières autour de l'obstacle rectangulaire, la résine progresse de manière quasi-rectiligne dans la partie centrale ; une division s'opère ensuite à la rencontre avec l'obstacle circulaire, et la résine atteint finalement le bord inférieur, après ressoudure, pour compléter le

remplissage. Néanmoins, il apparaît nettement que la gravité favorise le remplissage du moule : nous avons relevé sur la dernière image une durée de 2 382 s séparant les deux fronts, soit environ 40 min. Dans cette configuration, la colonne de fluide qui pèse sur la frontière libre contribue à l'écoulement.

**Pression interne** Dans la méthode que nous avons implémentée, une pression modifiée est introduite pour prendre en compte l'effet de la gravité sans modifier le solveur BEM, cf. chapitre 2, section 2.2.2.3 (page 63). En conséquence, seule la vitesse calculée est physique ; la pression réelle peut néanmoins être évaluée en post-traitement comme suit :

$$p = \hat{p} - \rho gy \quad (3.4)$$

où  $p$  est la pression physique,  $\hat{p}$  la pression modifiée, et  $y$  la coordonnée verticale du point de calcul.

Nous avons réalisé le calcul de la pression interne à  $t=6\,791$  s, cf. figure 3.25 (a). Les niveaux de pression les plus élevés sont atteints dans la zone supérieure du moule. En se rapprochant de la frontière libre, la pression décroît jusqu'à la pression de vide. Nous avons également tracé la pression modifiée, figure 3.25 (b), afin d'illustrer le changement de variables de l'équation (3.4). La différence de pression entre l'entrée et la frontière libre atteint la valeur virtuelle de 1,4 bar, ce qui permet au solveur d'estimer le gradient de pression équivalent intégrant la gravité.

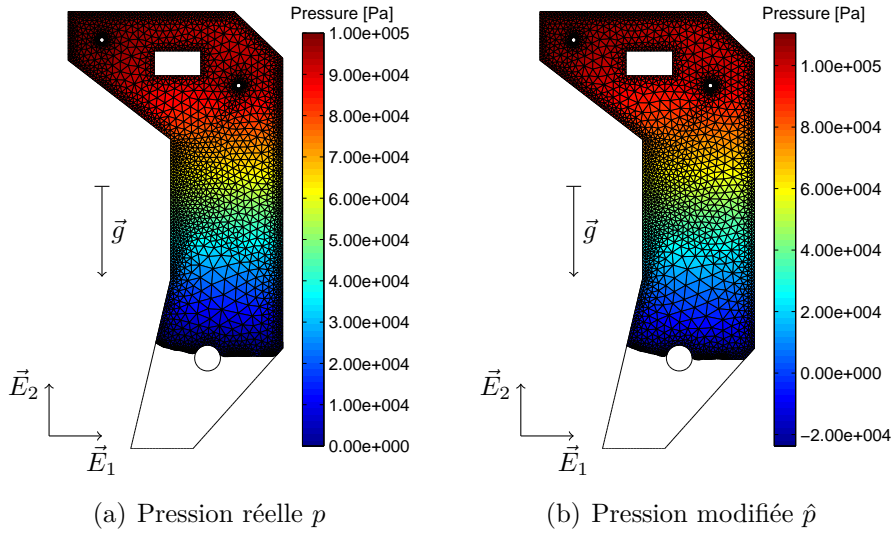
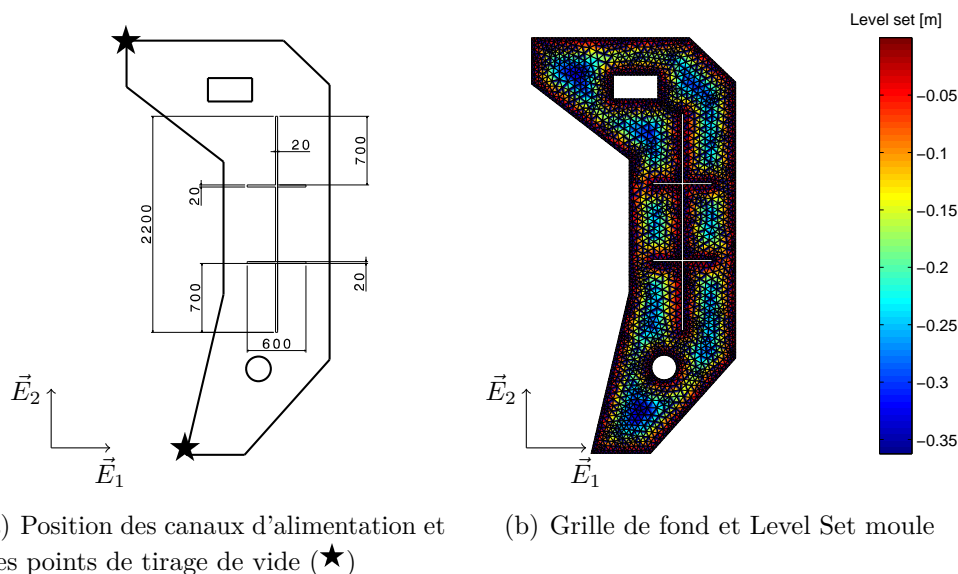


Figure 3.25. Calcul de la pression interne

### 3.4.3 Infusion par un réseau de canaux d'alimentation

**Stratégie de remplissage** En conservant les paramètres utilisés dans le cas précédent, nous avons simulé le remplissage de la plaque par un réseau de canaux d'alimentation

(2 cm de diamètre) disposés dans la zone centrale du moule, cf. figure 3.26 (a). Cette technique est largement employée dans les procédés d'infusion pour distribuer efficacement la résine dans le renfort et minimiser les temps de cycles. Les résultats de la simulation montreront la nécessité de déplacer le point de tirage du vide supérieur dans le coin gauche comme indiqué sur la figure.



**Figure 3.26.** Position des canaux d'alimentation et des points de tirage du vide (★), grille de fond et Level Set moule

**Grille de fond** La grille de fond utilisée comporte 4 288 éléments et 2 464 nœuds, la taille d'éléments moyenne avoisine 7 cm dans les zones les moins raffinées et 3 cm au niveau des parois, le maillage et la Level Set moule sont fournis figure 3.26 (b).

**Résultats et discussion** La durée du calcul, réalisé sur un PC 2,26 GHz/1,93 Go RAM est de 385 s CPU. Nous avons procédé à la fin de la simulation au calcul de la pression interne, les résultats sont regroupés figure 3.27.

Contrairement à la stratégie précédente impliquant deux seuils ponctuels, l'utilisation des canaux conduit à des progressions rapides dans le moule : au bout de 100 s, la résine atteint déjà les deux inserts. Le fluide, divisé par le contournement des obstacles ( $t=390$  s), se ressoude en sortie, avant de se diriger vers les extrémités de la préforme ( $t=1\,470$  s). La progression s'achève par le remplissage du coin supérieur gauche, qui nécessite un point de tirage de vide pour aspirer la résine dans la zone enclavée.

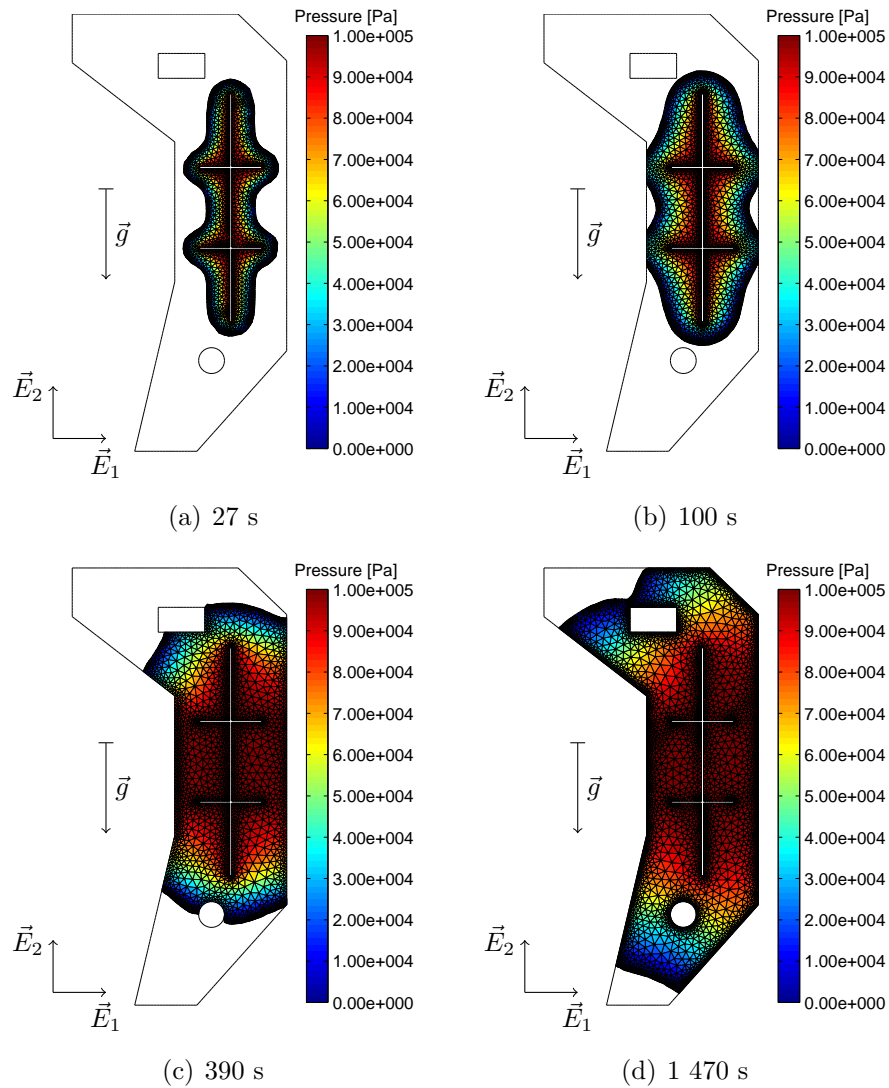


Figure 3.27. Calcul de la pression interne

## 3.5 Infusion d'une pièce tridimensionnelle

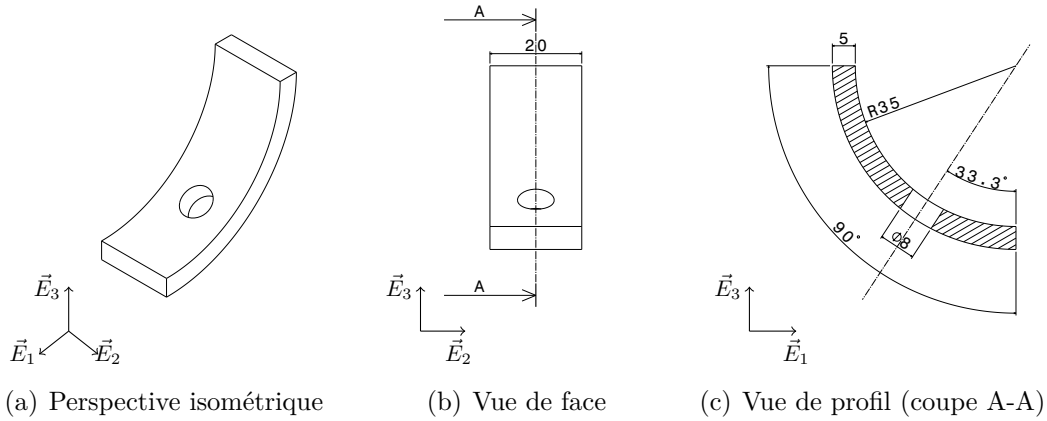
**Préambule** Les travaux récents que nous avons menés en vue d'étendre LCMBE au calcul 3D nous ont permis d'obtenir des premiers résultats que nous présentons dans cette section. Nous traitons un cas de remplissage 3D isotrope par infusion, le moule étudié est courbe et comporte un obstacle interne.

### 3.5.1 Géométrie et paramètres de la simulation

La pièce considérée est un quart de tube de 20 mm de longueur, 40 mm de rayon interne et 5 mm d'épaisseur, présentant un trou circulaire de 8 mm de diamètre. Les dimensions sont indiquées dans la figure 3.28.

Nous considérons un remplissage dans des conditions d'infusion. Le moule est

alimenté par le bord inférieur où la résine est admise à pression atmosphérique. En sortie, la pression de vide imposée est de 1 mbar. La perméabilité du renfort est isotrope, égale à  $10^{-11} \text{ m}^2$ , le taux volumique de fibres est de 50%. La viscosité de la résine liquide est fixée à  $0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{-1}$ . Ces paramètres sont résumés dans le tableau 3.7.



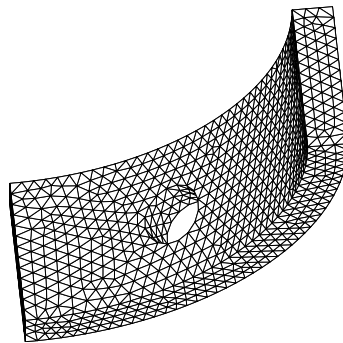
**Figure 3.28.** Dimensions du moule

$\bar{k} \times 10^{11} [\text{m}^2]$	$\mu [\text{Pa}\cdot\text{s}^{-1}]$	$\varepsilon [-]$	$p_e [\text{bar}]$	$p_f [\text{bar}]$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)}$	0,1	0,5	1,03	$1 \cdot 10^{-3}$

**Tableau 3.7.** Paramètres rhéologiques et paramètres procédés

### 3.5.2 Grille de fond

La grille de fond a été réalisée sous IDEAS<sup>®</sup>, par une méthode de maillage libre. Le maillage comporte 2 248 nœuds et 8 424 éléments tétraédriques, cf. figure 3.29. Le maillage est uniforme : la taille des éléments est d'environ 1,5 mm.



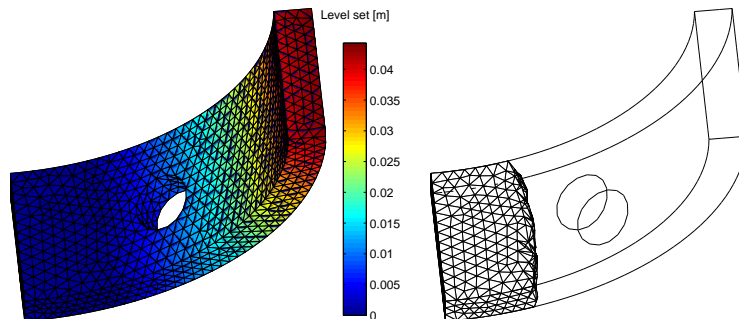
**Figure 3.29.** Grille de fond

### 3.5.3 Résultats et discussion

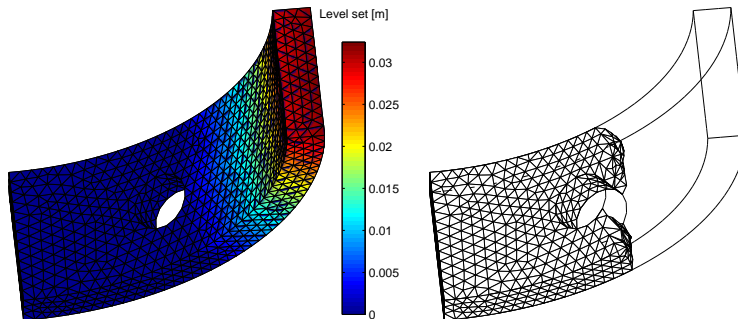
La durée du calcul est estimée à 5 min 30 s CPU (PC 2,26 GHz /1,93 Go RAM). Nous avons représenté sur la figure 3.30 l'évolution de la Level Set et le maillage frontière associé. La fonction Level Set est nulle aux parois du moule en contact avec la résine. Dans la zone sèche, elle prend des valeurs positives correspondant aux distances à la frontière : à  $t=5$  s, environ 43 mm séparent l'extrémité du moule de la frontière ; à  $t=81$  s, il reste encore 16 mm à parcourir.

Malgré le maillage grossier utilisé pour la grille de fond, l'extraction de la frontière conduit à une description précise de la forme du front, à la fois au contact du moule et dans le cœur de la résine. Le contournement de l'obstacle ( $t=25$  s) et la gestion de la soudure en sortie ( $t=37$  s) est bien réalisé. En dehors de la zone centrale où l'écoulement est perturbé par la présence de l'obstacle, la progression de la résine est rectiligne ( $t=5$  s et 81 s), ce qui montre la robustesse de la méthode sur des maillages libres.

Le champ de pression est représenté figure 3.31. A l'entrée, la pression est bien égale à la pression atmosphérique, elle décroît en s'éloignant du bord pour atteindre la pression imposée sur la frontière libre. En dehors de la zone comportant l'obstacle, nous obtenons une variation de pression quasi-linéaire dans la direction de l'écoulement, correspondant à la solution analytique 1D obtenue pour un rayon de courbure infini.

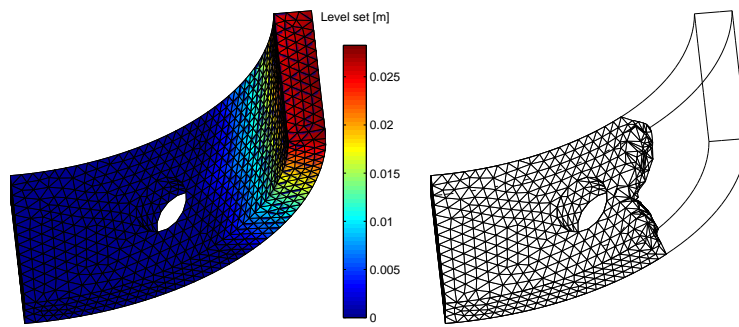


(a) 5 s

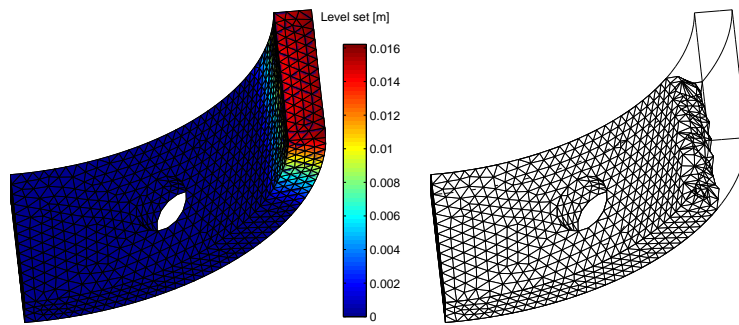


(b) 25 s



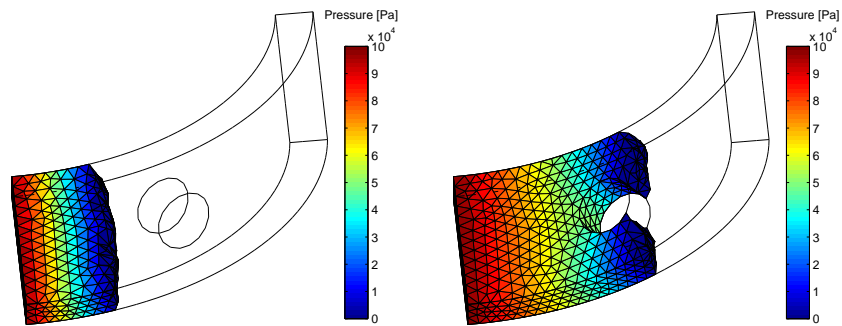


(c) 37 s



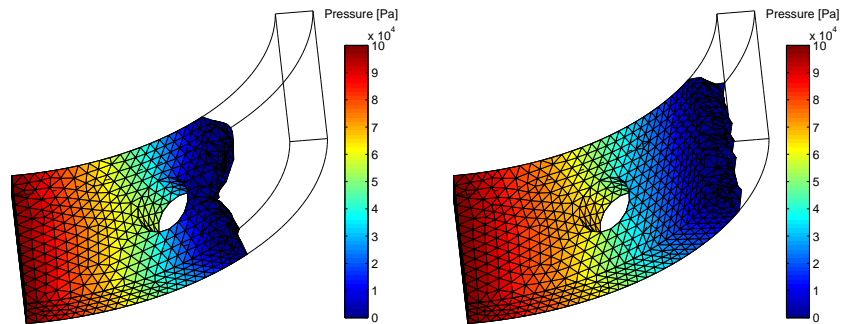
(d) 81 s

**Figure 3.30.** Remplissage 3D : Level Set (à gauche) et maillage frontière (à droite)



(a) 5 s

(b) 25 s



(c) 37 s

(d) 81 s

**Figure 3.31.** Remplissage 3D : pression frontière

## Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre différentes applications permettant d'explorer les possibilités du logiciel LCMBE et d'évaluer la validité des résultats numériques. Les cas abordés présentent des niveaux de complexité divers, provenant de la géométrie du moule, de l'anisotropie du renfort, du mode d'alimentation ou encore de la dimension du problème. Les conditions de remplissage se rapprochent des problématiques industrielles, nous avons notamment étudié la multi-injection et le comportement du programme en présence d'inserts dans le moule.

Par l'utilisation de maillages libres, la méthode est flexible et peut être couplée à des logiciels de maillage traditionnels comme IDEAS<sup>®</sup>. Nous avons confronté les résultats avec des solutions analytiques, des données expérimentales et une autre méthode numérique (VOF). Les résultats obtenus montrent que le programme est capable de prédire des écoulements complexes avec fidélité en conservant des temps de calcul rapides. En particulier, la simulation inclut un calcul précis de la forme de la frontière par l'utilisation d'une approche Level Set.

# Chapitre 4

## Modélisation BEM de l'écoulement à l'échelle des fibres

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>114</b>
<b>4.1 Description du modèle d'écoulement</b> . . . . .	<b>116</b>
4.1.1 Équations de Stokes . . . . .	116
4.1.2 Conditions aux limites . . . . .	117
4.1.3 Formulation forte . . . . .	118
<b>4.2 Résolution BEM des équations de Stokes</b> . . . . .	<b>118</b>
4.2.1 Formulation intégrale frontière . . . . .	119
4.2.2 Discrétisation de la frontière et résolution numérique . . . . .	121
4.2.3 Validation du solveur et étude de sensibilité au maillage . . . . .	123
<b>4.3 Application au calcul de la perméabilité transverse</b> . . . . .	<b>126</b>
4.3.1 Étude d'un arrangement idéal carré . . . . .	127
4.3.2 Génération d'une microstructure réaliste . . . . .	131
4.3.3 Étude d'une coupe micrographique . . . . .	132
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>134</b>

---

L'objet de ce chapitre est l'étude de l'écoulement dans la microstructure fibreuse, qui est régi par les équations de Stokes. Nous avons développé un solveur BEM 2D stationnaire capable de résoudre le problème de Stokes dans un milieu saturé. La méthode est appliquée à la détermination de la perméabilité transverse dans la mèche, d'abord sur un arrangement de fibres périodique, puis sur une distribution plus représentative des renforts réels, prenant en compte la variabilité de la structure.

## Introduction

La précision apportée à la mesure de la perméabilité représente un enjeu industriel important, car il s'agit d'une donnée d'entrée décisive dans les logiciels de simulation numérique. Paradoxalement, la méthode de mesure n'est pas standardisée, car elle fait encore l'objet de débats au sein de la communauté scientifique, et les résultats présentent de fortes variabilités (pouvant typiquement atteindre plusieurs décades suivant les auteurs et la technique utilisée). D'un point de vue pratique, la caractérisation d'un nouveau renfort est un étape à la fois coûteuse et laborieuse, car les résultats sont généralement sujets à de larges dispersions qui demandent la réalisation d'un nombre d'essais important.

Aussi, plusieurs auteurs se sont intéressés au calcul (analytique ou numérique) de la perméabilité, en étudiant l'écoulement à l'échelle de la microstructure fibreuse. Dans la majorité des travaux, l'écoulement est modélisé par les équations de Stokes, où le domaine de calcul est réduit à une Cellule Élémentaire Représentative (CER) du milieu. Le tenseur de perméabilité, considéré comme une fonction du rayon, du taux et de l'arrangement des fibres, est évalué en reliant la perte de charge au débit macroscopique.

Au vu de la littérature, nous avons choisi d'explorer la méthode des éléments frontières, pour son potentiel et son originalité. Nous nous sommes essentiellement appuyés pour cela sur les travaux de Papathanasiou [139]. Le chapitre est divisé en trois sections. La section 4.1 est consacrée à la description du problème de Stokes. La section 4.2 décrit la formulation éléments frontières 2D que nous avons implémentée pour résoudre le problème. Dans la section 4.3 nous présentons les premiers résultats que nous avons obtenus.

**Préambule bibliographique** Le calcul analytique de la perméabilité a été essentiellement conduit pour des arrangements de fibres rectilignes et parallèles. Les modèles existants se divisent schématiquement en deux catégories : les approches capillaires ou cellulaires [140–145]. Nous renvoyons le lecteur à la revue de littérature récente réalisée par Idris [146] pour un état de l'art exhaustif dans le domaine. Les contributions les plus célèbres sont probablement dues à Carman [140] et Gebart [141]. Carman modélise le milieu poreux par un réseau de tubes capillaires de sections variables et de longueur fixe [140]. La résolution simultanée des équations de Stokes dans les tubes conduit à l'équation de Carman-Kozeny [140] :

$$K = \frac{R_f^2 (1 - V_f)^3}{4c V_f^2} \quad (4.1)$$

---

où  $K$  désigne la perméabilité,  $R_f$  le rayon de la fibre,  $V_f$  le taux volumique de fibres et  $c$  une constante (habituellement appelée « constante de Kozeny »), qui est une fonction de l'organisation des fibres et de la direction d'écoulement.

Le modèle développé par Gebart [141] fait appel aux approximations de la lubrification hydrodynamique. Les équations de Stokes sont résolues en considérant un arrangement fibreux périodique, formant des canaux d'épaisseur « lentement variable ». L'expression obtenue pour la perméabilité axiale est donnée comme suit [141] :

$$K_1 = \frac{8R_f^2 (1 - V_f)^3}{4c_1 V_f^2} \quad (4.2)$$

où  $K_1$  désigne la perméabilité axiale, et  $c_1$  une constante dépendant du mode d'arrangement des fibres (57 pour un arrangement carré et 53 pour un arrangement hexagonal). Pour la perméabilité transverse, Gebart [141] propose :

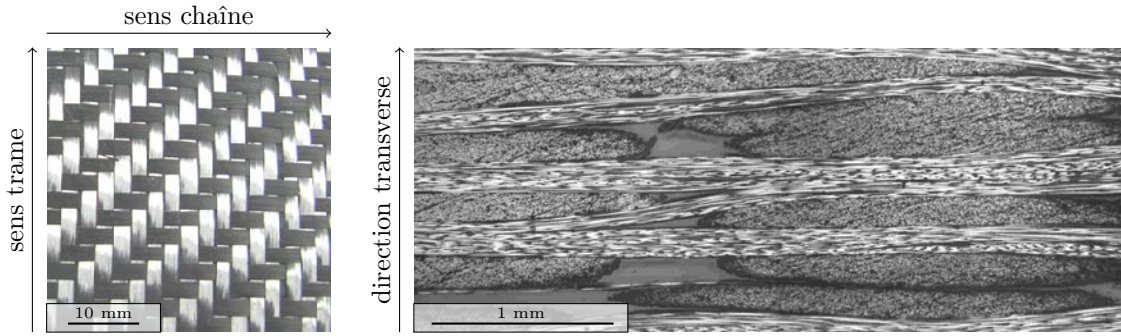
$$K_3 = c_3 R_f^2 \left( \sqrt{\frac{V_a}{V_f}} - 1 \right)^{\frac{5}{2}} \quad (4.3)$$

où  $K_3$  désigne la perméabilité transversale,  $c_3$  une constante dépendant du mode d'arrangement des fibres ( $16/9\pi\sqrt{2}$  pour un arrangement carré et  $16/9\pi\sqrt{6}$  pour un arrangement hexagonal), et  $V_a$  le taux de fibres accessible ( $\pi/4$  pour un arrangement carré et  $\pi/2\sqrt{3}$  pour un arrangement hexagonal).

En pratique, les modèles analytiques existants sont d'un intérêt direct limité, car ils représentent uniquement des géométries idéales peu représentatives de la réalité. En effet, la majorité des renforts présentent une forte complexité géométrique à deux échelles (figure 4.1). Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'utilisation de méthodes numériques [147–150] pour prendre en considération cet aspect dans la prévision de la perméabilité. Parmi les techniques numériques les plus utilisées figure au premier rang la méthode des éléments finis [82, 151–153], qui a prouvé son efficacité dans de nombreux domaines de l'ingénierie. En revanche, très peu d'équipes se sont intéressées à notre connaissance à la méthode des éléments frontières [139, 154, 155], alors qu'elle présente de réels atouts, en particulier :

- en présence du grand nombre de détails géométriques dans la microstructure fibreuse, l'utilisation d'une discrétisation frontière offre des gains considérables en terme de maillage,
- le calcul de perméabilité peut être réalisé en menant un calcul entièrement surfacique, préfigurant une réduction significative des temps de calcul.

Ces différents aspects nous ont poussés à explorer cette méthode dans le cadre de ce chapitre.



(a) Échelle des mèches (vue plane)

(b) Échelle des fibres (coupe transverse) [152]

**Figure 4.1.** Complexité géométrique d'un sergé 2/2 en fibres de carbonnes (Hexcel<sup>®</sup> Hexforce<sup>®</sup> G0986) : échelle des mèches et échelle des fibres (micrographie). Les caractéristiques de ce renfort (étudié dans le chapitre 1) sont données dans tableau 1.15 (b), page 42.

## 4.1 Description du modèle d'écoulement

### 4.1.1 Équations de Stokes

**Hypothèses** Les hypothèses que nous utilisons pour modéliser l'écoulement du fluide à l'échelle microscopique sont les suivantes.

1. *Écoulement laminaire* : Le régime est supposé laminaire (faible nombre de Reynolds) : les effets inertiels sont supposés négligeables devant les effets visqueux. Cette hypothèse est bien valide compte tenu de la dimension caractéristique de l'écoulement qui est typiquement de l'ordre de quelques dizaines de microns (porosités intra-mèches).
2. *Fluide Newtonien incompressible* : La résine est assimilée à un fluide Newtonien incompressible. Notamment, la viscosité est supposée constante, même si les mécanismes de polymérisation peuvent conduire à une augmentation de la viscosité dans la phase d'écoulement. Cette hypothèse permet de se placer dans le cas le plus favorable pour identifier la perméabilité dans la loi de Darcy.
3. *Milieu saturé et immobile* : La microstructure fibreuse est supposée entièrement saturée en fluide, immobile et indéformable. Les fibres sont modélisées par des solides rigides, étanches et fixes, qui agissent sur l'écoulement comme des obstacles de petites dimensions, même s'il est clair que le réseau fibreux est le siège de déformations.

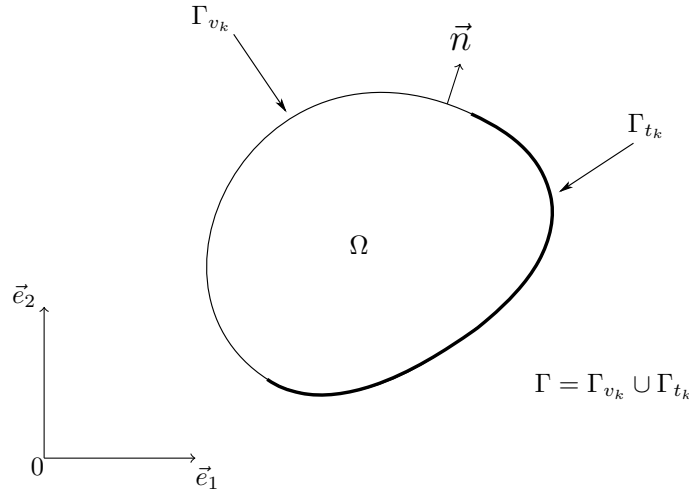
**Équations du mouvement** Le mouvement d'un fluide incompressible Newtonien est régi par l'équation de Navier-Stokes :

$$\forall M \in \Omega, \quad \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} \quad (4.4)$$

où  $\Omega$  désigne le fluide (figure 4.2),  $t$  le temps,  $\vec{v}$  la vitesse,  $p$  la pression,  $\rho$  la masse volumique,  $\vec{f}$  une force volumique (typiquement la gravité) et  $\mu$  la viscosité dynamique. En régime permanent et à faible nombre de Reynolds, l'équation de Navier-Stokes est réduite à l'équation de Stokes (4.5a). Assortie de l'équation d'incompressibilité (4.5b), nous obtenons les équations de Stokes :

$$\forall M \in \Omega, \begin{cases} \mu \Delta \vec{v} = \vec{\nabla} p & (4.5a) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 & (4.5b) \end{cases}$$

Les équations de Stokes sont présentes dans de nombreuses applications impliquant des écoulements aux petites échelles (dispositifs microfluidiques, milieux poreux, etc.). Elles sont employées par la majorité des auteurs pour modéliser l'écoulement dans la microstructure fibreuse du renfort.



**Figure 4.2.** Domaine de calcul  $\Omega$  et partition de la frontière  $\Gamma = \Gamma_{v_k} \cup \Gamma_{t_k}$

### 4.1.2 Conditions aux limites

Deux types de conditions aux limites peuvent être assignées sur la frontière du domaine : une condition de type Dirichlet ou une condition de type Neumann. La condition de Dirichlet, dite « essentielle », porte sur la vitesse :

$$\forall M \in \Gamma_{v_k}, v_k = \bar{v}_k \quad (4.6)$$

où  $\bar{v}_k$  désigne la vitesse imposée et  $\Gamma_{v_k}$  la portion de la frontière à vitesse imposée. La condition de Neumann, encore appelée condition « naturelle », porte sur le vecteur contrainte (traction) :

$$\forall M \in \Gamma_{T_k}, T_k = \bar{T}_k \quad (4.7)$$

avec  $\bar{T}_k$  la valeur de la traction imposée et  $\Gamma_{T_k}$  la portion de la frontière à traction imposée. La traction à la frontière est donnée par  $\vec{T} = \bar{\sigma} \cdot \vec{n}$ , où  $\vec{n}$  désigne la normale sortante à la frontière et  $\bar{\sigma}$  le tenseur des contraintes Newtoniennes (figure 4.2).

