

Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse III - Paul Sabatier  
Discipline ou spécialité : Automatique et Traitement du Signal

---

Présentée et soutenue à huis clos par

***Ali KAZEM***

Le 17 septembre 2008

*PARTICULES DETERMINISTES GENERALISEES EN FILTRAGE NON-LINEAIRE:  
APPLICATIONS DEFENSE ET TELECOMMUNICATIONS*

---

**JURY**

*Yannick DEVILLE*      *Président*  
*Jean-Pierre LE CADRE*      *Rapporteur*  
*Eric MOULINES*      *Rapporteur*  
*Gérard FAVIER*      *Examineur*  
*Jean-Charles NOYER*      *Examineur*

**Invités**

*Daniel MULLER*      *THALES*  
*Guy MAYNARD DE LA VALETTE*      *DGA*  
*Guy LESTHIEVENT*      *CNES*  
*Jean Louis RIBES*      *DSi*  
*Christophe BERTIN*      *DSi*  
*Anis ZIADI*      *DSi*

---

**Ecole doctorale :** *ECOLE DOCTORALE SYSTEMES*

**Unité de recherche :** *Laboratoire d'Analyse et d'Architecture de Systèmes du CNRS*

**Directeurs de Thèse :** *Gérard SALUT, Frédéric LEHMANN*



***PARTICULES DETERMINISTES  
GENERALISEES EN FILTRAGE  
NON-LINEAIRE:  
APPLICATIONS DEFENSE ET  
TELECOMMUNICATIONS***

**Ali KAZEM**

**© 2008-2010, Thèse confidentielle  
industrie (THALES, DSi)  
Consultation et reproduction  
interdites sans autorisation.**



*A mon père  
A ma mère, ma sœur , et mes frères  
A mes enfants: Ammar, Ithar, Nowar, et Sarah  
A toi Samar*



---

# Remerciements

Je voudrais en premier lieu remercier profondément mon Directeur de thèse, Gérard SALUT, sans lequel ce travail n'aurais jamais vu le jour. Je tiens également à lui exprimer toute ma reconnaissance pour l'intensité de son partage et de son soutien. Plus qu'un encadrant ou un collègue, je crois avoir trouvé en lui un ami qui m'a aidé aussi bien dans le travail que dans la vie lorsque j'en avais besoin.

De même, j'exprime ma plus grande gratitude à Monsieur Frédéric LEHMANN, professeur adjoint à l'INT de m'avoir accordé beaucoup de temps. Merci Frédéric pour tous les conseils, les intenses discussions fructueuses et les efforts fournis. Malgré ses années à Evry, il a toujours été disponible à distance. J'exprime ma profonde reconnaissance aussi pour la confiance, le soutien, la patience, et les encouragements, je ne les oublierai pas.

Je remercie Monsieur Raja CHATILA, Directeur du laboratoire LAAS, de m'avoir accueilli dans son laboratoire, ainsi que Monsieur André MONIN responsable de groupe MRS.

Je remercie Monsieur Eric MOULINES Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications (ENST) de Paris, et Monsieur Jean-Pierre Le Cadre directeur de Recherche CNRS à l'IRISA de Rennes qui ont accepté d'assumer la tâche de rapporteur et d'être membres du jury de cette thèse. Merci au professeur Yannick DEVILLE de m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse, à Monsieur Gérard Favier, et Monsieur Jean-Charles NOYER d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Leurs remarques et commentaires m'ont permis de clarifier certains points de ce manuscrit.

J'ai eu également le plaisir de collaborer avec Thales. Je pense en premier lieu à remercier Monsieur Daniel Muller d'avoir accepté d'assister à la soutenance, et aussi à Florence DIETZINEYME et à Marie-Christine SOUTY pour leurs fréquentes discussions électroniques et pour leur implication dans mes travaux.

Merci à Monsieur Guy MAYNARD DE LA VALETTE de la DGA et Monsieur Guy LESTHIEVENT du CNES de m'avoir fait l'honneur de faire partie des invités de la soutenance.

Je tiens aussi à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler au sein de DSi. J'en remercie ici tous les membres, et tout particulièrement son gérant Monsieur Jean-Louis RIBES, pour ses soutiens logistiques et financiers et sa sympathie exceptionnelle, ainsi que le responsable du Groupe R&D Monsieur Christophe BERTIN.

Merci à tous mes amis du LAAS et en particulier A. ZIADI mon ami du bureau E39 qui est resté mon collègue au bureau R&D à DSi, pour les longues discussions utiles; et de même à tous mes amis et collègues: Ayman, Baba, Hael, Wael, Gregory,, Jibran, Lim Charles, Sergio et Citlalih,...

Ma sincère et profonde reconnaissance à tous mes très chers amis et voisins: avec vous la vie à Toulouse devient encore plus belle et plus enrichissante. Je ne vais pas citer les noms par manque de place. Il m'aurait fallu un manuscrit supplémentaire pour le faire.

Je remercie enfin ceux dont le nom n'apparaît pas dans cette page et qui m'ont aidé, encouragé, ou soutenu, d'une manière ou d'une autre, tout au long de mon travail de thèse.



# Table des matières

## INTRODUCTION

|   |    |
|---|----|
| Abréviations .....                        | 7  |
| 1. Contexte général .....                 | 10 |
| 2. Organisation du manuscrit .....        | 13 |
| 3. Contexte collaboratif des travaux..... | 14 |

## Première Partie : PRINCIPES..... 15

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Chapitre 1: Estimation non linéaire et solution particulière.....</b>        | <b>17</b> |
| 1.1. Problème de filtrage.....   | 17        |
| 1.1.1.Équations de système .....   | 17        |
| 1.1.2.Critère d'estimation.....  | 18        |
| 1.1.3.Équations de filtrage.....   | 18        |
| 1.2. Méthodes de résolution non-linéaire.....                                      | 20        |
| 1.2.1. Méthodes locales .....  | 21        |
| 1.2.1.1.Linéarisation du modèle <i>Filtre de Kalman étendu (EKF)</i> .....         | 21        |
| 1.2.1.2.Filtre de Kalman sans parfum (UKF).....                                    | 22        |
| 1.2.1.3.Somme de gaussiennes.....  | 24        |
| 1.2.2.Méthodes globales .....  | 25        |
| 1.2.2.1.Filtre de Volterra.....  | 25        |
| 1.2.2.2.Méthodes de maillage.....  | 26        |
| 1.3. Filtre particulière aléatoire .....   | 27        |
| 1.3.1. Exploration .....   | 27        |
| 1.3.2. Correction .....  | 28        |
| 1.3.3. Redistribution .....  | 29        |
| 1.3.4.Extension à particules gaussiennes.....                                      | 31        |
| 1.4. Conclusion.....   | 32        |
| <b>2 Chapitre 2: Solution particulière déterministe à maximum de vraisemblance</b> | <b>33</b> |
| <b>trajectorielle .....</b>  | <b>33</b> |
| 2.1 Critère à maximum de vraisemblance trajectorienl .....                         | 34        |
| 2.1.1 Formulation du Problème.....   | 34        |
| 2.1.2 Évolution de la vraisemblance trajectorielle .....                           | 34        |
| 2.1.3 Résolution particulière.....   | 35        |
| 2.2 Principe de base de la discrétisation déterministe.....                        | 35        |
| 2.2.1 Cas mono-dimensionnel.....   | 35        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.2.2    | Cas multi-dimensionnel: utilisation des marginales conditionnelles.....                   | 36        |
| 2.3      | Résolution particulière par branchement/Redistribution déterministe.....                  | 38        |
| 2.3.1    | Branchement déterministe des particules.....  | 38        |
| 2.3.2    | Prédiction/Correction de la vraisemblance particulière.....                               | 38        |
| 2.3.3    | Redistribution déterministe à maximum de vraisemblance.....                               | 40        |
| 2.3.4    | Estimation à maximum de vraisemblance.....  | 41        |
| 2.4      | Particules élémentaires utilisées.....  | 41        |
| 2.4.1    | Particules de Dirac.....  | 41        |
| 2.4.1.1  | Filtre local.....   | 41        |
| 2.4.1.2  | Algorithme.....   | 42        |
| 2.4.2    | Particules de Gauss.....  | 42        |
| 2.4.2.1  | Précautions pour la discrétisation par gaussiennes .....                                  | 42        |
| 2.4.2.2  | Filtre local.....   | 44        |
| 2.4.2.3  | Décompositions des composantes gaussiennes mal-conditionnées.....                         | 45        |
| 2.4.2.4  | Interpénétration des particules.....  | 46        |
| 2.4.2.5  | Algorithme.....   | 47        |
| 2.4.3    | Particules hybrides de Dirac-Gauss étendu.....  | 48        |
| 2.4.3.1  | Filtres locaux.....   | 48        |
| 2.4.3.2  | Algorithme.....   | 49        |
| 2.5      | Conclusion.....   | 51        |
| <b>3</b> | <b>Chapitre 3: Solution particulière déterministe à minimum de variance marginal.....</b> | <b>53</b> |
| 3.1      | Redistribution déterministe: cas mono dimensionnel.....                                   | 53        |
| 3.1.1    | Redistribution par sélection ponctuelle.....  | 53        |
| 3.1.2    | Redistribution particulière linéairement interpolante.....                                | 55        |
| 3.1.2.1  | Principe de base.....   | 55        |
| 3.1.2.2  | Application à la redistribution particulière.....   | 56        |
| 3.1.2.3  | Algorithme.....   | 57        |
| 3.1.3    | Comparaison des différentes versions.....   | 58        |
| 3.1.4    | Redistribution par interpolation gaussiennes.....   | 59        |
| 3.1.4.1  | Principe de base.....   | 59        |
| 3.1.4.2  | Considérations pratiques .....  | 60        |
| 3.1.4.3  | Algorithme .....  | 63        |
| 3.2      | Cas multidimensionnel : Utilisation des probabilités marginales.....                      | 64        |
| 3.2.1    | Redistribution particulière purement sélective .....                                      | 64        |
| 3.2.2    | Redistribution particulière linéairement interpolante.....                                | 65        |
| 3.2.3    | Particules de Gauss.....  | 68        |
| 3.3      | Conclusion.....   | 71        |
|          | <b>Deuxième Partie : APPLICATIONS AUX COMMUNICATION</b>                                   |           |
|          | <b>AEROSPATIALES.....</b>   | <b>73</b> |
| <b>4</b> | <b>Chapitre 4 : Modélisation de transmission Codage/Décodage.....</b>                     | <b>75</b> |
| 4.1      | Modélisation du système d'une transmission par satellite.....                             | 76        |
| 4.1.1    | Caractéristiques du système.....  | 76        |
| 4.1.2    | Chaîne de transmission.....   | 76        |
| 4.1.3    | Modèle de canal.....  | 77        |
| 4.1.3.1  | Interférences Entre Symboles (IES).....   | 78        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.1.3.2  | Perturbation sur la porteuse .....  | 78         |
| 4.1.4    | L'équation d'observation.....   | 79         |
| 4.1.5    | Structure du récepteur.....   | 80         |
| 4.1.6    | Solution proposée.....  | 80         |
| 4.2      | Types de codage du message.....   | 81         |
| 4.2.1    | Introduction .....  | 81         |
| 4.2.2    | Principe des codes en bloc.....   | 81         |
| 4.2.3    | Codes convolutifs.....  | 82         |
| 4.2.3.1  | Codeur élémentaire.....   | 82         |
| 4.2.3.2  | La capacité de protection.....  | 82         |
| 4.2.3.3  | Représentation du déroulement du codage.....  | 82         |
| 4.2.3.4  | Codes convolutifs récurrents systématiques.....   | 84         |
| 4.2.4    | Fermeture de treillis.....  | 84         |
| 4.2.4.1  | Insertion de bits de terminaison.....   | 84         |
| 4.2.4.2  | Code convolutif circulaire.....   | 85         |
| 4.2.5    | Algorithmes de décodage SISO.....   | 86         |
| 4.2.5.1  | Rapports de Vraisemblance Logarithmiques.....   | 86         |
| 4.2.5.2  | Algorithme de Viterbi.....  | 87         |
| 4.2.5.3  | L'algorithme de Viterbi à sortie souple (SOVA).....   | 89         |
| 4.2.5.4  | Algorithme BCJR.....  | 89         |
| 4.2.5.5  | Les approximations de l'algorithme MAP .....  | 91         |
| 4.2.6    | Codes concaténés (CC).....  | 92         |
| 4.2.7    | Système de correction d'erreur dans la norme DVB-RCS .....  | 93         |
| 4.2.7.1  | Turbo-codage duo-binaire.....   | 93         |
| 4.2.7.2  | Diagramme en treillis.....  | 94         |
| 4.2.7.3  | Ordre de transmission.....  | 94         |
| 4.2.7.4  | Entrelaceur.....  | 95         |
| 4.2.7.5  | Poinçonnage.....  | 95         |
| 4.2.7.6  | Fermeture du treillis pour un Turbo-code circulaire .....   | 96         |
| 4.2.8    | Système Turbo-décodage.....   | 96         |
| 4.2.8.1  | Principes de Turbo décodage.....  | 96         |
| 4.2.8.2  | Turbo-décodage bit à bit.....   | 97         |
| 4.2.8.3  | Turbo-décodage symbole par symbole.....   | 98         |
| 4.2.8.4  | Turbo-décodage circulaire.....  | 99         |
| 4.2.9    | Conclusion.....   | 100        |
| <b>5</b> | <b>Chapitre 5 : Décodage convolutif et égalisation conjointe, par la technique particulière....</b> | <b>101</b> |
| 5.1      | Présentation de la chaîne de transmission avec code convolutif.....                                 | 102        |
| 5.2      | Modélisation par un système dynamique non-linéaire.....   | 103        |
| 5.3      | Récepteur optimal.....  | 104        |
| 5.3.1    | Récepteur basé sur la Turbo-égalisation.....  | 104        |
| 5.3.2    | Récepteur basé sur un filtre Interpolateur.....   | 105        |
| 5.4      | Séquence d'apprentissage.....   | 106        |
| 5.5      | Initialisation du filtre particulière.....  | 106        |
| 5.6      | Résultats de simulation.....  | 107        |
| 5.6.1    | Informations non codées.....  | 108        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 5.6.2     | Informations codées.....   | 110        |
| 5.6.3     | Influence du type de récepteur .....   | 111        |
| 5.6.4     | Influence de l'entrelaceur.....  | 111        |
| 5.6.5     | Influence du nombre de séquences d'apprentissage .....                           | 112        |
| 5.6.6     | Détection avec bruit de phase.....   | 112        |
| 5.7       | Conclusion .....   | 113        |
| <b>6</b>  | <b>Chapitre 6: Filtrage particulaire en systèmes turbo-codés.....</b>            | <b>115</b> |
| 6.1       | Présentation de la chaîne de transmission de Turbo-code.....                     | 115        |
| 6.2       | Estimation particulaire du canal conjointement avec le turbo-décodage.....       | 116        |
| 6.2.1     | Méthode de séquençement.....   | 116        |
| 6.2.2     | Résultats de simulations .....   | 117        |
| 6.2.2.1   | Le taux d'erreur binaire.....  | 117        |
| 6.2.2.2   | L'effet de nombre de séquence d'apprentissage.....                               | 117        |
| 6.2.2.3   | L'effet du nombre de particules du filtrage particulaire.....                    | 118        |
| 6.2.2.4   | Rendement différent de ½.....  | 118        |
| 6.2.2.5   | Simulation avec bruit de phase.....  | 120        |
| 6.3       | Estimation particulaire à minimum de variance marginal.....                      | 121        |
| 6.4       | Turbo-détection en présence forte de bruit de phase.....                         | 122        |
| 6.4.1     | Hypothèses concernant le canal satellite.....                                    | 122        |
| 6.4.2     | Présentation du système d'estimation.....  | 123        |
| 6.4.2.1   | Treillis des codes constitutifs.....   | 123        |
| 6.4.2.2   | Treille de phase.....  | 123        |
| 6.4.2.3   | Treillis conjoint phase-code.....  | 124        |
| 6.4.3     | Turbo-détection aveugle Décodage du premier code constitutif.....                | 125        |
| 6.4.3.1   | Décodage du second code constitutif (avec redondance entrelacée)....             | 126        |
| 6.4.3.2   | Structure itérative de décodage.....   | 128        |
| 6.4.4     | Résultats.....   | 128        |
| 6.4.4.1   | Décodage aveugle du premier code constitutif (première itération).....           | 128        |
| 6.4.4.2   | Turbo-décodage aveugle.....  | 130        |
| 6.4.4.3   | Effet du bruit de phase.....   | 131        |
| 6.4.4.4   | Effet d'une fréquence Doppler résiduelle non-nulle.....                          | 132        |
| 6.5       | Conclusion.....  | 133        |
|           |  | 133        |
|           | <b>Troisième Partie: APPLICATIONS DE TYPE DEFENSE.....</b>                       | <b>135</b> |
| <b>7.</b> | <b>Chapitre 7 : Trajectographie passive sonar par Filtrage Particulaire.....</b> | <b>137</b> |
| 7.1.      | Modélisation de la trajectographie passive sonar .....                           | 137        |
| 7.1.1.    | Modélisation des commandes.....  | 138        |
| 7.1.2.    | Modélisation de la dynamique des mobiles .....                                   | 138        |
| 7.1.3.    | Équations du système.....  | 140        |
| 7.2.      | Résolution particulaire.....   | 141        |
| 7.2.1.    | Principe.....  | 141        |
| 7.2.2.    | Paramétrage.....   | 142        |
| 7.2.3.    | Algorithme.....  | 142        |
| 7.3.      | Résultats et Simulations.....  | 147        |
| 7.3.1.    | Scénario A: Porteur manoeuvrant, cible en mouvement rectiligne                   |            |

|  |            |
|--|------------|
| uniforme.....  | 147        |
| 7.3.2. Scénario B: Porteur immobile, cible en mouvement rectiligne.....              | 149        |
| 7.3.3. Scénario C: Porteur immobile, cible manoeuvrante.....                         | 150        |
| 7.4. Conclusion.....   | 151        |
| <b>8. Chapitre 8 :Filtrage particulière du signal RADAR de veille-poursuite.....</b> | <b>153</b> |
| 8.1. Problème radar.....   | 153        |
| 8.2. Modélisation des mesures radiales.....  | 154        |
| 8.2.1.Équation de mesure.....  | 154        |
| 8.2.2.Diagramme d'antenne.....   | 154        |
| 8.2.3.Poursuite angulaire par monopulse.....   | 156        |
| 8.2.4.Le signal émis.....  | 157        |
| 8.2.4.1.Impulsion classique.....   | 157        |
| 8.2.4.2.Train d'impulsion.....   | 158        |
| 8.2.4.3.Compression d'impulsion.....   | 158        |
| 8.2.4.4.Résolution distance et vitesse.....  | 159        |
| 8.2.5.Bilan de puissance.....  | 160        |
| 8.3. Modélisation du problème.....   | 161        |
| 8.3.1. Modélisation électromagnétique des cibles.....                                | 161        |
| 8.3.2.Modélisation géométrique.....  | 162        |
| 8.3.2.1.Trièdres nécessaires pour l'étude du problème.....                           | 162        |
| 8.3.2.2.Coordonnées polaires.....  | 163        |
| 8.3.3.Modèle dynamique (Singer).....   | 163        |
| 8.3.3.1.Généralités.....   | 163        |
| 8.3.3.2.Poursuite RADAR par un modèle de Singer 3D.....                              | 164        |
| 8.3.3.3.Modèle proposé pour la poursuite.....  | 165        |
| 8.3.3.4.Modèle du système pour le cas radial.....                                    | 166        |
| 8.3.4.Modèle global du système.....  | 166        |
| 8.3.5.Linéarisation du modèle du système.....  | 167        |
| 8.3.6.Précision optimale sur les estimations.....                                    | 167        |
| 8.4. Récepteur particulière pour radar de veille-poursuite.....                      | 168        |
| 8.4.1.Problématique de radar de veille-poursuite.....                                | 168        |
| 8.4.2.Principe de l'estimation.....  | 169        |
| 8.4.3.Filtrage particulière au problème de radar (période d'illumination).....       | 169        |
| 8.4.3.1.Estimation particulière déterministe à maximum de vraisemblance.....         | 169        |
| 8.4.3.2.Initialisation du filtre.....  | 170        |
| 8.4.3.3.Prédiction de particules.....  | 172        |
| 8.4.3.4.Probabilité de détection.....  | 172        |
| 8.4.4.Méthode de prédiction pure (période aveugle).....                              | 173        |
| 8.4.4.1.Principes de la méthode.....   | 173        |
| 8.4.4.2.Exemple.....   | 174        |
| 8.4.5.Algorithme d'estimation.....   | 175        |
| 8.4.6.Caractéristiques des simulations.....  | 176        |
| 8.4.6.1.Mode de fonctionnement simulé.....   | 176        |
| 8.4.6.2.Caractéristiques du Radar.....   | 176        |
| 8.4.6.3.Caractéristiques de la cible.....  | 176        |
| 8.4.6.4.Caractéristiques du Filtre.....  | 177        |

|  |            |
|--|------------|
| 8.4.7.Résultats de simulation.....   | 178        |
| 8.4.7.1.Probabilité de détection.....  | 178        |
| 8.4.7.2.Estimation des paramètres.....   | 178        |
| 8.4.7.3.Période de transition.....   | 180        |
| 8.4.7.4.Évaluation de redistribution des particules.....   | 181        |
| 8.5. Conclusion.....   | 182        |
| <b>9. Chapitre 9: Filtrage Particulaire du Système de poursuite Radar ARMOR</b>                  |            |
| <i>Traitement de données réelles.....</i>  | <b>183</b> |
| 9.1. Caractéristiques de l'expérience.....   | 184        |
| 9.1.1. Caractéristiques du Radar ARMOR.....  | 184        |
| 9.1.2.Caractéristiques de la cible.....  | 184        |
| 9.1.3.Caractéristiques du filtre.....  | 184        |
| 9.1.3.1.Fenêtre d'initialisation.....  | 184        |
| 9.1.3.2.Évolution de l'algorithme de filtrage particulaire.....                                  | 185        |
| 9.1.3.3.Rappel du principe général du Filtre Particulaire déterministe....                       | 186        |
| 9.1.3.4.Gestion automatique des paramètres.....  | 187        |
| 9.2. Résultats d'estimation .....  | 188        |
| 9.2.1.Performances à fort RSB .....  | 188        |
| 9.2.1.1.Résolution avec Filtres de Kalman Étendus en Parallèle.....                              | 188        |
| 9.2.2.Performances à faible RSB .....  | 189        |
| 9.2.2.1.Filtre Particulaire déterministe au sens du maximum de<br>vraisemblance.....             | 189        |
| 9.2.2.2.Résolution avec Filtres de Kalman Étendus en Parallèle.....                              | 191        |
| 9.2.2.3.Filtre Particulaire déterministe à minimum de variance.....                              | 192        |
| 9.2.3.Performances à très faible RSB .....   | 193        |
| 9.2.3.1.Filtre Particulaire déterministe à sélection au sens du maximum<br>de vraisemblance..... | 193        |
| 9.2.3.2.Analyse des redistributions des particules.....  | 193        |
| 9.2.3.3.Performances du filtre particulaire déterministe à minimum de<br>variance.....           | 196        |
| 9.3. Conclusion.....   | 197        |
| <b>CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....</b>  | <b>199</b> |
| Bibliographie.....   | 201        |

# Abréviations

|         |  |
|---------|--|
| AI      | annulation d'interférences                                 |
| APSK    | Amplitude Phase Shift Keying                               |
| ATM     | Asynchronous Transfer Mode                                 |
| BABG    | Bruit Additif Blanc Gaussien                               |
| BCJR    | Bahl Cocke Jelinek Raviv (algorithme de)                   |
| BICM    | Bit Interleaved Coded Modulation                           |
| CC      | Codes Concaténés   |
| CRB     | (Cramer-Rao Bound) Borne de Cramer-Rao                     |
| CS      | Cosinus Surélevé   |
| DFE     | égalisation à décision dans la boucle                      |
| DGA     | délégation générale pour l'armement                        |
| DVB-S   | Digital Video Broadcasting by Satellite                    |
| DVB-RCS | DVB Return Channel via Satellite                           |
| EL      | égalisation linéaire                                       |
| EQMM    | erreur quadratique moyenne minimale                        |
| FP      | Filtre particulière  |
| i.i.d   | Indépendamment et identiquement distribué                  |
| IES     | Interférences entre Symboles                               |
| LDPC    | Low Density Parity-Check (code)                            |
| MAP     | Maximum A Posteriori                                       |
| MIMO    | Multiple Input Multiple Output                             |
| MRM     | Maximisation du Rendement Minimum                          |
| MRT     | Maximisation du Rendement Total                            |
| MSE     | Mean squared error   |
| MSK     | Minimum Shift Keying                                       |
| MV      | Maximum de Vraisemblance                                   |
| PA      | Pseudo Aléatoire   |
| PAP     | Probabilité A Posteriori                                   |
| PCC     | Parallel concatenated code (Codes Concaténés en Parallèle) |
| PSK     | Phase Shift Keying   |
| QAM     | Quadrature Amplitude Modulation                            |
| QPSK    | Quadrature Phase Shift Keying                              |
| RS      | Reed-Solomon (code de)                                     |
| RSB     | Rapport Signal sur Bruit                                   |
| RSC     | Code Récuratif Systématique                                |
| SCC     | Parallel concatenated code (Codes Concaténés en Série )    |
| SISO    | Soft-In Soft-Out (algorithme)                              |
| SOVA    | Soft Output Viterbi Algorithm                              |
| TEB     | Taux d'Erreur Binaire                                      |
| TEP     | Taux d'Erreur Paquet                                       |
| UMTS    | Universal Mobile Telecommunications System                 |



# **INTRODUCTION**

L'objet de ce mémoire est de montrer la généralité de la technique déterministe en filtrage particulière, aussi bien à minimum de variance marginal qu'à maximum de vraisemblance trajectoriel, par opposition à l'ancienne technique aléatoire. Une thèse récente [Ziadi 07] avait montré les gains en performances et en ressources calculatoires auxquels conduisent les particules déterministes pour le filtrage particulière à maximum de vraisemblance trajectoriel, qui est une version de l'équation de Bellman en sens direct. Il restait à faire de même en filtrage non-linéaire marginal, au sens traditionnel du minimum de variance. C'est ce qui fait l'objet de chapitre 3, qui reprend les principes imaginés dans un brevet en instance de dépôt [Salut 08], et du Chapitre 9 qui en fait l'application probante au Radar ARMOR (DGA).

Par ailleurs, l'unification incluant les techniques plus traditionnelles à base de grille, c'est à dire à particules fixes, est montrée sur l'application turbo-décodage selon la norme DVB, pour autant que les variations de Doppler restent inférieurs à certaine limite. Au delà, la même démarche que celle adoptée en Radar s'applique, pour les communications entre mobiles fortement manoeuvrants.

## 1. Contexte général

La technique de filtrage particulière s'applique à tous les problèmes d'estimation dynamique des systèmes markoviens, sans restriction sur la nature des non-linéarités et/ou des distributions de bruits. Le prototype de l'algorithme particulière aléatoire fut introduit originellement en temps continu en identifiant le générateur du filtrage au générateur de Stratonovitch- Kushner [Stratonovitch 60] [Kushner 67] à celui d'un processus stochastique de branchement [Salut 89]. Son développement détaillé fut entrepris à partir de cette date [Huillet 89] au sein du G.d.R. "Automatique" (Groupe stochastique 1989-1991) , et des applications contractuelles Défense apparurent un peu plus tard ([Salut 92],[Rigal 92b]), accompagnées de mémoires universitaires ([Noyer 92][Rigal 93]). Cette interprétation aléatoire fut source d'un premier brevet sur les particules de Dirac et Dirac-Gauss [Salut 94].

Deux types principaux de branchement furent réalisés: par redistribution aléatoire multinomiale dès les premières applications ([Rigal 92a], [Noyer 92]) et par redistributions quasi-déterministes utilisant les parties entières [Rigal 95], et demi-entières [Monin 95], ces deux derniers ayant un caractère heuristique.

L'interprétation aléatoire (abusivement désignée sous l'appellation «Monte-Carlo récursif», qui occulte l'aspect fortement interdépendant) simule le processus itératif de branchement à naissance et mort aléatoire dans une population de particules interactives, l'inconvénient de toute interprétation aléatoire est une convergence en  $1/\sqrt{N}$ , pour une population à nombre constant N des particules.

En revanche, l'interprétation déterministe permet d'éviter l'aléa externe inutilement introduit par le tirage aléatoire de particules tant en prédiction qu'une redistribution des particules après pondération bayésienne,. Ceci fut mis en évidence dans le brevet [Salut 01] utilisant des particules de Gauss et de

Dirac-Gauss selon le maximum de vraisemblance, pour la réception optimale hybride de séquences/trajectoires.

En effet si les travaux de filtrage ont été motivés au départ par l'estimation à minimum de variance de l'état courant, le critère du maximum de vraisemblance est plus naturel dans un contexte trajectoriel auquel se rattache l'estimation de séquences via un canal [Bensalem 02] [Lehmann 04], ou de trajectoire de cibles [Ziadi 07]. L'absence caractéristique de tout tirage aléatoire dans ce cas, permet de réduire considérablement le nombre de particules nécessaires.

Des évolutions successives de ce procédé ont montré l'intérêt de particules déterministes à la fois ponctuelles (Dirac) et étendues (Gauss) pour la réduction du coût algorithmique et l'amélioration des performances. Cette technique s'est notamment manifestée dans le cas d'un système dynamique hybride en détection de pannes [Kazem 06a].

Le présent travail, utilisant la nouvelle technique déterministe, s'articule autour de deux brevets:

Le premier, détenu par l'industriel DSI, concerne le filtrage optimal à maximum de vraisemblance, et porte sur l'estimation trajectorielle globale des variables d'état par redistribution déterministe à maximum de vraisemblance, non conforme en loi. C'est une approximation particulière de l'équation d'optimalité de Bellmann dans le sens direct.

Le second brevet particulière déterministe, en instance de dépôt, concerne le filtrage optimal à minimum de variance, et porte sur l'estimation marginale des variables d'état à l'instant courant, par redistribution déterministe conforme en loi, ce que visait l'ancienne technique aléatoire. C'est une approximation particulière de l'équation traditionnelle du filtrage (Stratonovitch-Kushner).

Cette seconde approche déterministe possède la propriété de respecter la fonction de répartition des variables aléatoires en cause. Elle délivre simultanément tous les modes (maxima locaux) de la densité de probabilité marginale de l'état courant, contrairement au filtre à maximum de vraisemblance dont la redistribution privilégie l'optimum global. Cet aspect s'avère crucial pour le multi-cibles Radar dans un même lobe d'antenne.

Trois versions graduées sont étudiées: La première utilise des particules de Dirac, et leur fonction de répartition en escalier ne permet qu'une redistribution par sélection pure. La seconde utilise une fonction de répartition linéaire par morceaux permettant l'interpolation directe de l'espace de probabilité qui fait naître (ou déplace) de nouveaux supports particuliers. La troisième version utilise des particules gaussiennes étendues permettant l'interpolation par linéarisation locale dans l'espace d'état, plus coûteuse, comme cela fut déjà le cas en maximum de vraisemblance, mais utiles à de nombreuses applications.

Bien qu'une correspondance instructive (morphisme mathématique) existe entre les deux solutions ci-dessus évoquées, en utilisant le formalisme des mesures idempotentes de Maslov, ce point ne fait pas l'objet de développements mathématiques dans ce mémoire.

Le mémoire met l'accent sur plusieurs réalisations (*cf.* Fig.1), et étend l'utilisation des particules déterministes de Dirac ou de Gauss, au sens du minimum de variance marginal (conforme en loi) aussi bien que du maximum de vraisemblance trajectoriel. Il se termine par l'application Radar qui met bien en évidence que le nombre de particules déterministes requises, pour un domaine de recherche comparable, est du même ordre que dans les techniques classiques à grille fixe (Distance-Doppler). La différence réside dans les calculs vectoriels récursifs qui déplacent les particules, alors que les traitements classiques (de type Fourier) utilisent la diagonalisation scalaire (non-récursive) des calculs que permet la période de stationnarité supposée. Le bénéfice obtenu est l'intégration cohérente longue rendue possible par la technique particulière en cas de non-stationnarité, d'où les gains considérables en rapport signal/bruit.

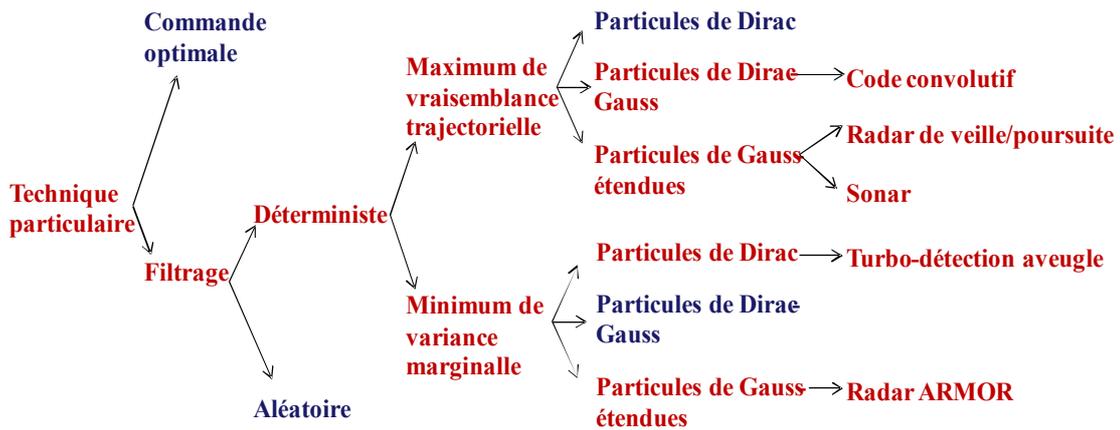


Fig 1: Applications du filtrage particulaire déterministe

L'ensemble permet traiter de façon unifiée et performante des problèmes très variés de traitement non-linéaire du signal.

- Communications:

Le récepteur particulaire est un récepteur faisant partie d'une chaîne de décodage itératif de messages binaires et/ou quadratiques transmis par satellite. Il aborde l'estimation optimale conjointe des paramètres cinématiques relatifs au récepteur et la détection du message binaire transmis par un satellite. En sus des architectures classiques de la chaîne d'acquisition du signal, on y met en évidence une architecture d'acquisition conjointe Doppler-décodage dans le cas d'une forte dynamique et d'un rapport signal/bruit faible.

Depuis plusieurs années, les turbo codes recueillent de plus en plus d'intérêt auprès des différents acteurs de télécommunications par satellite. En effet, l'apparition des turbo-codes [Berrou 93] en 1993 a montré que des performances proches de la capacité optimale peuvent être atteintes par un récepteur basé sur un décodage itératif de type SISO ("soft-input/soft-output").

Nous avons développé un outil à base de filtrage particulaire qui permet d'estimer les paramètres du canal conjointement avec l'estimation du message envoyé.

Nous avons également proposé une série de schémas d'estimation/décodage itératifs du message codé, et évalué les effets sur les performances du standard DVB-RCS [DVB 03], qui ne nécessite pas d'aller au delà d'une grille fixe (phase relative) pour les applications courantes.

- Estimation de cible en sonar:

On construit un récepteur passif se contentant «d'écouter» sa cible, afin d'identifier les paramètres cinématiques de cible grâce à la technique particulaire. L'information de la distance n'étant pas directement disponible, il faut mettre en œuvre des techniques d'intégration cohérente longue, prenant en compte la non-stationnarité Doppler des signaux acoustiques reçus, pour mettre à profit l'observabilité non-linéaire.

Historiquement, cela s'effectuait uniquement à partir des mesures angulaires et sans manoeuvre de la cible supposée en MRU (mouvement rectiligne uniforme). Ce problème qualifié de TPA (Trajectographie passive azimuth) reste inobservable sans manoeuvre de l'observateur. Il est alors nécessaire d'adjoindre à l'azimut d'autres mesures physiques afin d'assurer l'observabilité, (TPAF Trajectographie passive azimuth-fréquence).

Le filtrage particulaire, permet de s'affranchir des difficultés qu'on rencontre ici (non-linéaire et non-gaussien). La version déterministe permet de faire diminuer considérablement la masse de calculs en éliminant tout caractère aléatoire.

- Traitement du signal radar:

Le récepteur particulière déterministe de signaux radar est étudié de deux manières: Concernant le premier récepteur, le maximum de vraisemblance est utilisé pour la détection/poursuite de cibles manoeuvrantes, dans le cas où il y a un nombre très limité de mesures disponibles pendant un tour d'antenne du radar de veille (mode veille-poursuite). Malgré la difficulté supplémentaire ajoutée par une forte intermittence des mesures, la technique déterministe permet d'atteindre comme performances ultimes un rapport signal/bruit de  $-8$  dB, pour les scénarios étudiés, et pour un nombre raisonnable de particules.

Concernant le second récepteur, il s'agit de données réelles stratégiques (Radar ARMOR), on l'intermittence des mesures est moins prononcée, mais avec plusieurs plages ambiguïtés de «vitesse aveugle». Les performances atteintes, pour un rapport signal/bruit de  $-10$  dB, sont inusitées, et le nombre de particules est faible (320).

Le traitement du signal Radar est une application illustrative essentielle à la technique particulière, comme l'ont montré les premiers développements pour la DGA dès le début des années 90. L'application sur Radars réels, ARMOR mais aussi J11, a confirmé les performances inhabituelles qu'elle permet d'atteindre sur les cibles furtives et manoeuvrantes qui constituent de longue date le principal défi.

Toutefois, ces applications ont été menées sur des cibles suffisamment isolées, à la fois par rapport à d'autres cibles et par rapport au fouillis. La nouvelle technique déterministe, à minimum de variance, permet dans le même contexte exigeant de délivrer la distribution conforme en position-vitesse de tous les échos, ce qui s'étend au multi-cible et au fouillis, avec l'incomparable économie calculatoire du déterministe.

## 2. Organisation du Manuscrit

Ce mémoire est essentiellement consacré aux applications de la technique du filtrage particulière déterministe. Il est organisé en trois parties et neuf chapitres.

La [première partie](#) est constituée des Ch. 1 à 3. Le Ch. 1 est un résumé d'état de l'art des algorithmes de filtrage non-linéaire, dont le filtrage particulière aléatoire fait parti, pour un système dynamique. Le chapitre 2, introduit le filtrage particulière purement déterministe au sens de maximum de vraisemblance trajectorien, et une nouvelle méthode de filtrage particulière au sens de minimum de variance marginal est exposé dans le Chapitre 3.

La [deuxième partie](#) est formée des chapitres applicatifs 4 à 6. Dans le Ch. 4, nous rappelons brièvement les concepts de base des communications DVB-RCS, basées sur des satellites géostationnaires (GEO). Nous décrivons aussi, en particulier, le canal de transmission et présentons un aperçu des principaux codes qui utilisent à ce jour le décodage itératif, à savoir les Turbo-codes.

Les Ch. 5 à 6 sont centrés sur la description des algorithmes d'estimation/décodage itératif, permettant de maintenir d'excellents TEB à RSB faible. Dans le chapitre 5, le filtrage particulière est appliqué à l'estimation conjointe et au décodage pour un code convolutif. Dans le chapitre 6, ce travail est étendu aux turbo-codes.

La [troisième partie](#) contient aussi trois chapitres (7-9). Le Chapitre 7, expose des applications de type défense du filtrage particulière. La première application consiste en l'estimation de la trajectoire cinématique d'une cible sous-marine à l'aide d'un sonar passif.

Le Chapitre 8 repose sur l'application du filtrage déterministe à maximum de vraisemblance au problème de détection-poursuite de cible par un radar de veille. Ce type de radar assure une surveillance continue de l'espace, par exploration sectorielle et périodique en angles, ainsi qu'une estimation des cibles en mode de veille-poursuite.

Dans le Chapitre 9, on applique l'algorithme déterministe à minimum de variance sur des données réelles fournies par Thales Air Systems. Elles mettent en évidence le gain de performance

obtenu par rapport aux techniques classiques, avec des coûts calculatoires supérieurs d'un seul ordre de grandeur (facteur 10) par rapport aux techniques classiques.

### 3. Contexte collaboratif des travaux

Ce travail fut réalisé dans le cadre de projets illustratifs: l'un avec Alcatel Alenia Espace et l'autre avec Thales Air Systems, organisés en quatre sous-projets:

- *Sous-Projet 1 : technique de filtrage particulière appliquée aux communications par satellite* : Ce sous-projet consistait à étudier l'apport du filtrage particulière dans les systèmes de transmission par satellite utilisant un code convolutif.

- *Sous-Projet 2 : Turbo-décodage utilisant le filtrage particulière*. Ce sous-projet consistait en la mise en œuvre de techniques de filtrage particulière pour une estimation conjointe des paramètres du canal et du message transmis lorsque le code utilisé est un turbo-code. Ce sous-projet a été l'occasion de comparer technique déterministe de redistribution conforme en loi, à celle à maximum de vraisemblance, pour des particules de Dirac-Gauss.

- *Sous-Projet 3 : Utilisation de la technique de filtrage particulière pour la poursuite de cibles avec un radar de veille*. Ce sous-projet consistait en la mise en œuvre de la technique déterministe à maximum de vraisemblance, pour un radar fonctionnant en mode de veille-poursuite.

- *Sous-Projet 4 : Utilisation de la technique de filtrage particulière pour la poursuite de cibles avec le radar de poursuite du système ARMOR*. Ce sous-projet consistait en la mise en œuvre de la technique de filtrage particulière déterministe avec redistribution conforme en loi, pour des particules de Gauss étendues.

# **Première Partie**

## **PRINCIPES**



# Chapitre 1

## Estimation non linéaire *et solution particulière aléatoire*

Dans ce chapitre, nous commençons par exposer le problème du filtrage dans le cas général, ainsi que les différentes approches classiques utilisées pour résoudre ce problème. Deux grandes classes sont rappelées :

- Analytiques, comme la réalisation de Kalman (étendu) ou les fonctionnelles polynomiales de Volterra.

- Numériques, comme les méthodes de maillage fixe de l'espace d'état.

Nous montrons les limites ou les faiblesses de ces méthodes avant de passer à la description du filtrage particulière.

### 1.1 Problème de filtrage

#### 1.1.1 Équations du modèle

Soit  $x_k$  un processus stochastique à réalisation markovienne dont la dynamique est régie par l'équation récurrente suivante:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, w_k) \quad (1.1)$$

où  $x_k$  représente l'état du système  $f_k: R^n \times R^m \rightarrow R^n$  est la fonction de transition mesurable et  $w_k \in R^m$  est le bruit source i.i.d. de densité de probabilité a priori  $p^w(\cdot)$  connue. Le processus  $x_k$  est observé à travers un processus bruité  $y_k \in R^p$  lié au vecteur d'état par l'équation d'observation:

$$y_k = h_k(x_k, v_k) \quad (1.2)$$

où  $h_k: R^n \times R^p \rightarrow R^p$  est la fonction de mesure et  $v_k \in R^p$  est le bruit de mesure i.i.d, indépendant de  $w_k$ . Les hypothèses classiques du filtrage non-linéaire sont :

- Le processus d'état  $x_k$  est Markovien, et  $x_0$  l'état initial supposé de densité connue.
- Les observations  $\{y_k, k=0, \dots, K\}$  sont mutuellement indépendantes, conditionnellement à  $\{x_k\}$ .
- Le bruit de mesure  $v_k$  est une séquence de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (iid), indépendant du processus  $x_k$ .

Le filtrage consiste à déterminer, à partir des mesures disponibles, le meilleur estimateur  $\hat{x}_k$  de l'état  $x_k$  optimisant un critère de performance donné  $J(x_k)$ . D'une manière générale le problème d'estimation dynamique consiste à reconstruire un processus stochastiques  $x_k$  à partir de la trajectoire des observations bruitées  $Y_\tau = \{y_k, k=0, \dots, \tau\}$ .

Le filtrage concerne l'estimation de la valeur courante  $x_k$  ( $k=\tau$ ). La prédiction et le lissage concernent, respectivement, celle des valeurs postérieures ( $k>\tau$ ) et antérieures ( $k<\tau$ ). Cette estimation peut s'effectuer à tout sens de critère.

### 1.1.1 Critère d'estimation

#### ● Estimateur à minimum de variance marginal

Cet estimateur minimise la variance de l'erreur de filtrage donnée par:

$$J_k = E[\|x_k - \hat{x}_k\|^2] \quad (1.3)$$

où  $\hat{x}_k$  désigne l'estimateur à minimum de variance de l'état  $x_k$ . Cet estimateur est construit à partir de l'ensemble des observations disponibles  $Y_k = \{y_\tau, \tau=0, \dots, k\}$  et il coïncide avec l'espérance conditionnelle (marginale), liée à la densité marginale par:

$$\hat{x}_k = [x_k / Y_k] = \int x_k p(x_k / Y_k) dx_k \quad (1.4)$$

#### Remarque

La densité de probabilité marginale  $p(x_k / Y_k)$  est elle-même l'intégrale de la probabilité trajectorielle  $p(X_k, Y_k)$  par rapport aux antécédents de  $x_k$  :

$$p(x_k / Y_k) = \iint_{X_{k-1}} p(X_k / Y_k) dX_{k-1} \quad (1.5)$$

où  $X_{k-1} = \{x_\tau, \tau=0, \dots, k-1\}$

La densité trajectorielle  $p(X_k / Y_k)$  porte sur une argument dont la dimension augmente avec le temps ce qui la rend inapte à toute approximation finie. C'est la raison pour laquelle, on pose le problème d'optimisation trajectorielle d'une manière différente.

#### ● Estimateur à maximum de vraisemblance trajectorielle

L'estimateur à maximum de vraisemblance trajectorielle, cherche à déterminer la trajectoire  $X_k = \{x_\tau, \tau=0, \dots, k\}$  la plus vraisemblable au vu des observations  $Y_k = \{y_\tau, \tau=0, \dots, k\}$ , définie par :

$$\hat{X}_k = \arg \max_{X_k} V(X_k / Y_k) = \arg \max_{X_k} \log p(X_k / Y_k) \quad (1.6)$$

où  $V(X_k / Y_k)$  est la vraisemblance conditionnelle de la trajectoire  $X_k$  sachant les observations  $Y_k$ .

### 1.1.2 Équations du filtrage

Dans les deux problèmes qui précèdent, le filtrage optimal consiste à calculer une densité conditionnelle  $p_k$ , sachant les observations  $Y_k = (y_0, \dots, y_k)$  jusqu'à l'instant courant  $k$ .

En pratique, on souhaite obtenir un algorithme récursif de probabilités conditionnelles  $(p_k)_{k>0}$ . Le calcul de  $p_k$  ne doit être fonction que de la dernière observation  $y_k$  et de la loi conditionnelle précédente  $p_{k-1}$ . Si le calcul effectif du filtre optimal est un problème délicat, son formalisme mathématique est aisé. L'objet du filtrage repose sur la densité de probabilité conditionnelle trajectorielle  $p(X_k/Y_k)$ . Cette densité peut s'exprimer récursivement en deux étapes :

### **Prédiction:**

Il s'agit de calculer, à l'instant  $k$ ,  $(p(X_k/Y_{k-1}))$  la densité de probabilité de  $X_k$ , conditionnelle aux  $k-1$  dernières observations  $Y_{k-1}$ , à partir de la connaissance de la densité de probabilité conditionnelle trajectorielle  $p(X_{k-1}/Y_{k-1})$  à l'instant précédent, et en se basant sur le caractère **markovien** du système, soit:

$$p(X_k/Y_{k-1}) = p(x_k/x_{k-1}) p(X_{k-1}/Y_{k-1}) \quad (1.7)$$

Cette équation traduit la prédiction à un pas des densités des probabilités conditionnelles. La densité  $p(x_k/x_{k-1})$  représente la probabilité de transition de l'état  $x_{k-1}$  à l'état  $x_k$ . Elle s'obtient à partir de l'équation d'évolution dynamique et de la densité de probabilité du bruit de dynamique  $w_k$ .

Par intégration de l'équation (1.7), selon  $X_{k-1}$ , on retrouve l'équation de **Chapman-Kolmogorov** de prédiction de la densité de probabilité conditionnelle de l'état courant:

$$p(x_k/Y_{k-1}) = \int p(x_k/x_{k-1}) p(x_{k-1}/Y_{k-1}) dx_{k-1} \quad (1.8)$$

Par passage au logarithme, l'équation (1.7) devient:

$$V(X_k/Y_{k-1}) = V(x_k/x_{k-1}) + V(X_{k-1}/Y_{k-1}) \quad (1.9)$$

où  $V(x_k/x_{k-1})$  correspond au coût de transition pour l'équation de **Bellman** dans le sens direct.

### **Correction:**

Cette étape se base sur la règle de **Bayes**, et consiste en la correction de la densité de probabilité conditionnelle au vu de la nouvelle observation  $y_k$  selon la formule:

$$p(X_k/Y_k) = \frac{p(y_k/x_k) p(X_k/Y_{k-1})}{p(y_k/Y_{k-1})} \quad (1.10)$$

Le terme de normalisation  $p(y_k/Y_{k-1})$  s'obtient par marginalisation du numérateur de (1.10) :

$$p(y_k/Y_{k-1}) = \int \int p(y_k/x_k) p(X_k/Y_{k-1}) dX_k \quad (1.11)$$

La densité de probabilité  $p(y_k/x_k)$  est déterminée à partir de l'équation d'observation et de la densité de probabilité du bruit de mesure  $v_k$ .

En passant au logarithme l'équation (1.10), l'étape de correction pour le filtrage devient finalement:

$$V(X_k/Y_k) = V(y_k/x_k) + V(X_k/Y_{k-1}) + C^{te} \quad (1.12)$$

ce qui conduit à l'équation de Bellman dans le sens direct, pour la détermination de la trajectoire à maximum de vraisemblance.

D'autre part, l'intégration de conduit à:

$$p(x_k/y_k) = \frac{p(y_k/x_k) p(x_k/Y_{k-1})}{p(y_k/Y_{k-1})} \quad (1.13)$$

qui est l'expression du Filtrage.

Il ressort clairement des équations de filtrage (1.8) et (1.13) que la résolution du problème de filtrage de processus markovien à temps discret repose bien sur la connaissance des densités de probabilité de transition  $p(x_k/x_{k-1})$  et d'observation  $p(y_k/x_k)$ .

## 1.2 Méthodes de résolution non-linéaire

Le filtre de Kalman concerne les systèmes linéaires à bruit gaussiens, et représente une version dynamique et probabiliste de la méthode des moindres carrés. Le filtre fut développé par Kalman [Kalman 60] en 1960 pour le cas discret sans bruit dynamique et repris en 1961 par Kalman et Bucy [Kalman 61] pour le cas continu avec bruit dynamique, bien que Stratonovitch l'a préalablement découvert dans un cadre plus général au 59-60. Le filtre à maximum de vraisemblance trajectorien, délivre l'estime terminal, coïncide avec celui à minimum de variance concernant le filtrage de l'état courant  $x_k$ .

Dans le cas général, la théorie non-linéaire ne permet pas une résolution du problème de filtrage en dimension finie. De nombreuses solutions approchées ont été proposées dans la littérature.

Les solutions les plus immédiates, mais dont l'application reste limitée aux situations les plus «régulières», sont celles qui ramènent le problème de filtrage non-linéaire à l'un des problèmes de filtrage qui admettent des solutions analytiques, soit par l'approximation linéaire-gaussienne du système d'état, soit par la discrétisation a priori de l'espace d'état.

Plus généralement, de nombreuses solutions approchées du problème de filtrage non-linéaires sont basées sur l'approximation locale des équations d'état et/ou des densités de probabilité permettant une paramétrisation finie de la densité de probabilité conditionnelle, et ainsi une résolution en dimension finie du problème de filtrage. Leur caractère local interdit malheureusement toute garantie de convergence globale vers l'optimalité.

Un autre type d'approche sous-optimale consiste à projeter dans des classes restreintes d'estimateurs réalisables (fonctionnelles polynomiales à noyaux séparables degré fixé ([Salut 81], [Monin 93]).

En pratique la difficulté consiste à rechercher une solution approchée du problème d'estimation non-linéaire, qui garantit, asymptotiquement avec l'ordre d'approximation, un critère d'optimalité global.

Les **méthodes particulières** et polynomiales à horizon infini (Volterra,...) sont les seules à satisfaire ces exigences de performance. La récursivité exacte de l'estimation polynomiale étant limitée (restreinte aux systèmes à réalisation bilinéaire dans l'espace d'état), la méthode particulière est actuellement la seule pouvant résoudre le problème proposé de manière générale.

En résumé, dans le cas où il n'y pas d'estimateur réalisable en dimension finie sans forme exacte ou projective, plusieurs techniques d'approximation sont envisageables, comme illustré par la figure 1.1.

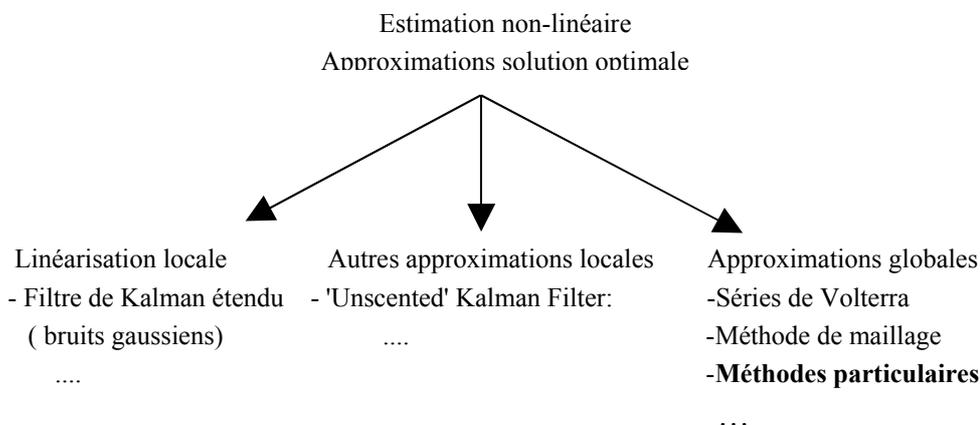


Fig 1. 1: Panorama de méthodes non-linéaires

## 1.2.1 Méthodes locales

### 1.2.1.1. Linéarisation du modèle: *Filtre de Kalman étendu (EKF)*

Le filtre de Kalman étendu «EKF» a été développé par Stanley F. Schmidt en 1963 (cf. [Schmidt 70]). Il représente probablement l'approche la plus commune et la plus populaire pour traiter un système non linéaire, mais n'a qu'un sens local.

L'EKF est similaire à un filtre de Kalman linéaire autour des points de linéarisation de la trajectoire. Ceci signifie que les dérivées partielles sont évaluées le long de la trajectoire, ce qui dépend elle-même des mesures.

Il réduit le développement des équations non-linéaires à la partie linéaire, mais cette méthode est utilisable dans le cas où les bruits sont faibles gaussiens et d'amplitude faible. Elle ne peut garantir ni la convergence ni la stabilité de la solution, elle n'a guère de sens en cas de multi-modalité, ce qui est un inconvénient majeur de cette approche.

Nous en rappelons néanmoins des équations de base, car elles reprennent un sens lorsqu'elles sont utilisées sous la forme de particules étendus élémentaires.

Soit le système décrit par les équations suivantes (1.14):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, w_k) \\ y_k &= h(x_k) + v_k \end{aligned} \quad (1.14)$$

avec  $x_0$ : Condition initiale du support particulière.

$v_k, w_k$ : Bruits blancs indépendants de distribution connue, avec matrices de covariances R, Q respectivement. Soient d'autre part:

$$\begin{aligned} F^x(x, w) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, w) \\ F^w(x, w) &= \frac{\partial f}{\partial w}(x, w) \\ H(x) &= \frac{\partial h}{\partial x}(x) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Par linéarisation du modèle (1.14) au voisinage du point de travail  $\hat{x}_{k/k}$ , on obtient le modèle linéarisé:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1/k} &= f(\hat{x}_{k/k}, w_k) + F^x(\hat{x}_{k/k}, 0)(x_k - \hat{x}_{k/k}) + F^w(\hat{x}_{k/k}, 0)w_{k+1} \\ y_{k+1} &= h(\hat{x}_{k/k}) + H(\hat{x}_{k/k})(x_k - \hat{x}_{k/k}) + v_{k+1} \end{aligned} \quad (1.16)$$

A partir de ces équations, on peut localement appliquer le filtrage de Kalman, concernant le système linéaire ainsi mis en évidence.

Les deux étapes d'estimation sont les suivantes:

– *Prédiction*

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1/k} &= f(\hat{x}_{k/k}, 0) \\ P_{k+1/k} &= F^x(\hat{x}_{k/k}, 0)P_{k/k}F^{xT}(\hat{x}_{k/k}, 0) + F^w(\hat{x}_{k/k}, 0)Q_kF^{wT}(\hat{x}_{k/k}, 0) \end{aligned} \quad (1.17)$$

– *Correction*

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1/k} &= h(\hat{x}_{k+1/k}) \\ \hat{x}_{k+1/k+1} &= \hat{x}_{k+1/k} + K_k(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1/k}) \\ K_{k+1} &= P_{k+1/k}H^T(\hat{x}_{k+1/k})\left(H(\hat{x}_{k+1/k})P_{k+1/k}H^T(\hat{x}_{k+1/k}) + R\right)^{-1} \\ P_{k+1/k+1} &= P_{k+1/k} - K_{k+1}\left(H(\hat{x}_{k+1/k})P_{k+1/k}H^T(\hat{x}_{k+1/k}) + R\right)K_{k+1}^T \end{aligned} \quad (1.18)$$

### 1.2.1.2. Filtre de Kalman 'Unscented' (UKF)

Un autre estimateur de système non-linéaire, appelé dans la littérature «Unscented Kalman Filter (UKF)» de Julier et Uhlmann [Julier 04], est basé sur le principe qu'un ensemble de points échantillons d'une densité peut être utilisé pour paramétrer l'équation d'une moyenne et covariance. L'estimateur assure une performance équivalente au KF pour les systèmes linéaires et s'applique localement d'une manière élégante aux non-linéarités sans passer par les étapes de linéarisation exigées par l'EKF, mais il suppose la même restriction mono-modale.

L'UKF résout les problèmes liées à l'EKF en utilisant une approche d'échantillonnage déterministe. La distribution est représentée par un ensemble localement minimal de points. Ces points sont représentatifs jusqu'au troisième ordre d'un développement de Taylor de la non-linéarité analytique.

La densité conditionnelle est caractérisée par un ensemble de  $(2n+1)$  points soigneusement choisis (sigma points), où  $n$  est la dimension de l'espace d'état. Ils sont propagés grâce à l'équation dynamique non-linéaire du système. Ils permettent d'évaluer précisément la moyenne et la matrice de covariance de l'état prédit (avec une précision d'ordre 3 de Taylor). Contrairement à l'EKF, l'algorithme de l'UKF n'utilise pas explicitement le calcul du gradient des équations du système. Les approximations sont basées sur les interpolations des équations du système avec les sigma-points.

#### Principe de la transformation Unscented (UT) :

Étant donné le vecteur d'état à l'étape  $k-1$ , un ensemble de «Points sigma» est calculé et stocké dans les colonnes de la matrice de points de taille  $n \times (2n+1)$  et notée  $X_{k+1}$ . Ces points échantillons représentent les moyennes et covariances, ils sont calculés en utilisant un algorithme déterministe:

$$\begin{aligned} X_{0,k} &= \hat{x}_{k-1} \\ X_{i,k} &= \hat{x}_{k-1} + (\sqrt{(n+\lambda)P_{k-1}})_i \quad i=1\dots n \\ X_{i,k} &= \hat{x}_{k-1} - (\sqrt{(n+\lambda)P_{k-1}})_i \quad i=n+1\dots 2n \\ W_0^{(m)} &= \lambda/(\lambda+n) \quad W_0^{(c)} = \lambda/(\lambda+n) + (1-\alpha^2 + \beta) \\ W_i^{(m)} &= W_i^{(c)} = 1/(2(\lambda+n)) \quad i=1\dots 2n \end{aligned} \quad (1.19)$$

$(\sqrt{(n+\lambda)P_{k-1}})_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la racine carrée de la matrice  $((L+\lambda)P_{k-1})$  en utilisant la décomposition de Cholesky; avec:  $\lambda = \alpha^2(d + \kappa) - d$ ,  $\lambda$  un facteur d'échelle qui est fonction du paramètre. Celui-ci contrôle la répartition des points  $\chi_i$  autour de sa moyenne.

$\alpha$  prend en général de faibles valeurs.  $\kappa$  est un second facteur d'échelle, qui est pris égal à 0 habituellement.  $\beta$  est un paramètre qui est lié au type de distribution de  $x$  (pour une distribution Gaussienne,  $\beta = 2$ ).

Une fois le vecteur  $X_{k-1}$  calculé, on exécute l'étape de **prédiction** en propageant d'abord chaque colonne de  $X_{k-1}$  en utilisant le modèle du système (chaque point de sigma est instancié par le modèle du processus pour rapporter un ensemble d'échantillons transformés) :

$$X_{i,k} = f(X_{i,k-1})$$

Ayant calculé  $X_{i,k}$ , l'estimation a priori de l'état est:

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)}(X_{i,k}) \quad (1.20)$$

De même, on calcule la covariance d'erreur a priori avec :

$$P_{k|k-1} = \sum_{(i=0)}^{(2n)} W_i^{(c)}(X_{i,k} - \hat{x}_{k|k-1}) \times (X_{i,k} - \hat{x}_{k|k-1}) \quad (1.21)$$

#### Étape de correction:

Les vecteurs  $\chi_i$  sont propagés selon la fonction non-linéaire  $h$  :

$$(\mathcal{Y}_k)_i = h((\mathcal{X}_{k-1})_i)$$

on transforme la colonne par la fonction de mesure, sous la forme:

$$\hat{y}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} (\mathcal{Y}_{i,k})$$

le gain du filtre de Kalman est:

$$K_k = P_{\hat{x}_i \hat{y}_k} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k}^{-1}$$

avec

$$P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\mathcal{Y}_{i,k} - \hat{y}_k) \times (\mathcal{Y}_{i,k} - \hat{y}_k), \quad P_{\hat{x}_i \hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\mathcal{Y}_{i,k} - \hat{y}_k) \times (\mathcal{X}_{i,k} - \hat{x}_k)$$

La moyenne et la matrice de covariance de la variable aléatoire  $Y$  sont données par :

$$P_{k/k} = P_{k-1/k-1} - K_k P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} K_k^T$$

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k-1/k-1} + K_k (\mathcal{Y}_k - \hat{y}_{k-1/k-1})$$

### L'algorithme de l'UKF:

Le filtre de Kalman sans biais est la forme récursive de la transformation UT. Cette forme est obtenue grâce à l'équation de correction du filtre de Kalman. La variable aléatoire  $x_k^a = [x_k^T w_k^T v_k^T]^T$  de dimension  $(L=n+m+p)$  est définie comme la concaténation de la variable d'état  $x_k$ , et des variables du bruit d'état et de mesure  $w_k, v_k$  respectivement [Julier 81].

#### Étape d'initialisation:

A l'instant initial, on a:

$$\hat{x}_0 = E(x_0)$$

$$P_0 = E((\hat{x}_0 - x_0) \times (\hat{x}_0 - x_0)^T)$$

$$\hat{x}_0^a = E(x_0^a) = [\hat{x}_0 \mathbf{0}_{1 \times m} \mathbf{0}_{1 \times p}]$$

$$P_0^a = E((\hat{x}_0^a - x_0^a) \times (\hat{x}_0^a - x_0^a)^T) = \begin{bmatrix} P_k & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

$W_i^{(m)}, W_i^{(c)}$  sont calculés par la relation (1.19).

On calcule les sigmas points:

$$\mathcal{X}_{k-1} = [\hat{x}_{k-1}^a \quad \hat{x}_{k-1}^a \pm (\sqrt{(L+\lambda)P_{k-1}^a})_i] \quad (i=1, \dots, 2L)$$

$$\mathcal{X}_{k-1} = [(\mathcal{X}_{i,k-1}^x)^T \quad (\mathcal{X}_{i,k-1}^w)^T \quad (\mathcal{X}_{i,k-1}^v)^T]^T$$

#### Étape de prédiction

$$\mathcal{X}_{i,k/k-1}^x = f(\mathcal{X}_{i,k-1}^x, \mathcal{X}_{i,k-1}^w)$$

$$\hat{x}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \mathcal{X}_{i,k-1}^x$$

$$P_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\mathcal{X}_{i,k/k-1}^x - \hat{x}_{k/k-1}) \times (\mathcal{X}_{i,k/k-1}^x - \hat{x}_{k/k-1})^T$$

$$\mathcal{Y}_{i,k/k-1} = h(\mathcal{X}_{i,k-1}^x, \mathcal{X}_{i,k-1}^v)$$

$$\hat{y}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \mathcal{Y}_{i,k/k-1}$$

(1.23)

**Étape de correction**

$$\begin{aligned}
P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (y_{i,k/k-1} - \hat{y}_{k/k-1}) \times (y_{i,k/k-1} - \hat{y}_{k/k-1})^T \\
P_{\hat{x}_k \hat{y}_k} &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (x_{i,k/k-1} - \hat{x}_{k/k-1}) \times (y_{i,k/k-1} - \hat{y}_{k/k-1})^T \\
K_k &= P_{\hat{x}_k \hat{y}_k} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k}^{-1} \\
P_k &= P_{k/k-1} - K_k P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} K_k^T \\
\hat{x}_k &= \hat{x}_{k/k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_{k/k-1})
\end{aligned} \tag{1.24}$$

**1.2.1.3. Sommes de gaussiennes**

Toute densité de probabilité  $p(x)$  peut être approchée à la précision désirée, par une somme finie pondérée de  $N$  densités gaussiennes élémentaires. Ces gaussiennes, de moyenne  $\hat{x}^i$ , de covariance  $P^i$  et de poids respectifs  $\rho^i$  normalisés, forment une base possible, telle que:

$$p \approx \sum_{i=0}^{N-1} \rho^i N(m^i, P^i) \tag{1.25}$$

Cette propriété a été utilisée sans précaution par de nombreux auteurs, sous formes **banc de filtres** parallèles (interactifs ou non). En effet, l'approximation résultant de la densité de probabilité initiale  $p(x_0)$ , des densités du bruit de dynamique  $p(w_k)$  et du bruit de mesure  $p(v_k)$ , conduit au schéma suivant:

Si on suppose que  $N_0$ ,  $M$ ,  $L$  représentent respectivement le nombre de discrétisation de l'état initial, du bruit dynamique et du bruit d'observation, le nombre total de gaussiennes élémentaires explose exponentiellement avec le temps suivant:

$$N_k = N_{k-1} M L = N_0 (M L)^k$$

et selon l'algorithme de filtrage dicté par les équations de prédiction-corrrection:

**- initialisation:**

$$\begin{aligned}
p(x_0) &\approx p_{N_0}(x_0) \sum_{i=0}^{N_0-1} \rho_0^i G_{\hat{x}_0^i, P_0^i}(x_0) \\
p(w_k) &\approx p_M(w_k) \sum_{i=0}^{M-1} \rho_{w,k}^i G_{\hat{w}_k^i, q_k^i}(w_k) \\
p(v_k) &\approx p_L(v_k) \sum_{i=0}^{L-1} \rho_{v,k}^i G_{\hat{v}_k^i, p_k^i}(v_k)
\end{aligned} \tag{1.26}$$

**- Prédiction:**

$$\begin{aligned}
\text{pour } p(x_{k-1}/Y_{k-1}) &\approx p_{N_{k-1}}(x_{k-1}/Y_{k-1}) = \sum_{i=0}^{N_{k-1}-1} \rho_{k-1/k-1}^i G_{(\hat{x}_{k-1/k-1}^i, P_{k-1/k-1}^i)}(x_{k-1}/Y_{k-1}) \\
p_{N_k}(x_k/Y_{k-1}) &\approx \sum_{i=0}^{N_{k-1}-1} \sum_{j=0}^{M-1} \rho_{k-1/k-1}^i \rho_{w,k}^j G_{(\hat{x}_{k/k-1}^{i,j}, P_{k/k-1}^{i,j})}(x_{k-1}/Y_{k-1}) \\
&\approx \sum_{n=0}^{M N_{k-1}-1} \rho_{k/k-1}^n G_{(\hat{x}_{k/k-1}^n, P_{k/k-1}^n)}(x_{k-1}/Y_{k-1})
\end{aligned} \tag{1.27}$$

où

$G_{(\hat{x}_{k/k-1}^{i,j}, P_{k/k-1}^{i,j})}(x_{k-1}/Y_{k-1})$  est obtenu par prédiction approchée locale (EKF ou UKF) conditionnelle aux densités  $i$  et  $j$ .

- **Correction:**

$$\begin{aligned}
 p(x_k/Y_k) &\approx \sum_{i=0}^{MN_{k-1}-1} \sum_{j=0}^{L-1} \frac{\rho_{v,k}^j \rho_{k/k-1}^i p_{i,j}(y_k/Y_{k-1})}{\sum_{i,j} \rho_{v,k}^j \rho_{k/k-1}^i p_{i,j}(y_k/Y_{k-1})} G_{(\hat{x}_{k/k}, P_{k/k}^{i,j})}(x_k/Y_k) \\
 &\approx \sum_{n=0}^{LMN_{k-1}-1} \rho_{k/k}^n G_{(\hat{x}_{k/k}, P_{k/k}^{i,j})}(x_k/Y_k)
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

$G_{(\hat{x}_{k/k}, P_{k/k}^{i,j})}(x_k/Y_k)$  est le terme de normalisation dans la correction approchée locale (EKF ou UKF) conditionnelle aux densités  $i, l$ .

Deux techniques de réduction ont été proposées [Sorenson 71] pour pallier l'explosion combinatoire: l'élimination des densités élémentaires à très faible poids, et la fusion en une seule des gaussiennes à très fort recouvrement. Le recours au niveau de poids comme critère de sélection fait de cet algorithme une méthode implicitement à maximum de vraisemblance, contrairement à sa définition d'estimation marginal implicitement, à minimum de variance (cf. 1.1.2). Cette confusion a restreint le développement globale de l'idée qui fut néanmoins un ancêtre du filtrage à particules gaussiennes.

Cette même confusion subsiste dans [Teulière 00], où coexistent sélection par maximum de vraisemblance des trajectoires particulières et estimation à minimum de variance.

Le développement correct de maximum de vraisemblance trajectorien est exempt de probabilité marginale, comme il a été montré par [Ziadi 07].

## 1.2.2 Méthodes globales

### 1.2.2.1. Filtrés polynomiaux de Volterra

Ce filtre est sous optimal en un sens précis, c'est-à-dire optimal dans une sous classe réduite par rapport à la classe la plus générale. L'estimateur repose sur l'utilisation de fonctionnelles **polynomiales** du signal d'observation [Schetzen 80].

#### ● Filtre de Volterra à horizon fini

Prenons le cas le plus simple où l'estimateur d'une variable d'état  $x_k$ , est représentable par une fonctionnelle analytique des observations. Ainsi, pour le cas d'estimateurs quadratiques, on peut écrire l'estimateur de l'état  $x_k$  sous la forme:

$$\hat{x}_{k/k} = \sum_{\tau_1=0}^d W^1(k, \tau_1) y_{k-\tau_1} + \sum_{\tau_1=0}^d \sum_{\tau_2=0}^{\tau_1} W^2(k, \tau_1, \tau_2) y_{k-\tau_1} y_{k-\tau_2} \tag{1.29}$$

La constante "d" s'appelle l'horizon passé de l'estimateur  $\hat{x}_k$  (l'estimateur de l'état à l'instant k). les paramètres  $W^k(i, j)$  sont calculés en minimisant l'erreur de variance de filtre:

$$J_k = E[(x_k - \hat{x}_{k/k})^T (x_k - \hat{x}_{k/k})] \tag{1.30}$$

Il suffit alors de dériver  $J_k$  par rapport à chacun des paramètres  $W^k(i, j)$ , et après annulation des dérivées:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J_k}{\partial W^1(k, \sigma_1)} &= E[(x_k - \hat{x}_{k/k})^T y_{k-\sigma_1}] = 0 \quad \forall \sigma_1 = 0..d \\
 \frac{\partial J_k}{\partial W^2(k, \sigma_1, \sigma_2)} &= E[(x_k - \hat{x}_{k/k})^T y_{k-\sigma_1} y_{k-\sigma_2}] = 0 \quad \forall \sigma_1 = 0..d, \forall \sigma_2 = 0..d
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

On obtient ainsi un système linéaire inversible déterminant les noyaux inconnus. Il s'agit là, toutefois, d'une approche «Non-linear Moving average», dont le caractère récursif est induit par l'horizon temporel artificiellement limité.

- **Filtre de Volterra à horizon infini**

Tout en se limitant au cas quadratique, comme pour l'estimateur de Volterra à horizon fini, on peut réaliser un estimateur de Volterra à horizon croissant de la forme suivante :

$$\hat{x}_{k/k} = \sum_{\tau_1=0}^k W^1(k, \tau_1) y_{k-\tau_1} + \sum_{\tau_1=0}^k \sum_{\tau_2=0}^{\tau_1} W^2(k, \tau_1, \tau_2) y_{k-\tau_1} y_{k-\tau_2} \quad (1.32)$$

Il est clair que le nombre des paramètres précédents tend vers l'infini, lorsque le nombre d'observations  $y_i$  à filtrer grandit avec le temps. On constate que le filtre de Volterra à horizon croissant donne un estimateur correct, tandis que l'estimateur calculé par le filtre de Volterra à horizon fini donne une bonne valeur moyenne, mais avec des variations importantes de part et d'autre de la valeur moyenne.

Il existe des estimateurs récursifs à horizon infini, sous contrainte de séparabilité des noyaux  $W^k$  [Salut 81][Monin 93], c'est-à-dire de réalisabilité en dimension finie, seule méthode réalisable en pratique lorsque  $t$  est indéfini.

L'estimateur projectif ainsi réalisé est alors dépendant de deux paramètres: le degré de polynôme, et l'ordre de séparabilité, qui peuvent être élevés pour une bonne approximation.

### 1.2.2.2. Méthodes de maillage

- **Masses ponctuelles à grille «fixe»**

Cette technique de filtrage, est basée sur propriété universelle d'approximation des densités de probabilité par une somme pondérée de masses ponctuelles de **Dirac**:

$$p(x_k/Y_k) \approx \sum_{i=1}^N p(x_k^i/Y_k) \delta_{x_i}(x_k) . \quad (1.33)$$

Les  $N$  points,  $\{x^i, i=1 \dots N\}$ , sont choisis de sorte qu'ils forment une grille fixe régulièrement répartie sur un sous-ensemble borné  $\Omega$  de l'ensemble  $R^n$ . Ainsi l'espace d'état continu est approché par un système à variable d'état discrète dans un alphabet fini de taille  $N$ . Dans la phase de prédiction, les probabilités de transition  $p_{x_{k+1}/x_k}$  sont obtenues en calculant :

$$p_{k+1/k} = p(x_{k+1}/x_k) = p_w(f^{-1}(x_{k+1}/x_k)) \left\| \frac{\partial f^{-1}}{\partial x_{k+1}} \right\| \quad (1.34)$$

$$\text{avec } x_{k+1} = f(x_k, w_k) \text{ pour } (x_k) \in R^n$$

pour  $x$  discret, il s'agit de :

$$p_{k+1}^{j_i} = p(x_{k+1} = x^j / x_k = x^i)$$

La densité de probabilité de chaque point prédit:

$$p_{x_{k+1}^j} = \sum_{i=1}^N p_{k+1}^{j_i} p_{x_k^i}$$

Cette probabilité est multipliée par le rapport bayésien à l'étape de correction, en utilisant la nouvelle observation  $p(y_k/x_k)$ .

Le domaine d'application du filtre à grille fixe est restreint au cas des problèmes à support borné ou stationnaires, où le support de la densité de probabilité  $p(x_k/Y_k)$  ne dérive pas dans le temps.

### 1.3 Filtre particulaire aléatoire

A l'exception de l'approche projective ci-dessus, les solutions précédentes sont des solutions approchées par approximations locales. Le filtrage particulaire est une méthode globale qui repose sur une approximation de la densité de probabilité conditionnelle par des particules aléatoires, simulant le processus de branchement que représentent les équations de filtrage (marginale).

Rappelons que cette interprétation est évidente dans le cas continu [Salut 89]. La principale difficulté consiste à passer d'une population branchue à nombre aléatoire à une population interactive en nombre finie.

Considérons le modèle suivant, présentant l'évolution de l'état et son observation:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, w_k) \\ y_k &= h(x_k, v_k) \end{aligned} \quad (1.35)$$

avec  $x_0$  : Condition initiale du support particulaire.

$v_k, w_k$  : Bruits blancs indépendants de distribution connue.

et  $v_k \sim N(0, R)$

$w_k \sim N(0, Q)$

La technique du filtrage particulaire aléatoire est basée sur l'approximation de la densité par une population normalisée de masses de Dirac aléatoire qui forment un processus dont la génération est celui de filtrage, (voir figure (1.2)). On suppose qu'à l'instant  $k-1$ , on a une approximation de la distribution conditionnelle  $p(x_{k-1}/Y_{k-1})$  de l'état  $x_{k-1}$  sachant les mesures  $Y_{k-1} = \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$ .

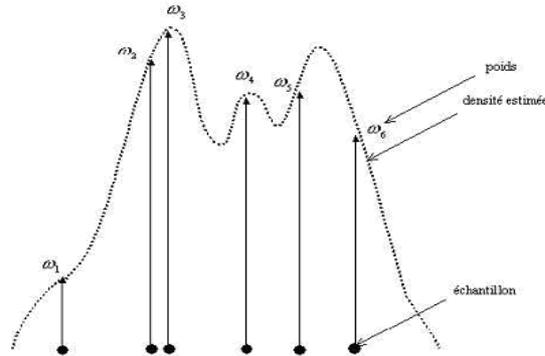


Fig 1. 2 Mesure discrète pondérée

L'évolution de cette densité de la population est régie par les lois de transition  $p(x_k/x_{k-1})$  (Chapman-Kolmogorov) et de correction (Bayes). On obtient ainsi un processus d'exploration-correction.

#### 1.3.1 Exploration

La probabilité initiale  $p(x_0)$  est approchée par un peigne de **Dirac**:

$$p(x_0) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_0^i}(x_0) \quad (1.36)$$

où  $\delta_{x_0^i}$  est la distribution de Dirac centrée en  $x_0^i$ .

A l'instant  $k$ , chaque particule  $x_k^i$  subit la dynamique prédictive avec des bruits  $w_k^i$  tirés aléatoirement selon la densité de probabilité  $p(w_k)$ .

L'approximation de la densité de probabilité trajectorielle a priori, ainsi obtenue, est alors :

$$p(x_0, \dots, x_k) \approx \prod_{\tau=0}^k dP(x_\tau/x_{\tau-1}) dP(x_0) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{j=0}^k \delta_{x_j^i}(x_j) \quad (1.37)$$

La figure 1.3 représente l'évolution a priori non nécessairement stable:

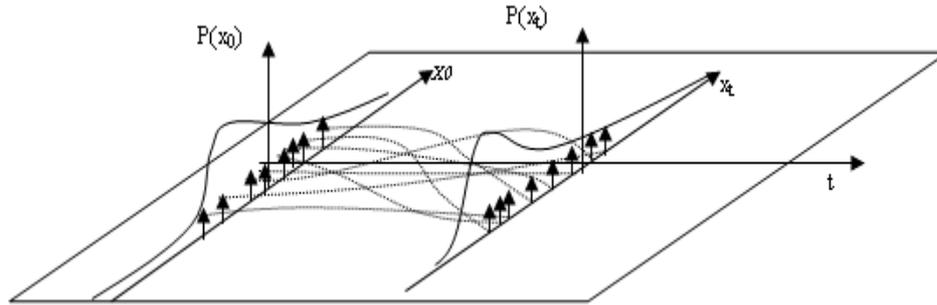


Fig 1. 3: Évolution a priori

### 1.3.2 Correction

L'approximation de la densité de probabilité conditionnelle est donnée par:

$$p(x_k/Y_k) \approx \frac{\sum_{i=1}^N \prod_{\tau=0}^k p(y_\tau/x_\tau^i) \delta_{x_k^i}(x_k)}{\sum_{i=1}^N \prod_{\tau=0}^k p(y_\tau/x_\tau^i)} \quad (1.38)$$

$$p(x_k/Y_k) \approx \sum_{i=1}^N \rho_k^i \delta_{x_k^i}(x_k) \quad (1.39)$$

avec

$$\rho_k^i = \frac{\prod_{\tau=0}^k p(y_\tau/x_\tau^i)}{\sum_{j=1}^N \prod_{\tau=0}^k p(y_\tau/x_\tau^j)} \quad (1.40)$$

ou, de façon récursive:

$$\rho_k^i = \frac{p(y_k/x_k^i)}{\sum_{j=1}^N p(y_k/x_k^j) \rho_{k-1}^j} \rho_{k-1}^i = B(x_k^i) \rho_{k-1}^i \quad (1.41)$$

on constate donc que le processus de filtrage comprend, en sens d'évolution aléatoire a priori de la population particulière. Deux interprétations mathématiques sont possibles:

- L'interprétation comme celle d'un «poids» **individuel** qui caractérise l'adaptation de chaque particule aux observations, une pondération locale (1.41) de la densité.
- L'interprétation, comme générateur, de l'opérateur purement multiplicatif est aussi celle du taux de branchement, par **mort** au point  $x$ , à l'instant  $k$ , ou **naissance** de particules identiques.

Il est clair que l'interprétation 1, si elle est sans difficulté, n'a aucune influence sur l'évolution de la trajectoire particulière individuelle, notamment au **sens de l'instabilité**.