En première approximation nous supposons un contact collant du fluide aux parois des fibres. Cette approximation constitue une hypothèse classique dans les travaux de la littérature [82, 141, 155].

### 4.1.3 Formulation forte

On montre que la formulation forte du problème de Stokes peut s'écrire plus généralement sous la forme suivante (annexe F) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall M \in \Omega, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = \vec{0} \\ \forall M \in \Omega, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \forall M \in \Omega, \quad \vec{\sigma} = -p\vec{I} + 2\mu\vec{\varepsilon} \\ \forall M \in \Omega, \quad \vec{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{v} + {}^t\vec{\nabla}\vec{v}) \\ \forall M \in \Gamma_{t_k}, \quad T_k = \vec{T}_k \\ \forall M \in \Gamma_{v_k}, \quad v_k = \bar{v}_k \end{array} \right. \begin{array}{l} (4.8a) \\ (4.8b) \\ (4.8c) \\ (4.8d) \\ (4.8e) \\ (4.8f) \end{array}$$

où  $\vec{\varepsilon}$  désigne le tenseur des vitesses de déformation du fluide et  $\vec{I}$  le tenseur identité.

Le problème de Stokes est un problème linéaire couplé en vitesse/pression. Sa résolution est identique à celle d'un problème d'élastostatique, en raison de l'équivalence formelle entre la loi de comportement linéaire élastique et la loi de comportement Newtonienne (annexe F). Pour traiter le problème de Stokes suivant le formalisme de l'élastostatique, il suffit en pratique de procéder comme suit :

1. substituer le module de cisaillement du solide à la viscosité dynamique du fluide,
2. faire tendre le coefficient de Poisson vers  $\frac{1}{2}$  pour satisfaire l'incompressibilité.

Cette approche est bien connue dans la littérature, et a été exploitée par plusieurs auteurs pour résoudre les deux types de problème en utilisant le même programme de calcul [100, 156].

## 4.2 Résolution BEM des équations de Stokes

Pour résoudre les équations de Stokes, nous avons travaillé avec la formulation élastostatique, en utilisant le principe d'équivalence mentionné plus haut. L'utilisation des équations intégrales frontières dans les problèmes d'élastostatique est abordée dans des travaux relativement anciens [157–159]. La méthode a ensuite été popularisée par Brebbia qui a contribué au développement de nouvelles techniques numériques. Nous renvoyons le lecteur aux références [100–102] pour une description détaillée de la méthode, ainsi qu'aux travaux de Busuladzic [160], ou Chen et Papathanasiou [155] pour des exemples d'applications récents.

Le développement du solveur que nous présentons dans cette section a été réalisé en collaboration avec O. Pascal, dans le cadre d'un stage Master 2 [161].



### 4.2.1 Formulation intégrale frontière

**Équation intégrale** La première forme faible est obtenue en multipliant (4.8a) par un champ de vitesse virtuel  $v_k^*$ , et en intégrant sur le domaine de calcul :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_j} \right) v_k^* d\Omega = 0 \quad (4.9)$$

Une intégration par parties, suivie de l'application du théorème de la divergence, conduit au principe des puissances virtuelles, bien connu dans la méthode des éléments finis :

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj} \dot{\varepsilon}_{kj}^* d\Omega = \int_{\Gamma} T_k v_k^* d\Gamma \quad (4.10)$$

L'application du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti permet d'associer l'état virtuel au tenseur des contraintes, c'est-à-dire :

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj} \dot{\varepsilon}_{kj}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{kj}^* \dot{\varepsilon}_{kj} d\Omega \quad (4.11)$$

La substitution de (4.11) dans (4.10) conduit à l'équation intégrale suivante :

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj}^* \dot{\varepsilon}_{kj} d\Omega = \int_{\Gamma} T_k v_k^* d\Gamma \quad (4.12)$$

Dans la méthode des éléments frontières, nous procédons à une nouvelle intégration par parties pour transformer l'intégrale de domaine dans l'équation (4.12). L'application du théorème de la divergence permet d'aboutir à l'équation intégrale suivante :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{kj}^*}{\partial x_j} v_k d\Omega = \int_{\Gamma} T_k^* v_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_k v_k^* d\Gamma \quad (4.13)$$

**Solution fondamentale** La dernière intégrale volumique de la relation (4.13) est éliminée en utilisant la solution fondamentale  $\sigma_{ij}^*$ , qui vérifie :

$$\forall S, \forall M \in \Omega, \frac{\partial \sigma_{lj}^*}{\partial x_j}(M, S) + \delta_M(S) e_l = 0 \quad (4.14)$$

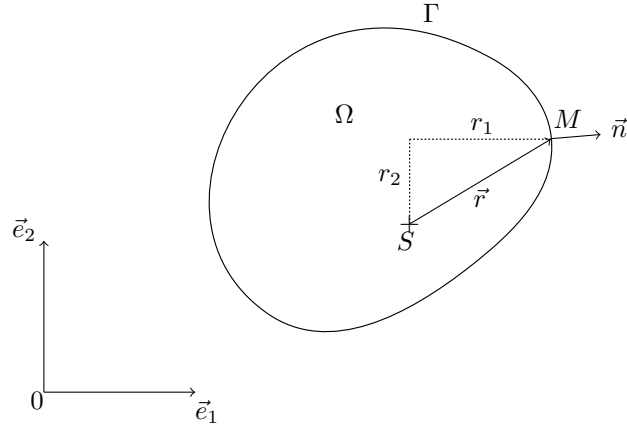
où  $\delta_M(S) e_l$  est la distribution de Dirac appliquée au point source  $S$  dans la direction  $e_l$  (figure 4.3). Les propriétés de la distribution de Dirac permettent de remplacer l'intégrale de domaine par la valeur au point source, pondérée par le « terme libre »  $c_{lk}$  :

$$\forall S, \forall M \in \Omega, \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{kj}^*}{\partial x_j}(M, S) v_k(M) d\Omega = -c_{lk}(S) v_k(S) \quad (4.15)$$

où  $c_{lk}$  est une matrice dont les coefficients dépendent, comme pour le problème potentiel anisotrope, de l'angle solide sous lequel est vu  $\Omega$  depuis le point  $S$ . On montre notamment :

$$c_{lk}(S) = \begin{cases} \delta_{lk} & \text{pour un point interne à } \Omega \\ \frac{1}{2} \delta_{lk} & \text{pour un point sur la frontière } \Gamma \text{ régulière en } S \end{cases} \quad (4.16a)$$

$$(4.16b)$$



**Figure 4.3.** Définition du point source et principales notations utilisées dans la méthode BEM

Nous utilisons pour  $\sigma_{ij}^*$  la solution fondamentale de Kelvin, qui a été établie pour le cas d'un problème d'élastostatique. Cette solution reste valable pour un fluide newtonien incompressible en utilisant un coefficient de Poisson « fictif » qui tend vers  $\frac{1}{2}$ . Pour un problème 2D, la « matrice test » des vitesses, associée à  $\sigma_{ij}^*$ , est donnée comme suit :

$$v_{lk}^*(M,S) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu)\delta_{lk} \ln \frac{1}{r} + \frac{r_l r_k}{r^2} \right] \quad (4.17)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson du matériau,  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide,  $r_k$  projection de  $\vec{r} = \overrightarrow{SM}$  suivant  $e_k$ , et  $r = \|\vec{r}\|$  la distance entre les points  $S$  et  $M$  (figure 4.3).

L'application de la loi de comportement fournit alors la « matrice test » des contraintes, qui s'écrit en 2D :

$$T_{lk}^*(M,S) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{1-2\nu}{r} (n_l r_k - n_k r_l) + \left[ 2\frac{r_l r_k}{r^2} + (1-2\nu)\delta_{lk} \right] \frac{r_j n_j}{r} \right] \quad (4.18)$$

où  $n_k$  est la projection de la normale sortante à la frontière suivant  $e_k$ .

**Équation intégrale frontière** L'utilisation de la distribution de Dirac dans l'équation (4.13) conduit à l'identité de Somigliana :

$$[c(S)] \vec{v}(S) + \int_{\Gamma} [T^*(M,S)] \vec{v}(M) d\Gamma(M) = \int_{\Gamma} [v^*(M,S)] \vec{T}(M) d\Gamma(M) \quad (4.19)$$

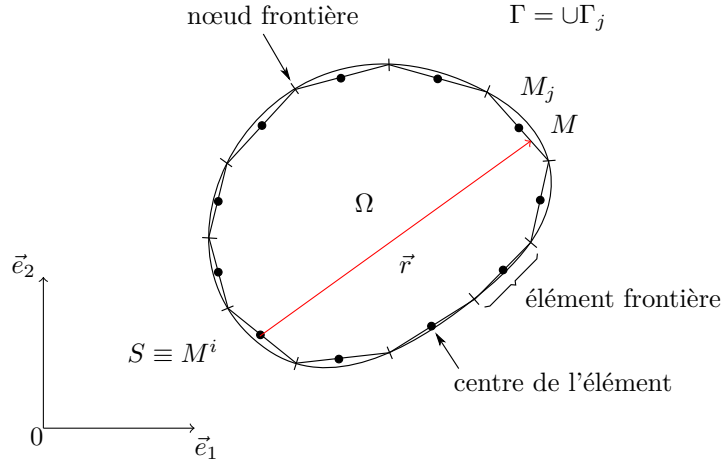
Cette relation vectorielle fournit l'expression exacte de la vitesse en tout point du domaine, à condition de connaître à la fois  $\vec{v}$  et  $\vec{T}$  à la frontière. La première étape consiste donc à déterminer l'ensemble des inconnues à la frontière (section 4.2.2.1). Dans un second temps, la relation peut être appliquée à l'intérieur du domaine pour déterminer la vitesse et la contrainte en tout point interne (section 4.2.2.2).

### 4.2.2 Discrétisation de la frontière et résolution numérique

La procédure de discrétisation de la frontière est identique à celle décrite dans le chapitre 2 pour la résolution du problème potentiel anisotrope 2D. Nous en rappelons ici les deux principales étapes pour des éléments constants que nous avons choisis :

1. la frontière du domaine est discrétisée en un nombre fini d'éléments, matérialisés par des segments, délimités par deux nœuds dits « géométriques » (figure 4.4),
2. au sein de l'élément, nous supposons que les champs de vitesse et de traction sont constants, et égaux à la valeur au centre de l'élément, appelé « point de calcul ».

Nous rappelons qu'il existe dans la littérature plusieurs types d'éléments qui permettent d'enrichir le degré d'interpolation (éléments linéaires, quadratiques, etc.), nous renvoyons le lecteur aux références [100, 102] pour plus détails à ce sujet.



**Figure 4.4.** Discrétisation de la frontière et notations utilisées dans la méthode BEM, cas 2D (d'après [102])

#### 4.2.2.1 Calcul des inconnues à la frontière

Les inconnues à la frontières sont calculées par assemblage et résolution d'un système algébrique comportant  $2N$  équations issues de l'identité de Somigliana. Ce système linéaire est obtenu en plaçant successivement le point source au centre de chaque élément frontière. En particulier, pour un domaine de calcul 2D discrétisé par des éléments frontières constants, les deux équations obtenues au point de calcul  $i$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v_1(M^i) \\ v_2(M^i) \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} T_{11}^*(M, M^i) & T_{12}^*(M, M^i) \\ T_{21}^*(M, M^i) & T_{22}^*(M, M^i) \end{bmatrix} d\Gamma_j(M) \right) \begin{bmatrix} v_1(M^j) \\ v_2(M^j) \end{bmatrix} \\ = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} v_{11}^*(M, M^i) & v_{12}^*(M, M^i) \\ v_{21}^*(M, M^i) & v_{22}^*(M, M^i) \end{bmatrix} d\Gamma_j(M) \right) \begin{bmatrix} T_1(M^j) \\ T_2(M^j) \end{bmatrix} \quad (4.20) \end{aligned}$$

où  $i$ , variant de 1 à  $N$ , désigne l'indice de l'élément frontière,  $M^i$  le point de calcul et  $M$  le point courant sur l'élément d'intégration (figure 4.4).

**Système algébrique** Le système algébrique à assembler peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} [H_{1,1}] & [H_{1,2}] & \dots & [H_{1,N}] \\ [H_{2,1}] & [H_{2,2}] & \dots & [H_{2,N}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [H_{N,1}] & [H_{N,2}] & \dots & [H_{N,N}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V_1] \\ [V_2] \\ \vdots \\ [V_N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{1,1}] & [G_{1,2}] & \dots & [G_{1,N}] \\ [G_{2,1}] & [G_{2,2}] & \dots & [G_{2,N}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [G_{N,1}] & [G_{N,2}] & \dots & [G_{N,N}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T_1] \\ [T_2] \\ \vdots \\ [T_N] \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

où  $[V_i]$  (respectivement  $[T_i]$ ) est une sous-matrice  $2 \times 1$ , dans laquelle les composantes du vecteur vitesse (respectivement traction) au nœud  $i$  sont stockées, et  $[H_{ij}]$ ,  $[G_{ij}]$  des sous-matrices  $2 \times 2$  définies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} [H_{ij}]_{lk} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{lk} + \int_{\Gamma_j} T_{lk}^*(M, M^i) d\Gamma_j(M) \end{array} \right. \quad (4.22a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [G_{ij}]_{lk} = \int_{\Gamma_j} v_{lk}^*(M, M^i) d\Gamma_j(M) \end{array} \right. \quad (4.22b)$$

**Intégration** L'évaluation des coefficients extra-diagonaux est réalisée numériquement en utilisant une quadrature de Gauss classique (algorithme D.2). Pour les termes diagonaux, qui font intervenir des intégrales singulières, nous utilisons les solutions analytiques fournies par Brebbia et Dominguez [100] :

$$\left\{ \begin{array}{l} [H_{ii}]_{lk} = \frac{1}{2} \delta_{lk} \end{array} \right. \quad (4.23a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [G_{ii}]_{lk} = \frac{L_i}{4\pi\mu} \left[ \left(1 - \frac{L_i}{2}\right) \delta_{lk} + \frac{r_l r_k}{L_i^2} \right] \end{array} \right. \quad (4.23b)$$

où  $L_i$  est la longueur de l'élément  $i$ .

**Réorganisation en un système linéaire standard** Le système algébrique (4.21) est ensuite réorganisé en un système linéaire standard du type  $AX = B$ , la procédure est détaillée dans l'algorithme D.4. Cette étape consiste à regrouper les inconnues du problème dans le vecteur  $X$  pour obtenir le système suivant :

$$AX = B \quad (4.24)$$

où  $A$  est une matrice  $4N^2$ , pleine et non symétrique, issue de la réorganisation de  $H$ .  $X$  est un vecteur contenant les inconnues du problème et  $B$  une matrice obtenue en multipliant la matrice issue de la réorganisation de  $G$  par le vecteur des conditions aux limites  $C$ .

**Résolution du système linéaire** En raison de la forme de la matrice à inverser, la résolution numérique du système linéaire (4.24) est réalisée en appliquant une méthode directe. Dans l'implémentation actuelle, nous utilisons la bibliothèque LAPACK [123] de MATLAB®.

### 4.2.2.2 Calcul aux points internes

Le calcul de la vitesse et de la contrainte aux points internes peut être réalisé en post-traitement, une fois que les champs de traction et vitesse à la frontière sont connus. L'évaluation des intégrales « presque singulières » (cf. figure 2.5, page 62) est réalisée en augmentant le nombre de points dans la quadrature de Gauss.

**Vitesse interne** La vitesse interne au point  $S$  est évaluée en utilisant la forme discrétisée (4.20) de l'identité de Somigliana :

$$v_k(S) = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} u_{kl}^*(M, S) d\Gamma(M) \right) T_l(M^j) - \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} T_{kl}^*(M, S) d\Gamma(M) \right) u_l(M^j) \quad (4.25)$$

La procédure implémentée est détaillée dans l'algorithme D.8.

**Contrainte interne** Le tenseur des contraintes au point interne  $S$  est obtenu en utilisant la loi de comportement du matériau :

$$\sigma_{lk}(S) = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} D_{1lk}^* & D_{2lk}^* \end{bmatrix} d\Gamma_j(M) \right) \begin{bmatrix} T_1(M^j) \\ T_2(M^j) \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} S_{1lk}^* & S_{2lk}^* \end{bmatrix} d\Gamma_j(M) \right) \begin{bmatrix} v_1(M^j) \\ v_2(M^j) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

où  $D_{ilk}^*$  et  $S_{ilk}^*$ , définis dans l'annexe C, correspondent respectivement au tenseur des déformations et des contraintes dus à l'application d'une charge unitaire au point  $S$  dans la direction  $\vec{e}_i$ . La procédure de calcul est détaillée dans l'algorithme D.9.

### 4.2.3 Validation du solveur et étude de sensibilité au maillage

Le solveur BEM que nous avons développé a été confronté à une solution analytique sur un cas test 2D (écoulement radial). Nous avons réalisé une étude de sensibilité des résultats numériques à la taille des éléments frontières. La comparaison entre les solutions numériques et analytiques a été faite à la fois à la frontière du domaine et en un point interne.

**Écoulement radial 2D** Nous considérons un écoulement radial 2D de Stokes, à pression imposée, dans une couronne de rayon interne  $a$  et de rayon externe  $b$  (figure 4.5). Les pressions imposées sur les parois interne et externe sont respectivement notées  $p_a$  et  $p_b$ , où nous imposons  $p_a > p_b$  pour garantir un écoulement sortant. Les valeurs numériques utilisées pour réaliser le calcul sont fournies dans le tableau 4.1 : il s'agit de paramètres rhéologiques réalistes pour des procédés de moulage par voie liquide.

$a$ [m]	$b$ [m]	$p_a$ [Pa]	$p_b$ [Pa]	$\mu$ [Pa.s]
$6.10^{-3}$	$1.10^{-2}$	$2.10^5$	$1.10^5$	$1.10^{-1}$

**Tableau 4.1.** Paramètres utilisés pour la simulation de l'écoulement radial de Stokes en 2D

Les champs de vitesses et de contraintes dans le fluide sont des champs axisymétriques, les solutions analytiques sont développées dans l'annexe B.

**Champ de vitesse** La composante radiale du champ de vitesse s'exprime comme suit :

$$v_r(r) = \frac{p_a - p_b}{2\mu} \frac{a^2 b^2}{r(b^2 - a^2)} \quad (4.27)$$

**Tenseur de contrainte** Dans le repère polaire, la contrainte radiale est donnée comme suit :

$$\sigma_{rr}(r) = -p_a - (p_a - p_b) \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) \quad (4.28)$$

et la contrainte circonférentielle s'écrit :

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = -p_a + (p_a - p_b) \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2} \right) \quad (4.29)$$

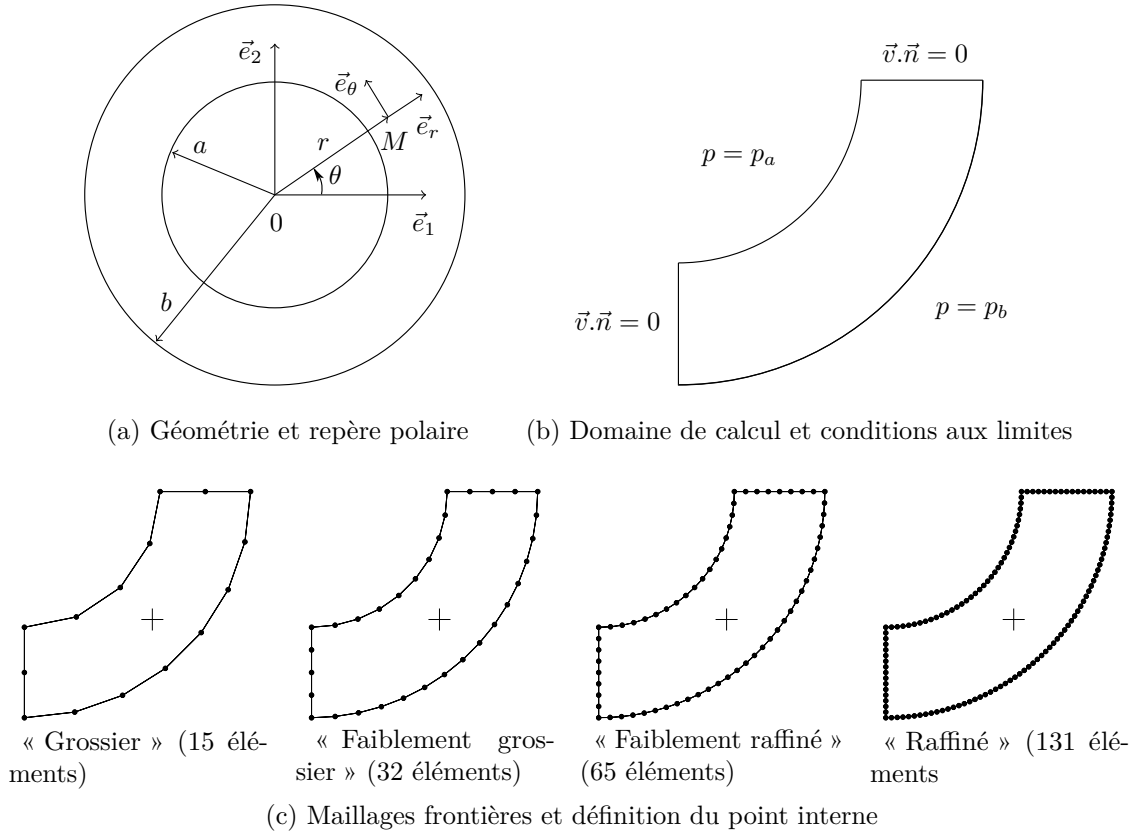
Pour des considérations de symétries, nous avons réalisé le calcul sur un quart du domaine. Les conditions aux limites sont représentées sur la figure 4.5 (b) : les plans de symétrie sont modélisés par une vitesse normale nulle. Nous avons travaillé avec les discrétisations utilisées dans le chapitre 2, cf. figure 4.5 (c). Les quatre maillages comportent respectivement 15, 32, 65 et 131 éléments frontières.

**Résultats** Pour chaque maillage, nous avons calculé l'écart entre les solutions analytiques et numériques pour évaluer l'erreur commise sur la vitesse et la contrainte, d'abord à la frontière (erreur moyenne sur la frontière) puis au point interne (erreur locale). Les résultats sont donnés dans les graphes (a) et (b) de la figure 4.6.

Nous avons obtenu un excellent accord général avec la solution analytique, et une amélioration significative de la précision avec le raffinement du maillage. Même si l'ordre d'interpolation (constant) est le même pour les deux champs, le niveau de précision atteint pour la vitesse est supérieur à celui obtenu pour les contraintes. Cette tendance s'explique par les variations spatiales rapides des contraintes en  $O(\frac{1}{r^2})$ . La vitesse connaît des variations moins brutales en  $O(\frac{1}{r})$ , mieux approchées par les éléments constants.

Pour le calcul sur la frontière, les erreurs relatives que nous avons obtenues sont les suivantes :

- 0,7 % d'erreur en vitesse et 10,5 % d'erreur en contrainte sur le maillage le plus grossier,



**Figure 4.5.** Écoulement 2D de Stokes : géométrie, conditions aux limites, et maillages frontières

- 0,02 % d’erreur en vitesse et 0,6 % d’erreur en contrainte sur le maillage le plus fin,

Au point interne, la précision atteinte est encore meilleure, et ceci pour l’ensemble des maillages, à savoir :

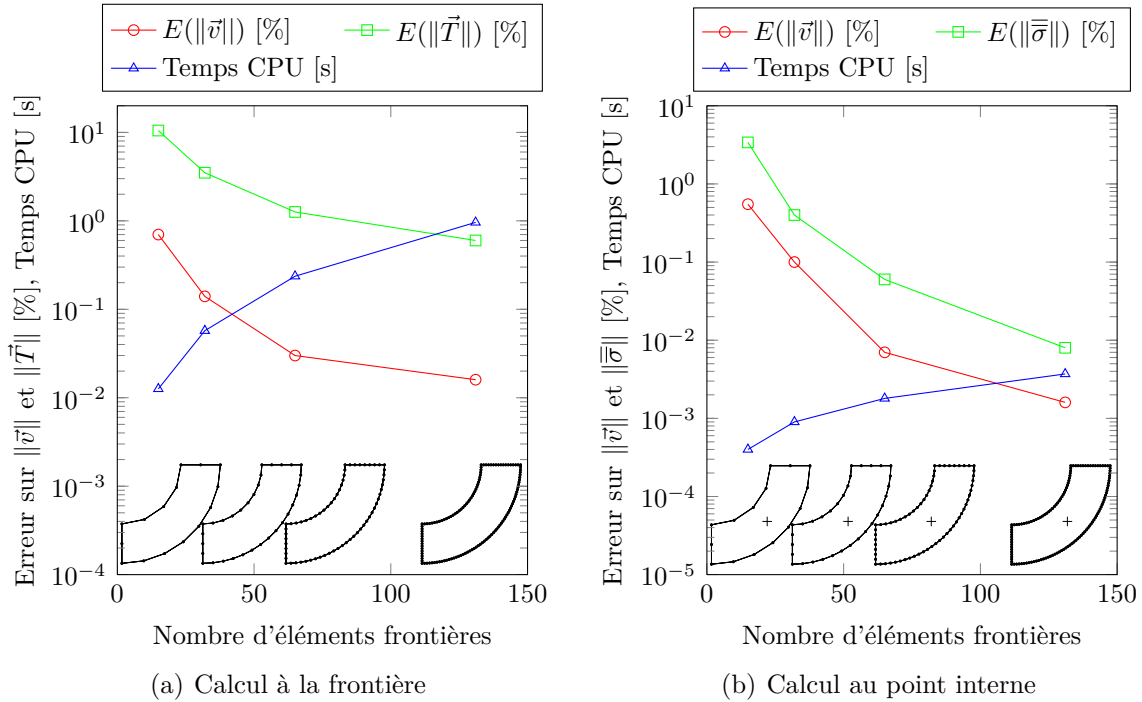
- 0,55 % d’erreur en vitesse et 3,4 % d’erreur en contrainte en utilisant le maillage le plus grossier,
- 0,002 % d’erreur en vitesse et 0,008 % d’erreur en contrainte en utilisant le maillage le plus fin.

Dans notre implémentation actuelle, la phase d’assemblage est l’étape la plus coûteuse (environ 90 % du temps de calcul, contre 10 % pour l’inversion du système), en raison de sa complexité en  $O(4N^2)$ , où  $N$  désigne le nombre d’éléments frontières dans la discrétisation. Nous avons représenté figure 4.6 (b) l’évolution du temps de calcul en fonction de la densité du maillage. À titre d’exemple, le calcul complet sur le maillage le plus fin (131 éléments) est réalisé en 0,9 s CPU (PC 2,26 GHz / 1,93 Go RAM), dont :

- 0,82 s allouées à l’assemblage,
- 0,08 s allouées à l’inversion du système linéaire,
- 4 ms allouées au calcul au point interne.

Le temps de calcul dédié au calcul au point interne est dérisoire, en raison de la faible

complexité de l'algorithme en  $O(2N)$  par inconnue scalaire.



**Figure 4.6.** Étude paramétrique BEM sur la taille de maille (Stokes 2D)

### 4.3 Application au calcul de la perméabilité transverse

La littérature montre que les techniques expérimentales actuelles sont relativement limitées en ce qui concerne la mesure de la perméabilité transverse (chapitre 1). Dans ce contexte, les techniques numériques représentent des solutions très attractives pour accéder à ce paramètre.

Nous nous sommes intéressés dans cette section au calcul de la perméabilité transverse dans le domaine intra-mèche. Dans un premier temps, nous avons validé notre approche en étudiant le cas idéal d'un arrangement carré (section 4.3.1). Dans un second temps nous nous sommes intéressés à la prise en compte de la variabilité microstructurale. Pour cela nous avons développé un outil numérique dédié à la génération d'une microstructure réaliste (section 4.3.2). Enfin nous avons réalisé une étude exploratoire en nous appuyant sur l'observation d'une coupe micrographique (section 4.3.3).

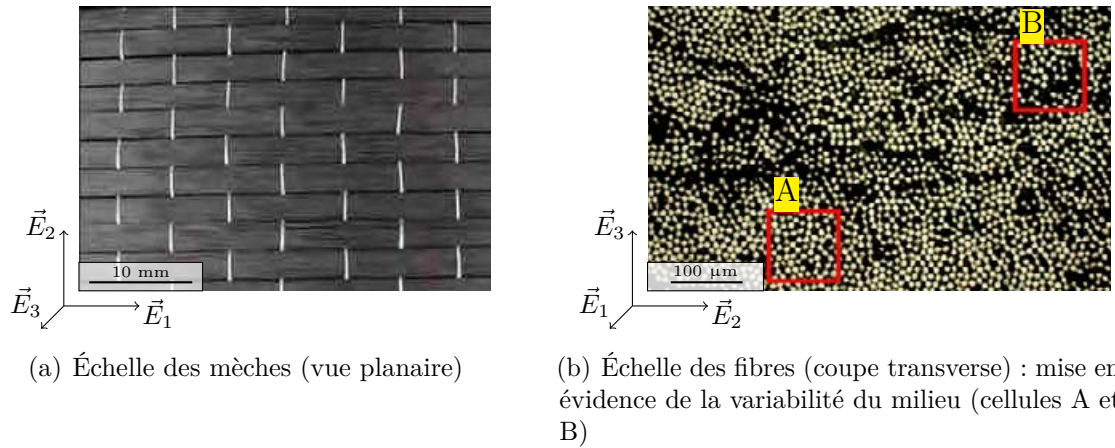
Nous considérons un réseau de fibres rectilignes et parallèles, orientées suivant la direction  $\vec{E}_1$ . Cette configuration est typiquement représentative des renforts unidirectionnels (UD), qui consistent en une simple juxtaposition des mèches dans le pli (figure 4.7). Dans le repère principal  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ , le tenseur de perméabilité est donné



comme suit :

$$\bar{\bar{k}} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix}_{(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)} \quad (4.30)$$

où  $K_1$  désigne la perméabilité axiale (non étudiée ici) et  $(K_2, K_3)$  les deux perméabilités transverses que nous cherchons à identifier.



**Figure 4.7.** Architecture d'un renfort unidirectionnel (UD) en fibres de carbonnes : échelle des mèches et échelle des fibres (micrographie)

### 4.3.1 Étude d'un arrangement idéal carré

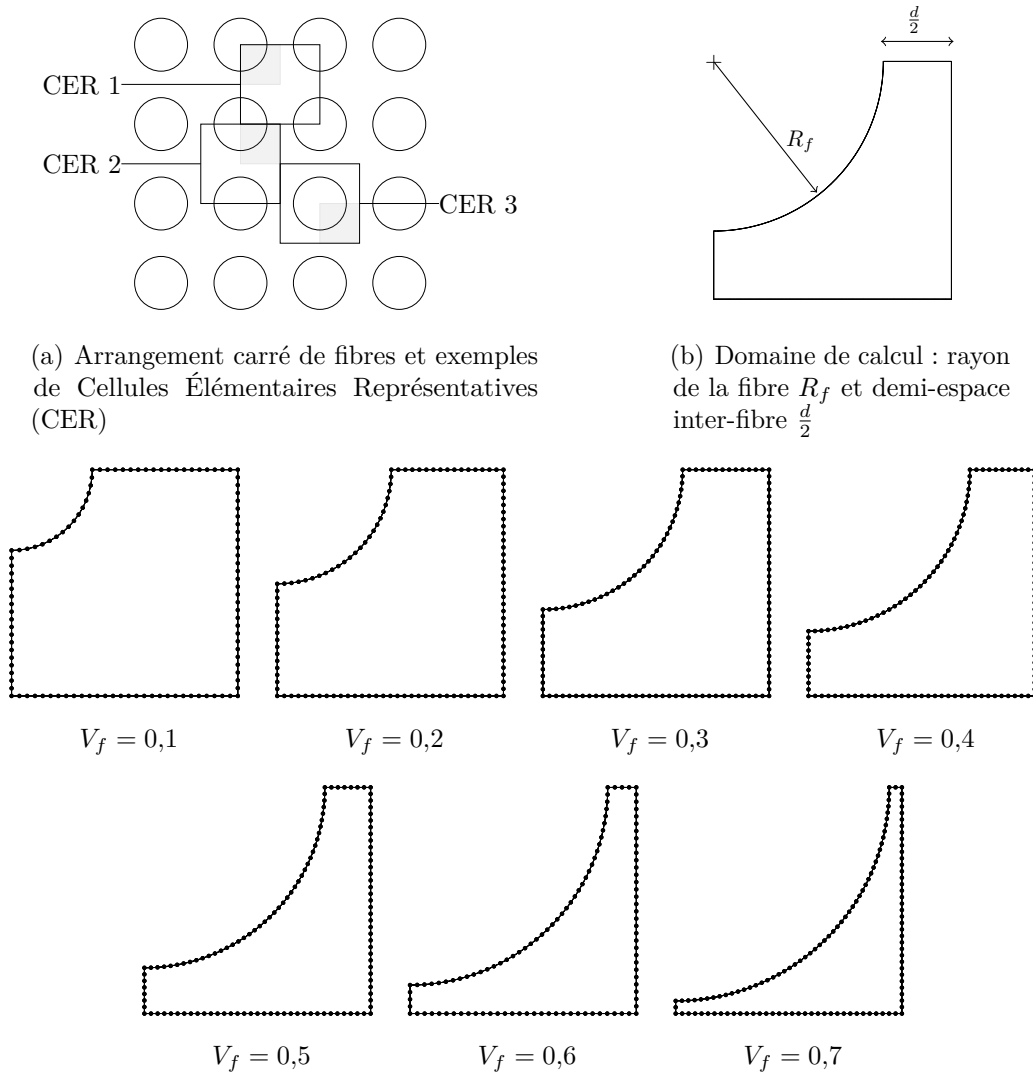
L'écoulement transverse dans un arrangement carré de fibres rectilignes a été étudié par Gebart, cf. figure 4.8 (a). L'expression de la perméabilité transverse (isotrope) est donnée comme suit [141] :

$$K_3 = \frac{16}{9\pi\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{\pi}{4} V_f} - 1 \right)^{\frac{5}{2}} R_f^2 \quad (4.31)$$

Pour valider notre approche nous avons procédé à une étude paramétrique faisant varier la fraction volumique de fibres de 0,1 à 0,7 par pas de 0,1. Le rayon de la fibre est maintenu constant, égal à  $3,5 \mu\text{m}$ , ce qui correspond à une valeur moyenne pour la fibre de carbone. L'augmentation de la fraction volumique est obtenue en diminuant l'espace inter-fibres.