En revanche, l'interprétation 2, fait naître ou mourir les trajectoires particulières en fonction de leur adaptation aux observations, d'où un effet **sélectif stabilisant**.

En présence d'une population finie, où l'interprétation «générateur de branchement» n'est valable qu'asymptotiquement lorsque le nombre  $N$  de particules tend vers l'infini, d'où la notion de «redistribution». La figure 1.4 illustre l'évolution de la densité conditionnelle:

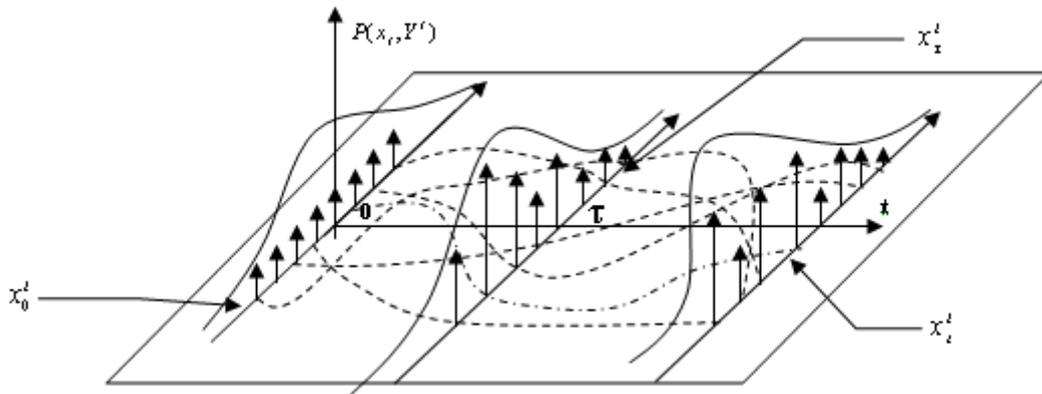


Fig 1. 4: Évolution de la densité conditionnelle

### 1.3.3 Redistribution

La redistribution des particules est ainsi nommée car elle garde invariante le nombre total de particules, se contentant de les redistribuer sur leurs supports particulaires.

- **Redistribution par tirage aléatoire**

A nombre invariant de particules de poids  $\rho^i$ , il est clair que la redistribution aléatoire conforme en loi est le tirage aléatoire selon la multinomiale aux poids  $\rho^i$ .

La densité de probabilité après redistribution est obtenue par  $N$  tirages d'une variable uniforme sur  $[0,1]$ . La particule d'indice  $k$  étant sélectionnée si:

$$F_{k-1} \leq u \leq F_k \text{ où } F_k = \sum_{i=1}^k \rho^i \quad k=1, \dots, N \quad (1.42)$$

Cette procédure revient à inverser la fonction de répartition comme l'illustre la figure 1.5. Après redistribution, tous les poids sont réinitialisés à  $1/N$ . Ce type de redistribution est assez coûteux du point de vue algorithmique, car il nécessite  $N$  tirages aléatoires, la complexité de cet algorithme est en  $O(N \log N)$ .

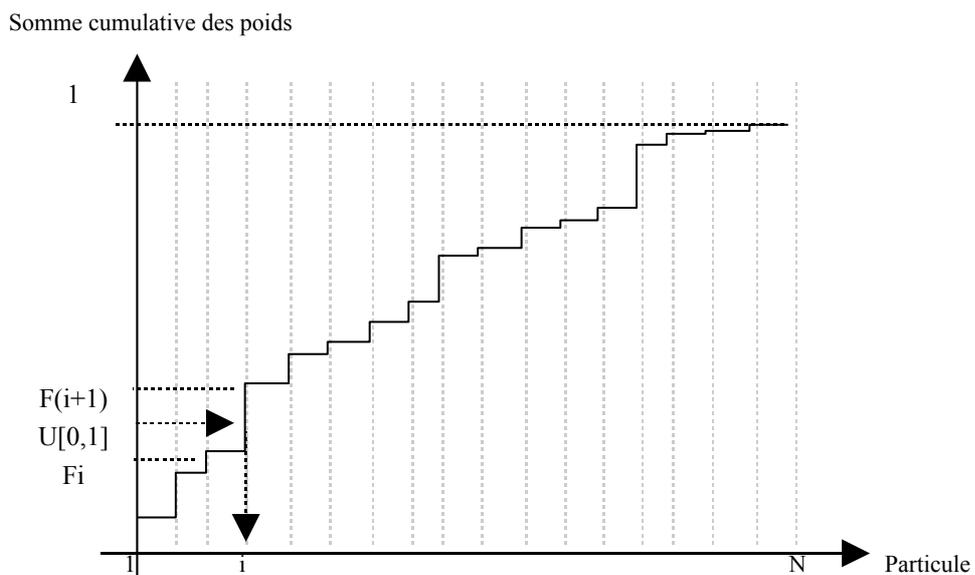


Fig 1. 5: Inversion de la fonction de répartition par tirage aléatoire

Il va de soi la redistribution ne doit pas être appliquée à chaque instant (cf. [Salut 92],[Rigal 92a],[Noyer 92]), contrairement au "Bootstrap Filter" [Gordon 93]. La redistribution systématique n'a de sens qu'en nombre infini de particules où elle converge vers le taux exact de pondération bayésienne.

Pour  $N$  fini, la période de redistribution peut être choisie de façon adaptative. En pratique, deux indicateurs heuristiques sont utilisables:

- Seuil sur les poids: il suffit d'éliminer le nombre de particules de poids inférieur à un certain seuil. Cet indicateur nécessite de fixer deux seuils (le nombre de particules et le poids).

- Nombre de particules efficaces [Liu 95]: cette approche utilise la variance des poids de  $N$  particules non-normalisées. La dégénérescence de la représentation augmente avec la variance des poids. Dans le cas idéal, tous les poids sont égaux à  $1/N$  et la variance est nulle.

Soit le coefficient de variation des poids défini par:

$$C_\rho^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \rho_k^i - \frac{1}{N} \right]^2 \quad (1.43)$$

Quand  $N$  est grand,  $C_\rho^2$  est une bonne approximation de la variance des poids. Un indicateur heuristique de la dégénérescence du support est alors défini par le nombre de particules efficace:

$$N_{eff} = \frac{N}{1 + C_\rho^2} \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\rho_k^i)^2} \quad (1.44)$$

Cet indicateur heuristique s'interprète intuitivement, en supposant qu'un échantillon de  $N$  particules soit réparti en  $M$  ( $M \leq N$ ) particules de poids  $\rho_i = 1/M$  et  $N-M$  particules de poids nul. Alors:

$$C_\rho^2 = \frac{N}{M} - 1 \quad (1.45)$$

Soit:

$$M = \frac{N}{1 + C_\rho^2} \quad (1.46)$$

Réciproquement, le nombre de particules efficaces est égal au nombre de particules de poids non nul, soit:

$$N_{eff} = M = N / (1 + C_\rho^2) \quad (1.47)$$

D'où l'expression (1.44).

### ● Redistribution par recherche des modes d'une distribution multinomiale

Le problème de redistribution peut être vu comme celui de la maximisation d'une loi à nombre égaux de tirages et de valeurs possibles. Soient  $n_i$  le nombre de particules à redistribuer sur la position  $x_k^i$  de poids  $\rho_k^i$ , alors la redistribution optimale est définie par :

$$\max_{n_1, n_2, \dots, n_N} p(n_1, n_2, \dots, n_N) = \max_{n_1, n_2, \dots, n_N} N! \prod_{i=1}^N \frac{(\rho_k^i)^{n_i}}{n_i!}$$

Avec les contraintes:

$$\sum_{i=1}^N n_i = N, \quad \sum_{i=1}^N \rho_i = 1 \quad (1.48)$$

Après redistribution, tous les poids sont réinitialisés à  $1/N$ . Des solutions algorithmiques exactes [LeGall 00] ou approchées [Finucan 64] permettent de résoudre ce problème.

### ● Redistribution à nombre total de particules faiblement variable

La redistribution consiste ici à placer en  $x_k^i$  un nombre  $n_i$  de particules égal à l'arrondi de  $N \times \rho_k^i$ . Le nombre de particules ainsi redistribuées n'est plus égal au nombre initial c'est-à-dire:

$$N_k = \sum_{i=1}^{N_k-1} n_k^i, \quad N \neq N_k$$

L'algorithme fonctionne donc avec un nombre de particules variable. Sa variation relative autour de  $N$  tend vers zéro lorsque  $N$  grandit, les poids résultants sont affectés à  $\rho_k^i/n_i$ .

La redistribution proportionnelle est la plus adéquate. Chacune des particules  $i$  de poids  $\rho_k^i > 1/(2N_k)$  est dupliquée en  $n_k^i$  particules selon :

$$n_k^i = PE[\rho_k^i N_k] \quad (1.49)$$

où PE désigne l'entier le plus proche et  $N_k$  le nombre de particules désirées après redistribution, soit le nombre de particules initial. Si le poids d'une particule est inférieur à  $1/2N_k$ , celle-ci meurt. Chacune des particules dupliquées  $j=1, \dots, n_k^i$  se partage le poids de la particule initiale:

$$\rho_k^j = \frac{\rho_k^i}{n_k^i} \quad (1.50)$$

Cette méthode de redistribution est de complexité réduite. En contrepartie, le nombre total de particules varie autour du nombre initial  $N_k=N$  qui joue ici le rôle d'une consigne. En pratique, cette variation n'excède pas quelques pour cent.

### ● Redistribution en parties entières

Il est possible de travailler à nombre de particules constant en opérant sur la distribution des résidus  $f_i$ , soit:

$$n^i = \lfloor N \rho_k^i \rfloor + \bar{n}^i \rightarrow N \rho_k^i = e_i + f_i \quad (1.51)$$

Où  $e_i$  est la partie entière de  $N\rho_k^i$  et  $f_i$  est la partie fractionnaire ou résidu. Après affectation des parties entières  $e_i$ , le nombre de particules restant est distribué selon la loi **multinomiale** induite par les résidus  $f_i$ , soit de manière déterministe (par résidus décroissants), soit par les méthodes précédemment citées. Cette procédure a été utilisée dans [Rigal 95]. Elle peut être améliorée en utilisant les parties demi-entières [Monin 95]. On notera que les solutions obtenues s'avèrent très proches du mode exact précédemment évoqué, dont la recherche est plus coûteuse.

### ● Échantillonnage déterministe

Cette méthode, proposée par Kitagawa [Kitagawa 96], consiste à re-partitionner l'intervalle  $[0, 1]$  en  $n$  ensembles disjoints,  $[0, 1] = [0, 1/n] \cup \dots \cup [(n-1)/n, 1]$ . Les  $U_i$  sont ensuite simulés indépendamment dans chacun de ces sous intervalles :

$$U^i \rightarrow U\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \quad i=1, \dots, n \quad (1.52)$$

Où  $U([a, b])$  dénote la **distribution uniforme** sur l'intervalle  $[a, b]$ . La méthode d'inversion est alors utilisée comme lors de la méthode de ré-échantillonnage **multinomial**.

### 1.3.4 Extension à des particules gaussiennes

Le principe de base du filtrage particulaire au moyen de particules de Dirac est du type exploration-sélection. Aucun déplacement autonome ou création de nouveaux supports particuliers n'est induit par les observations. L'estimation finale hérite de leur dispersion initiale. Pour un nombre limité de particules, l'estimation qui se découle peut être biaisée, c'est notamment le cas des systèmes sans bruits dynamiques.

Pour pallier cette difficulté, on ne considère plus les particules comme des mesures ponctuelles de Dirac  $\delta_{x_k^i}(x_k)$ , mais comme des mesures gaussiennes  $G_{x_k^i}(x_k, P_k^i)$  chacune de poids  $\rho_k^i$ . La

densité de probabilité conditionnelle s'écrit comme une somme pondérée de mesures gaussiennes, autre candidat possible comme base dans l'espace de mesures:

$$p(x_k/Y_k) \cong \sum_{i=1}^N \rho_k^i N_{x_k}(x_k^i, P_k^i) \quad (1.53)$$

où  $N(x,P)$  désigne une loi normale  $n$ -dimensionnelle de moyenne  $x$ , et de variance  $P$ .

$$N_{\hat{x}_k}(x_k^i, P_k^i) = \frac{1}{2\pi^{n/2} \sqrt{|P_k^i|}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\hat{x}_k - x_k^i)^T [P_k^i]^{-1} (\hat{x}_k - x_k^i)\right] \quad (1.54)$$

Le calcul récursif de la densité de probabilité  $p(x_k/Y_k)$  s'effectue classiquement par une technique de type Kalman étendu.

Les redistributions demeurent et peuvent garder leurs capacités aléatoires. On trouva ce genre d'approche dans [Teuillière 00], en notant toutefois les remarques déjà faites à ce sujet.

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les principales méthodes utilisées en filtrage, analytiques ou numériques. Dans les méthodes analytiques, le filtre de Kalman étendu, local ou en bancs parallèles, est populaire parmi les ingénieurs, mais ne donne de bons résultats que dans le cadre des systèmes faiblement perturbés. Lorsque les systèmes sont fortement perturbés, le filtre de Kalman étendu est insuffisant même localement. Quant à son utilisation sous forme de bancs parallèles, c'est l'interprétation sous forme de particules de Gauss ou bien de Dirac, permet de gérer correctement leurs interactivité.

Les méthodes numériques, directes fournissent des résultats d'une bonne précision au problème du filtrage non linéaire, mais restent limitées à des espaces de dimension faible. Au delà, le temps de calcul augmente d'une façon exponentielle avec la dimension de l'espace d'état, les rend impraticables en temps réel. Les méthodes à tirage aléatoires sont plus populaires, car moins sensible à la dimension de l'espace d'état. En revanche, leur caractère aléatoire introduit une redondance statique à **convergence lente** (en  $1/\sqrt{N}$ ), avec le nombre de particules employées  $N$ .

C'est la raison pour laquelle, nous développons ici la méthode des particules déterministes, soit à maximum de vraisemblance trajectorielle, soit à minimum de variance marginal, en investiguant leurs avantages applicatifs.

## Chapitre 2

# Solution particulière déterministe *à maximum de vraisemblance trajectoriel*

Le filtrage particulière consiste en la représentation d'une densité de probabilité sur l'espace d'état par un réseau évolutif **interdépendant** de particules normées, conditionnellement à des observations. Il peut être vu comme un processus d'exploration par les trajectoires d'état du réseau particulière suivi d'une sélection déterministe, selon un **critère adapté**, garantissant la stabilité du nombre total de particules, à travers un échange entre les différents supports particulières, appelé redistribution.

Le processus de sélection d'une population particulière dépendant des observations est analogue à celui de la sélection naturelle en dynamique des populations. Il permet de concentrer la masse de probabilité a posteriori sur les régions les plus pertinentes de l'espace d'état. Ce type de processus fut originellement introduit en filtrage particulière aléatoire dans [Salut 89] par simple interprétation du générateur de filtrage comme celui d'un processus stochastique de branchement. La nécessité d'un nombre stable de particules pour pallier sa divergence fut analysée dans [Huillet 89].

La structure à nombre stable de particules pondérées interactives, a fait l'objet de plusieurs réalisations à partir de l'année 91, et fut la source d'un premier brevet sur les particules aléatoires de Dirac et Dirac-Gauss [Salut 94]. Celui-ci donne l'architecture des modes de couplage par redistribution aléatoire de particules, comme expliqué dans [Salut 92] sous le nom d'échanges, et dans [Rigal 92a], sous le nom de **redistribution**, où le taux de naissances et de morts particulières est strictement conservatif.

Le filtre particulière déterministe à particules de Dirac-Gauss, breveté dans [Salut 01], apporta une économie considérable en permettant d'éliminer tout tirage aléatoire, tant en exploration a priori qu'en redistribution a posteriori. Il est particulièrement pertinent pour la réception des communications numériques [BenSalem 02], où le bruit source est discret, et fut étendu au traitement du signal radar ainsi que GPS où le bruit-source est continu [Ziadi 07].

Ces applications ont rapidement montré la supériorité calculatoire du particulière à exploration/sélection déterministes, avec ou sans extension à des particules gaussiennes.

En effet, l'exploration aléatoire du bruit de processus est sous-optimale ( $1/\sqrt{N}$ ), comme procédure conforme en loi, et constitue un gaspillage évident des ressources de calcul. D'autre part, la procédure de redistribution aléatoire des particules sur leurs supports est également sous-optimale pour les mêmes raisons. Les tirages aléatoires utilisés par l'algorithme particulière originel peuvent, donc, être supprimés au profit de procédures déterministes. Ceci conduit naturellement à une procédure entièrement déterministe pour l'initialisation, le branchement et la redistribution du support particulière. Nous rappelons dans ce chapitre les techniques déterministes les mieux adaptées, pour l'estimation à maximum de vraisemblance trajectoriel, avant de décrire, dans le chapitre suivant, celles pour l'estimation à minimum de variance marginal.

## 2.1 Critère à maximum de vraisemblance trajectoriel

Ce type de critère utilise la trajectoire d'état à maximum de vraisemblance depuis l'instant initial jusqu'à l'état courant, et non la densité marginale de l'état courant qui est du ressort de la formulation habituelle.

Cette approche délivre implicitement le lissage au sens du maximum de vraisemblance, mais celui-ci ne nécessite pas d'être calculé pour le filtrage qui délivre le point terminal courant de la trajectoire estimée.

### 2.1.1 Position du Problème

Soit  $x_k$  un processus stochastique à réalisation markovienne dont la dynamique est régie par l'équation récurrente suivante:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, w_k) \quad (2.1)$$

où  $x_k \in R^n$  représente l'état du système,  $f_k: R^n \times R^m \rightarrow R^n$  est la fonction de transition mesurable et  $w_k \in R^m$  est le bruit dynamique i.i.d. de densité de probabilité a priori  $p_k^w(\cdot)$  connue. A des instants discrets, des mesures  $y_k \in R^p$  sont disponibles. Ces mesures sont liées au vecteur d'état par l'équation d'observation:

$$y_k = h_k(x_k, v_k) \quad (2.2)$$

où  $h_k: R^n \times R^p \rightarrow R^p$  est la fonction de mesure et  $v_k \in R^p$  est le bruit de mesure i.i.d. de densité de probabilité a priori  $p_k^v(\cdot)$  connue. L'estimation à maximum de vraisemblance trajectorielle consiste à déterminer la trajectoire d'état  $\hat{X}_k$  telle que:

$$L(\hat{X}_k / Y_k) = \max_{X_k} (L(X_k / Y_k)) \quad (2.3)$$

où  $L(X_k / Y_k) = \log(p(X_k / Y_k))$  désigne la vraisemblance de  $X_k$ , conditionnellement à  $Y_k$ .

#### Notations:

$X_k, Y_k$  désignent respectivement les trajectoires de valeurs  $x_k, y_k$  entre 0 et k.

### 2.1.2 Évolution de la vraisemblance trajectorielle

L'évolution de la vraisemblance trajectorielle permet une formulation récursive dans le sens direct de ce problème:

$$L(X_k / Y_k) = L(X_{k-1} / Y_{k-1}) + L(x_k / x_{k-1}) + L(y_k / x_k) \quad (2.4)$$

sous la contrainte dynamique:

$$x_k = f(x_{k-1}, w_k)$$

avec:

- $L(x_k / x_{k-1})$  vraisemblance de transition
- $L(y_k / x_k)$  vraisemblance d'observation

### 2.1.3 Résolution particulière

La résolution particulière de ce problème repose sur une N-discrétisation évolutive de l'espace des trajectoires d'état par un nombre fini N de particules élémentaires.

Ce maillage particulier s'obtient, à partir de la discrétisation initiale, en deux étapes:

- Branchement déterministe: Exploration/Pondération, à partir de chaque particule, de l'arborescence engendrée par la dynamique du système pour une M-discrétisation déterministe du bruit de dynamique.
- Sélection déterministe: Après pondération bayésienne par les nouvelles observations, une nouvelle N-discrétisation de particules est engendrée par sélection dans l'arborescence particulière explorée par le branchement.

Pour mettre en oeuvre les principes ci-dessous, il convient discrétiser convenablement les variables aléatoires  $w$  et  $x_0$ , dans le cas général, de façon de rendre possible la convergence en  $1/N$ .

## 2.2 Principe de base de la discrétisation déterministe

### 2.2.1 Cas mono-dimensionnel

Soit une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , dont la mesure de probabilité est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, à l'exception d'un nombre fini de points à distance finie de l'origine.

On décompose l'espace de probabilité en N atomes égaux de probabilité  $1/N$ , partitionnant les valeurs de la fonction de répartition  $F(x)$  en N intervalles  $[u^0, u^1], \dots, [u^{j-1}, u^j], \dots, [u^{N-1}, u^N]$  selon la figure 2.1. On appelle  $\bar{u}^j$  les valeurs  $\bar{u}^j = (u^{j-1} + u^j)/2$ .

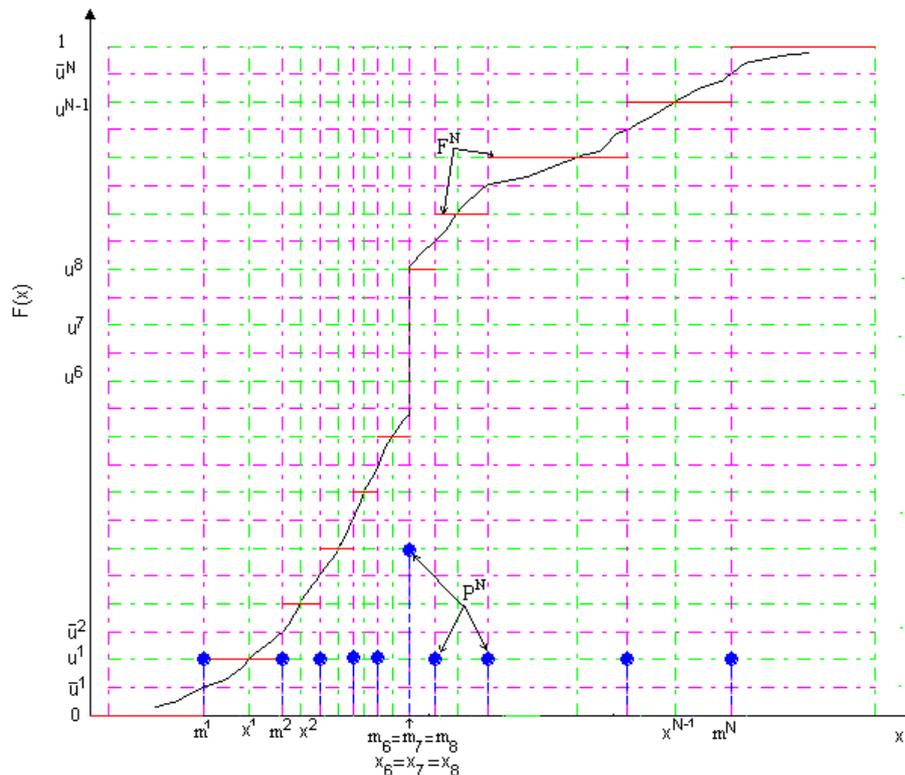


Fig 2.1 Exemple de fonction de répartition discrétisée

On définit alors les valeurs, lorsqu'elles existent:

$$m^j = \inf \{x : F(x) \geq u\}, \quad \forall u \in [\bar{u}^{j-1}, \bar{u}^j], \quad j=1, \dots, N \quad (2.5)$$

$$m^j = m^{j+1}, \text{ partout ailleurs}$$

On obtient la discrétisation particulière de la fonction de répartition, sous la forme:

$$F^N(x) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} U(x - m^j) \quad (2.6)$$

où  $U$  est la fonction échelon, c'est-à-dire, au sens des distributions, la discrétisation particulière de la densité de probabilité  $p$  sous la forme:

$$p^N(x) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \delta(x - x_j) \quad (2.7)$$

où  $\delta$  est la fonction de Dirac.

Nous avons défini l'approximation de la fonction de répartition  $F(x)$ , suivant la méthode d'«escalier médian». Pour les besoins de la suite il est bon de signaler le lien avec les fonctions de répartition partielles définies par:

$$F_i(x) = P(x_{i-1} < x \leq x_i)$$

Il est clair que l'on peut écrire de manière générale:

$$F(x) = \sum_{i=1}^N F(x_i) \quad \text{avec } x_0 = -\infty, x_N = +\infty$$

L'approximation par la méthode de l'«escalier médiane» signifie:

$$F^N(x_i) = \frac{1}{N} U(x - m_i)$$

$$p^N(x_i) = \frac{1}{N} \delta(x - m_i) \quad (2.8)$$

ce qui exprime en quoi la masse de Dirac  $\delta(x - m_i)$  a pour support la médiane probabiliste de l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i[$ .

### Remarque 2.1:

On peut tout aussi bien définir l'approximation par l'«escalier moyen»:

$$F_i^N(x) = \frac{1}{N} U(x - \mu_i) \quad p_i^N(x) = \frac{1}{N} \delta(x - \mu_i) \quad (2.9)$$

où  $\mu_i$  est la moyenne probabiliste de l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i[$ .

## 2.2.2 Cas multi-dimensionnel: utilisation des marginales conditionnelles

Soit la variable aléatoire vectorielle  $X$  à valeurs dans  $R^n$ , dont la mesure de probabilité  $p(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$  est absolument continue à l'exception d'un nombre de points fini.

On décompose l'espace de probabilité en  $N$  atomes égaux, partitionnant la fonction de répartition  $F(x^1, x^2, \dots, x^n)$  de la manière suivante:

A  $F(x^1) = P(X^1 < x^1)$  est associée l'approximation constante par morceaux:

$$F^{N_1}(x^1) = \sum_{j'l=1}^{N_1} \frac{1}{N_1} U(x^1 - m_{j'l}^1)$$

telle que construite en §2.2.1, d'où:

$$P^{N_1}(x^1) = \sum_{j'l=1}^{N_1} \frac{1}{N_1} \delta(x^1 - m_{j'l}^1)$$

**Remarque 2.2:**

On notera que  $1/N_1 \delta(x^1 - m_{j1}^1)$  n'est autre que la  $N_1$ -approximation de  $P(x_{j1-1}^1 < x^1 \leq x_{j1}^1)$ .

Conditionnellement aux supports ponctuels  $m_{j1}$  de  $x^1$  ainsi mis en évidence, on peut alors considérer les fonctions de répartition partielles conditionnelles:

$$F^{N_2}(x^2/x_{j1-1}^1 < x^1 \leq x_{j1}^1) = \sum_{j2=1}^{N_2} \frac{1}{N_2} U(x^2 - m_{j1,j2}^2)$$

$$p^{N_2}(x^2/x_{j1-1}^1 < x^1 \leq x_{j1}^1) = \sum_{j2=1}^{N_2} \frac{1}{N_2} \delta(x^2 - m_{j1,j2}^2)$$

$$p^{N_1, N_2}(x^1, x^2) = p^{N_1}(x^1) p^{N_2}(x^2/x^1)$$

d'où en utilisant la représentation ci-dessous:

$$p^{N_1, N_2}(x^1, x^2) = \sum_{j1=1}^{N_1} \sum_{j2=1}^{N_2} \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \delta(x^1 - m_{j1}^1) \delta(x^2 - m_{j1,j2}^2) \quad (2.10)$$

On notera que le double indice de  $m_{j1,j2}^2$ , traduit le fait qu'il **ne s'agit pas d'un quadrillage** du plan  $(x^1, x^2)$  par un produit tensoriel de deux peignes de Dirac indépendants (voir remarque 2.3), ce qu'illustre la figure ci-dessous:

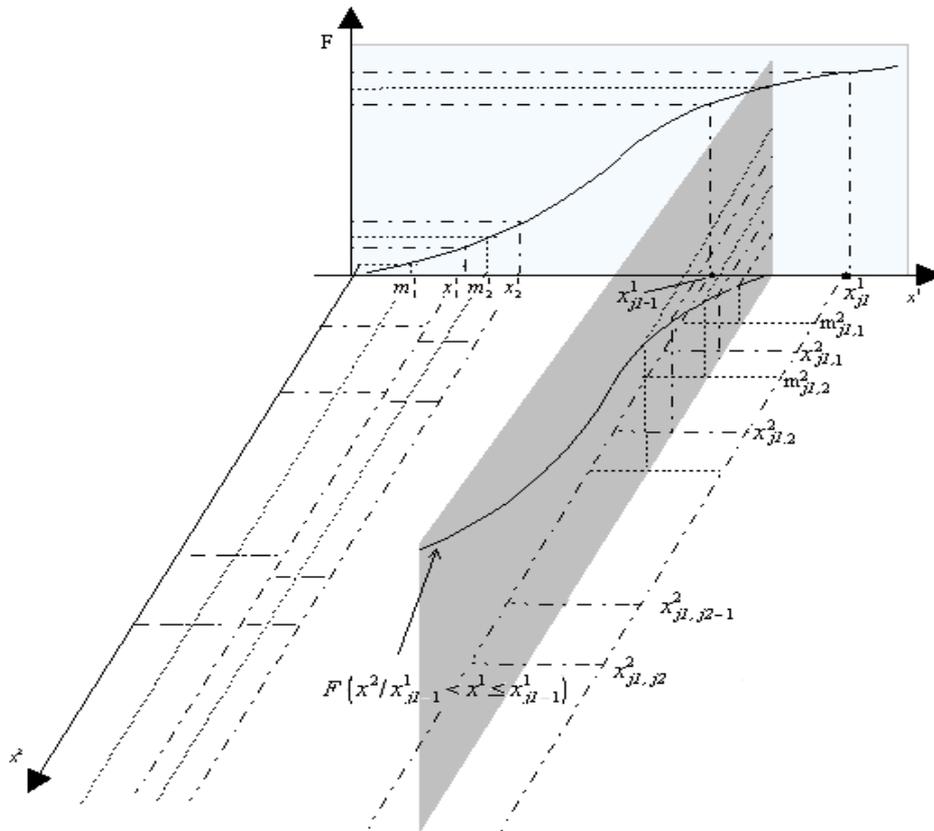


Fig 2.2 Principe de fonction de répartition partielles conditionnelles

En itérant le procédé, on obtient finalement :

$$p^{N_1, N_2, \dots, N_n}(x^1, x^2, \dots, x^n) = \sum_{j1=1}^{N_1} \sum_{j2=1}^{N_2} \dots \sum_{jn=1}^{N_n} \left( \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \dots \frac{1}{N_n} \delta(x^1 - m_{j1}^1) \delta(x^2 - m_{j1,j2}^2), \dots, \delta(x^n - m_{j1,j2,\dots,jn}^n) \right) \quad (2.11)$$

**Remarque 2.3:**

Il convient de souligner que la mesure:

$$\delta(x^1 - m_{j1}^1) \delta(x^2 - m_{j1, j2}^2), \dots, \delta(x^n - m_{j1, j2, \dots, jn}^n)$$

n'est pas le produit tensoriel de  $n$  mesures de Dirac indépendantes par rapport à chaque variable  $x^j$ , puisqu'il ne s'agit pas d'un pavage simple, mais composé. L'indice multiple de  $m$  indique le conditionnellement emboîté de ses coordonnées.

En revanche, l'application de ces approximations aux variables aléatoires indépendantes  $(x_0, w)$  du problème posé, s'obtient par simple produit.

Les maillages de  $x_0, w_k$  peuvent donc être obtenus connaissant les densités de probabilité  $p(x_0)$ ,  $p(w)$  et leurs fonctions de répartition selon le schéma de discrétisation décrit ci-dessus, ce que nous écrirons en abrégé:

$$\begin{aligned} w_k \in \Omega &= \{w^1, w^2, \dots, w^M\} \\ x_0 \in E_0 &= \{x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^N\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

**2.3 Résolution Particulière par Branchement/Redistribution déterministe**

L'algorithme particulière consiste à mettre en œuvre la pondération bayésienne (filtres locaux) le long de trajectoires particulières nominales. Celles-ci sont obtenues par l'exploration de séquences arborescentes données par les discrétisations conjointes de l'espace d'état initial et de celui du bruit de dynamique  $w_k$ . La pondération bayésienne porte sur la mesure de probabilité élémentaire locale associé à chaque particule.

**2.3.1 Branchements déterministes des particules**

Le branchement déterministe repose sur l'utilisation des maillages déterministes pour l'état initial  $x_0$  et le bruit de dynamique  $w_k$ , décrit en (2.12).

Les cardinalités  $(N, M)$  de ces maillages sont choisis de telle manière que les fonctions de répartition correspondantes  $F^{x_0}$  et  $F^w$ , soient représentées à la précision désirée.

A chaque instant, l'arborescence particulière  $E_k = \{x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^N\}$  est donnée par:

$$E_k = E_{k-1} \otimes \Omega \quad (2.13)$$

À l'instant  $k$ , le maillage particulière exhaustif pouvant être exploré s'écrit,

$$E_k = E_0 \otimes \Omega^k \quad (2.14)$$

La cardinalité de ce maillage est exponentielle:

$$\text{Card}(E_k) = N \cdot M^k \quad (2.15)$$

Notons que grâce à la sélection (mort) particulière le maillage concrètement exploré est de cardinalité linéaire  $(k \cdot N \cdot M)$ . Ceci permet une mise en œuvre à complexité constante de l'algorithme de filtrage.

**2.3.2 Prédiction/Correction de la vraisemblance particulière**

Dans le cas général d'une  $N$ -discrétisation par des mesures élémentaires  $p_i$  sur les trajectoires  $X_k$ , notées  $p_i(X_k)$ :

les équations du filtrage non-linéaire se réécrivent comme suit:

$$p^N(X_{k-1}/Y_{k-1}) = \sum_{i=1}^N P^i_{k-1/k-1} p_i(X_{k-1}/Y_{k-1})$$

Les poids  $P^i_{k-1/k-1}$  sont calculés récursivement selon les densités élémentaires utilisées et la nature du bruit de dynamique (détaillées plus loin).

$$p^M(w_k) = \sum_{j=1}^M \alpha^j p_j(w_k) \quad (2.16)$$

Les poids  $\alpha^j$  sont a priori fixés par le maillage déterministe de  $w$  (cf. 2.2).

### ● Prédiction

L'étape de prédiction s'écrit [Ziadi 07]:

$$p^N(X_k/Y_{k-1}) = \sum_{i=1}^N P^i_{k-1/k-1} p(x_k/x_{k-1}) p_i(X_{k-1}/Y_{k-1}) \quad (2.17)$$

Pour  $N$  grand, la mesure élémentaire  $p_i(X_{k-1}/Y_{k-1})$  permet l'approximation localement convergente de la prédiction:

$$p(x_k/x_{k-1}) p_i(X_{k-1}/Y_{k-1}) \approx p(x_k/x_{k-1}, i) p_i(X_{k-1}/Y_{k-1}) \quad (2.18)$$

où  $p(x_k/x_{k-1}, i)$  représente la probabilité de transition à partir de la région d'état décrite par  $p_i(X_{k-1}/Y_{k-1})$  de  $x_{k-1}$  vers l'état  $x_k$ .

La discrétisation de l'espace du bruit de dynamique (cf. §2.2) conduit ainsi à travers les approximations locales de l'équation de dynamique, à une discrétisation par  $M$  densités élémentaires de  $p(x_k/x_{k-1}, i)$ :

$$p(x_k/x_{k-1}, i) \approx \sum_{j=1}^M \alpha^j p(x_k/x_{k-1}, i, j) \quad (2.19)$$

Le maillage particulière de dimension  $NM$  est alors donné par les portions des densités de probabilité élémentaires correspondantes  $p_{i,j}(X_k/Y_{k-1})$ . Il correspond au produit (cf. 2.11, 2.12):

$$E_k = E_{k-1} \otimes \Omega$$

La densité  $p(x_k/x_{k-1}, i, j)$  représente la probabilité de transition pour le système localement approché conditionnel à la branche  $(i, j)$ . L'étape de prédiction devient alors d'après (2.17) et (2.19),

$$\begin{aligned} p^{NM}(X_k/Y_{k-1}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M P^i_{k-1/k-1} \alpha^j p(x_k/x_{k-1}, i, j) p_i(X_{k-1}/Y_{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M P^{i,j}_{k/k-1} p_{i,j}(X_k/Y_{k-1}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

où  $p_{i,j}(X_k/Y_{k-1})$  est la prédiction locale selon l'équation de dynamique approchée conditionnelle à la branche  $(i, j)$ :

### Prédiction locale par particule

$$p_{i,j}(X_k/Y_{k-1}) = P(x_k/x_{k-1}, i, j) p_i(X_{k-1}/Y_{k-1}) \quad (2.21)$$

$$\text{pondérée par : } P^{i,j}_{k/k-1} = \alpha^j P^i_{k-1/k-1}$$

### ● Correction

Les mêmes principes peuvent être utilisés pour l'étape de correction. En effet, l'approximation de  $p(X_k/Y_k)$  est donnée par:

$$\begin{aligned}
p(X_k/Y_k) &= \frac{p(y_k/x_k) p^{NM}(X_k/Y_{k-1})}{p^{NM}(y_k/Y_{k-1})} \\
&\approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M P_{k/k-1}^{i,j} \frac{p(y_k/x_k) p_{i,j}(X_k/Y_{k-1})}{p^{NM}(y_k/Y_k)} \\
&\approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M P_{k/k-1}^{i,j} \frac{p(y_k/Y_{k-1}, i, j) p(y_k/x_k) p_{i,j}(X_k/Y_{k-1})}{p^{NM}(y_k/Y_{k-1}) p(y_k/Y_{k-1}, i, j)} \\
&\approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M P_{k/k-1}^{i,j} p_{i,j}(X_k/Y_k)
\end{aligned}$$

avec,

- $p(y_k/Y_{k-1}, i, j) = \int p(y_k/x_k) p_{i,j}(X_k/Y_{k-1}) dX_k$  terme de normalisation de la correction locale conditionnelle à  $(i, j)$ ,
- $p^{NM}(y_k/Y_{k-1}) = \sum_j \sum_i p(y_k/Y_{k-1}, i, j)$  approximation par le maillage particulière du terme de normalisation  $p(y_k/Y_{k-1}, i, j)$ ,
- $p_{i,j}(X_k/Y_k)$  correction locale selon l'équation d'observation approchée conditionnelle à la branche  $(i, j)$ .

**Correction locale par particule:**

$$p_{i,j}(X_k/Y_k) = \frac{p(y_k/x_k) p_{i,j}(X_k/Y_{k-1})}{p(y_k/Y_{k-1}, i, j)} \quad (2.22)$$

pondérée par :

$$P_{k/k-1}^{i,j} = P_{k-1/k-1}^i \alpha^j \frac{p(y_k/x_k, i, j)}{p^{NM}(y_k/Y_{k-1})} \quad (2.23)$$

Soit, après passage au logarithme:

$$L_{k/k-1}^{i,j} = L_{k-1/k-1}^i + L^j + L(y_k/x_k, i, j) + C^{te} \quad (2.24)$$

où l'on reconnaît l'équation récurrente de la vraisemblance pour la branche particulière  $(n, m)$ , avec:

- $L_{k/k}^{i,j}$  La vraisemblance à l'instant courant  $k$ ,
- $L_{k-1/k-1}^i$  La vraisemblance à l'instant  $k-1$ ,
- $L^j$  La vraisemblance de transition,
- $L(y_k/i, j, Y_{k-1})$  La vraisemblance d'observation.

### 2.3.3 Redistribution déterministe à maximum de vraisemblance

Concrètement, on retient séquentiellement, à chaque nouvelle mesure, un nombre fixe  $N$  de particules parmi les  $NM$  créées par le branchement, en choisissant celles de masse totale de probabilité conditionnelle les plus élevées. Cette sélection déterministe garantit une mise en œuvre à nombre constant de particules de l'algorithme.

La procédure déterministe repose, donc, sur la représentation d'une région de l'espace d'état par le poids de la particule élémentaire qui l'occupe. La dispersion redondante induite par un tirage aléatoire à la "Monte Carlo" est ici non seulement inutile, mais néfaste aux performances exploratoires du filtre particulière. Elle représente un gaspillage de la capacité calculatoire. Le schéma particulière déterministe est de ce fait plus approprié.

### 2.3.4 Estimation à maximum de vraisemblance

Dans le cas de maximum de vraisemblance projectorielle, la vraisemblance à un instant  $k$ , d'une particule  $i$  définie par la trajectoire  $X_k^i = (x_0^i, W_\tau^i = \{\hat{w}_\tau^i, \tau=0, \dots, k\})$ , est donnée par:

$$L_k^i = \log(p(x_0^i)) + \sum_{\tau=0}^k [\log(p(\hat{w}_\tau^i)) + \log(p(y_k/x_\tau^i))]$$

l'estimation dans ce cas est approchée par la particule ayant accumulé la vraisemblance maximale, soit:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k/k}^{i_{max}} \quad \text{où} \quad i_{max} = \arg \max_{i=1, \dots, N} L_k^i \quad (2.25)$$

## 2.4 Particules élémentaires utilisées

Dans ce qui précède, nous avons présenté les principes et les bases algorithmiques du filtre particulière déterministe à maximum de vraisemblance sans préciser la nature des densités élémentaires utilisées. Nous allons maintenant synthétiser les différentes variantes de ce filtre spécifiques aux différents types de particules élémentaires utilisables, en précisant pour chacune d'elle son domaine d'application.

### 2.4.1 Particules de Dirac

Cet algorithme repose sur l'approximation par des mesures ponctuelles de la densité de probabilité conditionnelle, dans le cas de variables d'état discrètes gouvernées par le système:

$$\begin{aligned} \xi_k &= f(\xi_{k-1}, u_k) \\ y_k &= h(\xi_k) + v_k \end{aligned} \quad (2.26)$$

où  $u_k$  est un bruit-source à valeurs discrètes dans un alphabet fini dont le cardinal vaut  $M$ , et l'état  $\xi_k$  est à valeurs discrètes de cardinalité  $N_\theta$ . Alors, l'estimation de la trajectoire  $U_k$  est équivalente à la détection d'une séquence  $U_k = \{u_0, \dots, u_k\}$  parmi  $M^{k+1}$  séquences possibles. Le bruit d'observation,  $v_k$  est un bruit blanc gaussien de variance  $R_k$ .

Il est évident que ce problème ne peut être résolu de façon optimale que par la recherche exhaustive. Cependant, la complexité de calcul nécessaire est telle que cette solution est inenvisageable en pratique.

La procédure d'exploration/redistribution particulière entièrement déterministe proposée dans ce paragraphe maximise la capacité d'exploration-sélection pour un nombre donné de particules. Elle est équivalente au "M algorithm" exposé dans [Anderson 84].

#### 2.4.1.1 Filtre local

Pour les mesures ponctuelles de Dirac, les équations de prédiction/correction locales ( 2.21 & 2.22), ainsi que la pondération ( 2.23) du paragraphe 2.3.2 sont:

- **Prédiction locale:**

Elle se traduit par le déplacement dans l'espace d'état du support ponctuel de Dirac:

$$\xi_{k/k-1}^{i,j} = f(\xi_{k-1/k-1}^i, u_k^j) \quad j=1, \dots, M \quad (2.27)$$

- **Correction locale**

Les particules de Dirac sont invariantes par la correction, seuls leurs poids sont changés:

$$\begin{aligned} \xi_{k/k}^{i,j} &= \xi_{k/k-1}^{i,j} \\ P_{k/k}^{i,j} &\propto P_{k-1/k-1}^{i,j} \alpha^j p(y_k / \xi_{k/k}^{i,j}) \end{aligned}$$

avec

$\xi_{k-1/k-1}^i$  : La position de la particule de Dirac  $i$  à l'instant  $k$  sachant  $Y_{k-1}$ , et  $P_{k-1/k-1}^i$  son poids.

$$p(y_k / \xi_{k/k-1}^{i,j}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|R_k|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y_k - h(\xi_{k/k-1}^{i,j}))^T R_k^{-1}(y_k - h(\xi_{k/k-1}^{i,j}))\right\}$$

### 2.4.1.2 Algorithme

**1- Initialisation** du support particulaire:

$$\xi_0^i \quad L_0^i = L(\xi_0^i) = \log(p_{\xi_0}) = \log(1/N_0) \quad i=1 \dots N_0$$

**2- Évolution (Prédiction):** A l'instant  $k$ , on dispose pour chaque particule  $i$ , de la séquence  $U_{k-1}^i$  de vraisemblance  $L_{k-1}^i$ . Comme  $u_k^i$  appartient à un alphabet  $\{a_1, \dots, a_M\}$  de cardinalité finie  $M$ , toutes les hypothèses  $u_k^i = a_j$  sont explorées.

**3- Calcul de vraisemblances**

On calcule les  $MN$  vraisemblances des séquences  $\left\{ \left[ U_{k-1}^i, u_k^i = a_j \right]_{j=1}^M \right\}_{i=1}^N$  par l'équation récursive:

$$L_k^{i,j} = L_{k-1}^i + L(y_k / \xi_{k-1}^i, u_k^i = a_j) + L(u_k^i = a_j)$$

Le calcul des vraisemblances d'observation se fait par:

$$L(y_k / \xi_{k-1}^i, u_k^i = a_j) = L(y_k / \xi_{k/k-1}^{i,j}) = -\frac{1}{2}(y_k - h(\xi_{k/k-1}^{i,j}))^T R_{k-1}^{-1}(y_k - h(\xi_{k/k-1}^{i,j}))$$

**4- Sélection déterministe:** on retient les  $N$  particules les plus vraisemblables parmi  $MN$ .

**5- Estimation:** l'estimateur à maximum de vraisemblance coïncide avec la séquence particulaire:

$$\left( \hat{\xi}_0, \hat{U}_k \right) = \left( \xi_{0, i_{max}}^i, U_k^{i_{max}} \right) \quad \text{où} \quad i_{max} = \arg \max_{i=1, \dots, N} L_k^i$$

*Alg 2.1: Algorithme d'estimation particulière à maximum de vraisemblance pour particules de Dirac*

## 2.4.2 Particules de Gauss

L'approximation par des mesures ponctuelles de la densité de probabilité conditionnelle dans le cas de variables d'état continues, pour une précision donnée, nécessite souvent un nombre important de particules. Le "pavage" par particules gaussiennes localement "optimales", permet une réduction considérable de ce coût algorithmique, lorsque le système est localement linéarisable.

Soit un problème représentable par un système d'état de la forme:

$$\begin{aligned} x_k &= f(x_{k-1}, w_k) \\ y_k &= h(x_k) + v_k \end{aligned} \quad (2.28)$$

Où l'état  $x_k \in R^n$  est gouverné par la séquence d'un bruit de dynamique continu  $w_k \in R^m$ , et  $f$  et  $h$  sont continument différentiables en leurs arguments  $x$  et  $w$ . Le filtre à particules déterministes de Gauss consiste à mettre en œuvre des filtres linéaires étendus locaux le long de trajectoires particulières nominales  $i$  définies par un état initial  $x_0^i$  et une séquence de bruits de dynamique  $w_0^i$ .

### 2.4.2.1 Précautions pour la discrétisation par des gaussiennes

Les performances du filtre particulaire reposent essentiellement sur le choix de  $E_0$  et  $\Omega$ , maillages déterministes respectifs de  $x_0$  et  $w_k$ . L'utilisation du filtre local conditionnel le long des trajectoires

particulaires exige une étendue de la particule gaussienne conforme à la validité des approximations locales sous-jacentes.

Le support initial, caractérisé par l'ensemble des positions et covariances  $(x_0^i, P_0^i)_{i=1, \dots, N}$  devra ainsi être distribué de manière adaptée à la géométrie du problème. Cette distribution initiale doit donc vérifier trois points:

- Assurer la validité locale de la linéarisation,
- Approcher au mieux la densité de probabilité initiale de l'état,
- Rendre le support particulaire jointif afin de couvrir tout l'espace d'état.

La figure 2.3 illustre l'approximation d'une densité uniforme par une somme de gaussiennes. Les particules sont réparties de façon régulière et l'écart-type et proportionnel à la distance inter-particules (ici la moitié).

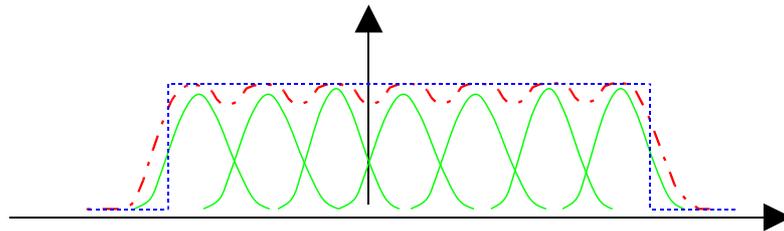


Fig 2.3 Approximation d'une densité uniforme par une somme de gaussiennes

La validité de la linéarisation locale est exigée le long de toutes les trajectoires particulières tout au long du traitement. Elle est assurée par l'algorithme de décomposition 2.4.2.3.

Un exemple clé concernant l'estimation de phase est présenté à la figure 2.4.

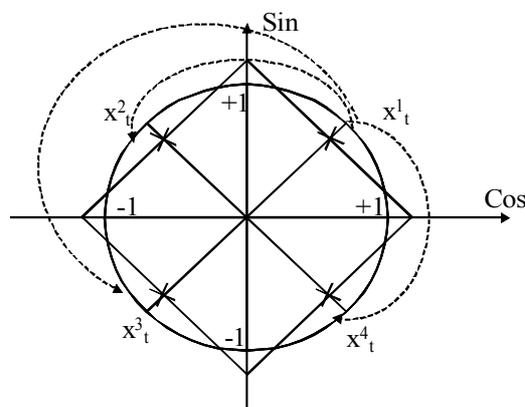


Fig 2.4 perturbations du domaine de linéarisation

En effet, dans cet exemple, pour une phase Doppler (Radar, GPS) engendrée par un avion de chasse, la discrétisation de la perturbation  $w$  possible (nombre de quarts de tours sur le cercle trigonométrique) entre deux récurrences est de l'ordre d'une centaine. Cette finesse de discrétisation est induite par la contrainte de linéarisation selon la phase des équations d'observation, bien que le système d'état soit linéaire en  $w$ .

La satisfaction de la contrainte de linéarisation, peut être assurée de façon préventive par des simulations hors-ligne, pour les maillages candidats, de l'évolution des variances d'état le long de trajectoires de référence soigneusement choisies.

Notons que la distance inter-particulaire, dans le cas ponctuel (Dirac), joue un rôle équivalent aux variances gaussiennes. Elle conditionne donc la précision du maillage et l'efficacité du filtre, et doit faire l'objet d'une attention particulière pour garantir le bon fonctionnement du filtre particulaire.

### 2.4.2.2 Filtre local

L'algorithme particulière consiste à mettre en œuvre le filtre optimal local, linéarisation locale conditionnelle pour le cas gaussien.

Ainsi pour les composantes discrétisées par des particules gaussiennes, les étapes de prédiction et de correction locales, ainsi que le calcul des vraisemblances particulières sont données par des équations similaires à celles du filtre de Kalman étendu.

- **Prédiction locale:**

La prédiction de l'état particulière  $x_{k/k-1}^{i,j}$  s'effectue, pour toutes les hypothèses sur  $w$  par la dynamique:

$$x_{k/k-1}^{i,j} = f_{k-1}(x_{k-1/k-1}^i, w_k^j)$$

pour :  $i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, M\}$ .

La covariance de l'erreur de prédiction  $P_{k/k-1}^i$  s'obtient après linéarisation de l'équation de la dynamique:

$$P_{k/k-1}^{i,j} = F_{x,k-1}^{i,j} P_{k-1/k-1}^i F_{x,k-1}^{i,j T} + F_{w,k-1}^{i,j} Q_k^j F_{w,k-1}^{i,j T} \quad (2.29)$$

- **Correction locale:**

$\hat{x}_{k/k}^{i,j}$  et  $P_{k/k}^{i,j}$  sont obtenus comme dans l'étape de correction de filtrage de Kalman étendu:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k/k}^{i,j} &= x_{k/k-1}^{i,j} + K_k^{i,j} (y_k - h(x_{k/k-1}^{i,j})) \\ K_k^{i,j} &= P_{k/k-1}^{i,j} H_k^{i,j T} (H_k^{i,j} P_{k/k-1}^{i,j} H_k^{i,j T} + R_k)^{-1} \\ P_{k/k}^{i,j} &= P_{k/k-1}^{i,j} - K_k^{i,j} H_k^{i,j} P_{k/k-1}^{i,j} \end{aligned} \quad (2.30)$$

- **Calcul des vraisemblances**

A l'instant  $k$ , la vraisemblance de la particule  $x_k^{i,j}$ , est obtenue à partir de la vraisemblance de  $x_{k-1}^i$ , de  $L(w_k^j)$  et de la vraisemblance d'observation sachant l'état à l'instant  $k$ . C'est calculé par l'équation récursive suivante:

$$L_k^{i,j} = L_{k-1}^i + L(y_k / x_{k/k}^{i,j}, w_k^j) + L(w_k^j)$$

avec:

- conditions initiales  $\hat{x}_{0/0}^i, P_{0/0}^i$ ,
- $F_{x,k}^{i,j} = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_{k-1/k-1}^i, \hat{w}_k^j)$  jacobien de  $f$  par rapport à  $x$ ,
- $F_{w,k}^{i,j} = \frac{\partial f}{\partial w}(\hat{x}_{k-1/k-1}^i, \hat{w}_k^j)$  jacobien de  $f$  par rapport à  $w$ ,
- $H_k^{i,j} = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_{k/k-1}^{i,j})$  jacobien de  $h$  par rapport à  $x$ ,
- $K_k^{i,j} : R^p \times R^p$  le gain de Kalman. (2.31)

Rappelons que les variances particulières  $P_0^i$  et  $Q_\tau^j$  doivent être suffisamment faibles pour garantir la validité des approximations linéaires locales le long des trajectoires particulières.

### 2.4.2.3 Décomposition des composantes gaussiennes mal-conditionnées

L'utilisation du filtre particulière pour des applications réelles doit être adaptée aux conditions opératoires. L'augmentation des variances des particules gaussiennes peut engendrer un mauvais conditionnement de la plage de linéarisation. Elle conduit à la déstabilisation du filtre et finalement à sa divergence.

Les fortes variances selon les axes d'état critiques pour la linéarisation sont à l'origine du mauvais comportement du filtre. Les contraintes de linéarisation sur chaque axe du vecteur d'état doivent être incluses dans le problème d'optimisation résolu par le filtre particulière au même titre que celle de la constance du nombre. La satisfaction de ces contraintes additionnelles conduit à l'introduction d'une étape de décomposition des composantes particulières gaussiennes en cas de débordement.

Soit  $x_k = [\alpha_k \ \theta_k]^T$  vecteur d'état où  $\alpha_k$  est une composante scalaire critique pour la linéarisation, et  $\theta_k$  le vecteur contenant les autres composantes, on suppose que le seuil limite qui conditionne la validité de linéarisation  $S_\alpha$ , comme il est illustré par la figure suivante:

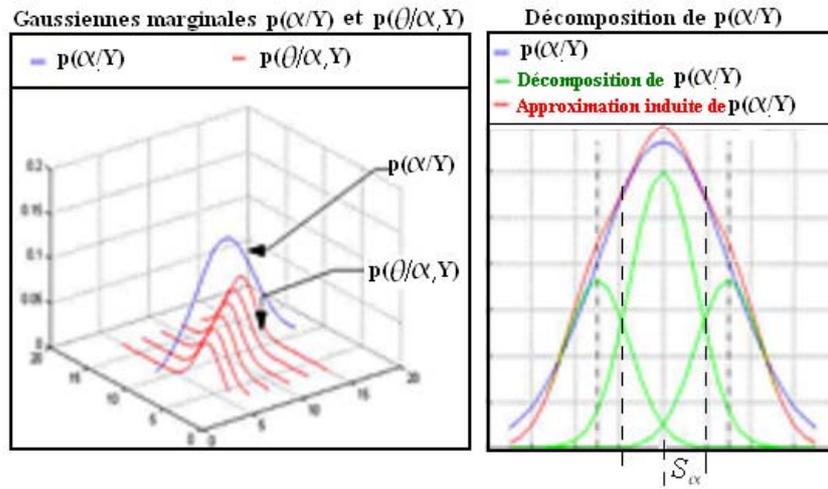


Fig 2.5 Décomposition d'une particule gaussienne

La particule gaussienne :

$$p_i(x_k/Y_k) = G(x_k - \hat{x}^i, P^i) \quad (2.32)$$

telle que  $\hat{x}^i = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^i \\ \hat{\theta}^i \end{bmatrix}$ ,  $P^i = \begin{bmatrix} P_{\alpha\alpha}^i & P_{\alpha\theta}^i \\ (P_{\alpha\theta}^i)^T & P_{\theta\theta}^i \end{bmatrix}$ , et  $P_{\alpha\alpha}^i > S_\alpha$  Seuil de linéarisation (scalaire).

se décompose en fonction de la densité conditionnelle marginale de  $\alpha_k$  :

$$\begin{aligned} p_i(x_k/Y_k) &= p_i(\alpha_k/Y_k) p_i(\theta_k/\alpha_k, Y_k) \\ &= G(\alpha_k - \hat{\alpha}^i, P_{\alpha\alpha}^i) G(\theta_k - E_i(\theta_k/\alpha_k, Y_k), P_{\theta/\alpha}^i) \end{aligned} \quad (2.33)$$

avec

$$\begin{aligned} E_i(\theta_k/\alpha_k, Y_k) &= \hat{\theta}^i + (P_{\theta\alpha}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} (\alpha_k - \hat{\alpha}^i) \\ P_{\theta/\alpha}^i &= P_{\theta\theta}^i - (P_{\alpha\theta}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} P_{\alpha\theta}^i \end{aligned} \quad (2.34)$$

La densité de probabilité  $p_i(\alpha_k/Y_k)$  de la variable  $\alpha_k$  peut être approchée par une somme finie de  $N_i$  gaussiennes pondérées de variance  $S_\alpha$  :

$$G(\alpha_k - \hat{\alpha}^i, P_{\alpha\alpha}^i) \approx \sum_{l=1}^{N_i} \rho^{i,l} G(\alpha_k - \hat{\alpha}^{i,l}, S_\alpha)$$

avec :

$\alpha^{i,l}$  : nouvelles positions particulières espacées de  $2\sqrt{(S_\alpha)}$  et repartis sur l'intervalle  $\{\hat{\alpha}^i - 2\sqrt{P_{\alpha\alpha}^i}, \hat{\alpha}^i + 2\sqrt{P_{\alpha\alpha}^i}\}$  de largeur  $4\sqrt{P_{\alpha\alpha}^i}$  d'où :  $N_i = 2\sqrt{P_{\alpha\alpha}^i/S_\alpha}$

$\rho^{i,l}$  : poids normalisé de la position particulière  $\alpha^{i,l}$  proportionnel à sa probabilité  $G(\alpha^{i,l} - \hat{\alpha}^i, P_{\alpha\alpha}^i)$

D'où la discrétisation fine de la particule (densité de variable vectorielle)  $i$ :

$$\begin{aligned} G_i(x_k/Y_k) &\simeq \left( \sum_{l=1}^{N_i} \rho^{i,l} G(\alpha_k - \hat{\alpha}^{i,l}, S_\alpha) \right) p_i(\theta_k/\alpha_k, Y_k) \\ &\simeq \sum_{l=1}^{N_i} \rho^{i,l} G(x_k - \hat{x}^{i,l}, P^{l,i}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

avec,

$$\hat{x}^{i,l} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^{i,l} \\ \hat{\theta}^{i,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^{i,l} \\ \hat{\theta}^i + (P_{\alpha\theta}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} (\hat{\alpha}^{i,l} - \hat{\alpha}^i) \end{bmatrix}$$

et,

$$P_{\alpha\alpha}^{i,l} = \begin{bmatrix} S_\alpha & P_{\alpha\theta}^{i,l} \\ (P_{\alpha\theta}^{i,l})^T & P_{\theta\theta}^{i,l} \end{bmatrix}$$

où:

$$P_{\alpha\theta}^{i,l} = S_\alpha (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} P_{\alpha\theta}^i$$

$$P_{\theta\theta}^{i,l} = P_{\theta\theta}^i - (P_{\alpha\theta}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} (P_{\alpha\theta}^i - S_\alpha (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} P_{\alpha\theta}^i)$$

$$P_{\theta\theta}^{i,l} = P_{\theta\theta}^i - (P_{\alpha\theta}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} (P_{\alpha\theta}^i) \left( 1 - \frac{S_\alpha}{P_{\alpha\alpha}^i} \right) \quad (2.36)$$

Cette décomposition est équivalente à un branchement implicite, et conduit à une augmentation du nombre de particules dans le support particulière. Elle doit, donc, être suivie par une étape de sélection déterministe.

#### Remarque 2.4:

Naturellement, les particules purement de Dirac, tout comme les composantes ponctuelles dans le cas hybride, ne sont pas concernées par cette décomposition.

#### 2.4.2.4 Interpénétration des particules:

Les particules gaussiennes peuvent se trouver asymptotiquement dans un voisinage très étroit, et conduire à un support particulière saturé. Cette saturation bride les ressources calculatoires utiles à l'exploration de l'espace d'état.

Afin d'optimiser l'utilisation des ressources calculatoires mise en œuvre, un seuil de saturation est donc ajouté au problème d'optimisation:

pour chaque particule  $i \in \{1, \dots, NM\}$   
 pour chaque particule  $j \in \{1, \dots, NM\}$   
 Si  $\epsilon_j \cap \epsilon_i \neq \emptyset$  pour  $i \neq j$   
 élimination de la particule la moins massive

où  $\epsilon_i$  représente le seuil exclusif à la particule  $i$  donné par la surface ellipsoïdale équiprobable de probabilité seuil donné  $S$ , (cf. figure 2.6).

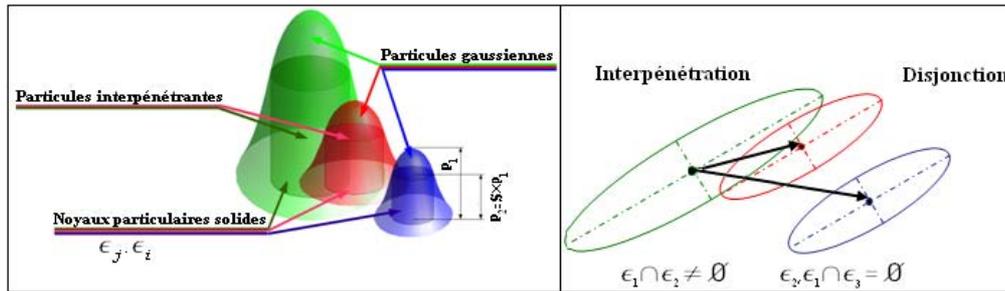


Fig 2.6 Détection de l'interpénétration particulaire

### 2.4.2.5 Algorithme

- **Initialisation:** Le support particulaire initial est caractérisé par l'ensemble de  $N_0$  particules, des moyennes et covariances  $\{x_0^i, P_0^i\} \quad i=1, \dots, N_0$  selon 2.4.2.1.
- **Évolution**
  - Satisfaction de contraintes de linéarisation
    - pour toute particule gaussienne ne respecte pas la contrainte de linéarisation de  $f(x, w)$ , selon l'axe  $l$ , on décompose cette particule en  $N_l$  sous-particules,  $l=1 \dots n$ ,
    - Le nombre total de particules est alors:  $N_p = \sum_{l=1}^n N_l$ ,
    - Choisir  $N$  particules les plus vraisemblables parmi les  $N_p$  particules,
  - Branchement déterministe: ce qui conduit à la discrétisation du bruit dynamique, toutes les  $M$  hypothèses  $w_k^i = w_j, \quad j=1 \dots M$ , sont explorées,
  - prédiction locale linéarisé.
- **Correction:**

Avant d'appliquer l'étape de correction du filtre de Kalman étendu, une étape de décomposition similaire à celle au-dessus est nécessaire quand l'équation de mesure est non-linéaire:

- Satisfaction de contraintes de linéarisation,
  - pour toute particule ne respecte pas la contrainte de linéarisation de la fonction  $h(x, v)$ , on la décompose en sous-particules, en mettant à jour du nombre total de particule  $N_c$ ,
  - Choisir  $NM$  particules les plus vraisemblables parmi les  $N_c$  particules,
- Correction locale par Kalman étendu.
- **Calcul des vraisemblances.**
- **Sélection déterministe (à maximum de vraisemblance):**
  - a- locale: par l'élimination des particules chevauchant des particules plus massives,
  - b- globale : par sélection  $N$  particules les plus vraisemblances.
- **Estimation** (équation 2.25)

Alg 2.2: Algorithme d'estimation particulaire à maximum de vraisemblance à particules gaussiennes

**Remarque 2.5:**

L'étape de sélection déterministe (globale et locale) peuvent se faire de façon a priori (avant l'étape de correction):

- La sélection globale a priori permet la mise en oeuvre de  $N$  seulement filtres de Kalman étendus et donc une meilleur appréciation de la complexité algorithmique à travers le nombre de particules.
- La sélection locale est remplacée par une élimination d'interpénétration antérieur au branchement. Ceci permet de réduire le nombre de tests d'interpénétration (mis en oeuvre sur un support de  $N$  particules plutôt que  $NM$ ).
- Les étapes de branchement/sélection (locale et globale), peuvent être mises en oeuvre de façon intermittente pour réduire de la complexité algorithmique. leurs intermittence est calculé du temps de réponse du système dynamique aux sauts de sa commande.

**2.4.3 Particules hybrides de Dirac-Gauss étendu**

L'algorithme déterministe à particules de Dirac-Gauss concerne directement le propos du présent mémoire, où la résolution par particules de Gauss ou Dirac ne suffit pas aux besoins.

Il concerne tous les problèmes représentables par un système général de la forme:

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= g_k(\xi_k, u_k) \\ x_{k+1} &= f_k(\xi_k, x_k, w_k) \\ y_k &= h_k(\xi_k, x_k) + v_k\end{aligned}\quad (2.37)$$

avec  $u_k^i$  (resp  $w_k^i$ ) appartient à un alphabet  $\{a_1, \dots, a_M\}$  (resp  $\{b_1, \dots, b_L\}$ ).

Il représente en ce sens une généralisation des précédents algorithmes particulières déterministes à maximum de vraisemblance:

- **Dirac**: Cas particulier d'une variable d'état discrète dans un alphabet fini introduit dans [BenSalem 2001].
- **Dirac-Gauss** (exact) [Kazem 05a]: Cas particulier d'un système conditionnellement linéaire en  $x_k$ :

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= g_k(\xi_k, u_k) \\ x_{k+1} &= f_k(\xi_k) x_k + w_k \\ y_k &= h_k(\xi_k) x_k + v_k\end{aligned}\quad (2.38)$$

- **Gauss** : Cas particulier d'une variable d'état entièrement continue [Ziadi 07].

Les particules de Dirac-Gauss ont trouvé leurs premières applications en télécommunications [Bensalem 01] [Lehmann 05], où les variables discrètes (information-source) sont estimées conjointement aux paramètres continus (canal de transmission). Ces deux applications concernent respectivement le cas linéaire-conditionnel avec utilisation d'un Kalman conditionnel exact et le cas non-linéaire avec faible bruit de dynamique continu  $w_k$ , où la linéarisation du système d'état en la composante continue  $x_k$  n'est conditionnée que par son état initial  $x_0$  et la séquence du bruit-source discret  $\{u_r\}_{r=0}^k$ .

Dans le cas le plus général, ces particules sont étendues, de bruit de processus continu important, où une approximation par linéarisations locales conditionnelles aux positions des composantes continues et discrètes de la variable d'état est possible.

**2.4.3.1 Filtres locaux**

Dans le cas de particule hybride, le filtre local conditionnel est composé de deux parties:

- Une prédiction des composantes ponctuelles similaire à celle utilisée pour les particules de Dirac.
- Un filtre de Kalman étendu conditionnel aux composantes ponctuelles, pour l'optimisation locale des composantes gaussiennes.

➤ **Adaptation de la décomposition des composantes gaussiennes mal-conditionnées:**

La décomposition des particules exposées précédemment pour le cas de particules gaussiennes (§2.4.2.3), est étendue ici au cas des particules hybrides de Dirac-Gauss. Cette extension s'obtient simplement par l'adjonction du vecteur des autres composantes  $\theta_k$ , des composantes ponctuelles (Dirac)  $\xi_k$  au calcul de la densité conditionnelle marginale de  $\alpha_k$  :

La particule gaussienne :

$$p_i(x_k/Y_k, \xi_k) = G_{\xi_k}(x_k - \hat{x}^i, P^i)$$

se décompose en fonction de la densité conditionnelle marginale de  $(\alpha_k, \xi_k)$  :

$$\begin{aligned} p_i(x_k/Y_k, \xi_k) &= p_i(\alpha_k/\xi_k, Y_k) p_i(\theta_k/\alpha_k, \xi_k, Y_k) \\ &= G_{\xi_k}(\alpha_k - \hat{\alpha}^i, P_{\alpha\alpha}^i) G_{\xi_k}(\theta_k - E_i(\theta_k/\alpha_k, \xi_k, Y_k), P_{\theta/\alpha}^i) \end{aligned} \quad (2.39)$$

avec 
$$E_i(\theta_k/\alpha_k, \xi_k, Y_k) = \hat{\theta}^i + (P_{\theta\alpha}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} (\alpha_k - \hat{\alpha}^i)$$

$$P_{\theta/\alpha}^i = P_{\theta\theta}^i - (P_{\alpha\theta}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} P_{\alpha\theta}^i$$

La densité de probabilité  $p_i(\alpha_k/\xi_k, Y_k)$  de la variable  $\alpha_k$  peut être approchée par une somme finie de  $N_i$  gaussiennes pondérées de variance  $S_\alpha$  :

$$G_{\xi_k}(\alpha_k - \hat{\alpha}^i, P_{\alpha\alpha}^i) \simeq \sum_{l=1}^{N_i} \rho^{i,l,\xi_k} G_{\xi_k}(\alpha_k - \hat{\alpha}^{i,l}, S_\alpha)$$

De la même façon vue en (§2.4.2.3) la discrétisation fine de la particule i :

$$\begin{aligned} G_i(x_k/Y_k, \xi_k) &\simeq \left( \sum_{l=1}^{N_i} \rho^{i,l,\xi_k} G_{\xi_k}(\alpha_k - \hat{\alpha}^{i,l}, S_\alpha) \right) p_i(\theta_k/\alpha_k, \xi_k, Y_k) \\ &\simeq \sum_{l=1}^{N_i} \rho^{i,l,\xi_k} G_{\xi_k}(x_k - \hat{x}^{i,l}, P^{i,l}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

avec, 
$$\hat{x}^{i,l} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^{i,l} \\ \hat{\theta}^{i,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^{i,l} \\ \hat{\theta}^i + (P_{\alpha\theta}^i) (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} (\hat{\alpha}^{i,l} - \hat{\alpha}^i) \end{bmatrix}$$

et, 
$$P_{\alpha\alpha}^{i,l} = \begin{bmatrix} S_\alpha & P_{\alpha\theta}^{i,l} \\ (P_{\alpha\theta}^{i,l})^T & P_{\theta\theta}^{i,l} \end{bmatrix}, \quad \hat{\alpha}^{i,l} \text{ Les nouvelles positions particuliers.}$$

où: 
$$P_{\alpha\theta}^{i,l} = \frac{S_\alpha}{P_{\alpha\alpha}^i} P_{\alpha\theta}^i, \quad P_{\theta\theta}^{i,l} = P_{\theta\theta}^i - (P_{\alpha\theta}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} (P_{\alpha\theta}^i) \left( 1 - \frac{S_\alpha}{P_{\alpha\alpha}^i} \right) \quad (2.41)$$

La décomposition ici est conditionnelle également à l'état discret  $(\xi_k)$ . Cette décomposition est équivalente à un branchement implicite, elle doit être suivie par une étape de sélection déterministe.

➤ **Adaptation de l'élimination de l'interpénétration particulière:**

L'élimination des particules inter-pénétrantes, exposées précédemment pour le cas de particules gaussiennes, est étendue ici au cas des particules hybrides de Dirac-Gauss. Cette extension s'obtient simplement par l'adjonction de la stricte égalité des composantes ponctuelles (Dirac) au test d'interpénétration:

pour chaque particule  $i \in \{1, \dots, N-1\}$   
 pour chaque particule  $j \in \{1, \dots, N-1\}$   
 Si  $\epsilon_j \cap \epsilon_i \neq \emptyset$  et  $\xi_j = \xi_i$  pour  $j \neq i$   
 élimination de la particule la moins massive

où  $\epsilon_i$  représente le noyau solide exclusif à la particule  $i$  donné par la surface ellipsoïdale équiprobable de probabilité seuil  $S$ .

### 2.4.3.2 Algorithme

- **Initialisation à l'instant 0**

En supposant qu'il existe  $N_0$  états initiaux caractérisés par leurs états hybrides:

$$\{\xi_0^i, (x_0^i, P_0^i)\} \quad i=1, \dots, N_0$$

avec leurs vraisemblances a priori correspondantes.

- **Évolution du support particulaire**

- Décomposition des particules ( $Np$  particules)  
Pour satisfaction les contraintes de linéarisation de  $f$ , (sur les axes critiques).
- Sélection déterministe après décomposition  
On sélectionne les  $N$  particules, parmi les  $Np$  particules, suivant leurs vraisemblances.
- Branchement déterministe sur  $\xi$  ( $NM$  particules)
- Branchement déterministe sur  $w$  ( $NML$  particules)
- Prédiction locale par Kalman étendus ( $NML$  particules)

- **Correction**

- Décomposition des particules ( $Nt$  particules)  
Pour satisfaction les contraintes de linéarisation de  $h$ , (sur les composantes continues critiques pour la linéarisation).
- Sélection déterministe après décomposition  
On sélectionne les  $NML$  particules les plus massives parmi les  $Nt$  particules après décomposition.
- Corrections locales par Kalman étendus.

- **Pondération à l'instant k+1**

Pour chacune des particules obtenues, on met à jour la vraisemblance selon l'équation récursive:

$$L_k^{i,j,l} = L_{k-1}^i + L(y_k | \xi_k^{i,j}, x_k^{i,j,l}) + L(u_k = u^j) + L(w_k = w^l)$$

- **Sélection déterministe (à maximum de vraisemblance):**

- a- locale: par l'élimination des particules chevauchant des particules plus massives.
- b- globale : par sélection  $N$  particules les plus vraisemblances.

- **Estimation:**

$$\{\hat{X}_k, \hat{\xi}_k\} \simeq \{\hat{X}_{k/k}^{i_{max}}, \hat{\xi}_{k/k}^{i_{max}}\} \text{ où } i_{max} = \arg \max_{i=1, \dots, N} L_k^i$$

La trajectoire d'une particule  $i$  est définie par:

- $(x_0^i, W_\tau^i = \{\hat{w}_\tau^i, \tau=0, \dots, k\})$
- $(\xi_0^i, U_\tau^i = \{\hat{u}_\tau^i, \tau=0, \dots, k\})$

Alg 2.3: Algorithme d'estimation particulière à maximum de vraisemblance à particules de Dirac-Gauss étendu

**Remarque 2.6:**

- L'étape de sélection a priori permet de réduire la complexité algorithmique par la mise en oeuvre de  $N$  filtres de Kalman étendus plutôt que NML (*cf.* Remarque 2.5).
- Les équations 2.38 (cas Dirac-Gauss) forment un système dynamique linéaire gaussien conditionnellement à la valeur de  $\xi$ , une particule à valeurs discrètes  $(\xi_0^i, U_k^i)$ , peut évaluer sans perte d'optimalité suivant les équations 2.26 (§2.4.1) sous réserve qu'un filtre de Kalman adjoint conditionné à  $U_k^i$  estime la partie continue de l'état [Lehmann 05]. Ce cas là n'a pas concerné par la décomposition ni par le branchement sur la partie continue ( $L=1$  dans l'algorithme Alg 2.3).

**2.5 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons rappelé le principe du filtre à particules déterministes à maximum de vraisemblance présenté dans [Salut 01], [BenSalem 02].

Nous avons aussi présenté une version, plus générale, à particules hybrides de Dirac-Gauss étendues adaptées aux systèmes d'état hybrides. D'une part, cette version englobe toutes les autres versions. D'autre part elle représente la version appliquée dans l'essentiel du volet applicatif du présent mémoire.

L'utilisation de particules de Dirac-Gauss étendue nécessite des adaptations mineures de l'algorithme particulière présenté dans [Ziadi 07]. Ces adaptations concernent essentiellement l'étape d'élimination de l'interpénétration et celle d'optimisation locale réalisée ici par des FKE locaux conditionnels aux composantes discrètes.

Aussi, nous avons rappelé les algorithmes applicables dans le cas particulier d'une variable d'état exclusivement continue (Particules de Gauss) et dans celui d'un système d'état linéaire conditionnel (Dirac-Gauss exact), utilisés dans certaines parties du volet applicatif.

Adaptées à l'estimation à maximum de vraisemblance, la technique particulière présentée ici ne saurait être directement étendue au cas marginal à minimum de variance. En effet, les approximations sous-jacentes concernent l'équation de Bellmann (maxima locaux) et non l'équation de filtrage classique (loi de probabilité).

Une technique déterministe conforme en loi, adaptée à l'estimation marginale, est présentée dans le chapitre suivant. Elle permet la résolution du problème de filtrage avec l'économie de calcul que permet l'approche déterministe (par rapport à l'approche aléatoire).



## Chapitre 3

# Solution particulière déterministe à minimum de variance marginal

L'algorithme particulière par sélection à maximum de vraisemblance est inadapté pour l'estimation à minimum de variance, car la redistribution induite est non conforme en loi, notamment biaisée, pour tout  $N$  fini. En effet, cet algorithme concerne l'approximation de l'équation de Bellman qui délivre un mode trajectoriel global et non de l'équation de filtrage classique qui délivre des moyennes marginales. La même remarque s'applique à toute autre sélection non-conforme en loi (seuil, etc); ceci est à l'origine des confusions figurant dans [Sorenson 71].

Le critère de minimum de variance portant sur l'estimation de toute fonction continue de la variable, il est équivalent à la détermination de la probabilité conditionnelle au sens faible. La conformité en loi de son approximation particulière est, donc, cruciale, notamment lors des étapes de redistribution- sélection. Ce fut une motivation originelle de l'algorithme particulière aléatoire dont les tirages préservaient la conformité en loi.

Nous développons ici une méthode originale pour traiter la redistribution du support particulière de manière déterministe adaptée au minimum de variance. Elle est fondée sur l'utilisation en redistribution de la discrétisation de l'espace de probabilité introduite au chapitre précédent en (§2.2.1 et §2.2.2), les étapes de prédiction et de pondération restent celles du chapitre 2.

### 3.1 Redistribution déterministe : Cas mono-dimensionnel

Nous allons utiliser ici le principe précédemment exposé, sous plusieurs manières pour faire redistribution particulière.

#### 3.1.1 Redistribution par sélection ponctuelle

Appliquons le principe de base de discrétisation du §2.2. A l'instant  $k \in N$ , soit  $X_k$  la variable aléatoire sur  $R$  obtenue après branchement et pondération (cf. 2.3), en considérant un nombre  $NM$  de supports particuliers  $x_{k/k}^{i,j}$   $i=1...N, j=1...M$  et leurs probabilités associées:  $P^{NM}(x_{k/k}^{i,j})$ .

La fonction de répartition  $F_{k|k}^{NM}$ , après la normalisation du support particulière, est telle que:

$$F_{k|k}^{NM}(x) = \sum_{i,j=1,1}^{N,M} P^{NM}(x_{k|k}^{i,j}) U(x - x_{k|k}^{i,j}) \quad (3.1)$$

La distribution densité correspondante est:

$$p_{k|k}^{NM}(x) = \sum_{i,j=1,1}^{N,M} P^{NM}(x_{k|k}^{i,j}) \delta(x - x_{k|k}^{i,j}) \quad (3.2)$$

Le principe (cf. §2.2) de la représentation réduite, à nombre  $N$  de supports, donne immédiatement la re-discrétisation:

$$p_{k|k}^N(x) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \delta(x - m_{k|k}^i) \quad (3.3)$$

et sa fonction de répartition

$$F_{k|k}^N(x) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} U(x - m_{k|k}^i) \quad (3.4)$$

Cette redistribution porte le nom de sélection ponctuelle, car on sélectionne ainsi les particules sur des supports particuliers existants.