En raison de la périodicité de la structure, plusieurs CER peuvent être considérées pour traiter le problème : nous avons mis en évidence dans la figure 4.8 (a) trois cellules qui se prêtent à la réalisation du calcul. Pour des raisons de symétries, nous avons travaillé sur le motif minimal commun à ces trois CER. Ce motif, qui intègre un quart de fibre, consiste en une cellule carrée de dimension  $R_f + \frac{d}{2}$ , où  $d$  représente un espace inter-fibre, cf. figure 4.8 (b). Les géométries que nous avons utilisées sont représentées

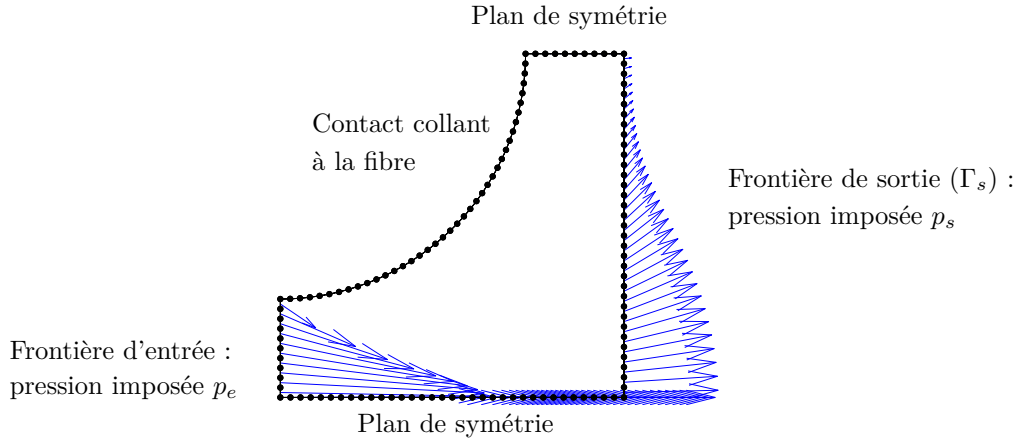
figure 4.8 (c). La densité du maillage utilisée dans les discrétisations frontières sont de type « faiblement raffiné » (cf. figure 4.5), et comportent typiquement entre 150 et 250 éléments frontières. Nous nous sommes appuyés sur les résultats de l'étude paramétrique que nous avons menée dans la section 4.2.3 pour faire ce choix.



(c) Maillages frontières utilisés dans l'étude paramétrique faisant varier le taux de fibres  $V_f$

**Figure 4.8.** Arrangement carré de fibres en coupe transversale, définition du motif minimal utilisé dans le calcul et maillages frontières utilisés

Les conditions aux limites appliquées sur le domaine de calcul sont représentées sur la figure 4.9. Nous utilisons deux plans de symétries agissant comme des parois glissantes pour traiter la condition de périodicité à l'échelle du domaine de calcul. L'application d'une pression à l'entrée et à la sortie du domaine permet d'imposer un gradient de pression macroscopique uniforme dans la structure. Au contact des fibres, nous imposons une vitesse nulle pour prendre en compte l'adhérence et la non-pénétration du fluide aux parois.



**Figure 4.9.** Conditions aux limites appliquées sur le domaine de calcul et profil typique du champ de vitesse à la frontière par notre approche BEM (cas  $V_f = 0,4$ )

Les paramètres numériques utilisés pour réaliser le calcul sont fournis dans le tableau 4.2. Il s'agit de données classiques rencontrées dans les procédés de moulage des composites par voie liquide.

$p_e$ [bar]	$p_s$ [bar]	$\mu$ [Pa.s]
2	1	0,1

**Tableau 4.2.** Pressions et viscosité utilisées dans les calculs de perméabilité ( $p_e$  et  $p_s$  désignent les pressions imposées à l'entrée et à la sortie du domaine, cf. figure 4.9)

**Calcul numérique de la perméabilité** La perméabilité transverse est identifiée dans la loi de Darcy en calculant le débit sortant de la cellule :

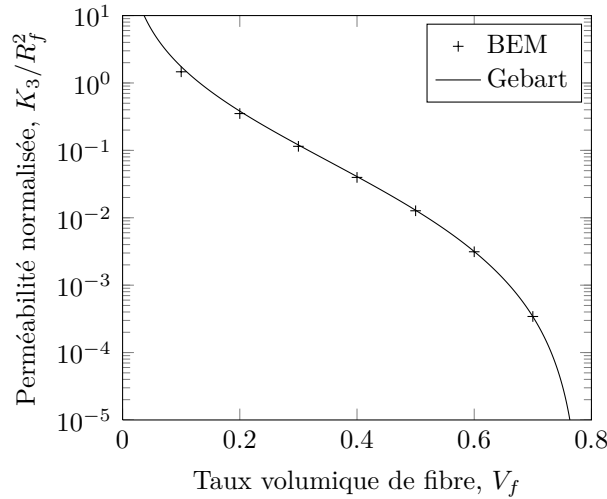
$$K_3 = \frac{\mu(1 - V_f)}{p_e - p_s} \int_{\Gamma_s} \vec{v} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (4.32)$$

où  $\Gamma_s$  est la frontière de la cellule en sortie d'écoulement (figure 4.9). Cette expression, qui fait intervenir une intégrale frontière de la vitesse, montre que le calcul peut être conduit en utilisant une approche entièrement surfacique. Comme le montre la figure 4.9, la méthode BEM permet d'accéder directement à la vitesse frontière sans passer par une résolution volumique (section 4.2). Il est clair que notre approche est une alternative puissante aux méthodes par éléments finis qui demandent des outils de maillages bien plus avancés [153].

**Résultats et discussion** L'étude paramétrique complète comportant 7 cas de calcul a été réalisée en moins de 2 min CPU sur un PC 2,26 GHz / 1,93 Go RAM, ce qui représente des temps de calcul très compétitifs. Nous avons représenté figure 4.9 le profil typique du champ de vitesse à la frontière : le fluide qui progresse essentiellement suivant la direction du gradient de pression, est clairement dévié et freiné par la présence de la fibre.

Les résultats du calcul de perméabilité sont reportés dans la figure 4.10. Le graphique de la figure 4.10 (a) montre que la perméabilité est bien une fonction décroissante du taux de fibres. La valeur maximale ( $1,79 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ ) est atteinte pour le taux de fibres le plus faible (0,1), et la valeur minimale ( $4,20 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2$ ) est atteinte pour le taux de fibres le plus élevé (0,7), cf. tableau 4.10 (b).

La confrontation avec le modèle de Gebart révèle un excellent accord pour les taux de fibres supérieurs à 0,4 avec des écarts inférieurs à 3%, atteignant 0,3% pour un arrangement approchant le taux de compacité maximum. Des écarts plus importants ont été obtenus pour des taux de fibres plus faibles (écart de 16% pour un taux de fibres de 0,1). Nous attribuons ce résultat aux approximations de lubrification hydrodynamique employées par Gebart, qui sont justifiées si l'espace inter-fibre est négligeable devant le rayon de la fibre ( $\frac{R_f}{d} \ll 1$ ), autrement dit pour des taux de fibres élevés.



(a) Variation de la perméabilité transverse en fonction du taux volumique de fibres

$V_f$	$K_3$ [ $\text{m}^2$ ]		Écart [%] $\frac{\ K_3^{Gebart} - K_3^{BEM}\ }{K_3^{Gebart}}$
	Gebart	BEM	
0,1	$2,14 \cdot 10^{-11}$	$1,79 \cdot 10^{-11}$	16,5
0,2	$4,68 \cdot 10^{-12}$	$4,31 \cdot 10^{-12}$	7,8
0,3	$1,47 \cdot 10^{-12}$	$1,41 \cdot 10^{-12}$	4,4
0,4	$4,50 \cdot 10^{-13}$	$4,86 \cdot 10^{-13}$	2,8
0,5	$1,58 \cdot 10^{-13}$	$1,56 \cdot 10^{-13}$	1,8
0,6	$3,87 \cdot 10^{-14}$	$3,83 \cdot 10^{-14}$	0,8
0,7	$4,19 \cdot 10^{-15}$	$4,20 \cdot 10^{-15}$	0,3

(b) Confrontation des résultats numériques (BEM) au modèle de Gebart [141]

**Figure 4.10.** Variation de la perméabilité transverse en fonction du taux volumique de fibres pour un arrangement carré : confrontation des résultats numériques (BEM) au modèle de Gebart

### 4.3.2 Génération d'une microstructure réaliste

La première difficulté à laquelle nous avons été confrontés a été la génération d'une microstructure représentative de la réalité. Comme le montre la micrographie de la figure 4.7 (b), le domaine intra-mèche est marqué par une importante variabilité structurale en raison de la distribution aléatoire des fibres dans l'espace. Nous avons pris en considération cet aspect en utilisant une méthode de type Monte-Carlo dans le processus de génération.

L'idée directrice, bien décrite dans la référence [155], consiste à perturber l'organisation d'un réseau fibreux initialisé suivant un arrangement carré, cf. figure 4.11 (a). La procédure se décline en deux étapes :

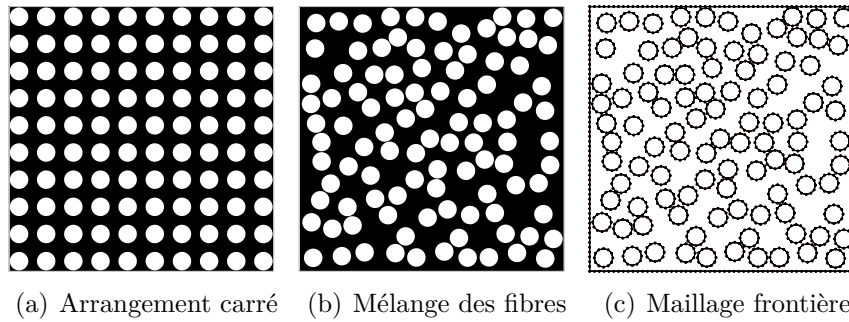
1. Initialisation : Nous partons d'une cellule carrée vide, dans laquelle nous intégrons des fibres jusqu'à l'obtention d'un taux de fibres imposé. Pour faciliter le remplissage nous organisons les fibres suivant un arrangement carré, lequel permet d'atteindre une compacité proche de 78% ( $\frac{\pi}{4}$ ).
2. Perturbation : Chaque fibre est déplacée, séquentiellement et de manière aléatoire, jusqu'à l'obtention d'une microstructure « désordonnée ». Nous supposons que cet état est atteint lorsque toutes les fibres ont été déplacées au moins une fois.

Dans l'étape de perturbation, la fibre est effectivement déplacée si sa nouvelle position satisfait les conditions suivantes :

- non-chevauchement des fibres,
- conservation du taux de fibres (restriction du déplacement d'une fibre à l'intérieur de la cellule).

Ces deux conditions définissent un critère d'admissibilité du vecteur déplacement. Un test géométrique est réalisé à chaque tirage aléatoire pour vérifier si le critère est respecté, nous procédons le cas échéant au déplacement de la fibre dans la cellule.

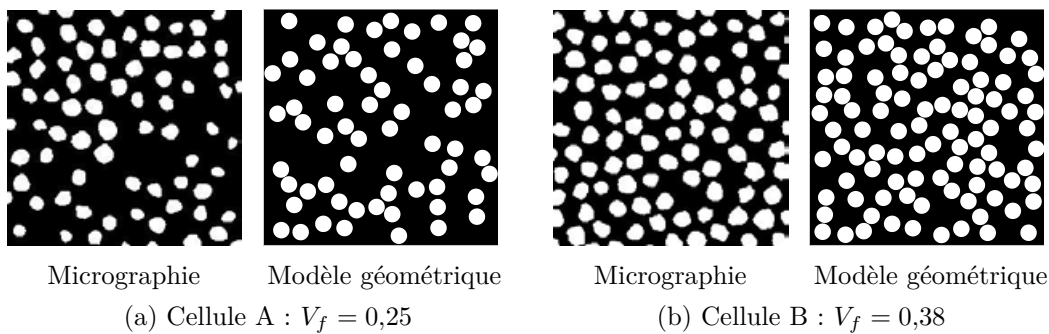
Une fois le processus de génération terminé, la frontière est discrétisée de manière automatique par une routine de maillage que nous avons développée. La méthode, directe et valable quelle que soit la complexité de la microstructure obtenue, repose sur l'assemblage de formes élémentaires (cercles et carré) qui peuvent facilement être maillées par des considérations géométriques, cf. figure 4.11 (c). Le programme (développé sous MATLAB<sup>®</sup>), permet d'obtenir rapidement un modèle géométrique représentatif d'une microstructure réelle. Typiquement, l'élaboration d'un modèle complet (génération-maillage) intégrant 1 000 fibres demande un temps de calcul inférieur à 5 s avec des moyens de calcul relativement restreints (PC 2,26 GHz / 1,93 Go RAM).



**Figure 4.11.** Illustration des différentes étapes conduisant à l'obtention d'un modèle géométrique de la microstructure

### 4.3.3 Étude d'une coupe micrographique

Nous avons utilisé les cellules A et B dans la micrographie de la figure 4.7 (b) pour réaliser un calcul de perméabilité représentatif d'une microstructure réelle. Cette micrographie, obtenue par microscopie optique, représente une coupe transverse d'un renfort UD carbone mis en œuvre par infusion. La dimension des cellules est de  $100\ \mu\text{m}$ . Ces cellules ont été analysées par un logiciel de traitement d'images afin d'en extraire les taux de fibres : nous avons identifié un taux de fibres de 0,25 pour la cellule A et de 0,38 pour la cellule B. À partir de ces données, nous avons généré deux modèles géométriques<sup>1</sup> que nous avons utilisés pour réaliser les calculs (figure 4.12).



**Figure 4.12.** Génération d'un modèle géométrique à partir d'une coupe micrographique (image segmentée)

Pour chaque cellule, nous avons caractérisé la perméabilité dans les deux directions transverses en imposant successivement suivant chaque axe un gradient de pression unidirectionnel. Les paramètres utilisés dans les simulations sont les mêmes que précédemment (tableau 4.2).

Nous avons discrétisé les deux microstructures en utilisant des maillages frontières comportant respectivement 988 éléments (cellule A) et 1 420 éléments (cellule B), cf.

1. Les sections des fibres ont été supposées circulaires, bien que des profils elliptiques puissent être présents sur la micrographie.

figures 4.13 et 4.14. Nous obtenons dans cette configuration des temps de calcul de l'ordre de la minute.

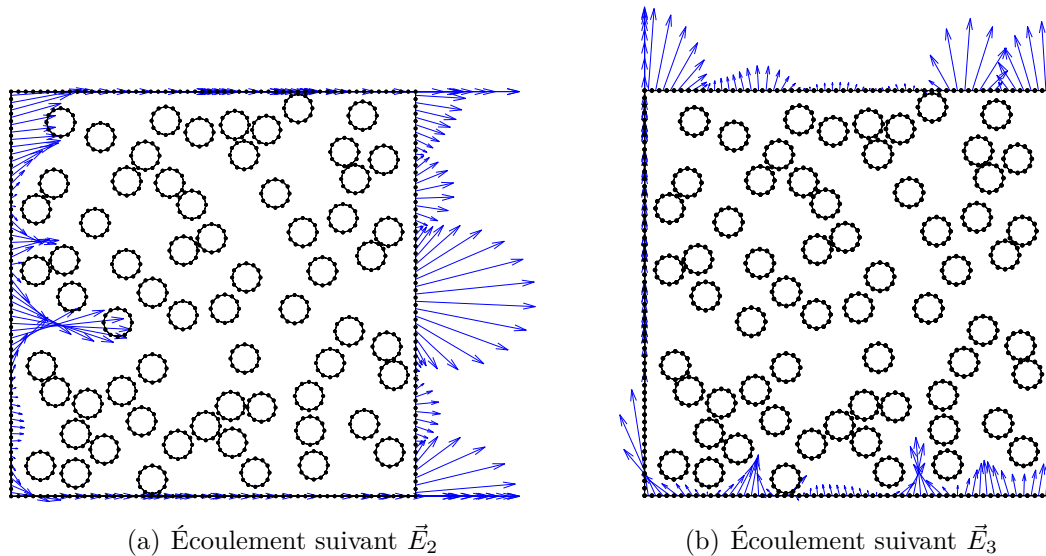
**Résultats et discussion** Les champs des vitesses à la frontière (cf. figures 4.13 et 4.14) présentent des profils cohérents :

- le fluide contourne clairement les fibres et s'écoule préférentiellement dans les zones les plus poreuses (chemins préférentiels),
- l'amplitude des vitesses diminue en se rapprochant des fibres et s'annule au contact des parois solides, ce qui montre une bonne gestion du contact.

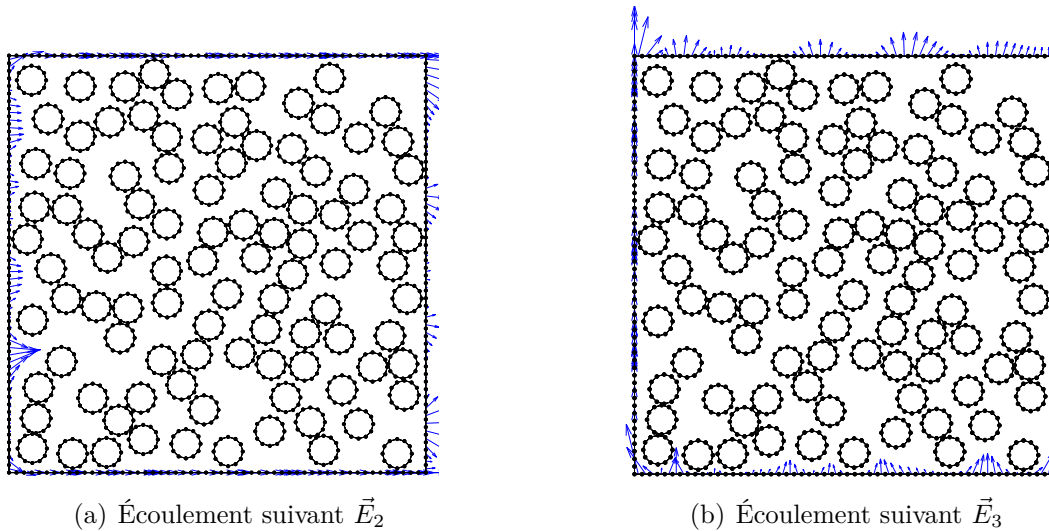
Le calcul des perméabilités révèle d'une part que les deux cellules sont légèrement anisotropes, et d'autre part que la cellule la plus poreuse est effectivement la plus perméable :

- pour la cellule A ( $V_f = 0,25$ ), la perméabilité a été évaluée à  $1,83.10^{-12}$  m<sup>2</sup> dans la direction  $\vec{E}_2$  et  $1,90.10^{-12}$  m<sup>2</sup> suivant la direction  $\vec{E}_3$ ,
- pour la cellule B ( $V_f = 0,38$ ), nous avons obtenu  $3,30.10^{-13}$  m<sup>2</sup> dans la direction  $\vec{E}_2$  et  $2,69.10^{-13}$  m<sup>2</sup> dans la direction  $\vec{E}_3$ .

Ces résultats confirment bien que la connaissance seule du taux de fibres ne permet pas de déterminer la perméabilité qui est fonction de l'organisation du milieu.



**Figure 4.13.** Cellule A : champ de vitesse à la frontière (écoulement à pression imposée)



**Figure 4.14.** Cellule B : champ de vitesse à la frontière (écoulement à pression imposée)

## Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à l'écoulement de la résine à l'échelle de la microstructure fibreuse en utilisant les équations de Stokes. Cette approche est particulièrement intéressante pour établir des modèles de prévision de perméabilité en s'appuyant sur des considérations géométriques.

Un solveur BEM 2D stationnaire dédié à la résolution du problème de Stokes a été développé et validé sur un cas test dans le cadre de ce travail. Dans notre implémentation, ce même solveur peut être utilisé pour résoudre un problème d'élasticité linéaire, ce qui permettrait d'intégrer la déformation des fibres dans le calcul de la perméabilité.

Les cas d'application que nous avons traités ont été consacrés à l'identification de la perméabilité transverse, qui représente un paramètre difficilement accessible par la voie expérimentale. Les calculs que nous avons menés sur un arrangement carré révèlent un excellent accord avec le modèle analytique de Gebart. Par ailleurs, nous avons développé une approche permettant de prendre en compte la variabilité de la microstructure. Les résultats montrent que pour un taux de fibres donné, la perméabilité est effectivement soumise à des fluctuations suivant le mode d'arrangement des fibres.



# Conclusion générale et perspectives

Les procédés de moulage des composites par voie liquide représentent des solutions très attractives sur le plan industriel, à la fois en termes de réduction des coûts (polymérisation hors autoclave) et de possibilités de réalisation (pièces complexes et de grande dimension). La particularité de ces procédés, qui se déclinent en plusieurs variantes (RTM, VARTM, LRI, etc.), est la présence d'une étape de remplissage du renfort par la résine liquide. Cette étape est décisive dans le procédé, car elle conditionne en grande partie les propriétés mécaniques et les temps de cycle. Mais elle est en même temps particulièrement délicate à maîtriser, en raison de la complexité des mécanismes mis en jeu. C'est pourquoi la modélisation de l'écoulement est au centre des problématiques industrielles.

Pour répondre à ce besoin nous avons mené deux études complémentaires dans le cadre de la thèse :

- une étude expérimentale, dans laquelle nous avons développé un moyen d'essai permettant de mesurer la perméabilité des renforts,
- une étude numérique, dans laquelle nous avons développé un modèle destiné à la simulation des écoulements macroscopiques et microscopiques.

Les conclusions de nos travaux et les perspectives sont résumées ci-dessous.

**Mesure de perméabilité** La mesure de perméabilité est un sujet très controversé dans la communauté scientifique, et les résultats publiés révèlent de fortes disparités suivant les auteurs. Une étude bibliographique nous a permis d'identifier les différentes méthodes disponibles dans la littérature. Ces méthodes reposent pour la plupart sur la mise en œuvre d'un écoulement 1D, 2D ou 3D dans le renfort.

Le dispositif que nous avons développé permet de réaliser des mesures 2D et 3D sur progression de front dans un moule transparent. La mesure est réalisée sous vide, en utilisant un fluide modèle (huile de colza) de viscosité calibrée. L'écoulement dans le plan est suivi par une caméra CCD. Pour la direction transverse, nous utilisons une balance électronique synchronisée avec la caméra. Un logiciel dédié à l'exploitation des données a également été développé pour fiabiliser la procédure de traitement. Il intègre en outre des outils d'analyse d'images et un modèle optique permettant d'anticiper la réfraction de la lumière dans le moule.

Le moyen d'essai a été testé sur le renfort aéronautique G0986. En configuration 2D, le dispositif s'est révélé robuste et répétable sur les essais que nous avons réalisés. En particulier, nous n'avons pas détecté d'écoulement préférentiel, et la forme du front d'écoulement s'est bien avérée elliptique. Nos mesures sont en bon accord avec les

résultats du benchmark publié par Arbter *et al.* [40]. Il conviendrait néanmoins d'utiliser un spécimen « modèle » pour procéder à une validation qualitative, car les résultats du benchmark, fortement dispersés, ne permettent pas de disposer d'une perméabilité de référence.

Concernant la mesure 3D, même si nous n'avons pas eu le temps de mener une campagne d'essais complète, nous avons obtenu des premiers résultats encourageants qui mériteraient de plus amples investigations. Le relevé de la position du front dans la direction transverse semble indiquer que la formation du demi-ellipsoïde n'est pas immédiate, ce qui peut facilement s'expliquer par la forme du point d'injection dans le dispositif, qui s'écarte inévitablement d'une hémisphère théorique. Il s'agit d'une limitation intrinsèque de la mesure 3D. Enfin, la procédure de traitement des résultats que nous avons utilisée n'est vraisemblablement pas la plus adaptée, car le modèle analytique (SIE) se révèle trop grossier en présence d'une forte anisotropie transverse. Le recours à une technique numérique devrait permettre d'affiner les résultats par identification inverse.

**Modélisation macroscopique** Nous avons développé un modèle numérique permettant de simuler le remplissage macroscopique du renfort, en 2D et en 3D. Dans notre approche, l'écoulement (de type Darcy) a été supposé isotherme, et le renfort a été assimilé à un milieu indéformable. L'originalité de notre approche réside dans le couplage des méthodes Level Set et BEM. Cette approche permet de traiter le problème en menant un calcul entièrement surfacique : seule l'interface mobile est maillée. En particulier, la pression interne n'intervient pas explicitement dans le calcul de remplissage comme c'est le cas dans les méthodes de type éléments finis. Grâce à la méthode Level Set que nous avons implémentée, notre application permet de traiter les écoulements à topologies complexes qui sont fréquemment rencontrés dans le remplissage de moules industriels (multi-injection, présence d'un noyau, etc.). Elle permet par ailleurs d'obtenir une description de la forme de la frontière plus précise que dans les méthodes VOF standards. Nous avons eu recours à des algorithmes de type Marching Cubes pour la génération du maillage frontière : les grilles de fond que nous utilisons sont des maillages libres (triangles ou tétraèdres) qui peuvent facilement être générés par des maillages traditionnels, comme le logiciel IDEAS<sup>®</sup>. La méthode développée a été confrontée à des cas tests ainsi qu'à des cas plus représentatifs de géométries industrielles. Les résultats indiquent que, malgré une gestion du contact relativement grossière (approche géométrique), le programme est capable de prédire des écoulements relativement complexes avec fidélité tout en conservant des temps de calcul compétitifs.

Les pistes d'amélioration concernant cette partie de l'étude sont nombreuses. Il est certains que la prise en compte de l'aspect multi-physique du procédé permettrait d'enrichir la simulation. En particulier, la déformation du renfort pourrait être intégrée au calcul d'écoulement, ce qui permettrait de prédire les variations d'épaisseur dans les procédés de moulage par infusion. D'autre part la prise en compte de l'hétérogénéité du renfort pourrait être envisagée, car la méthode BEM dispose d'outils performants (approches « multi-domaines ») permettant de traiter les écoulements en milieux stratifiés.

Cette approche permettrait d'intégrer un produit drainant dans la simulation du remplissage par des procédés de type infusion. Enfin, le modèle 3D doit être consolidé, car il n'a pas été réellement possible dans le temps imparti de procéder à une validation complète du programme.

**Modélisation microscopique** Nous avons également réalisé une étude numérique à l'échelle de la microstructure fibreuse en utilisant les équations de Stokes. Cette échelle est particulièrement intéressante pour établir des modèles de prévision de perméabilité. Le modèle BEM que nous avons développé permet de traiter les écoulements stationnaires sur des géométries 2D. Les principaux avantages de notre approche découlent directement de l'utilisation d'une formulation intégrale frontière, à savoir la grande flexibilité du maillage frontière, et d'autre part la possibilité de s'affranchir d'un véritable calcul volumique.

Nous nous sommes intéressés à la perméabilité transverse, qui représente un paramètre difficilement accessible par la voie expérimentale. Les calculs que nous avons menés sur un arrangement idéal carré révèlent un excellent accord au modèle de Gebart. Par ailleurs, nous avons développé une approche permettant de prendre en compte des microstructures plus réalistes, intégrant des distributions de fibres aléatoires. Une étude que nous avons menée sur une coupe micrographique montre les potentialités de notre méthode sur des arrangements fibreux complexes. Les résultats que nous avons obtenus montrent que la variabilité structurale du renfort introduit des fluctuations de la perméabilité. En particulier, nos simulations mettent bien en évidence que le taux de fibres seul ne permet pas de prédire la perméabilité, qui est fonction de l'organisation des fibres - ce qui est un résultat classique de la littérature.

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées pour faire suite à ces travaux. La première serait la prise en compte de la déformation du renfort dans la prévision de la perméabilité. L'équivalence élastostatique que nous avons exploitée nous permettrait d'intégrer cet aspect sans difficulté en utilisant une décomposition en sous-domaines (couplages fluide/solide). D'autre part, la prise en compte de la mouillabilité permettrait de mettre en évidence l'influence du couple renfort/fluide sur la perméabilité. Nous pourrions intégrer, comme nous l'avons fait à l'échelle macroscopique, une technique Level Set pour traiter l'avancée du front dans la microstructure. Enfin, nous pensons que l'extension de notre approche en 3D permettrait de traiter des micro/méso structures complexes à moindre coût.