Appliquons cette méthode pour une approximation réduite à  $N=10$  particules sur un exemple de support particulière à  $NM=50$  particules. On obtient le résultat défini par la figure ci-dessus:

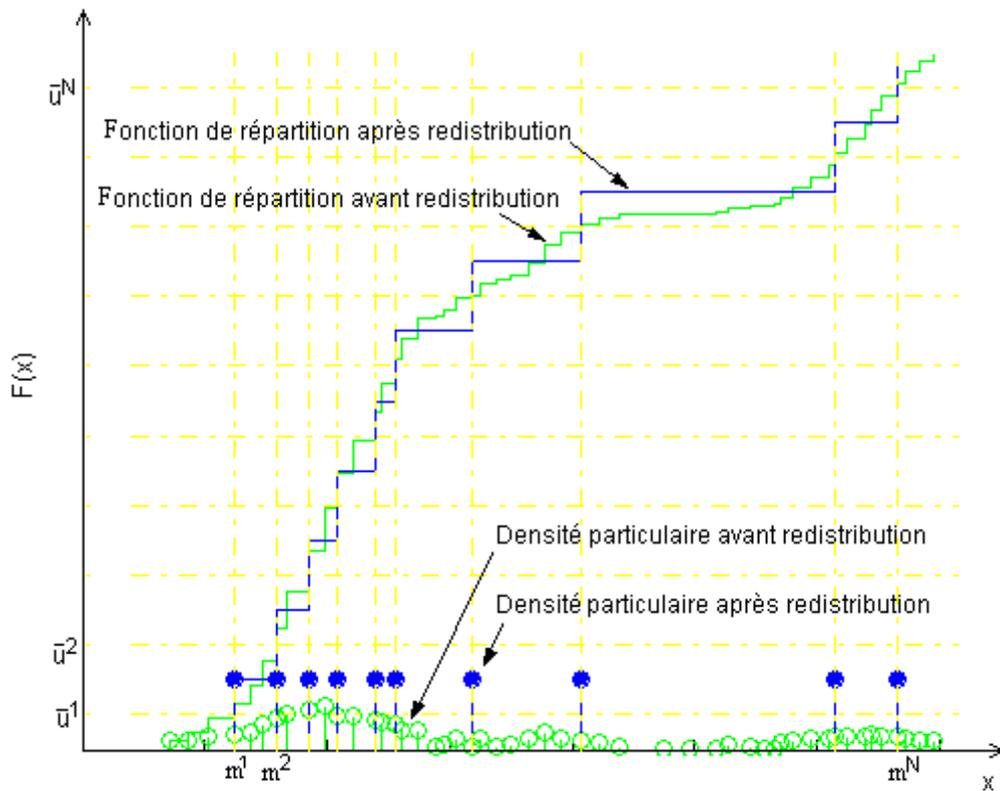


Fig 3.1 Exemple de redistribution ponctuelle sélective

Algorithme de redistribution par sélection ponctuelle:

- Calcul de la fonction de répartition particulière après branchement et pondération:

$$F_{k/k}^{NM}(x) = \sum_{i,j=1,1}^{N,M} P^{NM}(x_{k/k}^{i,j}) U(x - x_{k/k}^{i,j})$$

- Discrétisation de l'espace de probabilité par N atomes de masse 1/N:

$$[\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^{j-1}, \bar{u}^j, \dots, \bar{u}^{N-1}, \bar{u}^N], \text{ avec } \bar{u}^j = \frac{(j+0.5)}{N}, j=1, \dots, N-1$$

- Calcul  $m_{k/k}^i$  par (2.2.1).
- Détermination du peigne de Dirac:

$$P_{k/k}^N(x) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \delta(x - m_{k/k}^i)$$

Alg 3.1: Algorithme de redistribution par sélection ponctuelle

### 3.1.2 Redistribution particulière linéairement interpolante

Une caractéristique de la redistribution sélective est qu'elle ne crée pas de nouveaux supports, malgré la modification d'ensemble des particules, après pondération. Ceci a des conséquences néfastes en absence de bruit dynamique  $w$ ; l'estimation asymptotique avec le temps se résume à un seul des supports initiaux qui rassemble tout le poids probabiliste.

L'interpolation linéaire dans l'espace de probabilité efface cet inconvénient.

#### 3.1.2.1 Principe de base

Pour une variable aléatoire  $x$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , dont la fonction de répartition est  $F(x)$ , on définit les valeurs, lorsqu'elles existent:

$$x^j = \inf \{x : F(x) \geq u\} \quad \forall u \in [u^{j-1}, u^j], \quad u^j = \frac{j}{N}, \quad j=1, \dots, N-1$$

$$x^j = x^{j+1} \text{ partout ailleurs} \quad (3.5)$$

En utilisant la définition de  $m^i$  donnée en 3.1, on obtient les valeurs extérieures  $x^0, x^N$  définie par:

$$\begin{aligned} x^0 &= 2m^1 - x^1 \\ x^N &= 2m^N - x^{N-1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

La fonction de répartition particulière est préalablement interpolée de manière linéaire (par exemple) soit:

$$F^N(x) = \sum_{j=1}^N F^{N,j}(x)$$

$$\text{avec } F^{N,j}(x) = F^{N,j}(x^{j-1}) + (F^{N,j}(x^j) - F^{N,j}(x^{j-1})) \left( \frac{x - x^{j-1}}{x^j - x^{j-1}} \right), \text{ si } x^{j-1} \leq x < x^j$$

$$F^{N,j}(x) = \frac{1}{N} U(x - x^j), \text{ si } x^j = x^{j-1}$$

$$F^{N,j}(x) = 0, \text{ partout ailleurs} \quad (3.7)$$

La figure 3.2 montre une fonction de répartition discrétisée et son interpolation.

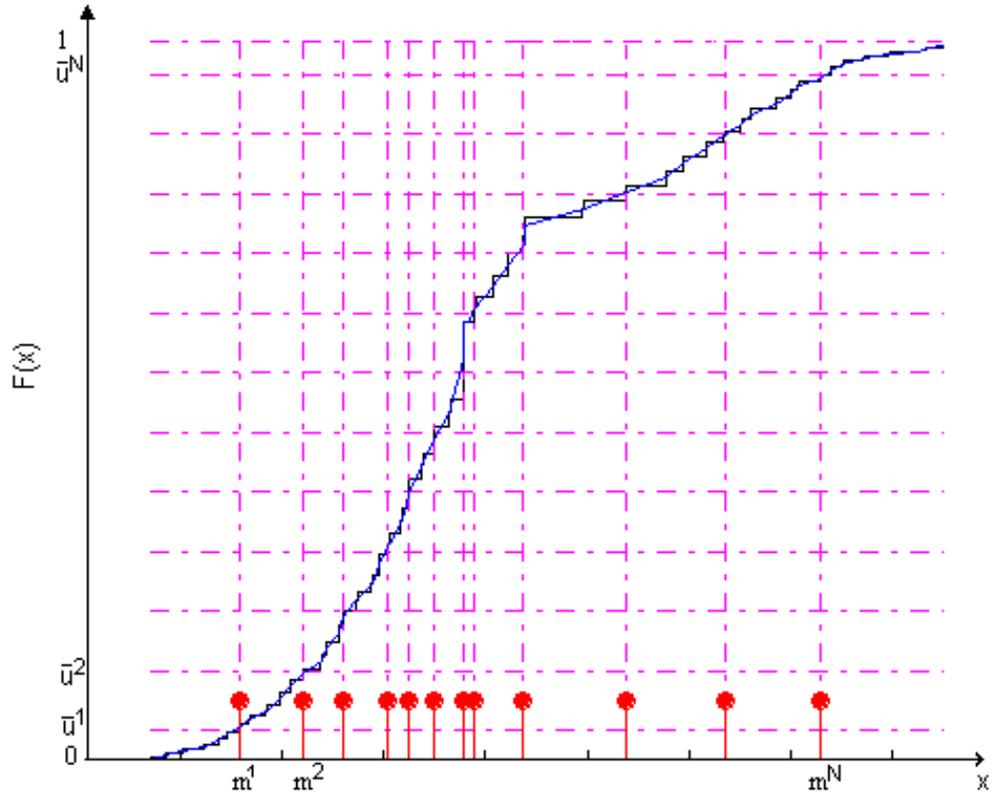


Fig 3.2: Exemple de redistribution interpolante

### 3.1.2.2 Application à la redistribution particulière

On applique ici l'algorithme précédent qui détermine l'interpolation de  $F_{k/lk}^{NM}$ , notons  $(\hat{F}_{k/lk}^{NM})$ , de façon linéaire par morceaux:

$$\hat{F}_{k/lk}^{NM}(x) = \sum_{j=1}^{NM} F_{k/lk}^{NM,j}(x)$$

$$F_{k/lk}^{NM,j}(x) = F_{k/lk}^{NM}(x_{k/lk}^{j-1}) + (F_{k/lk}^{NM}(x_{k/lk}^j) - F_{k/lk}^{NM}(x_{k/lk}^{j-1})) \left( \frac{x - x_{k/lk}^{j-1}}{x_{k/lk}^j - x_{k/lk}^{j-1}} \right), \text{ si } x_{k/lk}^{j-1} < x \leq x_{k/lk}^j$$
(3.8)

$$F_{k/lk}^{NM,j}(x) = P_{k/lk}^{NM,j} U(x - x_{k/lk}^j), \text{ si } x_{k/lk}^j = x_{k/lk}^{j-1}$$

$$F_{k/lk}^{NM,j}(x) = 0 \text{ par tout ailleurs}$$

L'application, de l'algorithme 2.2.1 à cette répartition interpolée, donne la N-approximation réduite:

$$F_{k/lk}^N(x) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} U(x - m_{k/lk}^i)$$

d'où

$$p_{k/lk}^N(x) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \delta(x - m_{k/lk}^i)$$

Rappelons que  $m_{k/lk}^i$  est la médiane probabiliste de l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i[$ . On montre ci-dessous le nouveau support particulière après la redistribution, pour le même exemple que celui de la figure 3.1.

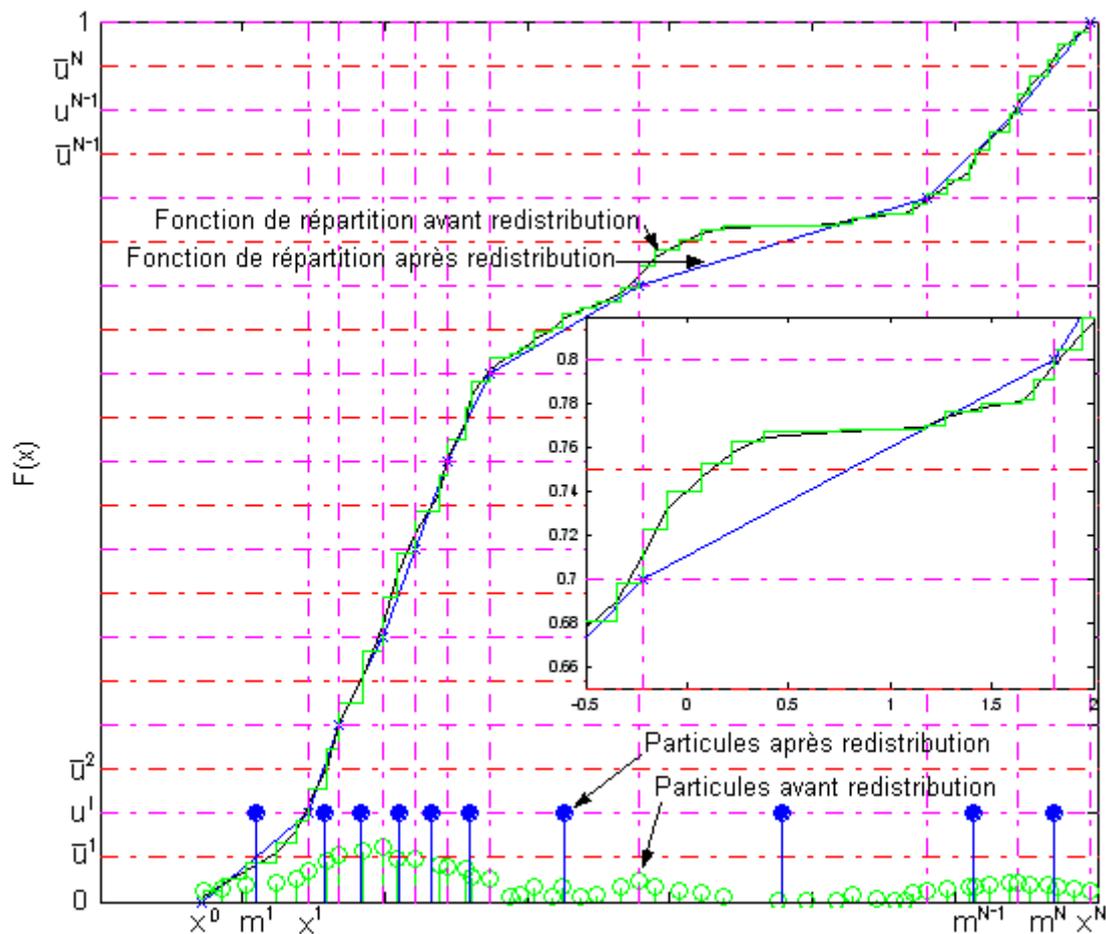


Fig 3.3 Exemple d'une redistribution conforme en loi par interpolation

### 3.1.2.3 Algorithme

- Calcul de la fonction de répartition particulaire après branchement:

$$F_{k/lk}^{NM}(x) = \sum_{i,j=1,1}^{N,M} P^{NM}(x_{k/lk}^{i,j}) U(x - x_{k/lk}^{i,j})$$

- Interpolation de la fonction de répartition.
- Discrétisation de l'espace de probabilité en  $N$  atomes de masse  $1/N$ :

$$[0, u^1], \dots, [u^{j-1}, u^j], \dots, [u^{N-1}, 1] \text{ avec } u^j = \left(\frac{j}{N}\right)$$

ainsi que  $\bar{u}^0, \bar{u}^1, \dots, \bar{u}^N$

- Calcul de  $(m_{k/lk}^j, x_{k/lk}^j)$ ,  $j=1, \dots, N$
- Détermination du peigne de Dirac:

$$p_{k/lk}^N(x) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \delta(x - m_{k/lk}^j)$$

Alg 3.2: Algorithme de redistribution interpolante

### 3.1.3 Comparaison des différentes versions

Afin de comparer les résultats obtenus jusqu'ici à l'aide des différentes sortes de technique de redistribution y compris celle à maximum de vraisemblance, la figure 3.4 montre :

- a: Les particules à redistribuer et leur moyenne.
- b: Les particules résultants à partir de la sélection ponctuelle.
- c: Les particules résultants après la redistribution interpolante.
- d: Les particules résultants après la sélection à maximum de vraisemblance.

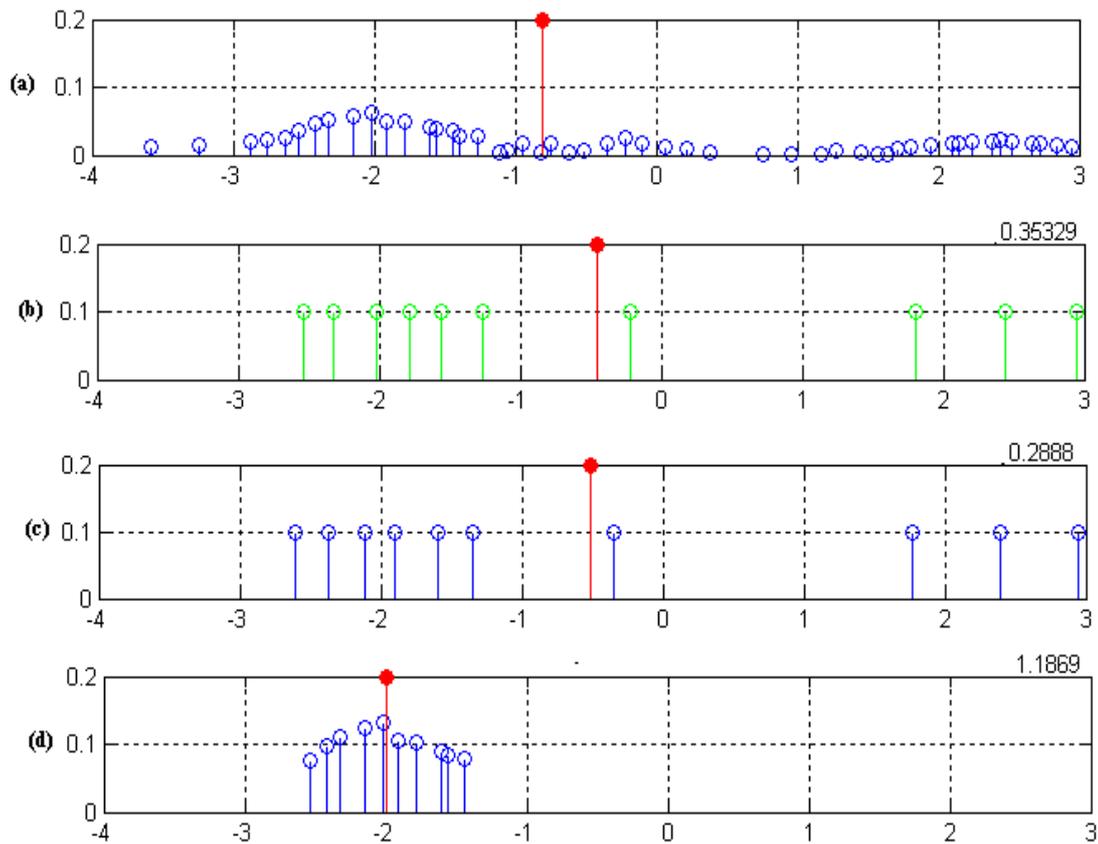


Fig 3.4: Comparaison des différents versions de redistribution conforme en loi

Le tableau suivant, montre une comparaison entre ces méthodes de point de vue de l'erreur quadratique entre la vraie moyenne  $\mu$  et la moyenne calculée après la redistribution  $\mu_i$ .

| méthode  | $(\mu - \mu_i)^2$ |
|--|-------------------|
| (b):Sélection conforme en loi                                  | 0.35329           |
| (c):Interpolation linéaire de particules Dirac conforme en loi | 0.2888            |
| (d):Sélection à maximum de vraisemblance                       | 1.1669            |

Nous observons une amélioration par la procédure de sélection conforme en loi, en comparant avec celle de la sélection de la maximum de vraisemblance. Cette amélioration a permis de bien approcher de la vraie moyenne, et de minimiser la variance. Ceci montre l'avantage de notre nouvelle approche du problème.

### 3.1.4 Redistribution par interpolation gaussienne

#### 3.1.4.1 Principes de base

On a vu au paragraphe précédent que l'interpolation segmentée est une linéarisation locale de l'espace de probabilité par une fonction de répartition linéaire par morceaux. Il est naturel de s'intéresser à l'analogie dans l'espace d'état qui est la linéarisation locale, plus familière, des équations d'état. Cela conduit à des particules gaussiennes dont l'utilisation est peu différente, des particules mais dont le domaine est plus étendu.

Notation:

L'indice temporel est volontairement omis ici pour simplifier les notations. Rappelons que la redistribution est appliquée après correction, cet indice est donc  $k/k$ .

A partir de la fonction de répartition  $F^{NM}$ , l'espace d'état est décomposé en intervalles équiprobables  $\{I^j\}$   $j=1 \dots N$  selon une procédure similaire à celle décrite en §3.1.2.1,

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad & I^j = ]x^{j-1}, x^j], \quad j=1, \dots, N \\ \text{mais} \quad & x^0 = -\infty, \quad x^N = +\infty \end{aligned} \quad (3.9)$$

La fonction de répartition se réécrit alors:

$$F^{NM}(x) = \sum_{j=1}^N F^j(x)$$

avec

$$F^j(x) = \int_{-\infty}^x r(u, I^j) p^{NM}(u) du$$

et  $r(u, I^j) = r(u, x^{j-1}, x^j)$  est la fonction rectangulaire définie par:

$$\begin{aligned} r(u, x^{j-1}, x^j) &= 1, \quad \text{pour } x^{j-1} < u \leq x^j \\ r(u, x^{j-1}, x^j) &= 0, \quad \text{partout ailleurs} \end{aligned} \quad (3.10)$$

et la densité de probabilité correspondante:

$$p^{NM}(x) = \sum_{j=1}^N r(I^j, x) p^{NM}(x) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} p^j(x) \quad (3.11)$$

Il suffit alors d'approcher chacune des densités  $p^j(x)$  par une gaussienne élémentaire pour obtenir la nouvelle discrétisation par N gaussiennes équiprobables de l'espace d'état:

$$p^{NM}(x) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} G^j(x; \hat{\chi}^j, \Gamma^j)$$

Comme dans le cas classique, les gaussiennes élémentaires  $G^j(x; \hat{\chi}^j, \Gamma^j)$  sont choisies telles qu'elles assurent la conservation des deux premiers moments de la densité approchées :

$$\begin{aligned} \hat{\chi}^j &= \int_{-\infty}^{+\infty} x p^j(x) dx \\ \Gamma^j &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \chi^j)^2 p^j(x) dx \end{aligned} \quad (3.12)$$

Notation:

Afin d'éviter toute confusion, les moyennes (resp. covariances) des nouvelles particules gaussiennes sont notées ici  $\chi^j$  (resp.  $\Gamma^j$ ).

### 3.1.4.2 Considérations pratiques

1. Lorsque  $p^{NM}(x)$  est une somme de gaussiennes:

$$p^{NM}(x) = \sum_{i=1}^{NM} \rho^i G^i(x; \hat{x}^i, P^i)$$

de moyennes et variances élémentaires  $(\hat{x}^i, P^i)$ , la fonction de répartition:

$$\begin{aligned} F^{NM}(x) &= \int_{-\infty}^x p^{NM}(u) du \\ F^{NM}(x) &= \sum_{i=1}^{NM} \rho^i \int_{-\infty}^x G^i(u; \hat{x}^i, P^i) du \\ F^{NM}(x) &= \sum_{i=1}^{NM} \rho^i \operatorname{erf}(x; \hat{x}^i, P^i) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Cette fonction de répartition peut être approchée par une somme de fonctions de répartition contenues dans des intervalles  $U^i$ . Ces intervalles sont centrés sur les moyennes des gaussiennes élémentaires  $\hat{x}^i$ . La largeur de ces intervalles doit assurer le meilleur compromis entre la complexité et la précision de calcul, par exemple:  $U^i = [\hat{x}^i - 2\sqrt{P^i}, \hat{x}^i + 2\sqrt{P^i}]$ , la figure suivante illustre les **intervalles de d'approximation**  $U^i$ , ainsi que les **intervalles de répartition**  $I^i$ .

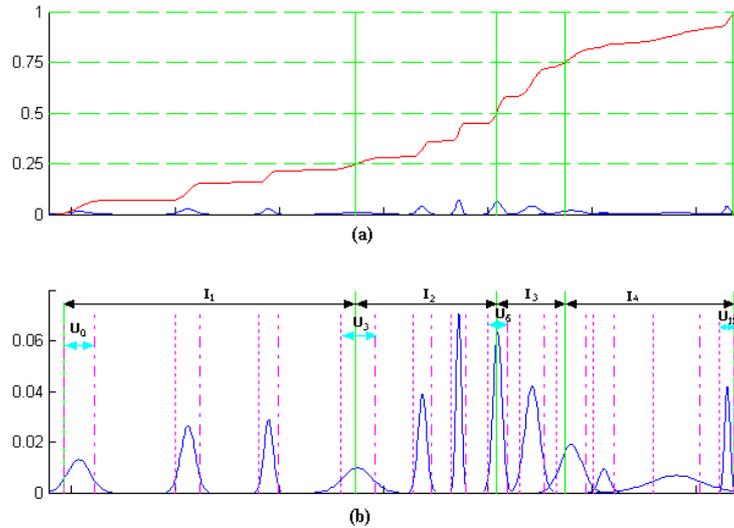


Fig 3.5 (a) Approximation d'une fonction de répartition à particules gaussiennes  
(b) les intervalles de répartition et d'approximation

2. Les calculs des moyennes et des variances élémentaires des  $N$  nouvelles particules peuvent être simplifiés en négligeant la contribution des particules lointaines parmi les  $NM$  particules. Ceci est obtenu en éliminant les queues de distribution de gaussienne  $G^i$  au delà de l'intervalle  $I^j$ . Les moyennes et variances des nouvelles particules se réécrivent alors:

$$\begin{aligned} \hat{x}^j &= \sum_{i=1, G^i \in I^j}^{NM} \rho^i \int_{I^j} x G^i(x; \hat{x}^i, P^i) dx \\ \Gamma^j &= \sum_{i=1, G^i \in I^j}^{NM} \rho^i \int_{I^j} (x - \hat{x}^j)^2 G^i(x; \hat{x}^i, P^i) dx \end{aligned} \quad (3.14)$$

On définit la condition d'appartenance d'une particule  $G^i$  à l'intervalle  $I^j$  :

$$\begin{aligned} G^i \in I^j & \text{ si} \\ U^i \cap I^j & \neq \emptyset \end{aligned}$$

3. En utilisant les mêmes arguments qu'aux points précédents, il est possible d'approcher les moments de cette particule par:

$$\begin{aligned} \int_{I^j} x G^i(x; \hat{x}^i, P^i) dx & \simeq \hat{x}^j \\ \int_{I^j} (x - \hat{x}^j)^2 G^i(x; \hat{x}^i, P^i) dx & \simeq (\hat{x}^i - \hat{x}^j)^2 + P^i \end{aligned} \quad (3.15)$$

si  $G^i \subset I^j$

Pour les **particules gaussiennes à cheval** sur plusieurs intervalles  $(I^l)_{l=1, \dots, N_i}$ , telles que:

$$\begin{aligned} U^i & \not\subset I^l \text{ et} \\ U^i \cap I^l & \neq \emptyset \end{aligned}$$

Ces particules peuvent être décomposées en une somme de  $N_i$  sous-particules gaussiennes (les équations de décomposition en 2.1.7) :

$$G^i(x; \hat{x}^i, P^i) \simeq \sum_{l=1}^{N_i} \rho^{i,l} G^{i,l}(x, \hat{x}^{i,l}, P^{i,l}) \quad (3.16)$$

alors  $U^{i,l} \subset I^l$  et  $U^{i,l} \cap I^j = \emptyset \quad \forall j \neq l$

La contribution d'une particule  $G^i$  appartenant à l'intervalle de redistribution  $I^j$  fait aussi appel à la fonction  $erf()$ .

Concrètement, la particule résultante est décomposée en deux groupes de particules:

- Les premières pouvant être considérées lointaines, donc de contributions négligeables.
- Les deuxièmes complètement incluses dans dans l'intervalle  $I^j$ .

Exemple

Prenons l'exemple illustré par la figure 3.6, qui consiste à redistribuer un support particulaire de 8 particules sur 5 nouvelles. Les particules données par la méthode de redistribution conforme en loi, dans ce cas sont les suivants:

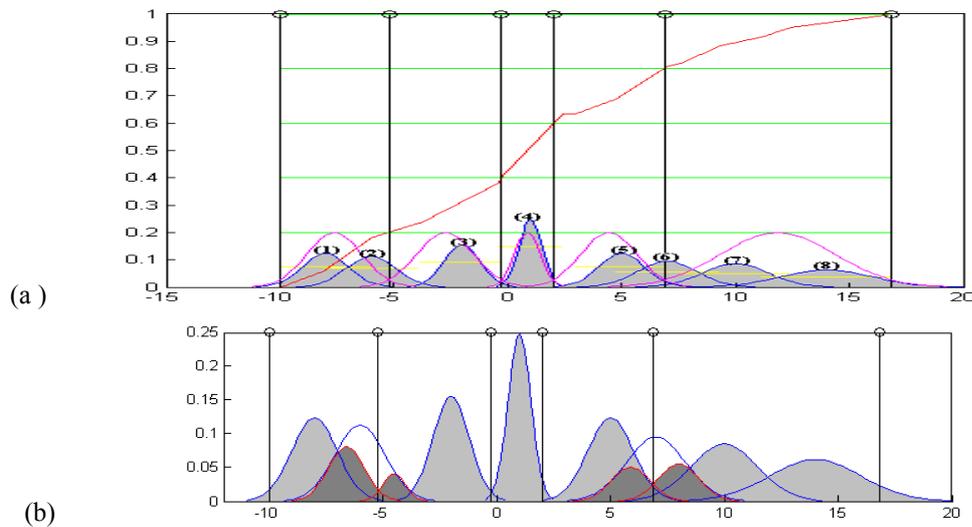


Fig 3.6 Décomposition des particules selon les intervalles de répartition (a: avant décomposition b: après décomposition)

Les particules (2) et (6) se trouvant à cheval sur deux intervalles de répartition, leurs décompositions sont nécessaires pour garantir la fiabilité des calculs. A la fin de cette étape, le nombre de particules augmente à 10.

Il ne s'agit que d'une augmentation ponctuelle qui n'a d'effet que sur la charge totale de calcul. En effet les particules supplémentaires (+2) ne sont utilisées que pour les calculs de moyennes et de variances des 5 nouvelles particules redistribuées.

Notons que, lorsque l'intervalle  $N_i$  agrandit:

- L'approximation  $G_i$  converge,
- Les poids des sous-particules frontalières tendent vers 0,
- La charge de calcul augmente.

$N_i$  doit donc assurer le meilleur compromis entre charge de calcul et précision. Autre paramètre à régler aussi c'est la largeur de l'intervalle d'approximation  $U_i$ .

En utilisant les équations (3.14 3.15 et 3.16), les moyennes et les variances des nouvelles particules gaussiennes après redistribution/décomposition sont données, donc, par:

$$\hat{\chi}^j = \sum_{i=1, G^i \in I^j}^{N_D} \rho^i \hat{x}^i$$

$$\Gamma^j = \sum_{i=1, G^i \in I^j}^{N_D} \rho^i ((x^i - \hat{\chi}^j)^2 + P^i) \quad j=1, \dots, N \quad (3.17)$$

avec

$$N_D = \sum_{i=1}^{NM} N_i \geq NM$$

nombre total de particules après décomposition.

### Interpénétration particulaire:

Bien évidemment cette représentation élimine automatiquement l'interpénétration particulaire (figure 3.7), assurant ainsi la non-redondance du support et l'optimalité de la représentation particulaire (pour plus de détails sur l'interpénétration particulaire des gaussiennes voir §2.4.2.4).

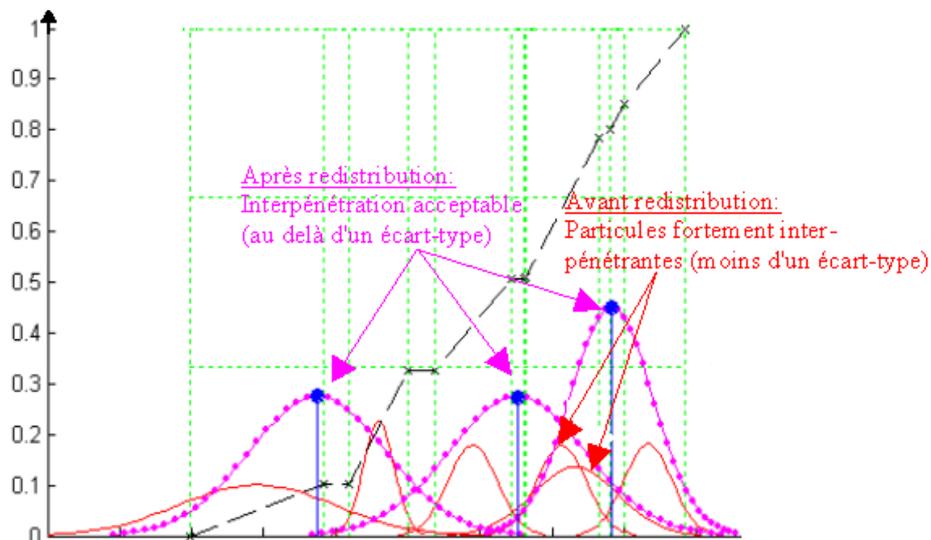


Fig 3.7 Élimination automatique de l'interpénétration par l'algorithme de redistribution

### 3.1.4.3 Algorithme

- Calcul la fonction de répartition  $F$ , à partir de  $NM$  valeurs de densité de probabilité du support particulière.
- Discrétisation de l'espace de probabilité par  $N$  valeurs égales, et utiliser l'inverse de la fonction de répartition pour calculer les  $N$  intervalles de répartition, définis par:

$$I^j = [x^{j-1}, x^j] = F^{-1}\left(u = \frac{j}{n}, u = \frac{(j+1)}{n}\right) \quad j=0, \dots, N-1$$

- Décomposition de particules, si nécessaire, on en résulte  $N_D \geq NM$  particules.
- Calcul des nouvelles positions du support particulière par les relations 3.17.

Alg 3.3: Algorithme de redistribution par interpolation gaussienne

#### Exemple:

En représentant un exemple similaire à celui de la la figure 3.1, où l'on remplace les particules de Dirac par des particules de Gauss, les particules Gaussiennes résultantes sont données par:

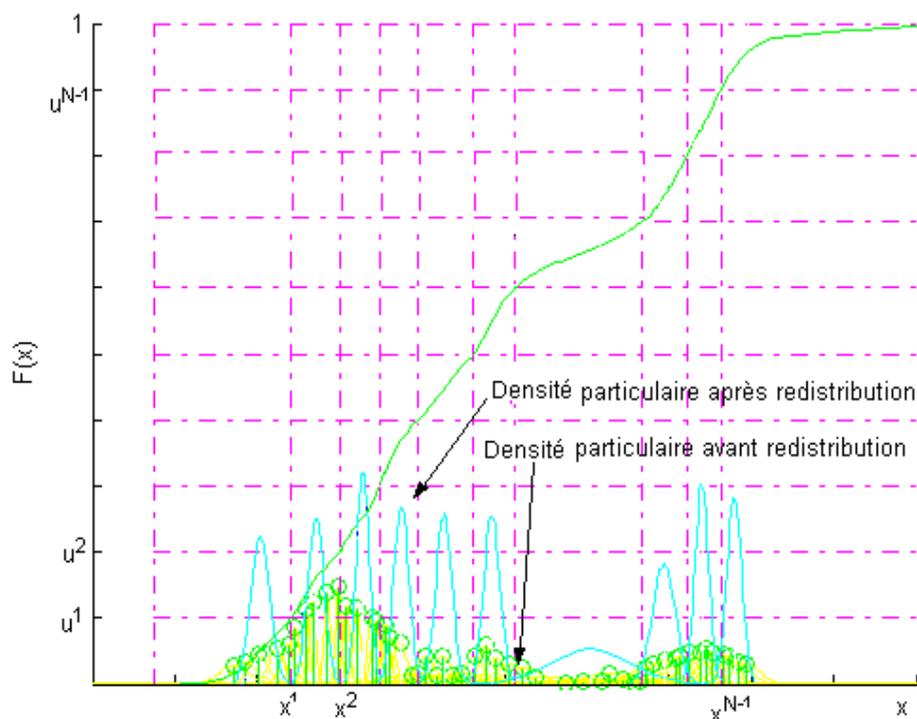


Fig 3.8 Exemple de redistribution conforme en loi par les particules Gaussiennes

#### Remarque 3.1:

Les particules gaussiennes permettent une meilleure fidélité à l'intérieur de leur intervalle élémentaire d'appartenance. Elles pèchent en revanche par leurs débordement mutuels. La préférence de ces particules à celles abordées au paragraphe 3.1.2.2 est de ce fait sujet à compromis fortement lié aux conditions opératoires et notamment à la présence de larges plages de linéarisation.

## 3.2 Cas multidimensionnel : Utilisation des probabilités marginales

### 3.2.1 Redistribution particulière purement sélective

Appliquons la généralisation multidimensionnelle (cf. §2.2.2) du principe de base à la variable aléatoire  $X$ , obtenu après branchement et pondération (cf. §2.3) en considérant un nombre NM de supports particulières:

On considère tout d'abord la marginale de la répartition particulière  $F_{k/k}^{NM}(x^1) = P_{k/k}(X^1 < x^1)$  à laquelle on associe par 3.1.1, la  $N_1$ -approximation:

$$F_{k/k}^{N_1}(x^1) = \sum_{j1=1}^{N_1} \frac{1}{N_1} U(x^1 - m_{j1}^1(k/k))$$

$$\text{soit } p_{k/k}^{N_1}(x^1) = \sum_{j1=1}^{N_1} \frac{1}{N_1} \delta(x^1 - m_{j1}^1(k/k))$$

conditionnellement aux nouveaux supports particules en nombre réduit de  $x^1$  mis ainsi en évidence, on considère alors les fonctions de répartition partielles conditionnelles:

$$F_{k/k}^{NM, j1}(x^2) = F_{k/k}^{NM}(x^2 / x_{j1-1}^1(k/k) < x^1 \leq x_{j1}^1(k/k))$$

auxquelles on associe par 3.1.1, les  $N_2$ -approximations:

$$F_{k/k}^{N_2, j1}(x^2 / x_{j1-1}^1(k/k) < x^1 \leq x_{j1}^1(k/k)) = \sum_{j2=1}^{N_2} \frac{1}{N_2} U(x^2 - m_{j1, j2}^2(k/k))$$

$$p_{k/k}^{N_2, j1}(x^2 / x_{j1-1}^1(k/k) < x^1 \leq x_{j1}^1(k/k)) = \sum_{j2=1}^{N_2} \frac{1}{N_2} \delta(x^2 - m_{j1, j2}^2(k/k))$$

$$\text{d'où } p_{k/k}^{N_1, N_2}(x^1, x^2) = \sum_{j1=1}^{N_1} \sum_{j2=1}^{N_2} \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \delta(x^1 - m_{j1}^1(k/k)) \delta(x^2 - m_{j1, j2}^2(k/k))$$

En itérant le procédé, on obtient la formule:

$$p_{k/k}^{N_1, N_2, \dots, N_n}(x^1, x^2, \dots, x^n) = \sum_{j1=1}^{N_1} \sum_{j2=1}^{N_2} \dots \sum_{jn=1}^{N_n} \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \dots \frac{1}{N_n} \delta(x^1 - m_{j1}^1(k/k)) \delta(x^2 - m_{j1, j2}^2(k/k)) \dots \delta(x^n - m_{j1, j2, \dots, jn}^n(k/k))$$

L'algorithme de redistribution multidimensionnelle par sélection ponctuelle procède donc comme suit:

1. Calcul de la fonction de répartition particulière re-ordonnée après branchement/pondération:

$$F_{k/k}^{NM}(x) = \sum_{j=1}^{NM} P^{NM}(x_{(k/k)}^j) U(x - x_{(k/k)}^j), \quad x = [x^1, x^2, \dots, x^n]$$

2. Discrétisation réduite de l'espace de probabilité en  $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n$  atomes égaux, de coordonnées  $m_{j1}^1, m_{j1, j2}^2, \dots, m_{j1, j2, \dots, jn}^n$ ,  $j1 = 1..N_1, j2 = 1..N_2, \dots, jn = 1..N_n$ .
3. Obtention du nouveaux peigne de Dirac :

$$p_{k/k}^{N_1, N_2, \dots, N_n}(x^1, x^2, \dots, x^n) = \sum_{j1=1}^{N_1} \sum_{j2=1}^{N_2} \dots \sum_{jn=1}^{N_n} \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \dots \frac{1}{N_n} \delta(x^1 - m_{j1}^1(k/k)) \delta(x^2 - m_{j1, j2}^2(k/k)) \dots \delta(x^n - m_{j1, j2, \dots, jn}^n(k/k))$$

Alg 3.4: Redistribution multidimensionnelle purement sélective

### 3.2.2 Redistribution particulière linéairement interpolante

Reprenons, pour cela, le principe de base explicité par §3.1.2.1, et appliquons la redistribution particulière multidimensionnelle en itérant le procédé.

On considère tout d'abord la marginale de la répartition particulière:

$$F_{k/k}^{NM}(x^1) = P_{k/k}^{NM}(X^1 < x^1)$$

La fonction de répartition particulière est préalablement interpolée de manière multidimensionnelle après avoir re-indices par  $j$  des particules:

$$\hat{F}_{k/k}^{NM}(x) = \sum_{j=1}^{NM} F_{k/k}^{NM,j}(x)$$

On lui applique l'algorithme en 3.1.2.2 qui détermine son interpolation linéaire par morceaux:

$$F_{k/k}^{NM,jl}(x^1) = F_{k/k}^{NM,jl}(x_{j_{l-1}}^1(k/k)) + \left[ F_{k/k}^{NM,jl}(x_{j_l}^1(k/k)) - F_{k/k}^{NM,jl}(x_{j_{l-1}}^1(k/k)) \right] \left( \frac{x^1 - x_{j_{l-1}}^1(k/k)}{x_{j_l}^1(k/k) - x_{j_{l-1}}^1(k/k)} \right)$$

$$F_{k/k}^{NM,jl}(x) = P_{k/k}^{NM}(x_{j_l}^1(k/k)) U(x^1 - x_{j_l}^1(k/k)) \quad \text{si } x_{j_l}^1(k/k) = x_{j_{l-1}}^1(k/k) \\ = 0, \text{ partout ailleurs.}$$

L'application, à nouveau, de l'algorithme 2.2.1, à cette répartition interpolée  $\hat{F}_{k/k}^{NM}(x)$ , donne la  $N_1$ -approximation réduite.

$$F_{k/k}^{N_1}(x^1) = \sum_{j_l=1}^{N_1} \frac{1}{N_1} U(x^1 - m_{j_l}^1(k/k))$$

d'où

$$p_{k/k}^{N_1}(x^1) = \sum_{j_l=1}^{N_1} \frac{1}{N_1} \delta(x^1 - m_{j_l}^1(k/k))$$

Itérant le procédé selon la même démarche qu'en §3.2.1, on considère les fonctions de répartition partielles conditionnelles.

$$F_{k/k}^{NM,jl}(x^2) = F_{k/k}^{NM}(x^2 / x_{j_{l-1}}^1(k/k) < x^1 \leq x_{j_l}^1(k/k))$$

auxquelles on associe les interpolations de la formule:

$$F_{k/k}^{NM,jl,j_2}(x^2) = F_{k/k}^{NM,jl,j_2}(x_{j_2-1}^2(k/k)) + \left[ F_{k/k}^{NM,jl,j_2}(x_{j_2}^2(k/k)) - F_{k/k}^{NM,jl,j_2}(x_{j_2-1}^2(k/k)) \right] \left( \frac{x^2 - x_{j_2-1}^2(k/k)}{x_{j_2}^2(k/k) - x_{j_2-1}^2(k/k)} \right)$$

Conditionnellement aux nouveaux supports particules de  $x^1$  en nombre réduit, ainsi mis en évidence, on considère alors les répartitions conditionnelle ainsi interpolés, auxquelles on associe les  $N_2$ -approximation analogues à §3.1.1.

$$F_{k/k}^{N_2,jl}(x^2 / x_{j_{l-1}}^1(k/k) < x^1 \leq x_{j_l}^1(k/k)) = \sum_{j_2=1}^{N_2} \frac{1}{N_2} U(x^2 - m_{j_l,j_2}^2(k/k))$$

$$p_{k/k}^{N_2,jl}(x^2 / x_{j_{l-1}}^1(k/k) < x^1 \leq x_{j_l}^1(k/k)) = \sum_{j_2=1}^{N_2} \frac{1}{N_2} \delta(x^2 - m_{j_l,j_2}^2(k/k))$$

d'où, en utilisant la même remarque qu'en 2.2.2:

$$p_{k/k}^{N_1,N_2}(x^1, x^2) = \sum_{j_l=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_2} \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \delta(x^1 - m_{j_l}^1(k/k)) \delta(x^2 - m_{j_l,j_2}^2(k/k))$$

En répétant la démarche précédemment exposée en §3.2.1, on obtient bien finalement la même expression, où  $m_{j1}^1, m_{j1, j2}^2, \dots, m_{j1, j2, \dots, jn}^n$  sont obtenus sur la version interpolée de  $F_{k/k}^{NM}(x)$ , d'où l'algorithme:

1. Calcul de la fonction de répartition particulière re-ordonnée après branchement/pondération:

$$F_{k/k}^{N_1}(x) = \sum_{j1=1}^{NM} P^{NM} x_{(k/k)}^j U(x - x_{(k/k)}^j)$$

2. Interpolation de la fonction de répartition ci-dessus de manière linéaire par morceaux.
3. Discrétisation réduite de l'espace de probabilité en  $N = N_1 \times N_2 \dots \times N_n$  atomes égaux, de coordonnées  $m_{j1}^1, m_{j1, j2}^2, \dots, m_{j1, j2, \dots, jn}^n$  à partir de la répartition interpolée ci-dessus.
4. Obtenir du nouveau peigne de Dirac :

$$p_{k/k}^{N_1, N_2, \dots, N_n}(x^1, x^2, \dots, x^n) = \sum_{j1=1}^{N_1} \sum_{j2=1}^{N_2} \dots \sum_{jn=1}^{N_n} \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \dots \frac{1}{N_n} \delta(x^1 - m_{j1}^1(k/k)) \delta(x^2 - m_{j1, j2}^2(k/k)) \dots \delta(x^n - m_{j1, j2, \dots, jn}^n(k/k))$$

Alg 3.5: Redistribution multidimensionnelle par interpolation emboîtée

**Remarque 3.2:**

On notera, dans l'écriture finale du nouveau peigne de Dirac  $p_{k/k}^{N_1, N_2, \dots, N_n}$ , que les supports  $m_{j1}^1, m_{j1, j2}^2, \dots, m_{j1, j2, \dots, jn}^n$  deviennent  $x_{j1}^1, x_{j1, j2}^2, \dots, x_{j1, j2, \dots, jn}^n$  pour l'étape de pondération.

La notation volontaire  $m$  a pour but de distinguer les N-approximations par la médiane  $m$ , des N-approximations par la moyenne  $\mu$  (cf. remarque en 2.2.1).

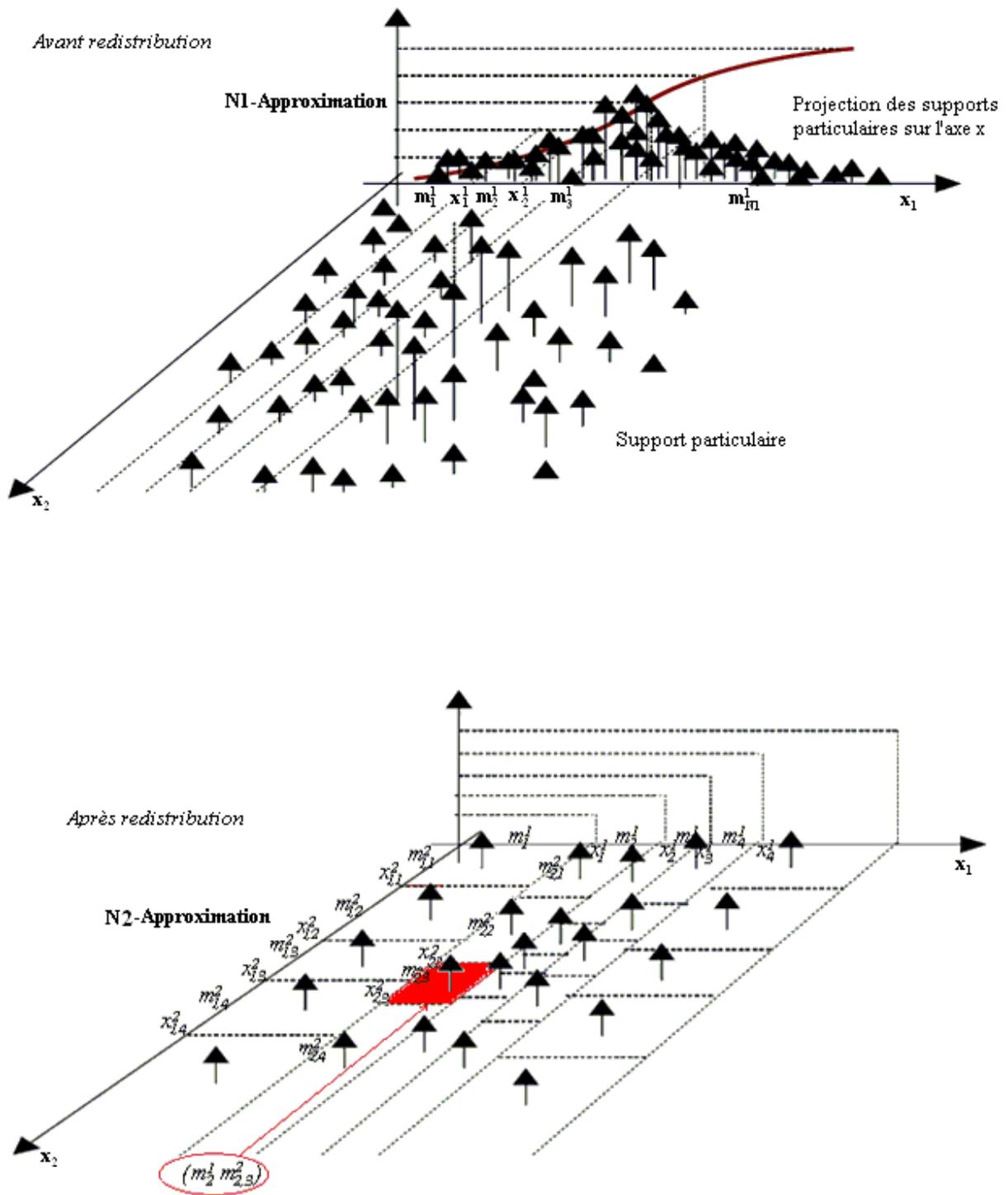


Fig 3.9 Redistribution à deux dimensions

### 3.2.3 Particules de Gauss

Le même principe appliqué précédemment (3.2.1 & 3.2.2), peut être appliqué aussi à la redistribution conforme en loi des particules gaussiennes multidimensionnelles:

- La fonction de répartition marginale est définie par:

$$F^{NM}(x^1) = \int_{-\infty}^{x^1} p^{NM}(u) du = \int_{-\infty}^{x^1} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} p^{NM}(u, x^2, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n \right) du$$

est associée une décomposition mono-dimensionnelle en  $N_1$  intervalles équiprobables  $I_{j_1}^1$  :

$$F^{NM}(x^1) = \sum_{j_1=1}^{N_1} F^{j_1}(x^1)$$

$$\text{et } F^{j_1}(x^1) = \int_{-\infty}^{x^1} r(I^{1,j_1}, u) p^{NM}(u) du$$

- Pour chaque intervalle  $I^{1,j_1}$ , on définit la fonction de répartition marginale conditionnelle

$$F^{NM}(x^2/I^{1,j_1}) = \int_{-\infty}^{x^2} \left[ \int_{I^{1,j_1}} p^{NM}(u/x^1) p^{NM}(x^1) dx^1 \right] du$$

que l'on décompose en  $N_2$  intervalles équiprobables  $I_{j_1, j_2}^2$ .

De façon générale, pour l'axe  $l$ , on définit la fonction de répartition marginale conditionnelle à chaque pavé définie par:

$$C^{j_1, \dots, j_{l-1}} = I_{j_1}^1 \times \dots \times I_{j_1, j_2, \dots, j_{l-1}}^{l-1}$$

$$F^{NM}(x^l/C^{j_1, \dots, j_{l-1}}) = \int_{-\infty}^{x^l} \left[ \int_{I^{l-1, j_{l-1}}} \dots \int_{I^{1, j_1}} p^{NM}(u/x^{l-1}, \dots, x^1) p^{NM}(x^1, \dots, x^{l-1}) dx^1 \dots dx^{l-1} \right] du$$

• En itérant jusqu'à l'axe  $n$  (dimension du vecteur d'état), on obtient une discrétisation de l'espace d'état multidimensionnel en  $N$  pavés équiprobables  $C^{j_1, \dots, j_n} = I_{j_1}^1 \times I_{j_1, j_2}^2 \times \dots \times I_{j_1, j_2, \dots, j_n}^n$  et la densité de probabilité conjointe s'écrit:

$$p^{NM}(x^1, \dots, x^n) = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^{N_1, \dots, N_n} \frac{1}{N} [N \mathbf{1}_{C^{j_1, \dots, j_n}}(x^1, \dots, x^n) p^{NM}(x^1, \dots, x^n)]$$

$$\text{avec } \mathbf{1}_{C^{j_1, \dots, j_n}}(x) = 1 \quad \text{si } x \in C^{j_1, \dots, j_n}$$

$$= 0 \quad \text{sinon}$$

$$N = \prod_{l=1}^n N_l \quad \text{nombre total de nouvelles particules}$$

$N_l$  nombre d'intervalles de répartition affectés à l'axe  $l$ .

En remplaçant les densités élémentaires sur les pavés  $C^{j_1, \dots, j_n}$  par les gaussiennes équivalentes on obtient la nouvelle discrétisation conforme en loi par  $N$  gaussiennes élémentaires équiprobables:

$$p^{NM}(x^1, \dots, x^n) \simeq \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^{N_1, \dots, N_n} \frac{1}{N} G^{C^{j_1, \dots, j_n}}([x^1, \dots, x^n]; \hat{\chi}^{j_1, \dots, j_n}, P^{j_1, \dots, j_n})$$

avec,

$$\hat{\chi}^{j_1, \dots, j_n} = \int_{I^{n, j_n}} \dots \int_{I^{1, j_1}} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} p^{NM}(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n$$

$$\Gamma^{j_1, \dots, j_n} = \int_{I^{n, j_n}} \dots \int_{I^{1, j_1}} \left( \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} - \hat{\chi}^{j_1, \dots, j_n} \right)^T \left( \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} - \hat{\chi}^{j_1, \dots, j_n} \right) p^{NM}(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n$$

les moyennes et les variances des nouvelles particules gaussiennes.

Les intégrales de sommes de gaussiennes, tant pour le calcul des fonctions de répartition marginales conditionnelles que pour celui des moyennes et variances des nouvelles gaussiennes, peuvent être simplifiées de façon analogue à celle utilisée dans le cas mono-dimensionnel ( cf. § 3.1.4.2) :

- approximation linéaire des fonctions de répartition des gaussiennes élémentaires.
- négligence des contributions des particules lointaines.
- négligence des queues de distribution des particules appartenant au pavé de répartition ( $C^{j_1, \dots, j_n}$ ) de  $n$  dimensions.
- décomposition des gaussiennes à cheval sur plusieurs pavés, et pour chaque axe.

➤ **Décomposition des particules gaussiennes multidimensionnelles**

Le besoin de décomposition des particules gaussiennes apparaît dès qu'une particule se trouve à cheval sur plusieurs intervalles de répartition pour une composante d'état donnée. Bien que ce besoin de décomposition concerne la marginale scalaire de la gaussienne en question selon l'axe d'état considéré, il doit être reporté sur la gaussienne multidimensionnelle. En effet, cette dernière sert au calcul des fonctions de répartition marginales conditionnelles des itérations suivantes. Pour ces raisons, on présente ici la méthode de décomposition d'une gaussienne multidimensionnelle lorsque la contrainte scalaire de décomposition concerne un axe d'état donné  $\alpha_k$ .

L'intervalle d'appartenance de la particule  $i$  à l'intervalle  $l$  :  $V_l^i$ , est définie par la figure suivante:

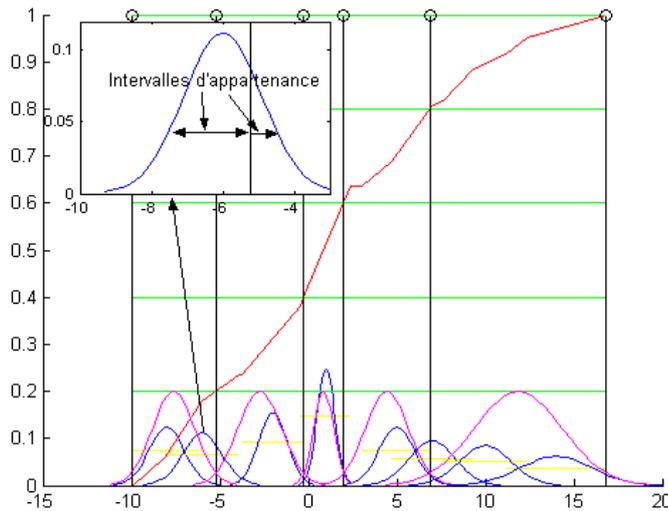


Fig 3.10 Décomposition des particules à cheval sur plusieurs pavés

On définit aussi le facteur d'appartenance de la particule  $i$ , à l'intervalle de répartition  $l$ , ( $0 < \gamma_l^i \leq 1$ ) :

$$\gamma_l^i = \frac{V_l^i}{\sum_l V_l^i}$$

Soit  $x_k = [\alpha_k \ \theta_k]$  vecteur d'état où  $\alpha_k$  est la composante **scalaire** sujette à la décomposition telle que les deux points  $\{\hat{\alpha}^i - 2\sqrt{P_{\alpha\alpha}^i}, \hat{\alpha}^i + 2\sqrt{P_{\alpha\alpha}^i}\}$  n'appartient pas au même intervalle de répartition, et  $\theta_k$  le **vecteur** contenant les autres composantes. La particule gaussienne

$$p(x_k/Y_k) = G(x_k - \hat{x}^i, P^i)$$

$$\text{telle que } \hat{x}^i = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^i \\ \hat{\theta}^i \end{bmatrix} \quad P^i = \begin{bmatrix} P_{\alpha\alpha}^i & P_{\alpha\theta}^i \\ P_{\theta\alpha}^i & P_{\theta\theta}^i \end{bmatrix}$$

La densité de probabilité conditionnelle s'écrit :

$$\begin{aligned} p_i(x_k/Y_k) &= p_i(\alpha_k/Y_k) p_i(\theta_k/\alpha_k, Y_k) \\ &= G(\alpha_k - \hat{\alpha}^i, P_{\alpha\alpha}^i) G(\theta_k - E_i(\theta_k/\alpha_k, Y_k), P_{\theta/\alpha}^i) \end{aligned} \quad (3.18)$$

avec

$$\begin{aligned} E_i(\theta_k/\alpha_k, Y_k) &= \hat{\theta}^i + (P_{\theta\alpha}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} (\alpha_k - \hat{\alpha}^i) \\ P_{\theta/\alpha}^i &= P_{\theta\theta}^i - (P_{\theta\alpha}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} P_{\alpha\theta}^i \end{aligned}$$

La densité de probabilité  $p_i(\alpha_k/Y_k)$  de la variable  $\alpha_k$  peut être approchée par une somme finie de  $n_i$  gaussiennes pondérées par  $\rho^{i,l}$  proportionnel à sa partie incluse dans l'intervalle de répartition  $I^l$  :

$$G(\alpha_k - \hat{\alpha}^i, P_{\alpha\alpha}^i) \simeq \sum_{l=1}^{N_i} \rho^{i,l} G(\alpha_k - \hat{\alpha}^{i,l}, S_{\alpha}^{i,l})$$

avec  $S_{\alpha}^{i,l} = \min(\gamma_l^2 P_{\alpha\alpha}^i, S_{\alpha})$ .

et  $S_{\alpha}$  : Seuil de linéarisation sur l'axe  $\alpha$ .

La densité multidimensionnelle se réécrit:

$$\begin{aligned} p_i(x_k/Y_k) &= G(\alpha_k - \hat{\alpha}^i, P_{\alpha\alpha}^i) G(\theta_k - E_i(\theta_k/\alpha_k, Y_k), P_{\theta/\alpha}^i) \\ G(x_k/Y_k) &\simeq \sum_{l=1}^{N_i} \rho^{i,l} G(\alpha_k - \hat{\alpha}^{i,l}, S_{\alpha}^{i,l}) p_i(\theta_k/\alpha_k, Y_k) \\ &\simeq \sum_{l=1}^{N_i} \rho^{i,l} G(x_k - \hat{x}^{i,l}, P^{i,l}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\text{avec, } \hat{x}^{i,l} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^{i,l} \\ \hat{\theta}^{i,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^{i,l} \\ \hat{\theta}^{i,l} + (P_{\theta\alpha}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} (\hat{\alpha}^{i,l} - \hat{\alpha}^i) \end{bmatrix}$$

Les nouvelles positions de particules  $\alpha^{i,l}$ , calculées par le centre de l'intervalle d'appartenance de la particule  $i$ , à l'intervalle  $l$ .

$$\text{et, } P_{\alpha\alpha}^{i,l} = \begin{bmatrix} S_{\alpha}^{i,l} & P_{\alpha\theta}^{i,l} \\ (P_{\alpha\theta}^{i,l})^T & P_{\theta\theta}^{i,l} \end{bmatrix}$$

$$\text{où: } P_{\alpha\theta}^{i,l} = \left( \frac{S_{\alpha}^{i,l}}{P_{\alpha\alpha}^i} \right) P_{\alpha\theta}^i$$

$$P_{\theta\theta}^{i,l} = P_{\theta\theta}^i - (P_{\theta\alpha}^i)^T (P_{\alpha\alpha}^i)^{-1} P_{\alpha\theta}^i \left( 1 - \frac{S_{\alpha}^{i,l}}{P_{\alpha\alpha}^i} \right) \quad (3.20)$$

A partir de ces intervalles  $I_m$   $m=1, \dots, n$ ;  $t=1, \dots, N_m$  On définit les cubes  $C_i$   $i=1, \dots, N$  de l'espace d'état, on calcule la nouvelle position et la matrice de covariance à l'intérieur de ce cube par:

$$\hat{X}_j^k = \sum_{i=1, i \in C_j}^{N_D} \rho_{k/lk}^i \hat{x}_{k/lk}^i \quad j=1, \dots, N$$

$$\Gamma_k^j = \sum_{i=1, i \in C_j}^{N_D} \rho_i^k \left( (\hat{x}_{k/lk}^i - \hat{X}_k^j) (\hat{x}_{k/lk}^i - \hat{X}_k^j)^T + P_{k/lk}^i \right) \quad (3.21)$$

avec:

- $N_D$  nombre total des particules après les éventuelles décompositions à la fin de la boucle.
- $N_m$  nombre de particules à l'issue des décompositions selon l'axe  $m$  (itération  $m$ ).
- $N_D = \sum_{l=1}^n N_l$

**Remarque 3.3:**

Bien évidemment ce type de redistribution fait automatiquement la décomposition des particules mal-conditionnées.

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé une nouvelle technique de redistribution déterministe compatible avec la définition habituelle (au sens du minimum de variance marginale), les étapes de prédiction et de pondération restent celles du chapitre 2.

La conformité en loi de cette distribution, par discrétisation de la fonction de répartition, la rend adaptée à respecter les statistiques de tous ordres. Ce n'est pas le cas de la redistribution à maximum de vraisemblance qui n'est compatible qu'avec l'estimation trajectorielle à maximum de vraisemblance, comme l'avait montré [Ziadi 07].

Nous avons distingué trois cas:

- ✓ La redistribution purement sélective: elle redistribue en  $N$  positions la fonction de répartition à  $NM$  particules, obtenue après branchement sur  $M$  valeurs de bruit de prédiction possibles.
- ✓ La redistribution linéairement interpolante: elle effectue la même opération sur le fonction de répartition à  $NM$ -particules, préalablement interpolée. La différence essentielle réside dans la création de nouveaux supports entre les particules existantes. Cela confère à l'algorithmique une capacité ponctuellement convergente en l'absence de bruit de prédiction, contrairement à la précédente.
- ✓ La redistribution à interpolation gaussienne: à l'interpolation linéaire dans l'espace d'état (linéarisation locale de l'espace d'état) correspond classiquement l'interpolation gaussienne dans l'espace de probabilité, si les bruits sont normalement distribués. Nous avons donc adapté la technique des particules ponctuelles de Dirac, à celle des particules étendues de Gauss, dont les équations permettent localement l'utilisation du filtre de «Kalman-étendu».

On notera toute fois que, dans ce dernier cas, lorsque le nombre de particules  $N$  tend vers l'infini, les particules de Gauss tendent vers des particules de Dirac, et leur utilité s'évanouit asymptotiquement. L'utilité de particules de Gauss au prix de calculs matériels sur la covariance, ne subsiste que dans le cas de larges plages linéaires de l'espace d'état.



# **Deuxième Partie**

## **APPLICATIONS AUX COMMUNICATIONS AEROSPATIALES**



## Chapitre 4

# Modélisation de transmission Codage/Décodage

Les systèmes de télécommunications par satellite constituent une solution adaptée pour résoudre le problème de l'accès par le grand public dans le monde entier à des services multimédia au sens large (accès internet, vidéoconférence, échange de données ...), dont les données nécessitent à la fois des débits suffisants et de bonnes performances en réception. Ces systèmes ont considérablement évolué ces dix dernières années, avec d'une part la transition de l'analogique au numérique pour la diffusion de télévision, et d'autre part l'apparition de services multimédia. Cette évolution coïncide avec l'émergence de la norme DVB-S (Digital Video Broadcasting for Satellite Application)[DVB 03], et notamment par la norme DVB-RCS (Digital Video Broadcasting- Return Channel for Satellite), et aussi le standard DVB-S2, achevé par l'ETSI (European Telecommunication Standard Institute) début 2004. Les communications par satellite permettent une couverture géographique indépendante des infrastructures au sol et un déploiement rapide. Deux catégories de satellite peuvent être considérées:

- les satellites géostationnaires (GEO) qui permettent une couverture mondiale et permanente avec seulement trois satellites, mais pour lesquels les bilans de liaison et le temps de propagation sont défavorables du fait de l'éloignement des satellites (environ 36000 km).
- Les satellites en orbites basse (LEO) ou moyenne (MEO), qui nécessitent plus de satellites pour une couverture globale mais non permanente et qui permettent d'avoir des temps de propagation limités et des bilans de liaison moins défavorables. Le prix à payer est la nécessité de pouvoir suivre le satellite en visibilité et de changer de satellite pour ne pas interrompre une liaison établie.

Le canal de transmission entre un émetteur seul et un récepteur embarqué à bord d'un satellite géostationnaire est supposé gaussien, et l'utilisateur émet directement ses informations à transmettre par paquets des données utiles sur un créneau temporel et fréquentiel qui lui est alloué. Ces informations

nécessiteront d'effectuer la communication numérique de paquets à bord du satellite donc de démoduler préalablement le signal provenant de nombreux utilisateurs.

Des phénomènes de scintillation peuvent également détériorer le signal et les équipements des terminaux bon marché présentent certaines imperfections par rapport aux équipements sophistiqués (instabilités d'horloges, facteur de bruit des oscillateurs de fréquence ...). De plus, des atténuations importantes, liées essentiellement à la pluie, entraînent une faible disponibilité ou une puissance d'émission nécessaire incompatible avec un terminal faible coût. La mobilité du terminal impose de compenser l'effet Doppler et d'en poursuivre les dérives. De plus, un dispositif de synchronisation efficace est également nécessaire.

Les contraintes inhérentes aux récepteurs à faible coût imposent d'obtenir une bonne qualité de service à rapport signal sur bruit faible [Douillard 95]. Pour y parvenir, le dispositif de correction d'erreurs retenu utilise les turbo-codes, connus pour leurs bonnes performances en termes de taux d'erreur binaire [Berrou 93], mais ceci complique d'autant l'acquisition des paramètres du canal qui s'avère difficile à rapport signal sur bruit faible.

Idéalement, le récepteur optimal à maximum de vraisemblance réalise l'estimation des paramètres du canal conjointement avec la détection du message binaire. Nous proposons d'utiliser la technique particulière [Salut 01] éprouvée pour ce genre de problèmes non linéaires. En effet, pour une complexité calculatoire donnée, le filtrage particulier permet d'estimer efficacement, au sens du maximum a posteriori ou du minimum de variance, l'état d'un système markovien.

## 4.1 Modélisation du système d'une transmission par satellite

### 4.1.1 Caractéristiques du système

Le système concerne des récepteurs embarqués à bord d'un satellite GEO pour des liaisons caractérisées par l'utilisation de puissants codes, vers des terminaux au sol avec des fortes atténuations liées aux conditions de propagation dans la bande de fréquence. Pour atteindre des coûts faibles, il est nécessaire de travailler à bord du satellite à un rapport signal sur bruit de plus en plus bas. De telles qualités de service à ces points de fonctionnement sont réalisables en utilisant un codage canal de type code convolutif et turbo-code.

Les transmissions par satellites doivent faire face à des nombreux éléments non-linéaires qui affectent considérablement le signal d'origine. C'est pourquoi des modulations de phase, qui sont à enveloppe constante, sont en générale préférées. La modulation à 4 états de phase est actuellement la plus utilisée pour ce type de liaison.

Nous distinguons deux modes de transmission distincts, à savoir les transmissions continues pour lesquelles un émetteur unique transmet un flux de données sans interruption, et les transmissions par paquet, pour lesquelles le récepteur reçoit successivement des paquets de données issus d'émetteurs distincts. C'est le cas par exemple pour la voie retour d'un système offrant des services avec interactivité des utilisateurs, type TDMA (Time Division Multiple Access). On se trouve alors dans une situation où plusieurs terminaux transmettent des données vers un récepteur unique, et les données reçues sont alors groupées par paquets (appelés «bursts»), constitués d'un nombre fixe de cellules ATM (Asynchronous Transfer Mode) de 53 octets ou de paquets MPEG de 188 octets.

Chaque paquet peut être issu d'un utilisateur différent, et il dépend des caractéristiques du terminal utilisateur (horloge, amplificateur, ...)

### 4.1.2 Chaîne de transmission

La figure 4.1 donne le schéma global de transmission dans lequel nous nous plaçons. Attachons nous à décrire les différents éléments de cette chaîne et tentons d'identifier certains paramètres ou certaines propriétés de ces blocs utiles pour notre problème d'allocation de données. Nous commençons par les caractéristiques des blocs à l'émission :

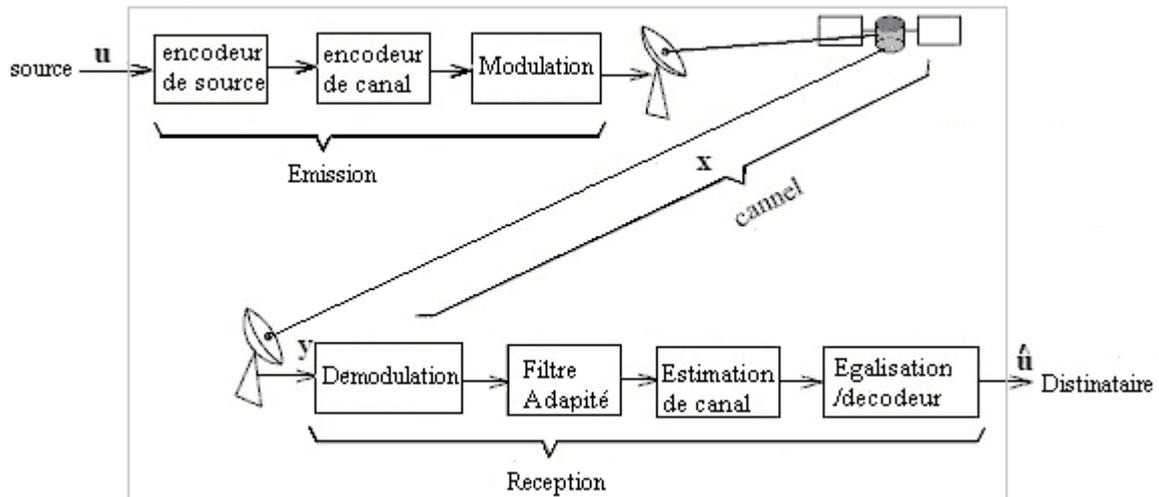


Fig 4. 1 Schéma de transmission traditionnel.

Le premier maillon de la chaîne est la source d'information suivie parfois par le **codage source** qui consiste à transformer le message de la source en une séquence d'information de façon à minimiser la taille du message en éliminant les redondances naturelles de l'information source (algorithme de compression). Il est à noter que les limites théoriques du codage source sont fixées par le premier théorème de Shannon [Shannon 48]. Le **codage canal** a pour rôle de protéger l'information émise contre les perturbations du canal de transmission susceptible de modifier son contenu. Il s'agit donc de rajouter de la redondance de manière à détecter et éventuellement corriger les erreurs lors de la réception si la stratégie adoptée le permet. Cette redondance structurée permet de rendre les données robustes aux erreurs introduites par le canal. Le ratio entre le nombre de données d'information transmises et le nombre données totales transmises définit le rendement de codage du code,  $R$ , qui est un paramètre important du système. Après avoir encodé les données, on utilise une onde porteuse (**Modulation**) qui sert à transposer ces données par modification, d'une ou de plusieurs caractéristiques de cette onde, amplitude (AM), phase (BPSK, QPSK, etc.), fréquence (FM), amplitude et phase (QAM), etc.

Cette onde sera transmise via le **canal physique** où les perturbations sont introduites. Ces perturbations incluent le bruit ambiant en réception (généralement modélisé par un bruit additif gaussien), les interférences entre symboles dues aux trajets multiples et les interférences entre utilisateurs pouvant intervenir dans un système multi-utilisateurs.

Le récepteur est composé de blocs duaux des blocs d'émission: il commence par la **démodulation**, est l'opération inverse de la modulation qui permet le passage entre les symboles reçus vers le train binaire reçu et de séparer les utilisateurs pour un système à accès multiple. L'**estimation** des paramètres du canal de transmission, et l'**égalisation** a pour but de compenser les interférences introduites par le canal. Le **décodage canal** consiste dans un premier temps à détecter la présence d'erreurs dans l'information et puis dans un deuxième temps à les corriger.

#### 4.1.3 Modèle de canal

Le modèle de canal prend en compte d'une part un bruit additif gaussien, l'interférence entre symboles et d'autre part les perturbations sur la porteuse.

Le récepteur doit estimer:

- Le rythme symbole
- La phase de la porteuse
- La fréquence de la porteuse
- L'amplitude du signal

L'amplitude  $A$  du signal peut être affectée par des effets atmosphériques comme la pluie. L'erreur de phase comprend un terme d'erreur appelé bruit de phase issu du tuner et des amplificateurs faible bruit.

#### 4.1.3.1 Interférences Entre Symboles (IES)

L'interférence entre symboles (IES) apparaît à la sortie du filtre de réception et est caractérisée par la contribution des autres symboles transmis sur le symbole que l'on désire détecter. L'IES sur le symbole détecté à l'instant  $kT$  est définie par la relation:

$$IES_k = \sum_{n=-\infty, n \neq k}^{n=+\infty} d_k h(kT - nT + \tau) \quad (4.1)$$

où  $\tau(t)$  est le retard de propagation. Ce terme d'interférence s'ajoute au bruit blanc gaussien, dont la densité spectrale de puissance est  $\Phi_m(f) = \frac{1}{2} N_0$ . Pour un récepteur **parfaitement synchronisé**, on souhaite qu'à l'instant de prise de décision:

$$\sum_{n \neq k} d_k h(kT - nT + \tau) = 0$$

La forme d'onde la plus classique vérifiant le critère de Nyquist (pour affaiblir ou annuler l'IES) est le cosinus surélevé, dont la transformée de Fourier est définie par:

$$H(f) = \begin{cases} \frac{T}{2} \left( 1 - \sin \frac{\pi T}{\alpha} \left( |f| - \frac{1}{2T} \right) \right) & \text{pour } \begin{cases} -\frac{1-\alpha}{2T} < f < \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{1-\alpha}{2T} < f < \frac{1+\alpha}{2T} \\ f > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases} \\ 0 & \end{cases} \quad (4.2)$$

La réponse impulsionnelle est donnée par:

$$h(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{\pi \alpha t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T} \left(1 - \frac{4\alpha^2 t^2}{T^2}\right)} \quad (4.3)$$

Le facteur de débordement (Roll Off en anglais)  $0 \leq \alpha \leq 1$ .  $\alpha = 0.35$  est utilisé pour la modulation par la norme DVB-S. Le facteur  $\alpha = 0.15$  sera utilisé dans le système radio mobile UMTS. Pour obtenir une forme d'onde de la forme (4.2) en sortie du filtre adapté, il faut un filtre d'émission et un filtre de réception en racine de Nyquist.

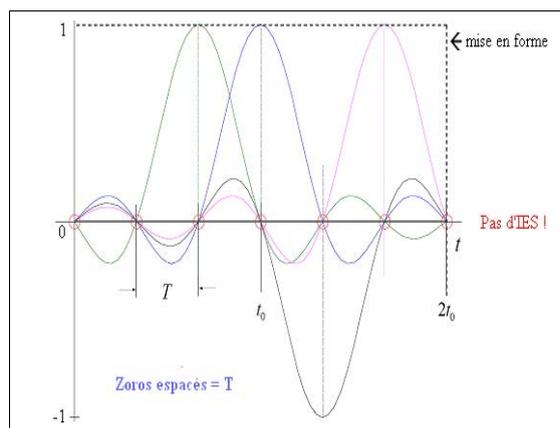


Fig 4. 2 réponse impulsionnelle du système de transmission

#### 4.1.3.2 Perturbation sur la porteuse

Soient  $A(t)$  et  $\varphi(t)$  respectivement l'enveloppe et la phase instantanée du signal. Soit  $f_0$  la fréquence porteuse, l'expression d'un signal modulé est:

$$s(t) = A(t) e^{j(2\pi f_0 t + \varphi(t))} \quad (4.4)$$

L'effet Doppler induit par le mouvement relatif entre le satellite et les utilisateurs, se manifeste par un décalage pour la fréquence porteuse du point de vue du récepteur. Des écarts de fréquence peuvent également provenir d'une désynchronisation en fréquence dans les terminaux. Ces effets correspondent à des perturbations sur la phase du signal complexe, qui doit être prise en compte dans l'équation du système.

Le signal reçu est démodulé à l'aide de la porteuse, et on appellera  $\Delta f$  l'écart de fréquence résiduel après démodulation:

$$\varphi(t) = 2\pi \Delta f(t) t + \theta(t)$$

#### 4.1.4 L'équation d'observation

En entrée de récepteur, le signal reçu en bande de base est de la forme:

$$y(t) = A(t) e^{j(2\pi \Delta f(t) t + \theta(t))} \sum_m d_m h(t - mT - \tau(t)) + n(t)$$

Alors, la sortie de l'échantillonneur à l'instant  $t = kT$  est de la forme:

$$y_k = h(\Phi_k) = A_k e^{j(2\pi \Delta f_k kT + \theta_k)} \sum_m d_m h(kT - mT - \tau_k) + n_k \quad (4.5)$$

- $\{d_k\}$  : message envoyé,
- $n_k$  : bruit additif blanc gaussien,
- $y_k$  : échantillons issus du canal discret équivalent.

La séquence modulée  $d_k$  du message envoyé, est organisée en trames de longueur  $N$  contenant un préambule et une terminaison comme dans [Wang 02][Yang 03], afin de remettre l'état du canal et de l'encodeur à zéro au début et à la fin de chaque trame.  $A$  représente l'amplitude du signal reçu,  $\theta$  représente le déphasage introduit par le canal,  $\Delta f$  désigne l'écart par rapport à la fréquence porteuse due à l'effet Doppler,  $\tau$  est la phase de l'horloge d'échantillonnage du récepteur. Le signal reçu est en outre entaché d'un bruit blanc additif gaussien  $n_k$  de puissance  $N_0$ . Définissons le RSB par le rapport  $E_b/N_0$  (rapport de l'énergie transmise par bit utile sur la densité spectrale de bruit) Le vecteur caractérisant le signal est donc de la forme:

$$\Phi_k = \{A_k, \Delta f_k, \theta_k, \tau_k, \{d_k\}\}$$

$$x_k = \{A_k, \Delta f_k, \theta_k, \tau_k\}$$

Si  $y(T)$  désigne les observations de signal sur l'intervalle  $[0...T]$ , le critère de maximum de vraisemblance consiste à chercher:

$$\hat{\Phi} = \arg \max_{\Phi} L(\Phi) = \arg \max_{\Phi} [\log p(y(T) | \Phi)] \quad (4.6)$$

Afin d'appliquer des architectures de récepteurs que nous allons voir plus loin, nous considérons un système simplifié réduit à l'estimation paramétrique. Nous supposons que la fonction d'observation dans l'Eq(4.5), se réduit à:

$$h(\Phi_k) = [h^R(\Phi_k) \quad h^I(\Phi_k)]$$

$$h_k^R(\Phi_k) = \Re(h_k(\Phi_k)) = A_k \cos(\theta_k + 2\pi \Delta f_k kT) \sum_m \Re(d_m) h(kT - mT - \tau_k)$$

$$- A_k \sin(\theta_k + 2\pi \Delta f_k kT) \sum_m \Im(d_m) h(kT - mT - \tau_k)$$

avec

$$h_k^I(\Phi_k) = \Im(h_k(\Phi_k)) = A_k \cos(\theta_k + 2\pi \Delta f_k kT) \sum_m \Im(d_m) h(kT - mT - \tau_k)$$

$$- A_k \sin(\theta_k + 2\pi \Delta f_k kT) \sum_m \Re(d_m) h(kT - mT - \tau_k) \quad (4.7)$$

### 4.1.5 Structure du récepteur

Les fonctions à mettre en œuvre dans une réception numérique peuvent s'articuler suivant plusieurs schémas, en fonction des caractéristiques du signal reçu, dans un seul objectif à savoir détecter le message envoyé par l'émetteur.

Parmi ces opérations il faut compter notamment:

1. Le filtrage en réception (adapté au filtre d'émission): dans les normes DVB-RCS, la mise en forme du signal est en racine de cosinus surélevé de roll-off 0.35.
2. L'estimation des paramètres du canal: l'égalisation du canal repose sur la connaissance du canal au récepteur. De la qualité de l'estimation dépendra l'efficacité de la transmission. Il est donc nécessaire de disposer de bons estimateurs.
3. La synchronisation de l'horloge: si nous faisons l'hypothèse que la récupération de l'horloge est effectuée, nous considérerons alors le signal reçu échantillonné sans interférence entre symboles.
4. La récupération de fréquence porteuse: l'erreur de fréquence peut être estimée sur le signal échantillonné après synchronisation de l'horloge. Une fois la fréquence et le rythme symbole récupérés, il faut encore estimer la référence de phase par rapport à laquelle la modulation est appliquée. La qualité de la synchronisation de phase a un impact sur les performances du décodeur canal.
5. Décodage de données: Le décodeur de source tente de reconstruire les informations de la source à partir de signal reçu et synchronisé.

### 4.1.6 Solution proposée

Les communications digitales présentent l'information à transmettre sous forme de séquences de symboles. Des symboles sources appartenant à un alphabet sont structurés en séquence codées  $u_i=(u_1, u_2, \dots)$  émises à travers un canal vers un récepteur. Comme dans tout système de communication physique, un signal continu correspondant à la séquence  $u$  est transmis, et non la séquence elle-même.

Le signal reçu dépend d'un ensemble de paramètres  $\Phi_i=\{x_i, u_i\}$  discrets et également continus relatifs à l'émission et à la transmission (amplitude, phase, retard d'enveloppe, ...). Ces paramètres sont inconnus du récepteur et peuvent subir une dérive au cours du temps.

Le signal reçu aussi, est de nature hybride et  $y(\Phi_i)$  dépend donc de deux signaux aléatoires  $u_i$  et  $x_i$ . Le but du récepteur est de détecter la séquence de symboles  $u_i$  la plus probable au vu des observations  $y(\Phi_i)$  altérées par un bruit additif.

Pour cela, il est nécessaire d'estimer conjointement  $u_i$  et  $x_i$  en maximisant la mesure de probabilité:

$$p(u_i, x_i / y(\Phi_i)) \quad (4.8)$$

Il apparaît dans les systèmes de réception actuellement mis en œuvre, que ce problème est formulé de façon décomposée. Dans un premier temps, l'estimation des paramètres aléatoires  $x$  est obtenue par des traitements classiques [Ascheid 82][Oerder 88]. Puis, cette valeur estimée est utilisée pour la détection des symboles  $u$ . Cela entraîne une perte significative de performance.

## 4.2 Types de codage du message

### 4.2.1 Introduction

La théorie de l'information est née en 1948 avec l'article de C. E. Shannon "A Mathematical Theory of Communication" [Shannon 48]. Cette théorie déterminait les limites de performance des systèmes de communication numérique, et anticipait notablement les besoins pratiques de ce type de communication.

Alors que Shannon a défini les limites d'une communication fiable, Hamming et Golay se sont intéressés au développement du premier système permettant un contrôle des erreurs, ce qui a donné naissance à la branche mathématique de la théorie du codage (coding theory) [Hamming 86]. Le mérite de la découverte du premier code permettant la correction des erreurs est attribué à Hamming, qui chercha un moyen pour coder les données d'entrées de manière à ce que les ordinateurs puissent non seulement détecter les erreurs mais également les corriger.

### 4.2.2 Principe des codes en bloc

Chaque famille de codes possède des caractéristiques et potentialités propres, bien qu'elles aient été développées en suivant le même principe: le regroupement des symboles d'entrée en blocs afin de leur ajouter une quantité contrôlée de redondance. En considérant le cas d'un code binaire linéaire  $(n,k)$ , la stratégie commune des codes en blocs est la modification de la représentation numérique des  $2^k$  messages possibles d'entrées. L'utilisation d'un espace de codage plus grand que celui utilisé pour représenter le message introduit la redondance nécessaire au codage de canal (Figure 4.3). Si la transformation d'un espace de codage à l'autre se passe de manière linéaire, le code est appelé code linéaire (*linear code*) [Lust 00].

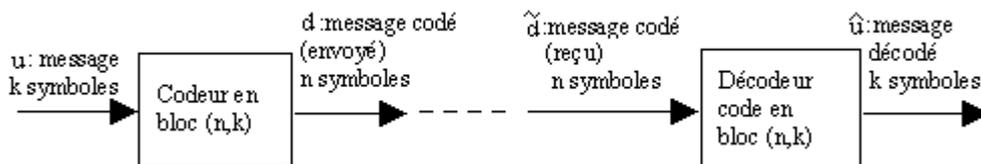


Fig 4. 3 : signaux d'entrée et de sortie du codage et du décodage des codes en blocs.

Chaque code linéaire  $(n,k)$  est normalement spécifié par le nombre de bits du message codé  $n$  et par le nombre  $k$  de bits du message original à protéger (appelés bits d'informations). Si la nouvelle représentation est formée par la simple concaténation d'un nombre de bits supplémentaires, le code est appelé systématique et les bits supplémentaires sont dénommés bits de parités. Le rapport entre les tailles de ces deux messages  $R_c = k/n$  est appelé rendement du code. Un codage en bloc linéaire est par conséquent une application linéaire  $g$  de la forme:

$$g = \left\{ \begin{array}{l} F^k \rightarrow F^n \\ u \rightarrow d = g(u) \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

où  $F$  est l'alphabet des éléments d'information.

Le message codé  $d$  est obtenu à partir de message d'information  $u$ , et la matrice de génératrice  $G_{n \times k}$  supposée systématique.

Malgré le succès du codage en bloc, ce type de codage comporte des inconvénients importants [Liew 02] [Vale 98]. Le regroupement du message en bloc implique normalement un retard dû à la nécessité de disposer de tous les symboles du message avant de procéder au codage ou au décodage. De plus, la procédure de décodage est affectée par un inconvénient supplémentaire: le décodeur a impérativement besoin de connaître la position du début et de la fin du message codé.

A l'origine, les procédures de décodage des codes en bloc ont ainsi été développées en envisageant le traitement de messages codés avec la même représentation numérique que le message provenant de la source d'information (situation du décodage ferme, *Hard Decoding*). Pourtant, dans le but d'atteindre les limites prédites par Shannon, l'utilisation d'une quantification moins rigide (situation du décodage souple ou pondéré, *Soft Decoding*) est devenue impérative.

Les principaux inconvénients du codage en bloc peuvent être évités par une approche différente de la problématique du codage: c'est le cas du **codage convolutif** [Vale 98].

### 4.2.3 Codes convolutifs

#### 4.2.3.1 Codeur élémentaire

Le code convolutif présenté par Elias en 1955, ajoute systématiquement de la redondance au message codé au fur et à mesure que les symboles du message (chacun formés de  $b$  bits) sont livrés au codeur. Le message codé se forme en utilisant un registre à décalage de longueur  $v$ , et  $\kappa = v+1$  est nommé longueur de contrainte du code. Chacune des sorties du codeur est égale au produit de convolution (d'où l'expression "convolutif") entre la suite binaire présente à l'entrée du codeur et la réponse de ce même codeur définie par ses séquences génératrices.

Les fonctions génératrices  $G=[G^1 G^2]$  décrivent les fonctions linéaires algébriques du code. La  $i^{\text{ème}}$  sortie, peut s'écrire, en fonction des bits entrés  $d^{(i)}=G^{(i)} \times u$ .

Les codes convolutifs ne se distinguent pas seulement sur la base de la longueur de contrainte, du rendement du code et des fonctions  $G^i$ , mais aussi selon la structure propre au registre à décalage. Un exemple de codeur convolutif est illustré à la Fig 4.4, où les séquences génératrices sont fréquemment exprimées en octal, donnent:

$$G(D)=\begin{bmatrix} 1+D^2 \\ 1+D+D^2 \end{bmatrix}$$

$$g_1=[1 0 1] = 7_{(\text{octal})} \quad g_2=[1 1 1] = 5_{(\text{octal})}$$

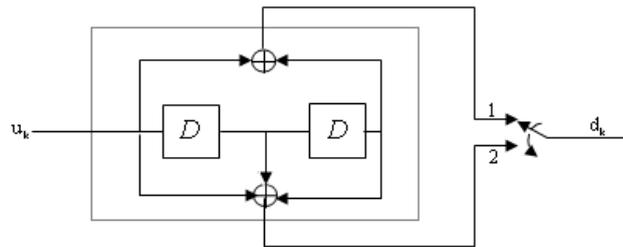


Fig 4. 4 : Codeur convolutif

Le rendement du code  $R_c$  indique le rapport entre les nombres de bits d'entrée  $k$  et le nombre de bits de sortie  $n$  soit  $R_c=k/n$ .

#### 4.2.3.2 La capacité de protection

Un important paramètre, caractérisant le code en bloc, est la distance minimale existant entre les divers messages codés [Proakis 95], qui se mesure par la distance de Hamming. La distance de Hamming  $d_{ij}$ , entre deux messages  $i$  et  $j$ , indique le nombre de cas où les symboles correspondants des deux messages sont différents. En utilisant cette notion, la distance minimale  $d_{\min}$  du code est définie comme la distance  $d_{ij}$  la plus petite existant entre les messages générés par le code en bloc:

$$d_{\min}=\min_{i \neq j} \{d_{ij}\} . \quad (4.10)$$

La capacité de correction des codes convolutifs est évaluée à partir de la distance minimale existante entre deux messages codés. Dans le contexte du codage convolutif, cette distance est appelée distance libre.

#### 4.2.3.3 Représentation du déroulement du codage

La représentation des codes convolutifs par les polynômes ou les matrices génératrices n'est pas réellement adaptée au décodage. Aussi pour réaliser les décodeurs, on utilise des représentations graphiques de ces codes de type diagramme en arbre, diagramme d'état ou treillis.

● **Diagramme en arbre**

Lorsque l'élément à l'entrée du codeur est 0 (resp. 1), le couple binaire en sortie de codeur étiquette une branche montante (resp. descendante). Ces branches sont liées en des points appelés nœuds. Pour une séquence d'information fournie à l'entrée du codeur, la séquence associée en sortie du codeur correspond à un chemin de l'arbre qui est constitué d'une succession de branches.

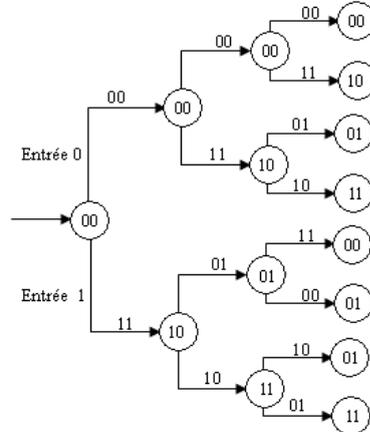


Fig 4. 5: Diagramme en arbre du codeur convolutif

● **Diagramme en treillis (Trellis Diagram)**

Cette représentation correspond à la façon dont communiquent les états entre eux en fonction du temps. Sur la Figure 4.6, les liens (branches) entre états représentés en pointillés et en traits pleins correspondent respectivement à la présence d'un bit d'information égale à 0 et 1. Chacune de ces branches fournit un couple de bits pour la sortie du codeur.

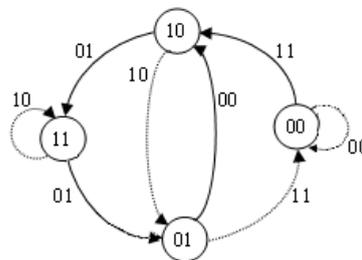


Fig 4. 6: Diagramme d'état du codeur convolutif

● **Diagramme d'état (State Diagram)**

La Figure 4.7 représente un tel diagramme et se singularise par rapport aux deux représentations précédentes par le fait qu'elle n'utilise pas un axe temporel de façon explicite. Elle ne présente que les différents états du codeur et leurs liens.

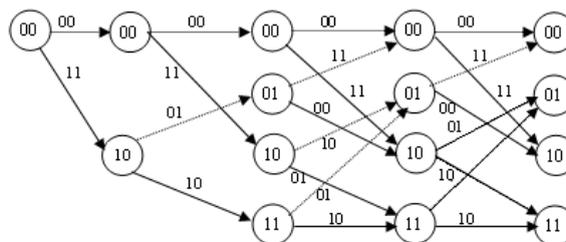


Fig 4. 7: Diagramme en treillis du codeur convolutif

La représentation en treillis est très efficace pour le décodage car elle est parfaitement adaptée aux algorithmes de type BCJR ou SOVA et est notamment utilisée par les turbo-codes.

### 4.2.1.1 Codes convolutifs récurrents systématiques

Un code convolutif est dit *récurrent* (RC) lorsque ses polynômes générateurs sont remplacés par les quotients de deux polynômes. Une partie de la sortie est alors réintroduite dans le registre à décalage selon les connexions définies par les polynômes situés aux dénominateurs. Un code convolutif est dit *systématique* (SC), lorsque une partie de ses sorties est exactement égale à ses entrées, le cas contraire représente un code *non systématique* (NSC). Un exemple d'un code récurrent systématique est illustré par la Figure 4.8:

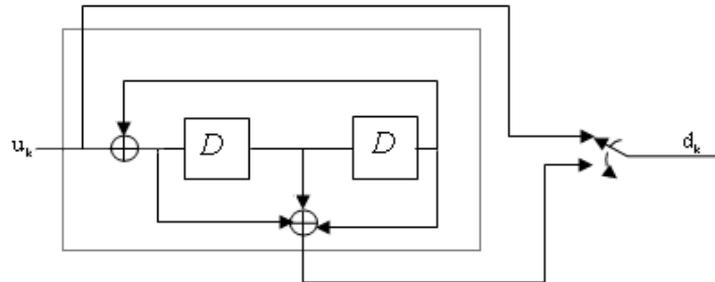


Fig 4. 8 : code récurrent systématique (RSC)

Les codes récurrents systématiques (RSC), combinent deux avantages (Figure 4.9), par rapport aux autres codes :

- des distances minimales importantes.
- le bon comportement à faible rapport signal/bruit

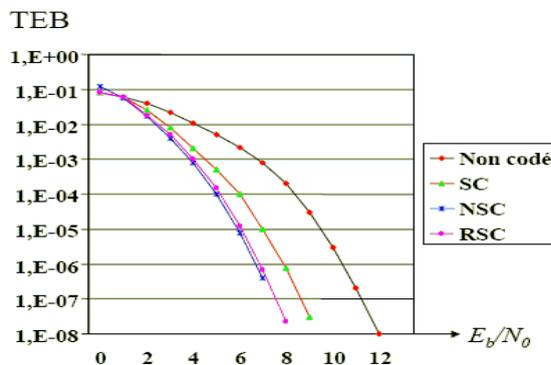


Fig 4. 9: Taux d'erreurs binaires, codes récurrents systématiques

## 4.2.4 Fermeture de treillis

### 4.2.4.1 Insertion de bits de terminaison

En raison de "l'effet mémoire" du codage convolutif, le caractère univoque du codage ne peut être obtenu au début de la procédure de codage que par l'attribution de zéro à cette mémoire ( $v$  symboles).

Du point de vue du décodage, la connaissance des valeurs de ces bits de terminaison permet une ultérieure amélioration des capacités de correction d'erreurs. Ces valeurs déterminent l'état final de la mémoire du codeur, ce qui représente une information importante pour l'opération de décodage. On entendra par conditions d'arrêt de la procédure de codage, les informations tirées du codage de ces bits de terminaison, la valeur de ces bits étant fixée a priori.



Alors, une étape de pré-codage est nécessaire pour chaque message, afin de connaître la valeur de l'état initial ( identique à l'état final), calculé comme suit:

- 1- Le codeur est initialisé à l'état  $\xi_0 = 0$ , puis le message est encodé une première fois. L'état final est alors  $\xi_0^N$ .
- 2- L'état de circulation  $\xi_c$  peut ensuite être calculé à partir de l'expression (4.15), avec I la matrice identité et G la matrice génératrice de transition du code.
- 3- Le codeur est initialisé par l'état de circulation, et le message est ensuite ré-encodé pour produire les bits redondants.

Cette technique, utilisée dans un turbo code, permet une meilleure convergence du processus de décodage itératif et réduit la sensibilité vis-à-vis du poinçonnage pour l'obtention de rendements élevés.

#### 4.2.5 Algorithmes le décodage SISO

Le décodage algébrique, essentiellement utilisé pour fournir une forte protection contre les petits niveaux de bruit, repose sur des techniques d'algèbre abstraite. Ce décodeur implique essentiellement des opérations "ou exclusif" alors que le décodage probabiliste, plutôt approprié pour fournir une protection modérée contre les hauts niveaux de bruit, repose sur des techniques de décision statistique.

Le décodage SISO ("Soft-In Soft-out") est réalisé par un réseau où les valeurs des bits sont représentés par des tensions. Ici, les valeurs disponibles en sortie de canal servent à initialiser le réseau de décodage.

Pour le canal gaussien, on peut calculer simplement les performances du décodage canal lorsque l'on connaît la famille de codes utilisée et le type de décodage utilisé (Maximum de vraisemblance (MV) ou Maximum à Posteriori (MAP) [Wang 02]). Nous présentons donc les mesures classiques de performances utilisées pour caractériser le système de transmission : le taux d'erreur bit moyen (TEB) et taux d'erreur trame (ou paquet TEP). Ce sont les deux mesures de performances les plus couramment employées.

Nous considérons deux familles d'algorithmes de décodage SISO pour les codes convolutifs:

- Les algorithmes basés sur l'algorithme de Viterbi.
- L'algorithme MAP (Maximum A posteriori) et ses approximations.

L'objectif de cette section est de présenter des algorithmes SISO pratiques calculant des rapports de vraisemblance logarithmiques bit à bit au sens du MAP ou des approximations convenables. Tous les turbo codes à base de codes convolutifs peuvent être décodés itérativement en utilisant l'un des algorithmes présentés.

##### 4.2.5.1 Rapports de Vraisemblance Logarithmiques

Soit le modèle de la chaîne de transmission suivante:

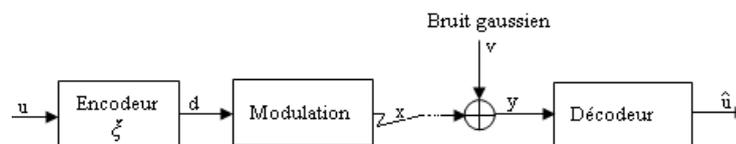


Fig 4. 12: Chaîne de transmission

Considérons une transmission utilisant la modulation BPSK (binary phase shift keying), sur le canal BABG (bruit additif blanc gaussien):

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= f_k(\xi_k, u_k) \\ x_{k+1} &= x_k \\ y_k &= h_k(x_k, \xi_k) + n_k \end{aligned} \quad (4.16)$$

Où  $\xi_k$  désigne l'état de codeur convolutif à l'instant  $k$  et  $n_k$  représente l'échantillon de bruit ayant une distribution gaussienne centrée d'écart type  $\sigma$ . Soit  $P(d = 0)$  (resp.  $P(d = 1)$ ) la probabilité a priori que le digit émis soit un 0 (resp. un 1). Les probabilités a posteriori ou vraisemblances sont calculées à partir du théorème de Bayes' comme suit:

$$\begin{aligned}
p(d=0/y) &= \frac{p(y/d=0)p(d=0)}{p(y)} \\
p(d=1/y) &= \frac{p(y/d=1)p(d=1)}{p(y)}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Définissons le rapport de vraisemblance logarithmique:

$$\begin{aligned}
\Lambda(d) &= \ln\left(\frac{p(d=0/y)}{p(d=1/y)}\right) = \ln\left(\frac{p(y/d=0)}{p(y/d=1)}\right) + \ln\left(\frac{p(d=0)}{p(d=1)}\right) \\
\Lambda(d) &= \Lambda(y/d) + \Lambda_a(d)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$\Lambda(y/d)$  est le rapport de vraisemblance logarithmique du canal et  $\Lambda_a(d)$  est le rapport de vraisemblance logarithmique a priori.

Le critère de décision au sens du MAP peut s'écrire, à partir de rapport de vraisemblance qui représente la décision souple, par:

$$\hat{d} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Lambda(d) > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.19}$$

Les algorithmes recherchant le message le plus probable analysent la séquence des changements d'états  $\xi \in \{\xi_1, \dots, \xi_M\}$  que la mémoire du codeur convolutif subit pendant l'opération de codage. L'objectif de ces algorithmes est l'identification de la séquence  $\hat{\xi}$  statistiquement la plus probable, par rapport à la séquence d'observation reçus  $Y_1^k$ ,  $\hat{\xi}$  donné par:

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_k &= \arg \max_{\xi} \max_{i=1..M} [p(\xi^i / Y_1^k)] = \arg \max_{\xi} \max_{i=1..M} \left[ \frac{p(Y_1^k / \xi^i) p(\xi^i)}{p(Y_1^k)} \right] \\
&= \arg \max_{\xi} \max_{i=1..M} [p(Y_1^k / \xi^i) \cdot p(\xi^i)]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

La succession des symboles d'information, qui produisent une telle séquence est ensuite identifiée grâce à  $\hat{\xi}$

#### 4.2.5.2 Algorithme de Viterbi

L'algorithme de Viterbi a été présenté en 1967 par A. J. Viterbi pour le décodage des codes convolutifs [Viterbi 67]. Le principe de cet algorithme consiste à estimer les transitions, qui se sont produites dans la mémoire du codeur convolutif pendant le codage. L'estimation se base sur le principe du maximum de vraisemblance, qui permet d'identifier le message **globalement** le plus probable.

On suppose que chaque chemin dans le treillis peut représenter par un suit d'états comme:  $(0, \xi_1, \dots, \xi_T, 0)$ , la probabilité correspond à un unique mot de code  $X_1^T$ , s'écrit par:

$$\begin{aligned}
p(Y/X) &= p(Y_1^T / X_1^T) \\
&= \prod_{i=0}^T p(y_i / x_i) \\
&= \prod_{i=0}^T \prod_{i=0}^{n-1} p(y_i^i / x_i^i)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

avec  $x_i = h(\xi_i)$ ,  $x_i \in R^n$

Pour un canal Gaussien

$$\log p(Y/X) = \sum_{i=0}^T \log \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i^i - y_i^i)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - n \log(\sigma) - \sum_{t=0}^T \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_t^i - y_t^i)^2}{2\sigma^2} \quad (4.22)$$

On définit la métrique de chemin de l'état (métrique cumulée), sous la forme:

$$M_t = \log p(Y_t / X_t) \quad (4.23)$$

qui est donnée par l'équation réursive:

$$M_t = M_{t-1} + \gamma_t \quad (4.24)$$

La modélisation de la procédure de codage par un processus de Markov offre la possibilité d'exploiter ses propriétés, en particulier les deux suivantes:

- La probabilité qu'un processus de Markov soit dans un état particulier, étant donné tous les états précédents, est égale à la probabilité que le processus soit dans cet état, étant donné l'état précédent.
- Dans un environnement perturbé par un bruit blanc, la probabilité de la n<sup>ème</sup> observation particulière étant donné la succession complète des transitions entre les états, est égale à la probabilité de l'observation étant donné uniquement la transition entre la profondeur t-1 et t [Vale 98]. Appelons métrique de branche la quantité:

$$\gamma_t(\xi', \xi) = p(\xi_t = \xi, Y_t / \xi_{t-1} = \xi') \quad (4.25)$$

La métrique cumulée en l'état m à l'instant t, se calcule de façon réursive par:

$$M_t(\xi) = \max_{\xi'} \{M_{t-1}(\xi') + \gamma_t(\xi', \xi)\} \quad (4.26)$$

Le déroulement de l'algorithme de Viterbi implique ainsi les étapes suivantes:

1. à t=0, les métriques cumulées de tous les états sont initialisées selon les connaissances (a priori) des conditions de départ du processus analysé:

$$\begin{aligned} M_0(0) &= 0 \\ M_0(\xi) &= -\infty \quad \xi \neq 0 \end{aligned}$$

2. incrémenter le temps t de 1

- Calculer les métriques de branche pour chaque nœud à l'instant t, à partir des observations du canal.
- Calculer les métriques cumulées en chaque état, à partir de relation (4.25)
- Comparer pour chaque état les chemins, et déterminer le chemin le plus probable (survivant). Ce survivant est assigné au nœud, et les informations nécessaires à la reconstruction du chemin survivant, qui représente le chemin avec la meilleure métrique  $M_t(\hat{\xi}_0, \dots, \hat{\xi}_t = \xi)$ , sont sauvegardées.

- Répéter l'étape 2, jusqu'à t=K

3. le chemin survivant représenté par la suite des nœuds  $\hat{\xi} = \hat{\xi}_0, \dots, \hat{\xi}_K$  est le chemin le plus vraisemblable.

Alors cet algorithme permet de trouver le mot de code le plus probable (décision dure), parmi tous les chemins dans de treillis.

Puisque l'algorithme de Viterbi produit des décisions binaires, alors il ne peut être utilisé pour le décodage itératif, mais il peut être modifié pour produire des décisions pondérées. On appelle alors cet algorithme modifié SOVA (Soft-Output Viterbi Algorithm).

Ceci s'effectue en calculant des rapports de vraisemblance logarithmiques a posteriori bit à bit en trouvant le chemin concurrent de plus grande métrique [Ryan 93].

#### 4.2.5.3 Algorithme de Viterbi à sortie souple (SOVA)

L'algorithme de Viterbi peut être modifié afin de fournir à sa sortie une valeur de confiance ou de fiabilité (approximant une probabilité a posteriori) associée à chaque bit décodé. La valeur des bits décodés est toujours donnée par le chemin ayant la métrique cumulée minimale  $M_t(\xi)$  fournie par l'algorithme classique.

La probabilité que le chemin  $\xi$  soit émis sachant les observations est proportionnelle à la probabilité conditionnelle de l'observation sachant le chemin  $\xi$  émis. Notons  $M_t^0$  la métrique du chemin de métrique cumulée la plus faible tel que  $d_t=0$ . De même, Notons  $M_t^1$  la métrique du chemin de métrique cumulée la plus faible tel que  $d_t=1$ . Alors le rapport de vraisemblance logarithmique du bit  $d_t$  est approximé par:

$$\Lambda(d_t) = \ln \left( \frac{p(d_t=0/Y_t^i)}{p(d_t=1/Y_t^i)} \right) \approx M_t^0 - M_t^1$$

Cette valeur s'appelle la décision souple correspondant au bit  $d_t$ .

#### 4.2.5.4 Algorithme BCJR

L'algorithme *BCJR*, nommé d'après ses auteurs [Bahl 74], a été présenté en 1974 comme une solution alternative pour le décodage de codes convolutifs. Le critère de décodage de cet algorithme est la **minimisation** de la probabilité d'erreur de chaque symbole du message. L'algorithme est ainsi capable de fournir, en plus des décisions fermes, une estimation de la fiabilité du décodage, qui se base sur la probabilité a posteriori du bit concerné. Par conséquent, dans certaines publications, la méthode est citée aussi sous le terme d'algorithme Maximum a Posteriori (MAP).

$$\Lambda(d_k) = \ln \left\{ \frac{\sum_{u \in U_k^+} p(y/u) P(u)}{\sum_{u \in U_k^-} p(y/u) P(u)} \right\}$$

où  $B_k^+$  est l'ensemble des transitions correspondant à  $x_t=1$  et  $B_k^-$  l'ensemble des transitions correspondant à  $x_t=0$  (Ici,  $B_k = B_k^+ \cup B_k^-$ ). La probabilité a posteriori que  $x_t=0$  et  $x_t=1$  s'écrit alors:

$$\Lambda(d_k) = \ln \left\{ \frac{\sum_{(\xi, \xi') \in B_k^+} p(\xi_k = \xi', \xi_{k+1} = \xi, Y)}{\sum_{(\xi, \xi') \in B_k^-} p(\xi_k = \xi', \xi_{k+1} = \xi, Y)} \right\} \quad (4.27)$$

L'équation (4.27) représente le rapport de vraisemblance logarithmique, de plus on a:

$$\begin{aligned} p(\xi_k = \xi', \xi_{k+1} = \xi, Y) &= p(\xi_k = \xi', \xi_{k+1} = \xi, Y_{t < k}, y_k, Y_{t > k}) \\ &= p(Y_{t > k} / \xi', \xi, y_k, Y_{t < k}) p(\xi', \xi, y_k, Y_{t < k}) \\ &= p(Y_{t > k} / \xi', \xi, y_k, Y_{t < k}) p(\xi, y_k / \xi', Y_{t < k}) p(\xi', Y_{t < k}) \\ &= p(Y_{t > k} / \xi) p(\xi, y_k / \xi') p(\xi', Y_{t < k}) \end{aligned}$$

Définissons les probabilités suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha_k(\xi') &= p(\xi_k = \xi' / Y_{t < k}) \\ \beta_{k+1}(\xi) &= p(Y_{t > k} / \xi_k = \xi) \\ \gamma_k(\xi, \xi') &= p(\xi_k = \xi, y_k / \xi_{k+1} = \xi') \end{aligned}$$

Alors

$$p(\xi_k = \xi', \xi_{k+1} = \xi, Y) = \beta_{k+1}(\xi) \gamma_k(\xi, \xi') \alpha(\xi')$$

A partir de cette équation, on peut récrire l'équation de (4.27) de la forme:

$$\Lambda(d_k) = \ln \left\{ \frac{\sum_{(\xi, \xi') \in B_k^+} \beta_{k+1}(\xi) \gamma_k(\xi, \xi') \alpha(\xi')}{\sum_{(\xi, \xi') \in B_k^-} \beta_{k+1}(\xi) \gamma_k(\xi, \xi') \alpha(\xi')} \right\} \quad (4.28)$$

Le calcul de la probabilité  $\alpha_i(m)$  admet une forme réursive:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1}(\xi) &= p(\xi_k = \xi / Y_{t < k+1}) = \sum_{\xi' \in B_k} p(\xi', \xi, Y_{t < k+1}) \\ &= \sum_{\xi' \in B_k} p(\xi, y_k / \xi', Y_{t < k}) p(\xi', Y_{t < k}) \\ &= \sum_{\xi' \in B_k} p(\xi, y_k / \xi') p(\xi', Y_{t < k}) \\ &= \sum_{\xi' \in B_k} \gamma_k(\xi', \xi) \alpha_k(\xi') \end{aligned} \quad (4.29)$$

De même  $\beta_i(m)$  est obtenu de façon réursive

$$\beta_k(\xi) = \sum_{\xi' \in B_{k+1}} \gamma_{k+1}(\xi', \xi) \beta_{k+1}(\xi') \quad (4.30)$$

La métrique de branche a pour expression:

$$\begin{aligned} \gamma_k(\xi, \xi') &= p(\xi_k = \xi, y_k / \xi_{k+1} = \xi') = \frac{p(\xi, y_k, \xi')}{p(\xi')} \\ &= \left[ \frac{p(\xi_k = \xi, \xi_{k+1} = \xi')}{p(\xi_{k+1} = \xi')} \right] \left[ \frac{p(\xi_k = \xi, \xi_{k+1} = \xi', y_k)}{p(\xi_k = \xi, \xi_{k+1} = \xi')} \right] \\ &= p(\xi_k = \xi / \xi_{k+1} = \xi') p(y_k / \xi_k = \xi, \xi_{k+1} = \xi') \end{aligned} \quad (4.31)$$

où  $p(\xi_k = \xi / \xi_{k+1} = \xi')$  la probabilité a priori d'une transition de l'état  $\xi$  vers l'état  $\xi'$  à l'instant  $k$ ,

$p(y_k / \xi_k = \xi, \xi_{k+1} = \xi')$  la probabilité de transition du canal

Prenons l'exemple d'un canal avec bruit gaussien additive:

$$\begin{aligned} \gamma_k(\xi, \xi') &= p(y_k / \xi_k = \xi, \xi_{k+1} = \xi') = p(u_k) p(y_k / \hat{y}_k) \\ &= p(u_k) \left( \sqrt{\frac{E_s}{\pi N_0}} \right)^n e^{-\frac{E_s}{N_0} \|y_k - \hat{y}_k\|^2} \end{aligned}$$

Notons que l'algorithme BCJR peut aussi être appliqué au décodage SISO des codes en bloc. Ceci est dû au fait que tout code en bloc admet une représentation en treillis [Bahl 74]. Nous pouvons maintenant résumer les opérations d'un décodeur de type BCJR, par trois étapes:

1- Calculer les métriques de branche: pour  $k=1,2,\dots,K$  et  $\xi, \xi'=0, \dots, M-1$  à partir des observations et des probabilités a priori des bits d'information, suivant la relation (4.31).

2-Traitement aller

. Initialisation à l'instant  $t=0$  par:

$$\begin{aligned}\alpha_0(0) &= 1 \\ \alpha_0(\xi) &= 0 \quad \xi \neq 0\end{aligned}$$

- Calculer  $\alpha_t$  pour tous les états  $\xi=0, \dots, M-1$  selon la relation (4.29).

3- Traitement retour

Initialisation à l'instant  $t=K$  par:

$$\begin{aligned}\beta_K(0) &= 1 \\ \beta_K(\xi) &= 0 \quad \xi \neq 0\end{aligned}$$

Calculer  $\beta_t$  pour tous les états  $\xi=0, \dots, M-1$  selon la relation (4.30).

4- Calcul des rapports de vraisemblance logarithmiques: a posteriori bit à bit par le calcul de probabilités marginales sur toutes les transitions dans la représentation en treillis du code, par la relation (4.27)

#### 4.2.5.5 Approximations de l'algorithme MAP

Si on se place dans le domaine logarithmique, où l'on a:

$$\log(e^a + e^b) = \max(a, b) + \log(1 + e^{-|a-b|})$$

La méthode Max-log-MAP est en fait une approximation de la précédente, en utilisant l'approximation suivante:

$$\log(e^{a_1} + e^{a_2} + \dots + e^{a_n}) \approx \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (a_i)$$

On introduit alors cette approximation qui est à la base de la simplification de la méthode.

$$\bar{y}_k(\xi, \xi') = \log \gamma_k(\xi, \xi') \quad \bar{\alpha}_k(\xi) = \log \alpha_k(\xi) \quad \bar{\beta}_k(\xi) = \log \beta_k(\xi)$$

La relation (4.29) devient:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{k+1}(\xi) &= \log \sum_{\xi' \in B_k} e^{\bar{y}_k(\xi', \xi) + \bar{\alpha}_k(\xi')} \\ \bar{\alpha}_{k+1}(\xi) &\approx \max_{\xi'} \{ \bar{y}_k(\xi', \xi) + \bar{\alpha}_k(\xi') \}\end{aligned} \quad (4.32)$$

De façon similaire la relation (4.30) donne,

$$\bar{\beta}_k(\xi) \approx \max_{\xi'} \{ \bar{y}_{k+1}(\xi', \xi) + \bar{\beta}_{k+1}(\xi') \} \quad (4.33)$$

Par conséquent l'équation (4.28) peut écrire sous la forme suivante:

$$\Lambda(d_k) = \max_{(\xi, \xi') \in B_k^+} \{ \bar{\beta}_{k+1}(\xi) + \bar{y}_k(\xi, \xi') + \bar{\alpha}(\xi') \} - \max_{(\xi, \xi') \in B_k^-} \{ \bar{\beta}_{k+1}(\xi) + \bar{y}_k(\xi, \xi') + \bar{\alpha}(\xi') \} \quad (4.34)$$

L'algorithme du Bahl reste valable à condition de changer les relations {(4.28), (4.29), (4.30)} par {(4.34), (4.32), (4.33)} respectivement, et les conditions initialisation sont les suivantes:

$$\begin{aligned}\beta_K(0) &= 0 \\ \beta_K(\xi) &= -\infty \quad \xi \neq 0 \\ \alpha_0(0) &= 0 \\ \alpha_0(\xi) &= -\infty \quad \xi \neq 0\end{aligned}$$

### 4.2.6 Principe des Codes concaténés (CC)

Nous nous restreindrons à des CC faisant intervenir des codes systématiques séparés par un entrelaceur, et nous distinguons deux types de codes concaténés illustrés par la Figure 4.13 :

- Les codes concaténés en série («serially concatenated codes» (SCC) en anglais) [Benedetto 96] [Forney 66]. Le codeur extérieur chargé du premier codage du message, et la sortie de ce premier encodeur est fournie à un codeur interne qui délivre à sa sortie le mot de code final

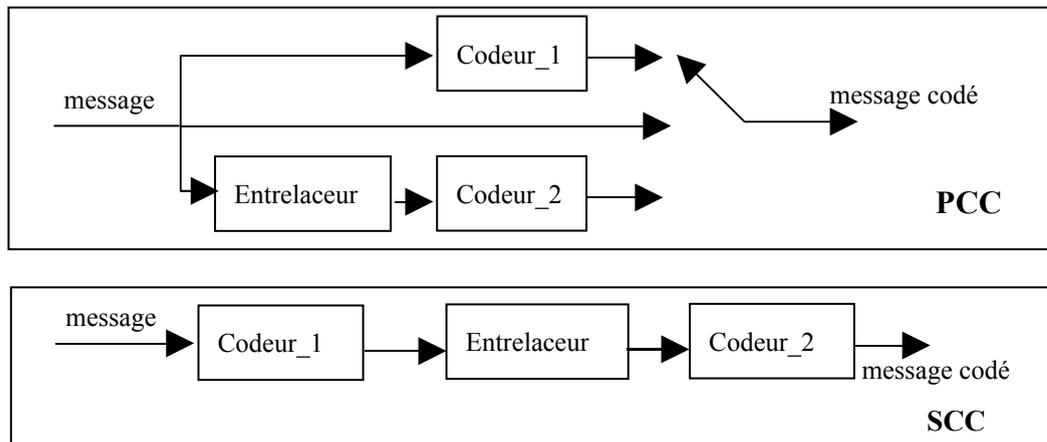


Fig 4. 13: Code concaténé a) en parallèle b) en série.

- Les codes concaténés en parallèle («parallel concatenated codes" (PCC) en anglais) [Forney 66]. Les  $k$  bits informatifs sont fournis au premier encodeur (de rendement  $R_1$ ), ensuite ils sont permutés par un entrelaceur. Les bits entrelacés sont fournis au second encodeur ( de rendement  $R_2$ ). Le mot de code final est formé en multiplexant les bits informatifs avec les bits redondants, le rendement du PCC résultant  $R_p$  est donné par :

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - 1$$

Quant au SCC le rendement global  $R_c$  du code ainsi construit est directement lié aux rendements  $R_1$  et  $R_2$  par la relation :

$$R_c = R_1.R_2$$

#### ■ Entrelacement

L'entrelaceur effectue une permutation sur les données émises  $u_i$ . On se reportera à l'ouvrage de C.H. Heegard et S. B. Wicker, [Heegard 99], pour une discussion détaillée de l'intérêt des différents types de permutations. Il semble que les meilleures performances soient obtenues par une permutation aléatoire (mais pré calculée), mais on peut envisager d'autres permutations comme le «bit Reversal».

La complexité du processus de décodage ainsi que de ses performances sont étroitement liées à la taille et à la nature de l'entrelaceur. Un entrelaceur long conduit à de meilleures performances en puissance mais il nécessite plus de ressources et de temps de calcul et induit un retard plus important. L'écart des performances entre les configurations avec et sans entrelaceur justifie bien le rôle majeur de l'entrelaceur. Cet écart en performances s'explique essentiellement par l'hypothèse de décorrélation des entrées du SISO du code convolutif qui n'est plus vérifiée en l'absence de l'entrelaceur.

#### ■ Poinçonnage des bits systématiques

La concaténation parallèle de deux codes convolutifs récursifs avec poinçonnage des bits systématiques a été proposée par Benedetto, Divsalar, Montorsi et Pollara [Benedetto 96]. L'idée de base est de poinçonner les symboles de sortie de chaque codeur et de sélectionner le motif de poinçonnage de telle

sorte que les symboles de sortie du code global avec concaténation parallèle ne contiennent l'information d'entrée qu'une seule fois [Robertson 96].

## 4.2.7 Système de correction d'erreur dans la norme DVB-RCS

### 4.2.7.1 Turbo-codage duo-binaire

L'idée consiste à concaténer plusieurs codes simples pour obtenir un code composite puissant. Cette famille de codes offre des hautes performances proches de la limite théorique de Shannon, tout en conservant une complexité de décodage raisonnable. Le turbo-code proposé pour les applications DVB-RCS est un turbo-code duo binaire. Il fait appel à la concaténation parallèle de deux codes convolutifs systématiques récursifs à huit états (mémoire  $\nu = 3$ ) séparés par un entrelaceur non uniforme de taille  $212 \times 2$  (correspondant à une ATM de 53 bytes), comme l'illustre la figure 4.14

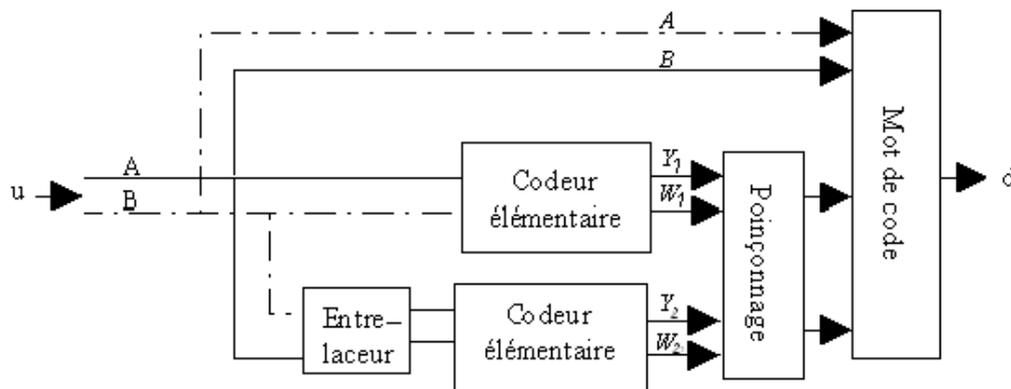


Fig 4. 14: Structure d'un turbo-codeur duo-binaire

Un codeur élémentaire est un alors codeur systématique récursif à deux entrée (A,B) et quatre sorties (A,B,Y1,W1), deux sorties systématiques, et deux autres codées. Le tout est illustré par la figure suivante:

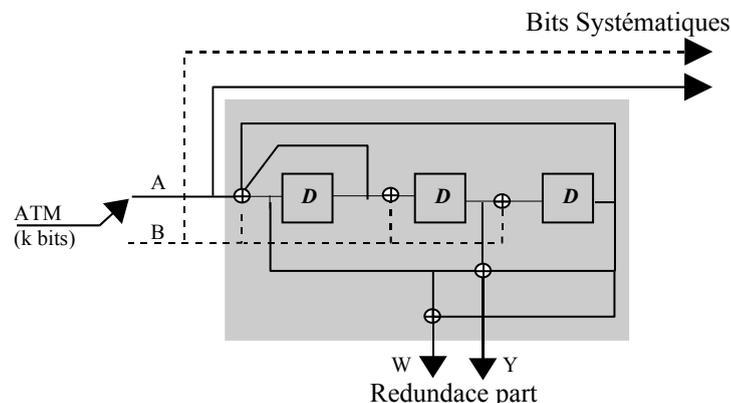


Fig 4. 15: Codeur élémentaire du turbo-code DVB-RCS

Les avantages de cette construction duo binaire, par rapport aux turbo codes binaires classiques, sont nombreux : meilleure convergence du décodage itératif à bruit élevé, distance minimale plus élevée, moindre sensibilité aux défauts du décodeur, latence réduite, etc.

Ces turbo codes ont d'ores et déjà donné lieu à une standardisation pour la voie retour DVB par satellite [DVB 03]. Des exemples de performances de ce turbo code, qui utilise un treillis élémentaire à 8 états, seront fournis et commentés.

### 4.2.7.2 Diagramme en treillis

Le diagramme de treillis est une variante du diagramme de transition qui représente à un instant donné, les transitions possibles entre états ainsi que les sorties correspondantes de l'encodeur. La Figure 4.16 donne une section du treillis associé au code de la Figure 4.15.

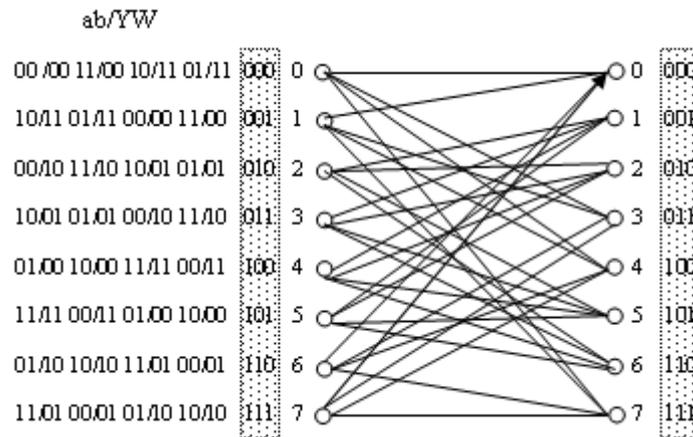


Fig 4. 16: Treillis correspondant a l'encodeur de la Figure 4.15

### 4.2.7.3 Ordre de transmission

La concaténation de plusieurs codeurs convolutifs en parallèle consiste à relier deux codeurs identiques de type convolutif, séparés par un entrelaceur. Dans le cas des Codes Turbo, les deux codeurs, sont de type convolutif récursif systématique (RSC).

La Fig. 4.17 illustre l'encodage et l'ordonnancement des bits encodés dans le cas de la norme DVB-RCS.

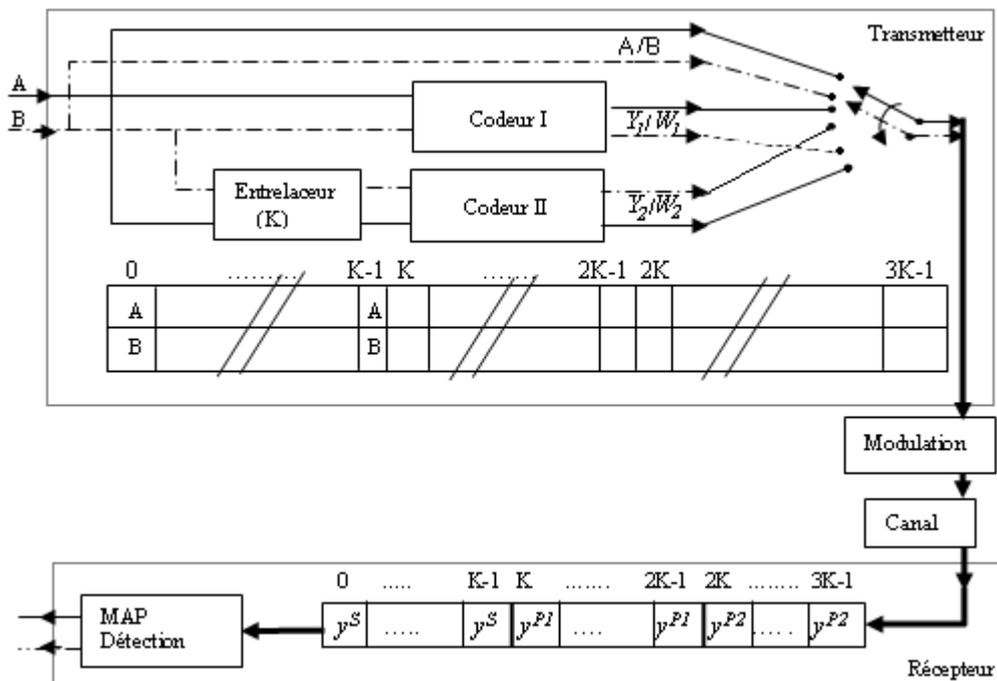


Fig 4. 17: Données encodées (norme DVB-RCS)

A l'instant  $k$  le symbole  $d_k=(A_k, B_k)$  modulé en QPSK est envoyé sur le canal. L'observation bruitée en sortie du filtre de réception est noté  $y_k^S$ . Le symbole  $d_k$  est ensuite codé par le premier encodeur, lequel produit les bits de parité  $(y_1, w_1)$  qui après modulation QPSK et passage dans le canal correspondent à  $y_k^{P1}$ .

Tous les symboles  $d_k$ , pour  $k=0..K-1$  sont ensuite entrelacés et codés par le second codeur qui produit les bits de parité  $(y_2, w_2)$ , qui après modulation QPSK et passage dans le canal correspondent à  $y_k^{P2}$ .

Le rendement nominal d'un turbo-code ainsi constitué est  $R = 1/3$ . Il est possible de le faire varier en effectuant une étape de poinçonnage.

#### 4.2.7.4 Entrelaceur

L'entrelaceur a pour but de casser les paquets d'erreurs issus du décodage courant afin de faciliter le travail du décodeur suivant. Dans la norme DVB-RCS, La permutation est faite à deux niveaux en parallèle [Douillard 00], à l'intérieur les couples (niveau 1), et entre les couples (niveau 2) [DVB 03]

Niveau 1:

Inverser les couples paires: pour  $j=0..N-1$ . avec  $N=k/2$

$$(A, B)_j \Rightarrow (B, A)_j \quad \text{si } (j \bmod 2) = 0$$

$$(A, B)_j \Rightarrow (A, B)_j \quad \text{sinon}$$

Niveau 2:

Pour  $j=0..N-1$ .  $(A_j, B_j) \rightarrow (A_i, B_i)$

avec  $i = \Pi(j)$  qui donné par:

$$i = (P_0 \cdot j + Q(j) + 1) \bmod N$$

avec

| $j \bmod 4$ | 0 | 1           | 2     | 3           |
|-------------|---|-------------|-------|-------------|
| $Q(j)$      | 0 | $N/2 + P_1$ | $P_2$ | $N/2 + P_3$ |

Les paramètres  $P_0, P_1, P_2, P_3$  varient en fonction de  $N$ , pour optimiser le comportement du turbo-code:

|         | $P_0$ | $\{P_1, P_2, P_3\}$ |
|---------|-------|---------------------|
| $N=48$  | 11    | {24,0,24}           |
| $N=64$  | 7     | {34,32,2}           |
| $N=212$ | 13    | {106,108,2}         |
| $N=220$ | 23    | {112,4,116}         |
| $N=228$ | 17    | {116,72,168}        |
| $N=424$ | 11    | {6,8,2}             |
| $N=432$ | 13    | {0,4,8}             |
| $N=440$ | 13    | {10,4,2}            |
| $N=848$ | 19    | {2,16,6}            |
| $N=856$ | 19    | {428,224,652}       |
| $N=864$ | 19    | {2,16,6}            |
| $N=752$ | 19    | {376,224,600}       |

#### 4.2.7.5 poinçonnage

Le rendement maximum du turbo-code est  $1/3$  ou  $1/2$  selon que l'on utilise les deux sorties  $(Y, W)$  ou seulement la sortie  $Y$ . Une façon d'augmenter le rendement du code consisterait à augmenter le nombre d'entrées  $m$  de chaque encodeur. Cependant, une augmentation du nombre d'entrées engendre une augmentation exponentielle de la complexité de l'algorithme de décodage. On préfère généralement appliquer un processus de poinçonnage en sortie des deux encodeurs. Dans le cas d'une concaténation parallèle de codes systématiques, ce processus n'affecte que les bits redondants. L'augmentation de rendement obtenue est cependant payée par une dégradation des performances.

Ce procédé augmente le rendement de chaque encodeur en supprimant de façon périodique certains bits redondants en sortie. Le décodage utilise le même algorithme qu'en l'absence de poinçonnage, mais en ajoutant aux observations reçues des 0 fictifs correspondant aux places poinçonnées. La figure 4.18 illustre le

poinçonnage avec  $N$  paires de bits informatifs [DVB 03]. A partir d'encodeurs à deux sorties (Y,W) le rendement du turbo-code résultant est

$$R = \frac{N}{2 \times N + N_w} \quad N_w: \text{nombre de sorties W non-poinçonnées.}$$

De même pour des encodeurs à une seule sortie Y, le rendement devient :

$$R = \frac{N}{N + N_y} \quad N_y: \text{nombre sorties Y non-poinçonnées.}$$

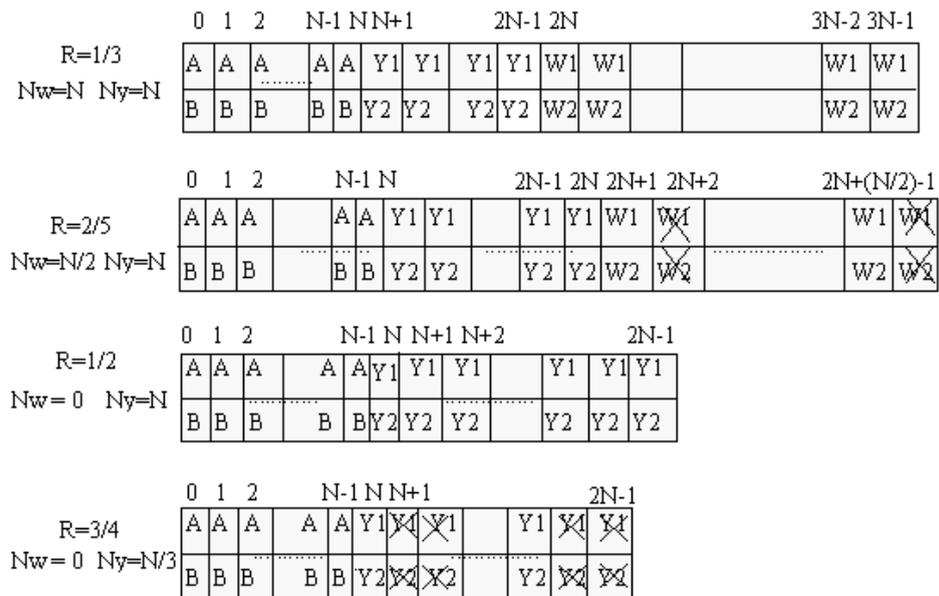


Fig 4. 18 : Données encodées (les indices 1 et 2 indiquent de quel encodeur la redondance provient)

#### 4.2.7.6 Fermeture du treillis pour un Turbo-code circulaire

Revenons à la Figure 4.15 le treillis de chaque code constitutif est fermé:

- pour le code C1: on initialise le codeur par l'état de circulation  $S_{C1}$ , correspondant au message non entrelacé,  $(A,B)_j$   $j=0, \dots, N-1$ .
- Pour le code C2: on initialise le codeur avec un autre état de circulation  $S_{C2}$  qui correspond aux données entrelacées, c.à.d  $(A,B)_{i=\pi(j)}$  pour  $j=0, \dots, N-1$ .

#### 4.2.8 Système de Turbo-décodage

##### 4.2.8.1 Principes de Turbo décodage

Le codage multiple et indépendant permet décoder séparément les différents codes constitutifs. Afin d'améliorer sensiblement les performances, les décodeurs individuels échangent itérativement des messages sous forme de rapports de vraisemblance logarithmiques, c'est ce que l'on appelle le turbo décodage. Ce principe est illustré à la Fig 4.19 dans le cas d'une concaténation de codes en parallèle:

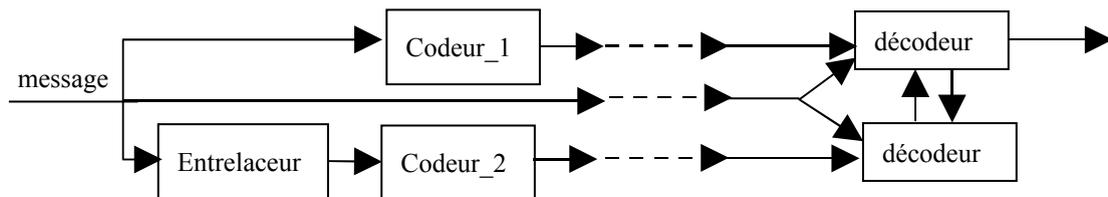


Fig 4. 19: Principe à la base du codage et décodage Turbo

### 4.2.8.2 Turbo-décodage (bit à bit)

Le schéma global du turbo-décodage est représenté par la Figure 4.20 où  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  désignent le vecteur des observations correspondant aux bits informatifs, à la redondance du premier code élémentaire et à la redondance du second code élémentaire, respectivement.

Chaque code élémentaire est décodé à l'aide d'un algorithme de type SISO (Soft-In Soft-Out) fournissant des décisions souples sur chaque bit informatif. Les décisions délivrées par un décodeur sont utilisées comme information a priori par l'autre décodeur de façon itérative. Précisons que seule la partie extrinsèque, autrement dit l'information nouvelle, est itérée afin d'empêcher la propagation des erreurs dans le processus de décodage.

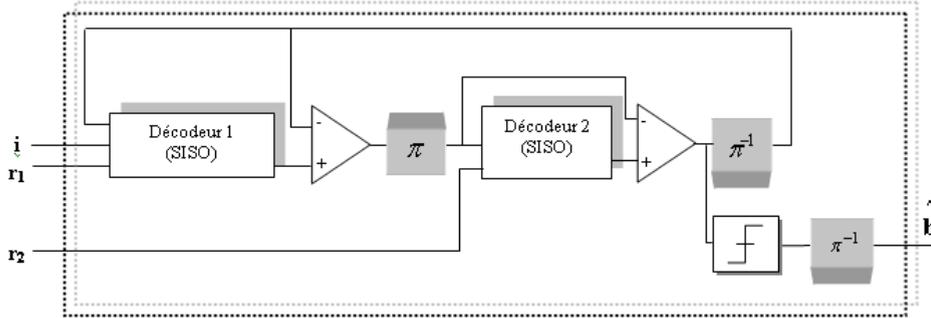


Fig 4. 20: Principe du turbo- décodage

On utilisera comme SISO l'algorithme MAP (Maximum A Posteriori) [Bahl 74].

Considérons par exemple le SISO correspondant au premier code, il délivre les rapports de vraisemblance logarithmiques a posteriori pour chaque bit d'information  $b_n$  sous la forme:

$$L_p(b_n) = \log \frac{p(b_n = 1 | \mathbf{i}, \mathbf{r}_1)}{p(b_n = 0 | \mathbf{i}, \mathbf{r}_1)} = \log \left( \frac{\sum_{s'} \alpha_{n-1}(s') \gamma_n^e(s', s) \beta_n(s)}{\sum_s \alpha_{n-1}(s') \gamma_n^e(s', s) \beta_n(s)} \right) \quad (4.35)$$

Où le numérateur et le dénominateur dans l'expression précédente sont des probabilités marginales calculées à l'aide des métriques  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\beta$  de l'algorithme MAP. Les informations extrinsèques correspondantes s'écrivent:

$$L_e(b_n) = L_p(b_n) - L_c(b_n) - L_a(b_n) \quad (4.36)$$

où

$$L_a(b_n) = \log \frac{p(b_n=1)}{p(b_n=0)}$$

$$L_c(b_n) = \log \frac{p(y_n / b_n=1)}{p(y_n / b_n=0)}$$

désignent l'information a priori provenant du second SISO et l'information du canal respectivement. On note  $y_n$  l'observation bruitée correspondant au symbole QPSK sur lequel  $b_n$  a été affecté.

La détection optimale au sens du maximum a posteriori bit-à-bit, est donnée par

$$b_n = \begin{cases} 1 & L_p(b_n) > 0 \\ 0 & L_p(b_n) \leq 0 \end{cases}$$

Le SISO correspondant au second code s'obtient de la même manière en remplaçant  $\mathbf{r}_1$  par  $\mathbf{r}_2$ .

### 4.2.8.3 Le turbo-décodage (symbole par symbole)

#### ● Le principe du Maximum A Posteriori

L'algorithme aller-retour est un algorithme de décodage basé sur le principe du maximum a posteriori symbole par symbole ou bit à bit, à partir de la séquence des observations reçues. Il s'applique directement sur le treillis du code considéré.

La règle de décision au sens du MAP consiste à comparer les probabilités a posteriori des symboles duo-binaires  $\{p(d_k=00/Y_k), p(d_k=10/Y_k), p(d_k=01/Y_k), p(d_k=11/Y_k)\}$ . La règle de décision consiste à retenir le symbole qui correspond au maximum de ces probabilités.

Ici  $Y_k=\{y_k, k=0, \dots, K-1\}$  désigne la séquence des observations reçues.

#### ● Principe du décodage itératif

Le décodage itératif à maximum de vraisemblance des codes composites est fondé sur le décodage successif de chaque code élémentaire. Il est nécessaire dans ce cas de considérer des décodeurs à entrées et à sorties souples.

Le principe du décodage itératif repose sur la propagation d'informations souples au cours des itérations. Deux types d'informations souples sont générés à la sortie de chaque décodeur SISO: une information a posteriori et une information extrinsèque sur les symboles d'information.

Les informations a posteriori d'un couple de bits informatifs  $d_k$ ,  $\mathbf{d}=(d_1, \dots, d_K)$  est un mots de code ,sont définies par les rapports de vraisemblance logarithmiques suivants:

$$L_{apo} = \{L_{apo}^{01}(d_k), L_{apo}^{10}(d_k), L_{apo}^{11}(d_k)\} \quad (4.37)$$

$$\text{où } L_{apo}^{(z)}(d_k) = \ln \left( \frac{p(d_k = z/Y_k)}{p(d_k = 00/Y_k)} \right)$$

Ces rapports de vraisemblance logarithmiques a posteriori peuvent se décomposer de la manière suivante:

$$L_{apo}(d_k) = L_{ex}(d_k) + L_{apr}(d_k) + L_{int}(d_k) \quad (4.38)$$

Dans l'équation (4.36), les informations a priori sont données par:

$$L_{apr}(d_k) = \left\{ \ln \frac{p(d_k = 01)}{p(d_k = 00)}, \ln \frac{p(d_k = 10)}{p(d_k = 00)}, \ln \frac{p(d_k = 11)}{p(d_k = 00)} \right\} \quad (4.39)$$

Les rapports de probabilité logarithmiques a priori sont égaux dans le cas de symboles équiprobables.  $L_{int}(d_k)$  sont les informations intrinsèques qui représentent les probabilités de transition du canal correspondant à  $d_k$  exprimées sous forme de rapports de vraisemblance logarithmiques:

$$L_{int}(d_k) = \left\{ \ln \frac{p(Y^s/d_k = 01)}{p(Y^s/d_k = 00)}, \ln \frac{p(Y^s/d_k = 10)}{p(Y^s/d_k = 00)}, \ln \frac{p(Y^s/d_k = 11)}{p(Y^s/d_k = 00)} \right\} \quad (4.40)$$

Les informations extrinsèques du décodeur qui permettent de faire circuler le terme de correction d'un décodeur à l'autre sont données par [Visoz 03]:

$$L_{ext}(d_k) = L_{apo}(d_k) - L_{int}(d_k) - L_{apr}(d_k) \quad (4.41)$$

L'information extrinsèque pour le précédent décodeur est une information a priori pour l'actuel décodeur  $L_{apo}^i(d_k) = L_{ext}^{i-1}(d_k)$  (i: représente l'indice de l'itération), on peut donc écrire l'équation (4.40) sous la forme [Berkmann 98]:

$$L_{ext}^{curr}(d_k) = L_{apo}^{curr}(d_k) - L_{int}^{curr}(d_k) - L_{ext}^{prev}(d_k) \quad (4.42)$$

On passe des rapports de vraisemblance logarithmiques aux probabilités symbole par symbole à l'aide des relations suivantes:

$$p(d_k = 00) = \frac{1}{1 + e^{L_{ext}^{(01)}} + e^{L_{ext}^{(10)}} + e^{L_{ext}^{(11)}}} = b$$

$$p(d_k = 01) = b.e^{L_{ext}^{(01)}}$$

$$p(d_k = 10) = b.e^{L_{ext}^{(10)}}$$

$$p(d_k = 11) = b.e^{L_{ext}^{(11)}}$$

● **Décodeur Turbo**

Pour la première semi-itération, les symboles sont initialement proposés équiprobables, alors les informations a priori  $L_{apr}^{1,(z)}(d_k)$  sont égaux pour  $z=\{01,10,11\}$ . Après le décodage des symboles par la premier décodeur MAP1, la sortie extrinsèque  $L_{ext}^{1,(z)}(\hat{d}_k)$  sera calculée à partir des informations a priori,  $L_{apr}^{1,(z)}(d_k)$  des informations intrinsèques  $L_{int}^{1,(z)}(\hat{d}_k)$  (équation 4.39), et aussi des informations a posteriori  $L_{apo}^{1,(z)}(d_k)$ , par l'équation (4.41).

$L_{ext}^{1,(z)}(\hat{d}_k)$  sont ensuite entrelacées pour être utilisées comme des informations a priori pour le deuxième décodeur (ici l'indice 1,2 montre le décodeur 1,2 respectivement):

$$L_{apr}^{2,(z)}(d_k) = \Pi(L_{ext}^{1,(z)}(d_k))$$

Le deuxième décodeur MAP, accepte les informations systématiques entrelacées, et aussi  $y^{P2}$ , plus des informations a priori venant de MAP1, pour calculer  $L_{apo}^{2,(z)}(d_k)$  en utilisant la relation (4.41):

$$L_{ext}^{2,(z)}(d) = L_{apo}^{2,(z)}(\hat{d}) - L_{apr}^{2,(z)}(d) - L_{int}^{2,(z)}(d)$$

$L_{ext}^{2,(z)}(d_k)$  figurant à la prochaine itération sous forme d'information a priori, après le de-entrelaceur comme:

$$L_{apr}^{1,(z)}(d_k) = \Pi^{-1}(L_{ext}^{2,(z)}(d_k))$$

La Figure 4.21, illustre le schéma de principe du décodage itératif dans un turbo décodeur duo binaire.

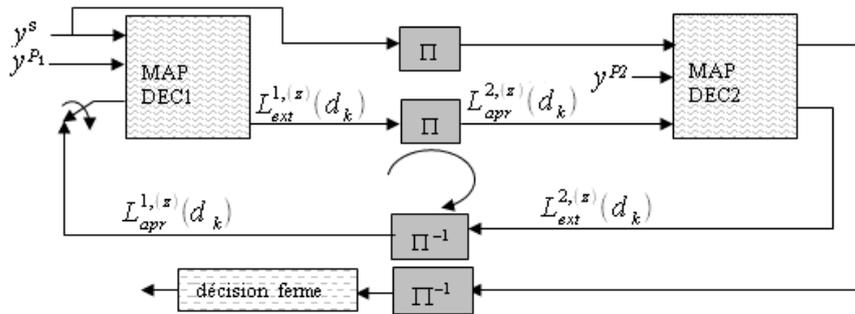


Fig 4. 21: Structure d'un turbo-décodeur duo-binaire

Après nombre d'itérations, les informations a posteriori du deuxième encodeur sont de-entrelacées pour donner la décision ferme [Branka 01].

**4.2.8.4 Turbo-décodage circulaire**

L'inconvénient de cette technique est l'étape préalable avant le décodage pour estimer l'état de circulation. Cette étape utilise le traitement des données précédant cet état, appelées *prologue* (cf. Figure 4.22). Le prologue est similaire à une étape de décodage, mais démarrant avec des états initiaux équiprobables. Ni décision ni information extrinsèque ne sont délivrées. Le seul but du prologue est de fournir une estimation souple de l'état de circulation qui servira à initialiser correctement l'algorithme MAP servant à décoder le message.

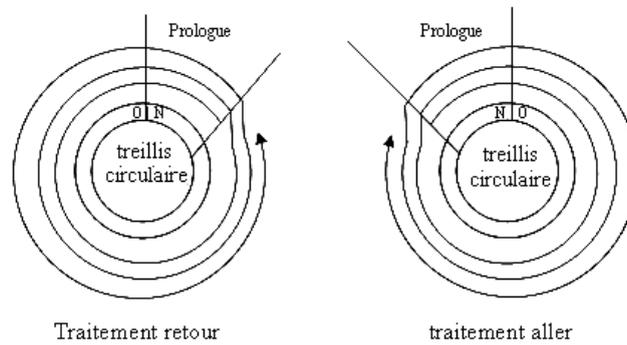


Fig 4. 22: Traitement d'un code circulaire par l'algorithme MAP

### 4.3 Conclusion

Une modulation numérique linéaire à bande étroite est constituée par un filtre d'émission en racine de Nyquist (cosinus surélevé) et un filtre adapté en réception. Dans ce cas la détection des symboles à fort RSB est effectuée par un simple comparateur à seuils. Ces conditions sont généralement satisfaites dans les systèmes simples de transmission. Pour des systèmes plus complexes il faut prendre en compte des canaux de transmission dispersifs, des non linéarités, des bruits impulsifs, un retard de propagation et aussi la présence d'effet Doppler.

Les algorithmes classiques procèdent à l'estimation séparée de chacun des paramètres. Cependant, une estimation conjointe de tout ou partie des paramètres pourrait conduire à des performances améliorées par rapport aux systèmes classiques. Ces approches sont sous optimales par rapport à une estimation globale qu'il semble difficile à réaliser a priori. Le **traitement particulier** qui réalise une approche globale pourrait être une solution.

Nous allons étudier deux schémas d'estimation/décodage conjoint pour des messages codés qui sont proposés dans la norme DVB-RCS, l'un utilisation code convolutif, l'autre un turbo-code.

## Chapitre 5

# Décodage convolutif et égalisation conjointe, par la technique particulière

Des nombreux systèmes de communication emploient le codage canal pour combattre les erreurs de transmission résiduelles après égalisation, en présence d'IES. Dans la littérature, le problème de l'égalisation et du décodage conjoints a été traité de deux manières différentes. La première solution utilise une description sous forme de machine à états finis combinant les états de l'IES et du code [Chevillat 89]. Une autre méthode très répandue considère la concaténation en série de l'encodeur et du canal à multi-trajets séparés par un entrelaceur. En adaptant l'idée introduite pour le décodage des turbo-codes [Glavieux 97], l'égalisation et le décodage conjoints sont réalisés en passant une information souple entre un égaliseur et un décodeur de manière itérative. Les résultats dans [Douillard 00] montrent que l'effet de l'IES est pratiquement supprimé à rapport signal sur bruit (RSB) élevé lorsqu'une IEC parfaite est disponible et si une détection optimale bit-à-bit au sens du maximum a posteriori (MAP) est utilisée pour réaliser l'égalisation et le décodage. Des résultats similaires existent pour des techniques d'égalisation sous-optimales comme l'annulation d'interférences (AI) [Douillard 95], l'égalisation linéaire (EL) et l'égalisation à décision dans la boucle (DFE).

Dans les systèmes de communication pratiques, une estimation du canal au niveau du récepteur est nécessaire. Si la turbo-égalisation est employée, une idée naturelle consiste à utiliser les sorties souples du décodeur comme entrées d'une technique d'estimation du canal pilotée par les décisions souples, afin d'affiner de manière itérative les paramètres du canal. Cette méthode est exploitée pour l'estimation adaptative du canal au sens de l'erreur quadratique moyenne minimale (EQMM) pour l'égalisation de type DFE et AI dans [Didier 95][Laot 97][Holdsworth 01]. Cependant, à cause de la nature sous-optimale de ces techniques d'égalisation, il peut s'avérer difficile d'obtenir de bonnes performances en termes de TEB pour des canaux à IES sévère. De plus une séquence d'apprentissage longue est parfois requise. L'estimation du canal et l'égalisation au sens du MAP conjoints est investiguée dans [Anastasopoulos 00] à l'aide d'un traitement "avant-arrière" pour un modèle de canal de type Gauss-Markov. Des méthodes, de type

«expectation-maximization», ont fait l'objet d'une étude dans le contexte de l'égalisation au sens du MAP, mais elles ont besoin de nombreuses itérations pour converger.

Par ailleurs, des applications du filtrage particulaire de Monte-Carlo sont rapportées dans [Noyar 00], mais ces méthodes ont en général besoin d'un grand nombre de particules pour fonctionner correctement. Récemment, il a été montré qu'une version déterministe (non Monte-Carlo) de l'estimation trajectorielle au sens du MAP utilisant le filtrage particulaire était bien adaptée aux problèmes de communication [BenSalem 00].

En particulier, cette technique a été appliquée avec succès à l'estimation du canal et à la détection conjointe pour des transmissions sur canaux évanescents à multi-trajets [Bensalem 01] et pour les systèmes d'accès multiple par code (CDMA).

Un récepteur basé sur le filtrage particulaire en conjonction avec le principe turbo est proposé, pour résoudre le problème global incluant le canal inconnu et le code. Le filtrage particulaire étant par nature à entrée souple, il peut être inséré dans une boucle de turbo-égalisation, pour faire l'estimation du canal. Les paramètres du canal obtenus par filtrage particulaire sont utilisés pour réaliser une égalisation, suivie d'un décodage au sens du MAP. Les sorties souples produites par le décodeur sont ensuite exploitées à nouveau en tant qu'informations a priori sur les symboles transmis, par le filtre particulaire afin d'affiner l'estimation des paramètres du canal. Ce processus est itéré plusieurs fois jusqu'à ce qu'il converge.

Dans ce chapitre, nous introduisons un modèle de transmission par code convolutif. Nous proposons ensuite des architectures de récepteurs à base de filtrage particulaire suivis de quelques résultats numériques.

### 5.1 Présentation de la chaîne de transmission avec code convolutif

Soit le système de communication représenté dans la figure 5.1. Les bits formant le message à transmettre subissent un encodage convolutif avant d'être modulés. Les symboles modulés sont envoyés sur le canal de transmission. En supposant que l'amplificateur du récepteur dans le satellite est utilisée dans sa zone de linéarité, le canal de transmission spatial se limite à une atténuation, un déphasage, un décalage Doppler, un retard et un bruit additif. Au récepteur le signal reçu subit un filtrage adapté avant d'être échantillonné à la fréquence  $1/T$  où  $T$  désigne la durée symbole. Ces échantillons sont ensuite fournis à un organe d'estimation des paramètres du canal et de détection du message binaire.

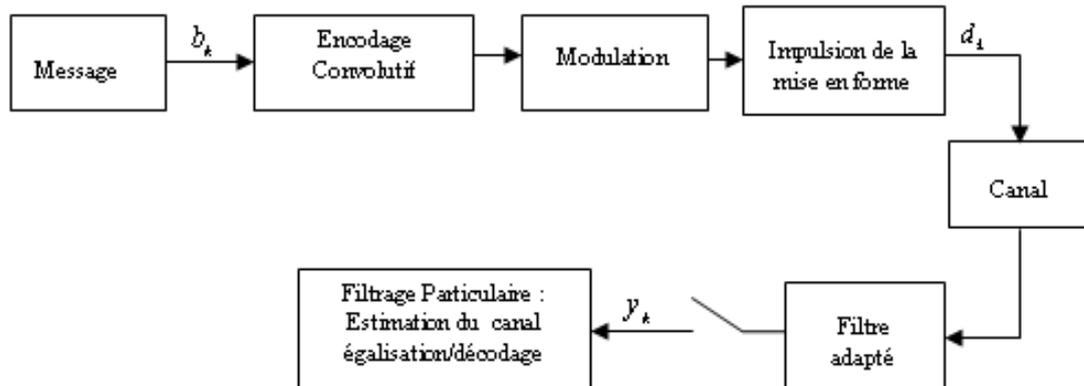


Fig 5. 1 : Chaîne de communication

Le codeur utilisé est un codeur convolutif et récursif systématique illustré par la figure 5.2;

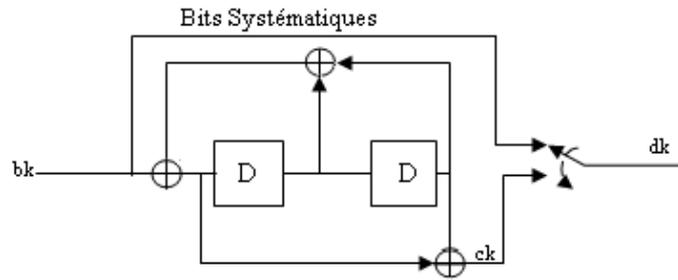


Fig 5. 2: Codeur convolutif

Les notations employées sont les suivantes:

- $b_k$  : bits utiles,
- $c_k$  : bits redondants,
- $d_k$  : séquence encodée envoyée,
- $n_k$  : bruit additif blanc gaussien,
- $y_k$  : échantillons issus du canal discret équivalent.

Le message binaire  $b_k$  est encodé par un code convolutif de mémoire  $v$  suivi d'une modulation de phase. La séquence modulée  $d_k$  est organisée en trames de longueur  $N$  contenant un préambule et une terminaison comme dans [Shao 99], afin de remettre l'état du canal et de l'encodeur à zéro au début et à la fin de chaque trame. La sortie de l'échantillonneur à l'instant  $t=kT$  est de la forme

$$y_k = h(\Phi_k) = A_k e^{j(2\pi \Delta f_k kT + \theta_k)} \sum_m d_m l(kT - mT - \tau_k) + n_k \quad (5.1)$$

Où  $A$  représente l'amplitude du signal reçu,  $\theta$  représente le déphasage introduit par le canal,  $\Delta f$  désigne l'écart par rapport à la fréquence porteuse due à l'effet Doppler,  $\tau$  est la phase de l'horloge d'échantillonnage du récepteur,  $d_m$  est le symbole émis à l'instant  $t=mT$  et  $l(t)$  est la forme d'onde du signal, ensemble de paramètres  $\Phi_k = \{A_k, \theta_k, \Delta f_k, \tau_k, \{d_m\}_i\}$  désigne l'état du système (cf. 4.1). Le signal reçu est en outre entaché d'un bruit blanc additif gaussien  $n_k$  de puissance  $N_0$ . Nous définissons le RSB par le rapport  $E_b/N_0$ .

## 5.2 Modélisation par un système dynamique non-linéaire

Intéressons nous tout d'abord aux variables discrètes. L'équation (5.1) montre que le signal reçu à l'instant  $t=kT$  dépend non seulement du symbole courant  $d_k$ , mais également des symboles passés et futurs. Cette interférence inter-symbole peut être décrite par un processus markovien à temps discrets de la forme:

$$\zeta_{k+1} = f_k(\zeta_k, \mathbf{u}_k) \quad (5.2)$$

où  $f_k$  est une fonction non linéaire,  $\zeta_k$  le vecteur d'état discret à l'instant  $k$ , et  $\mathbf{u}_k$  le vecteur de commande correspondant au symbole courant transmis. En fait, comme  $h(t)$  est une impulsion infinie et anticausale, il est nécessaire d'introduire une troncature ainsi qu'un délai de traitement des échantillons. Nos simulations ont montré qu'en choisissant  $\zeta_k = [d_{k-2}, d_{k-1}, d_k, d_{k+1}, d_{k+2}]^T$ , l'interférence inter-symbole résiduelle correspondant aux symboles  $d_m$ , pour  $m < k-2$  et  $m > k+2$  est négligeable.

Soit  $\mathbf{x}_k = [A, \theta, \Delta f, \tau]^T$  l'état du canal, nous supposons que les paramètres du canal sont constants à dérive lente. L'équation dynamique correspondante s'écrit sous la forme:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (5.3)$$

où  $\mathbf{w}_k$  représente une dérive brownienne. L'équation (5.1) peut alors être interprétée comme un processus d'observation réel de la forme:

$$\mathbf{y}_k = h_k(\zeta_k, \mathbf{x}_k) + \mathbf{n}_k \quad (5.4)$$

Si on pose  $\mathbf{y}_k = [\text{Re}(y_k), \text{Im}(y_k)]^T$  et  $\mathbf{n}_k = [\text{Re}(n_k), \text{Im}(n_k)]^T$ , la matrice d'autocorrélation  $R = E[\mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^T]$  s'écrit sous la forme:

$$R = \begin{bmatrix} N_0/2 & 0 \\ 0 & N_0/2 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Par ailleurs,  $h_k$  désigne la fonction d'observation non-linéaire définie par (5.1). Par conséquent, les transmissions par satellite admettent une description sous la forme d'un système dynamique non-linéaire et la méthode de filtrage particulière peut s'appliquer ici. En théorie, la détection optimale du message binaire transmis se résume, donc, à un problème de recherche de la séquence de commandes discrètes  $\mathbf{U}_k = \{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^k$  qui maximise la vraisemblance des observations.

En pratique, il n'est en général pas possible de calculer la vraisemblance de toutes les séquences de commande possibles pour déterminer la séquence optimale. Cependant, l'approximation dite "particulière" permet de réaliser cette opération, récursivement en supposant une complexité calculatoire fixe à chaque instant  $k$ .

### 5.3 Récepteur optimal

Le filtre particulière de Dirac Gauss étendu développé dans la Chapitre 2 (Alg 2.3), fournit un cadre directement applicable à la modélisation non linéaire des communications par satellite proposée dans le chapitre 4. Il suffit pour cela de poser  $g_k(\zeta_k, \mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}$ . L'applicabilité de la méthode proposée est garantie par le fait que les divergences multimodales du filtrage de Kalman étendu classique sont empêchées par la présence de particules dans chaque secteur sous-modal.

En effet,  $g_k$  est linéaire,  $h_k$  est linéaire en  $A$ ,  $\Delta f T$  est suffisamment faible pour qu'une linéarisation locale de  $h_k$  en  $\Delta f T$  soit valide. De plus, si l'on considère que la forme d'onde reçue  $l(t)$  peut être approchée par un triangle sur  $[-T/2, T/2]$ , une linéarisation locale de  $h_k$  par rapport à  $\tau$  est aussi valide. Quant au paramètre  $\theta$ , une linéarisation locale de  $h_k$  dans chaque quadrant du cercle trigonométrique est suffisante pour respecter l'observabilité.

Nous avons supposé que l'espace des variables à états discrets  $\zeta_k$  modélise conjointement l'effet du codage canal et celui des interférences inter-symbole. Ceci est aisément réalisable dans le cas d'un code en treillis (cf. §4.2.7.2) [Chevillat 89], mais au prix d'une complexité algorithmique importante due à un grand nombre d'états discrets.

Nous proposerons dans la suite une simplification dont le principe général est le suivant. Nous séparons l'effet de l'encodage et de la modulation en restreignant l'espace des variables à états discrets  $\zeta_k$  à la modélisation des interférences inter-symbole. L'estimation des paramètres du canal continu peuvent se faire conjointement avec la détection des symboles mais sans prendre en compte les contraintes imposées par le codage. Le fait que seules les séquences de symboles correspondant à des mots de codes sont autorisées sera pris en compte séparément grâce au processus itératif de type 'turbo'. Ceci est réalisé par un échange de rapports de vraisemblance a posteriori entre le décodeur et l'estimateur du canal qui itère les paramètres du canal et les décisions binaires en sortie du décodeur.

#### 5.3.1 Récepteur basé sur la Turbo-égalisation

Le récepteur sous-optimal illustré par la figure 5.3 repose sur l'insertion d'un entrelaceur  $I$  entre la sortie modulée de l'encodeur convolutif et le canal sélectif en fréquence.