# Table des figures

1	Fuselage du TBM 850 (Daher-Socata) . . . . .	7
2	Structure du projet FUSCOMP et position des travaux de thèse dans l'organigramme . . . . .	8
3	Exemples de réalisations aéronautiques modernes en matériaux composites . . . . .	10
4	Principaux types de tissage et autres types de liaison . . . . .	12
5	Principe du procédé RTM [39] . . . . .	14
6	Principe du procédé LRI . . . . .	16
7	Différentes échelles d'étude . . . . .	18
1.1	Passage d'un repère quelconque au repère principal . . . . .	24
1.2	Principe de la mesure 1D en régime saturé . . . . .	25
1.3	Principe de la mesure 1D sur progression de front . . . . .	26
1.4	Principe de la mesure 2D sur progression de front . . . . .	27
1.5	Exemples d'instrumentation de moules destinés à la mesure 2D . . . . .	28
1.6	Principe de la mesure 3D . . . . .	29
1.7	Vue d'ensemble du moyen d'essai . . . . .	31
1.8	Schéma du moule . . . . .	33
1.9	Profil du cycle d'acquisition et boîtier trigger . . . . .	34
1.10	Viscosité de l'huile de colza utilisée suivant la température . . . . .	35
1.11	Logiciel développé pour exploiter les résultats (PERMCOMP) . . . . .	36
1.12	Réfraction de la lumière dans le moule : modèle optique et validation expérimentale . . . . .	37
1.13	Détermination du taux d'anisotropie et de la perméabilité isotrope équivalente dans la mesure 2D . . . . .	39
1.14	Encadrement du seuil dans le repère isotrope équivalent . . . . .	39
1.15	Caractéristiques du renfort étudié (Hexcel® HexForce® G0986 D1200) . . . . .	42
1.16	Progression de la tache d'huile dans le renfort et ellipses (mesure 2D) . . . . .	43
1.17	Détermination des perméabilités principales (mesure 2D) . . . . .	43
1.18	Progression de la tache d'huile dans le renfort et ellipses (mesure 3D) . . . . .	46
1.19	Détermination des perméabilités principales (mesure 3D) . . . . .	47
2.1	Domaine de calcul $\Omega$ et partition de la frontière $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$ . . . . .	55
2.2	Exemple d'affectation des conditions aux limites (cas d'une multi-injection à pression imposée) . . . . .	56
2.3	Angle interne $\Theta$ au point source $S$ . . . . .	59

---

2.4	Discrétisation de la frontière et notations utilisées dans la méthode BEM, cas 2D . . . . .	60
2.5	Illustration des intégrales régulière, « presque singulière » et singulière, en fonction de la distance $r$ entre le point source $S$ et le point courant $M$ sur l'élément d'intégration $\Gamma_j$ . . . . .	62
2.6	Écoulement 2D de Darcy : géométrie, conditions aux limites, et maillages frontières . . . . .	65
2.7	Étude paramétrique BEM sur la taille de maille (Darcy 2D) . . . . .	66
2.8	Écoulement 3D de Darcy : géométrie, conditions aux limites, et maillages frontières . . . . .	67
2.9	Étude paramétrique BEM sur la taille de maille (Darcy 3D) . . . . .	68
2.10	Organisation du calcul de remplissage . . . . .	70
2.11	Configuration du domaine de calcul à l'instant $t$ et $t+dt$ . . . . .	72
2.12	Marching Cubes : configurations de référence . . . . .	74
2.13	Marching Triangles : configurations de référence . . . . .	75
2.14	Marching Tetrahedra : configurations de référence . . . . .	76
2.15	Illustration du procédé de régularisation dans les Marching Triangles . . . . .	77
2.16	Marching Triangles : cercle immergé dans un carré . . . . .	78
2.17	Comportement des Marching Triangles en fonction de la densité de la grille de fond . . . . .	79
2.18	Marching Tetrahedra : sphère immergée dans un cube . . . . .	80
2.19	Comportement des Marching Tetrahedra en fonction de la densité de la grille de fond . . . . .	81
3.1	Injection centrale : positionnement du point d'injection et des événements, grille de fond et Level Set moule . . . . .	85
3.2	Injection centrale anisotrope : pression interne . . . . .	86
3.3	Discrétisation du domaine à partir du maillage frontière pour le calcul aux points internes ( $t=20$ s) . . . . .	87
3.4	Progression du front en injection centrale anisotrope : solutions analytiques et résultats numériques . . . . .	87
3.5	Injection frontale : position de l'événement, grille de fond et Level Set moule . . . . .	88
3.6	Injection frontale à débit imposé : pression interne . . . . .	89
3.7	Injection frontale à débit imposé : progression du front et pression à l'entrée, comparaison des résultats numériques aux solutions analytiques . . . . .	90
3.8	Infusion périphérique : position du point de tirage de vide, grille de fond et Level Set moule . . . . .	91
3.9	Infusion périphérique : comparaison entre LCMBE et PAM-RTM® . . . . .	92
3.10	Comparaison des fonctions de capture utilisées dans les méthodes Level Set (distance signée) et Volume Of Fluid (fraction volumique), à $t=159$ s . . . . .	93
3.11	Dimensions du moule et positions des seuils . . . . .	94
3.12	Grille de fond et Level Set associée au moule . . . . .	95
3.13	Traitement d'image réalisé pour extraire les pixels frontières (APHELION®) et superposition de la grille de fond ( $t=8$ s) . . . . .	96

3.14	Estimation de l'écart entre le front expérimental et le front numérique par différence sur les Level Sets ( $t=8$ s) . . . . .	96
3.15	Écoulement dans le tricot : clichés expérimentaux, résultats LCMBE (pression interne), et différence entre le contour expérimental et le contour numérique . . . . .	97
3.16	Dimensions du moule . . . . .	98
3.17	Positionnement des points d'injection . . . . .	99
3.18	Grilles de fond et Level Set moule . . . . .	100
3.19	Scénario de remplissage par deux points d'injection . . . . .	101
3.20	Scénario de remplissage par deux points d'injection . . . . .	102
3.21	Scénario de remplissage par deux points d'injection . . . . .	102
3.22	Dimensions du moule . . . . .	103
3.23	Position des points d'injection et des points de tirage du vide, grille de fond et Level Set moule . . . . .	104
3.24	Infusion par deux seuils circulaires (maillage frontière) . . . . .	105
3.25	Calcul de la pression interne . . . . .	106
3.26	Position des canaux d'alimentation et des points de tirage du vide, grille de fond et Level Set moule . . . . .	107
3.27	Calcul de la pression interne . . . . .	108
3.28	Dimensions du moule . . . . .	109
3.29	Grille de fond . . . . .	109
3.30	Remplissage 3D : Level Set (à gauche) et maillage frontière (à droite) .	111
3.31	Remplissage 3D : pression frontière . . . . .	111
4.1	Complexité géométrique d'un sergé 2/2 en fibres de carbones . . . . .	116
4.2	Domaine de calcul $\Omega$ et partition de la frontière $\Gamma = \Gamma_{v_k} \cup \Gamma_{t_k}$ . . . . .	117
4.3	Définition du point source et principales notations utilisées dans la méthodes BEM . . . . .	120
4.4	Discrétisation de la frontière et notations utilisées dans la méthode BEM, cas 2D (d'après [102]) . . . . .	121
4.5	Écoulement 2D de Stokes : géométrie, conditions aux limites, et maillages frontières . . . . .	125
4.6	Étude paramétrique BEM sur la taille de maille (Stokes 2D) . . . . .	126
4.7	Architecture d'un renfort UD en fibres de carbone : échelle des mèches et échelle des fibres . . . . .	127
4.8	Arrangement carré de fibres en coupe transverse, définition du motif minimal utilisé dans le calcul et maillages frontières utilisés . . . . .	128
4.9	Conditions aux limites appliquées sur le domaine de calcul et profil typique du champ de vitesse à la frontière par notre approche BEM (cas $V_f = 0, 4$ ) . . . . .	129
4.10	Variation de la perméabilité transverse en fonction du taux volumique de fibres pour un arrangement carré : confrontation des résultats numériques (BEM) au modèle de Gebart . . . . .	130
4.11	Illustration des différentes étapes conduisant à l'obtention d'un modèle géométrique de la microstructure . . . . .	132

4.12	Génération d'un modèle géométrique à partir d'une coupe micrographique (image segmentée) . . . . .	132
4.13	Cellule A : champ de vitesse à la frontière (écoulement à pression imposée)	133
4.14	Cellule B : champ de vitesse à la frontière (écoulement à pression imposée)	134
A.1	Réfraction de la lumière dans le moule . . . . .	162
B.1	Géométries utilisées pour traiter les écoulements radiaux 2D et 3D . . .	163
C.1	Discrétisation de la frontière et définition du point de calcul interne . .	167
E.1	Éléments de référence 1D et 2D . . . . .	189
G.1	Organisation du calcul de remplissage . . . . .	193
G.2	Fenêtre principale de l'application . . . . .	194
G.3	Panneau « Maillage » . . . . .	195
G.4	Sélection des points d'injection . . . . .	196
G.5	Panneau « Paramètres d'injection », initialisation du remplissage . . . .	197
G.6	Panneau « Post-traitement », affichage de la frontière . . . . .	198
G.7	Visualisation des résultats . . . . .	199
H.1	Fenêtre principale de l'application . . . . .	202
H.2	Panneaux accessibles par le menu déroulant . . . . .	203
H.3	Structure du fichier de données . . . . .	203
H.4	Données expérimentales . . . . .	204
H.5	Calibration . . . . .	205
H.6	Ajustement manuel de l'ellipse . . . . .	206
H.7	Ajustement automatique de l'ellipse . . . . .	207



# Liste des algorithmes

D.1	Assemblage des matrices $H$ et $G$ (problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D) . . . . .	174
D.2	Assemblage des matrices $H$ et $G$ (problème de Stokes 2D) . . . . .	175
D.3	Réorganisation du système $HP = GQ$ en système linéaire standard $AX = B$ , et résolution (problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D) . . . . .	176
D.4	Réorganisation du système $HV = GT$ en système linéaire standard $AX = B$ , et résolution (problème de Stokes 2D) . . . . .	177
D.5	Calcul de la pression interne (problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D)	178
D.6	Calcul des gradients de pression internes (problème potentiel anisotrope 2D)	179
D.7	Calcul des gradients de pression internes (problème potentiel anisotrope 3D)	180
D.8	Calcul des vitesses internes (problème de Stokes 2D) . . . . .	181
D.9	Calcul des contraintes internes (problème de Stokes 2D) . . . . .	182
D.10	Perturbation du champ de distance signée . . . . .	183
D.11	Génération du maillage frontière 2D par Marching Triangles . . . . .	184
D.12	Génération du maillage frontière 3D par Marching Tetrahedra . . . . .	185



# Liste des tableaux

1.1	Paramètres utilisés pour la validation expérimentale du modèle optique	37
1.2	Paramètres rhéologiques et procédés utilisés pour les mesures 2D . . . .	42
1.3	Synthèse des mesures 2D réalisées sur le renfort G0986 . . . . .	44
1.4	Incertitudes expérimentales dans la mesure 2D . . . . .	45
1.5	Paramètres rhéologiques et procédés utilisés pour la mesure 3D . . . . .	45
1.6	Synthèse des résultats obtenus par mesure 3D sur le renfort G0986 . . .	48
1.7	Incertitudes expérimentales dans la mesure 3D . . . . .	48
2.1	Paramètres utilisés pour la simulation des écoulements de Darcy radiaux, en 2D et 3D . . . . .	64
2.2	Marching Triangles : cas possibles et configurations associées . . . . .	74
2.3	Marching Tetrahedra : cas possibles et configurations associées . . . . .	76
3.1	Paramètres rhéologiques et paramètres procédés . . . . .	85
3.2	Paramètres rhéologiques et paramètres procédés . . . . .	88
3.3	Paramètres rhéologiques et paramètres procédés . . . . .	91
3.4	Paramètres rhéologiques et paramètres procédés . . . . .	95
3.5	Paramètres rhéologiques et paramètres procédés . . . . .	99
3.6	Paramètres rhéologiques et paramètres procédés . . . . .	104
3.7	Paramètres rhéologiques et paramètres procédés . . . . .	109
4.1	Paramètres utilisés pour la simulation de l'écoulement radial de Stokes en 2D . . . . .	124
4.2	Pressions et viscosité utilisées dans les calculs de perméabilité . . . . .	129



# Références bibliographiques

- [1] EADS-Socata lance Fuscomp. *Air & Cosmos*, (2072), 6 avril 2007.
- [2] Le programme FUSelage en COMPosites. *La lettre d'information du pôle de compétitivité mondial Aéronautique, Espace, Systèmes Embarqués*, (7), Novembre 2007.
- [3] DAHER-SOCATA : Avionneur et équipementier aéronautique, pôle aéronautique du Groupe Daher. <http://www.tbm850.com>.
- [4] S.P. RAWAL et J.W. GOODMAN : Composites for spacecraft. Dans *Comprehensive Composite Materials*, volume 6, pages 279–315. Pergamon, Oxford, 2000.
- [5] J. CINQUIN : Les composites en aérospatiale. Dans *Techniques de l'ingénieur*, volume AM5645. 2002.
- [6] W.T. FREEMAN : The use of composites in aircraft primary structure. *Composites Engineering*, 3(7–8):767–775, 1993.
- [7] L.B. ILCEWICZ, D.J. HOFFMAN et A.J. FAWCETT : Composite applications in commercial airframe structures. Dans *Comprehensive Composite Materials*, volume 6, pages 87–119. Pergamon, Oxford, 2000.
- [8] D. LUCAS et P. PARNEIX : Les matériaux composites en construction navale militaire. Dans *Techniques de l'ingénieur*, volume AM5660. 2000.
- [9] W.D BROUWER, E. Van HERPT et M. LABORDUS : Vacuum injection moulding for large structural applications. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 34(6):551–558, 2003.
- [10] A. GIOCOSA : Les composites dans l'industrie automobile. Dans *Techniques de l'ingénieur*, volume AM5600. 1999.
- [11] M. ROBINSON : Applications in trains and railways. Dans *Comprehensive Composite Materials*, volume 6, pages 395–428. Pergamon, Oxford, 2000.
- [12] E.R.H. FUCHS, F.R. FIELD, R. ROTH et R.E. KIRCHAIN : Strategic materials selection in the automobile body : Economic opportunities for polymer composite design. *Composites Science and Technology*, 68(9):1989–2002, 2008.

- [13] L.C. HOLLAWAY et P.R. HEAD : Composite materials and structures in civil engineering. Dans *Comprehensive Composite Materials*, volume 6, pages 489–527. Pergamon, Oxford, 2000.
- [14] R.F. ZOLLO : Fiber-reinforced concrete : an overview after 30 years of development. *Cement and Concrete Composites*, 19(2):107–122, 1997.
- [15] V.P. MCCONNELL : Application of composites in sporting goods. Dans *Comprehensive Composite Materials*, volume 6, pages 787–809. Pergamon, Oxford, 2000.
- [16] C. SLATER, S.R. OTTO et M. STRANGWOOD : The quasi-static and dynamic testing of damping in golf clubs shafts fabricated from carbon fibre composites. *Procedia Engineering*, 2(2):3361–3366, 2010.
- [17] DAHER : Equipementier européen, intégrateur de solutions « Industrie et Services ». <http://www.daher.com>.
- [18] RATIER-FIGEAC : Équipementier aéronautique. <http://www.ratier-figeac.com>.
- [19] D. GAY : *Matériaux composites*. Hermès Science Publications, 2005.
- [20] J.-C. RIGAL et A. NEGRIER : Présentation des matériaux composites. Dans *Techniques de l'ingénieur*, volume A7790. 1991.
- [21] M. CHATAIN : Matériaux composites : présentation générale. Dans *Techniques de l'ingénieur*, volume AM5000. 2001.
- [22] A. BEUKERS : Polymer matrix composites : Applications. Dans *Encyclopedia of Materials : Science and Technology*, pages 7384–7388. Elsevier, Oxford, 2001.
- [23] C.J.G. PLUMMER, P.-E. BOURBAN et J.-A.E. MANSON : Polymer matrix composites : Matrices and processing. Dans *Encyclopedia of Materials : Science and Technology*, pages 7388–7396. Elsevier, Oxford, 2001.
- [24] P.E. BOURBAN, L.A. CARLSSON, J.-P. MERCIER et J.-A.E. MANSON : *Matériaux composites à matrice organique : constituants, procédés, propriétés*. Traité des matériaux : en vingt volumes. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2004.
- [25] K.M. PREWO et W.K. TREDWAY : Ceramic matrix composites : Applications. Dans *Encyclopedia of Materials : Science and Technology*, pages 1056–1059. Elsevier, Oxford, 2001.
- [26] R.R. NASLAIN : Ceramic matrix composites : Matrices and processing. Dans *Encyclopedia of Materials : Science and Technology*, pages 1060–1066. Elsevier, Oxford, 2001.

- 
- [27] W. KRENKEL : *Ceramic matrix composites : fiber reinforced ceramics and their applications*. Wiley-VCH, 2008.
- [28] W.H. Hunt JR. : Metal matrix composites : Applications. Dans *Encyclopedia of Materials : Science and Technology*, pages 5442–5446. Elsevier, Oxford, 2001.
- [29] F.A. GIROT, A.P. MAJIDI et T.W. CHOU : Metal matrix composites. Dans *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, pages 485–493. Academic Press, New York, 3<sup>e</sup> édition, 2003.
- [30] H. YE, X.Y. LIU et H. HONG : Fabrication of metal matrix composites by metal injection molding - A review. *Journal of Materials Processing Technology*, 200 (1–3):12–24, 2008.
- [31] A. CANTAREL, E. LACOSTE, C. ARVIEU, O. MANTAUX et M. DANIS : Numerical simulation of segregation phenomena coupled with phase change and fluid flow : Application to metal matrix composites processing. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, 55(9):880–892, 2009.
- [32] J.J. BARRAU et D. GUEDRA DEGEORGES : Structures en matériaux composites. Dans *Techniques de l'ingénieur*, volume BM5080. 2004.
- [33] E. BESSARD, O. De ALMEIDA et G. BERNHART : Melt state behaviour of PEEK and processing window interpretation for fast compression moulding process. *AIP Conference Proceedings*, 1315(1):167–172, 2011.
- [34] D. GUILLON : Fibres de verre de renforcement. Dans *Techniques de l'ingénieur*, volume A2110. 1999.
- [35] J. LUYCKX : Fibres de carbone. Dans *Techniques de l'ingénieur*, volume A2210. 1999.
- [36] R. PINZELLI : Fibres aramides pour matériaux composites. Dans *Techniques de l'ingénieur*, volume A3985. 1995.
- [37] P. BOISSE : Mise en forme des renforts fibreux de composites. Dans *Techniques de l'ingénieur*, volume AM3734. 2004.
- [38] A. CHEVALIER et F. BERBAIN : Mise en œuvre des composites : Méthodes et matériels. Dans *Techniques de l'ingénieur*, volume AM3720. 1997.
- [39] R. LOENDERSLOOT : *The structure - permeability relation of textile reinforcements*. Thèse de doctorat, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 2006.
- [40] R. ARBTER, J.M. BERAUD, C. BINETRUY, L. BIZET, J. BRÉARD, S. COMAS-CARDONA, C. DEMARIA, A. ENDRUWEIT, P. ERMANNI, F. GOMMER, S. HANANOVIC, P. HENRAT, F. KLUNKER, B. LAINE, S. LAVANCHY, S.V. LOMOV, A. LONG, V. MICHAUD, G. MORREN, E. RUIZ, H. SOL, F. TROCHU, B. VERLEYE, M. WIETGREFE, W. WU et G. ZIEGMANN : Experimental determination of the

- permeability of textiles : A benchmark exercise. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 42(9):1157–1168, 2011.
- [41] H. DARCY : *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. V. Dalmont, Paris, 1856.
- [42] A. SHOJAEI, S.R. GHAFARIAN et S.M.H. KARIMIAN : Modeling and simulation approaches in the resin transfer molding process : A review. *Polymer Composites*, 24(4):525–544, 2003.
- [43] A. SAOUAB, J. BRÉARD, P. LORY, B. GARDAREIN et G. BOUQUET : Injection simulations of thick composite parts manufactured by the RTM process. *Composites Science and Technology*, 61(3):445–451, 2001.
- [44] C. BINETRUY, M.F. LACAMPE, P. KRAWCZAK et N. PICCIRELLI : Flow simulation of an automotive resin transfer molded complex shape parts made with performed heavy tow carbon fabrics : Comparison with experimental results. pages 265–283, 2009.
- [45] G. DUSSEYRE, E. JOURDAIN et G. BERNHART : Effect of deformation on knitted glass preform in-plane permeability. *Polymer Composites*, 32(1):18–28, 2011.
- [46] S. SHARMA : *On the improvement of permeability assessment of fibrous materials*. Thèse de doctorat, MS Aerospace engineering, Wichita State University, 2010.
- [47] R. GAUVIN et M. CHIBANI : The Modelling of Mold Filling in Resin Transfer Molding. *Intern. Polymer Processing*, 21:163–169, 1987.
- [48] L. ORGÉAS, C. GEINDREAU, J.-L. AURIAULT et J.-F. BLOCH : Upscaling the flow of generalised newtonian fluids through anisotropic porous media. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 145(1):15–29, 2007.
- [49] F. LOIX, L. ORGÉAS, C. GEINDREAU, P. BADEL, P. BOISSE et J.-F. BLOCH : Flow of non-newtonian liquid polymers through deformed composites reinforcements. *Composites Science and Technology*, 69(5):612–619, 2009.
- [50] M.O.W RICHARDSON et Z.Y ZHANG : Experimental investigation and flow visualisation of the resin transfer mould filling process for non-woven hemp reinforced phenolic composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31(12):1303–1310, 2000.
- [51] P. FERLAND, D. GUITTARD et F. TROCHU : Concurrent methods for permeability measurement in resin transfer molding. *Polymer Composites*, 17(1):149–158, 1996.
- [52] S. SHARMA et D.A. SIGINER : Permeability measurement methods in porous media : A review. *ASME Conference Proceedings*, 2008(48715):179–200, 2008.



- [53] Y. LUO, I. VERPOEST, K. HOES, M. VANHEULE, H. SOL et A. CARDON : Permeability measurement of textile reinforcements with several test fluids. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 32(10):1497–1504, 2001.
- [54] R. POMEROY, S. GROVE, J. SUMMERSCALES, Y. WANG et A. HARPER : Measurement of permeability of continuous filament mat glass-fibre reinforcements by saturated radial airflow. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38(5):1439–1443, 2007.
- [55] V.H. HAMMOND et A.C. LOOS : The effects of fluid type and viscosity on the steady-state and advancing front permeability behavior of textile preforms. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 16(1):50–72, 1997.
- [56] M.F. FOLEY et T. GUTOWSKI : The effect of process variables on permeability in the flexible resin transfer molding (FRTM) process. Dans *36th International SAMPE Symposium and Exhibition*, pages 326–340, 1991.
- [57] D.A. STEENKAMER, S. H. MCKNIGHT, D.J. WILKINS et V.M. KARBHARI : Experimental characterization of permeability and fibre wetting for liquid moulding. *Journal of Materials Science*, 30:3207–3215, 1995.
- [58] J.P. CAUCHOIS, A. PHILIPPE, J. RAYNAL et S. GUISSARD : Dispositif pour mesurer la perméabilité transverse d'un renfort fibreux. FR2900236, Pôle de plasturgie de l'Est, 2006.
- [59] Y. CHO, Y. SONG, T. KANG, K. CHUNG et J. YOUN : Permeability measurement of a circular braided preform for resin transfer molding. *Fibers and Polymers*, 4:135–144, 2003.
- [60] M.L. DIALLO, R. GAUVIN et F. TROCHU : Key factors affecting the permeability measurement in continuous fiber reinforcements. Dans *11th International Conference on Composite Materials*, pages 441–451, 1997.
- [61] C. BINETRUY, B. HILAIRE et J. PABIOT : The interactions between flows occurring inside and outside fabric tows during RTM. *Composites Science and Technology*, 57(5):587–596, 1997.
- [62] C. LEKAKOU, M.A.K. JOHARI, D. NORMAN et M.G. BADER : Measurement techniques and effects on in-plane permeability of woven cloths in resin transfer moulding. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 27(5):401–408, 1996.
- [63] K.Ken HAN, C.William LEE et Brian P. RICE : Measurements of the permeability of fiber preforms and applications. *Composites Science and Technology*, 60(12-13):2435–2441, 2000.
- [64] K.L. ADAMS, W.B. RUSSEL et L. REBENFELD : Radial penetration of viscous liquid into a planar anisotropic porous medium. *International Journal Of Multiphase Flow*, 14(2), 1988.

- [65] W.A. CHAN, D.E. LARIVE et R.J. MORGAN : Anisotropic permeability of fiber preforms : Constant flow rate measurement. *Journal of Composite Materials*, 27 (10):996–1008, 1993.
- [66] J.R. WEITZENBÖCK, R.A. SHENOI et P.A. WILSON : Radial flow permeability measurement. part a : Theory. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 30(6):781–796, 1999.
- [67] A.W. CHAN et S.T. HWANG : Anisotropic in-plane permeability of fabric media. *Polymer Engineering and Science*, 31(16):1233–1239, 1991.
- [68] X. WU, J. LI et R.A. SHENOI : A new method to determine fiber transverse permeability. *Journal of Composite Materials*, 41(6):747–756, 2007.
- [69] R. GANTOIS, E. JOURDAIN et G. DUSSERRE : Recent patents on in-plane permeability measurement of LCM composite reinforcements. *Recent Patents on Engineering*, 3(2):109–116, 2009.
- [70] J.R. WEITZENBÖCK, R.A. SHENOI et P.A. WILSON : Measurement of three-dimensional permeability. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 29(1-2):159–169, 1998.
- [71] J.P. CAUCHOIS, A. PHILIPPE, J. RAYNAL et S. GUISSARD : Dispositif pour mesurer la perméabilité dans au moins deux directions d’un renfort fibreux. FR2900237, Pôle de plasturgie de l’Est, 2006.
- [72] S.R.M. KUEH, S.G. ADVANI et R.S. PARNAS : Sensor placement study for online flow monitoring in liquid composite molding. *Polymer Composites*, 21(3):436–449, 2000.
- [73] G. RIEBER et P.A. MITSCHANG : A high-level permeability measurement technique. *JEC Composites*, (36):65–67, 2007.
- [74] P.B. NEDANOV et S.G. ADVANI : A method to determine 3d permeability of fibrous reinforcements. *Journal of Composite Materials*, 36(2):241–254, 2002.
- [75] S. COMAS-CARDONA, C. BINETRUY et P. KRAWCZAK : Unidirectional compression of fibre reinforcements. Part 2 : A continuous permeability tensor measurement. *Composites Science and Technology*, 67(3-4):638–645, 2007.
- [76] S. COMAS-CARDONA, P. Le GROGNEC, C. BINETRUY et P. KRAWCZAK : Unidirectional compression of fibre reinforcements. Part 1 : A non-linear elastic-plastic behaviour. *Composites Science and Technology*, 67(3-4):507–514, 2007.
- [77] S. THOMAS, C. BONGIOVANNI et S.R. NUTT : In situ estimation of through-thickness resin flow using ultrasound. *Composites Science and Technology*, 68 (15-16):3093–3098, 2008.

- [78] S.H. AHN, W. LEE et G.S. SPRINGER : Measurement of the three-dimensional permeability of fiber preforms using embedded fiber optic sensors. *Journal of Composite Materials*, 29(6):714–733, 1995.
- [79] G. DUSSEYRE et G. BERNHART : Caractérisation du comportement mécanique et de la perméabilité de renforts tricotés en fibres de verre - simulation de l'injection sur renforts tricotés (rapport interne). Rapport technique, CROMEP, 2008.
- [80] J. BRÉARD : *Modélisation numérique de la phase de remplissage du procédé RTM et détermination expérimentale de la perméabilité d'un renfort fibreux*. Thèse de doctorat, Université du Havre, 1997.
- [81] F.M. SCHMIDT, P. LAFLEUR, F. BERTHET et P. DEVOS : Numerical simulation of resin transfer molding using linear boundary element method. *Polymer Composites*, 20(6), 1999.
- [82] C. HOAREAU : *Injection sur renfort : étude du remplissage de moule, et détermination théorique de la perméabilité de tissus*. Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, 1994.
- [83] J.A. GARCÍA, Ll. GASCÓN, E. CUETO, I. ORDEIG et F. CHINESTA : Meshless methods with application to liquid composite molding simulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2009.
- [84] C. W. HIRT et B. D. NICHOLS : Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39:201–225, 1981.
- [85] S. OSHER et J.A. SETHIAN : Front propagating with curvature-dependents speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.
- [86] M. BRUSCHKE et S.G. ADVANI : Finit element/control volume approach to mold filling in anisotropic porous media. *Polymer Composites*, 11, 1990.
- [87] F. TROCHU, R. GAUVIN et D.-M. GAO : Numerical analysis of the resin transfer molding process by the finite element method. *Adv Polym Technol*, 12(4):329–342, 1993.
- [88] S. V. SHEPEL et B. L. SMITH : On surface tension modelling using the level set method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 59(2):147–171, 2009.
- [89] W. ZERGUINE, L. SILVA, T. COUPEZ, H. DIGONNET et A. RODRIGUEZ-VILLA : Capture d'interface et application au procédé d'injection assistée eau. Dans *18ème Congrès Français de Mécanique Grenoble, France*, 27–31 août 2007.
- [90] B. YANG, J. OUYANG, C. LIU et Q. LI : Simulation of non-isothermal injection molding for a non-newtonian fluid by level set method. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 18(4):600–608, 2010.

- [91] A. LEVY, S. Le CORRE, N. CHEVAUGEON et A. POITOU : A level set based approach for the finite element simulation of a forming process involving multiphysics coupling : Ultrasonic welding of thermoplastic composites. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 30(4):501–509, 2011.
- [92] S. SOUKANE et F. TROCHU : New Remeshing Applications in Resin Transfer Molding. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 24(15):1629–1653, 2005.
- [93] P. SIMACEK et A. ADVANI : Modeling the darcy flow in composites processing : Lcm and beyond. MK2, Praha, 4 2011.
- [94] F. SHI et X. DONG : 3d numerical simulation of filling and curing processes in non-isothermal rtm process cycle. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47 (7):764–770, 2011.
- [95] M. DELEGLISE, C. BINETRUY et P. KRAWCZAK : Simulation of lcm processes involving induced or forced deformations. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 37(6):874–880, 2006. Selected Contributions from the 7th International Conference on Flow Processes in Composite Materials held at University of Delaware, USA.
- [96] E. MATHEY : *Optimisation numérique du refroidissement des moules d'injection de thermoplastiques basée sur la simulation des transferts thermiques par la méthode des éléments frontières*. Thèse de doctorat, 2004.
- [97] P. SIMÁCEK et S.G. ADVANI : Role of acceleration forces in numerical simulation of mold filling processes in fibrous porous media. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 37(11):1970–1982, 2006.
- [98] B. LIU, S. BICKERTON et S. G. ADVANI : Modelling and simulation of resin transfer moulding (rtm) – gate control, venting and dry spot prediction. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 27(2):135–141, 1996.
- [99] S. SOUKANE et F. TROCHU : Application of the level set method to the simulation of resin transfer molding. *Composites Science and Technology*, 66:1067–1080, 2006.
- [100] C.A. BREBBIA et J. DOMINGUEZ : *Boundary elements : an introductory course*. WIT Press : Computational Mechanics Publications, 2<sup>e</sup> édition, 1991.
- [101] A.A. BECKER : *The Boundary Element Method in Engineering : A Complete Course*. McGraw-Hill Company, 2<sup>e</sup> édition, 1992.
- [102] F. PARÍS et J. CANAS : *Boundary Element Method : Fundamentals and Applications*. Oxford University Press, 1997.
- [103] H. ZHOU, Z. NIU, C. CHENG et Z. GUAN : Analytical integral algorithm in the bem for orthotropic potential problems of thin bodies. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31(9):739–748, 2007.

- 
- [104] Y.C. SHIAH et C.L. TAN : Bem treatment of two-dimensional anisotropic field problems by direct domain mapping. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 20(4):347–351, 1997.
- [105] Y.C. SHIAH et C.L. TAN : Bem treatment of three-dimensional anisotropic field problems by direct domain mapping. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(1):43–52, 2004.
- [106] R.J. MARCZAK et M. DENDA : New derivations of the fundamental solution for heat conduction problems in three-dimensional general anisotropic media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54(15–16):3605–3612, 2011.
- [107] E. MATHEY, L. PENAZZI, F. RONDÉ-OUSTAU et F. SCHMIDT : Automatic optimization of the cooling of injection mould based on the boundary element method. *NUMIFORM 04 , Proc. 8th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Columbus, Ohio (USA)*, 2004.
- [108] M. FRATANTONIO et J. J. RENCIS : Exact boundary element integrations for two-dimensional laplace equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24(4):325–342, 2000.
- [109] P. R. JOHNSTON et D. ELLIOTT : Transformations for evaluating singular boundary element integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 146(2):231–251, 2002.
- [110] J.C.F TELLES : A self-adaptative co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *Internat. J. Numer. Methods. Eng.*, 24:959–973, 1987.
- [111] P. HUNTER et A. PULLAN : BEM/FEM notes. Department of Engineering Science, University of Auckland, New Zealand, 2000.
- [112] J.A. SETHIAN : *An Analysis of Flame Propagation*. Thèse de doctorat, Dept. of Mathematics, Univ. of California, Berkeley, 1982.
- [113] J.A. SETHIAN : Turbulent combustion in open and closed vessels. *Journal of Computational Physics*, 54(3):425–456, 1984.
- [114] C.C. HOGEA, B.T. MURRAY et J.A. SETHIAN : Simulating complex tumor dynamics from avascular to vascular growth using a general level-set method. *J Math Biol*, 53(1):86–134, 2006.
- [115] R. KIMMEL et J.A. SETHIAN : Fast marching methods for robotic navigation with constraints. Rapport technique 669, CPAM, Univ. of California, Berkeley, 1996.
- [116] J.A. SETHIAN et J. STRAINT : Crystal growth and dendritic solidification. *Journal of Computational Physics*, 98(2):231–253, 1992.

- [117] S. FOMEL et J.A. SETHIAN : Fast phase space computation of multiple arrivals. volume 99, pages 7329–7334, 2002.
- [118] M. HARANCZYK et J.A. SETHIAN : Some free boundary problems in potential flow regime using a level set method. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(51):21472–21477, 2008.
- [119] J.A. SETHIAN et P. SMERKA : Level set methods for fluid interfaces. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35:341–372, 2003.
- [120] J.-D. YU, S. SAKAI et J.A. SETHIAN : A coupled quadrilateral grid level set projection method applied to ink jet simulation. *J. Comput. Phys.*, 206:227–251, 2005.
- [121] J.A. SETHIAN : *Level Set Methods and Fast Marching Methods Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge University Press, 2<sup>e</sup> édition, 1999.
- [122] N. PIRC, F. SCHMIDT, M. MONGEAU, F. BUGARIN et F. CHINESTA : Optimization of 3d cooling channels in injection molding using drbem and model reduction. *International Journal of Material Forming*, 2(1):271–274, 2009.
- [123] E. ANDERSON, Z. BAI, C. BISCHOF, S. BLACKFORD, J. DEMMEL, J. DONGARRA, J. Du CROZ, A. GREENBAUM, S. HAMMARLING, A. MCKENNEY et D. SORENSEN : *LAPACK Users' Guide (Software, Environments and Tools)*. Society for Industrial Mathematics, 3<sup>e</sup> édition, 1999.
- [124] S. TANGUY : *Développement d'une méthode de suivi d'interface. Applications aux écoulements diphasiques*. Thèse de doctorat, Université de Rouen, 2004.
- [125] R. MALLADI, J.A. SETHIAN et B.C. VEMURI : Shape modeling with front propagation : A level set approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17:158–175, 1995.
- [126] W. LORENSEN et H. CLINE : Marching cubes : A high resolution 3d surface construction algorithm. *Computer graphics*, 21:163–169, 1987.
- [127] T.S. NEWMAN et H. YI : A survey of the marching cubes algorithm. *Computers & Graphics*, 30(5):854–879, 2006.
- [128] P. SHIRLEY et A. TUCHMAN : A polygonal approximation to direct scalar volume rendering. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 24:63–70, 1990.
- [129] O. SEUNGTAIK et B.K. KOO : Data perturbation for fewer triangles in marching tetrahedra. *Graphical Models*, 69(3–4):211–218, 2007.
- [130] D. ENGWIRDA : Mesh2d v2.4 : Automatic mesh generation. Matlab Central File Exchange, <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/25555-mesh2d-automatic-mesh-generation>, 2009.