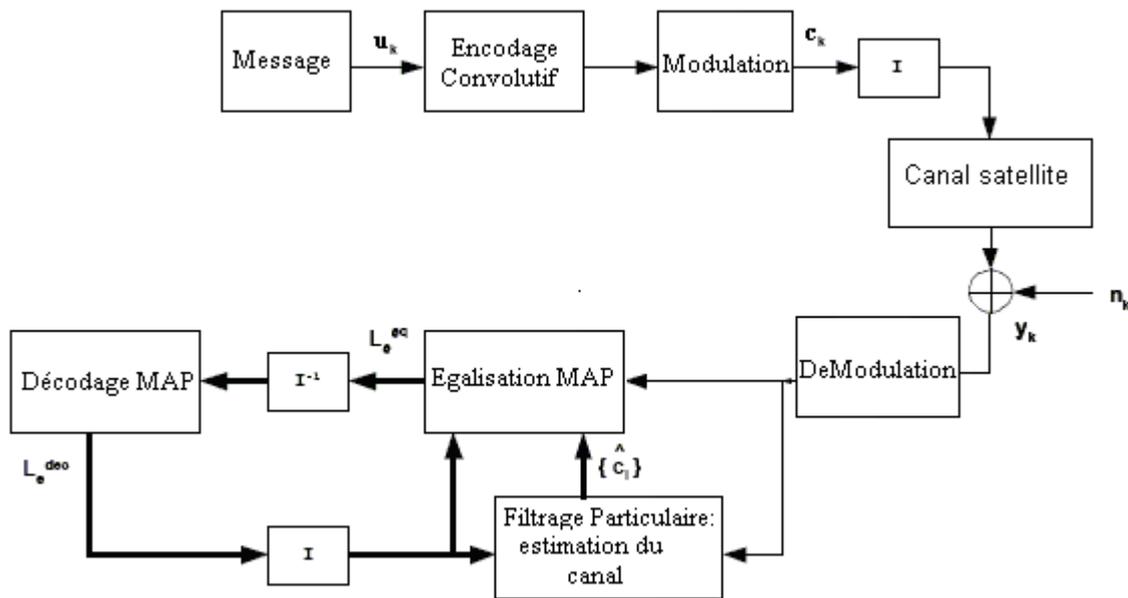


Fig 5. 3 : Système de communication sur un canal sélectif en fréquence avec entrelacement temporel

L'égalisation et le décodage au sens du MAP sont réalisés en appliquant l'algorithme BCJR [Bahl 74] aux machines à états finis représentant l'IES et le code, respectivement. Les fiabilités extrinsèques produites par le décodeur sont ensuite réinjectées en tant qu'information a priori dans l'égaliseur au sens du MAP et le filtre particulière. Il faut assurer un entrelacement et un désentrelacement appropriés des fiabilités extrinsèques entre les différents étages du récepteur. Comme le filtrage particulière est naturellement un dispositif à entrées souples, il peut servir à estimer  $\{\hat{c}_l\}_{l=0}^L$ , les coefficients d'égalisation à l'intérieur de chaque itération de turbo-égalisation. Au fur et à mesure des itérations, les informations extrinsèques fournies par le décodeur sont de plus en plus fiables, ce qui permet d'affiner l'estimation du canal. Ce processus est itéré jusqu'à ce qu'il converge.

### 5.3.2 Récepteur basé sur un filtre Interpolateur

Nous proposons de simplifier encore davantage le récepteur en utilisant la méthode décrite par la figure 5.4. Le principe mis en œuvre est le suivant: en supposant que le filtre adapté à l'entrée du récepteur est implémenté par un filtre numérique, comme c'est souvent le cas dans les modems récents, le signal reçu est échantillonné à la fréquence  $2/T$  afin d'éviter le phénomène de recouvrement de spectre. De plus, comme le canal n'est pas à trajets multiples, les **interférences inter-symbole** dans le cas d'une impulsion  $l(t)$  en cosinus surélevé ont pour seule origine les défauts de synchronisation. L'estime du retard  $\hat{\tau}$  fourni par le filtre particulière peut donc être utilisé par un filtre interpolateur pour reconstruire les échantillons aux instants  $t = kT + \hat{\tau}$  [Laot 01]. Au fur et à mesure des itérations du récepteur, l'estimation de  $\hat{\tau}$  est itérée jusqu'à élimination des interférences inter-symbole en sortie du décimateur. L'égaliseur de type BCJR (et l'entrelaceur qui lui est associé) devient inutile et les sorties de l'interpolateur servent alors d'entrée souple au décodeur. De même que pour le récepteur précédent, les sorties pondérées du décodeur sont rebouclées vers le filtre particulière en tant qu'information a priori et l'ensemble de ce processus est itéré plusieurs fois.

Observons que pour éviter le repliement de spectre, le filtre interpolateur doit fonctionner à la cadence de deux échantillons par symbole. Cependant, un échantillon par symbole suffit à faire fonctionner le filtre particulière et le décodeur, d'où l'introduction d'un décimateur d'un facteur 2 à l'entrée de ces deux blocs.

Par rapport au récepteur de la section précédente utilisant le principe de la turbo-égalisation, le sur-échantillonnage d'un facteur 2 du récepteur basé sur un filtre interpolateur permet une réduction de la complexité et de la latence moyennant un convertisseur analogique numérique en conséquence.

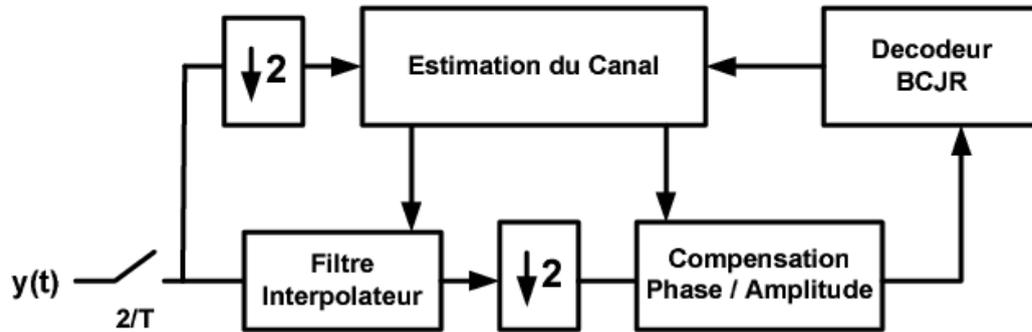


Fig 5. 4 : Récepteur satellite basé sur un filtre interpolateur

### 5.4 Séquence d'apprentissage

Les symboles pilotes ont pour avantage de faciliter l'acquisition initiale des paramètres du canal, mais au prix d'une baisse de l'efficacité spectrale de la transmission. Ainsi, si l'on note  $P$  le nombre des symboles d'apprentissage ajoutés à une trame de longueur originale  $N$ , l'énergie de bit informatif se réduit d'un facteur:

$$\Delta E = \frac{E_b}{E_b^+} = 10 \times \log_{10} \left( \frac{N}{N+P} \right) dB \quad (5.6)$$

Comme nous allons le voir dans les simulations, l'acquisition du canal échoue fréquemment du fait que l'influence du code n'est pas prise en compte. Une solution à ce problème consiste à initialiser les filtres de Kalman intervenant dans le filtre particulière avec une séquence d'apprentissage connue du récepteur, garantissant une observabilité suffisante du système dynamique [Anastasopoulos 00]. La longueur totale de la trame émise est augmentée par la séquence d'apprentissage et le rendement de la transmission est diminué en conséquence, tout en conservant le même nombre de bits informatifs.

Une séquence d'apprentissage insère périodiquement un bloc de  $N_s$  symboles connus tous les  $N_u$  symboles. Or le nombre total de blocs d'apprentissage en début de trame est égal à  $N_t$ , comme indiqué dans la figure 5.5.

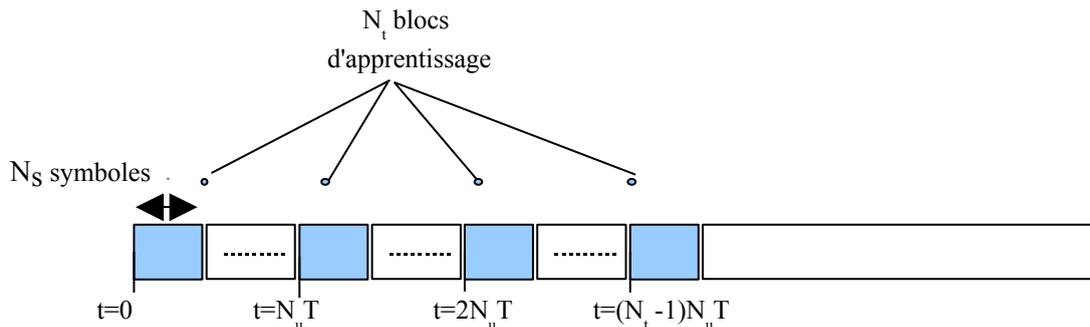


Fig 5. 5: Emplacement des symboles d'apprentissage (gris) dans la trame émise

Pour les simulations faites ( $N_s=25$ ,  $N_u=10$ ).

### 5.5 Initialisation du filtre particulière

On peut appliquer le filtre particulière de Dirac Gauss étendu au problème de l'estimation conjointe des symboles binaires et du canal (voir chapitre 3), à condition de fournir une solution au problème des divergences multimodales caractéristiques d'un filtre de Kalman étendu unique. Pour ce faire, il suffit de placer à l'instant initial une particule par sous-secteur modal.

Nous procédons maintenant au choix de ces secteurs. Comme nous l'avons signalé en 5.3, la fonction d'observation  $h_k$  est linéaire en  $A$  et linéarisable par rapport à la variable  $\Delta f T$  dans les intervalles  $[-10^{-2}, 0]$  et  $[0, +10^{-2}]$ , en supposant que les variations Doppler sont limitées dans  $[-10^{-2}, +10^{-2}]$ . De plus, si l'on considère que la fonction  $l(t)$  peut être approximée par un triangle sur l'intervalle  $[-T/2; T/2]$ , une linéarisation de  $h_k$  en la variable  $\tau$  est également valide sur chaque intervalle  $[-T/2; 0]$  et  $[0; T/2]$ . Une linéarisation locale de  $h_k$  dans chaque quadrant du cercle trigonométrique, est suffisante pour garantir l'observabilité. On en déduit que  $N_i=16$  particules initiales seront alors nécessaires pour la partie continue du support particulière. Une représentation graphique du choix de ces particules initiales est donné par la figure 5.6.

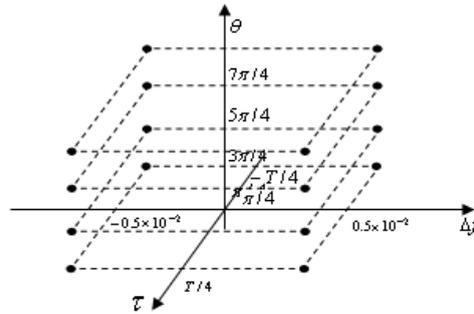


Fig 5. 6 : Initialisation du filtre particulaire

Les matrices de covariance initiales sont données par:

$$P_i = \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\Delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\tau^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \sigma_A = (0.1) \quad \sigma_\theta = \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{4}\right) \quad \sigma_\Delta = \left(\frac{1}{2} \frac{10^{-2}}{2}\right) \quad \sigma_\tau = \left(\frac{1}{4} \frac{T}{2}\right)$$

Le support initial déjà caractérisé doit vérifier deux points essentiels:

- Assurer la validité locale de la linéarisation. Chacune des particules doit être affectée d'une covariance suffisamment petite.
- Approcher au mieux la densité de probabilité initiale de l'état, en rendant le support particulière «jointif» afin de couvrir tout l'espace d'état.

Quant à la partie discrète, on initialise les particules initiales  $\zeta_\theta^i$ , avec leurs vraisemblances a priori correspondantes  $L(\zeta_\theta^i)$ .

## 5.6 Résultats de simulation

Les paramètres du canal satellite sont choisis de la manière suivante. L'amplitude  $A$  est fixée à 1 et la fréquence Doppler normalisée  $\Delta f T$  à  $10^{-2}$ . Pour chaque trame, la phase du canal  $\theta$  est tirée uniformément sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  et le retard  $\tau$  est tirée uniformément sur l'intervalle  $[-T/2, T/2]$ .

Pour montrer l'avantage de codage de canal, la figure suivante montre le taux d'erreur binaire d'un système de décodage pour un canal parfaitement connu, pour un message codé (convolutif *trait plein*) ou message non-codé (*trait discontinu*)

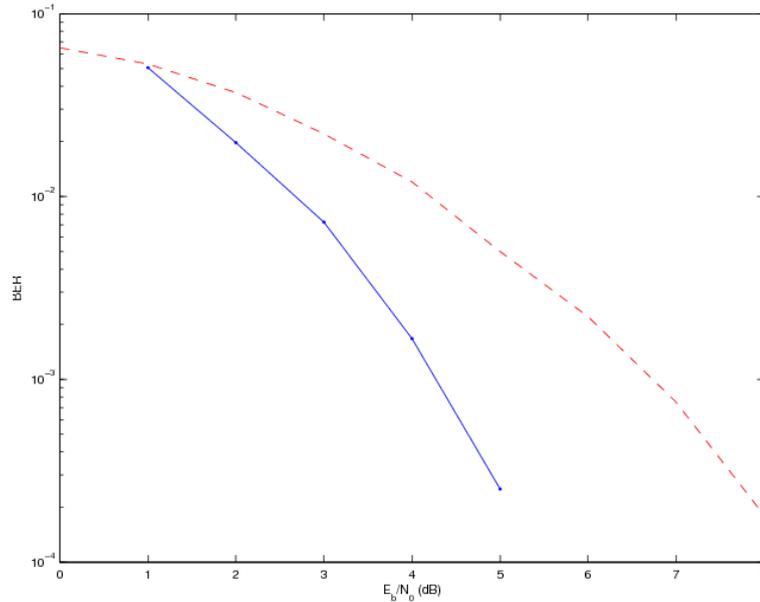


Fig 5. 7: TEB pour un canal parfaitement connu: message codé (trait plein), ou non-codé (trait discontinu)

### 5.6.1 Informations non codés

Commençons tout d'abord par appliquer le filtre particulière de Dirac Gauss étendu sur des informations non codées afin d'estimer le message envoyé via un canal satellite, conjointement avec les paramètres de ce canal. La figure 5.8 illustre le taux d'erreur binaire en fonction du rapport signal sur bruit en dB pour des trames ATM modulées en BPSK, précédées d'une séquence d'apprentissage de longueur 10 symboles. L'écart entre la courbe à canal parfaitement connu et la courbe correspondant à une estimation du canal avec  $N=8$  particules, n'est que de 0,8 dB. Nos expérimentations ont montré que choisir plus de 8 particules pour l'estimation du canal n'amène aucun gain significatif pour le taux d'erreur binaire. Des résultats analogues sont obtenus pour la modulation QPSK à la figure 5.8.

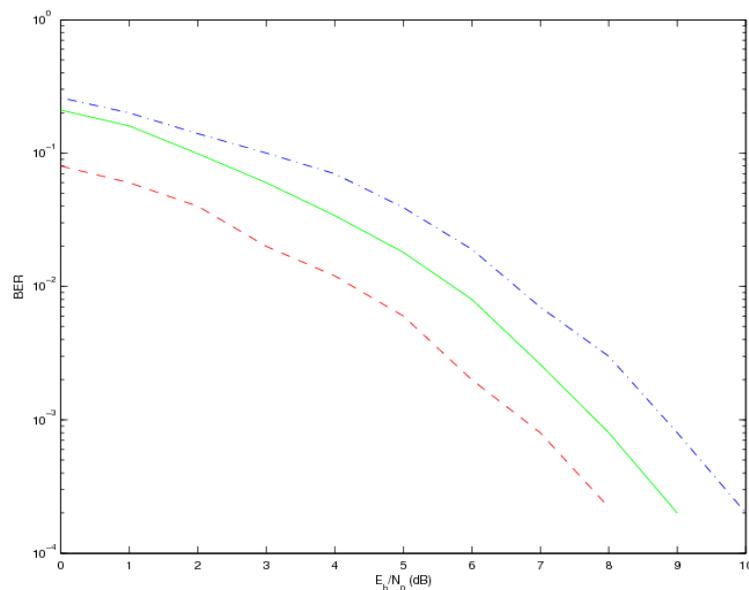


Fig 5. 8: TEB pour la modulation BPSK non-codée: estimation du canal satellite avec  $N=4$  particules (trait discontinu et pointillés),  $N=8$  particules (trait plein) et canal parfaitement connu (trait discontinu)

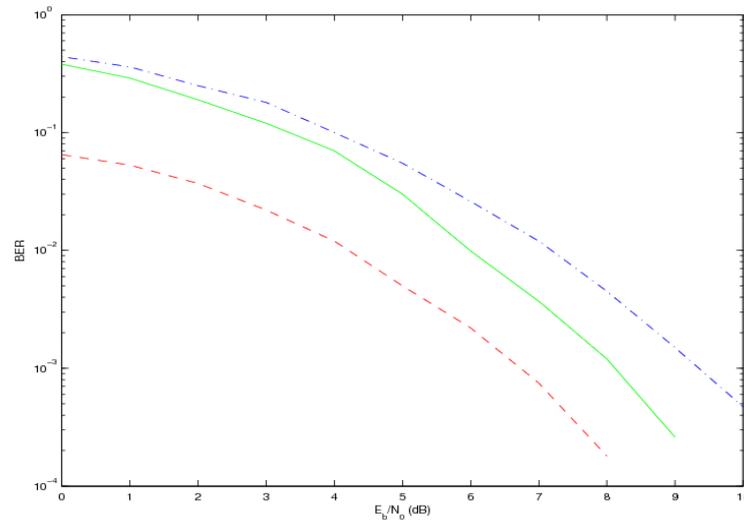


Fig 5. 9 :TEB pour la modulation QPSK non-codée: estimation du canal satellite avec  $M=16$  particules (trait discontinu et pointillés),  $M=32$  particules (trait plein) et canal parfaitement connu (trait discontinu)

La figure 5.10 donne l'erreur quadratique moyenne pour la fréquence Doppler normalisée  $\Delta f T$  d'un estimateur particulier du canal avec  $M=8$  particules et une modulation BPSK, ainsi que la borne de Cramer-Rao correspondante [Rife 74]. De même, la Fig 5.11 donne l'erreur quadratique moyenne pour le retard normalisé  $\tau/T$  ainsi que la borne de Cramer-Rao correspondante [Yang 03]. Des résultats analogues ont été obtenus pour l'estimation de la phase et de l'amplitude du canal satellite [Kazem 05b].

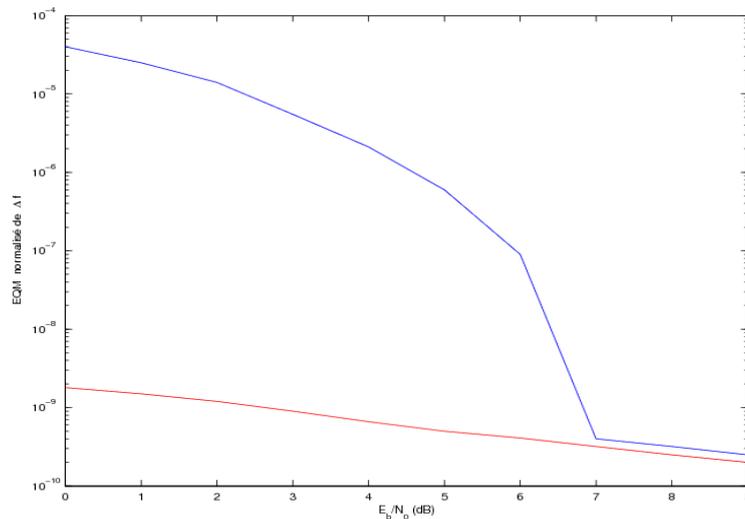


Fig 5. 10 : EQM de la fréquence Doppler normalisée pour  $M=8$  particules (trait plein bleu) et borne de Cramer-Rao (trait plein rouge) pour la modulation BPSK.

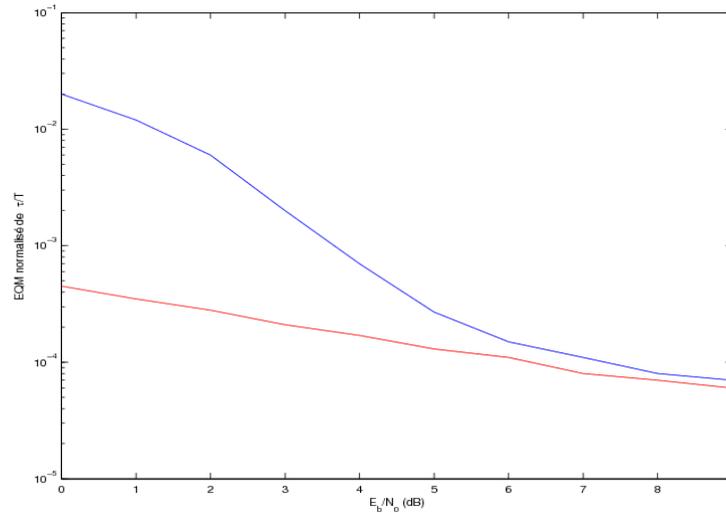


Fig 5. 11: EQM du retard normalisé pour  $M=8$  particules (trait plein bleu) et borne de Cramer-Rao (trait plein rouge) pour la modulation BPSK.

### 5.6.2 Informations codées

La figure 5.12 donne le taux d'erreur binaire d'une trame illustrée à la figure 5.5, contenant 424 bits informatifs (soit une trame ATM) et  $N_i=2$  séquences d'apprentissage modulés en BPSK. Les bits informatifs sont encodés par un code convolutif récursif systématique de générateurs  $g(D)=[1,1+D^2/1+D+D^2]$ . Le récepteur itératif utilisé est celui de la figure 5.4 avec un estimateur du canal réalisé par un filtre particulière de Dirac Gauss étendu à  $M=8$  particules. On constate qu'au bout de seulement deux itérations, les performances s'approchent de celles d'un décodeur à canal parfaitement connu.

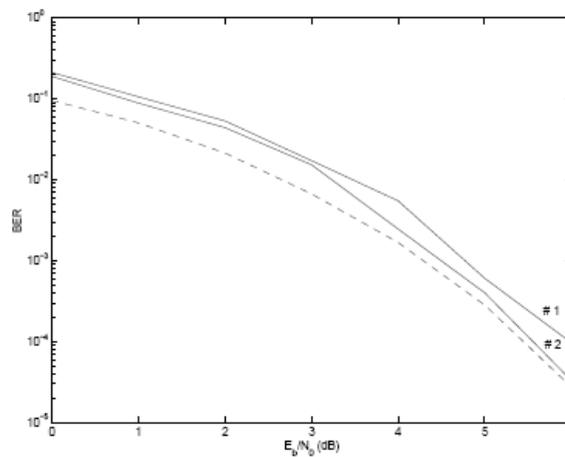


Fig 5. 12: TEB pour la modulation BPSK codée: estimation du canal satellite avec  $M=8$  particules (deux itérations en trait continu), et décodage à canal parfaitement connu (trait discontinu) -  $N_i = 2$  séquences d'apprentissage.

Pour étudier l'avantage de filtre particulière on montre dans la figure 5.13, les performances du système de la figure 5.3, mais en remplaçant le filtre particulière par un filtre de Kalman étendu unique. En particulier à la première itération, les symboles d'informations étant inconnus du récepteur, le filtre de Kalman étendu estime le canal satellite à partir des seules séquences d'apprentissage. On constate par rapport au récepteur basé sur le filtrage particulière, ce nouveau récepteur nécessite deux fois plus d'itérations pour converger, ainsi que le double de séquences d'apprentissage.

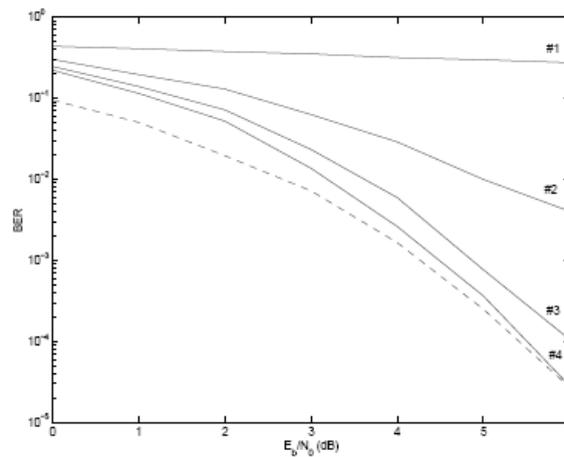


Fig 5. 13 : TEB pour la modulation BPSK codée: estimation du canal satellite un filtre de Kalman étendu unique (quatre itérations en trait continu), et décodage à canal parfaitement connu (trait discontinu) -  $N_i = 4$  séquences d'apprentissage, trame ATM.

### 5.6.3 Influence du type de récepteur

Nous comparons maintenant le récepteur corrigeant les interférences inter-symbole par un filtre interpolateur (voir figure 5.4) employé jusqu'ici avec le récepteur corrigeant les interférences inter-symbole par un égaliseur MAP (voir figure 5.3).

Une séquence d'apprentissage de longueur 10 symboles est nécessaire pour l'acquisition initiale des paramètres du canal. La figure 5.14 donne le taux d'erreur binaire des deux récepteurs à la troisième itération pour un mots de code de 50 bits. On peut en déduire que malgré la faible complexité calculatoire du filtre interpolateur par rapport à l'égaliseur MAP, les performances obtenues sont quasi-identiques.

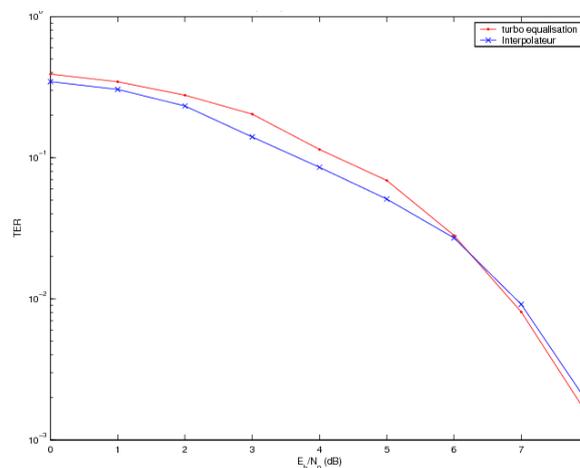


Fig 5. 14: Comparaison de performances entre les deux récepteurs utilisés

### 5.6.4 Influence de l'entrelaceur

Si on supprime l'entrelaceur, comme les séquences d'apprentissage sont localisées en début de trame, les sorties extrinsèques du décodeur sont correctes avec une parfaite estimation des paramètres du canal. Par contre si les estimations des paramètres du canal sont à peu près correctement acquises (typiquement à la deuxième itération) il reste quelques erreurs (3..10 erreurs) qui ne sont pas corrigées par les itérations suivantes à cause de l'absence d'entrelaceur.

### 5.6.5 Influence du nombre de séquence d'apprentissage

L'égaliseur que nous avons considéré ici est donc un décodeur sous-optimal de très faible complexité, avec une perte de performance n'est qu'à 0.5 dB (+ la pénalité de l'insertion de séquences d'apprentissages), de la courbe correspondant au système parfaitement connu. En effet nous avons pu constater par simulation que deux séquences d'apprentissages au début de système codé suffisent de bien converger. La figure 5.15 montre les performances de cette méthode pour deux ou quatre séquences d'apprentissages.

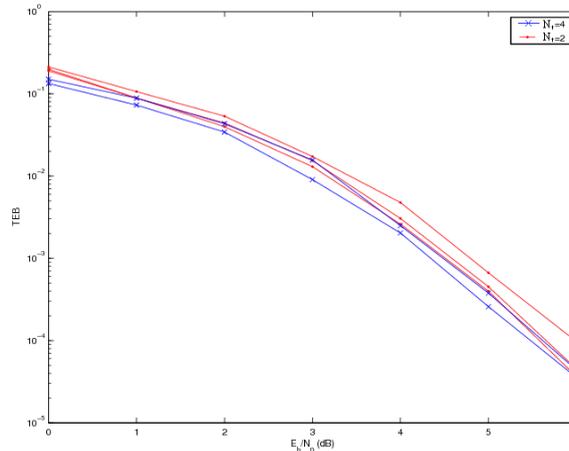


Fig 5. 15 : BER pour récepteur Turbo-égaliseur avec  $N_t=2,4$

La figure précédente montre les performances obtenues avec  $N_t=2$  séquences d'apprentissage (resp. 4 itérations Turbo) sont identiques à celles obtenues avec  $N_t=4$  (resp. 2). Le prix à payer est donc dans ces cas est la diminution d'un spectrale  $10\log(N/(N+P))$  (cf: 5.4), avec  $N$ : est le nombre de séquences d'informations,  $P$  le nombre de séquences d'apprentissage.

les deux cas se rejoignent à peu de chose près après 2 itérations. Cela signifie juste qu'il n'y a aucun intérêt à choisir  $N_t > 2$ .

### 5.6.6 Détection avec bruit de phase

Il suffit d'augmenter le nombre de séquences d'apprentissage pour résoudre les problèmes de non-acquisition. La figure 5.16 montre le TEB pour un système encodé, et une dérive de phase d'écart-type 2 deg/échantillon, en utilisant  $N_t=8$  séquences d'apprentissage (pénalité de l'insertion de séquences d'apprentissage  $\Delta E = 0.75$  dB §5.4).

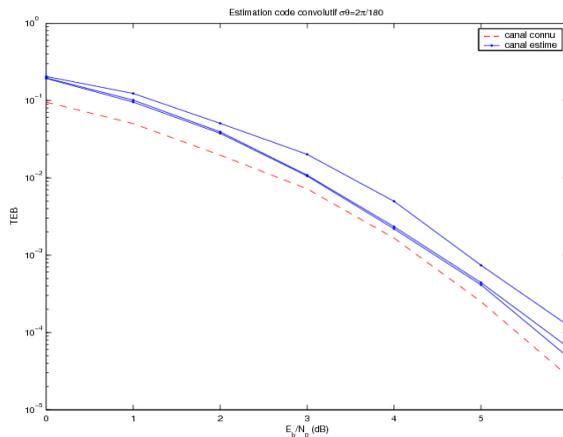


Fig 5. 16 :TEB pour la modulation BPSK codée en présence de bruit de phase: estimation du canal satellite avec  $M=64$  particules (trois itérations en trait continu), et décodage à canal parfaitement connu (o) -  $N_t = 8$  séquences d'apprentissage.

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les performances du **filtrage particulière de Dirac Gauss étendu** appliqué aux transmissions par satellite sous sa forme dynamique globale non-linéaire. Nous avons montré par des simulations de Monte Carlo la capacité du filtrage particulière à démoduler les données en présence de paramètres du canal inconnus du récepteur. Pour ce faire, un nombre limité de séquences d'apprentissage s'est avéré nécessaire. De plus, le cas important des modulations codées a été traité par une technique de ré-estimation itérative du canal satellite à base de filtrage particulière.

Nous avons ainsi pu établir comment le filtrage particulière déterministe au sens du maximum a posteriori pouvait résoudre les problèmes d'estimation du canal et de détection du message binaire pour la norme DVB-RCS. Plus précisément, ce sont les particules de Dirac-Gauss étendu qui sont le mieux adaptées, l'aspect Dirac prenant en charge les variables binaires correspondant au message et l'aspect Gauss étendu prenant en charge les variables continues correspondant à l'état du canal. Ces considérations nous ont conduites à proposer une architecture de récepteur à base de filtrage particulière.



## Chapitre 6

# Filtrage particulaire en systèmes turbo-codés

Dans le chapitre précédent, nous avons évalué les performances du filtrage particulaire appliqué à l'estimation conjointe d'un canal satellite et à la détection des symboles d'information, en nous limitant au cas simple où le message binaire est soit non-codé, soit encodé à l'aide d'un simple code convolutif. Cependant, de nombreux standards actuels utilisent un turbo-code, tel celui introduit à la section 4.2, dans le but de bénéficier d'un pouvoir correcteur bien plus important. Ainsi, le taux d'erreur binaire visé par l'application sera obtenu pour un rapport signal sur bruit proche de la limite de Shannon, typiquement bien plus faible que pour un code convolutif. Mais ceci engendre un problème de taille, à savoir est-il possible d'estimer le canal de manière fiable, c'est-à-dire sans échecs d'acquisition intempestifs, à un rapport signal sur bruit si faible?

Le point d'achoppement est donc de rendre possible la conjonction du turbo-codage et de l'estimation particulaire, chacune étant performante dans son domaine d'élection (optimisation du décodage binaire et estimation non-linéaire du canal, respectivement). De nombreuses applications industrielles dépendent de la solution apportée à ce problème.

### 6.1 Présentation de la chaîne de transmission avec Turbo-code

Un schéma général de transmission turbo-codée par satellite est donné par la figure 6.1.

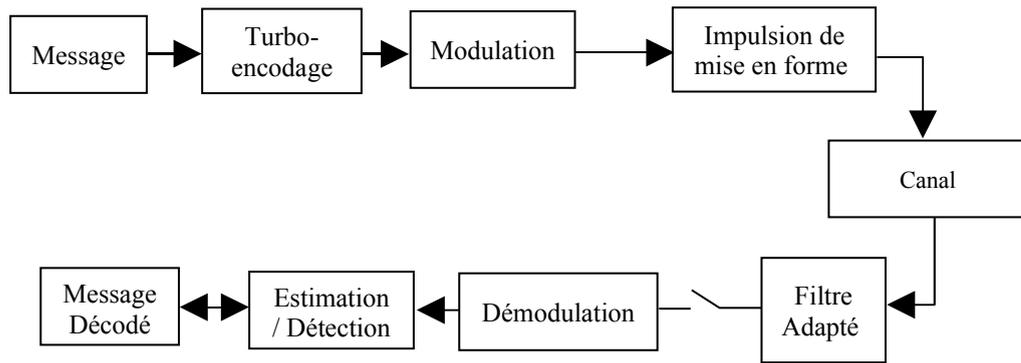


Fig 6. 1: Modèle de transmission turbo-codée par satellite

La sortie de l'échantillonneur à l'instant  $t=kT$  est modélisée comme dans le chapitre précédent par

$$y_k = Ae^{[2\pi \Delta f kT + \theta]} \sum_m d_m l(kT - mT - \tau) + n_k \tag{6.1}$$

où  $A$  représente l'amplitude du signal reçu,  $\theta$  représente le déphasage introduit par le canal,  $\Delta f$  désigne l'écart par rapport à la fréquence porteuse due à l'effet Doppler,  $\tau$  est la phase de l'horloge d'échantillonnage du récepteur  $l(t)$  est la forme d'onde du signal. Cette fois-ci, **les symboles QPSK**  $d_m$  résultent de l'encodage du message par le turbo-code de la figure 4.15. Le signal reçu est en outre entaché d'un bruit blanc additif gaussien  $n_k$  de puissance  $N_0$ .

## 6.2 Estimation particulière du canal conjointement avec le turbo-décodage

Le récepteur utilisé est celui de la figure 5.3, où le décodeur BCJR correspondant à un code convolutif est remplacé par le turbo-décodeur décrit dans la section 4.2.8.3.

### 6.2.1 Méthode de séquençement

Deux niveaux d'itérations sont présents dans le récepteur proposé comme il est montré par la figure 6.2. Un niveau concerne les itérations classiques du turbo-décodeur et l'autre concerne les itérations successives de filtrage particulière pour estimer le canal. Nous noterons  $p$  le nombre d'estimations du canal et  $t$  le nombre d'itérations du turbo-décodeur entre deux estimations du canal. Les paramètres  $p$  et  $t$  sont optimisés empiriquement afin d'obtenir un taux d'erreur binaire satisfaisant.

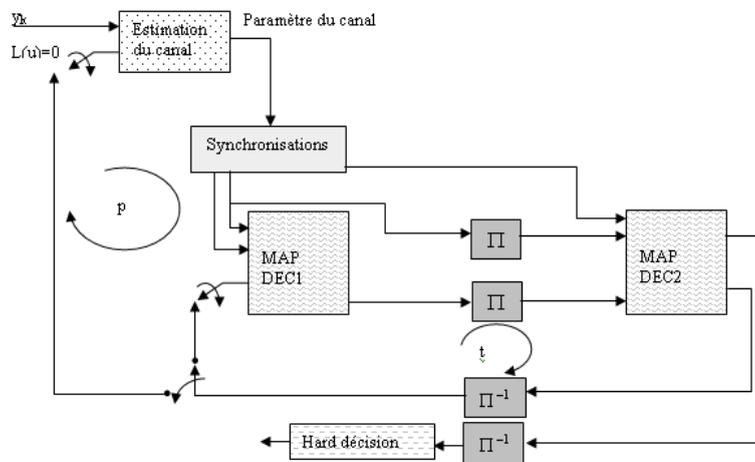


Fig 6.2: Structure du récepteur

## 6.2.2 Résultats de simulations

Les paramètres du canal satellite sont les mêmes que ceux employés à la section 4.1.3 dans le cas d'un encodeur convolutif, à savoir l'amplitude  $A$  est fixée à 1 et la fréquence Doppler normalisée  $\Delta fT$  à  $10^{-2}$ . Pour chaque trame, la phase du canal  $\theta$  est tirée uniformément sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  et le retard  $\tau$  est tirée uniformément sur l'intervalle  $[-T/2, T/2]$ . Les trames sont générées à partir de paquets ATM encodés par le turbo-code duo-binaire de la figure. 4.20., avec un entrelaceur a double niveaux de taille 212 (§4.2.7.4). La modulation utilisée est la modulation QPSK. Des séquences d'apprentissage au nombre de  $N_t$ , sont insérées en début de trame comme dans la figure. 5.5. Le turbo-décodeur employé est celui de la figure 4.20 prenant en compte la technique de circulation de la section 4.2.8.3. De même, l'ordre de transmission de données est celui en 4.2.7.3, avec un rendement de codage  $\frac{1}{2}$  (§4.2.7.5). Comme dans le chapitre 5, l'estimation du canal satellite se fait par filtrage particulière de Dirac Gauss étendu avec l'initialisation prévue dans la section 5.5.

### 6.2.2.1. Le taux d'erreur binaire

Nous commençons par montrer la relation entre le taux d'erreur binaire et le taux d'erreur trame.

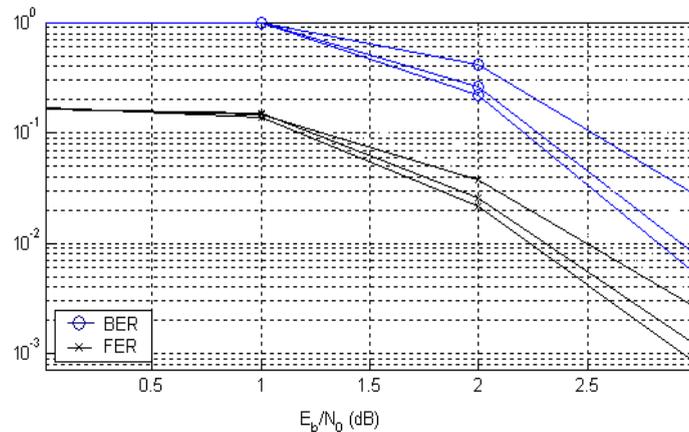


Fig 6.3: Performances en terme de taux d'erreur binaire et de taux d'erreur trame sur canal satellite, d'un turbocode duo-binaire.  $p=3$  estimations du canal. Nombre d'itération du turbo-code  $t=8$ . Nombre de séquence d'apprentissage  $N_t=8$ . Nombre de particules  $M=64$ .

### 6.2.2.2. L'effet de nombre de séquences d'apprentissage.

La figure 6.4 illustre le taux d'erreur trame (FER) en fonction du rapport signal sur bruit pour un turbo-code duo-binaire de rendement  $\frac{1}{2}$ . L'estimateur du canal utilise 64 particules. Le taux d'erreur trame est tracé pour chaque ré-estimation du canal. Le nombre d'itérations successives est égal à  $p=3$ . Le nombre d'itérations turbo-décodage est fixé  $t=8$  (ces itérations ne sont pas illustrées dans la figure). On peut observer que les performances dépendent fortement du nombre de séquences d'apprentissage  $N_t$ . En effet, en augmentant  $N_t$  on diminue le risque d'échec d'acquisition. On notera que pour  $N_t = 8$ , les performances obtenues se situent seulement à 1,1 dB des performances idéales à canal parfaitement connu après trois estimations du canal.

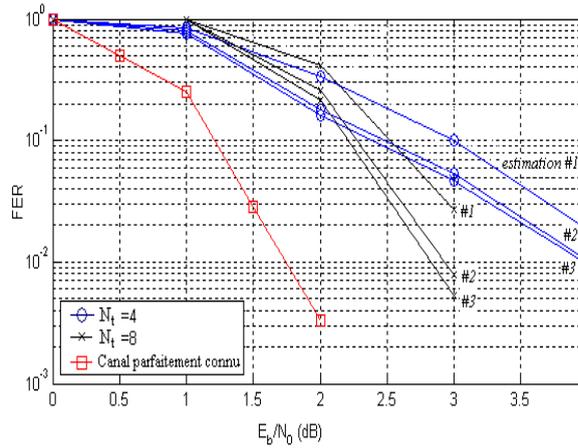


Fig 6.4: Performances d'un turbocode duo-binaire sur un canal satellite. Rendement de codage  $\frac{1}{2}$ ,  $p=3$  estimations du canal. Nombre d'itération du turbo-code  $t=8$ . Nombre de séquences d'apprentissage  $N_t=4$  et  $N_t=8$ .  $M=64$  particules

### 6.2.2.3. L'effet du nombre de particules du filtrage particulaire

Le filtrage particulaire utilisait jusqu'à maintenant 64 particules La figure 6.5 nous montre l'influence de nombre de particules sur la performance de l'estimation. On observe que l'utilisation 256 particules ne nous apporte pas beaucoup, et multiplie la complexité algorithmique par environ quatre.

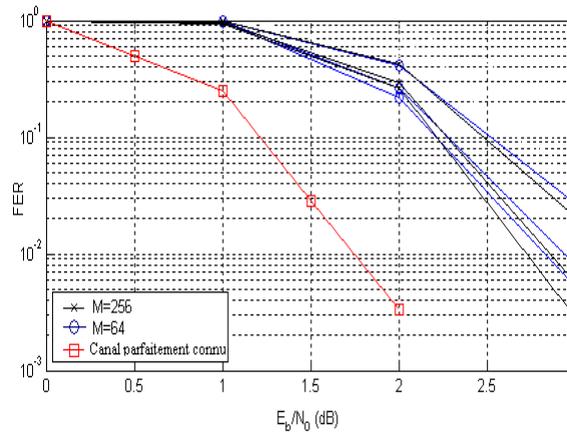


Fig 6.5: Performance, d'un turbocode duo-binaire sur un canal satellite. Rendement de codage  $\frac{1}{2}$ , 3 estimations du canal. Nombre d'itération du turbo-code  $t=8$ . Nombre de séquence d'apprentissage  $N_t=8$ . Nombre de particules 64, 256

### 6.2.2.4. Rendement différent de $\frac{1}{2}$

#### ● Rendement = $\frac{1}{3}$

La performance se dégrade de façon plus importante dans le cas du rendement  $\frac{1}{3}$ . La figure 6.6 illustre les performances du turbocode en utilisant 8 et 12 séquences d'apprentissage.

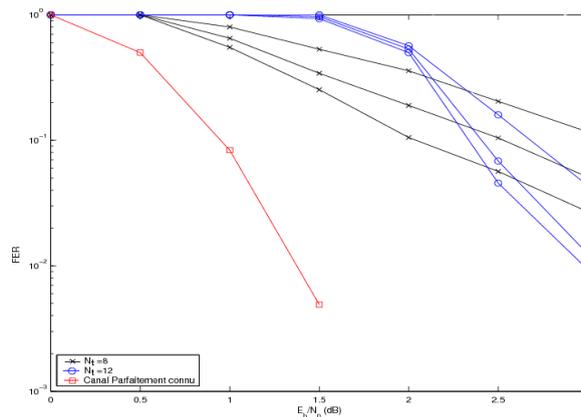


Fig 6.6: Performance sur canal satellite, d'un turbo-codage duo-binaire. Rendement de codage 1/3 ,  $p=3$  estimation du canal. Nombre d'itération du turbo-codage  $t=8$ . Nombre de séquences d'apprentissage  $N_t=8$  et  $N_t=12$ . 64 particules

Les simulations (figure 6.7) montrent que mettre plus de redondance au niveau de l'encodeur en passant d'un rendement  $\frac{1}{2}$  à  $\frac{1}{3}$  n'induit pas automatiquement une amélioration des performances, comme on pourrait s'y attendre. En effet, on observe qu'un taux d'erreur trame égal à  $10^{-2}$  est obtenu avec un estimateur de canal à 64 particules à la fois dans la figure 6.4 et dans la figure 6.6, pour  $N_t=8$  et  $N_t=12$ , respectivement. Ce résultat s'explique par le fait que le turbo-codage à rendement  $\frac{1}{3}$ , malgré un pouvoir de correction d'erreur supérieur, fonctionne à un rapport signal sur bruit plus faible, ce qui rend plus difficile l'acquisition des paramètres du canal par le filtre particulaire. Ceci se manifeste par le fait qu'il faut passer de  $N_t=8$  à  $N_t=12$  séquences d'apprentissage pour obtenir des performances acceptables. Nous en concluons que lorsque le canal est estimé par filtrage particulaire, le turbo-codage duo-binaire de rendement  $\frac{1}{3}$  n'apporte aucun bénéfice par rapport au code de rendement  $\frac{1}{2}$ .

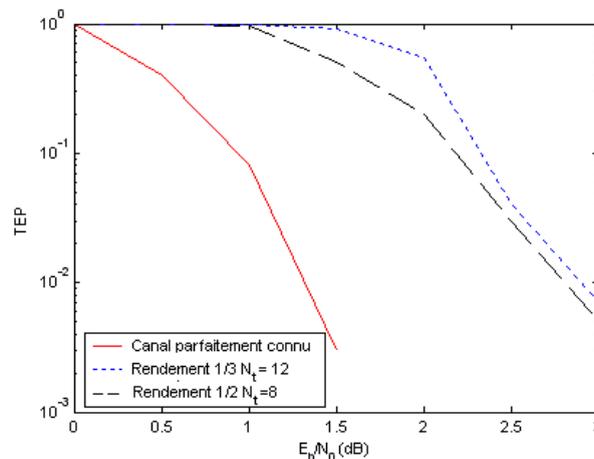


Fig 6.7: Performance sur canal satellite, d'un turbo-codage duo-binaire. Rendement de codage  $\frac{1}{2}$  &  $\frac{1}{3}$

### ● Rendement $>1/2$

Les performances des turbo-codes duo-binaires de rendement  $\frac{2}{3}$  et  $\frac{4}{5}$  sont présentés dans les figure 6.8 et 6.9, respectivement. On constate que le taux d'erreur trame obtenu avec un estimateur du canal à 64 particules n'est plus qu'à 0,5 dB des performances à canal parfaitement connu. Ceci s'explique par le fait que le point de fonctionnement pour un taux d'erreur trame donné, est repoussé vers un rapport signal sur bruit d'autant plus élevé que le rendement du code augmente. L'estimation du canal par le filtre particulaire s'en trouve alors facilité.

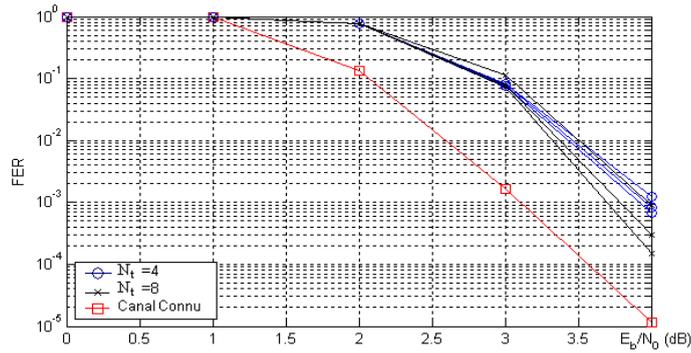


Figure 6. 8: Performance sur canal satellite, d'un turbocode duo-binaire. Rendement de codage  $2/3$ ,  $p=3$  estimation du canal. Nombre d'itération du turbo-code  $t=8$ . Nombre de séquences d'apprentissage  $N_t=8$ ,  $N_t=4$ . 64 particules

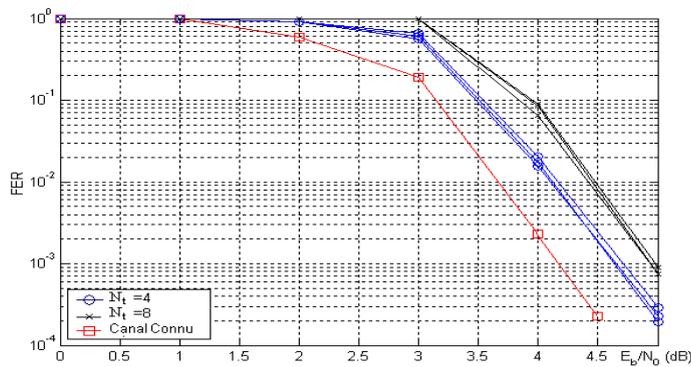


Fig 6.9: Performance sur canal satellite, d'un turbocode duo-binaire. Rendement de codage  $4/5$ ,  $p=3$  estimation du canal. Nombre de séquences d'apprentissage  $N_t=4$ ,  $N_t=8$ . 64 particules

### 6.2.2.5. Simulation avec bruit de phase

Considérons maintenant que la phase du canal satellite  $\theta$  n'est plus constante, mais sujette à un mouvement brownien. On supposera qu'à chaque nouveau symbole, la phase subit l'ajout d'un échantillon de bruit blanc gaussien d'écart-type  $\sigma_\theta=2\text{deg}$ . Les performances obtenues pour le turbocode duo-binaire de rendement  $1/2$  sont illustrées par la figure 6.10 avec une estimation de canal à 256 particules. Le nombre d'itérations successives pour l'estimation du canal est égal à  $p=8$ . Le nombre d'itérations de turbo-décodage entre chaque estimation du canal est fixée à  $t=8$ .

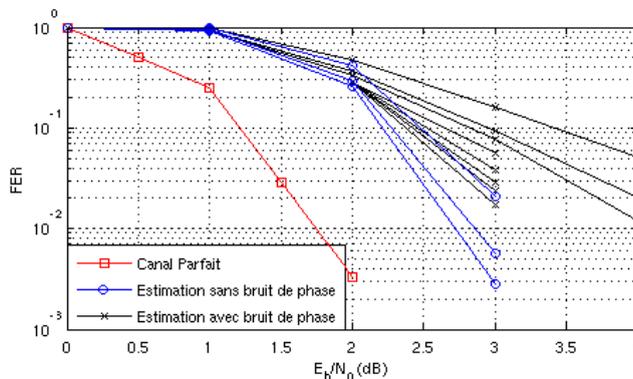


Fig 6.10 Performances d'un turbocode duo-binaire sur un canal satellite avec et sans bruit de phase. Rendement de codage  $1/2$ ,  $p=3$  estimations du canal,  $t=8$  itérations de turbo-décodage. Nombre de séquences d'apprentissage  $N_t=8$ .  $M=256$  particules.

### 6.3 Estimation particulière à minimum de variance marginal

Nous proposons maintenant d'étudier les performances des techniques à **redistribution conforme en loi**, sur la partie continue pour chaque état discret, introduites au chapitre 3, et de les comparer au filtrage particulière à maximum de vraisemblance trajectorien utilisé en 6.2.

Afin de mettre en oeuvre les techniques du chapitre 3, il faut modifier substantiellement le fonctionnement du récepteur décrit à la figure 6.2. Pour ce faire, nous travaillons avec l'espace d'état mixte discret/continu formé de l'état des codes constitutifs du turbo code et de la phase à estimer. La loi a posteriori des états d'un code constitutif est par nature une loi discrète. Par ailleurs, nous choisissons de paramétrer la loi (continue) de phase a posteriori sachant les états d'un code constitutif par une somme de Diracs pondérés. Il suffit alors de former un lisseur particulière en combinant un filtre avant et un filtre arrière à partir du principe énoncé en §3.3, dont les sorties seront les rapports de vraisemblance logarithmiques des symboles d'information. En utilisant cette technique pour chaque code constitutif, il restera à itérer les informations extrinsèques ainsi obtenues, comme il est naturel en turbo-décodage.

Plus précisément, la partie filtrage avant (ou arrière) du lisseur particulière à redistribution conforme en loi axe par axe se fera de la façon suivante. En ce qui concerne les états d'un code constitutif, si on conserve à chaque instant une particule par état, le mécanisme de prédiction/correction du filtrage particulière permet de calculer la loi a posteriori complète de tout l'espace d'état. Le rôle de la redistribution étant de réaffecter les particules dans les régions intéressantes de l'espace d'état, il n'y a pas de redistribution à effectuer pour l'état d'un code. Par contre, la redistribution conforme en loi de la phase sachant chaque état du code est nécessaire, car on a affaire à une loi continue. Cette redistribution pourra se faire soit par la technique de sélection du support de particules de Dirac introduite en §3.1.1, soit par la technique d'interpolation du support de particules de Dirac introduite en §3.1.2.2.

L'estimation à minimum a variance est faite sans aucune séquence d'apprentissage, et avec un seul niveau d'itération de turbo-détection (plus de détail dans le paragraphe suivant).

La figure 6.10 montre les performances de ces deux méthodes, sachant que la phase est simulé avec un bruit de processus de variance  $Q = 9 \text{ deg}^2$ . A titre de comparaison, les performances du turbo-décodage à canal connu et de la technique du filtrage particulière à maximum de vraisemblance trajectorien utilisée en 6.2, sont également présentées. Cette estimation utilise deux niveaux d'itérations d'estimation avec 8 estimations du canal, et itérations de turbo-décodage. On constate une nette amélioration du taux d'erreur trame en utilisant les techniques du chapitre 3. Cette expérience a aussi permis de confirmer la supériorité de la technique d'interpolation par rapport à la technique de sélection dans la redistribution axe par axe.

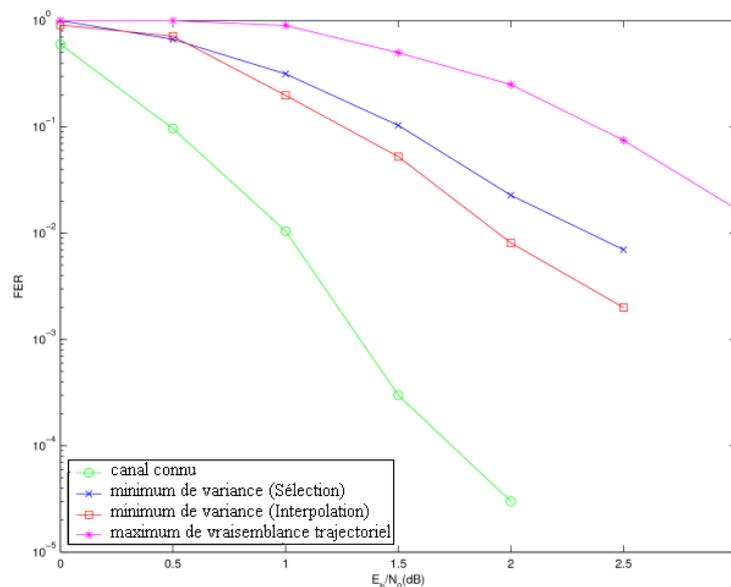


Fig 6.11 : Performances de la méthode utilisant la redistribution conforme en loi

## 6.4 Turbo-détection en présence forte de bruit de phase

Nous avons vu dans la section 6.2.2.5 que la détection semi-aveugle des turbo-codes sur un canal satellite avec un nombre faible de séquences d'apprentissage, demande une complexité calculatoire très importante. Nous allons maintenant nous intéresser au même problème, mais dans un contexte aveugle, à savoir en l'absence de séquences d'apprentissage.

Afin d'examiner de plus près cette problématique critique, nous allons simplifier le modèle du canal satellite de manière à ne considérer que la phase inconnue, entachée d'une dérive brownienne modélisant le bruit de phase. Une solution envisageable consiste comme précédemment à estimer conjointement la phase et le code sur un modèle combiné de l'espace d'état canal/code. En outre, nous allons montrer comment simplifier considérablement la complexité de la détection aveugle, en appliquant l'estimation de phase conjointement avec le décodage seulement au premier code constitutif d'un turbo-code.

Dans les applications telles que les terminaux destinés au grand public, les récepteurs doivent être tolérants à un bruit de phase élevé pour pouvoir utiliser des dispositifs électroniques à faible coût [Benedetto 05]. Malheureusement, les méthodes de synchronisation de phase classiques échouent aux rapports signal sur bruit visés par les turbo-codes, faute de pouvoir corriger les problèmes d'ambiguïté de phase et de saut de cycle. Récemment, plusieurs solutions efficaces sont apparues dans la littérature, qui remplacent la synchronisation traditionnelle par les récepteurs itératifs aidés par le décodeur. Le principe de base de ces méthodes est de traiter le problème complexe de la démodulation et du décodage conjoint, à l'aide de modules simples échangeant des informations. Le lecteur pourra se référer à [Anastasopoulos 07], [Herzet 07] pour un aperçu exhaustif des méthodes existantes. Les techniques proposées jusqu'ici, ont en commun de contourner le problème d'ambiguïté de phase, soit par l'utilisation d'encodage différentiel [Peleg 00], soit par l'ajout de symboles pilotes [Noels 05]-[Colavolpe 05]. Dans la suite de ce chapitre, nous allons considérer une alternative qui consiste à résoudre les ambiguïtés de phase en exploitant le fait que le message est encodé. Pour ce faire, nous utiliserons un lisseur appliqué à l'estimation conjointe du code et de la phase discrétisée.

Nous étudierons le décodage itératif, en présence de bruit de phase, du turbo-code duo-binaire pour les transmissions par satellite de DVB-RCS introduit à la section 4.2.7. Nous supposons que le récepteur aveugle n'a de connaissance a priori ni de la phase du signal reçu, ni de l'état initial/final des codes. Cette dernière hypothèse provient de la fermeture circulaire des treillis des codes convolutifs employés (cf. section 4.2.4.2). En réalité, nous verrons que l'estimation conjointe de la phase et du code n'est indispensable que pour le premier code convolutif constitutif du turbo-code, à condition d'exploiter judicieusement l'ordre de transmission des symboles en sortie de l'encodeur. Après une marginalisation appropriée de la phase, le décodage du second code convolutif se réduit à l'algorithme BCJR classique à phase connue, déjà exposé à la section 4.2.5.4, précédé par une étape de prologue (§4.2.8.4) [DVB 03]. Les simulations numériques montrent que le décodage aveugle atteint des performances très proches du décodage à phase parfaitement connue du récepteur.

### 6.4.1 Hypothèses concernant le canal satellite

Par la suite on suppose que le système de transmission peut être modélisé par la figure 6.12:

- Chaque mot de code correspond à  $K$  couples de bits d'information.
- Les données sont transmises dans l'ordre suivant: symbole systématique  $i_k$ , suivi du symbole redondant du premier encodeur  $r_k^1$ , suivi du symbole redondant du deuxième encodeur  $r_k^2$  (Figure 6.12) pour  $k=1, \dots, K$ . Notons que ceci ne correspond plus à l'ordre habituel en DVB-RSC [DVB 03], (Figure 4.17). Les observations bruitées correspondantes en sortie du canal sont  $y_k$ ,  $z_k^1$  et  $r_k^2$ , quand les commutateurs sont en position 1, 2 et 3, respectivement.
- On suppose que le retard  $\tau$  est connu et égal à zéro, ainsi que le décalage Doppler, déjà traités par ailleurs

- Un système de contrôle automatique de gain fait en sorte que l'amplitude  $A$  soit proche de 1.

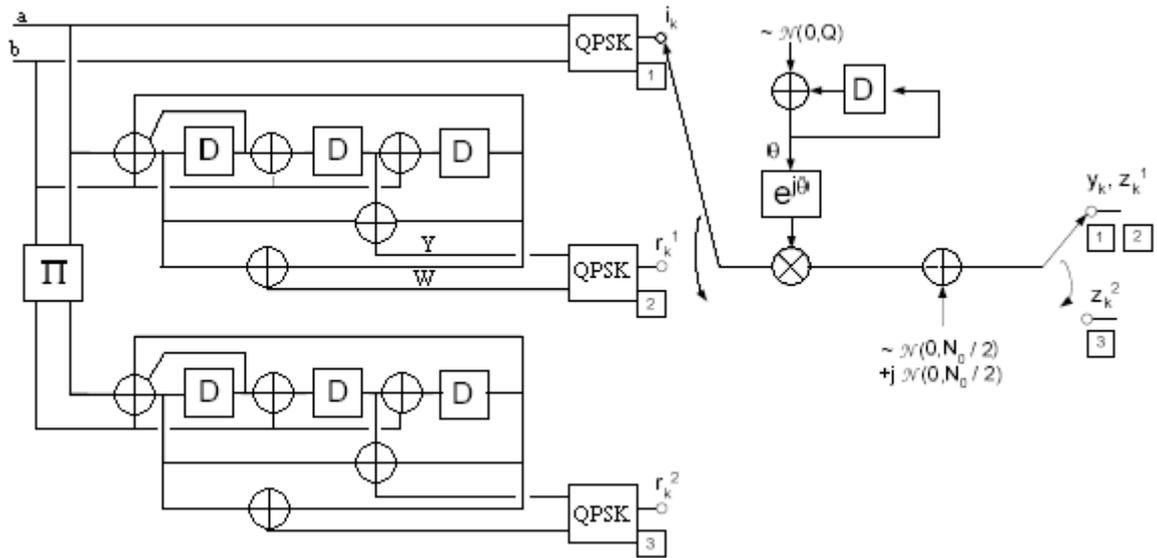


Fig 6.12. Code duo-binaire de la norme DVB-RCS et modèle du canal de transmission avec bruit de phase. La position des commutateurs est indexée par les numéros 1,2 et 3 sur la figure. D désigne un circuit introduisant un délai de un instant discret.

### 6.4.2 Présentation du système d'estimation

#### 6.4.2.1. Treillis des codes constitutifs

Soit un code convolutif de rendement  $\frac{1}{2}$ . L'état de l'encodeur à l'instant  $k$ , est un processus de Markov à états finis prenant ses valeurs dans  $\{0, 1, \dots, S-1\}$ , où  $S$  désigne le nombre total d'états du code. Nous supposons que chaque transition d'état de l'instant  $k-1$  à l'instant  $k$  dans l'encodeur, notée  $(s_{k-1}, s_k)$ , est associée à une sortie unique formée d'un symbole d'information, suivi d'un symbole redondant. Les symboles complexes transmis à l'instant  $k$ , sont choisis dans un alphabet complexe fini  $M$ -aire,  $A = \{a_1, \dots, a_M\}$ . En outre, nous supposons qu'il y a  $E$  transitions entrantes et sortantes pour chaque état du code.

**Exemple:** La figure 4.16 donne la représentation en treillis des transitions valides de type  $(s_{k-1}, s_k)$ , pour les codes constitutifs du turbo-code duo-binaire de la figure 4.15. Avec les notations précédentes, nous avons  $S=8$  états possibles,  $E=4$  transitions entrantes et sortantes par état et  $M=4$  symboles complexes possibles, si l'on considère la modulation QPSK.

#### 6.4.2.2. Treillis de phase

Nous rappelons les principes de l'estimation de phase avec un modèle phase quantifiée [Komminakis 01]. Dans un canal à bruit de phase, nous supposons que la phase à instant  $k$ ,  $\theta_k$ , est un processus continu de Markov modelisé comme un marche aléatoire par:

$$\theta_k = \theta_{k-1} + w_k \tag{6.2}$$

Où  $w_k \sim N(0, Q)$  est un bruit blanc gaussien de variance.

Comme dans [Peleg 00], [Colavolpe 05], on suppose qu'une version quantifiée  $\phi_k$  de la phase continue  $\theta_k$ , peut prendre seulement  $L$  valeurs discrètes  $2\pi l/L$ ,  $l = 0, \dots, L-1$ . Nous construisons un treillis de phase selon les probabilités de transition suivantes :

$$p\left(\phi_k = \frac{2\pi m}{L} / \phi_{k-1} = \frac{2\pi l}{L}\right) = \begin{cases} P_\theta/2 & \text{si } m = l + 1 \text{ mod } L \\ 1 - P_\theta & \text{si } m = l \\ P_\theta/2 & \text{si } m = l - 1 \text{ mod } L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.3)$$

où  $P_\theta/2$  est choisi comme la probabilité que l'incrément gaussien continu de phase  $w_k$  soit plus grand que  $\pi/L$ . i.e.

$$P_\theta/2 = 1 - \Phi\left(\frac{\pi}{\sqrt{(Q)}L}\right)$$

avec 
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$P_\theta$  est donc la probabilité de passer d'un état de phase aux deux états adjacents

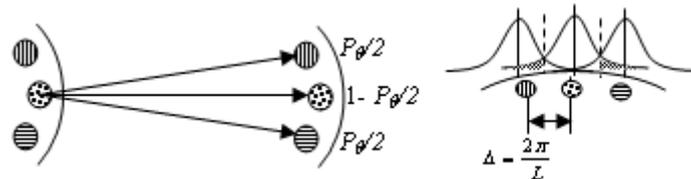


Fig 6.13:a. Grille fixe

b. Probabilité de saut

Exemple : La figure. 6.14 donne la représentation en treillis des transitions permises de phase de type  $(\phi_{k-1}, \phi_k)$  pour  $L = 4$  niveaux de quantification. Chaque transition d'état est associée à la probabilité correspondante de transition. Évidemment, il y a 3 transitions entrantes et sortantes pour chaque état de phase.

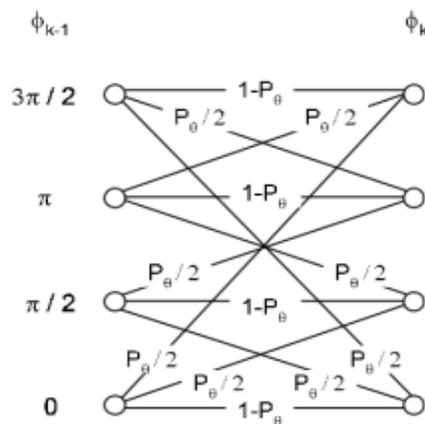


Fig 6.14. représentation en treillis de la phase discrétisée avec  $L = 4$  niveaux de quantification.

### 6.4.2.3. Treillis conjoint phase-code

Pour mettre en évidence l'état conjoint phase-code, on prend l'exemple suivant: on suppose qu'on a un code de parité dont le treillis à  $S=2$  états est illustré par la figure 6.15.

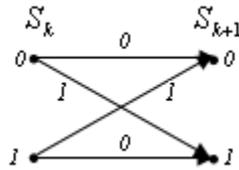


Fig 6.15: Treillis d'un code de parité

La phase est supposée modélisée par le treillis à L=4 états de la figure 6.14.

On en déduit qu'on a L×S=8 états phase-code à distinguer. La figure 6.16 montre le treillis relatif à la modélisation conjointe code-phase résultante.

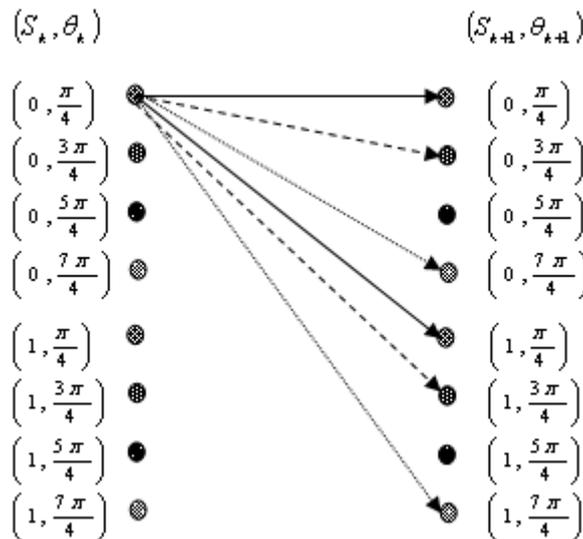


Fig 6.16: Treillis conjoint phase-code

### 6.4.3 Turbo-détection aveugle Décodage du premier code constitutif

Après une discrétisation de la phase avec un nombre L suffisant de points de quantification, construisons le treillis phase-code correspondant au premier code convolutif constitutif du turbo-code de la norme DVB-RCS. Il suffit alors d'appliquer l'algorithme BCJR [Bahl 74], formé d'un filtrage avant, d'un filtrage arrière et d'une étape de lissage à ce treillis conjoint en se servant uniquement du jeu d'observations correspondant au premier code constitutif, soit  $y_k, z_k^l, k = 1, \dots, K$ , où K est le nombre total de symboles d'information. En turbo-décodage, on a besoin des probabilités a posteriori symbole-par-symbole

$$P(i_k=a_m | y_{1:K}, z_{1:K}^l), \text{ pour } m=1, \dots, M$$

obtenues en sortie de l'algorithme BCJR en marginalisant la phase. De même, on obtient la loi de phase discrète a posteriori

$$P(\phi_k=2\pi l/L | y_{1:K}, z_{1:K}^l), \text{ pour } l=0, \dots, L-1$$

en marginalisant les états du code. La distribution initiale de phase étant inconnue du récepteur, on choisit comme loi de phase initiale une loi discrete uniforme à l'instant  $k=0$  pour le filtre avant et à l'instant  $k=K$  pour le filtre arrière. De même, à cause de l'utilisation de codes à fermeture de treillis en norme DVB-RCS, l'état initial du code est inconnu du récepteur. On choisit donc comme distribution initiale des états, une loi discrète uniforme à l'instant  $k=0$  pour le filtre avant et à l'instant  $k=K$  pour le filtre arrière.

### 6.4.3.1. Décodage du second code constitutif (avec redondance entrelacée)

Suivant [Kominakis 01], on pourrait décoder le second code constitutif exactement de la même manière que le premier, en construisant le treillis conjoint phase-code correspondant et en appliquant l'algorithme BCJR. Il n'y aurait plus ensuite qu'à itérer des informations extrinsèques souples entre les deux décodeurs, comme le font tous les turbo-décodeurs. Afin de limiter la complexité, nous introduisons pour les besoins du récepteur un modèle simplifié du canal, illustré par la figure 6.17. Cependant, le canal effectivement simulé reste celui de la figure 6.12. Fondamentalement, le modèle de la figure 6.16 fait l'approximation suivante: à l'instant  $k$ , la même phase affecte l'observation correspondant au symbole d'information  $y_k$ , le symbole redondant du premier encodeur  $z_k^1$  et le symbole redondant entrelacé du deuxième encodeur  $z_k^2$ . Ceci entraîne l'absence d'incrément de phase quand les commutateurs sont en position 2 et 3. Ceci doit être compensé en triplant la variance de l'incrément de phase continu affectant le prochain symbole d'information, lorsque le commutateur retourne en position 1. Pour le modèle à phase discrète équivalent, cela revient à choisir :

$$P_\theta = 1 - \Phi\left(\frac{\pi}{\sqrt{(3Q)L}}\right)$$

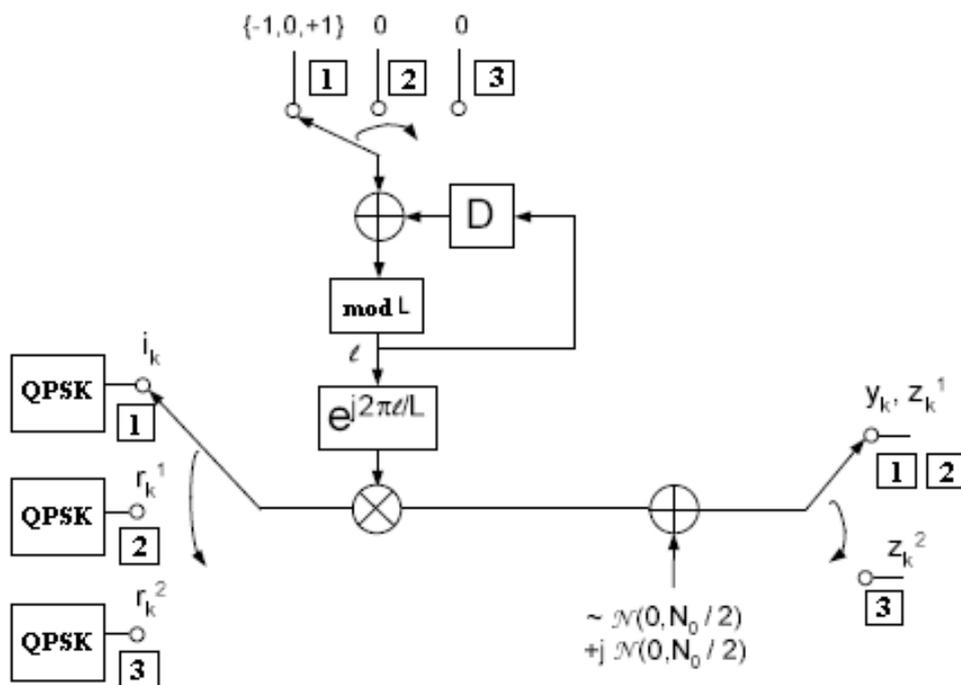


Fig 6.17: Modèle à phase discrète. La position des commutateurs est indexée par les numéros 1, 2 et 3 sur la figure.  $D$  désigne un circuit introduisant un délai de un instant discret.

Supposons maintenant que l'estimation aveugle de la phase et le décodage conjoint a été effectué pour le premier code constitutif. Puisque par hypothèse la même phase  $\phi_k$  affecte les observations  $y_k$ ,  $z_k^1$  et  $z_k^2$ , on peut moyenner la phase correspondant à  $z_k^2$ , en utilisant les statistiques de phase calculées par le décodeur du premier code. Par conséquent, le décodage du second code se réduit à l'algorithme BCJR classique avec prologue, exposé à la section 4.2.8.2- 4.2.8.3. Ainsi, la complexité est considérablement réduite.

Le théorème suivant donne la vraisemblance de  $z_k^2$  étant donné  $r_k^2 = a_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , qui est exactement la quantité nécessaire à un algorithme BCJR pour traiter les observations correspondant aux symboles redondants du deuxième encodeur.

**Théorème :**

La vraisemblance de l'observation  $z_k^2$ , sachant le symbole complexe correspondant à la redondance du deuxième encodeur  $r_k^2 = a_m$ ,  $m = 1 \dots M$ , peut être écrite comme:

$$p(z_k^2 / r_k^2 = a_m, y_{1:K}, z_{1:K}^1) \propto \sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l \exp\left(-\frac{|z_k^2 - a_m e^{j2\pi l/L}|}{N_0}\right)$$

$$\text{où } \lambda_l = p(\phi_k = 2\pi \frac{l}{L} / y_{1:K}, z_{1:K}^1) \quad l=0, \dots, L-1 \quad (6.4)$$

est la loi discrete a posteriori de la phase, calculée par le décodeur aveugle du premier encodeur.

*Preuve:*

$$\begin{aligned} p(z_k^2 / r_k^2 = a_m, y_{1:K}, z_{1:K}^1) &= \sum_{l=0}^{L-1} p(z_k^2, \phi_k = \frac{2\pi l}{L} / r_k^2 = a_m, y_{1:K}, z_{1:K}^1) \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} p(z_k^2 / \phi_k = \frac{2\pi l}{L}, r_k^2 = a_m, y_{1:K}, z_{1:K}^1) \times p(\phi_k = \frac{2\pi l}{L} / r_k^2 = a_m, y_{1:K}, z_{1:K}^1) \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} p(z_k^2 / \phi_k = \frac{2\pi l}{L}, r_k^2 = a_m) \times p(\phi_k = \frac{2\pi l}{L} / y_{1:K}, z_{1:K}^1) \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que la probabilité de  $z_k^2$  est entièrement déterminée, sachant la phase  $\phi_k$  et le symbole complexe  $r_k^2$ . En effet, d'après le modèle adopté à la figure 6.17:

$$p(z_k^2 / r_k^2 = a_m, \phi_k = \frac{2\pi l}{L}) = \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{|z_k^2 - a_m e^{j2\pi l/L}|^2}{N_0}\right) \quad (6.5)$$

Par ailleurs, il est raisonnable de supposer que la phase  $\phi_k$  est indépendante du symbole transmis  $r_k^2$ . En supposant que le décodage aveugle a été exécuté pour le premier code,  $\lambda_k = p(\phi_k = 2\pi l/L / y_{1:K}, z_{1:K}^1)$ ,  $l=0, \dots, L-1$  est disponible pour  $l = 0 \dots L-1$ . Ceci termine la preuve.

*Remarque :* Le résultat (6.5) est intuitivement parlant. La vraisemblance de l'observation du deuxième décodeur est une somme pondérée, où chaque terme correspond à une valeur discrète possible de phase, et les poids sont la loi de phase discrète à la sortie du premier décodeur.

Un inconvénient évident de cette méthode est que, quand le premier décodeur n'estime pas correctement la loi de phase a posteriori, le deuxième décodeur ne peut pas fonctionner correctement. Nous verrons par simulation que cela ne pose pas de problème en pratique.

### 6.4.3.2. Structure itérative de décodage

La structure itérative proposée pour le récepteur est illustrée dans figure 6.18.

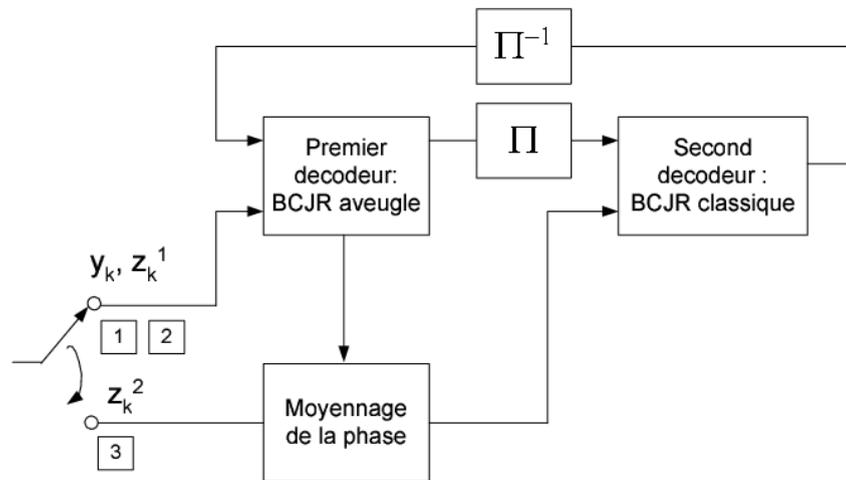


Fig 6.18 Structure itérative du turbo-décodeur aveugle

Ce dispositif itère des informations extrinsèques pour les symboles d'information entre un décodeur BCJR aveugle pour le premier code constitutif et un décodeur BCJR classique pour le second code constitutif. Pour plus de détails, on se référera à la littérature classique sur turbo-décodage [Berrou 93].

## 6.4.4 Résultats

On considère la transmission de paquets ATM formées de  $K = 212$  couples de bits de données aléatoires, modulés en QPSK. On travaille toujours sans symboles pilotes. Le turbo-code duo binaire utilise un entrelaceur de taille 212. Le turbo-décodage utilise la structure de la figure. 6.18.

On travaille toujours avec rendement de codage égal à  $1/3$  et un ordre de transmission conforme à la figure 6.11. La phase à l'instant initial  $k=0$  est simulée selon un loi uniforme sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  et le bruit de phase est simulé avec un bruit de processus de variance  $Q = 9 \text{ deg}^2$ . On étudiera quel Doppler  $\Delta f$  peut être toléré par le démodulateur aveugle, sans ajouter une nouvelle variable d'état. Les autres paramètres du canal comme l'amplitude et le retard sont supposés parfaitement connus.  $E_b$  désigne l'énergie moyenne par bit d'information.

### 6.4.4.1. Décodage aveugle du premier code constitutif (première itération)

Nous considérons d'abord le décodage aveugle du premier code constitutif, pendant la première itération du turbo-décodage. Cette étape de décodage est critique. En effet si la trajectoire de la phase et le message binaire sont récupérés avec peu d'erreurs pendant cette étape de décodage, les itérations suivantes de turbo-décodage se résument à une convergence locale vers le mot de code et la phase corrects. La figure 6.19 montre une réalisation à un instant donné de la loi marginale a posteriori de la phase, calculée par le filtre avant, le filtre arrière et le lisseur BCJR aveugle présenté à la section 4.2.8.3.

Ici, le rapport signal sur bruit est  $E_b/N_0 = 2 \text{ dB}$  et  $L=16$ . On observe sur cet exemple que la loi de phase filtrée avant et arrière est multimodale, à cause du problème d'ambiguïté de phase. En fait, la multimodalité disparaît quelques instants plus tard, grâce à l'information apportée par les observations futures. Le fait que la discrétisation soit capable de prendre en compte correctement cette multimodalité est un avantage indiscutable par rapport aux algorithmes classiques de synchronisation de type boucle à verrouillage de phase, qui dans de telles situations sont sujettes à des sauts de cycle entraînant la perte des données pour un

long moment [Meyr 98]. Par contre, on constate que la loi de phase lissée a une allure typiquement unimodale. Ceci explique pourquoi le moyennage de la phase proposé par le théorème I fonctionne, permettant ainsi de se passer d'un décodage et d'une estimation de phase conjointe pour le second code constitutif.

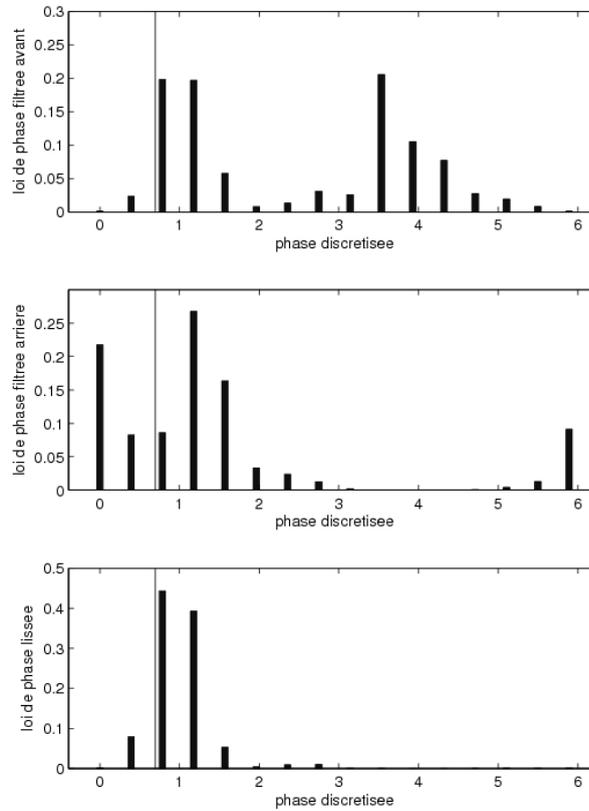


Fig 6.19 Exemple de loi de phase a posteriori obtenue par filtrage avant, filtrage arrière et lissage pour  $L=16$  points de discrétisation, et  $E_b/N_0=2dB$ . L'abscisse donne les valeurs de phase  $2\pi l/L$ ,  $l = 0, \dots, L-1$ . La position de la ligne verticale donne la valeur vraie de la phase.

Le Tableau 6.1 donne la loi marginale des états de code au même instant et pour la même réalisation que la phase illustrée à la figure 6.19. En utilisant le critère du maximum de vraisemblance, le filtre avant (resp. arrière) choisirait l'état 6 (resp. l'état 7) comme état estimé. Ceci correspondrait à une décision erronée, puisque le véritable état est 2. On voit que seul le lisseur trouve l'état correct a cet instant précis.

| État de code | filtre avant | filtre arrière | lissage      |
|--------------|--------------|----------------|--------------|
| 0            | 0.042        | 0.226          | 0.100        |
| 1            | 0.063        | 0.072          | 0.042        |
| 2            | 0.139        | 0.164          | <b>0.460</b> |
| 3            | 0.151        | 0.061          | 0.206        |
| 4            | 0.013        | 0.061          | 0.006        |
| 5            | 0.050        | 0.101          | 0.037        |
| 6            | <b>0.351</b> | 0.097          | 0.090        |
| 7            | 0.191        | <b>0.248</b>   | 0.058        |

Exemple de loi a posteriori de l'état du code, calculé par le filtre avant, le filtre arrière et le lisseur pour  $L=16$  niveaux de discrétisation de phase et  $E_b/N_0=2dB$ . L'état réel du code est 2.

La figure 6.20 illustre l'erreur quadratique moyenne (EQM) modulo  $2\pi$  sur la phase, pour la première itération de décodage aveugle du premier code constitutif, obtenue par simulations de Monte-Carlo pour  $L=16$  discrétisations de phase.

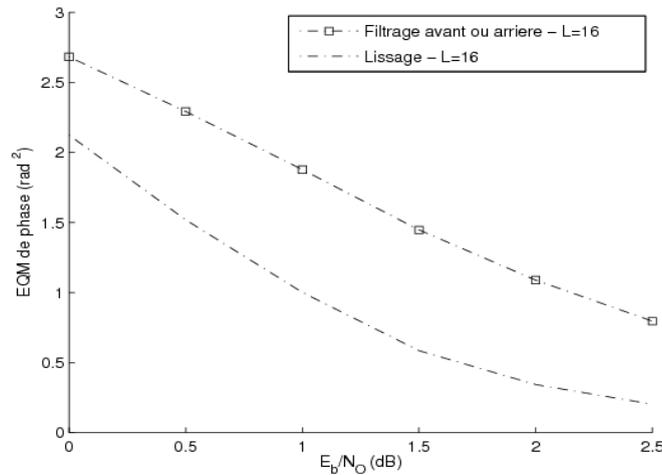


Fig 6.20: EQM de la phase modulo  $2\pi$  ( $\text{rad}^2$ ) en fonction  $E_b/N_0$  (dB) après le décodage aveugle du premier code constitutif (première itération de turbo-décodage).

#### 6.4.4.2. Turbo-décodage aveugle

La figure 6.21 montre les performances en terme de taux d'erreur trame après 15 itérations de turbo décodage aveugle pour le turbo-code de la norme DVB-RCS. Lorsque la phase est discrétisée avec  $L = 8$  valeurs, la dégradation par rapport à un canal parfaitement connu au récepteur n'est que de 0,7 dB. On peut observer une petite amélioration de 0.1-0.2 dB en augmentant le nombre de discrétisations à  $L=16$  niveaux de quantification, mais au prix d'une augmentation substantielle de la complexité de calcul. Ce résultat indique qu'il n'y a pas beaucoup à gagner en augmentant le nombre de niveaux de quantification au-delà de  $L=8$ .

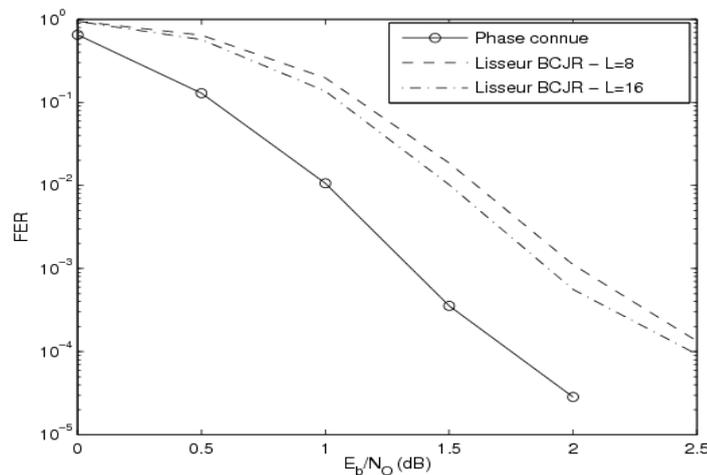


Fig 6.21: Taux d'erreur trame après 15 itérations de turbo-décodage quand le décodeur aveugle du premier code constitutif emploie une discrétisation de phase avec  $L = 8$  (tirets), une discrétisation de phase avec  $L = 16$  (tiret-pointillés) et l'algorithme BCJR à canal parfaitement connu (trait plein).

Pour bien montrer l'efficacité des itérations, la figure 6.22 illustre l'évolution de l'erreur quadratique moyenne de l'estimation de phase lissée en fonction des itérations, paramétrée par plusieurs valeurs de rapport signal sur bruit. Le nombre de discrétisations de phase est égale à  $L=16$ .

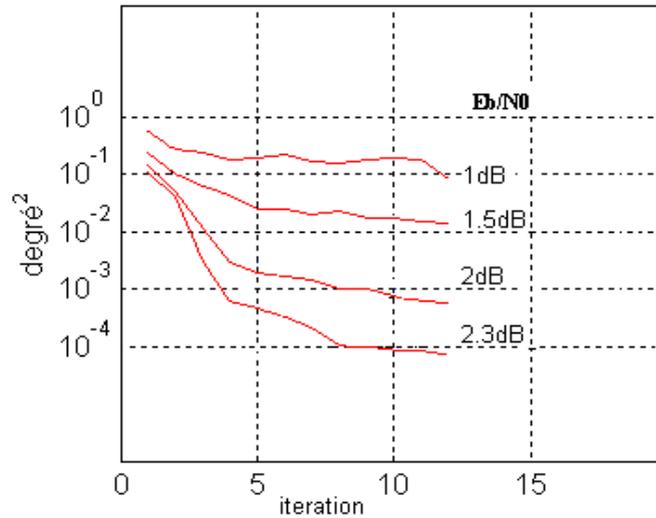


Fig 6.22: EQM de phase ( $\text{deg}^2$ ) en fonctions des itérations –  $L=16$ .

On peut remarquer qu'à  $E_b/N_0$  faible, les itérations successives ne permettent pas de corriger la trajectoire de phase. Ceci s'explique par la présence de trames pour lesquelles l'acquisition de phase échoue à faible rapport signal sur bruit, faisant ainsi stagner l'erreur quadratique moyenne sur la phase, malgré les itérations successives. Lorsque le rapport signal sur bruit dépasse 1,5dB, les itérations successives améliorent l'estimation de phase pour la quasi totalité des trames.

#### 6.4.4.3. Effet du bruit de phase

Jusqu'ici, la variance du bruit de processus permettant de simuler le bruit de phase était fixée à  $Q=9 \text{ deg}^2$ . La figure 6.23 présente le taux d'erreur binaire, et de trame, pour différentes valeurs de la variance du bruit de processus  $Q$ . Le nombre de particule vaut 16, avec 12 itérations de turbo-décodage. Lorsque le bruit de phase diminue, les performances se rapprochent de l'optimum à canal connu.

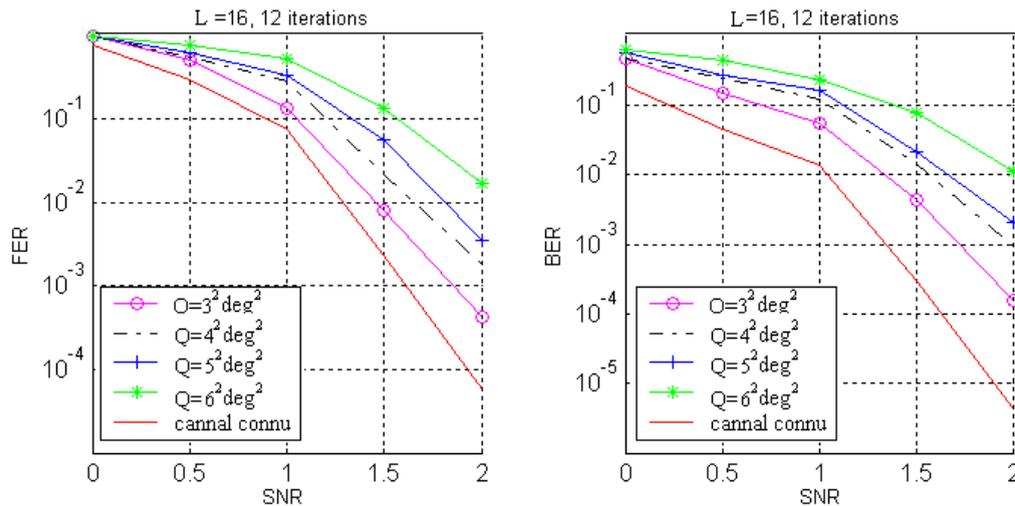


Fig 6.23: Taux d'erreur trame (à gauche) et taux d'erreur binaire (à droite), après 12 itérations de turbo-décodage aveugle pour différentes valeurs de la variance du bruit de processus  $Q$  ( $\text{deg}^2$ ) correspondant au bruit de phase.

#### 6.4.4.4. Effet d'une fréquence Doppler résiduelle non-nulle

Revenons maintenant à la valeur habituelle  $Q=9 \text{ deg}^2$ . Les simulations précédentes supposent que la fréquence Doppler  $\Delta f$  est constante et connue du récepteur. On suppose maintenant que  $\Delta f$  est connu à une incertitude normalisée près, de valeur  $\delta f T$ . Le récepteur ne tente pas d'estimer la valeur de la fréquence Doppler résiduelle normalisée  $\delta f T$ , telle que  $\Delta f = \Delta f + \delta f$ . Au lieu de cela, nous misons sur la capacité de l'estimation conjointe de phase, à tolérer un Doppler résiduel non-nul en plus du bruit de phase. La courbe de la figure 6.24 montre la capacité de l'algorithme à suivre la phase  $\theta$  pour différentes valeurs de  $\delta f$ .

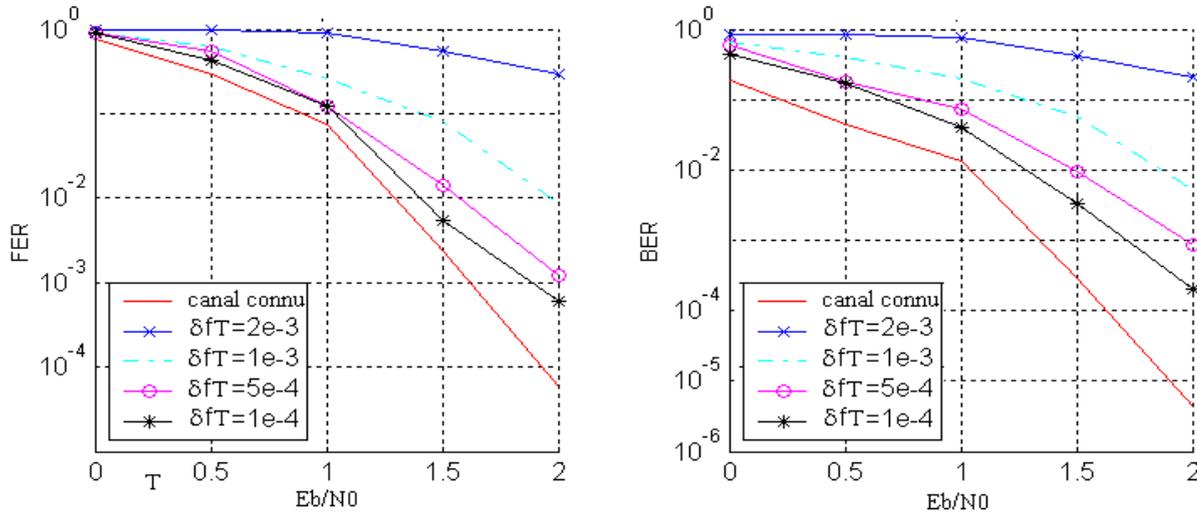


Fig 6.24: Taux d'erreur trame (à gauche) et taux d'erreur binaire (à droite), après 12 itérations de turbo-décodage aveugle pour différentes valeurs de  $\delta f T$  et  $Q=9 \text{ deg}^2$ .

Enfin, la figure 6.25 illustre l'erreur quadratique moyenne de la phase (dans ce cas entachée de bruit de phase ainsi que d'effet Doppler).

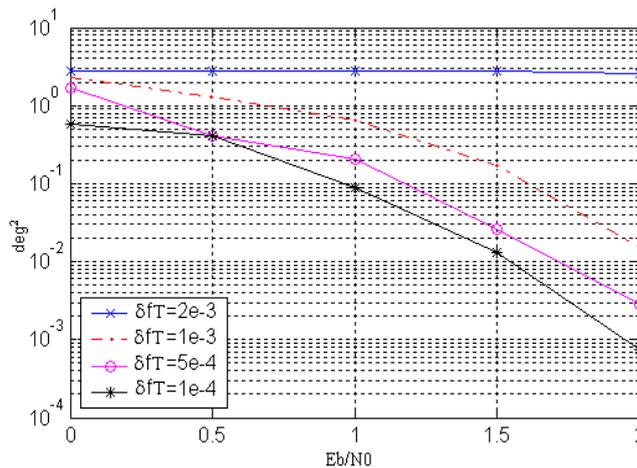


Fig 6.25: Erreur quadratique moyenne de la phase lissée après 12 itérations de turbo-décodage aveugle pour différentes valeurs de  $\delta f T$  et  $Q=9 \text{ deg}^2$ .

On peut conclure que jusqu'à  $\delta f T=1 \times 10^{-3}$ , l'algorithme est capable d'estimer la phase sans augmenter le nombre de variables d'état du système. L'effet Doppler ajoute un bruit de phase de  $(2 \times \pi \times 10^{-3} \times 180) / \pi = 0.36$  degrés/symbole pour  $\delta f T=1 \times 10^{-3}$ . Le long de la trame, la phase tourne donc de  $0.36 \times 212 \approx 76$  degrés, ce qui explique la perte de performance observée.

## 6.5 Conclusion

Nous avons considéré ici le problème de modélisation et réception des messages turbo-codes, transmis à travers un canal satellite, nous avons présenté la solution avec trois options:

1- Représentation non-fixe au sens de maximum de vraisemblance: Deux niveaux d'itérations ont été présents dans ce récepteur. Un niveau concerne les itérations classiques du turbo-décodeur, pour estimer le code et l'autre concerne les itérations successives de filtrage particulière à maximum de vraisemblance trajectorien pour estimer le canal, mais cette méthode a toujours besoin de séquence d'apprentissages.

2- Représentation non-fixe au sens de minimum de variance marginal: la solution est basée sur une Filtrage/Lissage particulière aveugle, utilise la redistribution en loi (Sélection ou interpolation), pour la partie continu du système (c'est la phase ici), pour chaque état de code.

3- Représentation fixe, pour des variables sur un compact, cette proposition figure une solution optimale, utilise un treillis mélange de variables d'état discret (ou discrétisé). Une discrétisation de la phase du signal reçu a été utilisée pour réaliser une estimation conjointe de la phase et un décodage aveugle. La méthode proposée repose sur une approximation de la loi de phase, conditionnellement à chaque état du code, par une loi discrete, ce qui permet de résoudre le problème d'ambiguïté de phase. Une contribution importante de ce travail aura été de montrer que la phase n'a besoin d'être estimée conjointement qu'avec le premier code constitutif d'un turbo-code. Le second code peut alors être décodé avec un algorithme BCJR classique, en prenant en compte les statistiques de phase calculées par le premier décodeur.

A titre d'application, nous avons montré que l'algorithme proposé permet un décodage aveugle du turbo-code proposé dans la norme DVB-RCS en présence de bruit de phase important (figure 6.26).

L'utilisation de Filtrage particulière dans ce cas où les variables d'état sont bornées est sous-optimale, par rapport à la méthode de grille fixe, mais le cas contraire, on voit l'intérêt de cette méthode, comme le cas de récepteurs des signaux, transmis à travers des canaux multi-trajet évanescents, où l'amplitude aussi que la phase à estimer.

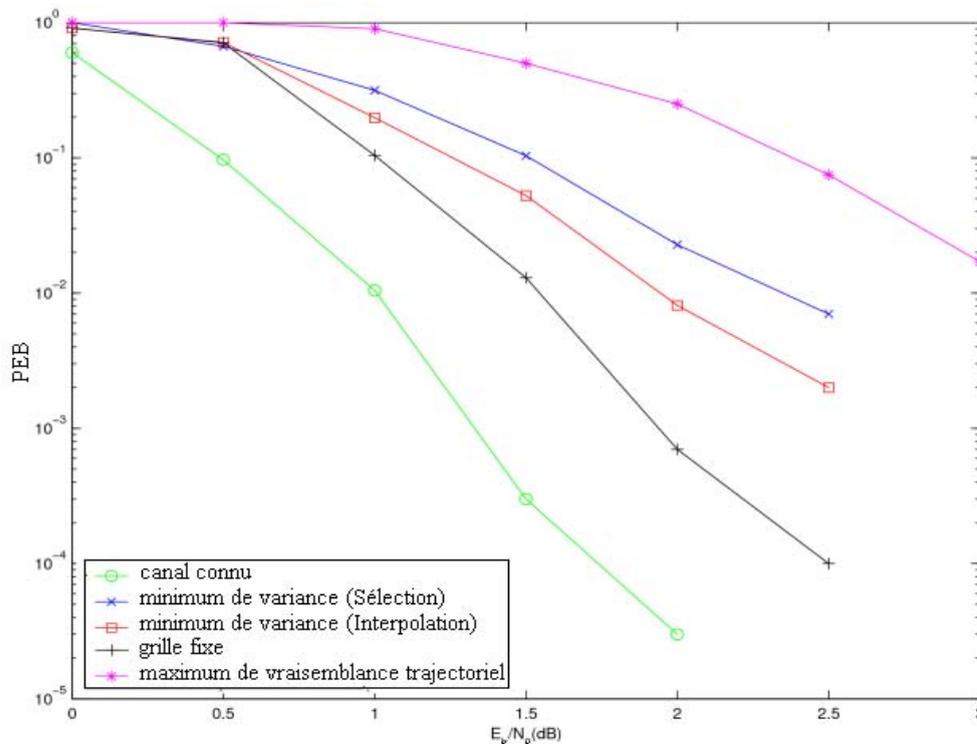


Fig 6.26: Comparisons des méthodes d'estimation

Les perspectives de ce travail comportent l'application de l'algorithme proposé à d'autres codes concaténés en série ou en parallèle. Des adaptations peuvent également être envisagées pour le décodage aveugle effectué conjointement avec l'estimation d'un canal à trajets multiples, une fréquence Doppler ou un retard.

# **Troisième Partie**

## **APPLICATIONS DE TYPE DEFENSE**



## Chapitre 7

# Trajectographie passive sonar par Filtrage Particulaire

Un récepteur passif se contente «d'écouter» sa cible, et c'est le problème que nous traiterons ici: identifier les paramètres cinématiques d'un vaisseau par un sonar passif grâce à la technique particulaire. Dans le cas passif l'information de la distance n'est pas directement disponible, il faut mettre en œuvre des techniques d'estimation dynamique, prenant en compte l'évolution temporelle des signaux acoustiques bruités qui parviennent au sous-marin [Teuliere 00].

C'est bien un problème de filtrage non-linéaire c'est-à-dire où l'on cherche à estimer de façon optimale l'état d'un système dynamique à partir des mesures bruitées. Ainsi on exploite le maximum d'informations disponibles provenant des lois d'évolution du processus, des mesures et de leurs interactions avec ce même processus.

La technique dont nous traitons permet des calculs particuliers réduits en déterministe.

### 7.1 Modélisation de la trajectographie passive sonar

Les principales fonctions demandées à un système passif sont la détection des cibles éventuelles, leur localisation, leur poursuite, et dans la mesure du possible leur classification et leur identification. Les performances sont perturbées par les bruits parasites reçus avec le signal utile. L'estimation de la distance de la cible n'est pas possible par des méthodes directes et repose, comme il est bien connu, sur l'observabilité non-linéaire [Bennis 86]. Il existe des méthodes utilisant plusieurs mesures à des instants différents qui reposent sur la théorie du filtrage appliquée à l'estimation des paramètres de la trajectoire de la cible. Le filtrage particulaire rentre dans cette catégorie.

Cette méthode permet de reconstituer toute la trajectoire (et notamment la distance) d'un mobile M, par un observateur O se déplaçant dans le même plan de M, à partir des hypothèses O-M, ainsi que l'azimut  $\theta$  sous lequel O voit M, et la dérive Doppler  $F$  entachés des bruits de mesures.

Deux cas de figure se présentent à nous: un premier cas où l'on ne connaîtra que l'azimut entre le porteur du sonar et sa cible (TPA), et un deuxième où sera également mesurée la fréquence émise (TPAF), le mouvement de la cible induisant un effet Doppler sur le spectre sonar reçu [Nardone 84].

### 7.1.1 Modélisation des commandes

La dynamique stochastique des mobiles en mer est régie par les deux accélérations  $a_x$  et  $a_y$ , qui s'expriment en pratique en fonction des deux commandes physiques:

- la giration  $\Omega$ : changement du cap  $K$ :  $\Omega = \dot{K}$ .
- l'accélération  $A$ : changement de la vitesse  $V$ :  $A = \dot{V}$ .

Ces commandes commutant d'une valeur constante à une autre dans un intervalle borné  $[\Omega_{min}, \Omega_{max}]$  pour la giration et  $[A_{min}, A_{max}]$  pour l'accélération, elles seront modélisées a priori par des processus à occurrences aléatoires poissonniens en ce qui concerne la cible.

La commande nulle sera favorisée en se voyant attribuer un poids  $1-\lambda$ . Ceci sera effectué à chaque instant discret afin d'envisager le maximum possible de commandes, et de toutes les durées possibles.

### 7.1.2 Modélisation de la dynamique des mobiles

Nous considérons ici que la cible sonar ainsi que le récepteur sonar sont des éléments ponctuels. En raison de considérations bien connues [Aidala 83], nous utiliserons, en plus des classiques coordonnées cartésiennes, un système de coordonnées dit «polaire modifié», qui assure un bien meilleure efficacité numérique.

- **Coordonnées cartésiennes:**

Considérons la situation géométrique décrite par la figure suivante:

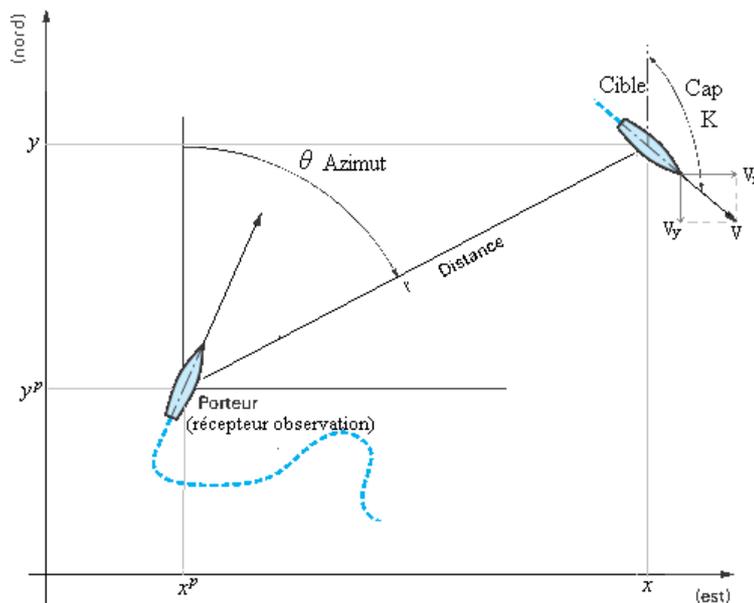


Fig 7. 1, Localisation de la cible dans le plan

Le vecteur d'état  $X_k$  de la cible dans ce repère est :

$$X_k = [x_k \quad y_k \quad V_k^x \quad V_k^y]^T$$

L'équation de l'évolution s'écrit:

$$X_{k+1} = \Xi X_k + u_k \quad (7.1)$$

où la matrice dynamique:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec  $u$  un vecteur donnant la commande appliquée:

$$u_{k-1} = \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k^x \\ a_k^y \end{bmatrix} = + \text{sgn}(V_k^y) \underbrace{\begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^x & \frac{V_k^x}{\sqrt{V_k^{x2} + V_k^{y2}}} \\ -V_k^y & \frac{V_k^y}{\sqrt{V_k^{x2} + V_k^{y2}}} \end{bmatrix}}_{g(X_{k-1}, \Omega_{k-1}, A_{k-1})} \begin{bmatrix} \Omega_{k-1} \\ A_{k-1} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

où  $T$  est la période d'échantillonnage,  $(x, y)$  représente la position de la cible,  $(V^x, V^y)$  la vitesse suivant les deux composantes, et  $(a^x, a^y)$  sont les composantes de l'accélération du mobile.

- **Coordonnées polaires modifiées:**

On se place dans le repère lié au porteur du sonar, donné par la figure ci-après:

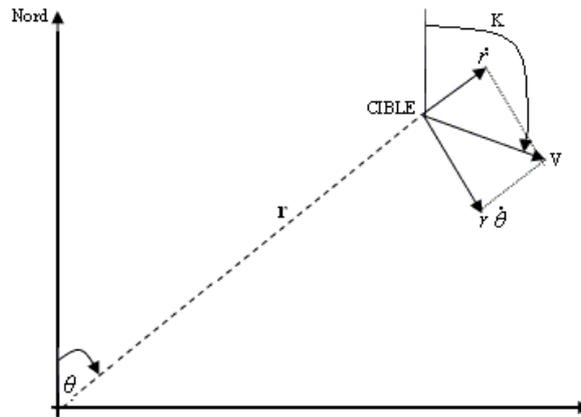


Fig 7. 2, Coordonnées polaires modifiées

Le vecteur d'état en coordonnées polaires modifiées est constitué des quatre composantes: l'azimut, l'inverse de la distance, le défilement de la distance et la vitesse radiale divisée par la distance, ce qui s'écrit donc:

$$\dot{X}_k = \begin{bmatrix} \theta & \frac{1}{r} & \dot{\theta} & \frac{\dot{r}}{r} \end{bmatrix}^T \quad (7.3)$$

L'état courant en polaire modifié  $\dot{X}_k$  est converti en coordonnées cartésiennes selon la transformation suivante:

$$X_k = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k = \Pi(\dot{X}_k) = \left(\frac{1}{r}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ \dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{\dot{r}}{r} \sin(\theta) \\ -\dot{\theta} \sin(\theta) + \frac{\dot{r}}{r} \cos(\theta) \end{bmatrix}_k \quad (7.4)$$

Ensuite, l'évolution de l'état est calculé, d'après l'équation 7.1, en coordonnées cartésiennes relativement au porteur selon:

$$X_k^{cart, relatif} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k^{relatif} = \Xi \left( x_{k-1}^{cart, relatif} + X_{k-1}^{cart, porteur} \right) - X_k^{cart, porteur} + g \left( X_{k-1}^{cart}, \Omega_{k-1}, A_{k-1} \right) \quad (7.5)$$

où  $X_k^{cart, porteur}$  est l'état du porteur,  $u$  le vecteur de commande. Inversement, l'état de la cible en coordonnées cartésiennes est converti en coordonnées polaires modifiées:

$$\dot{X}_k = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{1}{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{r} \\ r \end{bmatrix} = \Pi^{-1}(X_k) = \begin{bmatrix} \arctan \frac{x}{y} \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -x V^y + y V^x \\ \frac{x^2 + y^2}{x V^x + y V^y} \\ \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \end{bmatrix}_k \quad (7.6)$$

- **Coordonnées polaires:**

On rappelle que le passage du système polaire  $X_k^p = [\theta \ r \ K \ V]^T$  au système polaire modifié (eq. 7.3), se fait en utilisant les relations:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{r}}{r} &= \frac{V}{r} \cos(K - \theta) \\ \dot{\theta} &= \frac{V}{r} \sin(K - \theta) \end{aligned} \quad (7.7)$$

### 7.1.3 Équations du système

Nous avons ici à prendre en compte de façon séparée les deux cas TPA et TPAF.

- Cas TPA: Dans ce cas, seul l'azimut relatif entre la cible et le porteur est mesuré. Cette mesure est bruitée par  $v$  (*bruit blanc gaussien*), et exprimée par:

$$y_k = \theta_k + v_k$$

En coordonnées cartésiennes, cet azimut se calcule par:

$$\theta_k = \arctan \left( \frac{x_k - x_k^p}{y_k - y_k^p} \right)$$

où  $(x_k^p, y_k^p)$  représente la position du vaisseau porteur. On évite la non-linéarité de cette fonction en passant aux coordonnées polaires modifiées. Les équations définissant le système dynamique sont alors les suivantes:

$$\begin{aligned} \dot{X}_k &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_k \\ \frac{1}{r_k} \\ \dot{\theta}_k \\ \dot{r}_k \\ r_k \end{bmatrix} = \Phi \left( \dot{X}_{k-1}, \Omega_{k-1}, A_{k-1} \right) \\ Y_k &= [\theta_k] + [v_\theta] = H \dot{X}_k + [v_\theta] \\ \text{avec } H &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned} \quad (7.8)$$

- Cas TPAF: On ajoute à l'information azimutale, la fréquence émise par la cible. On supposera que le spectre d'émission poursuivi est une raie pure de fréquence  $F^0$ . Cette fréquence devient ici une nouvelle

composante du vecteur d'état, éventuellement affectée de fluctuation dans l'émission-transition (vagues-courant marine, ...):

$$F_k^0 = F_{k-1}^0 + w_k \quad (7.9)$$

où  $w_k$  est la dérive de fréquence, un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance  $Q$ .

Cette fréquence subit un effet Doppler lié à la vitesse radiale  $\dot{r}$  du mobile:

$$f_k = F_k^0 \left( 1 - \frac{\dot{r}}{c} \right) \text{ en coordonnées polaires modifiés}$$

$$f_k = F_k^0 \left( 1 - \frac{x_k v_k^x + y_k v_k^y}{c \sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \right) \text{ en coordonnées cartésiennes}$$

où  $c$  est la vitesse du son dans l'eau, supposée constante à  $1500 \text{ ms}^{-1}$ . Les équations définissant le système dynamique sont alors les suivantes:

$$\dot{X}_k = \begin{bmatrix} \Phi_{k-1}(\dot{X}_{k-1}, \Omega_{k-1}, A_{k-1}) \\ F_{k-1}^0 + w_k \end{bmatrix}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} \theta_k \\ F_k^0 \left( 1 - \frac{\dot{r}}{c} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_k^\theta \\ v_k^f \end{bmatrix} = h(\dot{X}_k) + v_k \quad (7.10)$$

Avec  $\dot{X}_k$  le vecteur des composantes cinématiques de l'état en «polaire modifié».

## 7.2 Résolution particulière

### 7.2.1 Principe

Il est bien connu que l'azimétrie passive se limitant au traitement des azimuts mesures, conduit à l'observabilité de la distance pour certaines cas comme: des mobiles (cible et porteur) se déplaçant de manière rectiligne uniforme.

Il est aussi connu [Bennis 86] que la prise en compte de la dérive Doppler dans les mesures SONAR permet de laver cette indétermination. Le traitement de ce problème en présence de bruits réalistes pose un problème typique de filtrage non-linéaire. Nous l'abordons ci-après par la méthode particulière, en tenant compte d'une seule voie du spectre bruiteur.

On rappelle que l'utilisation du système polaire modifié est nécessaire au bon fonctionnement du filtre de Kalman étendu porté par chaque particule, mais l'évolution du système est assez délicate à décrire dans ce coordonnée. Pour cette raison on choisira donc plutôt ici une méthode plus simple illustrée par la figure 7.3:

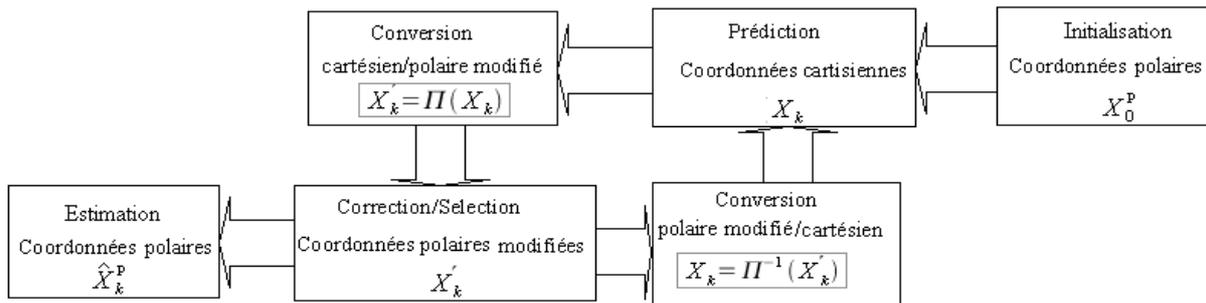


Fig 7. 3, Changement des coordonnées

### 7.2.2 Paramétrage

$N = n_V n_K n_r$ : Nombre des discrétisation total, avec:

$n_V$ : Nombre de discrétisation sur la Vitesse.

$n_K$ : Nombre de discrétisation pour le Cap.

$n_r$ : Nombre de discrétisation sur la distance radiale.

Ces nombres sont calculés par:

$$n_K \approx \sqrt{\gamma \frac{N}{n_r}} \quad n_r \approx 1 + \frac{\log R_{max} - \log R_{min}}{\log(1 + \beta)} \quad n_V \approx \sqrt{\frac{N}{\gamma n_r}}$$

avec:

$R_{min}, R_{max}, V_{min}, V_{max}$ : Domaine d'incertitude initial.

$\gamma$  : Rapport entre le maillage du cap et de la vitesse  $n_K = \gamma n_V$ .

$\beta$  : Incertitude initiale locale souhaitée sur la distance radiale.

$$\frac{\sigma_r}{r} = \alpha - 1 = \left( \frac{R_{max}}{R_{min}} \right)^{1/(n_r-1)} - 1 \leq \beta \quad : \text{Raison géométrique radiale.}$$

### 7.2.3 Algorithme

On peut décomposer notre algorithme de filtrage en phases principales suivantes:

#### 1 Répartition initiale des particules

L'initialisation consiste à couvrir l'espace d'état par N particules gaussiennes, s'effectue selon des **cordonnées polaires** (distance, azimuth, vitesse, fréquence et cap), correspondant à une espace physique appréhendable, les seules informations disponibles initialement sont fournies par la (les ) première(s) mesure(s), azimuth (et fréquence). Aucune information n'est disponible sur le cap, la distance et la vitesse. Ces valeurs sont supposées de probabilité uniforme sur un borné.

- **Azimuth**: Toutes les particules sont initialisées avec la mesure initiale de la phase, et la variance initiale associée est égale à celle d'observation .
- **Fréquence**: Toutes les particules sont initialisées avec la première mesure , et la variance initiale  $P_f$  dépend de la vitesse maximale  $V_{max}$  .

$$\max_k |f_k - F_k^0| = \frac{F_k^0 V_{max}}{c} \approx \frac{y_0^f V_{max}}{c}, \quad \text{soit} \quad \frac{y_0^f V_{max}}{\sqrt{3} c}$$

- **Distance**: Les particules sont répartis géométriquement sur une intervalle borné de distance  $[R_{min}, R_{max}]$ :

$$r_i = \alpha^{i-1} R_{min} \quad i = 1, \dots, n_R$$

le pas sur la distance est alors  $\Delta_r = r_{i+1} - r_i = (\alpha - 1)r_i$ , l'écart type de la  $i^{\text{ème}}$  particule est calculé par:

$$\sigma_r^i \propto (r_{i+1} - r_i) \text{ prenons } \sigma_r^i = ((1 - \alpha)r_i) / \sqrt{2}$$

comme il est illustré par la figure (7.4)

- **Vitesse & Cap** : Le vecteur vitesse est distribué uniformément sur un disque de norme comprise entre  $[V_{min}, V_{max}]$  et cap entre  $[0, 2\pi[$ . Une distribution uniforme sur une disque en coordonnées polaires (vitesse, cap) s'obtient en distribuant la vitesse selon (cf. figure 7.4):

$$V \sim (U[V_{min} V_{max}])^2 \quad K \sim U[0 \ 2\pi]$$

L'écart type du cap  $\sigma_K$  est constant car la distribution du cap est uniforme, par contre  $\sigma_V$  est proportionnel à la distance entre particules, il varie avec la position de la particule:

$$V_i = [\sqrt{V_{min}} + (i-1)\sqrt{\Delta_V}]^2 \quad i = 1, \dots, n_V$$

$$V_{i+1} - V_i = \Delta_V^{1/2} \sqrt{V_{min}} + (2i-1) \Delta_V$$

$$\Delta_V = \left( \frac{\sqrt{V_{max}} - \sqrt{V_{min}}}{n_V - 1} \right)^2 : \text{Pas sur la vitesse.}$$

$$\Delta_K = \frac{2\pi}{n_K} : \text{Pas sur le cap.}$$

On en déduit que l'initialisation se fait comme illustré par le tableau suivant:

|  |  |   |
|--|--|---|
| i=1<br>Pour l=1,...,n <sub>R</sub><br>Pour j=1,...,n <sub>V</sub><br>Pour k=1,...,n <sub>K</sub> |  |   |
|  | Moyenne  | Écart type  |
| Azimut   | $\theta_i = y_0^\theta$                            | $\sigma_\theta$   |
| Distance   | $r_i = \alpha^{l-1} R_{min}$                       | $\sigma_r^i = (\alpha - 1) r_i / \sqrt{2}$                                  |
| Vitesse  | $V_i = [(j-1) \sqrt{\Delta_V} + \sqrt{V_{min}}]^2$ | $\sigma_V^i = ((2j-1) \Delta_V + \Delta_V^{1/2} \sqrt{V_{min}}) / \sqrt{2}$ |
| Cap  | $K_i = (k-1) \Delta_k$                             | $\sigma_K^i = \Delta_K / \sqrt{2}$  |
| Fréquence  | $F_i^0 = y_0^f$                                    | $\sqrt{P_f} = (y_0^f V_{max}) / (\sqrt{3} c)$                               |
| i=i+1  |  |   |

Ces données sont ensuite transférés au système polaire modifié, pour calculer les valeurs, ainsi les covariances de chacune des composantes dans ce système (cf. équation 7.6).

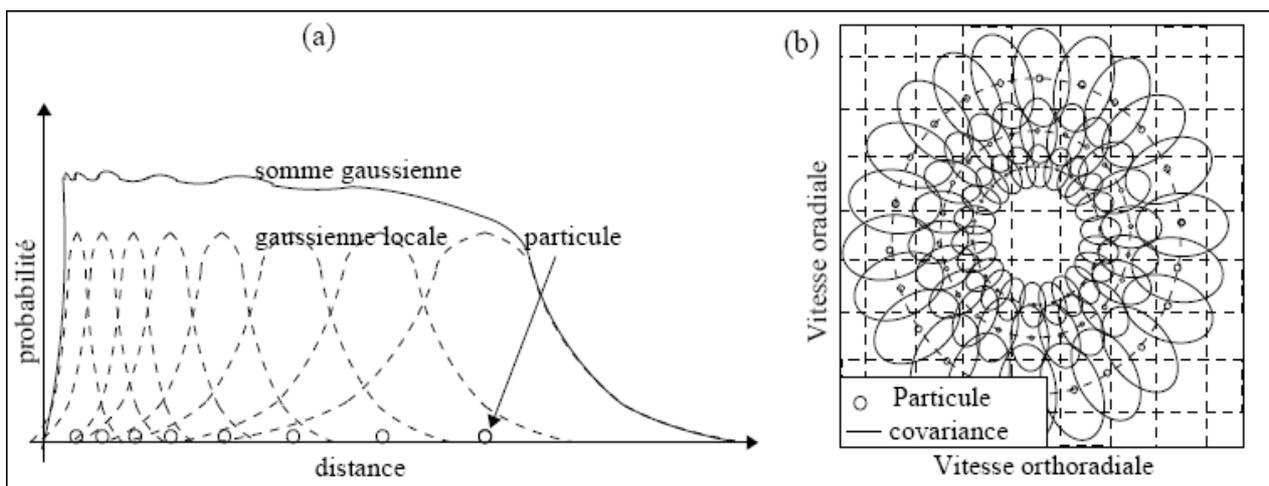


Fig 7. 4, Distribution initiale (a) dans la direction radiale, (b) de la vitesse (position et covariance)

– **covariance initiale**

La covariance initiale de chacune de particules est donnée par:

$$P_0^i = \Gamma_i \begin{bmatrix} \sigma_\theta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_r^i)^2 / r_i^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_v^i)^2 / r_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (V_i^2 \sigma_K^i)^2 / r_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (y_0^f V_{max})^2 / (3c^2) \end{bmatrix} \Gamma_i^T$$

$$\Gamma^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(K_i - \theta_i) & -\cos(K_i - \theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(K_i - \theta_i) & \sin(K_i - \theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où

(7.11)

## 2 Évolution du support particulaire

Pour explorer de façon optimale l'espace d'état, nous allons discrétiser les deux commandes de giration et accélération à chaque étape de l'évolution. Les hypothèses sur les commandes  $\Omega_k, A_k$  sont obtenues d'une manière déterministe. A chaque étape de l'évolution, pour explorer de façon optimale l'espace d'état, nous discrétisons les deux commandes. Considérons que les commandes peuvent prendre une valeur comprise entre  $[\Omega_{min}, \Omega_{max}] [A_{min}, A_{max}]$ , alors on discrétise les intervalles de commande en décomposant l'espace image  $[0,1]$  de la fonction de répartition de la première (resp. la seconde) composante en  $J$  (resp.  $L$ ) segments, de façon à obtenir les  $JL$  valeurs discrètes, comme il est expliqué en chapitre 3.

L'évolution fait intervenir deux étapes:

- **Prédiction**

L'application de la technique à particules gaussiennes nécessite localement un calcul de type Kalman étendu. Les équations dynamiques de l'état se subdivisent en une partie non linéaire et une partie linéaire.

Pour chaque particule d'indice  $i$  et en chaque valeur déterministe des commandes ci-dessus d'indice  $j$  et  $l$ , on a:

$$X_{k/k-1}^{i,j,l} = \begin{bmatrix} \Phi_{k-1}(\dot{X}_{k-1}^i, \Omega_{k-1}^j, A_{k-1}^l) \\ F_{k-1}^{0,i} \end{bmatrix}$$

$$P_{k/k-1}^{i,j,l} = F_{k-1}^{i,j,l} P_{k-1}^{i,j,l} P_{k/k-1}^{i,j,l} + GQG^T \quad i=1\dots N, j=1\dots J \text{ et } l=1\dots L$$

$$F_{k-1}^{i,j,l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{k-1}(\dot{X}_{k-1}^i, \Omega_{k-1}^j, A_{k-1}^l)}{\partial \dot{X}_{k-1}^i} & \mathbf{0}_{1,4} \\ \mathbf{0}_{4,1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$G^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

(7.12)

Pour calculer le Jacobien de la fonction de transition, on utilise l'équation d'évolution (7.5):

$$\frac{\partial \Phi_{k-1}(\dot{X}_{k-1}, \Omega_{k-1}, A_{k-1})}{\partial \dot{X}_{k-1}} = \frac{\partial \dot{X}_k}{\partial X_k^{cart}} \frac{\partial X_k^{cart}}{\partial \dot{X}_{k-1}} = \frac{\partial \dot{X}_k}{\partial X_k^{cart}} \left( \Xi \frac{\partial X_{k-1}^{cart}}{\partial \dot{X}_{k-1}} + \frac{\partial g(X_{k-1}^{cart}, \Omega_{k-1}, A_{k-1})}{\partial \dot{X}_{k-1}} \right)$$

avec:

$$\frac{\partial \dot{X}_k}{\partial X_k^{cart}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/r & 0 & 0 \\ -\dot{r}/r & -\dot{\theta} & 1 & 0 \\ \dot{\theta} & -\dot{r}/r & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}_k$$

$$\frac{\partial X_{k-1}^{cart}}{\partial \dot{X}_{k-1}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}_{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1/r)^{-1} & 0 & 0 \\ \dot{r}/r & -(1/r)^{-1} \dot{\theta} & 1 & 0 \\ -\dot{\theta} & -(1/r)^{-1} \dot{r}/r & 0 & 1 \end{bmatrix}_{k-1}$$

$$\frac{\partial g(X_{k-1}^{cart}, \Omega_{k-1}, A_{k-1})}{\partial \dot{X}_{k-1}} = \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} ([S_{k-1}^\Omega \Omega_{k-1} + S_{k-1}^A A_{k-1}])$$

où

$$S_{k-1}^\Omega = \frac{\text{sgn}([\dot{r}/r]_{k-1})}{(1/r_{k-1})} \begin{bmatrix} -S_{k-1}^2 & -S_{k-1}^1 \frac{1}{r_{k-1}} & -\sin \theta_{k-1} & \cos \theta_{k-1} \\ -S_{k-1}^1 & -S_{k-1}^2 \frac{1}{r_{k-1}} & -\cos \theta_{k-1} & -\sin \theta_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$S_{k-1}^A = \frac{\text{sgn}([\dot{r}/r]_{k-1})}{\sqrt{S_k^3}} \begin{bmatrix} S_{k-1}^1 & 0 & -\left[\frac{\dot{r}}{r}\right]_{k-1} \frac{S_{k-1}^1}{S_{k-1}^3} & -\dot{\theta}_{k-1} \frac{S_{k-1}^1}{S_{k-1}^3} & \cos \theta_{k-1} \\ -S_{k-1}^2 & 0 & -S_{k-1}^2 \frac{1}{r_{k-1}} & -\cos \theta_{k-1} & -\sin \theta_{k-1} \end{bmatrix}$$

et

$$S_{k-1}^1 = -\dot{\theta}_{k-1} \sin \theta_{k-1} + (\dot{r}/r)_k \cos \theta_{k-1}$$

$$S_{k-1}^2 = \dot{\theta}_{k-1} \cos \theta_{k-1} + (\dot{r}/r)_k \sin \theta_{k-1}$$

$$S_{k-1}^3 = (\dot{\theta}_{k-1})^2 + (\dot{r}/r)_{k-1}^2$$

(7.13)

- **Étape de correction**

Le triplet  $(\tilde{y}, R, H)$  pour les deux cas TPA et TPAF, est définie par:

| Cas TPA   | Cas TPAF  |
|---|---|
| $\tilde{y}_k^i = [y_k^\theta - \theta_{k/k-1}^i]$ | $\tilde{y}_k^i = \begin{bmatrix} y_k^\theta - \theta_{k/k-1}^i \\ y_k^f - F_{k/k-1}^{0,i} \left[ 1 - \frac{(\dot{r}/r)_{k/k-1}^i}{c/r_{k/k-1}^i} \right] \end{bmatrix}$       |
| $R = \sigma_\theta^2$                             | $R = \begin{bmatrix} \sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_f^2 \end{bmatrix}$   |
| $H = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$                             | $H_k^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_k^0 (\dot{r}/r)_k}{c (1/r_k)^2} & 0 & -\frac{F_k^0}{c (1/r_k)} & 1 - \frac{(\dot{r}/r)_k}{(1/r_k)} \end{bmatrix}^i$ |

L'étape de correction pour les  $NJL$  particules obtenues à l'étape de prédiction se base sur les équations traditionnelles du filtre de Kalman étendu :

$$\begin{aligned}
\hat{X}_k^i &= \hat{X}_{k/k-1}^i + K_k^i (\tilde{y}_k^i) \\
K_k^i &= P_{k/k-1}^i H_k^{i T} \left( H_k^i P_{k/k-1}^i H_k^{i T} + R \right)^{-1} \quad i=1, \dots, NJL \\
P_k^i &= P_{k/k-1}^i - K_k^i H_k^i P_{k/k-1}^i
\end{aligned} \tag{7.14}$$

### 3 Pondération et Normalisation

Nous pouvons ensuite mettre à jour le poids des particules en ajoutant la log-vraisemblance des commandes ainsi que la log-vraisemblance de l'observation courante, alors les vraisemblances des nouvelles particules sont calculés à partir:

$$L_k^{i,j,l} = L_{k-1}^i + L(y_k / X_k^i, \Omega_k^j, A_k^l) + L(\Omega_k^j, A_k^l / \Omega_{k-1}^i, A_{k-1}^i) \tag{7.15}$$

#### ■ Pondération par processus de Poisson

Avec la technique mise en œuvre, chaque particule  $i$  engendre  $J \times L$  nouvelles particules, où nous rappelons que  $J$  et  $L$  sont le nombre de valeurs de discrétisation de la première et de la deuxième commande respectivement. On obtient donc  $J \times L$  combinaisons possibles de la giration et de l'accélération.

Les manœuvres étant rares a priori (taux d'occurrence  $\lambda$ ), les commandes pondèrent de surcroît es particules non-normalisées par:

- $1-\lambda$  pour la particule qui correspond à une commande  $A_k = 0 \text{ m/s}^2, \Omega_k = 0 \text{ rad/s}^2$
- $\lambda / (J \times L - 1)$  pour les autres particules

À noter que cette approche peut être amélioré afin de mieux prendre en compte certaines manœuvres et de réciproquement diminuer l'influence d'autres, en leur attribuant des poids poissoniens mieux répartis.

### 4 Sélection – redistribution

A chaque instant  $k+1$ , on sélectionne les  $N$  particules de poids le élevé, parmi les  $N \times J \times L$  particules.

### 5 Calcul de l'estimée

A partir de l'estimation des nouveaux paramètres cinématiques donnée par:

$$\begin{aligned}
\hat{X}_k &= \arg \max_{X \quad i=1 \dots N} L_k^i(\hat{X}) \\
\hat{X}_k &= \begin{bmatrix} \hat{\theta}_k & \frac{1}{\hat{r}_k} & \hat{\theta}_k & \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{r} \end{pmatrix}_k \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

On en déduit:  $\hat{\theta}_k, \hat{r}_k, (\hat{F}_k^0)_{TPAF}$  et  $\hat{V}_k, \hat{K}_k$  seront calculés par:

$$\begin{aligned}
\hat{V}_k &= \left( \frac{1}{\hat{r}_k} \right)^{-1} \sqrt{\frac{\hat{r}}{r_k} + \hat{\theta}_k} \\
\hat{K}_k &= \hat{\theta}_k + \arctan \left( \frac{\hat{\theta}_k}{(\hat{r} / \hat{r})_k} \right)
\end{aligned} \tag{7.17}$$

#### Remarque 7.1

L'étape de sélection déterministe peut se faire de façon a priori (avant l'étape de correction), (cf. remarque 2.5).

## 7.3 Résultats de Simulations

### 7.3.1 Scénario A: Porteur manoeuvrant, cible en mouvement rectiligne uniforme

Nous envisageons ici le cas où la cible est en mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse de  $20 \text{ m.s}^{-1}$ , en éloignement quasi-radial du porteur, rendant ainsi l'observabilité du problème décroissante. Le porteur est un mouvement zig-zag par rapport à la cible, comme illustre la figure 7.5.

Paramètre:

$$R_{min} = 250m, R_{max} = 16Km, V_{min} = 15 \text{ ms}^{-1}, V_{max} = 25 \text{ ms}^{-1}, \beta = 0.4; \gamma = 1.2;$$

l'écart type de bruit de mesures azimuthale  $\sim 1^\circ$ .

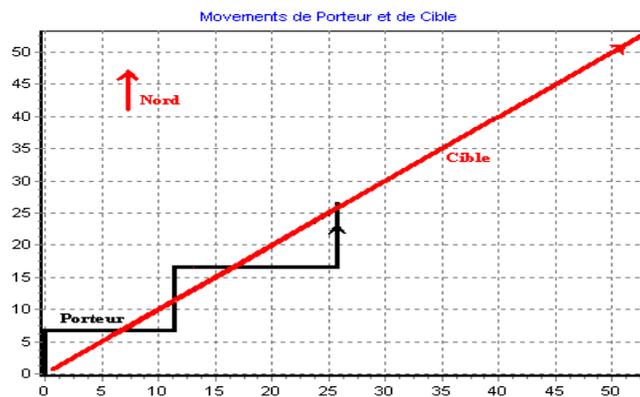


Fig 7. 5: Mouvement du porteur et de la cible

Pour ce scénario, seule la mesure de l'azimut relatif entre la cible et le porteur (TPA), est suffisante pour estimer les éléments cinématiques de la cible comme il est illustré par la figure suivante:

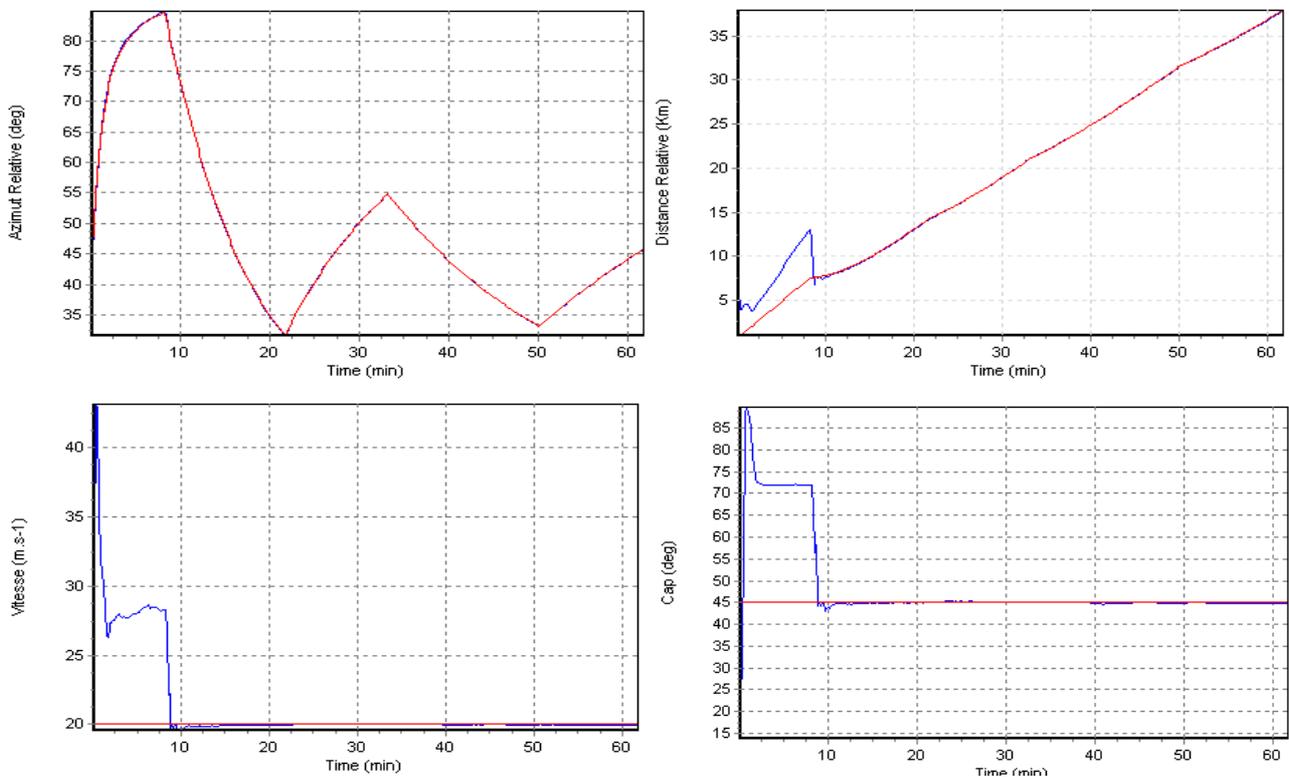


Fig 7. 6, Estimation de l'azimut, du cap, de la distance, et de la vitesse

Comme le montre la figure 7.7, une estimation efficace pour les variables ( $V$ ,  $r$ ,  $\Omega$ ) est obtenue avec 320 particules, contre 5000 particules pour les méthodes particulaires classiques [Teuliere 00]. La figure 7.7 montre l'erreur moyenne pour la distance estimée, en régime d'acquisition et en régime de poursuite.

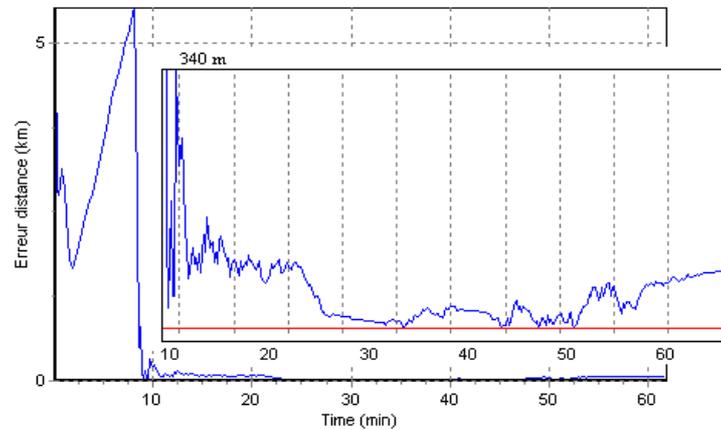


Fig 7. 7 Erreur de l'estimation de la distance, 320 particules

La figure 7.8 montre qu'un estimateur à seulement 80 particules permet une poursuite satisfaisante, mais l'erreur en phase d'acquisition est très importante.

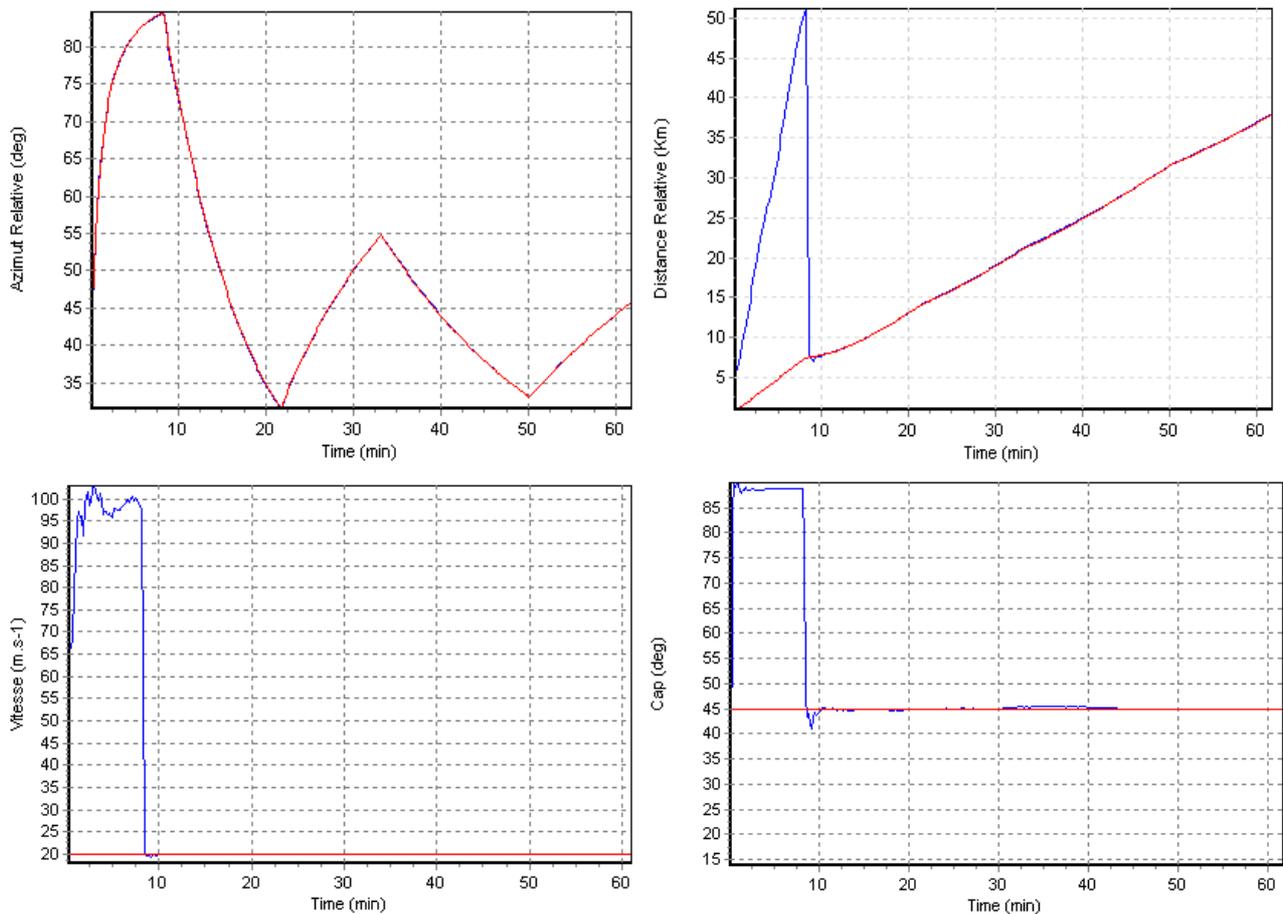


Fig 7. 8, Estimation de l'azimut, du cap, de la distance, et de la vitesse, avec 80 particules (scénario A)

### 7.3.2 Scénario B: Porteur immobile, cible en mouvement rectiligne uniforme

L'observabilité d'un scénario de TPA est fortement dépendante de la stratégie de manoeuvre du porteur. Nous cherchons à confirmer le fait que grâce à la variation du Doppler, nous obtenons une bonne estimation des états du système, et une bonne capacité à suivre les manoeuvres par la technique particulière par un traitement conjointe Doppler/Azimut (TPAF)..

Le porteur est immobile et le vaisseau cible se dirige vers le nord, les paramètres de simulation sont:

- 400 particules
- Vitesse de la cible: 20 m/s
- Position de départ: (20; -15) km.

Les écarts types de mesures pour l'azimut et la fréquence sont respectivement de 1.0 degré et de 0.3 Hertz et la fréquence propre émise est de 300 Hertz.

Le scénario considéré ici est schématisé par la figure suivante:

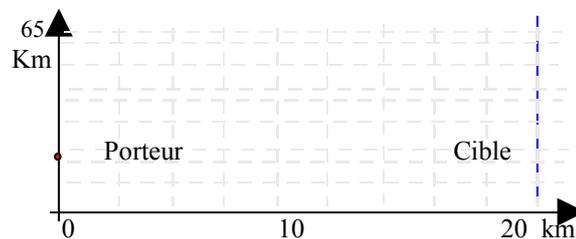


Fig 7. 9, Scenario B

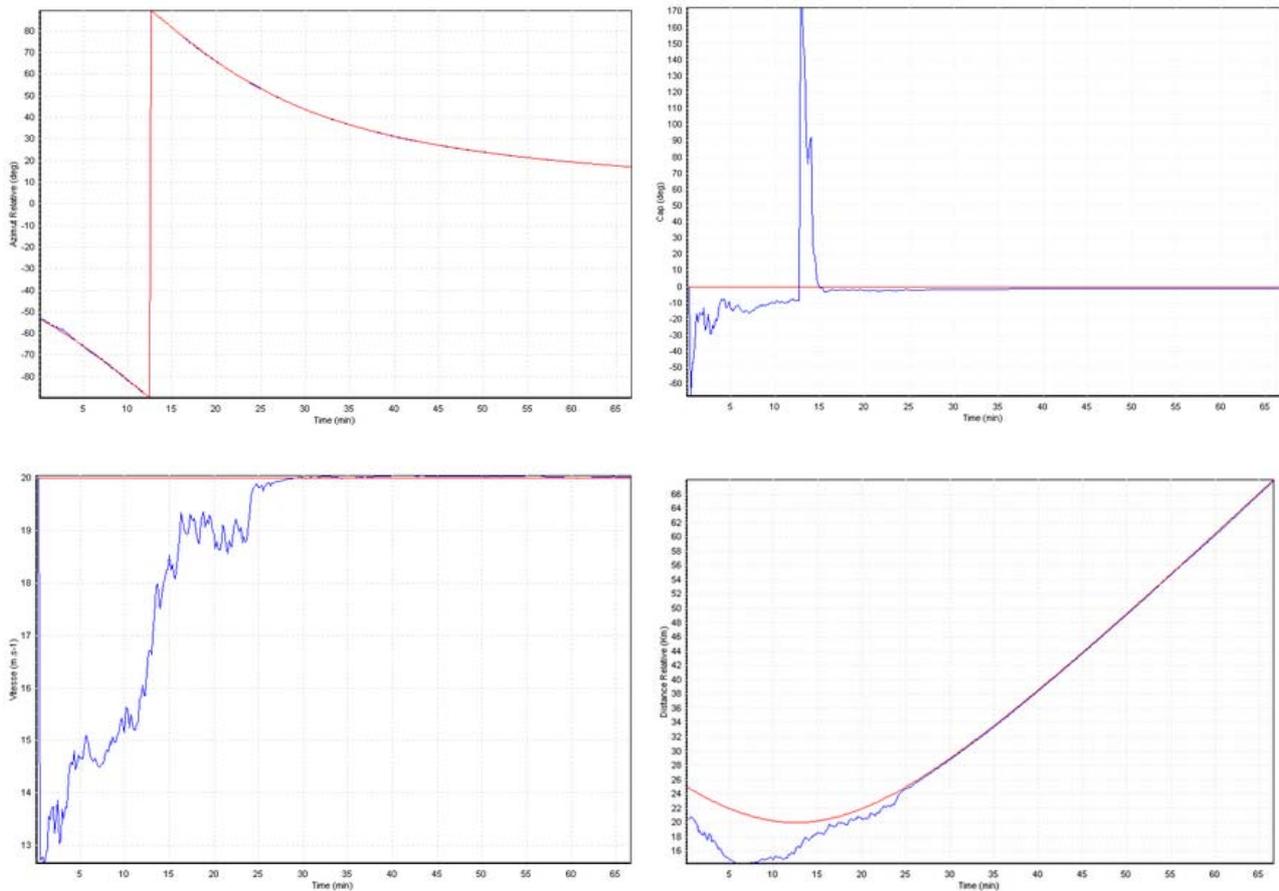


Fig 7. 10 Estimation de l'azimut, du cap, de la distance, et de la vitesse avec 400 particules ( scénario B)

La comparaison s'effectue sur l'erreur moyenne de la distance obtenue entre le scénario A et celle B, l'erreur de l'estimation dépend de l'observabilité du scénario. Cette observabilité est meilleur pour le scénario A que pour le scénario B [Bréhard 07]. D'autre résultats de simulation peuvent être consultés dans [Teuliere 99].

### 7.3.3 Scénario C: Porteur immobile, cible manoeuvrante

L'objectif de la présente section est de montrer la capacité du filtre particulaire dans le cas des manoeuvres de la cible. Le scénario présenté apparait en figure 7.11. Le porteur est toujours fixe à l'origine (0,0), alors que la cible part du point (0 km, 10 km), avec une vitesse initiale 10 m/s, il tourne à l'instant 60 min, en appliquant une commande 9 deg/min durant 10 minutes. Les écarts types de mesures pour l'azimut et la fréquence sont respectivement de 1.0 degré et de 0.3 Hertz et la fréquence propre émise est de 300 Hertz.

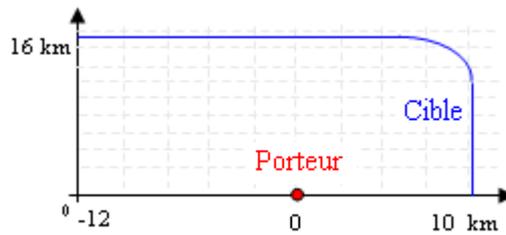


Fig 7. 11 : Scenario C

La Fig. 7.11 montre les résultats obtenus avec 600 particules.

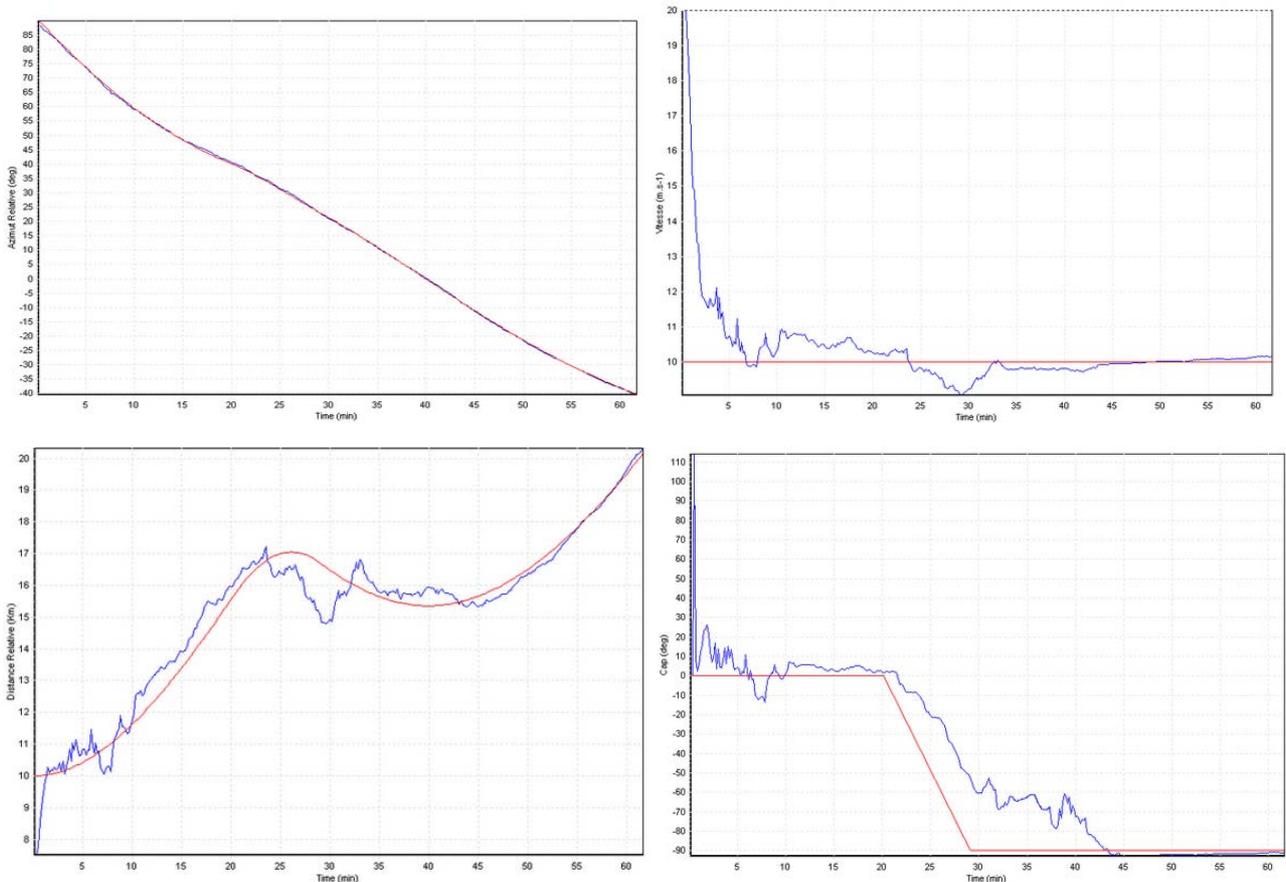


Fig 7. 12 Estimation de l'azimut, du cap, de la distance, et de la vitesse avec 500 particules ( scénario C)

L'erreur d'estimation dans ce cas est bien évidemment plus importante lorsqu'il y a une manoeuvre.

## 7.4 Conclusion

Nous avons présenté ici une modélisation du problème de la trajectographie passive sonar en mouvement rectiligne uniforme ou en présence de manoeuvre, ainsi que sa résolution particulaire par des particules gaussiennes.

Au vu des résultats présentés, on peut considérer qu'on a validé la technique particulaire déterministe pour le problème trajectographie passive sonar.

Les simulations fonctionnent correctement avec (en général) moins de 500 particules en utilisant le filtre particulaire déterministe à maximum de vraisemblance, alors que celles effectuées avec la version aléatoire du filtrage particulaire en demandaient 5000, pour des résultats équivalents

On peut noter que la formulation traditionnelle, reposant sur les fréquences Doppler détectées par un analyseur de Fourier, ou même tout autre analyseur temps-fréquence, est insuffisante d'un point de vue à la fois physique et mathématique.

En effet, l'estimation des éléments cinématiques et la détection de la cible sont indispensables au nom du principe «track before detect» que le particulaire est par essence destiné à mettre en oeuvre.

La fréquence Doppler, lorsqu'elle est présente, est alors estimée par la voie non-linéaire particulaire de façon prédictivement liée au mouvement, et non de façon traditionnelle, c'est à dire indépendamment.



## Chapitre 8

# Filtrage particulière du signal Radar de veille-poursuite

L'aptitude de la méthode particulière déterministe à maximum de vraisemblance, à traiter des problèmes fortement non-linéaires qui mettent en défaut les techniques usuelles, nous a conduit à appliquer la technique particulière à la détection/estimation radar, en situation de veille poursuite.

La technique particulière fut déjà utilisée pour traiter le problème de poursuite radar [Ziadi 07]. Nous allons présenter dans ce chapitre une nouvelle situation pour l'utilisation de filtrage particulière. Le radar de veille est constitué un cas particulier, où les mesures ne sont pas toujours disponibles. Dans ce cas on ne peut faire les corrections de trajectoire particulière que pour un nombre limité de récurrences radar. En dehors de ces récurrences, une étape de prédiction pure est nécessaire.

### 8.1 Problème Radar

Soit un signal émis avec une longueur d'onde  $\lambda$ , une fréquence d'émission  $f$ , et une période de répétition  $T_r$ , on suppose qu'il est issu d'une cible de distance  $D$  et de vitesse radiale  $v_r$ . Le signal reçu par le radar, échantillonné à la fréquence  $1/T_i$  subit:

- Un décalage Doppler:  $f_D = 2v_r / \lambda = 2v_r f / c$  ( $c$  est la vitesse de la lumière) (8.1)
- Un déphasage:

Après un trajet aller retour de durée  $t_k$ , qui dépend de la distance d'aller retour  $D_k$  et s'écrit:

$$D_k = D_{k-1} + v_r T_i + 0.5 a_r T_i^2$$

Le signal revient translaté de la fréquence Doppler  $f_D$ , soit un déphasage relatif entre une impulsion et la suivante:

$$\varphi_k \approx \varphi_{k-1} + 2\pi f_D T_i$$

La rotation Doppler sur un train d'impulsions est donc un déphasage:

$$\Delta\varphi = w_D T_i = 2\pi f_D T_i = 4\pi \frac{v_r}{\lambda} T_i \quad (8.2)$$

- Un retard: le retard s'écrit en fonction du temps sous la forme:

$$\tau_k = 2 \frac{D_k}{c} \approx 2 \frac{D_{k-1} + v_r T_i}{c} = \tau_{k-1} + 2 \frac{v_r T_i}{c} \quad (8.3)$$

## 8.2 Modélisation des mesures radiales:

### 8.2.1 Équation de mesure

Tout élément de récepteur radar possède une équation de mesure, après démodulation, qui s'écrit de façon générale, sous la forme [Noyer 96]:

$$Y_t = \underbrace{K(\vec{D}_0, \vec{D}_t)}_{\text{Antenne}} \underbrace{K_0 e^{j\varphi_0}}_{\text{Emission}} \underbrace{\frac{1}{D_t^2} \rho e^{j\varphi}}_{\text{Atténuation}} \underbrace{e^{-jw_0 \frac{2D_t}{c}}}_{\text{Réflexion}} \underbrace{h(t - \frac{2D_t}{c})}_{\text{Doppler}} + \underbrace{v_t}_{\text{Retard bruit}} \quad (8.4)$$

$K(\vec{D}_0, \vec{D}_t)$  : Diagramme angulaire de l'élément de l'antenne,  $\vec{D}_t$  étant le rayon vecteur radar-cible.

$K_0 e^{j\varphi_0}$  : coefficient de l'émission.

$1/D_t^2$  : l'atténuation.

$\rho e^{j\varphi}$  : coefficient de réflexion sur cible.

$e^{-jw_0 \frac{2D_t}{c}}$  : L'effet Doppler,  $w_0 = 2\pi f_0$  étant la pulsation du signal émis.

$h(t - \frac{2D_t}{c})$  : Enveloppe après réception adaptée continue, avec retard dû au temps aller-retour.

$v_t$  : bruit additif en réception.

Le signal est émis par l'antenne avec un coefficient de déphasage  $e^{j\varphi_0}$ , se propage ensuite vers la cible avec une atténuation  $1/D_t$ , se réfléchit sur la cible de coefficient de réflexion complexe  $\rho e^{j\varphi}$ . Le signal est ensuite ré-rayonné vers le radar avec une atténuation  $1/D_t$  et un retard  $\tau$  dû au temps d'aller retour  $2D_t/c$ .

### 8.2.2 Diagramme d'antenne

Pour une antenne d'aire  $A$ , et une onde de longueur  $\lambda$ , le gain maximal en puissance est donné par la relation:

$$K_0 = \eta \frac{4\pi A}{\lambda^2} \quad (8.5)$$

$\eta$  est le rendement de la loi d'illumination, inférieur ou égal à 1.

Le diagramme d'antenne  $K(\Delta\psi)$  dépend du positionnement angulaire de la cible. Selon le mode d'extraction de l'information angulaire, on distingue:

### ■ Antenne rectangulaire

Si l'ouverture est un rectangle de dimensions  $l, h$  alors:

$$K_0 = \eta \frac{4\pi l \cdot h}{\lambda^2} \quad (8.6)$$

Le diagramme en amplitude de l'antenne en fonction de la direction d'incidence des signaux sur l'antenne, dépend de l'illumination du radar  $A(x)$ . Pour une illumination uniforme  $A(x, y) = c^{te}$ , cette antenne, recevant une onde plane de longueur d'onde  $\lambda$  provenant d'un émetteur de site  $\theta$  et de gisement  $\psi$ , l'expression du diagramme de l'amplitude d'antenne est donnée par [Darricau 93]:

$$K(\theta, \psi) = \frac{\sin(u)}{u} \frac{\sin(v)}{v} \quad (8.7)$$

avec: 
$$u = \frac{\pi l}{\lambda} \sin(\theta), v = \frac{\pi h}{\lambda} \sin(\Psi)$$

Pour une répartition en cosinus (non uniforme) de type:

$$A(x, y) = A_0 \left( 1 + a \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \right) \left( 1 + b \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{h}\right) \right)$$

on aura

$$E(\theta, \Psi) = A_0 l h \left( \frac{\sin(u)}{u} + a \frac{\pi}{2} + \frac{\cos(u)}{\frac{\pi^2}{4} - u^2} \right) \left( \frac{\sin(v)}{v} + b \frac{\pi}{2} + \frac{\cos(v)}{\frac{\pi^2}{4} - v^2} \right)$$

avec 
$$u = \frac{\pi l}{\lambda} \sin(\theta) \quad v = \frac{\pi h}{\lambda} \sin(\psi) \quad (8.8)$$

### ■ Antenne parabolique

Si l'ouverture est un cercle de diamètre  $D$  alors:

$$K_0 = \eta \left( \frac{4D}{\lambda} \right)^2 \quad (8.9)$$

Pour une illumination uniforme le diagramme d'antenne s'écrit par:

$$K(\theta, \psi) = \frac{J_1(u)}{u} \frac{J_1(v)}{v} \quad (8.10)$$

et 
$$u = \frac{\pi D}{\lambda} \sin(\theta), v = \frac{\pi D}{\lambda} \sin(\Psi)$$

avec  $J_1$ , la fonction de Bessel d'ordre 1.

### ■ Ouverture rectangulaire

Dans le cas d'une antenne rectangulaire de dimensions  $L$  et  $H$  sur laquelle la répartition d'illumination est uniforme, l'ouverture du lobe à 3dB correspond au gain d'antenne maximal divisé par deux:

$$K(\Delta\theta) = \frac{1}{2} K_0 \quad (8.11)$$

pour  $\Delta\theta = \theta_{3dB} = 0.89\lambda/L \text{ rad}$ .

En effet la résolution angulaire d'une antenne est définie pour son lobe principal, par  $\theta_{3dB}$ . L'angle d'ouverture à -3 dB est l'angle  $2\theta_{3dB}$  que font entre les deux directions du lobe principal selon lesquelles la puissance  $K(\theta)$  égale à la moitié de la puissance rayonnée dans la direction de rayonnement maximal, comme la figure 8.1 montre:

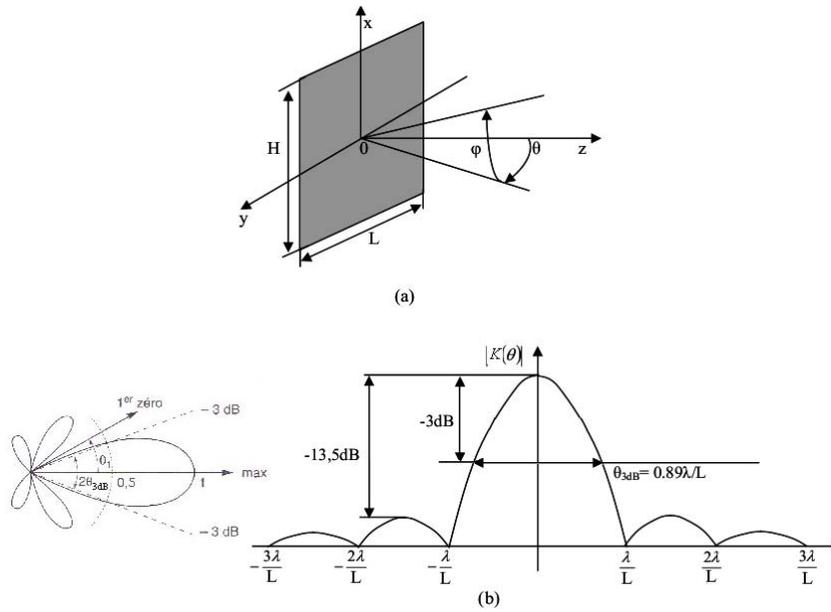


Fig 8.1: (a)Antenne rectangulaire (b) Diagramme de  $K(\theta)$

### 8.2.3 Poursuite angulaire par monopulse

Le procédé monopulse consiste à effectuer des mesures pour les localisations angulaires en traitant séparément chaque impulsion de retour (comme son nom indique). selon l'un des deux principes suivants [Chevalier 89]: monopulse d'amplitude et monopulse de phase.