- 
- [131] Logiciel PAM-RTM. Engineering System International, <http://www.esi-group.com>.
- [132] Logiciel LIMS. University of Delaware/Center for Composite Materials, <http://www.ccm.udel.edu>.
- [133] Logiciel RTM-WORX. Polyworks, <http://www.polyworx.com>.
- [134] S. JIANG, C. ZHANG et B. WANG : Optimum arrangement of gate and vent locations for rtm process design using a mesh distance-based approach. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 33(4):471–481, 2002.
- [135] X. YE, C. ZHANG, Z. LIANG et B. WANG : Heuristic algorithm for determining optimal gate and vent locations for rtm process design. *Journal of Manufacturing Systems*, 23(4):267–277, 2004.
- [136] A. GOKCE et S.G. ADVANI : Simultaneous gate and vent location optimization in liquid composite molding processes. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 35(12):1419–1432, 2004.
- [137] F. SÁNCHEZ, J.A. GARCÍA, F. CHINESTA, Ll. GASCÓN, C. ZHANG, Z. LIANG et B. WANG : A process performance index based on gate-distance and incubation time for the optimization of gate locations in liquid composite molding processes. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 37(6):903–912, 2006.
- [138] F. RATLE, V. ACHIM et F. TROCHU : Evolutionary operators for optimal gate location in liquid composite moulding. *Applied Soft Computing*, 9(2):817–823, 2009.
- [139] T.D. PAPATHANASIOU : On the effective permeability of square arrays of permeable fiber tows. *International Journal of Multiphase Flow*, 23(1):81–92, 1997.
- [140] P.C. CARMAN : Fluid flow through granular beds. *Transactions - Institution of Chemical Engineers*, 15:150–166, 1937.
- [141] B.R. GEBART : Permeability of unidirectional reinforcements for RTM. *Journal of Composite Materials*, 26:1100–1133, 1992.
- [142] M.V. BRUSCHKE et S.G. ADVANI : Flow of generalized newtonian fluids across a periodic array of cylinders. *Journal of Rheology*, 37(3):479–498, 1993.
- [143] Z. CAI et A.L. BERDICHEVSKY : An improved self-consistent method for estimating the permeability of a fiber assembly. *Polymer Composites*, 14(4):314–323, 1993.
- [144] J. Van der WESTHUIZEN et J.P. Du PLESSIS : An attempt to quantify fibre bed permeability utilizing the phase average Navier-Stokes equation. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 27(4):263–269, 1996.

- [145] C. BINETRUY : *Calcul et validation expérimentale de la perméabilité et prévision de l'imprégnation de tissus en moulage RTM*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1996.
- [146] Z. IDRIS : *Modelling the flow of power-law fluids through anisotropic fibrous media*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2006.
- [147] T. ARBOGAST et M.F. WHEELER : A nonlinear mixed finite element method for a degenerate parabolic equation arising in flow in porous media. *SIAM J. on Numerical Analysis*, 3(4):1669–1687, 1996.
- [148] N. TAKANO, M. ZAKO, T. OKAZAKI et K. TERADA : Microstructure-based evaluation of the influence of woven architecture on permeability by asymptotic homogenization theory. *Composites Science and Technology*, 62(10–11):1347–1356, 2002.
- [149] J.P. DUNKERS, F.R. PHELAN, C.G. ZIMBA, K.M. FLYNN, D.P. SANDERS, R.C. PETERSON, R.S. PARNAS, X. LI et J.G. FUJIMOTO : The prediction of permeability for an epoxy/e-glass composite using optical coherence tomographic images. *Polymer Composites*, 22(6):803–814, 2001.
- [150] Boming YU et Ping CHENG : A fractal permeability model for bi-dispersed porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(14):2983–2993, 2002.
- [151] R. FOURNIER : *Optimisation et modélisation du procédé R.T.M.* Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, 2003.
- [152] B. LAINE : *Influence des déformations d'un renfort fibreux sur sa perméabilité : modélisations et expériences*. Thèse de doctorat, Arts et Métiers ParisTech, 2008.
- [153] L. SILVA, G. PUAUX, M. VINCENT et P. LAURE : A monolithic finite element approach to compute permeability at microscopic scales in LCM processes. *International Journal of Material Forming*, 3:619–622, 2010.
- [154] X CHEN et T.D. PAPATHANASIOU : On the variability of the kozeny constant for saturated flow across unidirectional disordered fiber arrays. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 37(6):836–846, 2006.
- [155] X. CHEN et T.D. PAPATHANASIOU : Micro scale modeling of axial flow through unidirectional disordered fiber arrays. *Composites Sciences and Technology*, 67:1286–1293, 2007.
- [156] F. SCHMIDT : Formulation intégrale frontière pour les équations de l'élasticité (rapport interne). Rapport technique, CROMEP, 1997.
- [157] F.J. RIZZO : An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics. *Quarterly of Applied Mathematics*, 20:83–95, 1967.



- 
- [158] A.E.H. LOVE : *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, New York, 1944.
- [159] M. JAWSON : Integral Equation Methods in Potential Theory, i. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*(275):23–32, 1968.
- [160] I. BUSULADZIC : *Modélisation des éléments de mélange en extrusion par la méthode des éléments frontières*. Thèse de doctorat, Cotutelle École des Mines de Paris - École Polytechnique de Montréal, 2004.
- [161] O. PASCAL : Modélisation à l'échelle locale de l'imprégnation de renforts fibreux (rapport de master 2). Rapport technique, Université de Pau, 2010.
- [162] J. PELLET et X. DESROCHES : *Fonctions de forme et points d'intégration des éléments finis*. Code Aster, Manuel de référence, Version 9.5, 2009.
- [163] Y. ALTMAN : Uisplitpane : Split a container (figure/frame/uipanel) into two resizable sub-containers. Matlab Central File Exchange, <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/25555-mesh2d-automatic-mesh-generation>, 2009.
- [164] R. NARAYAN : EllipseSelect : An interactive ellipse selection tool. Matlab Central File Exchange, <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/12569>, 2006.
- [165] T. HENDEL : Ellipse Fit. Matlab Central File Exchange, <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/22423-ellipse-fit>, 2008.



# Annexe A

## Modèle optique intégrant la réfraction dans le moule

Nous développons dans cette annexe le calcul aboutissant au modèle optique (A.6) élaboré par Dusserre et Bernhart [79]. Ce modèle, utilisé et validé dans le chapitre 1, permet d'accéder à la position du front sans utiliser de réglelet sous la plaque. Il relie le rayon du front  $r_f$  au rayon vu par la caméra  $r'_f$ , en fonction des paramètres optiques et géométriques du montage (figure A.1).

### 1 Loi de Snell-Descartes

La déviation du rayon lumineux au passage de l'air au moule transparent est régie par la loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (\text{A.1})$$

où  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  désignent les angles d'incidence et de réfraction, et  $n_1$ ,  $n_2$  les indices optiques de l'air et du moule transparent.

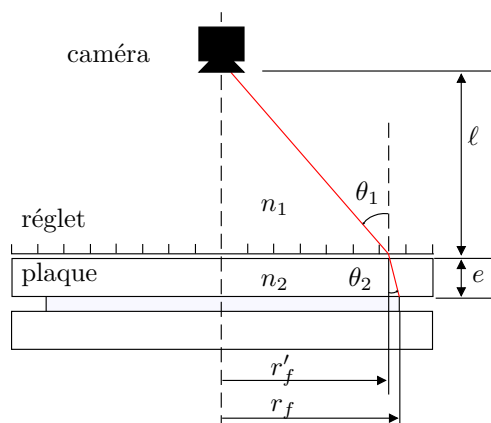
### 2 Expression du modèle

L'expression de  $\tan \theta_2$  fait directement apparaître une relation reliant  $r_f$  à  $r'_f$  :

$$\tan \theta_2 = \frac{r_f - r'_f}{e} \quad (\text{A.2})$$

où  $e$  désigne l'épaisseur du moule. En injectant dans l'équation (A.2) l'expression de  $\theta_2$  issue de la loi de Descartes, nous obtenons, après réorganisation :

$$r_f = r'_f + e \tan \left( \arcsin \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \right) \right) \quad (\text{A.3})$$



**Figure A.1.** Réfraction de la lumière dans le moule

Cette nouvelle expression s'écrit encore en utilisant les propriétés trigonométriques :

$$r_f = r'_f + e \frac{n_1}{n_2} \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1}} \quad (\text{A.4})$$

De l'équation (A.4) nous éliminons  $\theta_1$  en utilisant l'expression du sinus :

$$\sin \theta_1 = \frac{r'_f}{\sqrt{\ell^2 + r'^2_f}} \quad (\text{A.5})$$

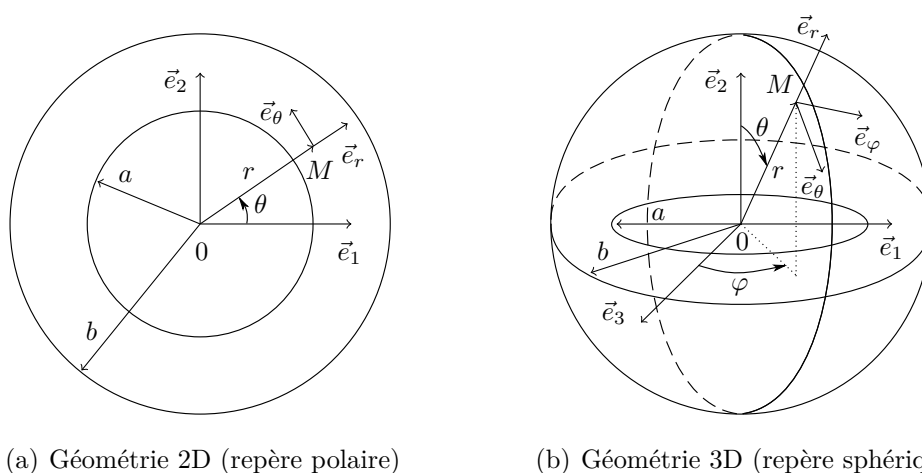
où  $\ell$  désigne la distance séparant la caméra du moule. L'expression finale est obtenue après réorganisation du dénominateur :

$$r_f = r'_f + e \frac{n_1}{n_2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{r_f}\right)^2}} \quad (\text{A.6})$$

# Annexe B

## Solutions analytiques : écoulements radiaux de type Darcy et Stokes

L'objectif de cette annexe est de rappeler les solutions analytiques qui régissent les écoulements radiaux à pression imposée de type Darcy et Stokes (figure B.1).



**Figure B.1.** Géométries utilisées pour traiter les écoulements radiaux 2D et 3D ( $a$  et  $b$  désignent les rayons des parois internes et externes à l'anneau ou à la sphère)

### 1 Écoulement radial de Darcy à pression imposée, cas isotrope

Les géométries considérées sont représentées sur les figures B.1 (a) et (b). Il s'agit en 2D (respectivement en 3D) d'un anneau (respectivement d'une sphère creuse) de rayon interne  $a$  et de rayon externe  $b$ . Dans les deux cas, les pressions appliquées aux parois sont notées  $p_a$  et  $p_b$ , où la condition  $p_a > p_b$  garantit un écoulement sortant.

La loi de Darcy, combinée à l'équation d'incompressibilité, fournit :

$$\vec{\nabla} \cdot \left( -\frac{\bar{k}}{\mu\varepsilon} \vec{\nabla} p \right) = 0 \quad (\text{B.1})$$

où  $p$  désigne la pression,  $\bar{k}$  le tenseur de perméabilité,  $\mu$  la viscosité dynamique et  $\varepsilon$  la porosité du milieu ( $1 - V_f$ ). Pour un milieu homogène isotrope, l'expression (B.1) est réduite à une équation de Laplace en pression. Sa résolution, qui dépend de la dimension du problème, fournit l'expression du champ de pression.

## 1.1 Écoulement 2D

Dans un repère polaire, et en présence d'un problème axisymétrique, l'équation de Laplace est réduite à :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) = 0 \quad (\text{B.2})$$

où  $r$  désigne le rayon permettant de repérer la position du point dans le fluide, c.f. figure B.1 (a).

**Champ de pression** Deux intégrations successives de (B.2), et l'utilisation des conditions aux limites en pression, conduisent au champ de pression dans le fluide :

$$p(r) = p_a + (p_b - p_a) \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \quad (\text{B.3})$$

**Champ de vitesse** L'application de la loi de Darcy fournit ensuite l'expression du champ de vitesse radial :

$$v_r(r) = -\frac{k}{\mu\varepsilon} \frac{(p_a - p_b)}{r \ln \frac{b}{a}} \quad (\text{B.4})$$

## 1.2 Écoulement 3D

Nous utilisons pour la résolution du problème 3D un repère sphérique. En présence d'un problème axisymétrique, l'expression du Laplacien est réduite à :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dp}{dr} \right) = 0 \quad (\text{B.5})$$

où  $r$  représente le rayon permettant de repérer la position du point dans le repère sphérique, c.f. figure B.1 (b).

**Champ de pression** Le champ de pression est obtenu en procédant deux fois à l'intégration de l'équation (B.5) et en exploitant les conditions aux limites :

$$p(r) = p_a + (p_b - p_a) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (\text{B.6})$$

**Champ de vitesse** La loi de Darcy conduit ensuite au champ de vitesse radial :

$$v_r(r) = -\frac{k}{\mu\varepsilon} \frac{(p_a - p_b)}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \quad (\text{B.7})$$

## 2 Écoulement radial de Stokes à pression imposée, déformation plane

Nous avons explicité la solution analytique régissant l'écoulement de Stokes dans le cas 2D (anneau). Le cas 3D (non abordé ici) peut être traité en suivant la même approche. La géométrie (anneau de rayon interne  $a$  et de rayon externe  $b$ ) est représentée figure B.1 (a). Les pressions appliquées aux parois sont respectivement notées  $p_a$  et  $p_b$  (avec  $p_a > p_b$  pour un écoulement sortant).

Par symétrie, le champ de vitesse est radial et indépendant de  $\theta$  et  $z$  :

$$\vec{v} = v_r(r)\vec{e}_r \quad (\text{B.8})$$

**Tenseur des contraintes** En déformation plane, l'expression de la vitesse (B.8) conduit au tenseur des vitesses de déformation  $\bar{\bar{\varepsilon}}$  :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{dv_r}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)} \quad (\text{B.9})$$

Pour un comportement Newtonien, le tenseur des contraintes  $\bar{\bar{\sigma}}$  s'écrit alors :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p + 2\mu \frac{dv_r}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & -p + 2\mu \frac{v_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)} \quad (\text{B.10})$$

où  $p$  est la pression hydrostatique et  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide. L'équilibre statique projeté suivant  $\vec{e}_r$  fournit :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (\text{B.11})$$

L'expression du tenseur des contraintes (B.10) conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + 2\mu \frac{d}{dr} \left( \frac{v_r}{r} \right) = 0 \quad (\text{B.12})$$

L'intégration de (B.12) entre  $a$  et  $r$ , et l'utilisation de la condition aux limites sur la paroi interne ( $r = a$ ), fournit l'expression de la contrainte radiale :

$$\sigma_{rr}(r) = -p_a - 2\mu \frac{v_r(r) - v_r(a)}{r} \quad (\text{B.13})$$

L'expression de la vitesse radiale est obtenue en utilisant l'équation d'incompressibilité :

$$\frac{1}{r} \frac{d(rv_r)}{dr} = 0 \quad (\text{B.14})$$

Par intégration, nous obtenons :

$$v_r = \frac{A}{r} \quad (\text{B.15})$$

où  $A$  est une constante d'intégration, déterminée par la condition aux limites sur la paroi externe ( $r = b$ ) :

$$A = \frac{p_a - p_b}{2\mu} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \quad (\text{B.16})$$

La contrainte radiale s'exprime finalement comme suit :

$$\sigma_{rr}(r) = -p_a - (p_a - p_b) \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) \quad (\text{B.17})$$

La contrainte circonférentielle est déduite de l'équation (B.11) :

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = -p_a + (p_a - p_b) \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2} \right) \quad (\text{B.18})$$

La contrainte axiale est obtenue en utilisant la propriété de déformation plane, qui s'écrit  $\sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$ , et conduit à l'expression suivante :

$$\sigma_{zz} = -p_a + (p_a - p_b) \frac{b^2}{b^2 - a^2} \quad (\text{B.19})$$

**Vitesse** L'expression de la vitesse est finalement calculée en substituant (B.16) dans (B.15) :

$$v_r = \frac{p_a - p_b}{2\mu} \frac{a^2 b^2}{r(b^2 - a^2)} \quad (\text{B.20})$$



# Annexe C

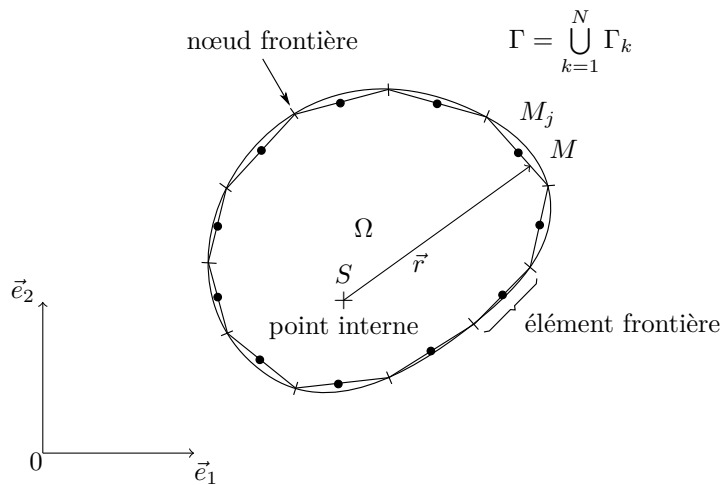
## Solutions fondamentales, gradients et calcul aux points internes

Cette annexe a pour objectif de développer l'expression des gradients des solutions fondamentales pour les calculs aux points internes, intervenant dans la résolution BEM des problèmes potentiels anisotropes (Darcy) 2D et 3D, et du problème de Stokes 2D.

On note  $r = \|\overrightarrow{SM}\|$  la distance euclidienne du point source  $S$  au point frontière  $M$ , telle que :

$$r = \begin{cases} \sqrt{r_1^2 + r_2^2} & \text{en 2D} \\ \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} & \text{en 3D} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(C.1a)} \\ \text{(C.1b)} \end{matrix}$$

où  $r_i = x_i^M - x_i^S$  est la projection de  $\vec{r}$  suivant  $\vec{e}_i$  (figure C.1).



**Figure C.1.** Discrétisation de la frontière et définition du point de calcul interne

## 1 Problème potentiel anisotrope

**Pression interne** L'application de la relation de Somigiana au point  $S$  interne à  $\Omega$  conduit à l'expression de la pression interne :

$$p(S) = \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} p^*(M,S) d\Gamma_j(M) \right] q(M^j) - \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} q^*(M,S) d\Gamma_j(M) \right] p(M^j) \quad (C.2)$$

où  $p^*$  est la solution fondamentale qui dépend de la dimension du problème, et  $q^*$  désigne un flux qui est donné comme suit :

$$q^* = \overline{\overline{k}} \vec{\nabla}^M p^* \cdot \vec{n} \quad (C.3)$$

où  $\overline{\overline{k}}$  désigne le tenseur de perméabilité, et  $\vec{\nabla}^M$  l'opérateur gradient au point frontière  $M$ .

**Gradient de pression interne** L'expression du gradient de pression interne est obtenue en dérivant la relation de Somigiana (C.2) au point source  $S$  :

$$\vec{\nabla}^S p(S) = \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} \vec{\nabla}^S p^*(M,S) d\Gamma_j(M) \right] q(M^j) - \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} \vec{\nabla}^S q^*(M,S) d\Gamma_j(M) \right] p(M^j) \quad (C.4)$$

où l'opérateur  $\vec{\nabla}^S$  désigne le gradient au point source  $S$ .

### 1.1 Domaine de calcul 2D

#### 1.1.1 Calcul de la pression interne

**Solution fondamentale** La solution fondamentale pour un domaine 2D anisotrope est donnée par Brebbia [100] comme suit :

$$p^*(M,S) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\overline{\overline{k}}|}} \ln \frac{1}{\hat{r}} \quad (C.5)$$

où  $|\overline{\overline{k}}|$  désigne le déterminant du tenseur de perméabilité et  $\hat{r}$  est une distance modifiée entre le point  $S$  et le point  $M$ , telle que :

$$\hat{r}^2 = \frac{1}{|\overline{\overline{k}}|} \left( k_{22}r_1^2 - k_{12}r_1r_2 + k_{11}r_2^2 \right) \quad (C.6)$$

avec  $r_i = \vec{r} \cdot \vec{e}_i$  (figure C.1).

**Expression de  $q^*$**  Le calcul de  $\vec{\nabla}^M p^*$  par (C.5) et (C.11) conduit à :

$$\vec{\nabla}^M p^* = -\frac{1}{2\pi\hat{r}^2|\bar{k}|^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} k_{22}r_1 - k_{12}r_2 \\ k_{11}r_2 - k_{12}r_1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

L'application de la relation (C.3) fournit :

$$q^* = -\frac{1}{2\pi\hat{r}^2|\bar{k}|^{\frac{1}{2}}}(r_1n_1 + r_2n_2) \quad (\text{C.8})$$

### 1.1.2 Calcul du gradient de pression interne

**Expression de  $\vec{\nabla}^S p^*$**  L'expression de  $\vec{\nabla}^S p^*$  est obtenue en utilisant (C.5) et (C.11) :

$$\vec{\nabla}^S p^* = -\vec{\nabla}^M p^* = +\frac{1}{2\pi\hat{r}^2|\bar{k}|^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} k_{22}r_1 - k_{12}r_2 \\ k_{11}r_2 - k_{12}r_1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

**Expression de  $\vec{\nabla}^S q^*$**  L'utilisation de (C.11) et (C.12) conduit à l'expression suivante :

$$\vec{\nabla}^S q^* = -\frac{1}{2\pi\hat{r}^2|\bar{k}|^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{\hat{r}^2|\bar{k}|}(k_{22}r_1 - k_{12}r_2) - n_1 \\ 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{\hat{r}^2|\bar{k}|}(k_{11}r_2 - k_{12}r_1) - n_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

### 1.1.3 Gradient usuel

Les gradients que nous avons utilisés dans cette section pour aboutir aux expressions précédentes sont les suivants :

$$\vec{\nabla}^S \hat{r}^n = -\vec{\nabla}^M \hat{r}^n = -\frac{n}{\hat{r}^{2-n}|\bar{k}|} \begin{bmatrix} k_{22}r_1 - k_{12}r_2 \\ k_{11}r_2 - k_{12}r_1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\vec{\nabla}^S(\vec{r}\cdot\vec{n}) = -\vec{n} \quad (\text{C.12})$$

## 1.2 Domaine de calcul 3D

### 1.2.1 Calcul de la pression interne

**Solution fondamentale** La solution fondamentale pour un domaine 3D anisotrope est donnée par Marczak et Denda [106] :

$$p^*(M,S) = \frac{1}{4\pi|\bar{k}|^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\hat{r}} \quad (\text{C.13})$$

où  $|\bar{k}|$  désigne le déterminant du tenseur de perméabilité et  $\hat{r}$  est tel que :

$$\hat{r}^2 = \frac{r_1^2}{k_{11}} + \frac{r_2^2}{k_{22}} + \frac{r_3^2}{k_{33}} + \frac{2}{|\bar{k}|} (r_3 r_2 c_{1123} + r_3 r_1 c_{1223} + r_2 r_1 c_{1233}) - \frac{1}{|\bar{k}|} (r_3^2 k_{12}^2 + r_1^2 k_{23}^2 + r_2^2 k_{13}^2) \quad (\text{C.14})$$

avec  $c_{ijkl} = k_{ij}k_{kl} - k_{il}k_{jk}$  et  $r_i = \vec{r} \cdot \vec{e}_i$  (figure C.1).

**Expression de  $q^*$**  Le calcul de  $\vec{\nabla}^M p^*$  par (C.13) et (C.21) conduit à :

$$\vec{\nabla}^M p^* = -\frac{1}{2\pi\hat{r}^3|\bar{k}|^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} c_{2233}r_1 + c_{1233}r_2 + c_{1223}r_3 \\ c_{1233}r_1 + c_{1122}r_2 + c_{1123}r_3 \\ c_{1223}r_1 + c_{1123}r_2 + c_{1122}r_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

L'application de l'équation (C.3) fournit :

$$q^* = -\frac{1}{4\pi\hat{r}^3|\bar{k}|^{\frac{3}{2}}} (\tilde{q}_1 n_1 + \tilde{q}_2 n_2 + \tilde{q}_3 n_3) \quad (\text{C.16})$$

où  $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(r_1, r_2, r_3, \bar{k})$  est défini comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{q}_1 = \alpha_1 r_1 + \beta_1 r_2 + \gamma_1 r_3 & (\text{C.17a}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{q}_2 = \alpha_2 r_1 + \beta_2 r_2 + \gamma_2 r_3 & (\text{C.17b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{q}_3 = \alpha_3 r_1 + \beta_3 r_2 + \gamma_3 r_3 & (\text{C.17c}) \end{cases}$$

et  $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$  sont des paramètres qui dépendent uniquement du tenseur de perméabilité, donnés comme suit :

$$\begin{cases} \alpha_1 = c_{2233}k_{11} + c_{1233}k_{12} + c_{1223}k_{13} & (\text{C.18a}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{1233}k_{11} + c_{1133}k_{12} + c_{1123}k_{13} & (\text{C.18b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = c_{1223}k_{11} + c_{1123}k_{12} + c_{1122}k_{13} & (\text{C.18c}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = c_{2233}k_{12} + c_{1233}k_{22} + c_{1223}k_{23} & (\text{C.18d}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_2 = c_{1233}k_{12} + c_{1133}k_{22} + c_{1123}k_{23} & (\text{C.18e}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_2 = c_{1223}k_{12} + c_{1123}k_{22} + c_{1122}k_{23} & (\text{C.18f}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 = c_{2233}k_{13} + c_{1233}k_{23} + c_{1223}k_{33} & (\text{C.18g}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_3 = c_{1233}k_{13} + c_{1133}k_{23} + c_{1123}k_{33} & (\text{C.18h}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_3 = c_{1223}k_{13} + c_{1123}k_{23} + c_{1122}k_{33} & (\text{C.18i}) \end{cases}$$

## 1.2.2 Calcul du gradient de pression interne

**Expression de  $\vec{\nabla}^S p^*$**  L'expression de  $\vec{\nabla}^S p^*$  est obtenue en utilisant (C.15) :

$$\vec{\nabla}^S p^* = -\vec{\nabla}^M p^* = +\frac{1}{2\pi\hat{r}^3|\bar{k}|^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} c_{2233}r_1 + c_{1233}r_2 + c_{1223}r_3 \\ c_{1233}r_1 + c_{1122}r_2 + c_{1123}r_3 \\ c_{1223}r_1 + c_{1123}r_2 + c_{1122}r_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

**Expression de  $\vec{\nabla}^S q^\star$**  L'utilisation de l'équation (C.16) conduit à l'expression suivante :

$$\vec{\nabla}^S q^\star = -\frac{1}{4\pi\hat{r}^3|\bar{k}|^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 3\frac{(c_{2233}r_1+c_{1233}r_2+c_{1223}r_3)}{\hat{r}^2|\bar{k}|}(\tilde{q}_1n_1 + \tilde{q}_2n_2 + \tilde{q}_3n_3) - (\alpha_1n_1 + \alpha_2n_2 + \alpha_3n_3) \\ 3\frac{(c_{1233}r_1+c_{1122}r_2+c_{1123}r_3)}{\hat{r}^2|\bar{k}|}(\tilde{q}_1n_1 + \tilde{q}_2n_2 + \tilde{q}_3n_3) - (\beta_1n_1 + \beta_2n_2 + \beta_3n_3) \\ 3\frac{(c_{1223}r_1+c_{1123}r_2+c_{1122}r_3)}{\hat{r}^2|\bar{k}|}(\tilde{q}_1n_1 + \tilde{q}_2n_2 + \tilde{q}_3n_3) - (\gamma_1n_1 + \gamma_2n_2 + \gamma_3n_3) \end{bmatrix} \quad (C.20)$$

### 1.2.3 Gradients usuels

Nous rappelons que le gradient de  $\hat{r}^n$ , utilisé dans les expressions précédentes, s'exprime comme suit :

$$\vec{\nabla}^M \hat{r}^n = +\frac{n}{\hat{r}^{2-n}|\bar{k}|} \begin{bmatrix} (c_{2233}r_1 + c_{1233}r_2 + c_{1223}r_3) \\ (c_{1233}r_1 + c_{1122}r_2 + c_{1123}r_3) \\ (c_{1223}r_1 + c_{1123}r_2 + c_{1122}r_3) \end{bmatrix} \quad (C.21)$$

## 2 Problème de Stokes 2D

### 2.1 Calcul de la vitesse interne

La vitesse au point interne  $S$  est obtenue en utilisant l'identité de Somigliana :

$$\begin{bmatrix} v_1(S) \\ v_2(S) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} v_{11}^\star(M,S) & v_{12}^\star(M,S) \\ v_{21}^\star(M,S) & v_{22}^\star(M,S) \end{bmatrix} d\Gamma_j(M) \right) \begin{bmatrix} T_1(M^j) \\ T_2(M^j) \end{bmatrix} \\ - \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} T_{11}^\star(M,S) & T_{12}^\star(M,S) \\ T_{21}^\star(M,S) & T_{22}^\star(M,S) \end{bmatrix} d\Gamma_j(M) \right) \begin{bmatrix} v_1(M^j) \\ v_2(M^j) \end{bmatrix} \quad (C.22)$$

**Solution fondamentale  $v_{lk}^\star$**  Pour un problème d'élastostatique 2D, Kelvin donne la solution fondamentale suivante :

$$v_{lk}^\star(M,S) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu)\delta_{lk} \ln \frac{1}{r} + \frac{r_l r_k}{r^2} \right] \quad \text{en 2D} \quad (C.23)$$

où  $\nu$  est la coefficient de Poisson, qui doit tendre vers  $\frac{1}{2}$  pour assurer l'incompressibilité, et  $\mu$  le module de cisaillement, ou encore la viscosité dynamique pour un fluide.

**État de contrainte  $T_{lk}^\star$**  La contrainte associée à  $v_{lk}^\star$  s'écrit :

$$T_{lk}^\star(M,S) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{1-2\nu}{r} (n_l r_k - n_k r_l) \right. \\ \left. + \left[ 2\frac{r_l r_k}{r^2} + (1-2\nu)\delta_{lk} \right] \frac{r_j n_j}{r} \right] \quad \text{en 2D} \quad (C.24)$$

où  $n_l$  est la projection de la normale  $\vec{n}$  suivant  $\vec{e}_l$ .

## 2.2 Calcul des contraintes internes

Le terme général du tenseur des vitesses de déformation  $\bar{\varepsilon}$  est tel que :

$$\varepsilon_{lk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) \quad (\text{C.25})$$

Dans la relation (C.22) le calcul du terme  $\frac{\partial v_k}{\partial x_l}$  fait intervenir la dérivée suivant  $x_l$  de la  $k^{\text{ième}}$  ligne des matrices  $v_{lk}^*$  et  $T_{lk}^*$  comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial x_l^S} = & \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_l^S} \left[ v_{k1}^*(M,S) \quad v_{k2}^*(M,S) \right] d\Gamma_j(M) \right) \begin{bmatrix} T_1(M^j) \\ T_2(M^j) \end{bmatrix} \\ & - \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_l^S} \left[ T_{k1}^*(M,S) \quad T_{k2}^*(M,S) \right] d\Gamma_j(M) \right) \begin{bmatrix} v_1(M^j) \\ v_2(M^j) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

où  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_l^S}$  désigne la dérivée prise au point source  $S$ . Le terme général du tenseur des vitesses de déformation au point interne  $S$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{lk}(S) = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \left[ \frac{\partial v_{l1}^*(M,S)}{\partial x_k^S} + \frac{\partial v_{k1}^*(M,S)}{\partial x_l^S} \quad \frac{\partial v_{l2}^*(M,S)}{\partial x_k^S} + \frac{\partial v_{k2}^*(M,S)}{\partial x_l^S} \right] d\Gamma_j(M) \right) \begin{bmatrix} T_1(M^j) \\ T_2(M^j) \end{bmatrix} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \left[ \frac{\partial T_{l1}^*(M,S)}{\partial x_k^S} + \frac{\partial T_{k1}^*(M,S)}{\partial x_l^S} \quad \frac{\partial T_{l2}^*(M,S)}{\partial x_k^S} + \frac{\partial T_{k2}^*(M,S)}{\partial x_l^S} \right] d\Gamma_j(M) \right) \begin{bmatrix} v_1(M^j) \\ v_2(M^j) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Brebbia montre que la substitution de (C.27) dans la loi de comportement linéaire élastique conduit à l'expression du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_{lk}(S) = & \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \left[ D_{1lk}^* \quad D_{2lk}^* \right] d\Gamma_j(M) \right) \begin{bmatrix} T_1(M^j) \\ T_2(M^j) \end{bmatrix} \\ & - \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \left[ S_{1lk}^* \quad S_{2lk}^* \right] d\Gamma_j(M) \right) \begin{bmatrix} v_1(M^j) \\ v_2(M^j) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

où  $D_{ilk}^*$  et  $S_{ilk}^*$  correspondent respectivement au tenseur des déformations et des contraintes dus à l'application d'une charge unitaire au point  $S$  dans la direction  $\vec{e}_i$ , donnés en 2D comme suit :

$$D_{ilk}^* = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu)(r_{,l}\delta_{ki} + r_{,i}\delta_{kl}) - r_{,k}\delta_{il} + 2r_{,k}r_{,i}r_{,l} \right\} \quad (\text{C.29})$$

$$S_{ilk}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu)(r_{,k}\delta_{il} + r_{,l}\delta_{kl} - r_{,k}\delta_{ki} - r_{,i}\delta_{lk}) + 2r_{,i}r_{,l}r_{,k} \right\} \quad (\text{C.30})$$

# Annexe D

## Algorithmes

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Assemblage des matrices <math>G</math> et <math>H</math></b>	<b>174</b>
1.1	Problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D	174
1.2	Problème de Stokes 2D	175
<b>2</b>	<b>Réorganisation et résolution du système linéaire</b>	<b>176</b>
2.1	Problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D	176
2.2	Problème de Stokes 2D	177
<b>3</b>	<b>Calculs aux points internes</b>	<b>178</b>
3.1	Problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D	178
3.2	Problème de Stokes 2D	181
<b>4</b>	<b>Remaillage frontière</b>	<b>183</b>
4.1	Régularisation du maillage	183
4.2	Marching Triangles	184
4.3	Marching Tetrahedra	185

---

Les algorithmes présentés dans cette annexe sous forme de pseudo-codes ont été implémentés sous l'environnement MATLAB®. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe E pour la description de la procédure d'intégration par la méthode de Gauss.