#### ■ Monopulse d'amplitude

L'antenne typique de monopulse d'amplitude est l'antenne parabolique à double cornet. Ces deux sources primaires, disposées de manière symétrique par rapport au foyer de la parabole, produisent des faisceaux symétriques faisant entre eux un angle  $\theta_0$  [Darricau 93] égal à leurs ouvertures à 3dB:

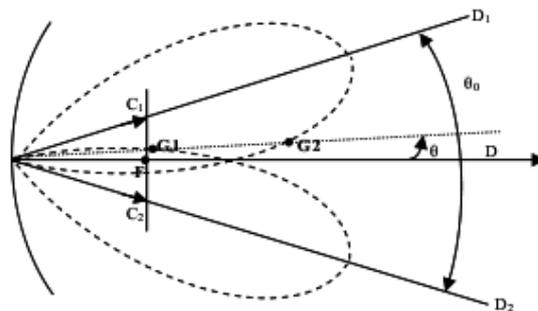


Fig 8.2: monopulse d'amplitude

A la réception, toute cible désaxée d'une valeur  $\theta$  est vue dans les deux voies sous des gains différents. Il en résulte une différence des amplitudes des signaux  $S_{A1}$  et  $S_{A2}$  perçus par les deux voies:

$$\begin{aligned} C_1 : S_{A1} &\propto K(\theta - \theta_0/2) \\ C_2 : S_{A2} &\propto K(\theta + \theta_0/2) \end{aligned}$$

La poursuite site (ou gisement) est obtenue en utilisant les formations des voies sommes  $\Sigma$ , et différences  $\Delta$ :

$$\frac{\Delta}{\Sigma} = \frac{S_{1A} - S_{2A}}{S_{1A} + S_{2A}} \propto \frac{\theta}{\theta_0} \quad (8.12)$$

### ▪ Monopulse de phase

C'est le cas de l'interféromètre à deux antennes et des radars utilisant des alignements de sources. Les deux antennes, sont identiques, pointées dans le même direction, mais décalées sur l'axe Ox de d (Fig 8.3).

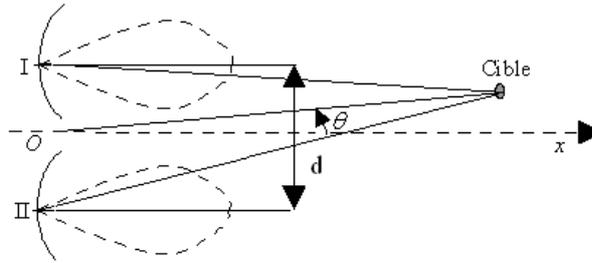


Fig 8.3: monopulse de phase

Les signaux reçus  $S_{1P}$  et  $S_{2P}$  sont identiques mais de phases différentes, leur déphasage étant calculé par [Carpentier 81], sous l'hypothèse de cible suffisamment éloignée du radar:

$$\Delta \varphi = \varphi_I - \varphi_{II} = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta \approx \frac{2\pi d \theta}{\lambda} \quad (8.13)$$

Il est clair d'après la figure ci-dessus, qu'à la réception, on peut traiter les signaux  $S_{1P}$  et  $S_{2P}$  soit directement [Chamon 96]:

$$\begin{aligned} I: S_{1P} &\propto e^{j\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \\ II: S_{2P} &\propto e^{j\left(-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \end{aligned} \quad (8.14)$$

soit par la synthèse des voies sommes et différences en prenant comme origine des phases le centre du «doublet», pour la poursuite de la mesure angulaire [Chevalier 89]:

$$\frac{\Delta}{\Sigma} = \frac{S_{1P} - S_{2P}}{S_{1P} + S_{2P}} = \tan\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \quad (8.15)$$

## 8.2.4 Le signal émis

Le signal émis par le radar s'écrit sous la forme:

$$s(t) = u(t) e^{(jw_0 t)}$$

$u(t)$ : L'enveloppe complexe du signal émis de durée  $T_i$ .  $w_0 = 2\pi f_0$ : La pulsation de la porteuse.

### 8.2.4.1 Impulsion classique

Une impulsion rectangulaire  $u_i$  est définie par:

$$u_i = \begin{cases} A & \text{si } t \in [0, T_i] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce cas, la sortie du filtre adapté s'écrit (cf. Fig 8.4):

$$h(t) = AT_i \left(1 - \frac{|t|}{T_i}\right) \quad \text{si } t \in [-T_i, T_i] \quad (8.16)$$

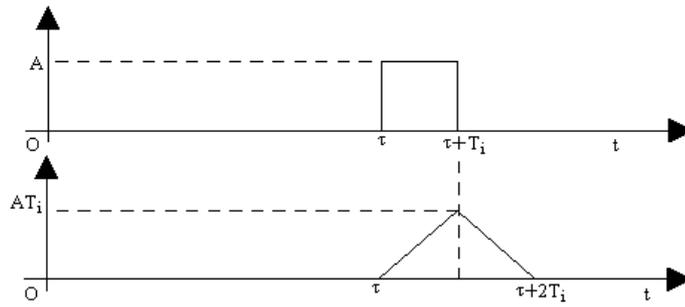


Fig 8.4: Impulsion rectangulaire et sa réponse au filtre adapté

### 8.2.4.2 Train d'impulsions

En pratique, les radars classiques n'ont aucun pouvoir discriminant en vitesse. Pour avoir accès à la fréquence des cibles, il est nécessaire de réaliser le traitement d'un train complet d'impulsion (Fig. 8.5) dans les radars pulse Doppler.

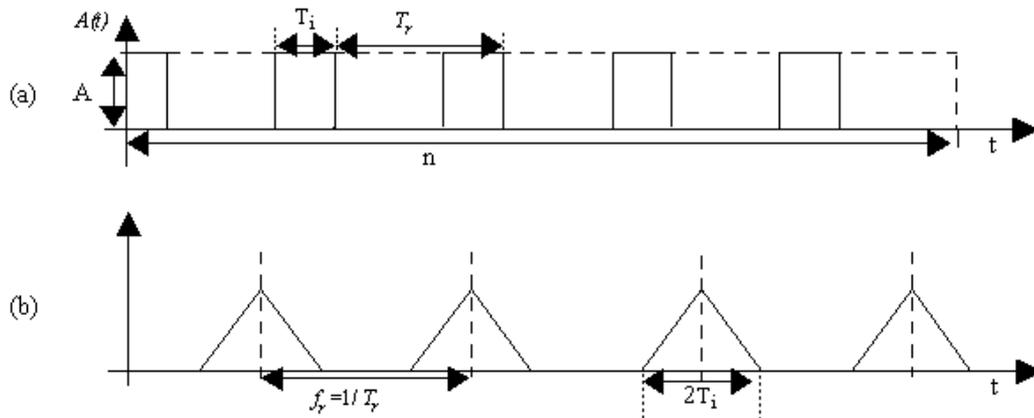


Fig 8.5: Train d'impulsion, et les échos

### 8.2.4.3 Compression d'impulsion

La compression d'impulsion englobe l'ensemble des techniques qui utilisent la modulation en phase ou en fréquence de la porteuse pour augmenter la bande du signal sans pénaliser sa durée. Dans le cas de la modulation de fréquence, l'impulsion avant compression est donnée par [Chevalier 89]:

$$u(t) = A e^{(j\pi\beta t^2)} \quad \text{si } -T_i/2 \leq t \leq +T_i/2 \quad (8.17)$$

$\beta$  : est le rapport entre la largeur de bande du signal  $\Delta f$  et sa durée  $T_i$  à l'émission. Le signal radar varie alors selon l'équation suivante:

$$s(t) = A e^{(j(2\pi f_0 t + \pi\beta t^2))} \quad (8.18)$$

et sa fréquence instantanée est donnée par:

$$f(t) = f_0 + \beta \frac{t}{2} \quad \text{pour } -T_i/2 \leq t \leq +T_i/2$$

Il s'agit de la modulation Chirp, représentée par la figure 8.6:

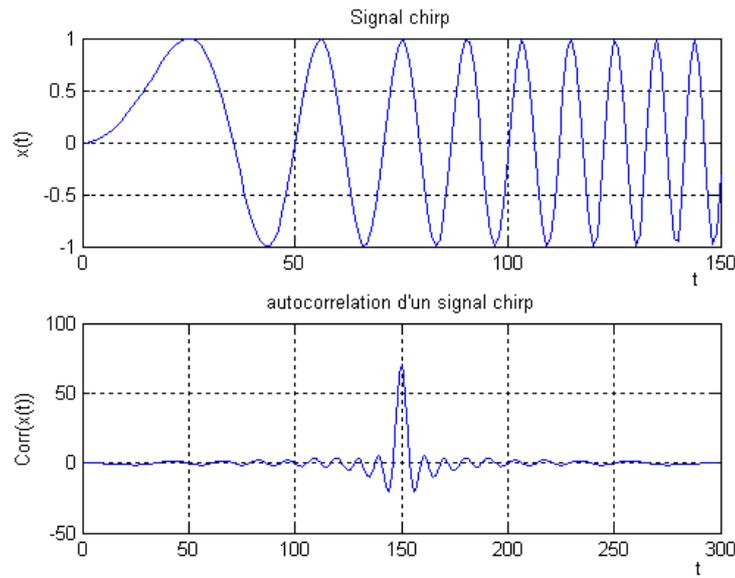


Fig 8.6: Signal chirp et son autocorrélation

La sortie du filtre adapté pour une impulsion Chirp est donnée par:

$$h(t) = G_0 \frac{\sin(\pi \beta t (\Delta - |t|))}{\beta t} \quad \text{pour } -T_i/2 \leq t \leq +T_i/2 \quad (8.19)$$

### 8.2.4.4 Résolution distance et vitesse

Par définition, la résolution en distance est la distance minimale entre deux objets pour garantir leur distinction à la réception. Elle est donnée par:

$$\Delta R = \frac{c \times T_i}{2} \quad (8.20)$$

pour un signal émis par un train d'impulsions (cf 8.2.4.2). De même, deux cibles sont séparées en vitesse par:

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2T_i} \quad (8.21)$$

( $\lambda$  : est la longueur d'onde du signal émis).

Étant donné que le signal se propage à la vitesse  $c$ , il en résulte que la distance  $d = c(\Delta t/2)$ , où on mesure le retard  $\Delta t$  à l'intérieur d'un intervalle de temps  $T_r$ . Il y a cependant une ambiguïté, puisque l'écho reçu peut être dû à une impulsion antérieure. Dans ce cas, le retard de réception serait égal à  $T_r + \Delta t$ , où  $T_r$  est l'intervalle de temps entre deux impulsions successives (Fig 8.7).

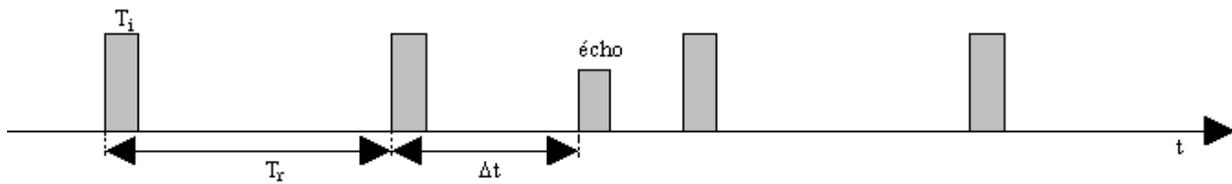


Fig 8.7: La détermination de la distance du réflecteur au moyen d'un train d'impulsions conduit à une ambiguïté quand on ne mesure que le retard  $\Delta t$  à l'intérieur d'un intervalle de temps  $T_i$  ,

On peut donc seulement affirmer que la distance réelle  $D = d + nR_r$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  où

$$R_r = \frac{c T_r}{2} \quad (8.22)$$

s'appelle la distance ambiguë du système. De la même façon on peut définir la vitesse ambiguë:

$$V_r = \frac{\lambda}{2T_r} \quad (8.23)$$

Les relations (8.20)-(8.23) restent valables dans le cas de la compression d'impulsion, en prenant en compte la durée du signal à la sortie des circuits de compression d'impulsion, tel qu'il a été obtenue par modulation interne. Plus le spectre de l'impulsion émise est large et la durée d'impulsion comprimée étroite, plus la cellule de résolution est petite et plus l'équipement radar est protégé des interférences.

### 8.2.5 Bilan de puissance

D'après l'équation d'évolution on peut écrire le bilan de puissance rapportée au bruit, sous la forme classique:

$$S/B \approx \frac{P_e G_e G_r G_{Cl} \sigma^2}{D_t^4 B} \quad (8.24)$$

avec

- $P_e$  : Puissance émise.
- $G_e$  : Gain à l'émission.
- $G_r$  : Gain à réception.
- $\sigma^2$  : Surface Equivalente Radar (S.E.R)
- $B$  : Puissance du bruit
- $G_{Cl}$  : Gain de compression d'impulsion

Si l'on pose le gain total comme étant  $G_{er} = G_e G_r G_{Cl}$ , le bilan de puissance est donné par:

$$S/B = \sigma^2 G_{er} \frac{\rho_t^2}{D_t^4 B} \quad (8.25)$$

$\rho_t$  est l'amplitude du signal émis.

$\sigma^2$  La surface équivalente radar (SER) de la cible (en anglais: Radar Cross Section RCS), exprimée en  $m^2$ , caractérise la capacité de la cible à rayonner l'énergie électromagnétique vers le radar. Elle est exprimée par le rapport entre l'énergie re-émise par la cible dans toutes les directions ( $P_{ray}$ ) et la densité d'énergie reçue par unité de surface ( $P_{inc}$ ). En supposant que la cible est ponctuelle, son expression est donnée par [Thourel 95]:

$$P_{ray} = \sigma^2 P_{inc} \quad (8.26)$$

$P_{ray}$ : est la puissance rayonnée par unité d'angle solide ( $w/m^2$ ).

La relation (8.25) peut être réécrit, sous la forme:

$$S/B = \frac{\sigma^2 PG}{D_t^4 B}$$

Pour les simulations des mesures radar, les caractéristiques du radar  $PG$  dans le bilan de puissance et la puissance  $B$  du bruit de mesures sont choisies pour obtenir les rapport  $S/B$  souhaités par impulsion pour les plages de distances et de SER visées par la simulation.

## 8.3 Modélisation du problème

### 8.3.1 Modélisation électromagnétique des cibles

#### ■ Modèles de Swerling

Reprenons la relation (8.26) qui définit la SER. On peut écrire:

$$\sigma^2 = 4 \pi R^2 \frac{|E_{inc}|^2}{|E_{ray}|^2} \quad (8.27)$$

Celle-ci donne la valeur de  $\sigma$  en fonction du module du coefficient de réflexion ( $E_{inc}/E_{ray}$ ) de la cible. Cette valeur ayant une structure complexe, avec une amplitude  $\rho$  et une phase  $\theta$ , alors le champ rayonné dans une direction sera proportionnel à  $\rho e^{j\theta}$ . Les modèles proposés par Swerling sont définis par le tableau suivant:

| Swerling                    | $\rho$ «Amplitude»   | $\theta$ «Phase»   |
|-----------------------------|--|--|
| 0: Cible non fluctuante     | Constante  | Uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$ , varie d'une rafale à l'autre |
| 1: Fluctuation lente-tour   | Varie selon la distribution de Rayleigh, d'un tour d'antenne à l'autre                     |  |
| 2: Fluctuation lente-rafale | Varie selon la distribution de Rayleigh, d'une rafale à l'autre                            |  |
| 3: Fluctuation lente-pulse  | Varie selon la distribution de Rayleigh, avec une valeur dominante, d'une rafale à l'autre |  |
| 4: Fluctuation rapide       | Varie selon la distribution de Rayleigh, d'un pulse à l'autre                              |  |

#### ■ Signature radar

A une grande distance de la cible, l'onde réfléchi sera sphérique et semblera émaner d'un point qui est le centre de phase de l'antenne équivalent à la cible. Ce centre de phase est le *point brillant* de la cible. Ce modèle est valable pour des cibles de faibles dimensions par rapport à la longueur d'onde du signal radar.

Si maintenant nous considérons une cible de grandes dimensions par rapport à la longueur d'onde du signal radar, et si l'éclairement est celui d'un radar dont la résolution en distance  $\Delta R$  est nettement plus petite que ces dimensions, nous pouvons découper sur cette cible des tranches de distance avec un point brillant pour chacun d'elles ( $\rho_i, \theta_i$ ). Il sera aussi possible d'analyser les points brillants de la cible, et de reconnaître celle-ci grâce à cette *signature radar*. Le champ rayonné dans ce cas sera proportionnel à:

$$E_{ray} \propto \sum_i \rho_i e^{j\theta_i} \quad (8.28)$$

#### ● Paramètres du modèle

Une cible peut être donc représentée par un seul point lumineux, ou bien par une grille de points brillants. Pour le second cas, il est évident qu'il y aura une augmentation du vecteur d'état [Chamon 96]. Les caractéristiques de la SER de la cible (amplitude et phase) évoluent selon:

- La longueur d'onde du signal radar.
- L'angle de présentation de la cible par rapport au Radar.
- La géométrie et les matériaux constituant la cible.

De plus, pour le cas de modèle multipoints, on doit retenir:

- Le nombre de points brillants.
- Les caractéristiques d'évolution de l'orientation de la grille (angles de précessions).

#### ● Traitement du scintillement de la cible

Une cible non-fluctuante ou à SER de fluctuations lentes peut être modélisée par:

$$\begin{aligned}\rho_{k+1} &= \rho_k + \delta\rho_k \\ \theta_{k+1} &= \theta_k + \delta\theta_k\end{aligned}\quad (8.29)$$

où  $\rho$ ,  $\theta$  sont respectivement l'amplitude et la phase de l'amplitude complexe  $A$  de rétrodiffusion de la cible, et leurs dérives gaussiennes lentes sont  $\delta\rho_k$ ,  $\delta\theta_k$ .

Pour une cible fluctuante, le modèle électromagnétique de la cible peut s'écrire:

$$\begin{aligned}\rho_{k+1} &= (1-\beta\varepsilon_k)\rho_k + \delta\rho_k + \beta\varepsilon_k\zeta_k \\ \theta_{k+1} &= (1-\varepsilon_k)\theta_k + \delta\theta_k + \varepsilon_k\Phi_k\end{aligned}\quad (8.30)$$

$\beta=1$  si l'amplitude ne fluctue pas, et  $\beta=0$  sinon,

$\varepsilon_k$  est un bruit poissonien binaire de fréquence  $\lambda_\varepsilon$

$\Phi_k$  est un bruit de phase uniformément distribué sur  $[-\pi, +\pi]$

$\zeta_k$  est un bruit d'amplitude distribué selon une loi de Rayleigh.

Pour relaxer les contraintes de linéarisation sur la distance (cf. relation 8.2), nous considérons que l'équation d'évolution de la phase globale est:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{4\pi}{\lambda} v_{r,k} T_i + \delta\theta_k + \varepsilon_k \Phi_k \quad (8.31)$$

## 8.3.2 Modélisation géométrique

### 8.3.2.1 Trièdres nécessaires pour l'étude du problème.

La figure suivante indique la manière dont est repéré le point dans le trièdre de référence (supposé orthonormé direct), RMA (Repère Mécanique Antenne):

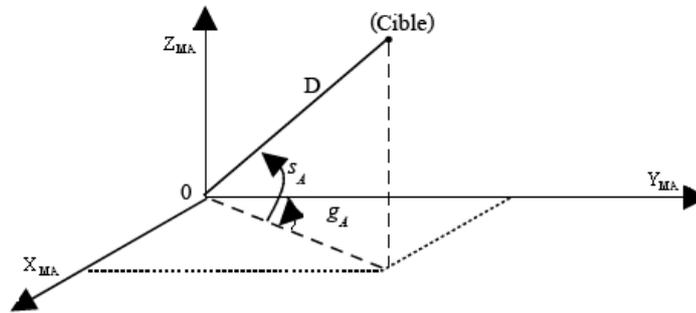


Fig 8.8: Localisation d'un cible dans le repère de référence

La position de la cible dans ce repère fixe peut aussi être caractérisée en coordonnées polaires par le vecteur  $(D, g, s)$ , où  $D$  est la distance de la cible,  $g_A$  est le gisement, et  $s_A$  est le site.

Le repère dit RSM (Repère Support Mécanique) est rigidement lié à la partie fixe de la tourelle qui permet l'orientation de l'antenne Radar. Ce repère est illustré par la Fig 8.9.

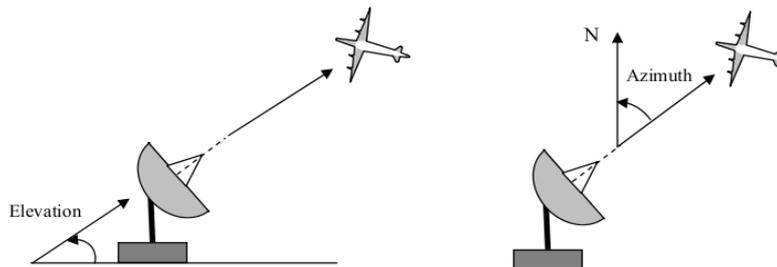


Fig 8.9: Repère radar RSM

Alors on passe d'un repère RSM au repère RMA par l'intermédiaire d'une rotation gisement tourelle et d'une rotation site tourelle, comme l'illustre la Figure 8.10:

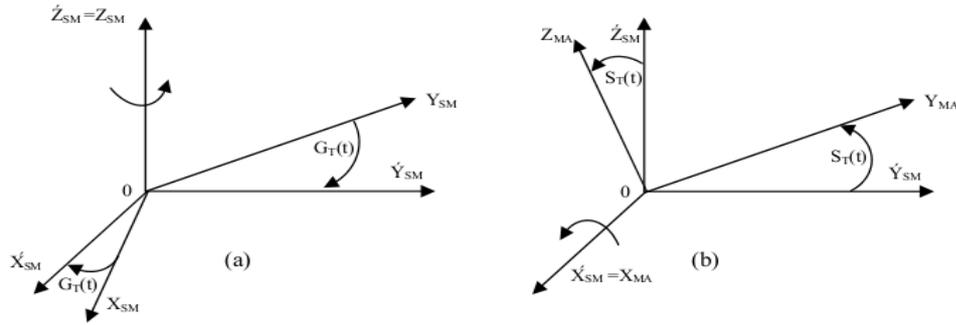


Fig 8.10: (a)Rotation Gisement tourelle,(b) Rotation Site tourelle

L'angle de gisement tourelle  $G_T$  ainsi que l'angle de Site tourelle  $S_T$  dépendent du temps  $t$ . Des transformations géométriques permettent de passer du repère relatif radar vers un repère absolu.

### 8.3.2.2 Coordonnées polaires

Après avoir calculé l'évolution des coordonnées cartésiennes de la cible  $(x_k, y_k, z_k)$ , on calcule ses coordonnées polaires. Les coordonnées polaires de la cible, sont nécessaires pour le calcul des mesures radar échantillonnées à la sortie de filtre adapté, et sont obtenues à partir des coordonnées cartésiennes selon:

$$\Psi(x,y,z)=(D,\theta,\varphi) \quad \begin{aligned} D_k &= \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \\ \theta_k &= \cos^{-1}(z_k / D_k) \\ \varphi_k &= \text{tg}^{-1}(x_k / D_k) \end{aligned} \quad (8.32)$$

Quant à la vitesse, on passe des coordonnées cartésiennes de vitesse  $(v_x, v_y, v_z)$  aux coordonnées polaires  $(v_r, \theta_v, \varphi_v)$  en appliquant la même fonction  $\Psi$  au triplet, aussi pour l'accélération :  $\Psi(\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z) = (\gamma_r, \theta_\gamma, \varphi_\gamma)$ .

### 8.3.3 Modèle dynamique (Singer)

#### 8.3.3.1 Généralités

Le problème de poursuite RADAR d'une cible manoeuvrante est un problème difficile du fait que les équations (dynamique et mesure) sont fortement non-linéaires et que les aléas de pilotage de la cible sont fortement non-gaussiens.

Pour contourner ce problème, on utilise des modèles linéaires du type (position, vitesse), ou encore (position, vitesse, accélération bruitée). Ce modèle, couramment utilisé en pistage radar, est généralement connu sous le nom de modèle de Singer ([Singer 70], [Singer 71]), qui donne des équations très simples en repère cartésien:

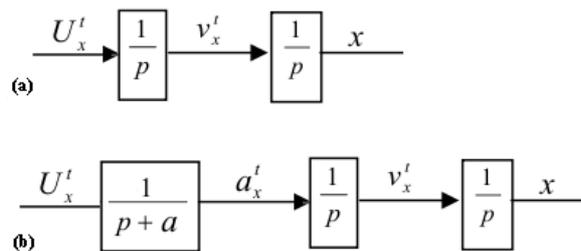


Fig 8.11: Modèle de Singer du type a:(position, vitesse) b:(position, vitesse, accélération bruitée)

Il apparaît clairement que l'avantage de ces modèles (dits doubles ou triples intégrateurs) réside dans leur caractère linéaire auquel on adjoint le plus souvent des statistiques gaussiennes.

On pourra trouver, par exemple dans [Bozzo 83], d'autres variantes du modèle de Singer. Notamment un modèle modifié "un peu plus physique", qui présente une rétroaction sur la vitesse afin de tenir compte des forces de frottement visqueux introduites par le milieu, qui ont pour effet de plafonner la vitesse .

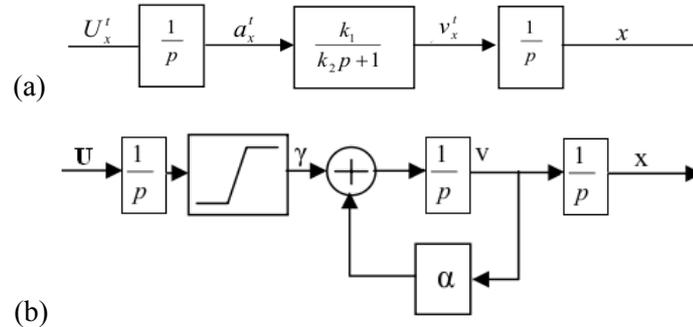


Fig 8.12: Modèles de Singer modifié

$k_1$ : (sans dimension) conditionne la vitesse maximale accessible au mobile pour une commande d'accélération donnée. En pratique  $k_1$  détermine le domaine de variation possible de vitesse

$k_2$ : (exprimée en secondes), permet d'influer sur le temps de montée de la vitesse. Plus ce facteur est important, plus la variation temporelle de la vitesse sera lente.

U: bruit blanc d'amplitude gaussienne, à occurrence poissonnienne.

Dans le deuxième cas (Figure 8.12 b):

$\alpha = \gamma_{max}/v_{max}$  ( $s^{-1}$ ) est la viscosité du système.

Le modèle ici plus réaliste de dynamique de vol. La vitesse  $V_x$  est stabilisée par un terme de viscosité aérodynamique. La vitesse atteint un palier  $v_x$  constant, lorsque l'accélération est nulle. Ce modèle est introduit une viscosité sur la vitesse permettant la prise en compte réaliste des aléas de manoeuvre de la cible (des limites de vitesse dans l'air).

### 8.3.3.2 Poursuite RADAR par un modèle de Singer 3D

Le modèle dynamique de Singer tridimensionnel, modifié pour tenir compte des équations aérodynamiques et de la saturation des commandes de pilotage est de la forme:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + U_k \\ v_{k+1} &= \left(1 - \frac{1}{k_2}\right)v_k + \frac{k_1}{k_2} y_k \\ x_{k+1} &= x_k + v_k T + \frac{T^2}{2} y_k \end{aligned} \quad (8.33)$$

Les dynamiques selon les trois axes  $[x, v_x, \gamma_x]$   $[y, v_y, \gamma_y]$   $[z, v_z, \gamma_z]$  sont indépendantes l'une de l'autre. Dans ce cas on aura ici un vecteur de coefficients  $\mathbf{k} = [k_1^x \ k_2^x \ k_1^y \ k_2^y \ k_1^z \ k_2^z]$ . On peut représenter la dynamique du modèle à trois dimensions par la figure 8.13:

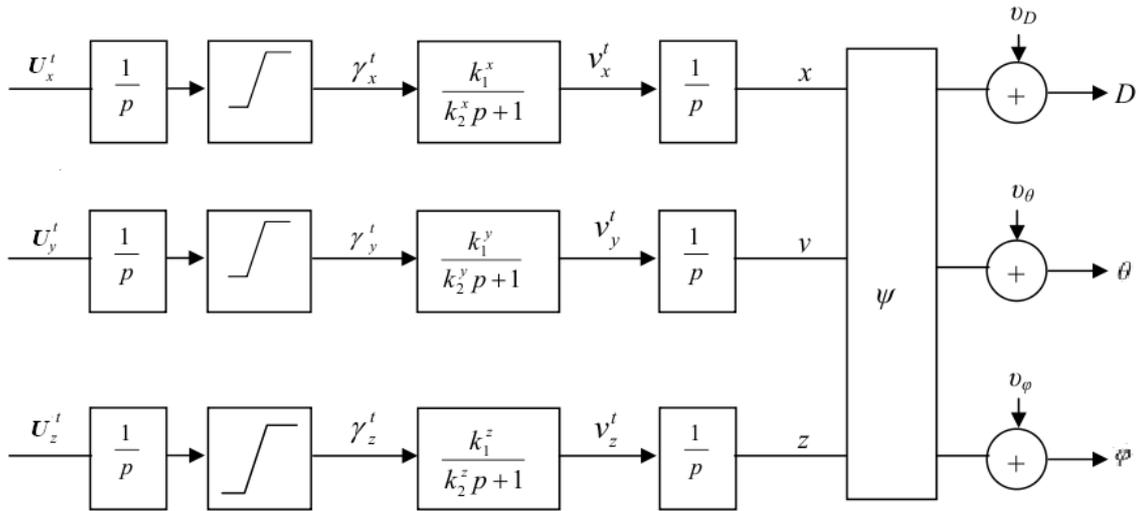


Fig 8.13: Modèle 3D de Singer

La transformation non- linéaire  $\psi$  permet de passer du cartésien au polaire.

$v_D, v_\phi, v_\theta$  : bruits blancs gaussiens de mesure, de variance respectivement  $\sigma_D^2, \sigma_\phi^2, \sigma_\theta^2$ .

$U_t$  : est un bruit de loi connue.

### 8.3.3.3 Modèle proposé pour la poursuite

Les manœuvres imprévisibles de pilotage sont convenablement représentées par un bruit poissonien doublement stochastique: c'est un produit direct d'une mesure aléatoire binaire  $\varepsilon_k$  d'occurrence poissonnienne et d'une amplitude aléatoire indépendante  $b_k$ . Dans ce cas, l'équation dynamique du système est:

$$\begin{aligned} \gamma_{d,k+1} &= \gamma_{d,k} + \varepsilon_{d,k} b_{d,k} + \delta \gamma_k \\ v_{d,k+1} &= (1 - \alpha_d T) v_{d,k} + T \gamma_{d,k} \\ d_{k+1} &= d_k + v_{d,k} T + \frac{1}{2} T^2 \gamma_{d,k} \quad d=x,y,z \end{aligned} \quad (8.34)$$

$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ : les viscosités suivant les trois axes  $x, y, z$ .

$\varepsilon_k$  : est un bruit poissonien binaire  $\{0,1\}$ , modélisant l'occurrence des changements des commandes d'accélération (sauts), de fréquence moyenne  $E(\varepsilon_k) = \zeta_k$ . L'amplitude des sauts est modélisée par  $b_k$  qui est un bruit de moyenne nulle et de variance constante  $\sigma_b^2$ .

La commande est donc modélisée par un bruit poissonien ponctuel. Ainsi le changement d'accélération n'apparaît qu'à certains instants, avec une certaine amplitude  $U_k = \varepsilon_k \times b_k$ .

On en déduit que la représentation d'état pour ce modèle, dans la représentation 3D, est donnée par:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi(T) x_k + W_k + U_k \\ \text{avec:} \quad U_k &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{x,k} \times b_{x,k} & 0 & 0 & \varepsilon_{y,k} \times b_{y,k} & 0 & 0 & \varepsilon_{z,k} \times b_{z,k} \end{bmatrix} \\ \Phi &= \begin{bmatrix} [\Phi_x] & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & [\Phi_y] & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & [\Phi_z] \end{bmatrix} \\ \Phi_d &= \begin{bmatrix} 1 & T & 0,5 T^2 \\ 0 & 1 - \alpha_d \times T & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d=x,y,z \end{aligned} \quad (8.35)$$

### 8.3.3.4 Modèle du système pour le cas radial

Pour une trajectoire radiale d'une cible à fluctuations lentes, le vecteur d'état peut s'écrire par l'accélération et la vitesse radiale, ainsi que la distance Radar-Cible:  $x = [D \ v_r \ \gamma_r]$ .

### 8.3.4 Modèle global du système

Le modèle global de l'espace d'état, dans le cas radial, prenant en compte les variables de rétrodiffusion, est donné par:

$$\begin{aligned}
 \rho_{k+1} &= \rho_k + \delta \rho_k + \beta \epsilon_k \varsigma_k \\
 \theta_{k+1} &= \theta_k + (4 \frac{\pi}{\lambda}) v_{r,k} T + \delta \theta_k + \epsilon_k \Phi_k \\
 D_{k+1} &= D_k + v_{r,k} T + \frac{1}{2} T^2 \gamma_{r,k} \\
 v_{r,k+1} &= (1 - \alpha T) v_{r,k} + T \gamma_{r,k} \\
 \gamma_{r,k+1} &= \gamma_{r,k} + b_k \epsilon_k + \delta \gamma_{r,k}
 \end{aligned} \tag{8.36}$$

Après avoir fait la relaxation des contraintes de linéarisation sur la distance, la transition d'état s'effectue selon (pour simplifier on va utiliser  $x$  au lieu de  $\mathbf{x}$  pour la suite):

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= \Phi(T) x_k + u_k + w_k \\
 \text{avec: } x_k &= [\rho \ \theta \ D \ v_r \ \gamma_r]_k \\
 \Phi(T) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (4\pi/\lambda)T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha T & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 w_k &= [\delta \rho_k \ \delta \theta_k \ 0 \ 0 \ \delta \gamma_k] \\
 u_k &= [\beta \epsilon_k \varsigma_k \ \epsilon_k \Phi_k \ 0 \ 0 \ b_k \epsilon_k]
 \end{aligned} \tag{8.37}$$

Quant à l'équation de mesure, pour chaque récurrence  $k$ , on suppose qu'on a  $N_{ech}$  échantillons pour chaque récurrence, alors pour  $i=0, \dots, N_{ech}-1$ ,

$$y_k^i = \rho_k e^{j\varphi_k} \frac{K}{D_{\tau/2}^2} e^{-j\omega_0 \frac{2D_{\tau/2}}{C}} h(kT_i - \frac{2D_{\tau/2}}{C}) + v_k^i \tag{8.38}$$

En comparant cette relation avec celle de (8.4), on voit que  $K = K(\vec{D}_0, \vec{D}_i)$ , puisque l'angle entre l'axe de l'antenne et celui de la cible est connu dans le cas radial, et cette valeur ne dépend que de l'azimut de l'antenne du radar tournant.

avec

$T$  : La durée d'impulsion comprimée (égale à la période d'échantillonnage)

$\rho, \theta$  : Respectivement l'amplitude et la phase du coefficient de rétrodiffusion de la cible.

$D_{\tau/2}$  : Distance radiale du point considéré de la cible lors de la réflexion.

### 8.3.5 Linéarisation du modèle du système

Pour une discrétisation suffisamment fine sur le régime transitoire (incertitude initiale), et sur le régime permanent (bruit dynamique), on peut garantir la validité des linéarisations locales du système. Cette validité est une condition nécessaire pour appliquer la technique ci-après. Elle est vérifiée, quand:

- $h(.)$  peut être approché linéairement par morceaux (triangle) en la distance  $D$ , à l'intérieur d'une case distance.
- Le terme  $1/D^2$  varie peu sur une case distance.
- La phase  $\theta$  peut se linéariser sur des intervalles d'incertitude de largeur  $\pi/4$ .
- La relaxation des contraintes de linéarisation sur la distance, peut obtenir par l'équation (8.2).
- Les pas de discrétisation de vitesse et d'accélération sont dictés par le respect des contraintes de linéarisation des incertitudes en phase et distance.

### 8.3.6 Précision optimale sur les estimations

Nous rappelons ci-dessous, les diverses précisions optimales (écart type de l'erreur d'estimation) que l'on doit attendre sur l'estimation des paramètres de cible, pour un rapport signal/bruit donné  $RSB$  ([Darricau 93], [Noyer 96])

- Précision optimale sur l'estimation angulaire par monopulse de phase

$$\sigma_{\theta} = \frac{\delta \theta}{1.6 \sqrt{2 RSB}}$$

avec  $\delta \theta = \frac{\lambda}{2d} = \frac{c}{2fd}$  Pouvoir séparateur angulaire.

où  $d$  : Distance entre les deux récepteurs

$\lambda$  : Longueur d'onde du signal émis

$RSB$  : Rapport signal/bruit (puissance) de la voie somme

- Précision optimale sur l'estimation de distance radiale

$$\sigma_R = \frac{c T_i}{4 \sqrt{RSB}}$$

et celle du retard (temps aller-retour)  $\sigma_{\tau} = \frac{T_i}{2 \sqrt{RSB}}$

- Précision optimale sur l'estimation de vitesse radiale

L'erreur d'estimation de la fréquence Doppler par transformée de Fourier sur  $n$  impulsions successives de durée  $T_r$ . A s'écrit, pour une vitesse stationnaire:

$$\sigma_{f_d} = \frac{1}{T \sqrt{2 RSB}}$$

avec  $T = n T_r$ , la durée d'intégration cohérente.

On déduit de cette relation, connue sous le nom de formule de Manasse, l'écart-type d'erreur sur la vitesse radiale:

$$\sigma_v = \frac{\lambda}{2T \sqrt{2 RSB}}$$

Ces précisions optimales représentent les bornes de Cramer-Rao pour l'estimation locale par moindre carré. On remarque que la précision des mesures dépend non seulement du rapport signal/bruit, mais aussi des paramètres Radar, par exemple l'estimation angulaire dépend de la résolution angulaire  $\delta \theta$  de l'antenne: plus la fréquence  $f$  du signal est élevée, ou plus les cornets récepteurs sont éloignés, meilleure sera la localisation angulaire.

## 8.4 Récepteur particulière pour radar de veille-poursuite

L'aspect de manoeuvre de la cible est d'ailleurs une des principales pierres d'achoppement du filtre de Kalman. En effet, ce filtre est construit sur la base de modèles linéaires et gaussiens. Dans le cas où il y a manoeuvre possible de la cible, la statistique de la commande du mobile doit comporter un aléa poissonien. Par nature le filtre de Kalman ne peut réagir qu'avec beaucoup de traînage à un aléa poissonien. On pourrait bien évidemment y remédier en augmentant la variance du bruit de dynamique, mais cela aurait pour effet immédiat de dégrader l'estimation dans les portions stationnaires utiles à la prédiction.

On a généralement recours à deux types de solutions

- Soit on cherche à rendre le filtre adaptatif à la dynamique ([Thorp 72], [Wang 93]).
- Soit on cherche à utiliser le modèle le mieux adapté à la situation c'est l'approche multi-modèles ([Barshalom 88], [Blom 88], [DelMoral 91]).

L'algorithme particulière, permet des bruits de dynamique ( $u_k$ ) ayant de statistiques très diverses notamment des ruptures poissoniennes à valeurs dans un continuum, et donc de suivre parfaitement des manoeuvres quelconques de la cible.

### 8.1.1 Problématique du radar de veille-poursuite

Les radars de veille assurent une surveillance continue de l'espace, par exploration sectorielle et régulière en angle, selon un balayage périodique de différentes situations angulaires élémentaires par les faisceaux radars, au moyen d'une rotation continue de l'antenne autour d'un axe vertical.

Les observations ici, ne sont disponibles que pendant la période d'illumination, ainsi il y aura seulement  $n_0$  observations successives disponibles dans un tour d'antenne.

La détection et l'estimation d'une cible sont alors basées sur un nombre restreint de récurrences  $n_0$  par tour d'antenne de radar, on l'appellera le nombre de récurrences d'illumination de la cible. Il correspond au nombre de récurrences pendant la durée de passage du faisceau du radar dans le secteur angulaire correspondant à la cible. Ce temps (appelé durée d'illumination  $T_{illumination}$ ):

$$T_{illumination} = \theta_{3dB} / \Omega$$

Les observations seront disponibles pendant la durée d'illumination et absentes en-dehors, comme illustré par la figure 8.14.

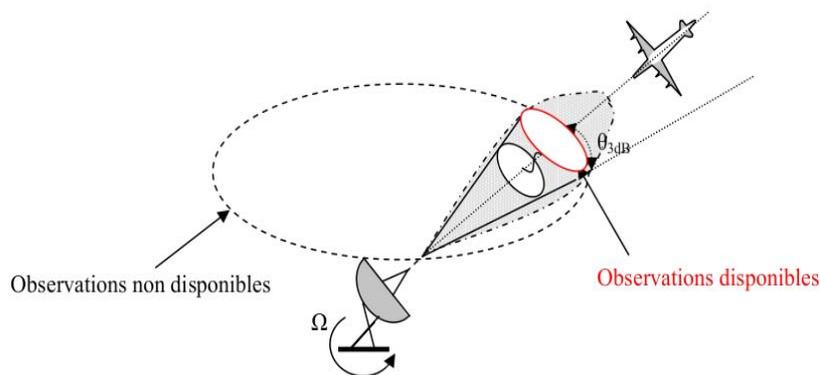


Fig 8.14 Principe de radar de veille

Le modèle de Singer modifié est toujours valable pour présenter la cinématique de la cible vue par un radar de veille.

### 8.1.2 Principe de l'estimation

On poursuit le mouvement de la cible en utilisant des branchements déterministes sur l'accélération pour prendre en compte le bruit de dynamique (commandes sur l'accélération). Un autre branchement est nécessaire sur la phase de rétrodiffusion. La trajectoire prédite est ensuite corrigée grâce aux observations faites (signal réceptionné par le radar). Cependant, si aucune donnée n'est disponible (le faisceau n'illumine plus la cible pendant un certain laps de temps avant d'y revenir au tour suivant), il faut effectuer une étape de prédiction pure. On en déduit que l'estimation des paramètres des cibles, se fait en deux phases, suivant la disponibilité de mesure:

- Prédiction(avec branchement)/Correction(avec sélection) pendant la période d'illumination où les observations sont disponibles. Dans ce cas là on utilise la technique de filtrage particulière déterministe à maximum de vraisemblance (cf. 2.4.2).
- Prédiction pure (sans correction) composée aussi de deux étapes:
  - Prédiction en utilisant le modèle dynamique de l'état ( $u=0$ ) sans prendre en compte les sauts de phase ou d'accélération de façon explicite, sous forme de branchement; mais de façon implicite en augmentant la variance du bruit dynamique.
  - La rédiscrétisation se fait quand on reçoit la première nouvelle mesure, qui utilise cette observation et les nouvelles répartitions afin de faire la décomposition des particules prédites.

Ce principe de traitement est illustré par la figure 8.15.

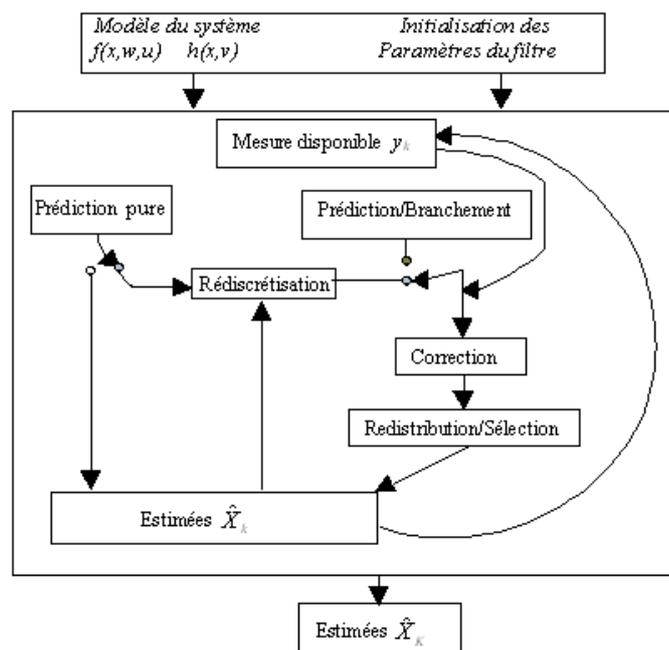


Fig 8.15 Principe de radar de veille-poursuite

### 8.1.3 Filtrage particulière du problème radar (période d'illumination)

#### 8.1.3.1 Estimation particulière déterministe à maximum de vraisemblance

La technique de filtrage particulière que nous allons détailler ici est déterministe. Elle concerne l'optimisation de trajectoires au sens du maximum de vraisemblance.

Les particules utilisées ici sont des mesures gaussiennes  $G_i(x_i, P_i)$ , chacune de poids  $\rho_i$ , où  $x_i$  représente la moyenne et  $P_i$  la variance d'une loi normale multidimensionnelle. La densité de probabilité conditionnelle s'écrit alors comme une somme pondérée de mesures gaussiennes:

$$P(\bar{x}, P) \approx \sum_{i=1}^N \rho_i G(x^i, P^i) \quad (8.39)$$

La densité de probabilité  $p(x_k/Y_k)$  se calcule récursivement par une technique de type Kalman étendu. Les équations de dynamique et d'observation des systèmes auxquels cette technique est applicable s'écrivent, sous forme générique:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= f_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_k) \\ \mathbf{y}_k &= h_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (8.40)$$

Où  $\mathbf{v}_k$  est un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance  $R_k$ , et  $\mathbf{w}_k$  un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance  $Q_k$  et  $\mathbf{u}_k$  un bruit de densité quelconque.

Pour l'estimation de  $\mathbf{x}_{k+1}$ , on fait la prédiction et la correction sachant les observations  $Y_{k+1} = \{y_i\}_{i=1}^{k+1}$ , et le branchement déterministe de certaines variables de l'espace d'état, par filtrage de Kalman étendu. Ceci n'est possible que si les linéarisations locales des fonctions  $f_k$  et  $h_k$  sont valides pour un nombre de secteurs particuliers suffisants (voir plus loin).

Il s'agit d'appliquer l'algorithme de filtrage particulière déterministe à particules de Gauss généralisées (cf. §2.4.2 Alg 2.2).

### 8.1.3.2 Initialisation du filtre

#### • Équation de RICCATI

Les équations du filtre de Kalman étendu local sont entièrement définies par les données du problème  $F_k^x, F_k^w, H_k, R$  et  $Q$  telles que définies en §1.2.2 La matrice de covariance de l'erreur d'estimation d'état est une matrice  $P_{k+1/k}$  définie positive. L'équation récurrente pour la covariance de l'erreur de prédiction est donnée par l'équation algébrique discrète de RICCATI::

$$P_{p,k+1} = F_k^x P_{p,k} F_k^{xT} - F_k^x P_{p,k} H_k^T (H_k P_{p,k} H_k^T + R)^{-1} H_k P_{p,k} F_k^{xT} + F_k^w Q F_k^{wT} \quad (8.41)$$

où  $P_{p,k+1} = P_{k+1/k}$

Pour  $P_{e,k} = P_{k/k}$ : la matrice de covariance de l'erreur d'estimation en régime permanent qui vérifie:

$$P_{e,k} = P_{p,k} - K_k [H_k P_{p,k} H_k^T + R]^{-1} K_k^T \quad (8.42)$$

Les équations de RICCATI permettent de calculer la suite des gains de Kalman  $K_k$ , selon:

$$K_k = P_{p,k} H_k [H_k P_{p,k} H_k^T + R]^{-1} \quad (8.43)$$

Le calcul des matrices de covariances  $P_{p,k+1} = P_{k+1/k}$  et  $P_{e,k+1} = P_{k+1/k+1}$  peut être fait « hors-ligne ». Pour une solution stationnaire, la covariance prévue  $P_{k/k}$ , tend vers une constante  $P$ .

Alors, pour un modèle donné, le gain du filtre  $K_k$  et son évolution en fonction du temps ne dépendent que de matrices  $Q, R$  et  $P_{0/0}$ . En régime permanent, si le système et les bruits sont stationnaires, le gain de Kalman  $K_k$  est constant et sa valeur ne dépend que de ces matrices.

En pratique il est donc nécessaire de valider les paramètres de filtre et notamment l'initialisation des matrices  $Q, P_{0,0}$  pour garantir son bon fonctionnement.

- **Initialisation des matrices de covariance d'observation et de dynamique**

Si l'on suppose que la partie réelle et la partie imaginaire du bruit de mesure sont de même variance  $\sigma_v^2$ , on pose  $\mathbf{y}_k = [\text{Re}(y_k), \text{Im}(y_k)]^T$  et  $\mathbf{v}_k = [\text{Re}(n_k), \text{Im}(n_k)]^T$ . La matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R} = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T]$  s'écrit sous la forme.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix} \quad (8.44)$$

L'initialisation de  $Q_j, j: 1..M$ , où  $M$  est le nombre de modes du bruit dynamique, est donnée par:

$$Q_j = \begin{bmatrix} \sigma_{\delta\rho}^{j^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\delta\theta}^{j^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\delta D}^{j^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\delta v}^{j^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\delta y}^{j^2} \end{bmatrix} \quad (8.45)$$

Cette initialisation dépend des caractéristiques du bruit de dynamique. Le bruit sur l'amplitude (resp. le bruit de phase), est supposé de loi de probabilité gaussienne  $G(0, \sigma_{\delta\rho})$  (resp.  $G(0, \sigma_{\delta\theta})$ ).  $G(0, \sigma_{\delta D})$ ,  $G(0, \sigma_{\delta v})$ ,  $G(0, \sigma_{\delta y})$  sont les distributions gaussiennes des variables de distance, de vitesse et d'accélération respectivement. Il faut aussi que ce modèle prenne en compte les sauts de phase, d'amplitude et d'accélération.

- **Initialisation des particules**

L'initialisation consiste à couvrir l'espace d'état par  $N$  particules gaussiennes  $(x_{0,0}^i, P_{0,0}^i)$ , en approchant au mieux la densité de probabilité initiale (a priori), et en respectant la validité de la linéarisation.

L'amplitude, la phase, la distance, la vitesse et l'accélération seront supposées uniformes sur un support borné. L'initialisation s'effectue uniformément selon chaque composante du vecteur d'état, selon:

|              | <i>Min</i>     | <i>Max</i>     | Nombre de particule |
|--------------|----------------|----------------|---------------------|
| Amplitude    | $\rho_{min}$   | $\rho_{max}$   | $N_\rho$            |
| Phase        | $-\pi$         | $+\pi$         | $N_\theta$          |
| Distance     | $D_{min}$      | $D_{max}$      | $N_D$               |
| Vitesse      | $v_{min}$      | $v_{max}$      | $N_v$               |
| Accélération | $\gamma_{min}$ | $\gamma_{max}$ | $N_\gamma$          |

Le nombre de particules nécessaire est donc égal à  $N = N_\rho \times N_\theta \times N_D \times N_v \times N_\gamma$ . La matrice de covariance de chaque particule est calculée en fonction des caractéristiques d'une discrétisation. Ceci est fait en respectant les domaines de linéarisation sur chaque variable de l'espace d'état, et en supposant que toutes les particules sont initialement équiprobables, ainsi, on initialise  $P_{0/0}^i$  par:

$$P_{0/0}^i = \begin{bmatrix} \sigma_\rho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_D^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad i=1, \dots, N \quad (8.46)$$

Au lieu de faire une initialisation des particules (positions, variances) uniforme sur tous les intervalles, on peut optimiser le nombre de particules pour avoir une redistribution adaptée aux variables d'état. Dans ce cas les variances associées à chaque intervalle ne sont plus égales, mais elles dépendent des positions des particules [Teuliere 00](cf. 7.2).

A partir de l'évaluation des matrices en appliquant les équations de RICCATI, si les variances des variables d'état restent bien positives et tendent vers une valeur constante, d'une part et respecte le domaine de linéarisation et d'autre part, cela signifie que les initialisations de matrices  $Q, R, P_{0/0}$  sont bien adaptées au problème traité.

### 8.1.3.3 Prédiction de particules

La prédiction modifie deux composantes:

- L'accélération de la cible est modélisée par M valeurs de sauts possibles qui sont toutes explorées. Ainsi chaque particule est dupliquée M fois à chaque rafale, où le radar éclaire la cible
- De même, le «scintillement de cible» est modélisé par L valeurs de sauts de phase possibles. Ceci engendre également une duplication des particules existantes par un facteur L, qui n'est effectuée que pendant l'illumination de la cible.

### 8.1.3.4 Probabilité de détection

Le problème de décision dérivé des systèmes radar est le suivant :

$$\begin{aligned} H_1: y_k &= s_k + v_k \\ H_0: y_k &= v_k \quad k=1, \dots, K \end{aligned}$$

où l'hypothèse  $H_1$  est normalement associée à la présence d'une cible, et l'hypothèse  $H_0$  à l'absence de signal. Les tests de Neyman-Pearson [Neyman 33] agissent directement sur les mesures de performance suivantes:

$$\begin{aligned} P_D &= \Pr\{\text{décider } H_1 / H_1 \text{ est vrai}\} \\ P_F &= \Pr\{\text{décider } H_1 / H_0 \text{ est vrai}\} \\ P_M &= \Pr\{\text{décider } H_0 / H_1 \text{ est vrai}\} \end{aligned}$$

$P_D$  est appelée la probabilité de détection,  $P_F$  la probabilité de fausse alarme, et  $P_M$  est la probabilité de non-détection.

On veut, usuellement, avoir une valeur  $P_D$  la plus grande possible:

$$P_d^k = \frac{p(Y_k / H_1)}{p(Y_k / H_1) + p(Y_k / H_0)} \quad (8.47)$$

Si  $\tilde{P}_i$  est le **poins non-normalisé** de la  $i^{\text{ième}}$  particule, et  $p_v(y_k)$  est la probabilité en l'absence de signal, la probabilité  $P_D$  peut être calculée par l'équation récursive suivante [Ziadi 07] :

$$\begin{aligned} p(Y_k / H_0) &= p(Y_k = V_k) = p_v(y_k) p(Y_{k-1} / H_0) \\ p(Y_k / H_1) &= p(Y_{k-1} / H_1) p(y_k / Y_{k-1}, H_1) \\ &= p(Y_{k-1} / H_1) \int_{X_k} p(y_k / x_k, H_1) p(X_k / Y_{k-1}, H_1) dX_{k-1} \end{aligned}$$

La discrétisation particulière de l'espace d'état donne (par approximation):

$$\begin{aligned} p(X_k / Y_{k-1}, H_1) &\simeq \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i p_i(X_k / Y_{k-1}, H_1) \simeq p(y_k / Y_{k-1}, H_1) \\ p(Y_k / H_1) &\simeq p(Y_{k-1} / H_1) \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i p_i(y_k / Y_{k-1}, H_1) \end{aligned}$$

$$p(Y_k/H_1) \simeq p(Y_{k-1}/H_1) \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\rho}_i$$

La probabilité de détection normalisé est donné par l'équation récurrente suivante:

$$P_D^k = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\rho}_i}{\sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\rho}_i + p_v(y_k) \frac{1 - P_D^{k-1}}{P_D^{k-1}}} \quad (8.48)$$

avec:  $P_D^{k-1} = p(Y_{k-1}/H_1) = 1 - p(Y_{k-1}/H_0)$

## 8.1.4 Méthode de prédiction pure (période aveugle)

### 8.1.4.1 Principes de la méthode

- Dans un premier temps, on suppose que les observations sont disponibles, à la fin de l'étape de prédiction/correction.  $N$  particules gaussiennes sont déterminées par leurs positions et leurs matrices de covariance, ainsi que les poids de ces particules  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{P}_i, \rho_i)$   $i=1, \dots, N$ , avec,

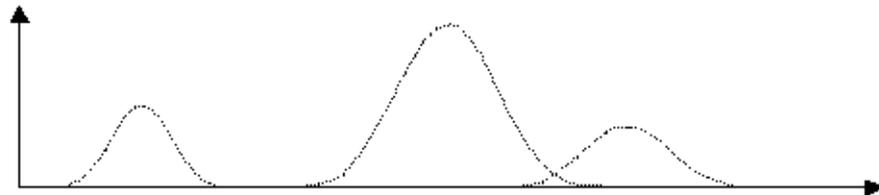
$$\mathbf{x}_i = [A_i \theta_i D_i v_i \gamma_i].$$

- En absence d'information, il y a prédiction pure (sans correction) des particules, dans ce cas:
  - Les positions des particules bougent suivant la dynamique du système. Ici il n'y pas de branchement (exploration).
  - Les particules gaussiennes grossissent (leurs variances augmentent).
  - Les poids des particules ne varient pas.
- Dès que la nouvelle observation arrive, on crée  $N_{nec}$  nouvelles particules à l'aide d'une grille multi-dimensionnelle sur l'espace d'état, en bornant cet espace dans une intervalle  $[\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max}]$ . Le nombre de discrétisations  $N_{nec} = n_\rho \times n_\theta \times n_D \times n_v \times n_\gamma$ , doit être choisi de façon à assurer le meilleur compromis entre l'erreur d'approximation et la complexité algorithmique.
- Après avoir calculé les probabilités de ces nouvelles particules, on sélectionne les  $N$  particules les plus vraisemblances parmi les  $N_{nec}$  particules de cette grille.

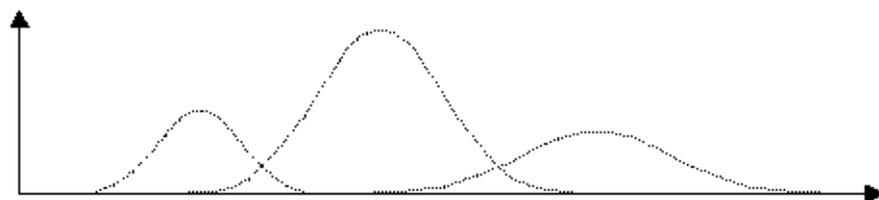
### 8.1.4.2 Exemple

L'exemple suivant éclaire cette méthode.

- 1- Des informations disponibles donnent les particules suivantes dans l'axe de distance  $D$  ( $N=3$ ) :

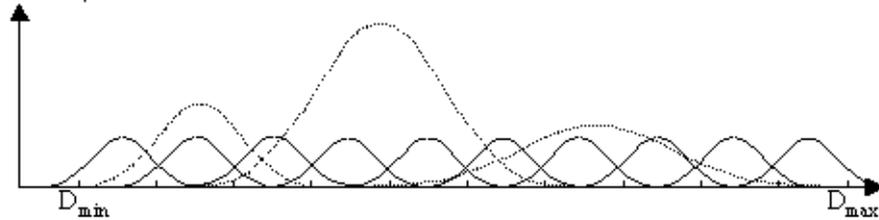


- 2- prédiction pure

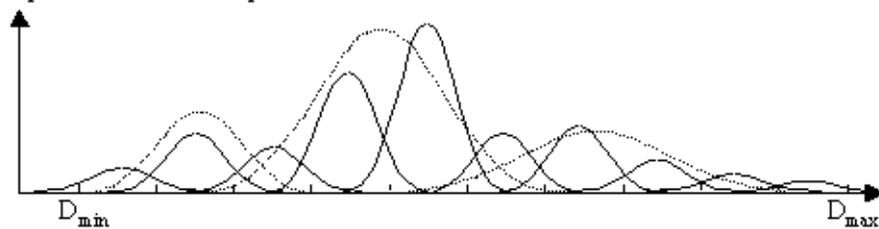


- 3-  $D_{\max}=100$  km,  $D_{\min}=90$  km, avec une erreur d'estimation acceptable  $D_{\text{err}}=1$  km, par conséquent  $N_{\text{part}}=10$ .

- 4- Des nouvelles particules naissent :



- 5- On fait la pondération de ces particules :



- 6- On choisit 3 particules parmi les 10 particules qui sont déjà pondérées :

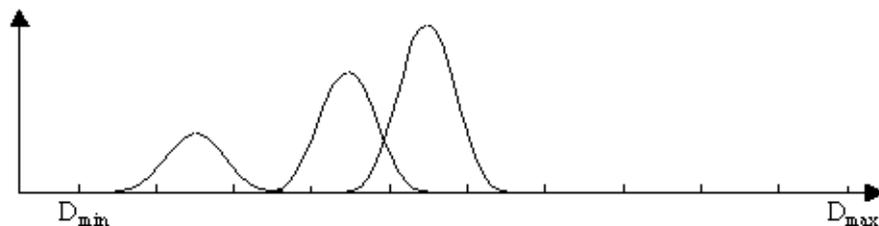


Fig 8.16 Représentation schématique de la Re-discrétisation

### 8.1.5 Algorithme d'estimation

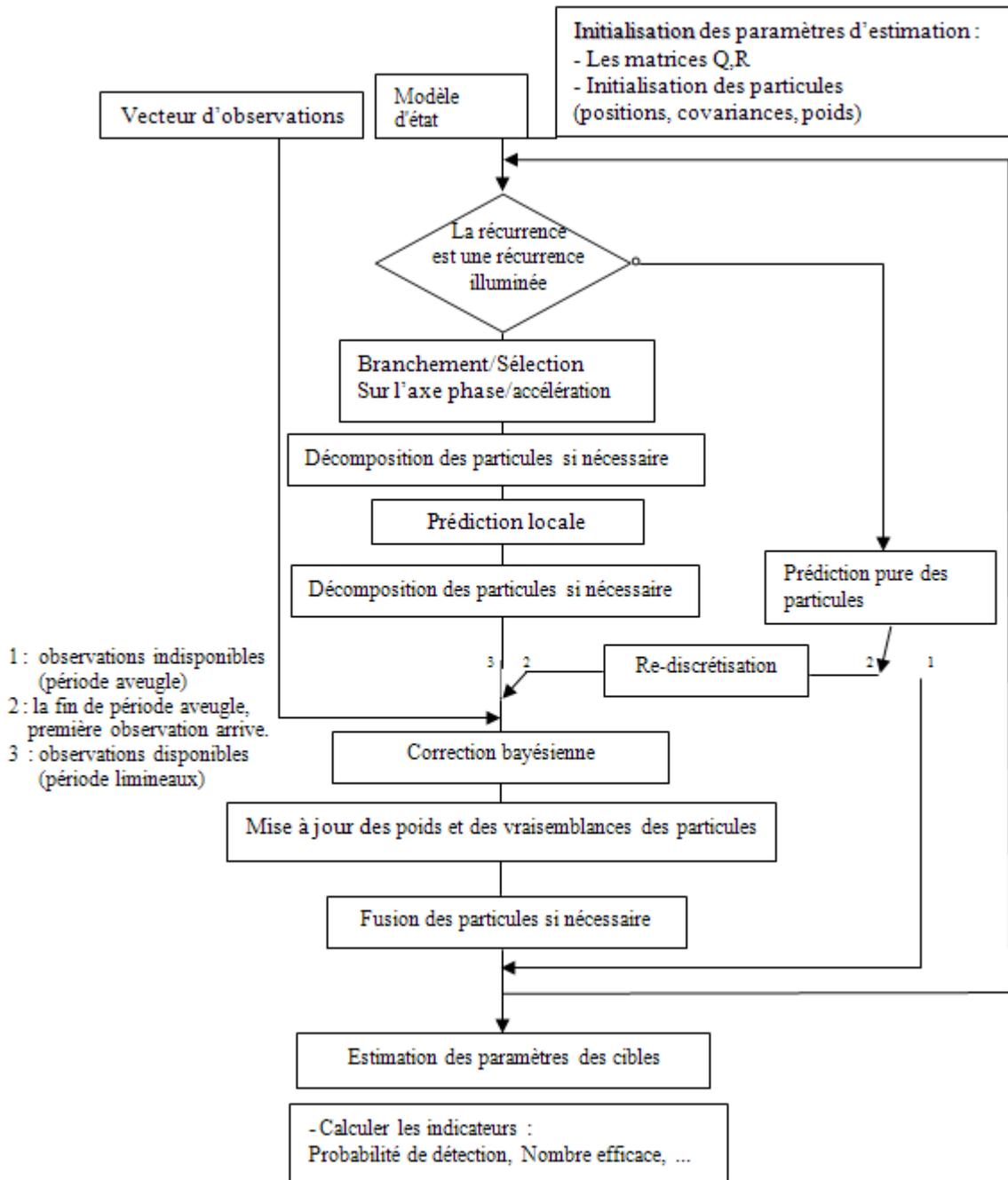


Fig 8.17 Algorithme d'estimation de radar de Veille- poursuite

## 8.1.6 Caractéristiques des simulations

### 8.1.6.1 Mode de fonctionnement simulé

Afin de réduire la complexité algorithmique, on s'intéresse ici, à un mode de fonctionnement purement radial: la cible a un mouvement uni-dimensionnel selon l'axe radar-cible.

### 8.1.6.2 Caractéristiques du Radar

On suppose que la cible est dans le faisceau du radar pendant 9 récurrences, contre 3024 récurrences, où le radar ne reçoit pas d'observations sur cette cible. Ces 9 récurrences sont composées de trois rafales. Chaque rafale a sa propre fréquence d'émission et contient trois récurrences, les numéros des récurrences correspondant aux périodes lumineuses/aveugles pour le scénario Radar sont représentés par le tableau suivant:

| Période 1   |            | Période 2 |       | Période 3 |       | Période 4 |        | Période 5 |        |
|-------------|------------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|--------|-----------|--------|
| L(lumineux) | V(aveugle) | L         | V     | L         | V     | L         | V      | L         | A      |
| 0-8         | 9          | 3033      | 3042  | 6066      | 6075  | 9099      | 9108   | 12141     | 12150  |
|             | -3032      | -3041     | -6065 | -6074     | -9098 | -9107     | -12140 | -12149    | -15173 |

### 8.1.6.3 Caractéristiques de la cible

- vitesse maximale:  $0.5 \text{ km/s}$ .
- accélération maximale:  $5g$ .
- Viscosité:  $0.1 \text{ s}^{-1}$ .
- Une cible avec Swerling  $\sigma=0$ .
- Fréquence des sauts  $1.0 \text{ saut/s}$  (occurrence des sauts d'accélération imprévisibles).
- Variance des sauts  $(0.002) \text{ (km/s}^2\text{)}^2$

Les courbes dans la figure 8.18, montrent les variations de phase et de l'amplitude de rétrodiffusion de la cible:

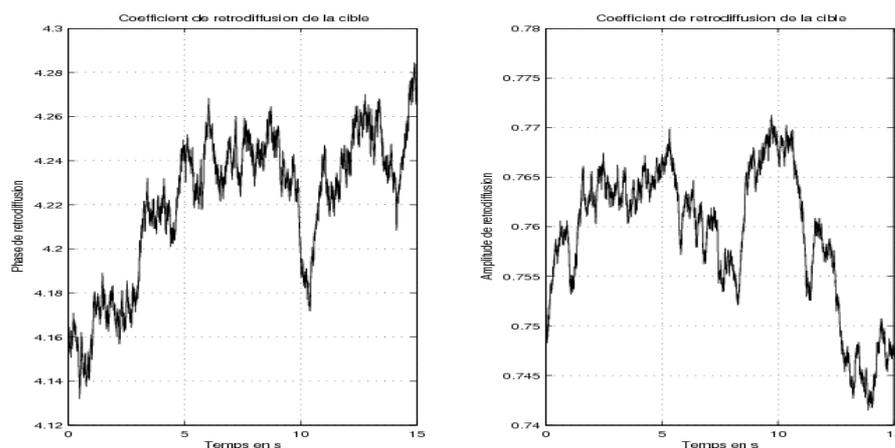


Fig 8.18 Amplitude et phase de rétrodiffusion

La trajectoire de la cible est rectiligne comme illustré par la figure 8.19, qui représente aussi la distance, la vitesse radiale, et l'accélération radiale.

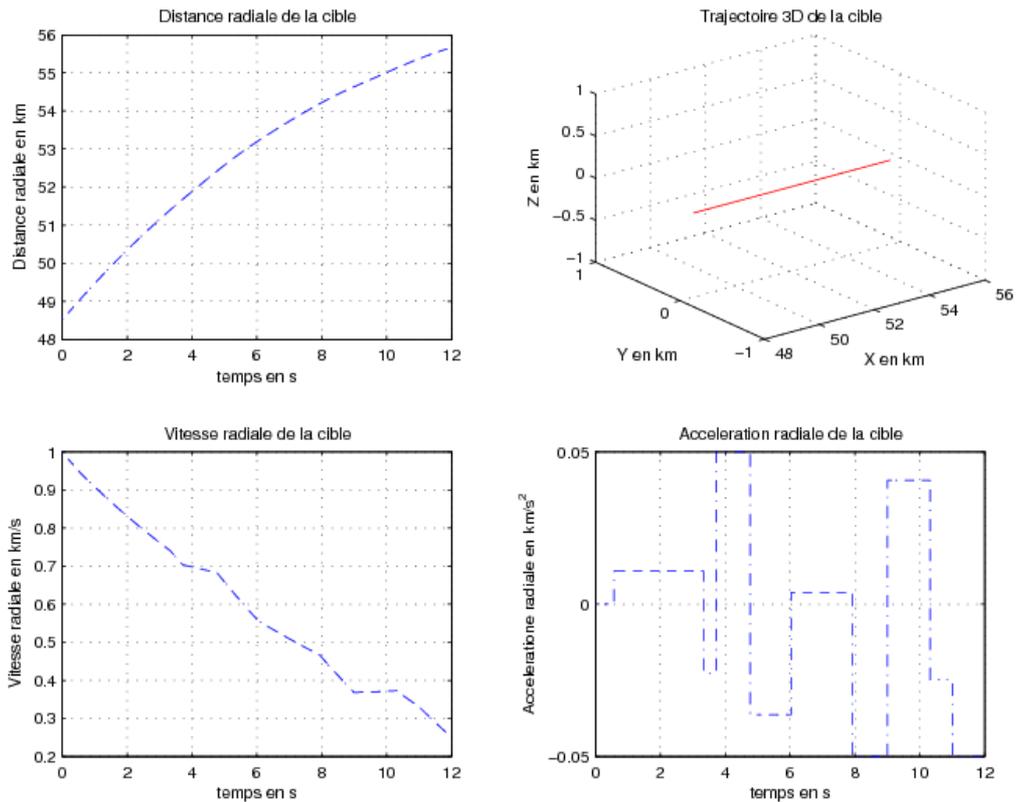


Fig 8.19 Mouvement de la cible

### 8.1.6.4 Caractéristiques du Filtre

Les caractéristiques de filtre sont

- Nombre de particules total: 7680.
- Pas de branchement d'accélération.
- Modèle de Swerling utilisé pour le filtre est 0.

Les particules sont distribuées suivant:

|                      | Amplitude          | Phase              | Distance            | Vitesse             | Accélération            |
|----------------------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|-------------------------|
| Nombre de particules | 1                  | 8                  | 24                  | 10                  | 4                       |
| Valeur Minimum       | 0.74               | $-\pi$             | 47 km               | 0.925 km/s          | -0.05 km/s <sup>2</sup> |
| Valeur Maximum       | 0.77               | $+\pi$             | 50.6 km             | 1.0 km/s            | 0.05 km/s <sup>2</sup>  |
| Variance élémentaire | $1 \times 10^{-8}$ | $1 \times 10^{-6}$ | $1 \times 10^{-18}$ | $1 \times 10^{-18}$ | $1 \times 10^{-10}$     |

- RSB : -8 dB/-9 dB

Sur le Rapport de Signal/Bruit instantané, un bruit de quantification s'ajoute au bruit de mesure.

Il convient ici de souligner que le rapport élémentaire S/B est calculé par impulsion et après la compression d'impulsion, ce rapport peut être considérablement relevé en intégrant de manière cohérent les nombreuses récurrences radar. En présence d'une cible mobile et aléatoire, c'est tout l'objet de filtrage optimale non-linéaire, que d'atteindre les limites intrinsèques permises par les équations optimales malgré les aléas du processus cible.

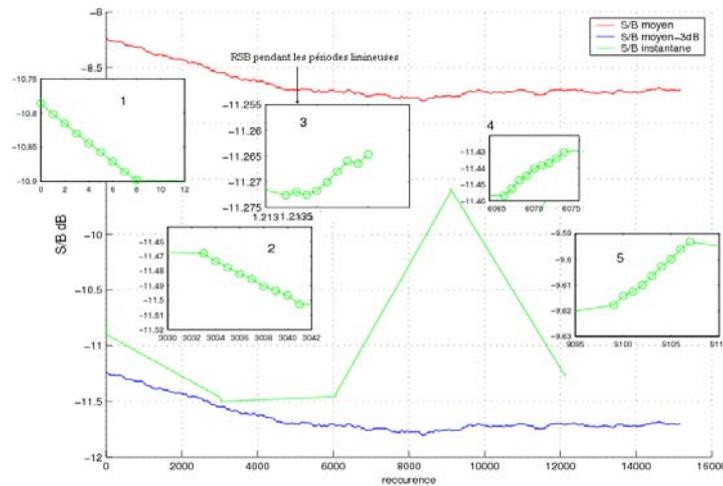


Fig 8.20 Rapport S/B, en rouge le moyen S/B, et en bleu S/B instantané

## 8.1.7 Résultats de simulation

### 8.1.7.1 Probabilité de détection

On peut voir que le récepteur particulière garantit une bonne performance en termes de probabilité de détection (Fig. 8.21). Dans cette figure la ligne discontinue montre la probabilité de détection de la particule la plus vraisemblable, tandis que le ligne continue représente la probabilité de détection de tout le support particulière.

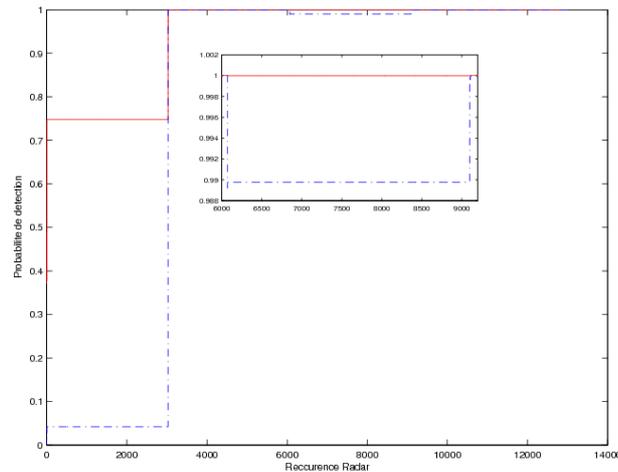


Fig 8.21 Probabilité de détection

Les performances observées montrent que l'algorithme proposé peut détecter une cible avec une probabilité proche de 1 au bout d'un certain temps.

### 8.1.7.2 Estimation des paramètres

L'erreur d'estimation des paramètres de cible, ainsi que leurs variances sont représentées par la figure 8.22. Dans ces figures, on peut voir que pendant le temps d'illumination (temps de passage du faisceau sur la cible) la variance est faible grâce aux corrections. Cette variance augmente pendant la période aveugle. Ceci montre la nécessité de la re-discrétisation à la fin de période aveugle.

Au départ, les particules  $x_i$  sont tout d'abord initialisées en fonction de l'information, dont on dispose a priori sur le vecteur d'état, avec des poids  $\rho_i^0$  sont égaux à  $(1/N)$  (où  $N$  est le nombre de particules). On

redistribue périodiquement les particules suivant les pondérations conditionnelles obtenues. Les supports les plus « vraisemblables » ayant plus de chances d'attirer les particules, en reçoivent généralement plusieurs. Dans les régions les moins vraisemblables, les particules ne sont pas redistribuées et meurent.

Au début du scénario, les composantes ne sont pas bien estimées, comme le montre la figure 8.22. Ceci provient du fait que les particules sont en poids égaux, et n'ont pas le temps d'accumuler les vraisemblances, par manque d'observations. Après quelque tours d'antenne, l'ensemble de l'état est correctement estimé, grâce à l'intégration cohérente de toutes les périodes lumineuses permise par l'algorithme particulaire.

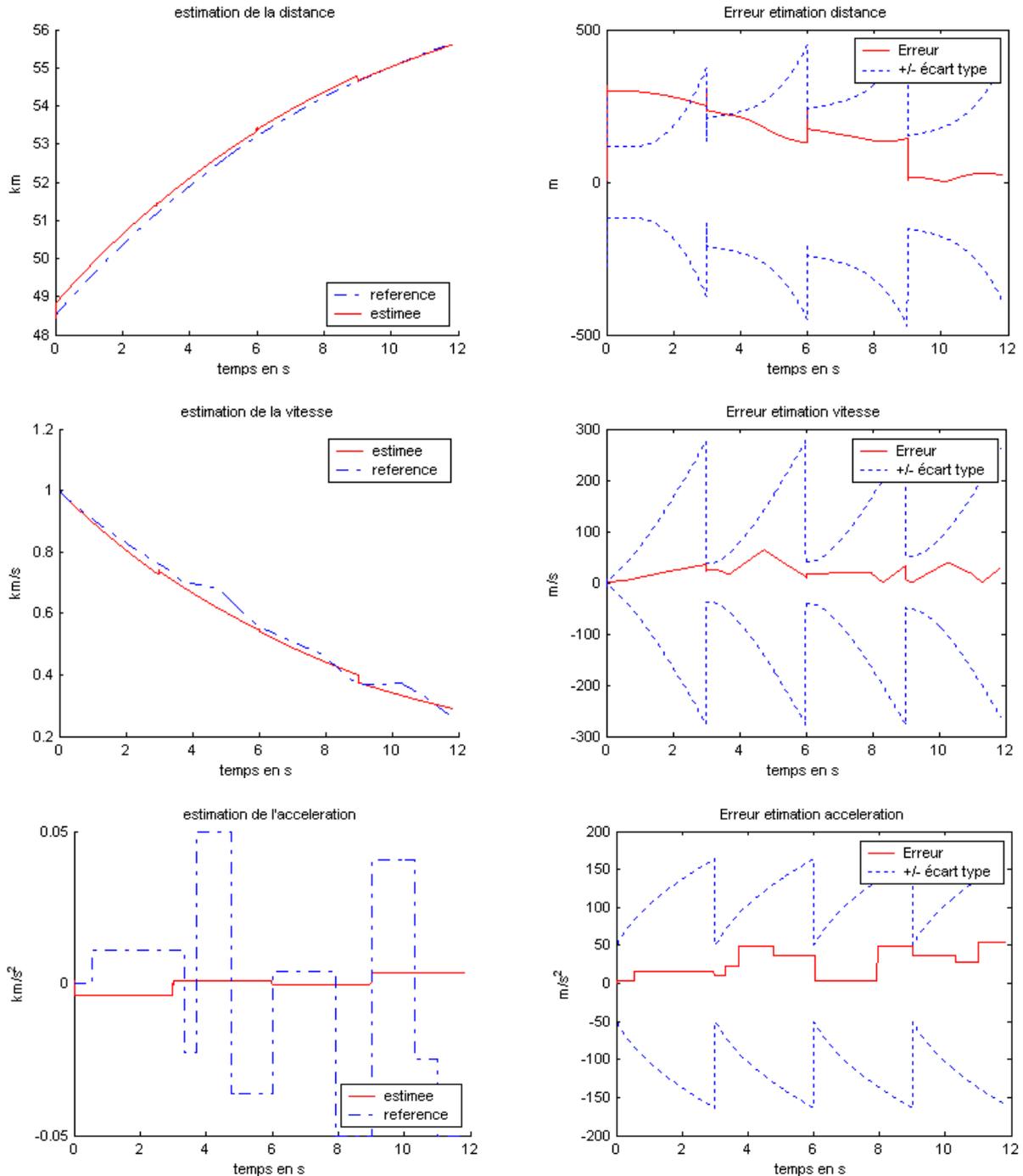


Fig 8.22 L'estimation de paramètres cible et les erreurs d'estimation

L'absence d'observations pendant des durées assez longues a pour conséquence d'augmenter la variance (cf. figure 8.23). Cette augmentation fait sortir certaines des particules gaussiennes étendues de leur domaine de linéarisation. La décomposition (ré-discrétisation) des particules est nécessaire au début de la nouvelle période lumineuse afin de profiter des observations disponibles pour corriger la trajectoire du système.