## 1 Assemblage des matrices $G$ et $H$

### 1.1 Problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D

```

Entrée : Maillage frontière
Sorties : Matrices  $H$  et  $G$ 

1 /* Boucle principale sur les points de calcul */
2 pour  $i \leftarrow 1$  à  $N$  faire
3   /* Boucle imbriquée sur les points de calcul */
4   pour  $j \leftarrow 1$  à  $N$  faire
5     si  $i \neq j$  alors
6        $H_{ij} \leftarrow |J_j| \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p q^*(\mathcal{G}_p, S^i)$ 
7        $G_{ij} \leftarrow |J_j| \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p p^*(\mathcal{G}_p, S^i)$ 
8     sinon
9        $H_{ii} \leftarrow -\sum_{j \neq i} H_{ij}$ 
10       $G_{ii} \leftarrow |J_j| \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p p^*(\mathcal{G}_p, S^i)$ 
11    fin
12  fin
13 fin

```

**Algorithme D.1.** Assemblage des matrices  $H$  et  $G$  (problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D)



## 1.2 Problème de Stokes 2D

```

Entrée : Maillage frontière
Sorties : Matrices  $H$  et  $G$ 

1 /* Boucle principale sur les points de calcul */
2 pour  $i \leftarrow 1$  à  $N$  faire
3     /* Boucle imbriquée sur les points de calcul */
4     pour  $j \leftarrow 1$  à  $N$  faire
5         si  $i = j$  alors
6             /* Assemblage du bloc  $[H_{ii}]$  */
7              $[H_{ii}]_{11} \leftarrow \frac{1}{2}$ 
8              $[H_{ii}]_{22} \leftarrow \frac{1}{2}$ 
9              $[H_{ii}]_{12} \leftarrow 0$ 
10             $[H_{ii}]_{21} \leftarrow 0$ 
11            /* Assemblage du bloc  $[G_{ii}]$  */
12             $[G_{ii}]_{11} \leftarrow \frac{L_i}{4\pi\mu} \left[ \left(1 - \ln \frac{L_i}{2}\right) \frac{r_1^2}{L_i^2} \right]$ 
13             $[G_{ii}]_{22} \leftarrow \frac{L_i}{4\pi\mu} \left[ \left(1 - \ln \frac{L_i}{2}\right) \frac{r_2^2}{L_i^2} \right]$ 
14             $[G_{ii}]_{12} \leftarrow \frac{L_i}{4\pi\mu} \left[ \frac{r_1 r_2}{L_i^2} \right]$ 
15             $[G_{ii}]_{21} \leftarrow [G_{ii}]_{12}$  /* Symétrie */
16        sinon
17            /* Assemblage du bloc  $[H_{ij}]$  */
18             $[H_{ij}]_{11} \leftarrow \frac{L_j}{2} \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p t_{11}^* (\mathcal{G}_p, S^i)$ 
19             $[H_{ij}]_{22} \leftarrow \frac{L_j}{2} \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p t_{22}^* (\mathcal{G}_p, S^i)$ 
20             $[H_{ij}]_{12} \leftarrow \frac{L_j}{2} \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p t_{12}^* (\mathcal{G}_p, S^i)$ 
21             $[H_{ij}]_{21} \leftarrow [H_{ij}]_{12}$  /* Symétrie si  $\nu = \frac{1}{2}$  */
22            /* Assemblage du bloc  $[G_{ij}]$  */
23             $[G_{ij}]_{11} \leftarrow \frac{L_j}{2} \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p u_{11}^* (\mathcal{G}_p, S^i)$ 
24             $[G_{ij}]_{22} \leftarrow \frac{L_j}{2} \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p u_{22}^* (\mathcal{G}_p, S^i)$ 
25             $[G_{ij}]_{12} \leftarrow \frac{L_j}{2} \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p u_{12}^* (\mathcal{G}_p, S^i)$ 
26             $[G_{ij}]_{21} \leftarrow [G_{ij}]_{12}$  /* Symétrie */
27        fin
28    fin
29 fin

```

Algorithme D.2. Assemblage des matrices  $H$  et  $G$  (problème de Stokes 2D)

## 2 Réorganisation et résolution du système linéaire

### 2.1 Problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D

```

Entrée : Matrices  $H$  et  $G$ ,  $C$ 
Sorties : Matrices  $A$ , vecteurs  $X$  et  $B$ 

1 /* Réorganisation du système linéaire par regroupement des
   inconnues à gauche */
2 pour  $i \leftarrow 1$  à  $N$  faire /* Boucle sur les points de calcul */
3   | si  $\Gamma_i \in \Gamma_p$  alors
4   |   | Permuter les colonnes  $i$  de  $H$  et  $G$ 
5   |   | Changer les signes des colonnes  $i$  de  $H$  et  $G$ 
6   | fin
7 fin
8 /* Matrice à inverser */
9  $A \leftarrow H$ 
10 /* Second membre */
11  $B \leftarrow G \times C$ 
12 /* Inversion du système linéaire */
13  $X \leftarrow A^{-1} \times B$ 
14 /* Attribution du résultat dans  $P$  et  $Q$  */
15 pour  $i \leftarrow 1$  à  $N$  faire /* Boucle sur les points de calcul */
16 | si  $\Gamma_i \in \Gamma_p$  alors
17 |   |  $Q_i \leftarrow X_i$ 
18 |   |  $P_i \leftarrow C_i$ 
19 | sinon
20 |   |  $P_i \leftarrow X_i$ 
21 |   |  $Q_i \leftarrow C_i$ 
22 | fin
23 fin

```

**Algorithme D.3.** Réorganisation du système  $HP = GQ$  en système linéaire standard  $AX = B$ , et résolution (problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D)

## 2.2 Problème de Stokes 2D

```

Entrée : Matrices  $H$  et  $G, C$ 
Sorties : Matrices  $A$ , vecteurs  $X$  et  $B$ 

1 /* Réorganisation du système linéaire par regroupement des      */
   inconnues à gauche                                           */
2 pour  $i \leftarrow 1$  à  $2N$  faire                               /* Boucle sur les ddl */
3   | si  $\Gamma_i \in \Gamma_{v_k}$  alors
4   |   | Permuter les colonnes  $i$  de  $H$  et  $G$ 
5   |   | Changer les signes des colonnes  $i$  de  $H$  et  $G$ 
6   | fin
7 fin
8 /* Matrice à inverser                                          */
9  $A \leftarrow H$ 
10 /* Second membre                                             */
11  $B \leftarrow G \times C$ 
12 /* Inversion du système linéaire                              */
13  $X \leftarrow A^{-1} \times B$ 
14 /* Attribution du résultat dans  $V$  et  $T$                     */
15 pour  $i \leftarrow 1$  à  $2N$  faire                               /* Boucle sur les ddl */
16 | si  $\Gamma_i \in \Gamma_{v_k}$  alors
17 |   |  $T_i \leftarrow X_i$ 
18 |   |  $V_i \leftarrow C_i$ 
19 | sinon
20 |   |  $T_i \leftarrow X_i$ 
21 |   |  $V_i \leftarrow C_i$ 
22 | fin
23 fin

```

**Algorithme D.4.** Réorganisation du système  $HV = GT$  en système linéaire standard  $AX = B$ , et résolution (problème de Stokes 2D)

### 3 Calculs aux points internes

#### 3.1 Problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D

##### 3.1.1 Pression interne

<b>Entrée</b> : Coordonnées des points internes $S$ , Maillage frontière, Pressions et gradients normaux de pression aux centres des éléments frontières	
<b>Sorties</b> : Pressions aux points internes	
1	<b>/*</b> Boucle sur les points internes <span style="float:right"><b>*/</b></span>
2	<b>pour</b> $i \leftarrow 1$ à $NbPtsInternes$ <b>faire</b>
3	$s \leftarrow 0$
4	<b>/*</b> Boucle sur les points milieux des éléments frontières <span style="float:right"><b>*/</b></span>
5	<b>pour</b> $j \leftarrow 1$ à $N$ <b>faire</b>
6	<b>/*</b> Ajout de la contribution de l'élément $j$ <span style="float:right"><b>*/</b></span>
7	$s \leftarrow s +  J_j  \left\{ q(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p p^*(\mathcal{G}_p, S^i) - p(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p q^*(\mathcal{G}_p, S^i) \right\}$
8	<b>fin</b>
9	$p(S^i) \leftarrow s$
10	<b>fin</b>

**Algorithme D.5.** Calcul de la pression interne (problèmes potentiels anisotropes 2D et 3D)

## 3.1.2 Gradients de pression interne

## Problème 2D

<b>Entrée</b> : Coordonnées des points internes $S$ , Maillage frontière, Pressions et gradients normaux de pression aux centres des éléments frontières	
<b>Sorties</b> : Gradients de pression aux points internes	
1	<b>/* Boucle sur les points internes</b> <span style="float:right">*/</span>
2	<b>pour</b> $i \leftarrow 1$ à $NbPtsInternes$ <b>faire</b>
3	$s_1 \leftarrow 0$
4	$s_2 \leftarrow 0$
5	<b>/* Boucle sur les points milieux des éléments frontières</b> <span style="float:right">*/</span>
6	<b>pour</b> $j \leftarrow 1$ à $N$ <b>faire</b>
7	<b>/* Ajout de la contribution de l'élément <math>j</math></b> <span style="float:right">*/</span>
8	$s_1 \leftarrow s_1 + \frac{L_j}{2} \left\{ q(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p \frac{\partial p^*}{\partial x_1^S} (\mathcal{G}_p, S^i) - p(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p \frac{\partial p^*}{\partial x_1^S} (\mathcal{G}_p, S^i) \right\}$
9	$s_2 \leftarrow s_2 + \frac{L_j}{2} \left\{ q(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p \frac{\partial p^*}{\partial x_2^S} (\mathcal{G}_p, S^i) - p(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p \frac{\partial p^*}{\partial x_2^S} (\mathcal{G}_p, S^i) \right\}$
10	<b>fin</b>
11	$\frac{\partial p}{\partial x_1^S}(S^i) \leftarrow s_1$
12	$\frac{\partial p}{\partial x_2^S}(S^i) \leftarrow s_2$
13	<b>fin</b>

**Algorithme D.6.** Calcul des gradients de pression internes (problème potentiel anisotrope 2D)

## Problème 3D

**Entrée** : Coordonnées des points internes  $S$ , Maillage frontière, Pressions et gradients normaux de pression aux centres des éléments frontières

**Sorties** : Gradients de pression aux points internes

```

1 /* Boucle sur les points internes */
2 pour  $i \leftarrow 1$  à  $NbPtsInternes$  faire
3    $s_1 \leftarrow 0$ 
4    $s_2 \leftarrow 0$ 
5    $s_3 \leftarrow 0$ 
6   /* Boucle sur les points milieu des éléments frontières */
7   pour  $j \leftarrow 1$  à  $N$  faire
8     /* Ajout de la contribution de l'élément  $j$  */
9      $s_1 \leftarrow s_1 + 2A_j \left\{ q(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p \frac{\partial p^*}{\partial x_1^S} (\mathcal{G}_p, S^i) - p(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p \frac{\partial p^*}{\partial x_1^S} (\mathcal{G}_q, S^i) \right\}$ 
10     $s_2 \leftarrow s_2 + 2A_j \left\{ q(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p \frac{\partial p^*}{\partial x_2^S} (\mathcal{G}_p, S^i) - p(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p \frac{\partial p^*}{\partial x_2^S} (\mathcal{G}_q, S^i) \right\}$ 
11     $s_3 \leftarrow s_3 + 2A_j \left\{ q(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p \frac{\partial p^*}{\partial x_3^S} (\mathcal{G}_p, S^i) - p(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p \frac{\partial p^*}{\partial x_3^S} (\mathcal{G}_p, S^i) \right\}$ 
12  fin
13   $\frac{\partial p}{\partial x_1^S}(S^i) \leftarrow s_1$ 
14   $\frac{\partial p}{\partial x_2^S}(S^i) \leftarrow s_2$ 
15   $\frac{\partial p}{\partial x_3^S}(S^i) \leftarrow s_3$ 
16 fin

```

**Algorithme D.7.** Calcul des gradients de pression internes (problème potentiel anisotrope 3D)

## 3.2 Problème de Stokes 2D

### 3.2.1 Vitesse interne

<p><b>Entrée</b> : Coordonnées des points internes <math>S</math>, Maillage frontière, Vitesses et tractions aux centres des éléments frontières</p> <p><b>Sorties</b> : Composantes des vitesses aux points internes</p> <pre style="font-family: monospace; font-size: 0.9em;"> 1 /* Boucle sur les points internes                                     */ 2 pour <math>i \leftarrow 1</math> à <math>NbPtsInternes</math> faire 3   <math>s_1 \leftarrow 0</math> 4   <math>s_2 \leftarrow 0</math> 5   /* Boucle sur les points milieux des éléments frontières       */ 6   pour <math>j \leftarrow 1</math> à <math>N</math> faire 7     /* Ajout de la contribution de l'élément <math>j</math>                   */ 8     <math>s_1 \leftarrow s_1 + \frac{L_j}{2} \left\{ T_1(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p v_{11}^*(\mathcal{G}_p, S^i) + T_2(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p v_{12}^*(\mathcal{G}_p, S^i) \right.</math> 9       <math>\left. - v_1(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p T_{11}^*(\mathcal{G}_p, S^i) - v_2(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p T_{12}^*(\mathcal{G}_p, S^i) \right\}</math> 10    <math>s_2 \leftarrow s_2 + \frac{L_j}{2} \left\{ T_1(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p v_{21}^*(\mathcal{G}_p, S^i) + T_2(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p v_{22}^*(\mathcal{G}_p, S^i) \right.</math> 11      <math>\left. - v_1(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p T_{21}^*(\mathcal{G}_p, S^i) - v_2(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p T_{22}^*(\mathcal{G}_p, S^i) \right\}</math> 12    fin 13    <math>v_1(S^i) \leftarrow s_1</math> 14    <math>v_2(S^i) \leftarrow s_2</math> 15 fin </pre>	<p>*/</p> <p>*/</p> <p>*/</p> <p>*/</p> <p>*/</p>
---	---

**Algorithme D.8.** Calcul des vitesses internes (problème de Stokes 2D)

## 3.2.2 Contraintes internes

<p><b>Entrée</b> : Coordonnées des points internes <math>S</math>, Maillage frontière, Vitesses et tractions aux centres des éléments frontières</p> <p><b>Sorties</b> : Tenseur des contraintes aux points internes</p> <pre> 1 /* Boucle sur les points internes */ 2 pour <math>i \leftarrow 1</math> à <math>NbPtsInternes</math> faire 3   <math>s_{11} \leftarrow 0</math> 4   <math>s_{12} \leftarrow 0</math> 5   <math>s_{22} \leftarrow 0</math> 6   /* Boucle sur les points milieux des éléments frontières */ 7   pour <math>j \leftarrow 1</math> à <math>N</math> faire 8     /* Ajout de la contribution de l'élément <math>j</math> */ 9     <math>s_{11} \leftarrow s_{11} + \frac{L_j}{2}</math> 10      <math>\left\{ T_1(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p D_{111}^*(\mathcal{G}_p, S^i) + T_2(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p D_{211}^*(\mathcal{G}_p, S^i) \right.</math> 11      <math>\left. - v_1(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p S_{111}^*(\mathcal{G}_p, S^i) - v_2(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p S_{211}^*(\mathcal{G}_p, S^i) \right\}</math> 12     <math>s_{12} \leftarrow s_{12} + \frac{L_j}{2}</math> 13      <math>\left\{ T_1(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p D_{112}^*(\mathcal{G}_p, S^i) + T_2(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p D_{212}^*(\mathcal{G}_p, S^i) \right.</math> 14      <math>\left. - v_1(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p S_{112}^*(\mathcal{G}_p, S^i) - v_2(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p S_{212}^*(\mathcal{G}_p, S^i) \right\}</math> 15     <math>s_{22} \leftarrow s_{22} + \frac{L_j}{2}</math> 16      <math>\left\{ T_1(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p D_{122}^*(\mathcal{G}_p, S^i) + T_2(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p D_{222}^*(\mathcal{G}_p, S^i) \right.</math> 17      <math>\left. - v_1(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p S_{122}^*(\mathcal{G}_p, S^i) - v_2(M^j) \sum_{p=1}^{N_G} \omega_p S_{222}^*(\mathcal{G}_p, S^i) \right\}</math> 18   fin 19   <math>\sigma_{11}(S^i) \leftarrow s_{11}</math> 20   <math>\sigma_{12}(S^i) \leftarrow s_{12}</math> 21   <math>\sigma_{22}(S^i) \leftarrow s_{22}</math> 22 fin </pre>
---

Algorithme D.9. Calcul des contraintes internes (problème de Stokes 2D)



## 4 Remaillage frontière

### 4.1 Régularisation du maillage

**Entrées** : Grille de fond, Distance signée à la grille, Tolérance level set  
**Sortie** : Distance signée perturbée

```
1 pour tous les les points i de la grille faire  
2   | si  $|\phi_i| \leq \varepsilon_\phi$  alors  
3   |   |  $\phi_i \leftarrow 0$   
4   | fin  
5 fin
```

**Algorithme D.10.** Perturbation du champ de distance signée

## 4.2 Marching Triangles

```

Entrée : Grille de fond (triangles), Distance signée aux nœuds de la grille
Sortie : Maillage frontière (segments)

1 pour chaque Triangle faire
2   Identifier la configuration
3   suivant Configuration faire
4     cas 0
5       /* Le triangle n'est pas traversé par la frontière. */
6       Passer au triangle suivant
7     cas 0*
8       /* Le triangle est traversé par 3 segments (cas
9         particulier pour le traitement des coins). */
10      Placer les nœuds sur les sommets
11      Connecter les nœuds définissant l'élément
12      Calculer les normales sortantes
13     cas 1
14       /* Le triangle est traversé par 1 segment. */
15       Interpoler linéairement les nœuds le long des arêtes
16       Connecter les nœuds définissant l'élément
17       Calculer la normale sortante
18   fin
19 fin
20 /* Nettoyage des éléments doubles liés à la configuration 0*. */
21 Supprimer les éléments doubles et leurs normales

```

**Algorithme D.11.** Génération du maillage frontière 2D par Marching Triangles

### 4.3 Marching Tetrahedra

```

Entrée : Grille de fond (tétraèdres), Distance signée aux nœuds de la grille
Sortie : Maillage frontière (triangles)

1 pour chaque Tétraèdre faire
2   Identifier la configuration
3   suivant Configuration faire
4     cas 0
5       /* Le tétraèdre n'est pas traversé par la frontière. */
6       Passer au tétraèdre suivant
7     cas 0*
8       /* Le tétraèdre est traversé par 4 triangles (cas
9         particulier pour le traitement des coins). */
10      Placer les nœuds sur les sommets
11      Connecter les nœuds définissant les éléments
12      Calculer les normales sortantes
13     cas 1
14       /* Le tétraèdre est traversé par 1 triangle. */
15       Interpoler linéairement les nœuds le long des arêtes
16       Connecter les nœuds définissant l'élément
17       Calculer la normale sortante
18     cas 2
19       /* Le tétraèdre est traversé par 1 quadrangle divisé en 2
20         triangles. */
21       Interpoler linéairement les nœuds le long des arêtes
22       Connecter les nœuds définissant les éléments
23       Calculer les normales sortantes
24   fin
25 fin
26 /* Nettoyage des éléments doubles liés à la configuration 0*. */
27 Supprimer les éléments doubles et leurs normales

```

**Algorithme D.12.** Génération du maillage frontière 3D par Marching Tetrahedra



# Annexe E

## Intégration numérique par la formule de Gauss

Nous présentons dans cette annexe la procédure que nous avons implémentée pour évaluer les intégrales frontières intervenant dans la méthode BEM. Nous utilisons la méthode de Gauss, qui permet d'intégrer exactement un polynôme d'ordre  $2p - 1$  en utilisant  $p$  points. Les éléments que nous utilisons pour discrétiser la frontière du domaine sont des segments à deux nœuds (problème 2D) ou des triangles à trois nœuds (problème 3D).

### 1 Élément 1D : segment à 2 nœuds

**Intégration** L'intégration sur le segment  $[AB]$  est traitée en utilisant l'élément de référence 1D défini sur l'intervalle  $[-1,1]$ , c.f. figure E.1 (a). La formule de quadrature de Gauss s'écrit :

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{p=1}^{N_G} w_p f(\xi_p) \quad (\text{E.1})$$

où  $f$  est la fonction à intégrer,  $\xi_p$  les coordonnées du point de Gauss  $p$ ,  $w_p$  le poids de Gauss associé à ce point, et  $N_G$  le nombre de points de Gauss [100, 162]. Le calcul d'une intégrale sur un segment de longueur AB est réalisé par changement de variables :

$$\int_A^B f(M) d\Gamma = |J| \sum_{p=1}^{N_G} w_p f(\mathcal{G}_p) \quad (\text{E.2})$$

où  $|J|$  est le déterminant de la matrice jacobienne (encore appelé « jacobien ») de la transformation de l'élément réel à l'élément de référence, et  $\mathcal{G}_p$  le point de Gauss  $p$  dans l'élément réel.

**Jacobien** Pour un élément 1D, le jacobien est donné comme la demi-longueur du segment :

$$|J| = \frac{L}{2} \quad (\text{E.3})$$

où  $L = AB$  est la longueur de l'élément réel.

**Points de Gauss dans l'élément réel** Dans l'élément réel, les coordonnées du point de Gauss  $\mathcal{G}_p$  sont calculées en utilisant les fonctions de forme du segment à deux nœuds, c.f. figure E.1 (b) :

$$\begin{cases} \mathcal{N}_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ \mathcal{N}_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{cases} \quad (\text{E.4a})$$

$$\quad \quad \quad (\text{E.4b})$$

Pour un élément 1D :

$$x_i^{\mathcal{G}_p} = \mathcal{N}_1(\xi_p)x_i^A + \mathcal{N}_2(\xi_p)x_i^B \quad (\text{E.5})$$

où  $x_i^{\mathcal{G}_p}$  est la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée du point de Gauss  $\mathcal{G}_p$  et  $x_i^A, x_i^B$  désignent respectivement la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée des points  $A$  et  $B$ .

## 2 Élément 2D : triangle à 3 nœuds

**Intégration** L'intégration sur le triangle  $ABC$  est traitée en utilisant l'élément de référence 2D défini dans le plan  $(\xi, \eta)$ , c.f. figure E.1 (b). La formule de quadrature de Gauss s'écrit :

$$\int_0^{1-\xi} \left( \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta = \sum_{p=1}^{N_G} w_p f(\xi_p, \eta_p) \quad (\text{E.6})$$

où  $f$  est la fonction à intégrer. Un changement de variables permet de calculer l'intégrale sur l'élément réel défini par le triangle  $ABC$  comme suit :

$$\int_{ABC} f(M) d\Gamma = |J| \sum_{p=1}^{N_G} w_p f(\mathcal{G}_p) \quad (\text{E.7})$$

où  $|J|$  désigne le jacobien de la transformation de l'élément réel à l'élément de référence, et  $\mathcal{G}_p$  le point de Gauss  $p$  dans l'élément réel.

**Jacobien** Pour un élément 2D, le jacobien est donné comme suit :

$$|J| = 2A \quad (\text{E.8})$$

où  $A$  désigne l'aire du triangle  $ABC$ .

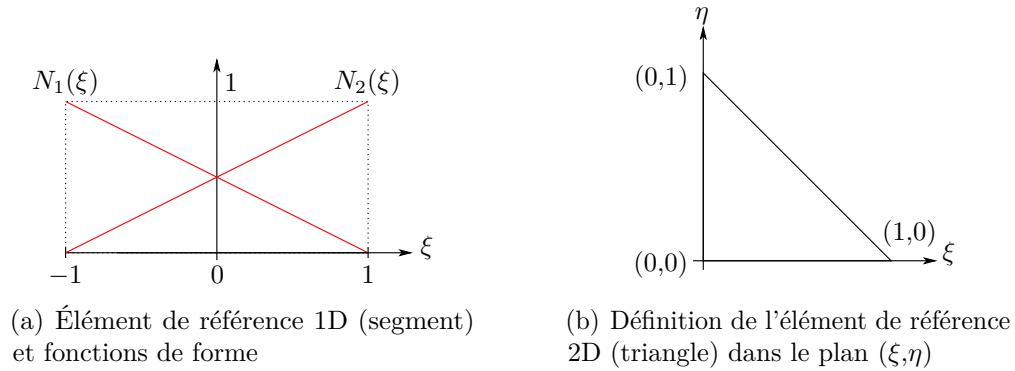
**Points de Gauss dans l'élément réel** Dans l'élément réel, les coordonnées du point de Gauss  $\mathcal{G}_p$  sont calculées en utilisant les fonctions de forme du triangle à trois nœuds, données comme suit [162] :

$$\begin{cases} \mathcal{N}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta & \text{(E.9a)} \\ \mathcal{N}_2(\xi) = \xi & \text{(E.9b)} \\ \mathcal{N}_3(\eta) = \eta & \text{(E.9c)} \end{cases}$$

Pour un élément 2D :

$$x_i^{\mathcal{G}_p} = \mathcal{N}_1(\xi_p, \eta_p)x_i^A + \mathcal{N}_2(\xi_p)x_i^B + \mathcal{N}_3(\eta_p)x_i^C \quad \text{(E.10)}$$

où  $x_i^{\mathcal{G}_p}$  est la  $i^{\text{ième}}$  coordonnée du point de Gauss  $\mathcal{G}_p$ , et  $x_i^A, x_i^B, x_i^C$  désignent respectivement la  $i^{\text{ième}}$  coordonnée des points  $A, B$  et  $C$ .



**Figure E.1.** Éléments de référence 1D et 2D





# Annexe F

## Problème de Stokes : formulation et équivalence élastostatique

### 1 Formulation des équations de Stokes

L'objectif de cette section est de montrer que le système d'équations (F.1) permet d'obtenir les équations de Stokes (F.6).

$$\forall M \in \Omega, \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma} = \vec{0} & \text{(F.1a)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 & \text{(F.1b)} \\ \bar{\sigma} = -p\bar{I} + 2\mu\bar{\varepsilon} & \text{(F.1c)} \\ \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\overline{\nabla}\vec{v} + {}^t\overline{\nabla}\vec{v}) & \text{(F.1d)} \end{cases}$$

où  $\Omega$  désigne le fluide Newtonien,  $\bar{\sigma}$  le tenseur des contraintes,  $\bar{\varepsilon}$  le tenseur des vitesses de déformation,  $\bar{I}$  le tenseur identité,  $\vec{v}$  la vitesse,  $p$  la pression et  $\mu$  la viscosité dynamique.

La substitution de la loi de comportement (F.1c) dans l'équation d'équilibre statique (F.1a) fournit :

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x_1} + 2\mu \left( \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_3} \right) \\ -\frac{\partial p}{\partial x_2} + 2\mu \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_3} \right) \\ -\frac{\partial p}{\partial x_3} + 2\mu \left( \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_3} \right) \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{(F.2)}$$

qui s'écrit encore, en isolant la contribution de la pression :

$$2\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} p \quad \text{(F.3)}$$

L'introduction du tenseur des vitesses de déformation (F.1d) dans (F.3) conduit à :

$$\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} p \quad (\text{F.4})$$

Dans l'expression (F.4), le terme de gauche peut alors être décomposé comme suit :

$$\mu \left( \Delta \vec{v} + \vec{\nabla} \text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}) \right) = \vec{\nabla} p \quad (\text{F.5})$$

où  $\text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$  désigne la trace du tenseur des vitesses de déformation, qui s'annule dans le cas d'un fluide incompressible. L'équation (F.5) est ainsi réduite à l'équation de Stokes (F.6a). Associée à l'équation d'incompressibilité du fluide, nous obtenons les équations de Stokes :

$$\forall M \in \Omega, \begin{cases} \mu \Delta \vec{v} = \vec{\nabla} p & (\text{F.6a}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 & (\text{F.6b}) \end{cases}$$

## 2 Équivalence avec le problème d'élastostatique

Comme l'ont montré Brebbia et Dominguez [100] ou encore Schmidt [156], la résolution du problème de Stokes (et plus généralement tout problème d'écoulement Newtonien) est identique à celle d'un problème d'élastostatique. Il existe en effet une équivalence formelle entre la loi de comportement d'un fluide Newtonien (F.1c) et celle d'un solide linéaire élastique (F.7) :

$$\bar{\bar{\sigma}}^e = \lambda \text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}) \bar{\bar{I}} + 2\hat{\mu} \bar{\bar{\varepsilon}} \quad (\text{F.7})$$

où  $\bar{\bar{\sigma}}^e$  désigne le tenseur des contraintes élastiques,  $\bar{\bar{\varepsilon}}$  le tenseur des déformations et  $(\lambda, \hat{\mu})$  les coefficients de Lamé. Les coefficients de Lamé s'expriment en fonction du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  comme suit :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{et} \quad \hat{\mu} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{F.8})$$

En dérivant la relation (F.7) par rapport au temps, le second coefficient de Lamé (module de cisaillement) s'identifie à la viscosité dynamique du fluide ( $\hat{\mu} = \mu$ ). Il suffit ensuite de poser :

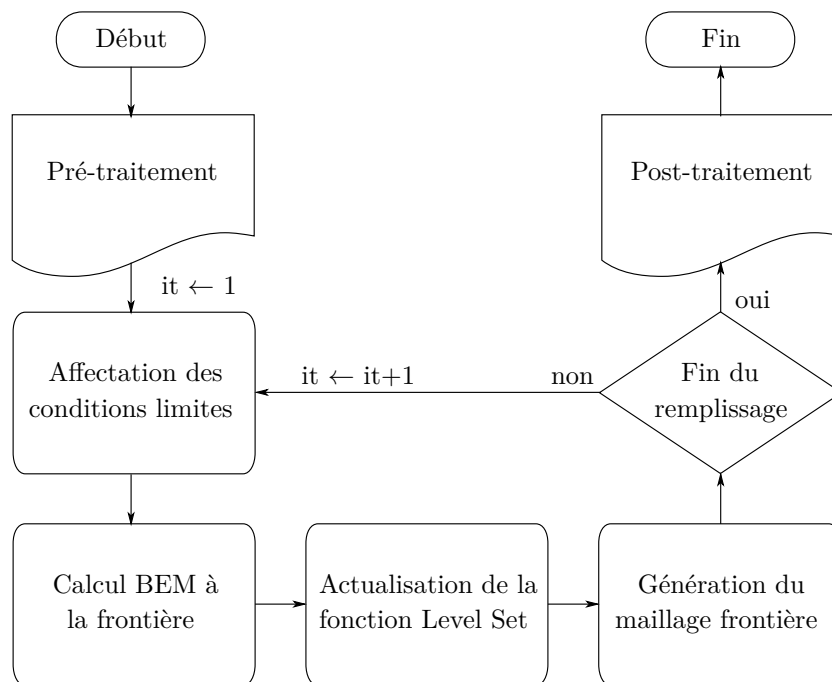
$$\text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}) = -\frac{p}{\lambda} \quad (\text{F.9})$$

Cette dernière relation montre que la condition d'incompressibilité est satisfaite si  $\lambda \rightarrow \infty$ , autrement dit  $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$ .

# Annexe G

## Présentation du logiciel LCMBE

Cette annexe présente l'interface graphique du programme LCMBE (« Liquid Composite Molding Boundary Elements »). L'organisation du calcul est donnée figure G.1, nous renvoyons le lecteur au chapitre 2 pour une description complète de la méthode.



**Figure G.1.** Organisation du calcul de remplissage

Nous avons développé l'interface sous MATLAB<sup>®</sup>. Elle assure le pré-traitement et le post-traitement des calculs 2D, la version 3D est encore en cours de développement à l'ICA. Les autres étapes présentées dans l'organigramme font partie intégrante du solveur et sont automatiquement prises en charge par le programme.

## 1 Fenêtre principale

**Organisation** La fenêtre principale est divisée<sup>1</sup> en trois zones (figure G.2) :

- **Écran principal** : Zone d’affichage de la pièce,
- **Panneau** : Zone d’affichage liée au menu déroulant,
- **Journal d’évènements** : Zone d’information.

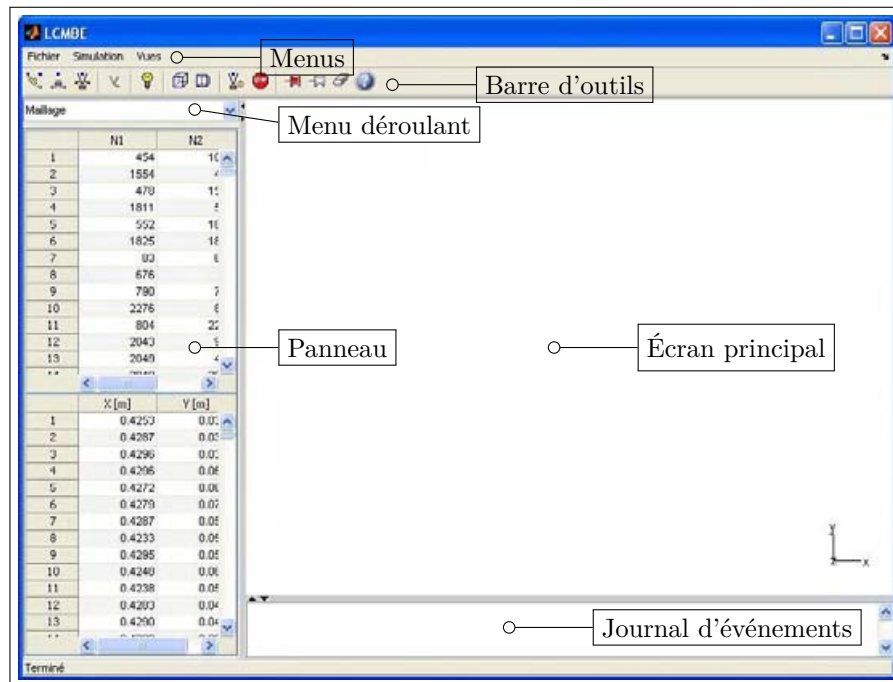


Figure G.2. Fenêtre principale de l’application

**Menus** Nous avons implanté les menus suivants :

- **Fichier** : Importation de la grille de fond, fermeture de l’application,
- **Simulation** : Démarrage du calcul,
- **Vues** : Choix du plan de visualisation de la pièce.

**Menu déroulant** Les panneaux s’affichent par sélection dans le menu déroulant :

- **Maillage** : Table de connectivité et table de coordonnées,
- **Propriétés matériaux** : Propriétés du renfort et de la résine,
- **Paramètres d’injection** : Paramètres liés au procédé,
- **Post-traitement** : Visualisation des résultats.

**Barre d’outils** La barre d’outils est implantée pour assurer deux types de fonctions :

- **Fonction de visualisation** : Manipulation de la pièce
- **Fonction de sélection / exploration** : Sélection des points d’injection et exploration du maillage .

1. Nous utilisons la fonction « UiSplitPan » développée par Altman [163].

## 2 Pré-traitement

**Importation de la grille de fond** Le programme prend en charge le format inp du logiciel ABAQUS® : une routine de lecture a été développée pour décoder ces fichiers. Nous procédons à un test sur les dimensions de la pièce destiné à convertir, si nécessaire, les coordonnées des nœuds en mètre. Une fois le maillage chargé, la table de connectivité et de coordonnées des nœuds s'affiche dans le menu déroulant **Maillage**. La barre d'outil peut alors être utilisée pour la manipulation graphique (translation, zoom, rotation, etc.) et l'exploration de la grille, cf. figure G.3.

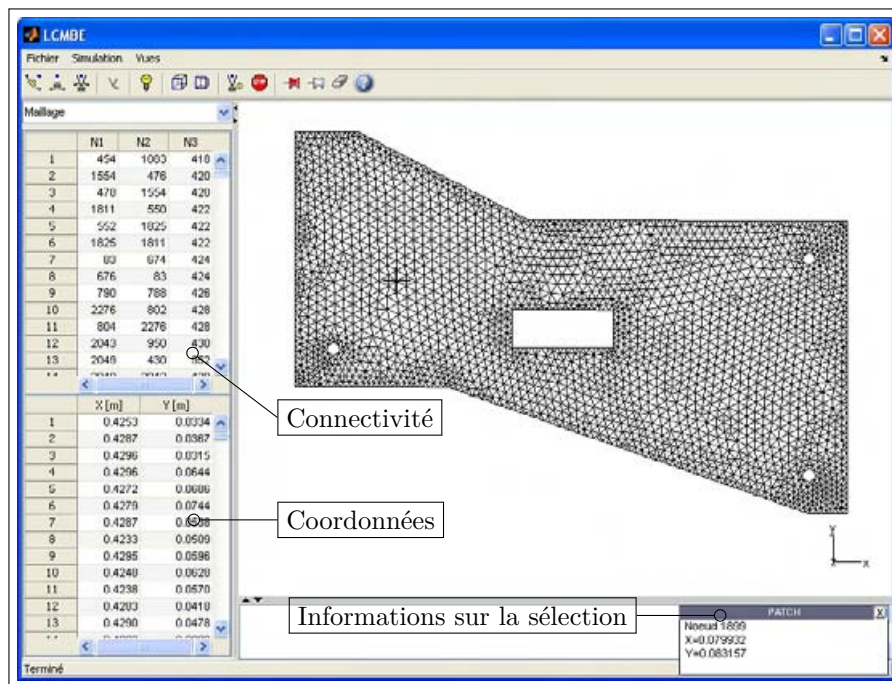





Figure G.3. Panneau « Maillage »

**Définition des propriétés matériaux** Les propriétés du renfort (tenseur de perméabilité, porosité) et de la résine (viscosité, masse volumique) sont à renseigner dans les champs de saisie pré-remplis. Un test détecte les entrées invalides (nombre négatif ou chaîne de caractères), le cas échéant la valeur précédente est rétablie.

Remarques sur le tenseur de perméabilité  $\bar{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y})}$  :

- le tenseur est symétrique,
- il est exprimé dans le repère de la pièce : le terme extra-diagonal  $k_{12}$  est nul si le renfort est orthotrope,
- son déterminant est non nul, la condition  $k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0$  doit être respectée<sup>2</sup>.

2. La condition est testée au début du calcul.

**Définition des points d'injection** Nous désignons par « point d'injection » tout nœud de la grille positionné sur une zone d'entrée de la résine. Pour définir ces points, l'utilisateur procède par sélection graphique parmi les nœuds frontières de la grille, cf. figure G.4. Les outils de sélection  et  permettent respectivement l'ajout et la suppression du nœud dans la liste des points d'injection. Une fenêtre contextuelle indique l'indice du nœud et ses coordonnées (figure G.4). L'outil  permet de supprimer tous les nœuds enregistrés dans la liste.

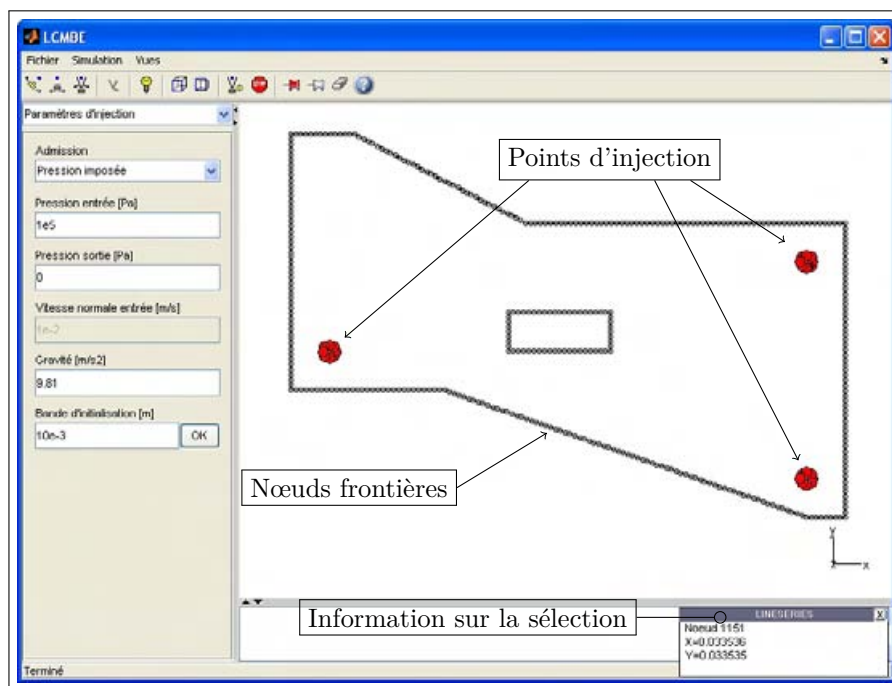


Figure G.4. Sélection des points d'injection

**Définition des paramètres du remplissage** Le menu déroulant « Paramètres d'injection » permet de spécifier les paramètres du remplissage, cf. figure G.5. Les champs de saisie comportent des valeurs par défaut, l'utilisateur peut renseigner :

- le mode d'admission : pression ou débit imposé,
- la pression ou vitesse d'entrée, et la pression en sortie,
- la prise en compte de la gravité dans le calcul.

Une dimension caractéristique est requise pour pré-remplir le moule : les points d'injection sont récupérés pour initialiser la level set résine  $\phi_0$  comme suit :

$$\phi_0 = \max(\phi_{inj} - \Delta\phi, \phi_m) \quad (G.1)$$

où  $\phi_{inj}$  est la distance signée aux points d'injection,  $\Delta\phi$  la largeur de la bande d'initialisation et  $\phi_m$  la distance signée au moule. Une fois  $\phi_0$  définie, nous appliquons l'algorithme des Marching Triangles pour générer le premier maillage frontière : l'utilisateur peut

visualiser ce contour pour ajuster<sup>3</sup> la valeur de la bande d'initialisation.

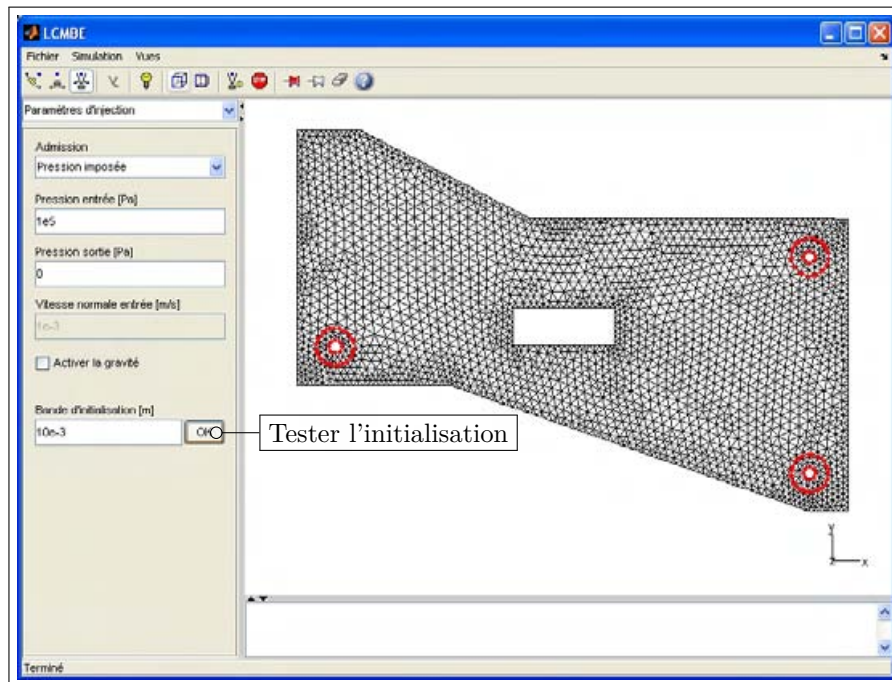


Figure G.5. Panneau « Paramètres d'injection », initialisation du remplissage

**Démarrage du calcul** Une fois la mise en donnée réalisée, l'utilisateur démarre le calcul par le menu **Simulation** : les paramètres de la simulation sont récupérés dans les champs de saisie au début du calcul pour alimenter le solveur.

Le calcul prend fin lorsque le moule est entièrement rempli. Néanmoins, un nombre d'itération maximal peut être spécifié par l'utilisateur. Les résultats du calcul sont enregistrés dans le répertoire courant, un dossier nommé *JourMoisAnnée\_Heure* est créé pour stocker ces fichiers.

### 3 Post-traitement

**Sélection du dossier contenant les résultats** Le menu déroulant « Post-traitement » permet d'accéder aux fonctions de post-traitement du logiciel. Le chemin d'accès au dossier contenant les résultats, nommé *JourMoisAnnée\_Heure* par le programme, doit être spécifié par l'utilisateur en cliquant sur l'icône 📁 (figure G.6). Les données utilisées pour réaliser le calcul sont collectées dans un fichier accessible par le bouton **Données**.

3. En pratique  $\Delta\phi$  doit être supérieur à la plus petite arête des triangles qui s'appuient sur les points d'injection.

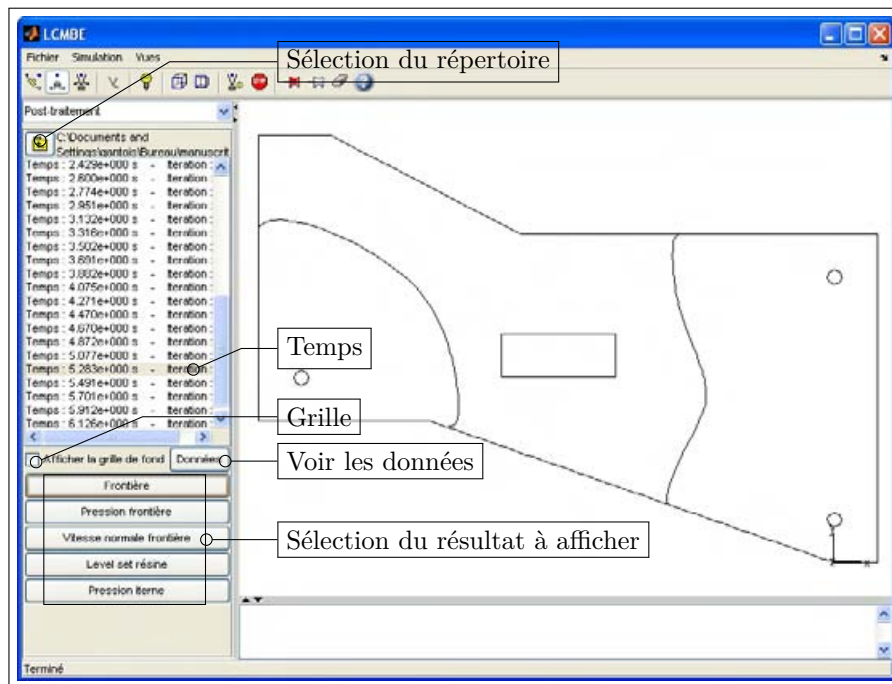


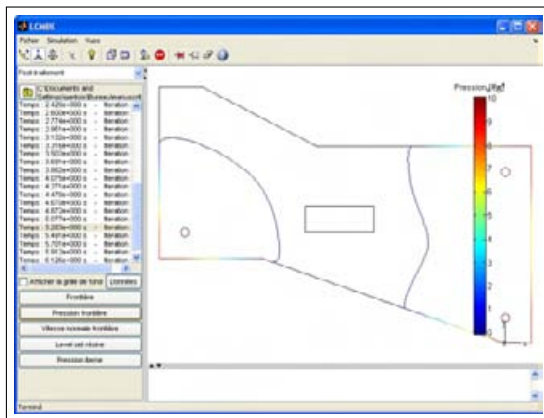
Figure G.6. Panneau « Post-traitement », affichage de la frontière

**Lecture des résultats** Une simple lecture permet de visualiser les résultats suivant :

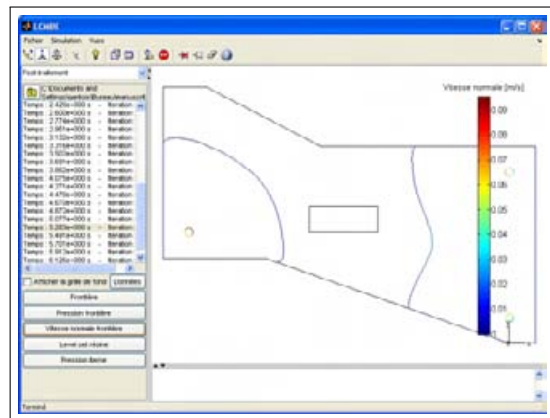
- la frontière approximée par le maillage frontière, cf. figure G.6,
- la pression frontière, cf. figure G.7 (a),
- la vitesse frontière, cf. figure G.7 (b),
- la level set résine, définie aux nœuds de la grille et interpolée linéairement dans les triangles, cf. figure G.7 (c).

**Calcul de la pression interne** Nous utilisons la relation de Somigliana pour calculer la pression interne à partir des champs frontières, cf. page 62. La pression est calculée en un nombre finis de points répartis dans la résine. Ces points sont définis à partir d'une discrétisation interne du domaine de type éléments finis. Nous utilisons pour générer ce maillage le programme « Mesh2D » développé par Engwirda [130]. Ce programme s'appuie sur le maillage frontière pour générer un maillage triangulaire. Le champ de pression que nous calculons est un champ constant par morceaux, où les points de calcul sont définis aux centres des triangles, cf. figure G.7 (d).

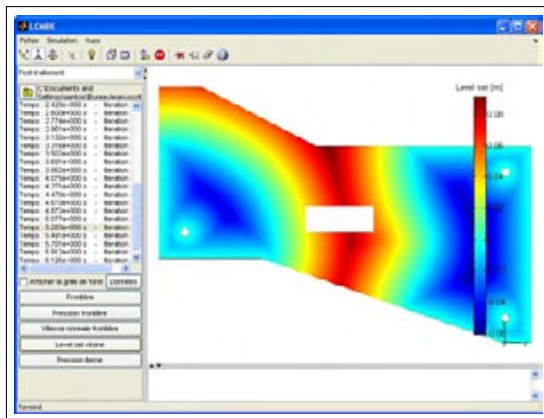




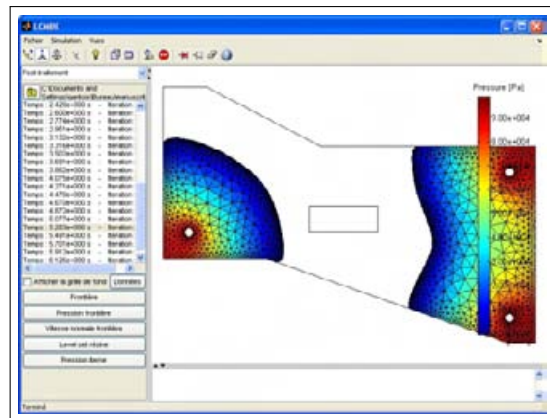
(a) Pression frontière



(b) Vitesse normale frontière



(c) Level set résine



(d) Pression interne

**Figure G.7.** Visualisation des résultats



# Annexe H

## Présentation du logiciel PERMCOMP

Cette annexe est consacrée au logiciel PERMCOMP (« Perméabilité Composite ») que nous avons développé pour exploiter les résultats issus de la mesure de perméabilité. Nous présentons ici l'organisation générale du logiciel, et les fonctions graphiques que nous avons implémentées pour calibrer les images et ajuster les ellipses. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 1 pour plus de détails concernant le modèle optique utilisé, et les procédures de calcul de la porosité et de la perméabilité.

### 1 Fenêtre principale

**Organisation générale** La fenêtre principale de l'application est organisée de la manière suivante (figure H.1) :

- un écran principal est utilisé pour afficher les images,
- des menus et deux barres d'outils donnent accès aux principales fonctions du logiciel,
- un panneau latéral muni d'un menu déroulant permet de visualiser et saisir les données manipulées par le programme,
- un journal d'évènement enregistre l'historique des activités de l'utilisateur.

**Menus** Les menus que nous avons implantés et les différentes fonctions qui leur sont associées sont les suivantes :

- **Fichier** : Importation des données expérimentales, fermeture de l'application,
- **Outils** : Calibration, redimensionnement, mesure, vérification de l'alignement de la caméra, tare de la balance, mise à zéro des temps, définition du point d'injection, exportation des images analysées,
- **Ellipses** : Ajustement, visualisation et suppression des ellipses,
- **Identification** : Identification des perméabilités,
- **Aide** : Accès au tutoriel.

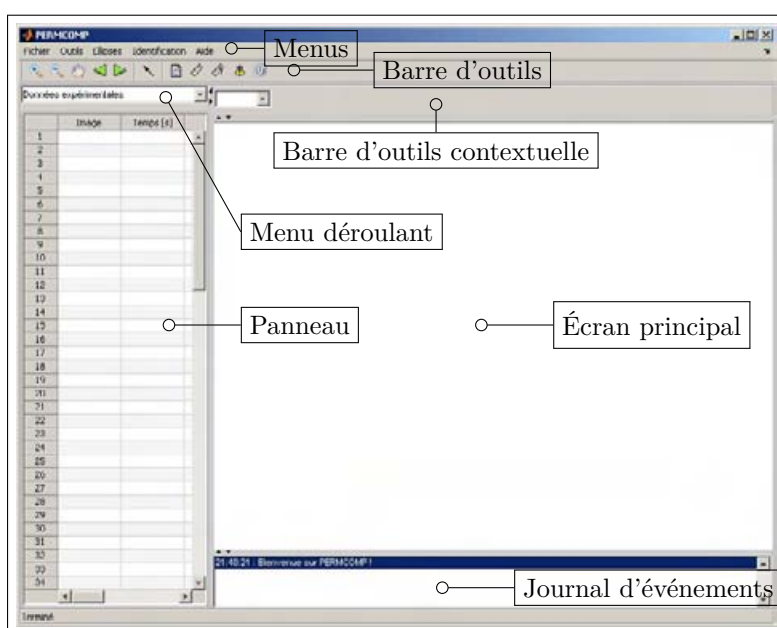


Figure H.1. Fenêtre principale de l'application

**Menu déroulant** Le menu déroulant (figure H.2) permet de sélectionner le contenu du panneau :

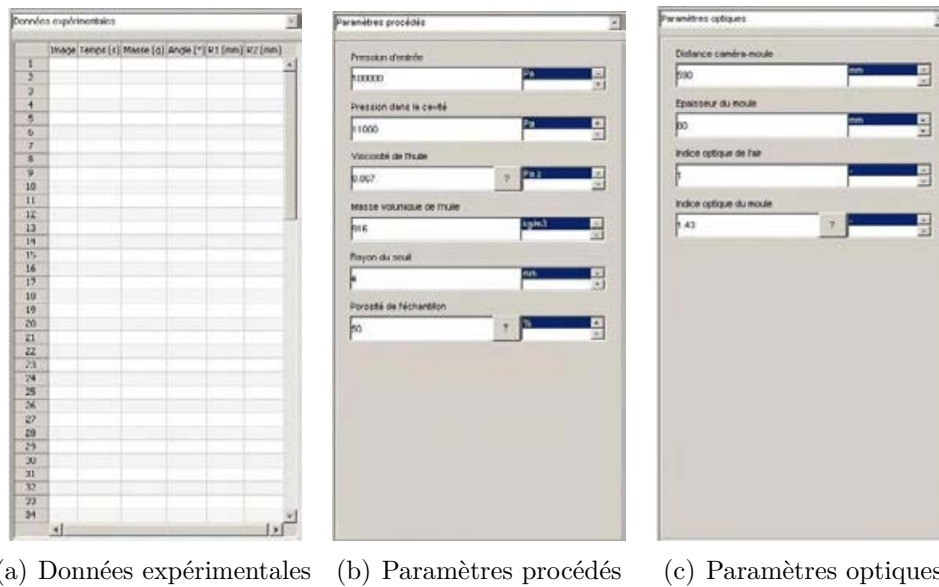
- **Données expérimentales** : Affichage des données expérimentales dans un tableau (nom des images, temps, masses, paramètres des ellipses),
- **Paramètres procédés** : Saisie des paramètres du remplissage (pression d'entrée, pression de vide, viscosité du fluide, masse volumique du fluide, rayon du seuil, porosité de l'échantillon),
- **Paramètres optiques** : Saisie des paramètres optiques (distance caméra-moule, épaisseur du moule, indice optique de l'air et du moule).

**Barres d'outils** La barre d'outils contextuelle est actualisée suivant la fonction en cours d'exécution, nous ne détaillerons pas son contenu ici. La barre d'outils « permanente » assure un accès rapide aux fonctions suivantes :

- **Exploration** : Manipulation de l'image (zoom, translations),
- **Sélection** : Sélection d'une image dans la série,
- **Outils divers** : Redimensionnement de l'image, calibration de l'image, mesure d'un objet sur l'image, vérification de l'alignement de la caméra, translation des temps et des masses.

## 2 Importation des données expérimentales

Les données expérimentales obtenues à la fin de l'essai se présentent sous la forme d'une série d'images et d'un fichier texte. La procédure de traitement débute par l'importation de ces données dans le logiciel.



**Figure H.2.** Panneaux accessibles par le menu déroulant

**Images** L'importation des images à analyser, choisies dans la série d'images enregistrées (typiquement 10 à 20 images), déclenche le décodage automatique du fichier texte. Les images sont stockées en mémoire vive, leur affichage dans la fenêtre est géré par un compteur (figure H.4).

**Fichier texte** La figure H.3 montre la structure du fichier texte décodé par le logiciel. Chaque ligne correspond à l'acquisition d'un point, tandis que les colonnes sont organisées comme suit :

- colonne 1 : indices des mesures,
- colonnes 2 à 5 : temps (heure capturée sur l'horloge du PC),
- colonne 6 : masses du réservoir en cours de vidange.

%num	h	m	s	ms	masse(g)
1	04	59	40	406	0.0
2	05	00	07	843	0.0
3	05	00	08	343	-7.3
4	05	00	08	828	-11.7
5	05	00	09	328	-12.2
6	05	00	09	828	-12.3
7	05	00	10	328	-12.4
...					

**Figure H.3.** Structure du fichier de données

Les données ainsi importées sont stockées dans le tableau de données de l'interface graphique, cf. figure H.2 (a). Les outils que nous avons implémentés permettent de

redéfinir facilement l'instant initial et la masse initiale (« tare ») à partir des données brutes.

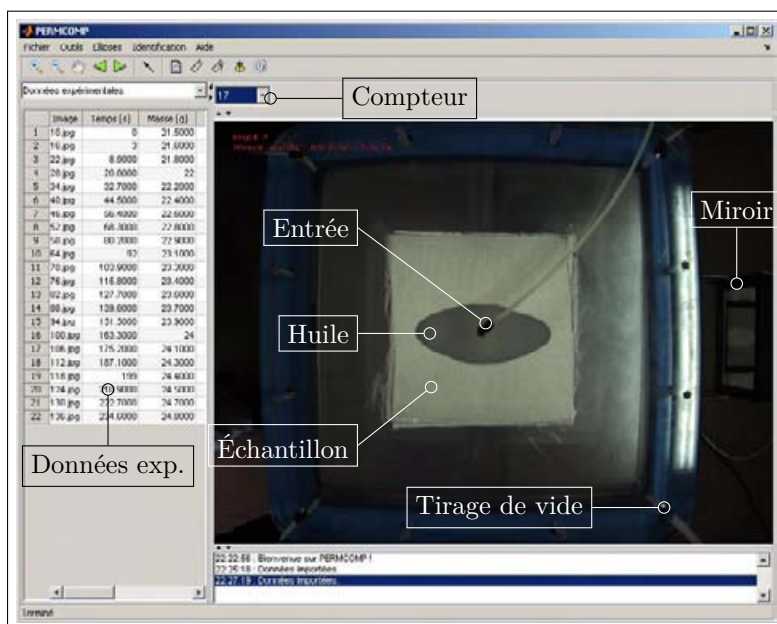


Figure H.4. Données expérimentales

### 3 Calibration des images

La calibration des images permet d'extraire les dimensions de l'ellipse. Nous utilisons un objet étalon pour calculer un facteur de calibration, défini comme le rapport de la dimension en pixel sur la dimension en mètre.

La calibration est réalisée en superposant deux curseurs mobiles sur l'image (figure H.5). La distance en pixel de l'objet étalon est actualisée à chaque mouvement de la souris, tandis que sa distance en mètre est renseignée par l'utilisateur.

**Remarque** Bien que l'échantillon soit placé sous la plaque, le plan de calibration est défini à la surface du moule. Nous appliquons une correction optique pour anticiper la réfraction de la lumière dans la plaque (chapitre 1, section 1.2.3.1).

### 4 Ajustement des ellipses

Deux modes de fonctionnement ont été implémentés pour ajuster les ellipses sur la tâche d'huile :

- un mode manuel par méthode graphique,
- un mode automatique par la méthode des moindres carrés.

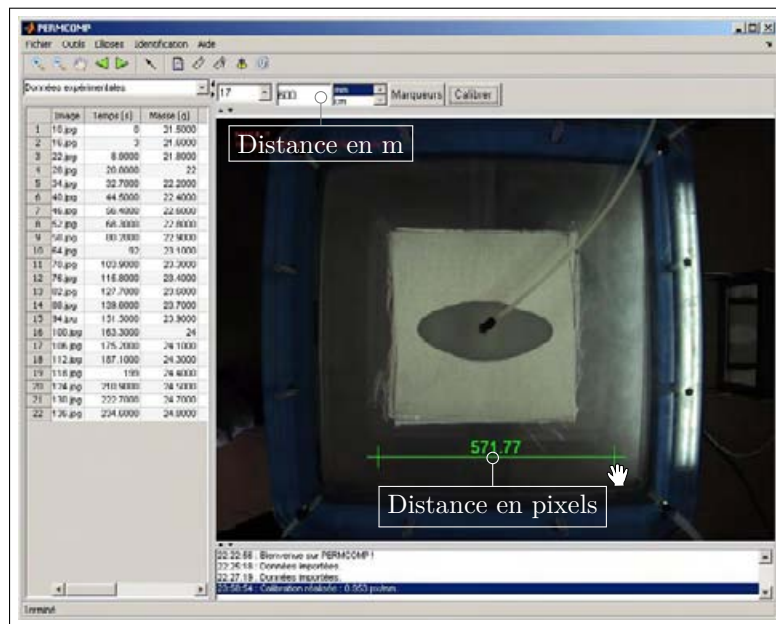


Figure H.5. Calibration

**Mode manuel** En mode manuel, les paramètres de l'ellipse (centre, demi-axes, angle d'orientation) sont ajustés « à la souris » par l'utilisateur (figure H.6). Nous utilisons à cet effet la fonction « EllipseSelect » développée par Narayan [164]. Une fois l'ellipse ajustée, la longueur des demi-axes est calculée en appliquant l'équation (1.10) du chapitre 1. Les paramètres de l'ellipse ainsi définis sont stockés dans le tableau de données.

**Mode automatique** Dans le mode automatique (figure H.7), l'ellipse est ajustée en quatre étapes :

1. Binarisation : les pixels sont répartis en deux classes (noir et blanc) : le seuil de binarisation est réglé en déplaçant un curseur sur une échelle graduée.
2. Filtrage : l'image est lissée en appliquant un filtre circulaire paramétré par l'utilisateur.
3. Extraction du contour : les pixels frontières sont automatiquement détectés, des fonctions de sélection sont néanmoins implémentées pour choisir les pixels à utiliser dans la procédure d'ajustement.
4. Ajustement : l'ellipse est ajustée sur les pixels sélectionnés par la méthode des moindres carrés. Pour cette dernière étape, nous utilisons la fonction « Ellipse Fit » développée par Hendel [165].

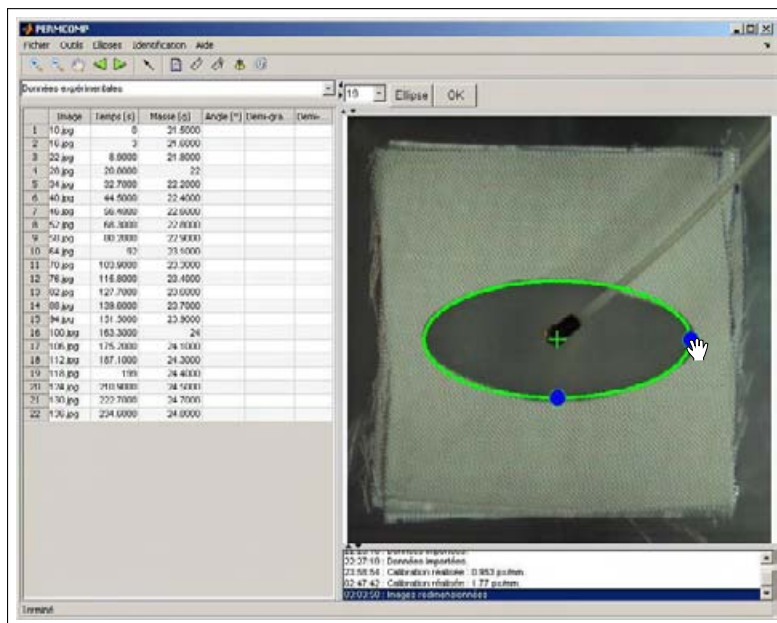


Figure H.6. Ajustement manuel de l'ellipse



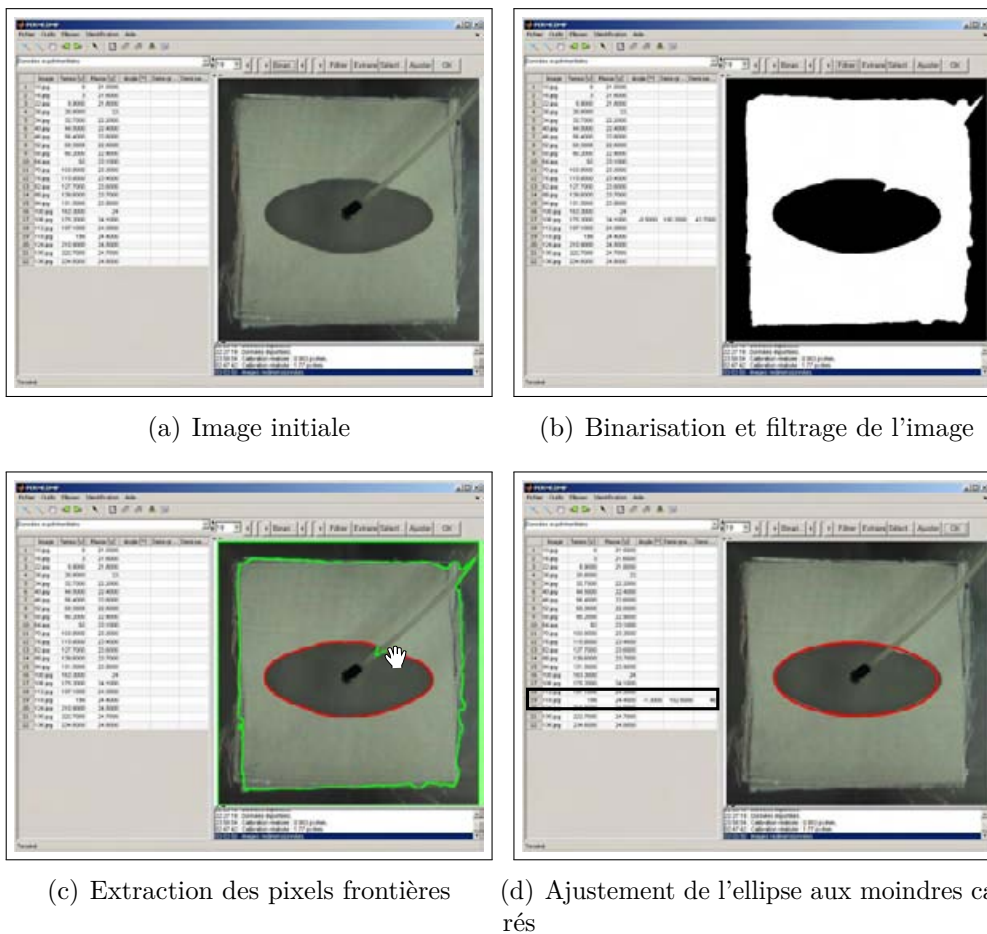


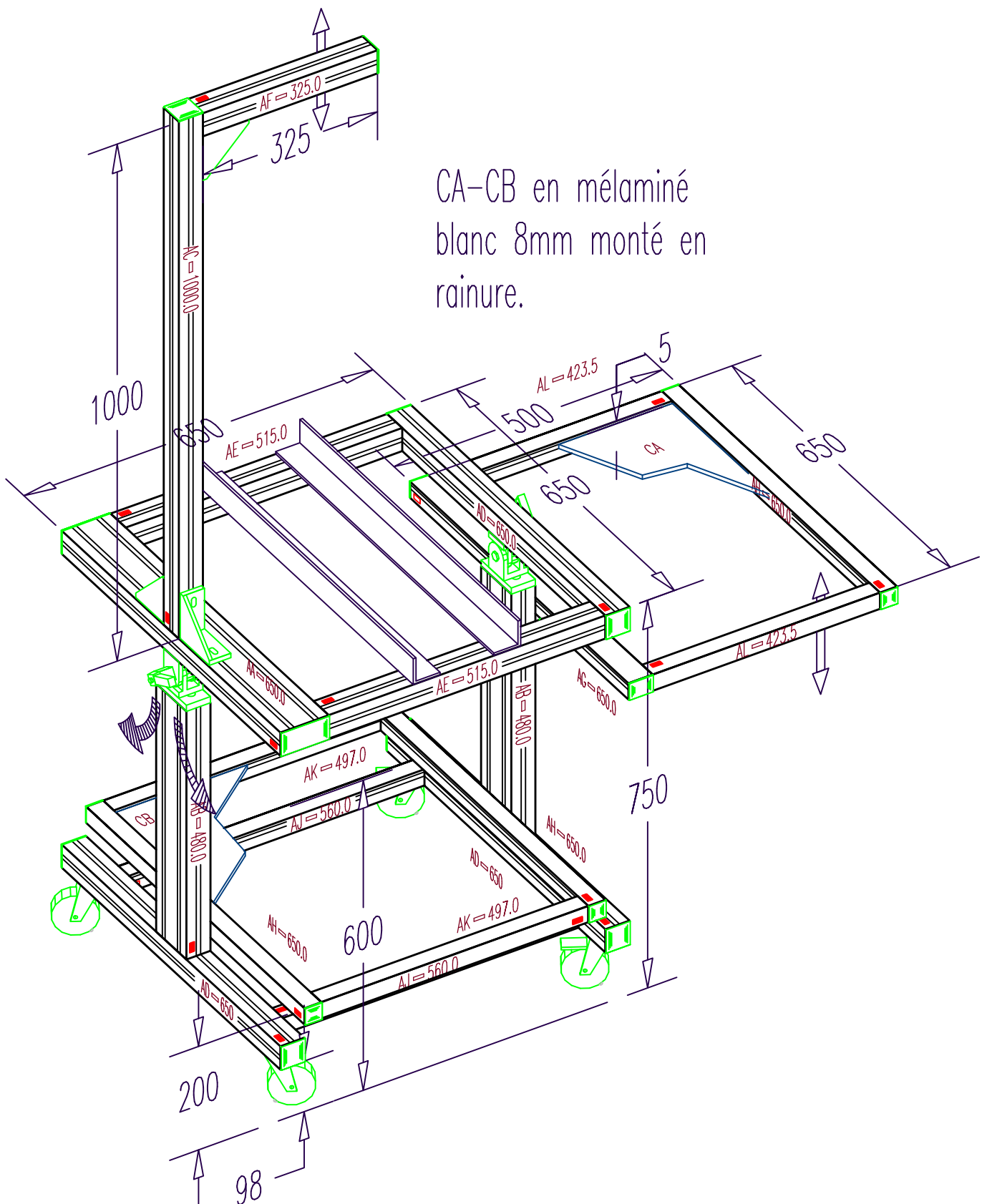
Figure H.7. Ajustement automatique de l'ellipse



# Annexe I

## Plans

### 1 Plan du bâti



ECOLE NATIONALE  
65016 TARBES

**NORCAN**

48 rue des Aviateurs BP 120  
67503 Haguenau Cedex

Plan N° N09K / 02910AD3

Vérifié le 18/06/09 Par CHS

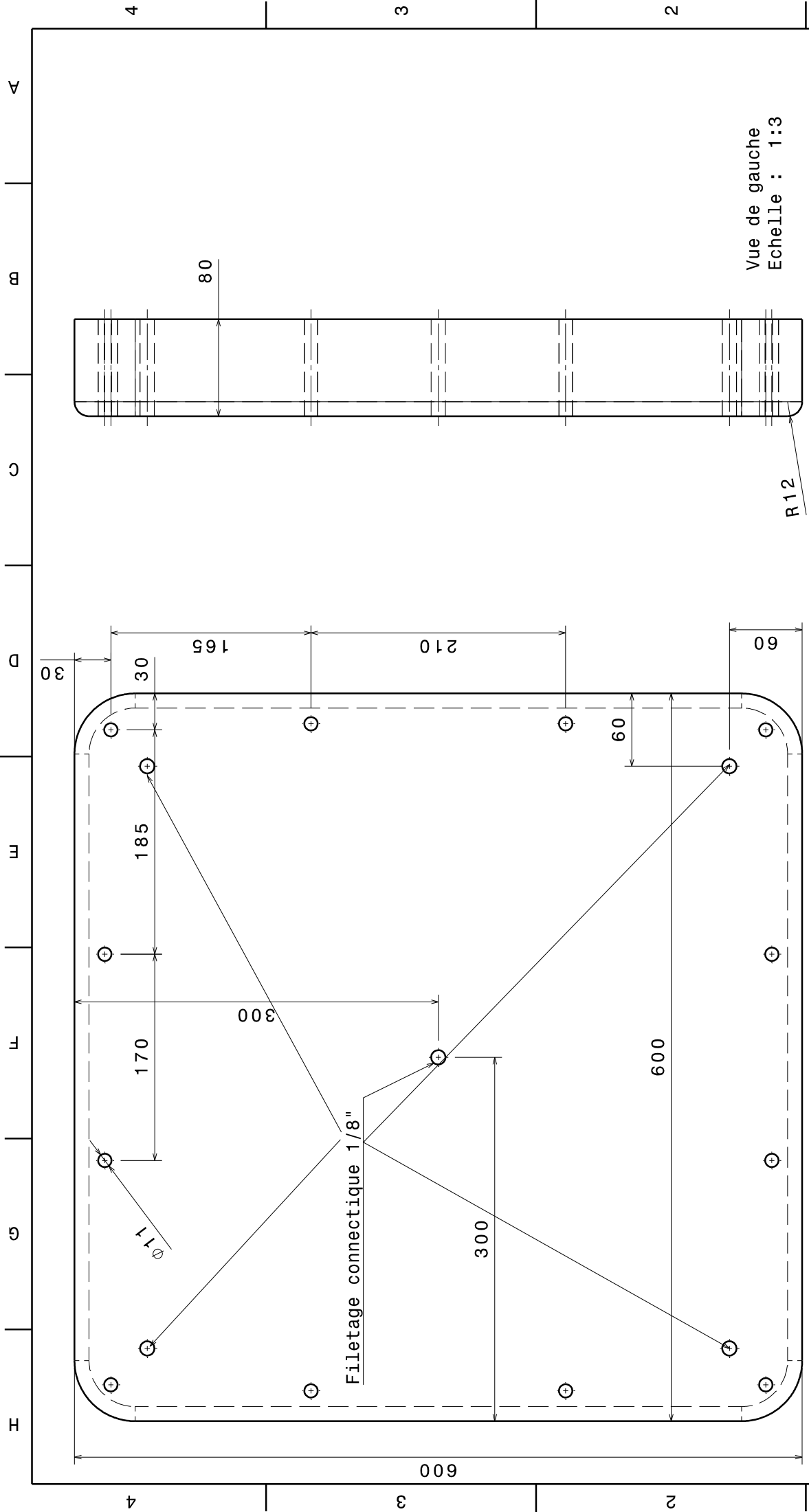
Ech. /

A4

Tél 03.88.93.26.26 Fax 03.88.93.30.74

Ce plan est la propriété de NORCAN S.A.S. Il ne peut être communiqué à des tiers et/ou reproduit sans autorisation écrite.

## 2 Plan du moule



DESIGNED BY: <b>R. BRAULT</b>		DATE: <b>13/05/2009</b>	
CHECKED BY: <b>XXX</b>		DATE: <b>XXX</b>	
SIZE: <b>A3</b>	WEIGHT (kg): <b>XXX</b>	DRAWING NUMBER: <b>001</b>	
SCALE: <b>1:3</b>	SHEET: <b>1/1</b>		
This drawing is our property; it can't be reproduced or communicated without our written agreement.			

**Vue de face**  
Echelle : 1:3

Matière : PMMA Transparent  
Tolérance Générale : +/- 0.3mm

# Moule Banc K

CRC Composites

**Vue de gauche**  
Echelle : 1:3

4 3 2 1

A

B

C

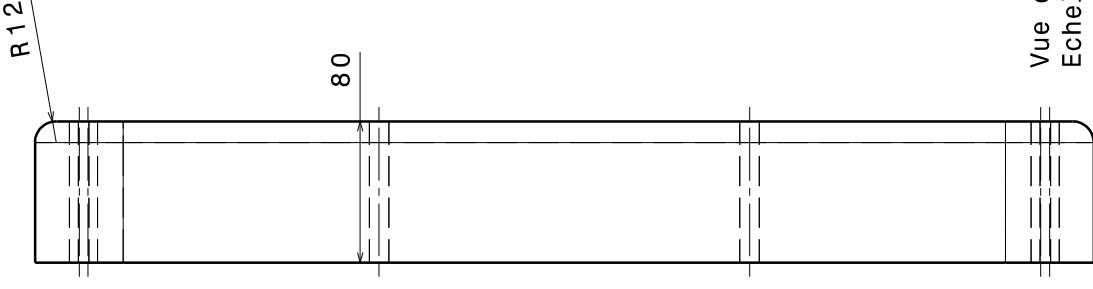
D

E

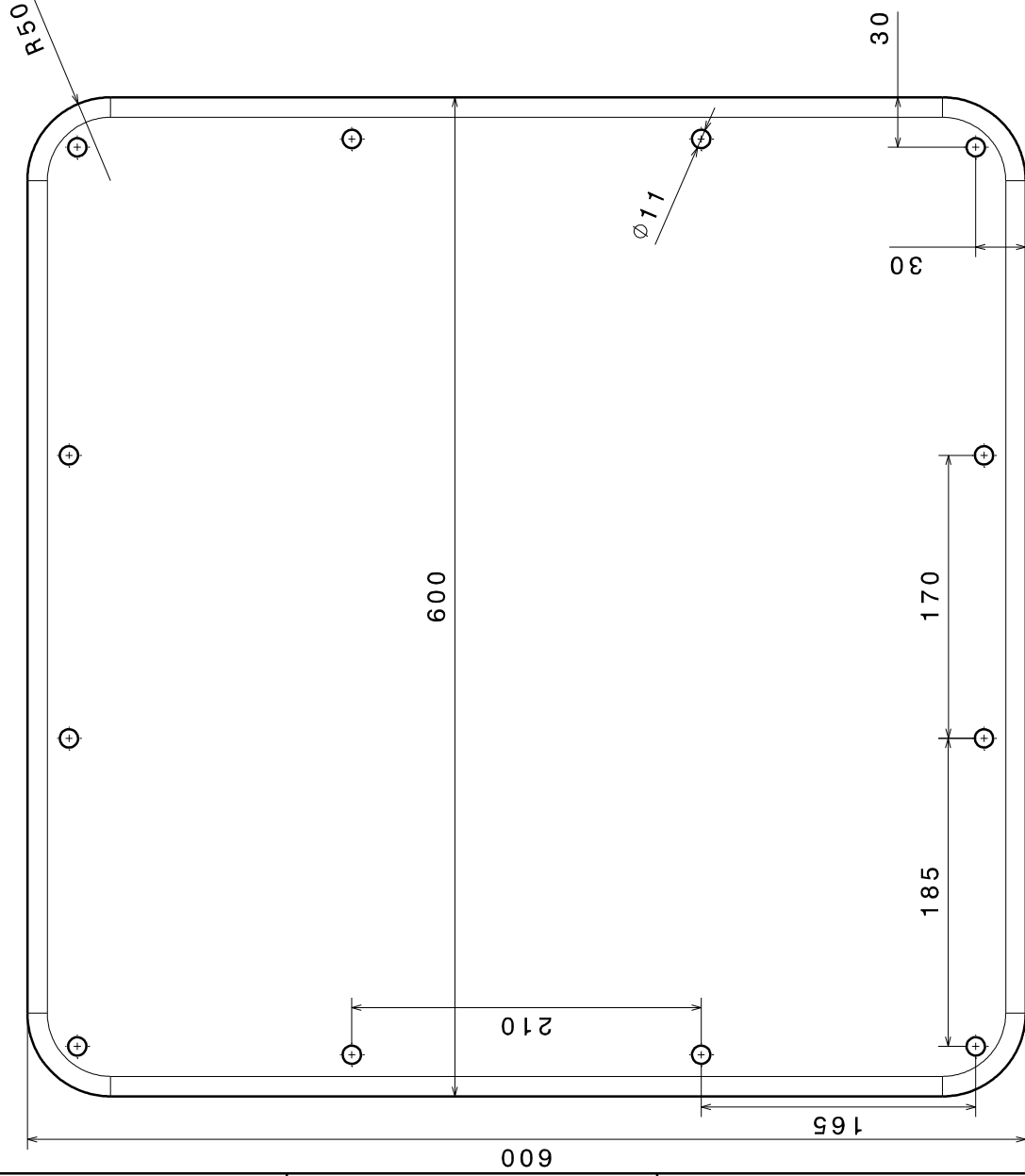
F

G

H



Vue de gauche  
Echelle : 1:3



Vue de face  
Echelle : 1:3

Matière : PMMA

Tolérance Générale : +/- 0.3mm

DESIGNED BY: R. BRAULT

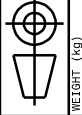
DATE: 13/05/2009

CHECKED BY: XXX

DATE: XXX

SIZE

A3



WEIGHT (kg)

1:3 XXX

CRC Composites

DRAWING NUMBER

001

SHEET

1/1

Contre-Moule Banc K

I	-
H	-
G	-
F	-
E	-
D	-
C	-
B	-
A	-

A

B

C

D

E

F

G

H

4 3 2 1





# Annexe J

## Données constructeur

### 1 Camera CCD Prosilica EC1350C

## Specifications

Sensor Type	Sony ICX205AL CCD (ICX205AK for color)
Sensor Shutter Type	Progressive Interline
Sensor Resolution	1360 x 1024 pixels
Pixel Size	4.65 $\mu$ m x 4.65 $\mu$ m
Optical Format	1/2 inch
Lens Mount	C-mount with adjustable back focus
Color Sensor Filter Pattern <sup>†</sup>	Bayer
Full Resolution Frame Rate	18.5 fps
Frame Rate (640 x 480 ROI)	30.9 fps
Power Requirements	Less than 2.5W <sup>††</sup> 8V to 40V as per IEEE1394A specification <sup>†††</sup>
Digitization	12 Bits
Trigger latency	2 $\mu$ s
Trigger Jitter	$\pm$ 0.5 $\mu$ s
Operating Temperature	0 to 50 Celsius
Operating Humidity	20 to 80% non-condensing
Size	33mm (height) x 46mm (width) x 56mm (length)
Weight	84g
Interface Standard	IEEE 1394A (FIREWIRE™)
Interface Standard	IIDC 1394-based Digital Camera Specification 1.31 (DCAM)
Regulatory	Conforms to CE, FCC

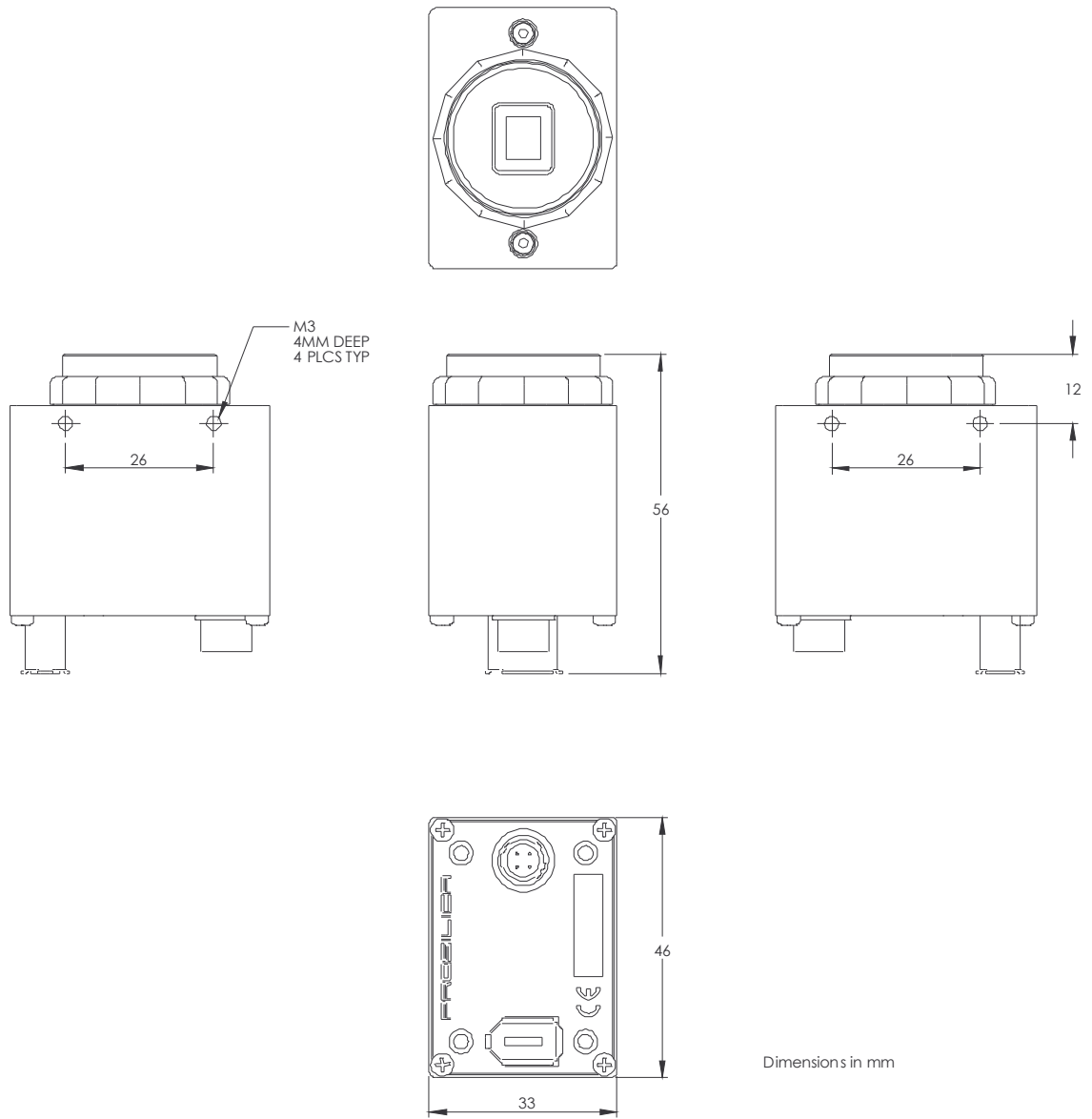
<sup>†</sup> Applies to EC1350C only.

<sup>††</sup> Power consumption will increase with reduced ROI imaging.

<sup>†††</sup> Nominal operating voltage is 12V. Cameras have been tested at 12V to 28V.

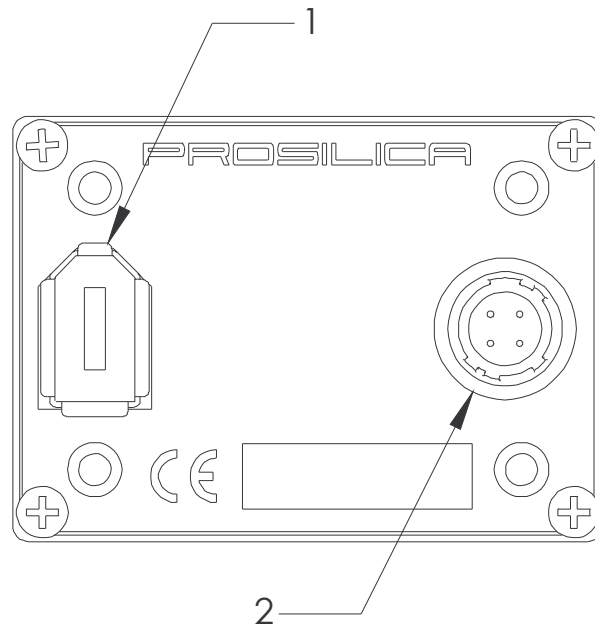
\* 10 Bits in Version A cameras.

# Mechanical



**Figure 1: EC1350 and EC1350C Mechanical**

## Connections



**Figure 2: Camera Back for EC1350 and EC1350C**

### Item 1: IEEE 1394A (FIREWIRE™) PORT

This port will work with all commercially available 6 pin 1394A cabling. Contact Prosilica if screw captivation is required.

### Item 2: Trigger I/O PORT

The Trigger I/O port uses a Hirose HR10A-7R-4PB connector on the camera side. The mating cable connector is Hirose HR10A-7P-4S. This connector can be purchased from Prosilica or from <http://www.digikey.com>.

Figure 3 shows the pin out, internal trigger circuitry, and an example of how a user would configure their cabling and circuitry to work with the EC1350 camera. As indicated, the Trigger Input and Sync-Out are optically isolated. Contact Prosilica to purchase compatible trigger cables if required.



**DO NOT EXCEED VOLTAGE AND CURRENT RATINGS OF THE INDICATED OPTOCOUPLER.**

## **2 Objectif Computar H2Z0414C-MP**

# H2Z0414C-MP

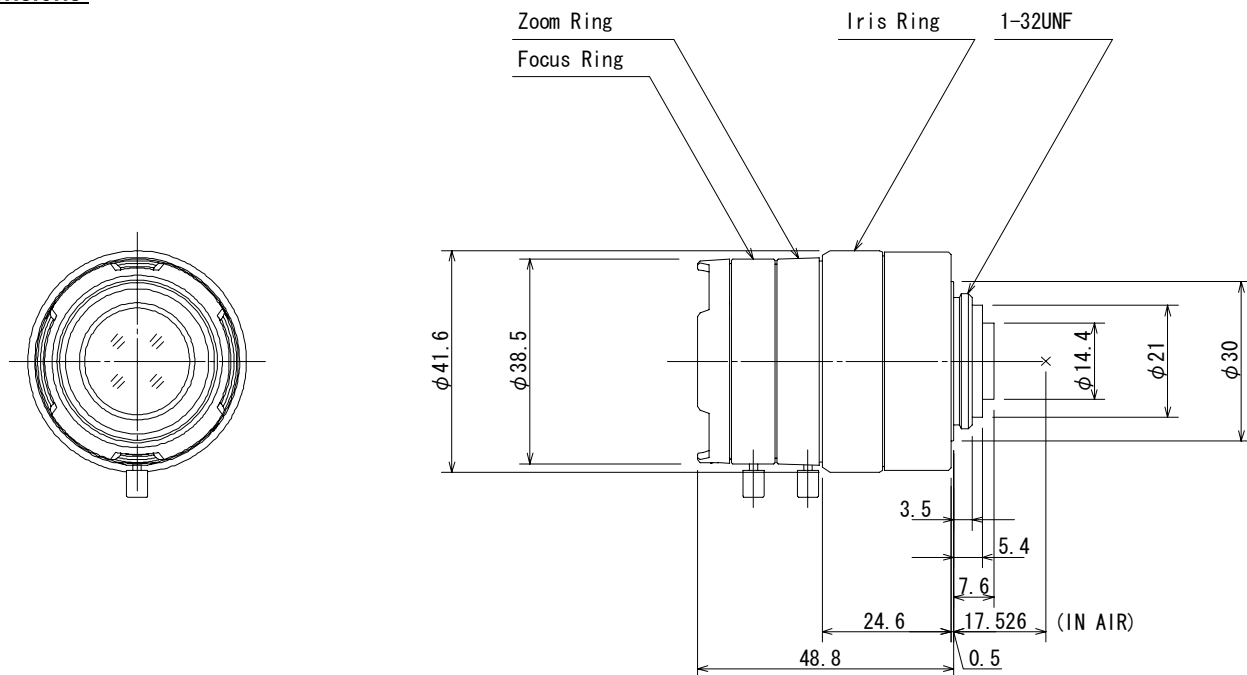
2X 4-8mm F1.4

for 1/2 type Megapixel cameras, Vari-focal Manual Iris

C-Mount

Model No.		H2Z0414C-MP		Effective	Front	φ 22.2mm	
Focal Length		4mm - 8mm		Lens Aperture	Rear	φ 10.7mm	
Max. Aperture Ratio		1 : 1.4		Back Focal Length	Tele	16.4mm	
Max. Image Format		6.4mm x 4.8mm (φ 8mm)			Wide	11.0mm	
Operation Range	Iris	F1.4 - F16C		Flange Back Length		17.526mm	
	Focus	0.5m - Inf.		Mount		C-Mount	
	Zoom	4mm - 8mm		Filter Size		-	
Control	Iris	Manual		Dimensions		φ 41.6mm x 48.8mm	
	Focus	Manual		Weight		72 g	
	Zoom	Manual					
Angle of View	D	1/2 type	115.9° - 58.8°	1/3 type	84.5° - 44.1°	1/4 type	62.7° - 33.1°
	H		90.4° - 47.0°		67.0° - 35.3°		50.0° - 26.5°
	V		67.0° - 35.3°		50.0° - 26.5°		37.4° - 19.8°
Operating Temperature		-20°C - +50°C					

**Dimensions**



### **3 Balance électronique Sartorius CPA8201-0CE**

## Specifications

Model	CPA8201-OCE
Accuracy class <sup>1)</sup>	II
Weighing capacity	8,200 g
Readability	0.1 g
Verification scale interval, e <sup>1)</sup>	1 g
Minimum capacity, Min <sup>1)</sup>	5 g
Tare range (subtractive)	8,200 g
Response time (average)	≤ 1 s
Allowable ambient operating temperature: - with "isoCAL" function - without "isoCAL" function	+0...+40 °C +10...+30 °C
Net weight, approx.	4.7 kg
Weighing pan size	190x204 mm
Dimensions (WxDxH)	213x342x90 mm
AC power source/Power requirements	AC adapter, 230 V or 115 V, +15%...-20% (protection rating IP20)
Power consumption (average)	maximum 16 VA; typical 8 VA
Built-in interface	RS232C-S/V24-V28

<sup>1)</sup> CD = Council Directive 90/384/ECC for non-automatic weighing instruments; applicable to the European Economic Area

Key accessories	Order no.
Data printer with date, time and statistics functions	YDP20-OCE
RS-232C/USB interface cable, for connecting the balance to a PC with USB port; length approx. 1.5 m	YCC01-USBM2
External rechargeable battery pack	YRB05Z
SartoCollect, software for the data communication between PC and any Sartorius instrument (incl. cable 26 Pin/9 Pin, 2 m)	YSC02



Data printer



SartoCollect

Sartorius AG  
Weender Landstrasse 94-108  
37075 Goettingen, Germany

Phone +49.551.308.0  
Fax : +49.551.308.3289

info.mechatronics@sartorius.com  
www.sartorius-mechatronics.com

Specifications subject to change without notice.

Current status: October 2008  
Version: 1.0



# Annexe K

## Publications

### 1 Recent patents on in-plane permeability measurement of LCM composite reinforcements

**Références** R. GANTOIS, E. JOURDAIN, G. DUSSERRE. Recent patents on in-plane permeability measurement of LCM composite reinforcements. Recent Patents on Engineering, 2009, Vol. 3, 2, pp 109-116.

### 2 BEM simulation of 3D updated resin front for LCM processes

**Références** R. GANTOIS, A. CANTAREL, J.-N. FELICES, N. PIRC, F. SCHMIDT. BEM simulation of 3D updated resin front for LCM processes. Key Engineering Materials, 2010, Vol. 446, pp 131-136.

### 3 Numerical simulation of Resin Transfer Molding using BEM and Level Set method

**Références** R. GANTOIS, A. CANTAREL, G. DUSSERRE, J.-N. FELICES, F. SCHMIDT. Numerical simulation of Resin Transfer Molding using BEM and Level Set method. International Journal Of Material Forming, 2010, Vol. 3, Sup. 1, pp 635-638.

### 4 Mold filling simulation of Resin Transfer Molding combining BEM and Level Set method

**Références** R. GANTOIS, A. CANTAREL, G. DUSSERRE, J.-N. FELICES, F. SCHMIDT. Mold filling simulation of Resin Transfer Molding combining BEM and Level Set method. Applied Mechanics and Materials, 2011, Vol. 62, pp 57-65.



DOCTORAT DE L' UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

DÉLIVRÉ PAR : Université Toulouse III - Paul Sabatier

ÉCOLE DOCTORALE : Mécanique, Énergétique, Génie civil & Procédés (MEGeP)

SPÉCIALITÉ : Génie Mécanique, Mécanique des Matériaux

DIRECTEURS DE THÈSE : Fabrice Schmidt, Jean-Noël Felices

LABORATOIRE : Institut Clément Ader (ICA)

ÉTABLISSEMENTS D'ACCUEIL :

École des Mines d'Albi - Campus Jarlard - Route de Teillet - 81 013 Albi Cedex 09

IUT de Tarbes - 1 rue Lautréamont - BP 1624 - 65 016 Tarbes Cedex

AUTEUR : Renaud Gantois

LIEU et DATE DE SOUTENANCE : École des Mines d'Albi, 12 mars 2012

---

TITRE : Contribution à la modélisation de l'écoulement de résine dans les procédés de moulage des composites par voie liquide

RÉSUMÉ :

Les procédés de moulage des composites par voie liquide représentent des solutions très attractives sur le plan industriel, car ils permettent de réaliser des pièces complexes et de grandes dimensions à bas coûts. Néanmoins, ces procédés demandent une bonne maîtrise des mécanismes d'imprégnation qui restent relativement difficiles à anticiper.

Le travail s'articule autour d'une étude expérimentale et numérique, visant à modéliser l'écoulement de la résine liquide dans le renfort fibreux pendant l'étape de remplissage. Le moyen d'essai développé est destiné à la mesure de la perméabilité, à la fois dans le plan et dans la direction transverse au renfort. L'étude numérique porte sur la simulation des écoulements macroscopique et microscopique. À l'échelle macroscopique, l'originalité du modèle proposé réside dans le couplage des méthodes BEM et Level Set, en 2D et 3D. À l'échelle microscopique, un solveur stationnaire BEM a été développé pour évaluer la perméabilité d'une microstructure fibreuse en 2D.

MOTS-CLÉS : Procédés de moulage des composites par voie liquide, Mesure de perméabilité, Modélisation du remplissage, Boundary Element Method (BEM), Level Set.

---

TITLE : Contribution to resin flow modeling in Liquid Composite Molding processes

ABSTRACT :

Liquid Composite Molding (LCM) is more and more used in industry for its ability to produce complex and large parts at low cost. However, this process needs a special care to anticipate properly the impregnation of the fibrous reinforcement, which remains a challenging task important to achieve.

This work is divided into an experimental and a numerical study. It aims to model the resin flow through the fibrous reinforcement occurring during the mold filling stage. An experimental setup has been designed to measure both plane and transverse permeabilities of the reinforcement. The numerical study is focused on the simulation of the flow at macroscopic and microscopic scales. At macro scale, our main contribution is the coupling between BEM and Level Set methods, which has been achieved for both 2D and 3D problems. At micro scale, a stationary BEM solver has been developed to evaluate the transverse permeability of a 2D fibrous microstructure.

KEY-WORDS : Liquid Composite Molding, Permeability measurement, Mold filling modeling, Boundary Element Method (BEM), Level Set.

---