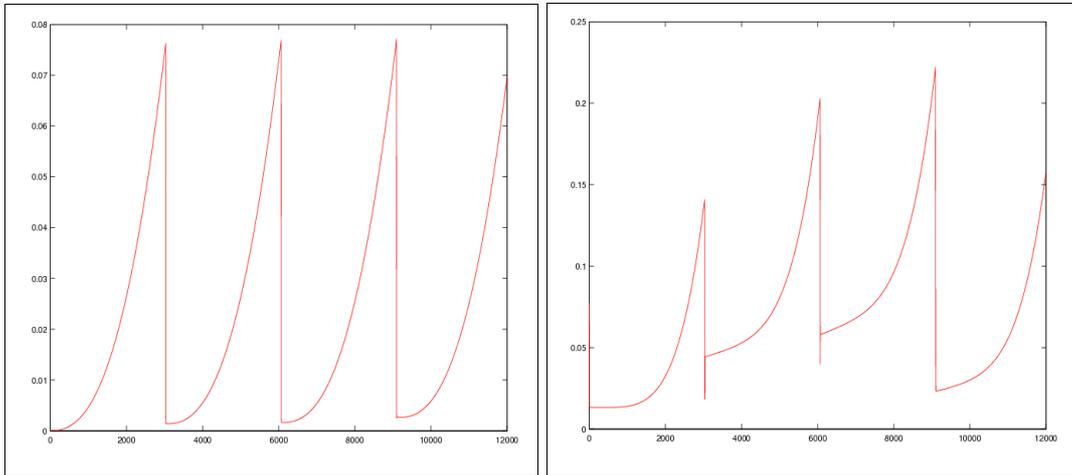


Fig 8.23 variance de la distance (en  $\text{km}^2$ ) et de la vitesse en  $(\text{km/s})^2$

### 8.1.7.3 Période de transition

On s'intéresse ici au cas où le système passe d'une période à l'autre, soit l'intervalle d'étude  $[8.992-9.01]\text{sec} \sim [9090-9110]$  récurrence. Cette période contient un passage aveugle/lumineux et un passage lumineux/aveugle. Les courbes présentées dans la figure 8.24, montrent les estimations de paramètres du système pendant les instants d'exploration, l'instant de prédiction et aussi les instants de prédiction/correction, dans l'intervalle choisi:

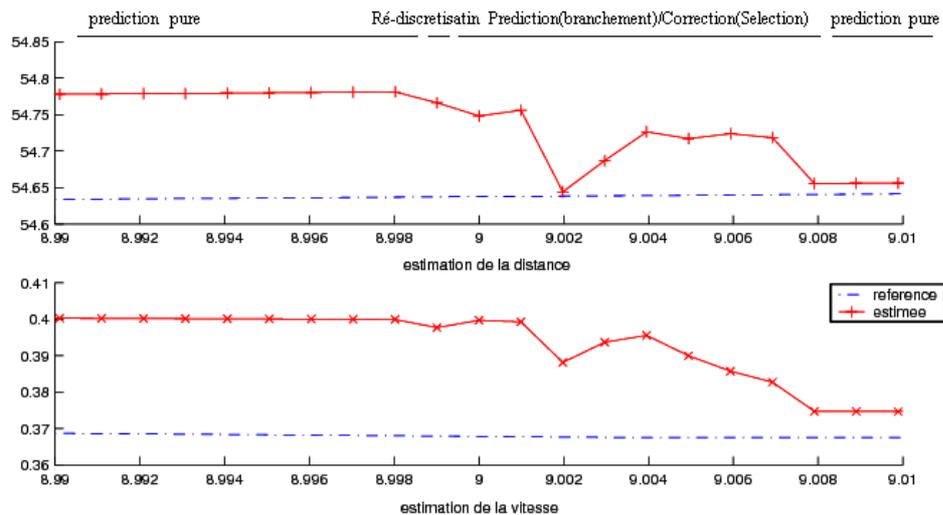


Fig 8.24 Estimation des paramètres pendant une période de transition

### 8.1.7.4 Évaluation des redistributions des particules

Les performances observées dans la figure 8.24, peuvent être expliquées par la figure 8.25, qui montre l'évolution des poids de particules aux instants de passages aveugle/lumineux:

- Récurrence 9098 (resp. 3032): prédiction pure.
- Récurrence 9099 (resp. 3033): re-discrétisation, correction, pondération et sélection des particules.
- Récurrence 9100 (resp. 3034): prédiction/correction, par branchement/sélection.

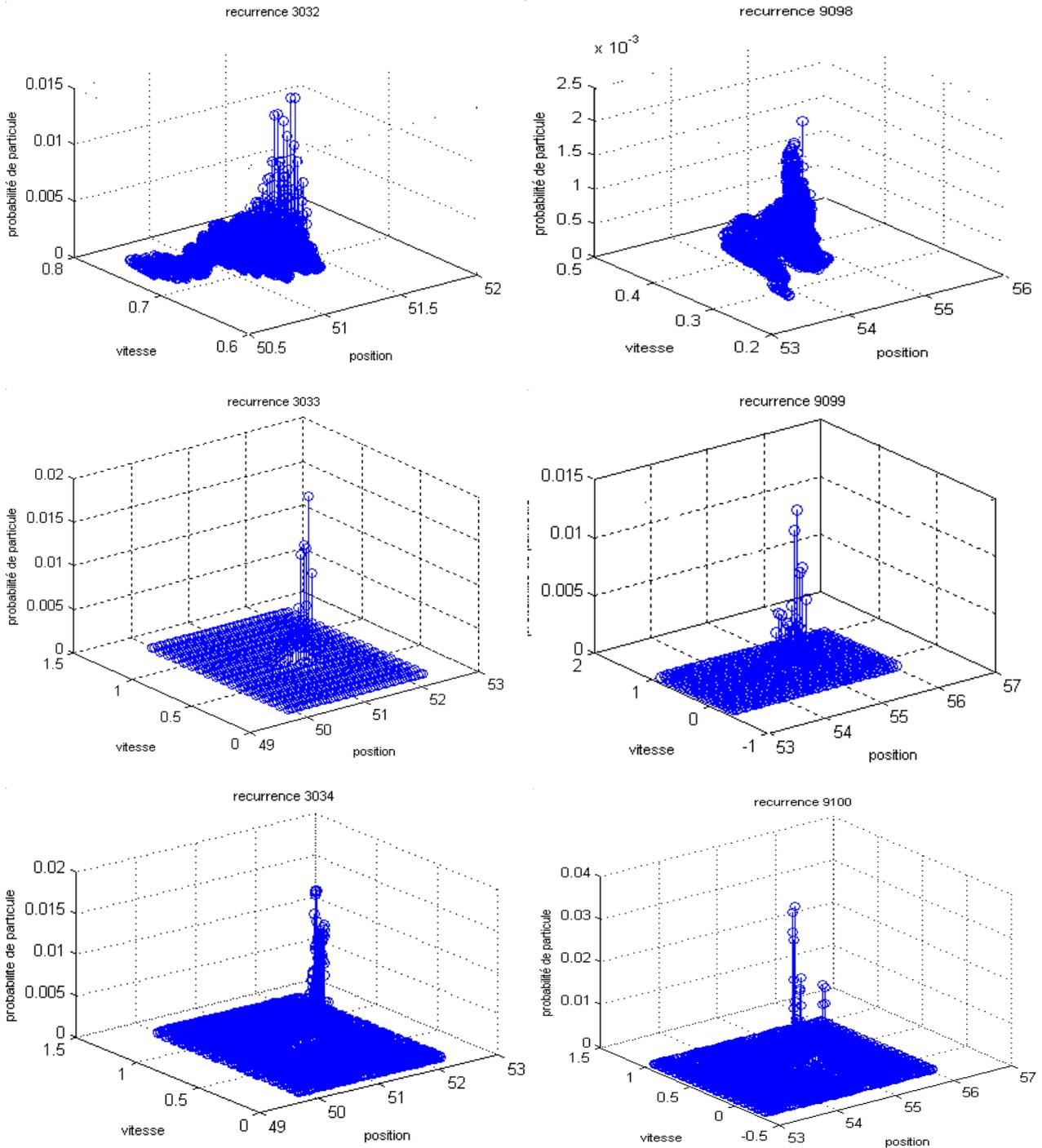


Fig 8.25 Redistribution des particules

## 8.2 Conclusion

Le travail est présenté sous les deux hypothèses suivantes:

- Cible supposée en mouvement radial par rapport au radar.
- Il n'y a qu'une seule cible autour du radar.

Puisque le mouvement est radial et la cible est unique, alors il n'y a qu'un faisceau lumineux dans un tour d'antenne, et de plus ce faisceau est fixe en site radar.

Malgré des non-linéarités de modèle d'une part, et la rareté des mesures du système d'autre part, on trouve de très bonnes précisions sous des RSB faibles avec une charge de calcul très raisonnable, en utilisant la technique particulière [Kazem 08].

La technique particulière fournit un filtre quasi-optimal pour l'estimation conditionnelle des variables radar, en vertu des performances obtenues pour des problèmes très difficiles, comme le problème discuté dans ce chapitre. Bien évidemment la garantie de la convergence est limitée par le nombre de récurrence lumineuses par rapport à celui des récurrences aveugles, ainsi que par la dynamique de la cible, (un rapport détaillé [Kazem 07b]).

## Chapitre 9

# Filtrage Particulaire du Système de Poursuite Radar ARMOR

## *Traitement de données réelles*

Les résultats présentés dans le chapitre précédant montrent le gain de performances et l'économie de calcul que permet le récepteur à particules déterministes de Gauss sur signaux radar, en appliquant la méthode de Maximum de vraisemblance. L'ensemble de ces résultats a été obtenu sur données simulées aussi réalistes que possible, sur le radar de veille poursuite. Ils ont été validés par des données réelles lors d'une étude contractuelle pour le compte de Thales dans l'activité radar de veille TR6 [Kazem 07a].

La validation de la nouvelle technique déterministe à minimum de variance se devait aussi d'être complétée par des données réelles. Ce fut l'objet de l'étude contractuelle concernant le traitement par la technique particulaire déterministe des enregistrements du radar ARMOR. L'objectif de cette étude était d'évaluer, pour les mêmes conditions opératoires, l'économie de calcul par rapport aux autres méthodes particulières, à savoir:

- la méthode particulaire déterministe à Maximum de vraisemblance trajectorielle.
- la méthode particulaire aléatoire.
- le traitement traditionnel par un banc de filtre.

Ce chapitre présente une synthèse des résultats obtenus lors de cette étude.

## 9.1 Caractéristiques de l'expérience

### 9.1.1 Caractéristiques du Radar ARMOR

Le radar ARMOR est un radar de veille/poursuite. La formation, en hyperfréquence, des voies somme et différence rend son comportement équivalent à celui d'une antenne monopulse avec deux récepteurs équivalents. Le comportement angulaire du radar ne concerne pas les scénarios pseudo-radiaux visés par la présente étude. Le gain d'antenne est donc implicitement intégré dans le terme d'amplitude  $K_0$  du signal radar.

#### Caractéristique Radar : ARMOR

|                             |                        |
|-----------------------------|------------------------|
| Période de récurrence       | ~ 1.8 ms               |
| Durée inter-rafales         | 25 ms (~14 ms aveugle) |
| Forme d'impulsion           | impulsion chirp        |
| Fréquence d'échantillonnage | 10 MHz                 |
| Largeur de la case distance | 45 m.                  |
| Vitesse ambiguë             | 15 m/s.                |

La figure 9.1 illustre une rafale du signal radar, contenant une période aveugle suivie de sept récurrences.



Fig 9.1: Signal radar sur une période

### 9.1.2 Caractéristiques de la cible

Le scénario étudié concerne des enregistrements relatifs à un satellite de vitesse min/max de 50/350 m/s évoluant à une altitude min/max de 1283/1285 Km, avec une accélération quasi-constante.

### 9.1.3 Caractéristiques du filtre

#### 9.1.3.1 Fenêtre d'initialisation

Le filtre particulaire permet de tester un certain nombre d'hypothèses notamment sur la trajectoire de la cible et pondère chacune de celles-ci en fonction des observations. Ainsi, une particule représente une hypothèse de présence de cible et la probabilité associée.

L'étendue distance qui est étudiée est de 450 m d'amplitude (plus grande donc que la fenêtre de désignation ARMOR qui est de 200 m). L'étendue vitesse analysée est d'amplitude 60 m/s, ce qui permet de traiter plusieurs intervalles d'ambiguïté. Il faut souligner que la fenêtre d'initialisation n'est pas ouverte de manière symétrique vis à vis de la piste (ce qui aurait représenté un cas particulier).

Les particules gaussiennes sont initialisées de façon déterministe. Elles sont uniformément réparties sur les axes d'état. La grille de particule initiale est obtenue à partir du domaine d'incertitude selon chaque axe et du nombre de point de discrétisation qui lui est affecté. Les écart-types sont fixés à la moitié de la distance inter-particulaire: pas de discrétisation de l'axe concerné.

Le tableau suivant montre l'incertitude initiale du vecteur d'état.

|                 | intervalles             | Largeur de fenêtre d'initialisation | Nombre de particules |
|-----------------|-------------------------|-------------------------------------|----------------------|
| Partie réelle   | [-4.5 +4.5]             | $\Delta=9$                          | 1                    |
| Partie imagière | [-4.5 +4.5]             | $\Delta=9$                          | 1                    |
| Distance        | [1284.45 1284.9] km     | $\Delta=450\text{m}$                | 10                   |
| Vitesse         | [-320 -260]m/s.         | $\Delta=60\text{m/s}$               | 32                   |
| Accélération    | [0 -5] m/s <sup>2</sup> | $\Delta=5\text{m/s}^2$              | 1                    |
|                 |                         |                                     | 320 particules       |

La répartition du nombre de particules a été faite de manière à utiliser toujours 32 particules pour l'étendue vitesse explorée (60 m/s), soit 8 particules par domaine d'ambiguïté. La linéarisation nécessite de placer une particule par case distance.

### 9.1.3.2 Évolution de l'algorithme de filtrage particulaire

L'algorithme de filtrage particulaire a été amélioré afin de réduire la charge de calculs. L'économie du nombre de particules est obtenue par la modification du modèle d'état utilisé. En effet, l'amplitude complexe du signal radar n'est plus représentée par son amplitude et sa phase au sens de Swerling, comme ce fut le cas dans le chapitre précédent (cf. 8.3.4), mais par ses parties réelle et imaginaire. Ceci a pour effet de rendre son observation conditionnellement linéaire et donc plus robuste. De plus, la linéarisation locale de sa dynamique peut être obtenue soit par discrétisation des espaces de vitesses et d'accélération comme précédemment, soit par la discrétisation du temps (pas de prédiction). Une telle discrétisation permet une économie du nombre total des hypothèses nécessaires pour une représentation fine de l'état. Les parties réelle et imaginaire interviennent via une simple multiplication dans l'équation d'observation, il n'y a plus de fonction non-linéaire (cosinus et sinus), il n'est plus nécessaire d'explorer la phase via les 8 particules comme auparavant.

Les sauts de phase/amplitude (cf. §8.3.1) sont montrées par les équations:

$$\begin{pmatrix} \rho_{k+1} \\ \phi_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\epsilon_k) & 0 \\ 0 & (1-\epsilon_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_k \\ \phi_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \rho_k + \epsilon_k A_k \\ \delta \phi_k + \epsilon_k \theta_k + \Delta \phi_k \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

avec  $\Delta \phi_k = \frac{4\pi D_k}{\lambda} = 4\pi \frac{f}{C} v_k T$  La rotation de la phase Doppler

Au première fluctuation lente ( $\delta \phi_k, \delta \rho_k$ ) s'ajoute une deuxième fluctuation plus court terme (exemple agilité de fréquence). Pour ceci le terme de phase:  $\epsilon_k \theta_k$  est composé d'une variable aléatoire  $\theta_k$  uniforme entre  $[0, 2\pi]$  et d'une variable binaire  $\epsilon_k$ . Quant à la fluctuation court terme sur l'amplitude, elle est modélisée via la variable aléatoire  $A_k$ , variable suivant une loi de Rayleigh.

Les sauts de phase/amplitude sont ensuite remplacés par des sauts de parties réelle/imaginaire et font l'objet d'un branchement selon les deux axes, comme les équations suivantes montrent:

$$\begin{pmatrix} \mu_{k+1} \\ \nu_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\epsilon_k) \cos(\Delta \phi_k) & -(1-\epsilon_k) \sin(\Delta \phi_k) \\ (1-\epsilon_k) \sin(\Delta \phi_k) & (1-\epsilon_k) \cos(\Delta \phi_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_k \\ \nu_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \mu_k + \epsilon_k \Gamma_k \\ \delta \nu_k + \epsilon_k \Lambda_k \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

avec  $\rho_k e^{j\phi_k} = \mu_k + j\nu_k$

Les sauts de la SER sont alors représentés par un bruit à occurrence poissonnienne et une réinitialisation le cas échéant de l'amplitude complexe.

Le bruit sur la SER (partie réelle et partie imaginaire) est modélisé par une fluctuation lente  $\delta \mu_k, \delta \nu_k$  qui caractérise le comportement de la SER en fonction de l'angle de présentation de la cible par rapport au radar. La modélisation mathématique de  $\delta \mu_k$  (resp.  $\delta \nu_k$ ) sont des variables aléatoires gaussiennes de variance  $\sigma_\mu$  (resp.  $\sigma_\nu$ ), valeurs fixées grâce à l'expérience acquise sur d'autres études et non en fonction des enregistrements.

Ce changement se traduit par une équation d'observation conditionnellement linéaire:

$$y_k^i = \frac{K}{(D_k^i)^2} (\mu_k + j \nu_k) \psi(D_k^i, \nu_k^i) + u_k^i \quad (9.3)$$

avec  $u_k^i$  Bruit blanc gaussien complexe

$y_k^i$  Vecteur d'observation à l'instant k, de la particule i, d'hypothèse distance  $D_k^i$

$\psi(D_k^i, \nu_k^i)$  Valeur de l'impulsion comprimée complexe à l'échantillon  $i$ , pour l'impulsion reçue retardée de  $2D_k^i/C$  et modulée par la fréquence Doppler  $2f \nu_k^i/C$ , ( $C$  vitesse de la lumière et  $f$  fréquence porteuse).

Il introduit, par contre, une non-linéarité sur les équations de dynamique de l'amplitude complexe ( $\mu, \nu$ ) à travers la rotation Doppler:

$$\begin{pmatrix} \mu_{k+1} \\ \nu_{k+1} \\ D_{k+1} \\ \nu_{k+1} \\ \gamma_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\epsilon_k)\cos(\Delta\phi_k) & -(1-\epsilon_k)\sin(\Delta\phi_k) & 0 & 0 & 0 \\ (1-\epsilon_k)\sin(\Delta\phi_k) & (1-\epsilon_k)\cos(\Delta\phi_k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha T & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_k \\ \nu_k \\ D_k \\ \nu_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta\mu_k + \epsilon_k \Gamma_k \\ \delta\nu_k + \epsilon_k \Lambda_k \\ \delta D_k \\ \delta\nu_k \\ \delta\gamma_k + \epsilon_k^a b_k \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

$\epsilon^a$  bruit poissonien occurrence des accélérations

$b$  amplitude bornée des sauts

$\epsilon$  bruit poissonien binaire des amplitudes complexes

$\Gamma, \Lambda$  bruit indépendants gaussiens

Les acquisitions se font sur un satellite ayant une fluctuation lente permettant d'avoir un RSB stable, avec bruit additif simulant un satellite plus lointain sur l'horizon. De même il est important de signaler que le filtrage particulaire utilisé peut supposer des accélérations possibles  $\pm 10g$  par second en moyenne, pour simuler des missiles stratégiques à tête manœuvrantes.

L'objectif du traitement est d'estimer dans une fenêtre de Désignation d'Objectif la position de la cible, il est intéressant d'étudier les performances atteignables par un traitement d'intégration longue dont le Filtre Particulaire est un cas particulier. Une chaîne de traitement basée sur un tel algorithme présente un gain en terme de Rapport Signal à Bruit plus élevé qu'un traitement traditionnel qui intègre le signal sur un horizon plus court.

### 9.1.3.3 Rappel du principe général du Filtre Particulaire déterministe

- **Initialisation des particules**

Il s'agit de répartir l'ensemble des  $N$  particules dans l'espace d'état. Les valeurs des matrices de covariances sont aussi initialisées.

- **Prédiction:**

L'état estimé à partir de l'évolution cinématique et électromagnétique et de l'hypothèse d'évolution de l'état (fonction d'évolution et bruit de modélisation).

La cinématique de la cible est modélisée par un processus poissonien. Il est basé sur un modèle de Singer auquel on ajoute

- une non-linéarité sous forme de saturation sur l'accélération;
- une non-gaussiennité sous forme d'un aléa de pilotage ponctuel poissonien;

Quant au comportement électromagnétique, la modélisation du type de satellite observé est nécessaire pour le définir. On prend l'hypothèse de fluctuation en Swerling 1.

Enfin, spécificité de l'algorithme: la prédiction de l'état d'une particule ne se fait pas seulement avec un seul échantillon de bruit aléatoire mais avec  $M$  échantillons sur une grille déterministe. Dès lors, afin de conserver un nombre de particules constant, une étape de sélection suit immédiatement cette étape de branchement: les états prédits les plus vraisemblables vis à vis de les **observations passées** sont conservés.

#### ● Corrections/Pondérations

La comparaison entre les observations prédites et effectives permet de calculer la vraisemblance de l'hypothèse faite après avoir les particules corrigées. Le poids de chaque particule est obtenu en prenant l'exponentiel de la vraisemblance et en normalisant.

#### ● Estimation

En sortie, la valeur des paramètres de la trajectoire est estimée à partir de la densité de probabilité des trajectoires de cible a posteriori (ie, aux vues du signal observé après Compression d'Impulsion ).

#### 9.1.3.4 Gestion automatique des paramètres

Une procédure de paramétrisation du filtre à particules déterministes de Gauss a été développée. Elle est basée sur la garantie de la validité des approximations locales conditionnelles du système d'état pour une plage de fonctionnement donnée (dynamique et RSB), point clé pour une mise en œuvre efficace du filtrage particulare déterministe et pour une meilleure approximation de l'estimée.

Le filtre à particules déterministes de Gauss est basé sur une approximation par linéarisation locale des équations de dynamique et d'observation. Une telle approximation impose des contraintes sur le domaine d'incertitude, et donc sur la variance (peut être empiriquement fixé à deux fois son écart-type), de certaines composantes de la variable d'état. La mise en œuvre efficace du filtre nécessite le respect de ces contraintes:

- A l'initialisation du filtre pour le maillage a priori de l'état initial,
- Au long du traitement, pour les discrétisations engendrées par l'arborescence particulare (lors des branchements).

Ceci revient à garantir que les variances des composantes d'état critiques pour la linéarisation locale, dans les conditions les plus extrêmes de la plage de fonctionnement visée par l'application, restent inférieures aux seuils définis par l'approximation tant pour le régime transitoire que pour le régime permanent. Il s'agit d'une approximation linéaire par morceaux des équations d'état, où le seuil de linéarisation selon chaque axe est donné par une largeur maximale de l'intervalle pour lequel l'erreur de linéarisation reste "négligeable".

Dès lors que la variance initiale du paramètre est connue, le choix du nombre de particules nécessaire pour mailler l'état dans cette dimension est obtenue en considérant l'espace nécessaire entre 2 particules pour couvrir l'espace à explorer. Cet espace sera choisi minimal pour assurer une couverture de l'espace à explorer au moindre coût algorithmique.

En conclusion, l'adaptation du Filtre Particulare a pu être faite grâce à une modélisation de la réception ARMOR vérifiée via l'analyse des données.

## 9.2 Résultats d'estimation

### 9.2.1 performances à fort RSB

#### 9.2.1.1 Résolution avec Filtres de Kalman Étendus en Parallèle:

Pour analyser les performances du filtre particulaire plus en détail, nous les comparons à ceux d'un banc des filtres de Kalman étendu en parallèle. Ce banc peut être utilisé dans le cas où la dynamique de la cible est linéarisable ou faiblement non linéaire (peu manœuvrant).

La figure 9.2 montre les performances de banc de filtres de Kalman étendu en parallèle de 320 particules pour différents RSB. Bien évidemment une convergence rapide est obtenue à RSB élevé.

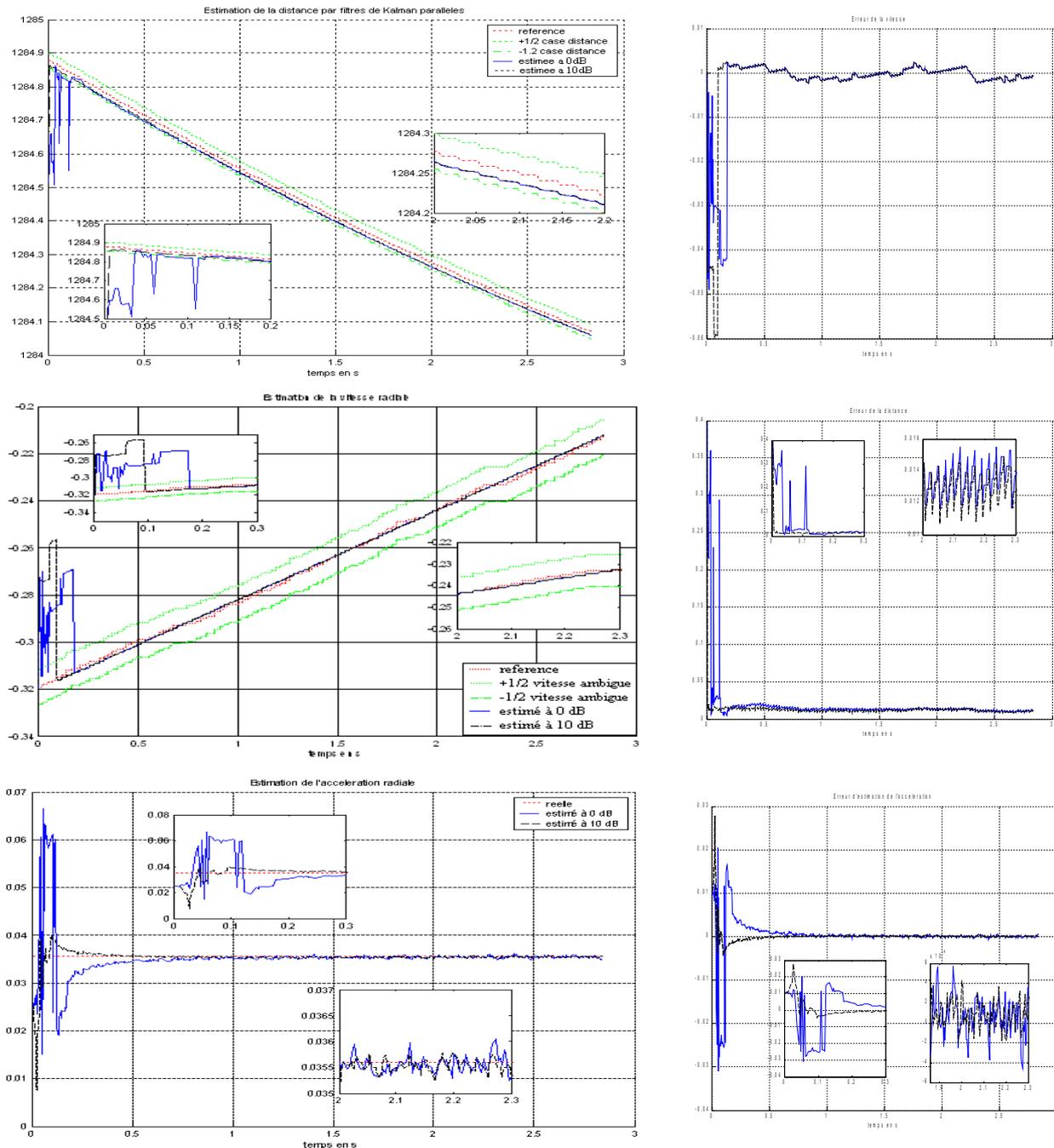


Fig 9.2: Performances des filtres de Kalman étendu en parallèle (0 et 10dB)

Il faut noter que pour les courbes suivantes, la trajectoire verte est tracée à  $\pm 7,5$  m pour la distance et à  $\pm 15$  m/s pour la vitesse de la trajectoire de référence tracée en rouge. Ceci permet en vitesse de vérifier si on est sur une vitesse ambiguë. L'estimation donnée par le banc de filtres est tracée en bleue.

D'après cette figure, on peut remarquer que la convergence de filtre est plus rapide, en terme de nombre de rafales, pour un RSB plus grand. Dans l'exemple montré ci-dessus, le filtre a besoin de 8 rafales pour converger à 0 dB, par contre il n'a besoin que de la moitié de ce nombre de rafales pour accrocher à 10 dB.

Le vecteur d'états est estimé par un banc de filtres de Kalman conditionnel à chaque état initial. Ainsi,  $p(x|y_{0:n})$  est approché par une somme de N distributions gaussiennes obtenues par le banc de N filtres de Kalman indépendants.

Ce filtre a permis d'avoir de bonnes performances à RSB favorable ( $>0$  dB), en utilisant 320 particules qui remplissent toutes les cases distances/Doppler.

En effet, pour un tel scénario (RSB  $> 0$  dB), la finesse de la discrétisation obtenue par 320 particules Case Distance/Doppler, suffit pour garantir la validité de la linéarisation tout au long du traitement.

La figure 9.2 présente les performances des filtres de Kalman étendus parallèles à fort rapport S/B, jusqu'à 0 dB, avec 320 particules de Gauss étendues. Dans ce cas toutes les particules respectent les contraintes de linéarisation. Cette technique se dégrade en dessous de ce rapport de signal sur bruit (RSB  $< 0$  dB).

En deçà de 0 dB, l'augmentation des variances de particules, notamment pendant la régime transitoire (acquisition) empêche la convergence des filtres de Kalman parallèles, ou dans des meilleurs cas la convergence est très lente (à -3 dB le système a convergé avec 110 rafales), d'où le recours à la technique particulière (cf. paragraphe suivant).

L'orientation choisie est d'améliorer le banc de filtres pour éviter la dégénérescence de l'algorithme. Nous avons proposé le filtre particulière, sa particularité est qu'il prend en compte les contraintes de réalisation des filtres. Ainsi, les particules de faible poids sont éliminées et celle de fort poids sont multipliées pour garder un nombre constant de particules, d'où l'étape de redistribution.

### 9.2.2 performances à faible RSB

Les hypothèses pour lesquelles on a utilisé un banc de filtre de Kalman étendu (dynamique de la cible linéarisable), ne sont cependant pas satisfaites dans ce contexte.

#### 9.2.2.1 Filtre Particulaire déterministe au sens du maximum de vraisemblance (cf. §2.4.2)

Un des objectifs de l'étude est de vérifier si le filtre particulière permet de restituer une trajectoire à un RSB plus faible qu'au niveau de celui actuellement permis par les anciens traitements. Il s'agit donc, pour le même scénario que celui analysé précédemment, de descendre à un niveau de RSB plus faible.

Puisque le bruit d'observation est très important, une étape de **décomposition** des particules sera nécessaire. Cette étape est suivie d'une étape de sélection suivant le critère de maximum de vraisemblance. La figure suivante montre les estimations des états cinématiques de la cible, en utilisant 320 particules pour un RSB = -5dB.

La décomposition des particules à forte variance, permettant une garantie adaptative de la validité de la linéarisation locale, a pu évoluer. L'amélioration du test d'**interpénétration**, déjà présent dans l'algorithme utilisé dans une étude précédente, permet d'améliorer la robustesse de cette étape.

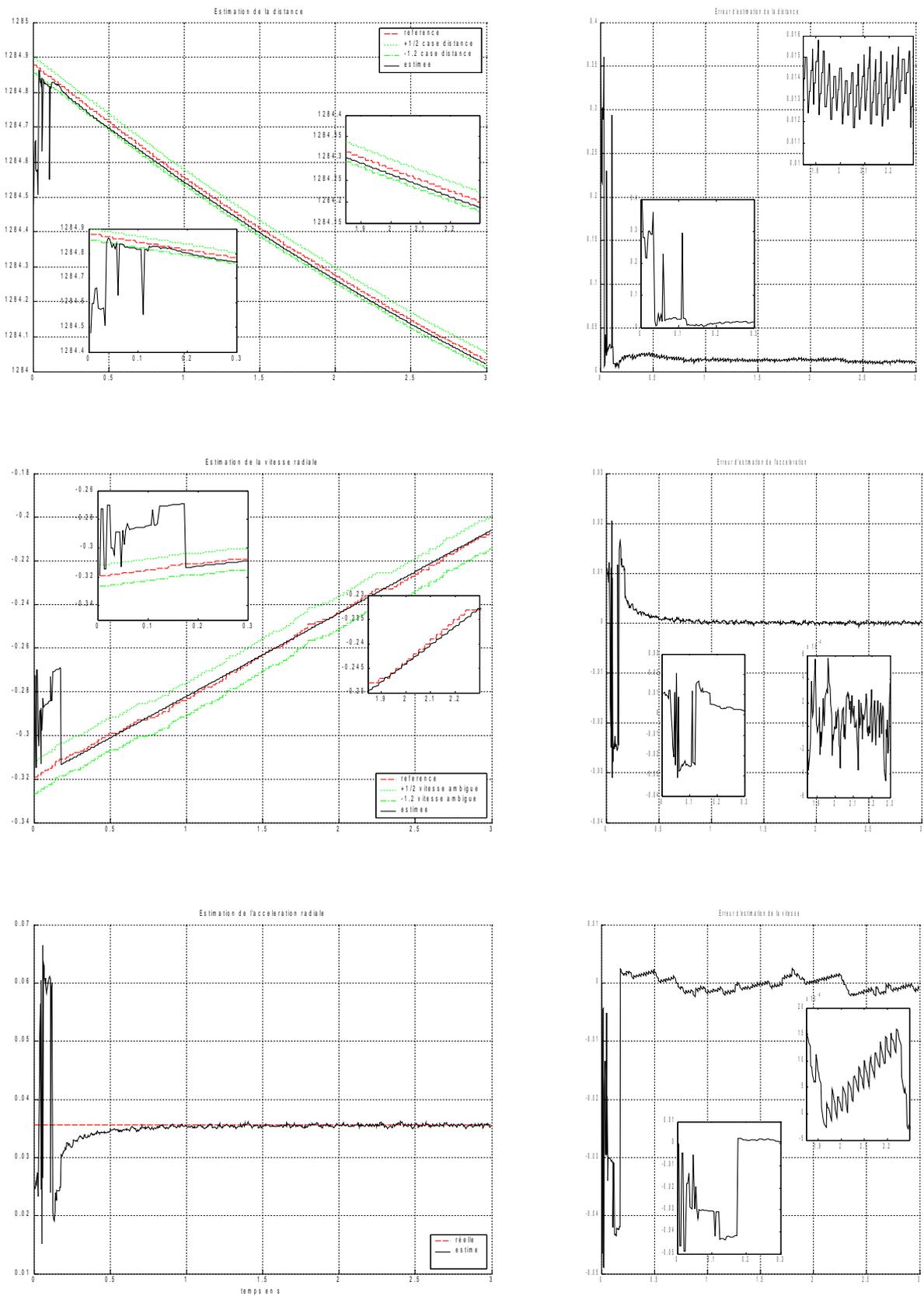


Fig 9.3: Performances du filtre particulaire à maximum de vraisemblance (-5 dB)

La supériorité du filtre particulaire ne réside donc pas uniquement dans la vitesse de convergence, mais aussi dans la possibilité de convergence dans des cas où le banc de filtre échoue. Le filtrage particulaire constitue une solution pratique de référence aussi bien pour la convergence initiale que pour la poursuite.

Un autre avantage pratique très important du filtre particulaire réside dans sa plus grande robustesse par rapport aux glissements de cycles, c'est-à-dire aux changements de détermination de la phase estimée en cours de fonctionnement.

Le filtre converge dès la 4<sup>ème</sup> rafale vers la trajectoire de référence en distance, comme le montre la courbe d'estimation distance et le zoom sur la partie acquisition (*cf.* Figure 9.3). Concernant la vitesse, le changement de période de récurrence ainsi que la variation distance permet à la cible de distinguer la vitesse vraie de la vitesse ambiguë au bout de 10 rafales, comme le montre le zoom sur la partie acquisition. Cette durée longue de la levée doit s'expliquer par l'effet, plus perceptible en phase d'acquisition, de l'écart du modèle, notamment à des rapports RSB fort, où le niveau du bruit de mesure et du bruit de modèle son comparable.

Notons que les prédictions successives (sans correction) pendant la partie aveugle (*cf.* Figure 9.1, estimation vitesse), de courte durée par rapport à la veille (*cf.* Chapitre précédent), provoquent un faible recouvrement inter particulaire induit par l'augmentation des variances. Cependant, le recours à une ré-discrétisation (au sens large §8.1.4), tel que ce fut le cas par le radar de veille, n'est pas justifié.

Par contre, une décomposition telle qu'elle est présentée en 2.4.2 est suffisante quand il y a des dépassements des contraintes de linéarisation.

### 9.2.2.2 Résolution avec Filtres de Kalman Étendus en Parallèle:

A faible RSB le banc de filtre ne garanti pas la convergence de l'estimation. Or dans des meilleurs cas la convergence est très lente, par exemple à -3 dB le système a convergé après 775 rafales.

L'estimation de la distance converge au bout de 200 rafales. Le changement de période de récurrence ainsi que la variation distance permet à la cible de distinguer la vitesse vraie de la vitesse ambiguë au bout de 775 rafales. Bien qu'elle présente une faible erreur pendant les premières rafales. Ce délai est essentiellement du à celui de la levée de l'ambiguïté sur la vitesse.

On remarque que les filtres ont besoin de longue traitement pour un gain cohérent de puissance, ce qui permet de lutter contre la divergence. La forte valeur de la variance sur l'estimation de la distance ou la vitesse est visiblement due au faible RSB, étant donné le mauvais fonctionnement des filtres locaux qui ne respectent pas les contraintes de linéarisation.

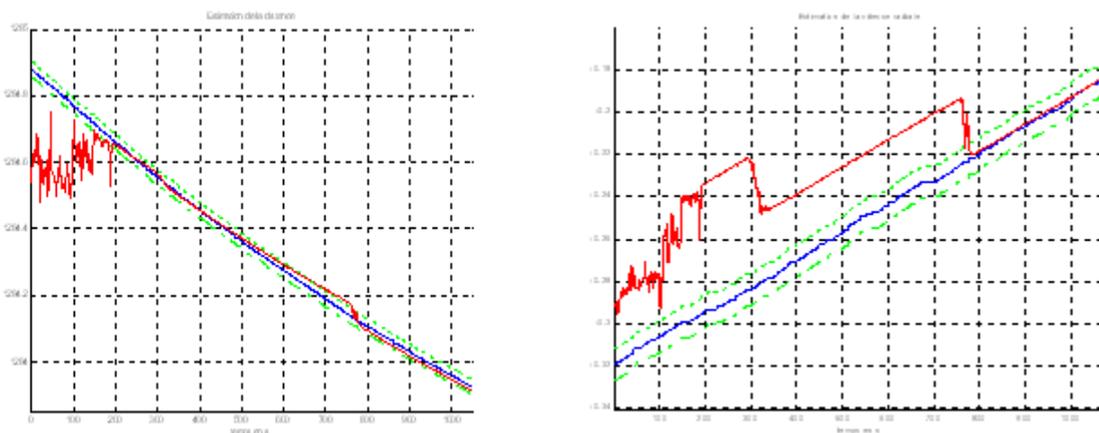


Fig 9.4: Performances du banc des filtres

**9.2.2.3 Filtre Particulaire déterministe à minimum de variance. (cf. §3.2.3)**

Afin de comparer les comportements du filtre déterministe à sélection au sens du maximum de vraisemblance avec celui à minimum de variance, on applique la deuxième méthode sur le même exemple. La Figure suivante illustre les performances des deux méthodes.

Nous allons aussi montrer au paragraphe suivant que la redistribution conforme en loi fonctionne à des RSB < -5 dB.

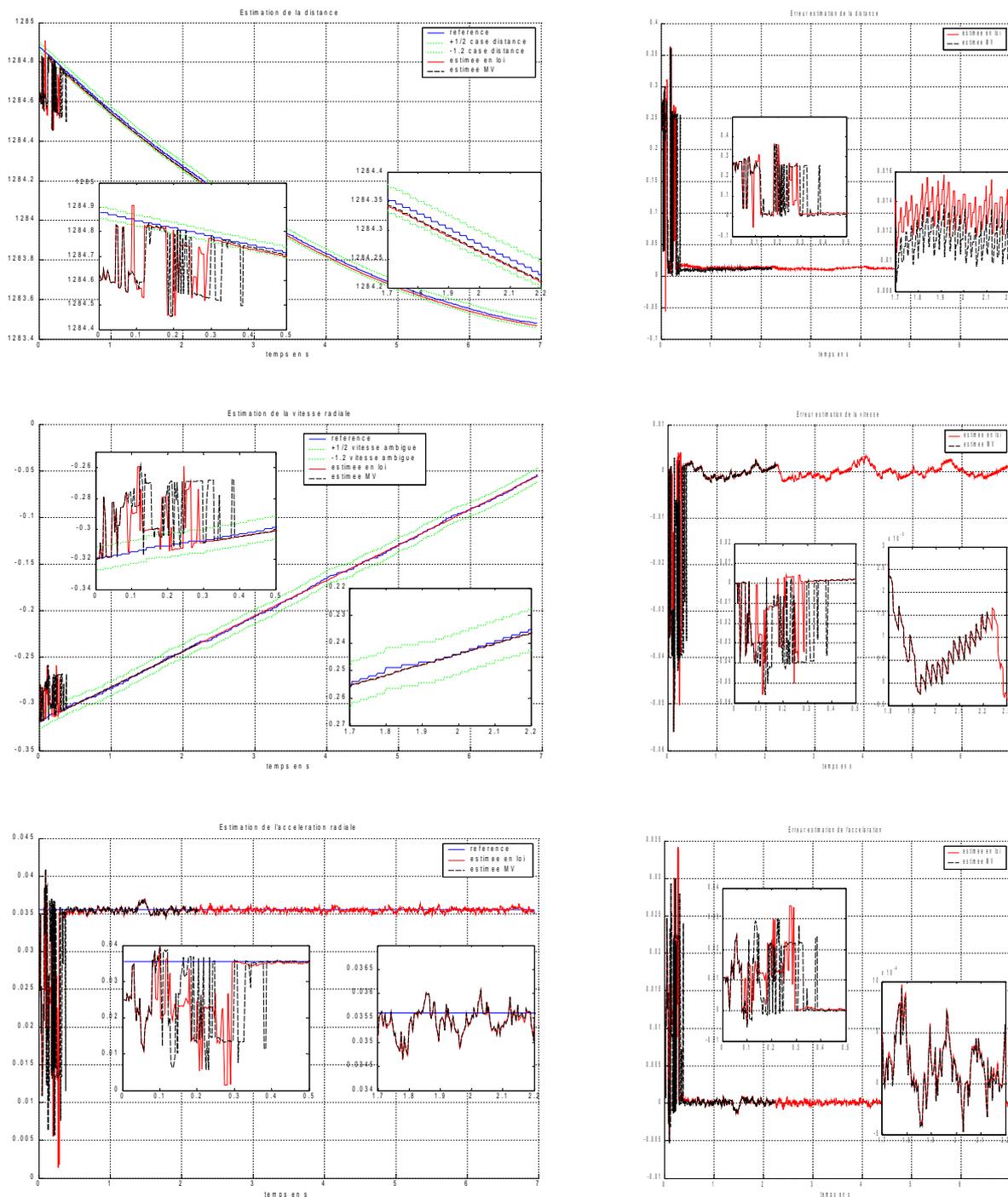


Fig 9.5: Comparaison des performances du filtre particulaire à maximum de vraisemblance et celui a minimum de variance

Les deux stratégies atteignent la convergence du filtre, mais la figure 9.5 montre supériorité de celui à minimum de variance en comparant la vitesse de convergence, En effet, 17 rafales nécessaires pour la méthode à maximum de vraisemblance et 13 rafales pour celle à minimum de variance, pour la convergence sur l'axe de distance.

### 9.2.3 performances à très faible RSB

#### 9.2.3.1 Filtre Particulaire déterministe à sélection au sens du maximum de vraisemblance

Le filtre permet d'obtenir de bonnes performances jusqu'à un RSB limité à  $-5\text{dB}$ , grâce à la décomposition des particules et à la sélection à maximum de poids, mais le défaut de sélection de la méthode de Filtre particulaire à maximum de vraisemblance limite son utilisation.

En effet, l'élimination précoce des modes secondaires conduit sous très faible RSB au décrochage de la cible réelle. Si l'augmentation du nombre de particules permet assurément de dépasser cette limite, elle ne garantit cependant pas la faisabilité du traitement en temps réel.

Pour un RSB inférieur à la limite mentionnée ( $-5\text{dB}$ ), l'algorithme ne converge pas, (cf. figure 9.6).

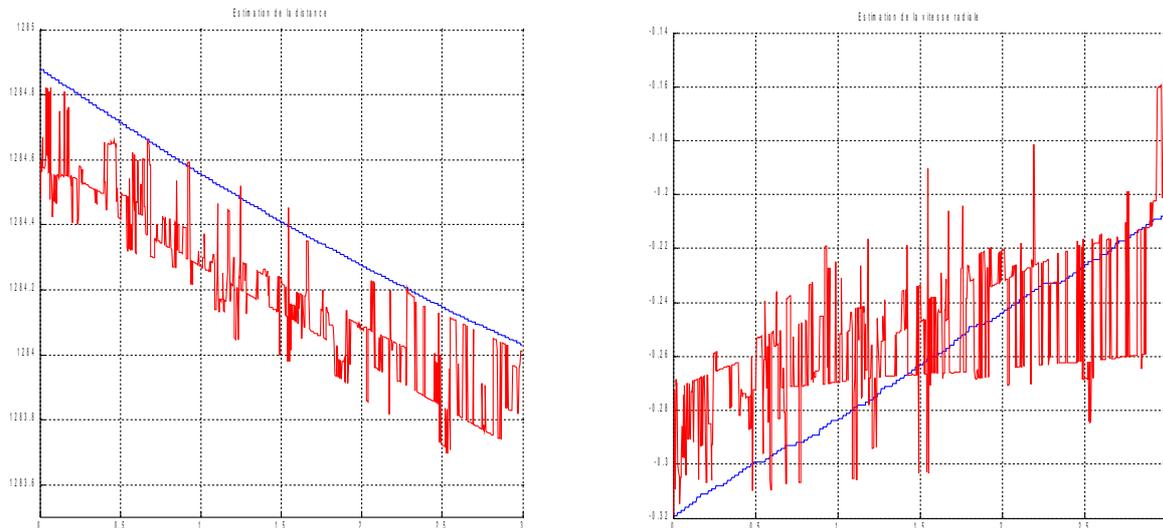


Fig 9.6: Performances du filtre particulaire à maximum de vraisemblance à  $-9\text{dB}$ , la trajectoire réelle (ligne bleue), et l'estimée (ligne rouge)

#### 9.2.3.2 Analyse des redistributions des particules

La méthode de filtrage particulaire déterministe à minimum de variance (redistribution conforme en loi), supprime la technique particulaire à maximum de vraisemblance, notamment en termes de rapport Signal/Bruit limite atteignable. Elle permet aussi d'améliorer les performances en phase d'acquisition, comme le montrent les résultats de la Fig 9.5.

En effet, la procédure de sélection à maximum de vraisemblance consiste à éliminer  $N_t - N$  particules du support particulaire, pour n'en garder que les  $N$  meilleures. Or, après élimination des particules, certains modes parmi les bons (dans notre expérience, celui qui correspondait à  $1284.95\text{ km}$ ) peuvent être supprimés, notamment dans le cas d'un très faible RSB. En conséquence le filtre ne trouve plus son optimum global (Figure 9.7).

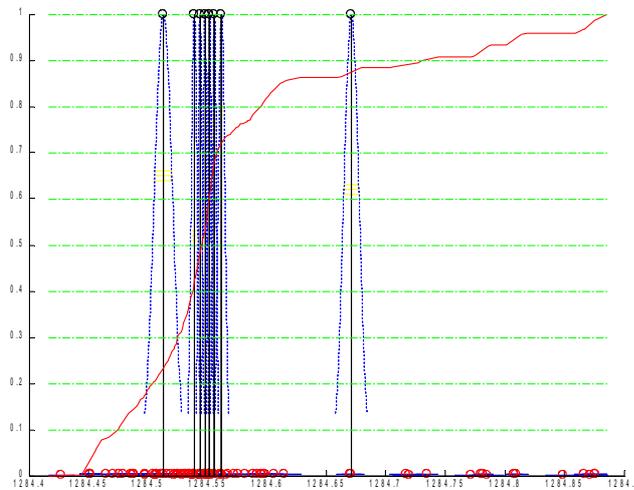


Fig 9.7: Sélection à Maximum de vraisemblance (projection sur l'axe de distance)

En revanche, ce mode est conservé par la redistribution conforme en loi (Figure 9.7).

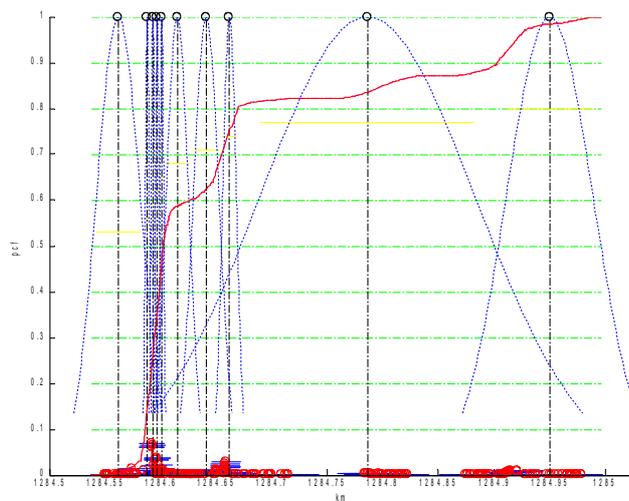


Fig 9.8: Redistribution conforme en loi sur l'axe de distance

D'après la figure 9.8, 10 valeurs de distances sont retenues, la figure 9.9 montre les redistributions effectuées sur l'axe de vitesse pour chaque valeur résultante de l'axe distance:

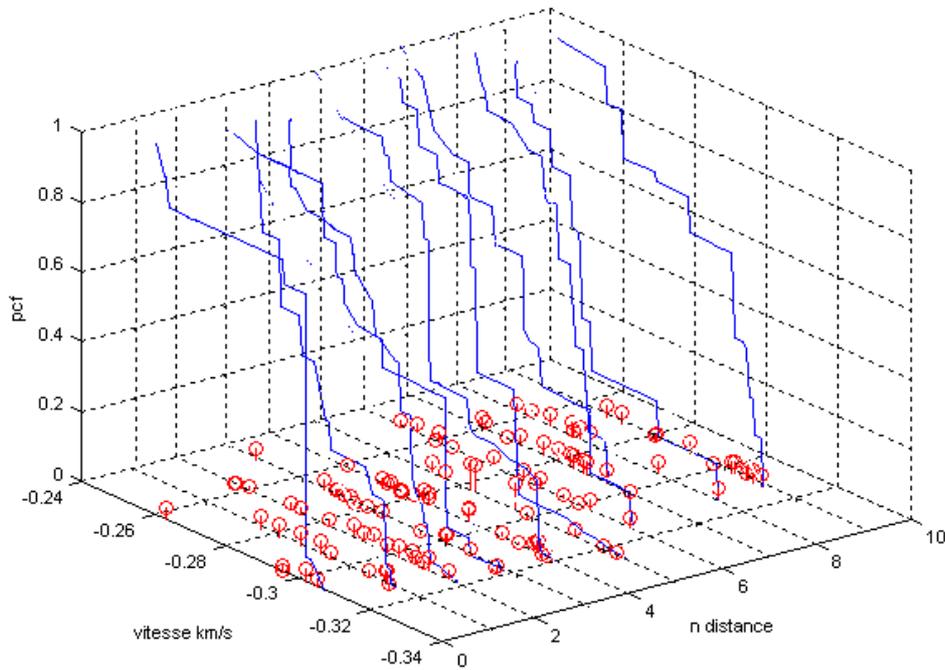


Fig 9.9: Redistribution conforme en loi de la vitesse radiale sachant la distance radiale

L'étendue vitesse analysée est d'amplitude 60 m/s, ce qui permet de traiter plusieurs intervalles d'ambiguïté. Il faut souligner que la fenêtre d'initialisation n'était pas ouverte de manière symétrique vis à vis de la piste (ce qui aurait représenté un cas particulier). La figure suivante montre les redistributions de vitesse pour la vraie valeur de distance, où les quatre valeurs de vitesse ambiguë sont présentés:

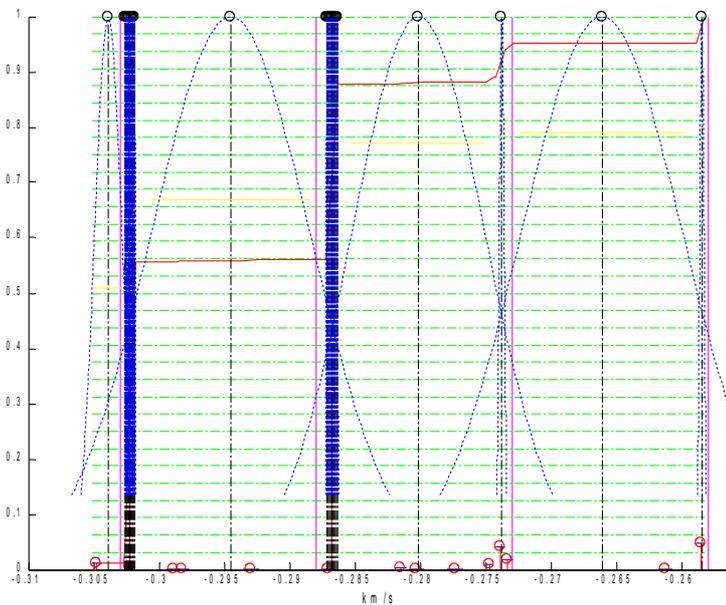


Fig 9.10: Redistribution conformément en loi sur l'axe de vitesse à -9dB

La figure précédente montre l'intérêt d'utilisation du filtrage particulaire à redistribution conforme en loi, où les variables d'état ne sont pas bornées, et où le signal radar est multi-modal (cf. §6.5).

### 9.2.3.3 Performances du filtre particulaire déterministe à minimum de variance

La figure 9.11 montre les performances de l'algorithme de filtrage particulaire déterministe par la redistribution conforme en loi, cette fois avec un RSB de -9dB.

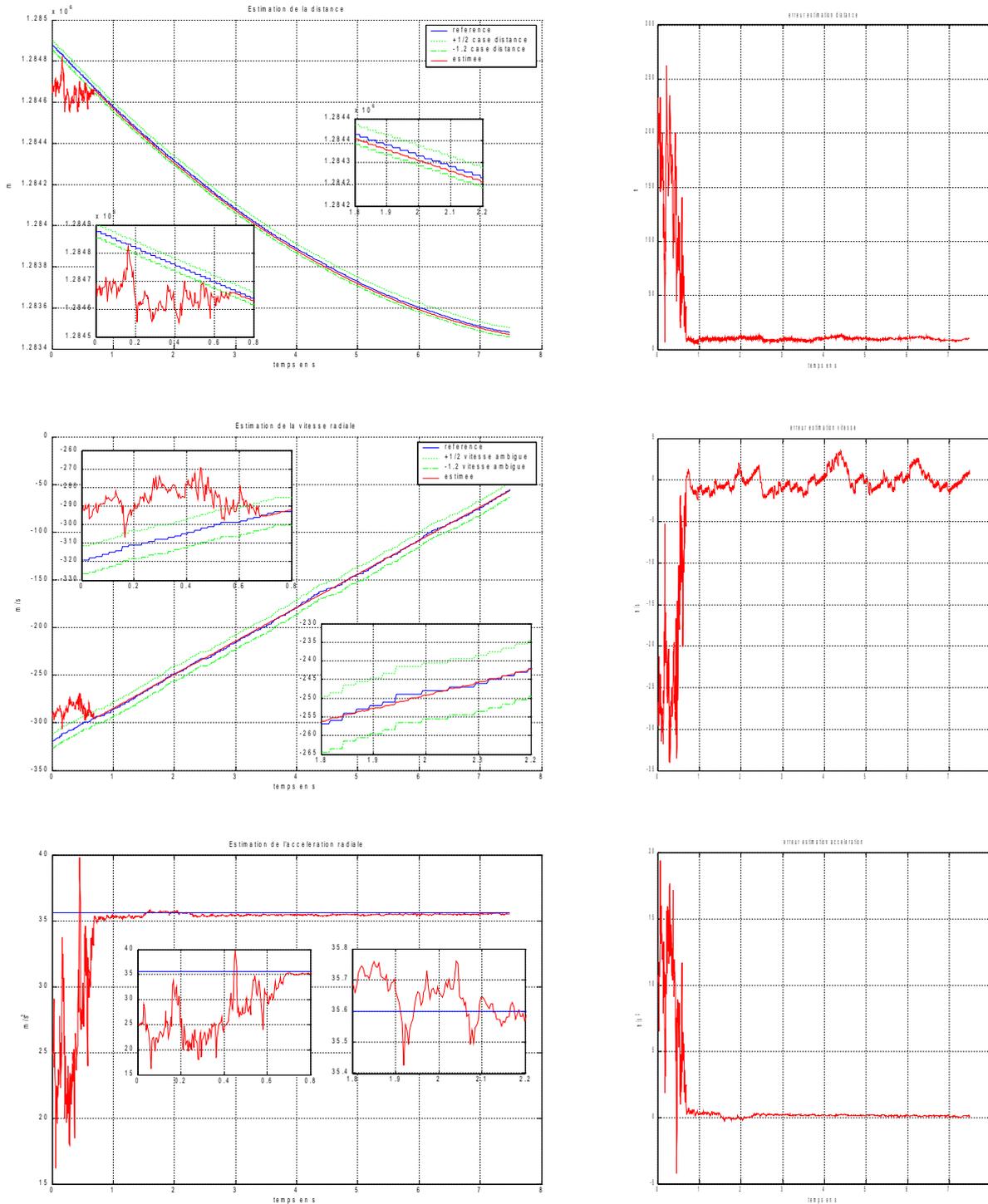


Fig 9.11: Performances du filtre à minimum de variance à -9dB

Il apparait clairement que ce type de technique déterministe (à particules gaussiennes) permet une bonne estimation des paramètres cinématiques de la cible, avec 320 particules, et avec un RSB égal -9dB.

### **9.3 Conclusion**

Malgré les périodes aveugles, le rapport Signal/Bruit très défavorable, et la fenêtre d'initialisation décentrée, le filtre à particules déterministes de Gauss étendu dans ses deux versions (Maximum de vraisemblance/minimum de variance), a permis de retrouver et d'améliorer les performances obtenues lors de la première campagne radar [Noyer 00] par le filtrage particulaire aléatoire classique pour un nombre de particules beaucoup plus faible.

Dans [Ziadi 07], il apparaît clairement à partir des résultats présentés que la technique déterministe à particules de Gauss supplante celle à particules aléatoires de Dirac. Les résultats présentés dans ce chapitre utilisent la technique à redistribution déterministe conforme en loi [Salut 08].

Les contraintes résidaient dans le nombre élevé de particules nécessaires à la bonne reconstitution de l'estimation optimale. La méthode particulaire à redistribution conforme en loi, est appliquée avec une économie de calcul (320 particules au lieu de 2000 particules déterministes à maximum de vraisemblance, ou 100000 particules aléatoires).

Ceci permet d'envisager la mise en œuvre numérique sous forme de filtre temps réel. On remarque notamment que le nombre de particules atteint est minimal puisqu'il correspond à la dimension d'une grille Doppler-Distance classique stationnaire pour la fenêtre d'occupation considérée.

On peut donc affirmer que le coût du particulaire déterministe se résume à celui induit par le seul déplacement des particules pour assurer l'intégration cohérente longue nécessaire à l'optimalité.



## Conclusion générale et Perspectives

Le problème du filtrage non linéaire consiste à estimer la loi conditionnelle d'un processus à état indirectement lié à un processus d'observation dont on connaît une réalisation. En dehors du cas linéaire gaussien (Filtre du Kalman), et de celui à états discrets finis (Filtre de Viterbi), le problème non-linéaire général n'a pas de solution en dimension finie. Des méthodes approchées ont, donc, été développées.

Les méthodes particulières aléatoires, proposent une approximation de la loi conditionnelle recherchée en propageant une population de particules dans le temps, simulant le processus de branchement que représente le générateur du filtrage. La loi conditionnelle est par définition, la limite obtenue pour une population infinie.

Le nombre de particules nécessaires pour approcher cette limite avec la précision désirée est tout l'objet de filtrage particulaire.

Les algorithmes à particules aléatoires simulant correctement le processus de branchement (exploration/sélection) ont été développés depuis 1989. Ils sont résumés ici dans le chapitre 1.

Le chapitre 2 a permis de présenter une première forme de filtrage particulaire déterministe suivant le maximum de vraisemblance trajectorien, cette méthode brevetée en 2001, a trouvé sa première application en télécommunications [BenSalem 02], et fut développée plus largement sur des applications défense [Ziadi 07].

Au chapitre 3, une nouvelle méthode de filtrage particulaire déterministe est développée dans le cadre traditionnel du minimum de variance marginal. Cette méthode a trouvé ses premières applications dans cette thèse, et fait l'objet d'un brevet en instance de dépôt.

Grâce aux moyens pratiques qu'elles fournissent pour résoudre des problèmes de filtrage non linéaire, les techniques particulières constituent un outil utile au domaine des communications aérospatiales pour des messages codés: caractère non gaussien des bruits sources (symboles), état hybride continu/discret, estimation conjointe du canal et des symboles. La problématique est présentée dans le chapitre 4, où se trouve expliquée l'utilisation des méthodes de codage et décodage simples ainsi que itératives.

La mise en oeuvre du filtrage particulaire à maximum de vraisemblance est abordée au chapitre 5, dans le cas de code convolutif, où on a pu estimer l'état continu et discret (message codé) du système, malgré une dérive de phase importante, et une synchronisation inconnue, ce qui n'était pas le cas dans

les réalisations précédentes à ce sujet [Bensalem 02]. On obtient une perte de performance inférieure à 1 dB par rapport à la courbe idéale à canal parfaitement connu dans un secteur de rapport S/B donné. On a utilisé dans ce chapitre, un bouclage itératif de Turbo-égalisation, introductif au chapitre 6.

En effet, l'évaluation des besoins d'un système de télécommunication avec des performances proche de la limite de Shannon, permet d'envisager d'appliquer la méthode particulière déterministe pour décoder un message codé par Turbo-code (chapitre 6). Les variables d'état du système traité ayant des intervalles de variation bornée (phase relative), cette méthode revient ici à un filtre de sélection pure. L'application utilise les treillis conjoints continu discrétisé/discret et permet de bien estimer l'état hybride du système malgré un fort bruit de dérive de phase. Il resterait à inclure d'autres paramètres dérivant autre que la phase, nécessitant une approche particulière qui ne se réduit pas à une grille fixe sur un support borné.

Les travaux présentés dans le chapitre 7 contiennent le premier exemple d'une application de type défense qui est la trajectographie passive sonar, cette application ayant déjà été abordée par une technique particulière aléatoire [Tullière 00] adaptée au maximum de vraisemblance. L'application de la méthode entièrement déterministe a permis d'obtenir des résultats équivalents, avec un nombre de particule beaucoup moindre.

Une problématique particulièrement indiquée pour le filtrage particulière est celle du radar de veille-poursuite où les mesures ne sont disponibles que par intermittence. Au chapitre 8, on a traité le problème de radar de veille avec la méthode particulière à maximum de vraisemblance trajectoriel pour estimer les dynamiques de la cible (éléments cinématiques et réflexions électromagnétiques).

La validation sur le plan pratique de la technique de filtrage particulière déterministe à minimum de variance fut effectuée sur les données réelles de la DGA (Radar ARMOR). Les performances supérieures à celles du maximum de vraisemblance trajectoriel, sont montrées dans le chapitre 9, comme illustration applicative du chapitre 3.

De plus, une étude plus approfondie, des performances de Filtrage particulière déterministe à minimum de variance pourrait être réalisée. Elle comprendrait une étude complète de cette méthode, permettant d'étudier sa robustesse et la qualité asymptotique de son optimalité. Elle déterminerait les précautions nécessaires à son application.

Ce mémoire fait suite à ceux [Noyer 92][Rigal 93][Teulière 00] concernant le particulière aléatoire et ceux ([Bensalem 02],[Ziadi 07]) concernant l'aspect particulière déterministe. On remarque clairement l'apport de l'outil déterministe pour aborder le problème du traitement particulière, par comparaison avec les techniques anciennement fondées sur le particulier aléatoire. Les contraintes résidant dans le nombre élevé de particules nécessaire à la bonne reconstitution de l'estime optimal, ne sont plus rédhibitoires sous l'aspect déterministe et, plus particulièrement, à redistribution conforme en loi, qui permet d'envisager la mise en oeuvre numérique sous forme de filtre temps réel réaliste pour les applications les plus exigeantes telles que le radar.

# Bibliographie

- [Aidala 83] J. Aidala, S. Hammel, "*Utilisation of modified polar coordinates for bearing only-tracking*", IEEE Transactions on Automatic Controls 28 (3) 283-293, 1983.
- [Alberty 89] T. Alberty, V. Hespelt, "*A New Pattern Jitter Frequency Error Detector*", IEEE Trans Comm vol 37 p. 159-163, February 1989.
- [Alspach 72] D.L. Alspach and H.W. Sorenson, "*Nonlinear Bayesian Estimation Using Sum Approximations*", IEEE Transactions on Automatic Control, volume AC-17, no. 4, pages 439-448, 1972.
- [Anastasopoulos 00] A. Anastasopoulos and K.M. Chugg, "*Adaptive soft-input soft-output algorithms for iterative detection with parametric uncertainty*", IEEE Trans. Comm., pp. 1638-1649, vol. 48, no. 10, Oct. 2000.
- [Anastasopoulos 07] A. Anastasopoulos, K.M. Chugg, G. Colavolpe, G. Ferrari and R. Raheli, "*Iterative detection for channels with memory*", Proc. of the IEEE, pp. 1272-1294, vol. 95, no. 6, June 2007.
- [Anderson 84] J.B. Anderson and S. Mohan, "*Sequential Coding Algorithms : A Survey and Cost Analysis*," IEEE Transactions on Communications, vol COM-32, nu 2, pages 169-176, Feb, 1984.
- [Ascheid 82] G. Ascheid, H. Meyr, "*Cycle Slips in Phase-Locked Loops*", A tutorial Survey.. IEEE Trans. Comm. vol COM. 30, October 1982.
- [Bahl 74] L.R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek and J. Raviv, "*Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate*", IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. 20, pp. 284-287, March 1974.
- [Bar-shalom 88] Y.BAR-SHALOM, "*Tracking and data association*", Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 1988.
- [Bellini 00] S. Bellini, C. Molinari, G. Tartara, "*Digital Frequency Estimation in Burst Mode QPSK Transmission*", IEEE Trans. Comm. vol 38 n°7, July 1990.

- [Bellini 91] S. Bellini, C. Molinari, G. Tartara, "*Digital Carrier Recovery with Frequency Offset in TDMA Transmission*", ICC '91, p 789-793, 1991.
- [Benedetto 05] S. Benedetto, R. Garello, G. Montorsi, C. Berrou, C. Douillard, D. Giancristofaro, A. Ginesi, L. Guigno and M. Luise, "*MHOMS: high-speed. ACM modem for satellite applications*", IEEE Wireless Communications. pp.66-77, vol. 12, no. 2, Apr. 2005.
- [Bennis 86] O.Bennis, T.Huillet, A.Monin, G.Salut, "*Modulation, estimation, décision optimales, pour l'élaboration des éléments but à partir de l'écoute passive SONAR*", Contrat DCAN-CAPCA n° C-84.48.801.287, 1986.
- [Bensalem 00] F. Bensalem and G. Salut, "*Réception particulière à maximum de vraisemblance sans Viterbi*", CIFA'2000, Lille, juillet, 2000.
- [Bensalem 01] F. Bensalem, "*Recepteur particulière pour Canaux Mobiles Evanescents*", In JDA'OA journée Doctorale d'Automatique, Toulouse, Sept 2001.
- [Bensalem 02] F. Ben Salem, "*Réception particulière pour canaux multi-trajets évanescents en communications radiomobiles*", Université de Paul Sabatier, Toulouse, Nov 2002.
- [Bensalem 99] F. Bensalem, "*Réception particulière à maximum de vraisemblance en télécommunications (BPSK)*", JDA'99 Journées Doctorales d'automatique, Nancy, sept 1999.
- [Bergman 97] Nicola Bergman, Lennart Ljung and Frerik Gustfsson, "*Point-mass filter and cramer Rao bound for Terrain-Aided Navigation*", Proceeding of the 36th IEEE Conference on Decision Control, Volume 1 Page(s):565 - 570 vol.1, 10-12 Dec. 1997.
- [Berkmann 98] Jens Berkmann, "*On Turbo Decoding of Nonbinary Codes*", IEEE COMMUNICATIONS LETTERS, Vol. 2, No. 4, April 1998.
- [Berrou 93] C. Berrou, A. Glavieux and P. Thitimajshima, "*Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: turbo codes*", Proc. IEEE Int. Conf. Comm., pp. 1064-1070, Geneva, Switzerland, May 1993.
- [Berrou 99] C. Berrou, C. Douillard and M. Jézéquel, "*Multiple parallel concatenation of circular recursive systematic convolutional (CRSC) codes*", Annales des Télécommunications, vol. 54, n°3-4, pp. 166-172, Mars-Avril 1999.
- [Blom 88] H .BLOM, Y. BAR-SHALOM, "*The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching coefficients*", IEEE Trans . Automatic Control, Vol. 33 pp 780-783, Aout 1988.
- [Bozzo 83] C.BOZZO, "*Le filtrage optimal et ses applications aux problèmes de poursuite*", Librairies LAVOISIER, Tome III (1983)
- [Branka 01] Branka Vucetic, Jinhing Yuan, "*TURBO CODES principles and Applications*", Kluwer Academic Publishers, London, 2001.
- [Bréhard 07] Th. Bréhard, J.-P. Le Cadre, "*Hierarchical particle filter for bearings only tracking*", IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 43(4), 2007.
- [Cai 95] Cai, Z., LeGland, F., and Zhang, H., "*An adaptative local grid refinement method for nonlinear filtering*", Tech. Rep. Technical report 2679, INRIA, 1995.

- [Cappé 07] Cappé, O., Godsill, S. & Moulines, E, "*An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo*", Proceedings of the IEEE, 2007.
- [Carpentier 81] M. Carpentier, "*Radar Bases modernes*", Masson, 1981.
- [Chamon 96] M.A. Chamon, "*Filtrage particulaire et ouverture synthétique inverse sur cibles radar non-coopératives*", PhD thesis. Ecole Nationale supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, 1996.
- [Chan 92] Chan, Y.T.; Rudnicki, S.W, "*Bearings-only and Doppler-bearing tracking using instrumentalvariables*", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Volume 28, Issue 4 Page(s):1076 - 1083, Oct 1992.
- [Chevalier 89] F. Le Chevalier, "*Principes de traitement signaux radar et sonar*", Masson, 1989.
- [Chevillat 89] P.R. Chevillat and E. Eleftheriou, "*Decoding of trellis-encoded signals in the presence of intersymbol interference*", IEEE Trans. Comm, pp. 669-676, vol. 37, no. 7, July 1989.
- [Classen 93a] F. Classen, H. Meyr, "*Maximum Likelihood Open Loop Carrier Synchronizer for Digital Radio*", P. Sehier, ICC'93, vol 1, pp 493-497, 1993.
- [Classen 93b] F. Classen, H. Meyr, P. Sehier, "*An all Feed forward Synchronization Unit for Digital Radio*", VTC'93, pp 738-741, 1993.
- [Classen 93c] F. Classen, H. Meyr, "*Two Frequency Estimating Schemes Operating Independently of Timing Information*", GLOBECOM'93, vol 3, pp 1996-2000, 1993.
- [Colavolpe 00] G. Colavolpe, G. Ferrari and R. Raheli, "*Noncoherent iterative (turbo) decoding*", IEEE Trans. Comm., vol. 48, no. 9, pp. 1488–1498, Sept 2000.
- [Colavolpe 05] G. Colavolpe, A. Barbieri and G. Caire, "*Algorithms for iterative decoding in the presence of strong phase noise*", IEEE JSAC, vol. 23, no. 9, pp. 1748–1757, Sept 2005.
- [Darricau 93] J. Darricau, "*Physique et théorie du radar*", Editeur SODPIE, 1993.
- [Dauwels 04] J. Dauwels and H.-A. Loeliger, "*Phase estimation by message passing*", Proc. IEEE Int. Conf. Commun., pp. 523–527, Paris, France, June 2004.
- [DelMoral 91] P. Del Moral, G.Rigal, G.Salut, "*particules aléatoires et filtrage non-linéaires*", Séance du GdR Automatique du CNRS (pole non-linéaire), Paris, 8 Février 1991.
- [DelMoral 94] P. Del Moral, "*Résolution particulaire des problèmes d'estimation et d'optimisation non-linéaires*", Université Paul Sabatier - Toulouse, 1994.
- [Didier 95] P. Didier, A. Picart, C. Douillard, M. Jezequel, "*Application des techniques de decodage itératif à la correction de l'interf\_erence entre symboles*", GRETSI 1995, Juan-les-pins, 1995.
- [Douc 02] Douc, R., Cappé, O., Moulines, E. & Robert, C. P, "*On the Convergence of the Monte Carlo Maximum Likelihood Method for Latent Variable Models*", Scandinavian Journal of Statistics, 2002.
- [Douillard 00] C. Douillard, M. Jezequel, C. Berrou and N. Brengarth, J. Tusch and N. Pham, "*The turbo code standard for DVB-RCS*", Proc. 2nd Int. Symp. on Turbo Codes

- and Related Topics, pp. 535–538, Brest, France, Sept 2000.
- [Douillard 95] C. Douillard, M. Jezequel, C. Berrou, A. Picart, P. Didier and A. Glavieux, *"Iterative correction of intersymbol interference: Turbo equalization"*, European Trans. Telecomm., pp. 507-511, vol. 6, Sept-Oct 1995.
- [Dufour 91] F. DUFOUR, M. MARITON, *"Tracking a 3D maneuvering target with passive sensors"*, IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, Vol. 27, pp 725-738, Juillet 1991.
- [DVB 03] *"Digital Video Broadcasting (DVB); Interaction Channel for Satellite Distribution Systems"*, ETSI EN 301 790 standard, 2003.
- [Finucan 64] H.M. Finucan, *"The mode of a multinomial distribution"*, Biometrika, vol 51, pages 513-517, 1964.
- [Fitz 91] M. P. Fitz, *"Planar Filtered Techniques for Burst Mode Carrier synchronization"*, GLOBECOM '91, 1991.
- [Forney 66] G. D. Forney Jr, *"Concatenated Codes"*, Cambridge, MA: MIT Press, 1966.
- [Garcia-Frias 03] J. Garcia-Frias and J.D. Villasenor, *"Combined turbo detection and decoding for unknown ISI channels"*, IEEE Trans. Comm., pp. 79-85, vol. 51, no. 1, Jan 2003.
- [Gardner 77] F. Gardner, *"Hangup in Phase lock loops"*, IEEE Trans. Comm. vol 25 n°10, October 1977.
- [Glavieux 97] A. Glavieux, C. Laot and J. Labat, *"Turbo-equalization over frequency selective channels," International Symposium on Turbo Codes and Related Topics"*, Brest, France, Sept 1997.
- [Gordon 93] N J. Gordon and D J. Salmond and AFM Smith, *"Novel approach to non-linear/non-Gaussian bayesian state estimation"*, vol 140, nu 2, pages 107-113, IEEE-Proceedings-F, 1993.
- [Hamming 86] R. W. Hamming, *"Coding and Information Theory"*, 2<sup>nd</sup> Ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1986.
- [Handschin 69] J. Handschin & D. Mayne. *"Monte-Carlo techniques to estimate the conditionnal expectation in multi-stage non-linear filtering"*, Int. J. Control, pages 547-559, 1969.
- [Heegard 99] Ch. Heegard S.B wicher, *"Turbo coding"*, Kluwer Academic publishers, Boston, 1999.
- [Herzet 07] C. Herzet, N. Noels, V. Lottici, H. Wymeersch, M. Luise, M. Moeneclaey, L. Vandendorpe, *"Code-aided turbo synchronization"*, Proc. of the IEEE, pp. 1255–1271, vol. 95, no. 6, June 2007.
- [Holdsworth 01] K.O. Holdsworth, D. P. Taylor and R.T. Pullman, *"On combined equalization and decoding of multilevel coded modulation"*, IEEE Trans. Comm., pp. 943-947, vol. 49, no. 6, June 2001.
- [Hue 01] C. Hue, J.-P. Le Cadre, P. Pérez, *"A particle filter to track multiple objects"*, In IEEE Workshop on Multi-Object Tracking, Pages 61-68, Vancouver, Canada, Juillet 2001.
- [Hue 02] C. Hue, J.-P. Le Cadre, P. Pérez, *"Sequential Monte Carlo methods for multiple*

- target tracking and data fusion*", IEEE Trans. on Signal Processing, 50(2):309-325, Février 2002.
- [Huillet 89] T. Huillet and G. Salut, "*Interprétation des équations du filtrage non-linéaire*", Séance du GdR Automatique du CNRS (Pôle non linéaire), Paris, 6-8 nov 1989.
- [Julier 04] S.J. Julier, J.K. Uhlmann, "*Unscented filtering and nonlinear estimation*", IEEE Review 92 (3), 2004.
- [Julier 81] S.J. Julier, J.K. Uhlmann & H. F.Durrant-Whyte, "*A new Approach for filtering Nonlinear Systems*", In The Proceedings of The American Control Conference, page 1628-1632, Seattle, Washington, June 1981.
- [Kalman 60] R.E. Kalman, "*A new approach to linear filtering and prediction problems*", J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D. , **82** : 1, pp. 35–45, Mars 1960.
- [Kalman 61] R.E.Kalman, R.S. Bucy, "*New results in linear filtering and prediction theory*", J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D , 83, pp. 95–108, 1961.
- [Kazem 05a] A. Kazem F.Lehmann G.Salut, "*Démodulation utilisant la technique de filtrage particulière*", Rapport LAAS No05734 Contrat Alcatel Espace N°323036, 27p, Décembre 2005.
- [Kazem 05b] A.Kazem, F.Lehmann, G.Salut, "*Iterative joint phase/timing estimation and decoding for geo satellite links in the presence of doppler shift*", 8th International Symposium on Signal Processing and its Applications (ISSPA'2005), Sydney (Australie), 4p, 29 Août - 1er Septembre 2005.
- [Kazem 06a] A. Kazem F.Lehmann G.Salut, "*Maximum likelihood deterministic particle filter for state estimation and fault detection in stochastic hybrid systems*", 2nd IEEE International Conference on Information & Communication Technologies: from Theory to Applications (ICTTA'06), Damas (Syrie), 24-28 Avril 2006.
- [Kazem 06b] A. Kazem G.Salut, "*Deterministic branching Gauss particles in the passive sonar tracking problem*", 2nd IEEE International Conference on Information & Communication Technologies: from Theory to Applications (ICTTA'06), Damas (Syrie), 24-28 Avril 2006.
- [Kazem 06c] A. Kazem, F.Lehmann, G.Salut, "*Turbo-démodulation avec estimation conjointe canal-code*", Rapport LAAS No06714. Contrat Alcatel Alenia Space N° 05734, 33p, Octobre 2006.
- [Kazem 07a] A. Kazem F.Neyeme G.Salut, "*Filtrage particulière du signal RADAR de veille-poursuite*", Rapport LAAS No07691 Contrat Thales Air Systems n° 141321102, Avril 2007.
- [Kazem 07b] A. Kazem F.Neyeme G.Salut, "*Filtrage particulière du signal RADAR de veille-poursuite de TR6*", Rapport LAAS No07611 Contrat Thales Air Systems n° 141321100, Novembre 2007.
- [Kazem 08] A. Kazem G.Salut, "*Track-while-scan radar using deterministic particle filtering*", 3d IEEE International Conference on Information & Communication Technologies: from Theory to Applications (ICTTA'08), Damas (Syrie), 7-11 Avril 2008.
- [Kitagawa 96] G. Kitagawa, "*Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state*

- space models*", Journal of Computational and Graphical Statistics, vol. 5, pp. 1-25, 1996.
- [Komninakis 01] C. Komninakis and R.D. Wesel, "*Joint iterative channel estimation and decoding in flat correlated Rayleigh fading*", IEEE JSAC, vol. 19, no. 9, pp. 1706–1717, Sept 2001.
- [Kushner 67] H.J. Kushner, "*Dynamical equations for optimal nonlinear filtering, J. Diff. Equations*", pp. 179–190, 3, 1967.
- [Lamole 00] F. Lamole, "*Commande particulière optimale - Application à l'optimisation de missions de lutte sous-marine*", Université Paul Sabatier - LAAS/CNRS, 2000.
- [Lamole 97] F. Lamole and G. Salut, "*Aide à la manœuvre de véhicules sous-marins par résolution particulière*", LAAS, nu 97515, 1997.
- [Laot 01] C. Laot, A. Glavieux and J. Labat, "*Turbo equalization: adaptive equalization and channel decoding jointly optimized*", IEEE JSAC, pp. 1744-1752, vol. 19, no. 9, Sept 2001.
- [Laot 97] C. Laot, "*Egalisation autodidacte et Turbo-égalisation, application aux canaux sélectifs en fréquence*". These de l'Universit\_e de Rennes 1, Juillet 1997.
- [LeGall 00] F. Le.Gall and G. Salut, "*Algorithme modal d'affectation multinomiale dans l'estimation particulière*", CIFA'2000, Lille, juillet 2000.
- [Lehmann 04] F. Lehmann and G. Salut, "*Turbo Equalization with Particle Filter Channel Estimation*", International Symposium on Information Theory and its Applications, Parme, 10-13, Octobre 2004.
- [Lehmann 05] F.Lehmann, A. Kazem, G.Salut, "*Iterative joint phase/timing estimation and decoding for geo satellite links in the presence of doppler shift*", 8th International Symposium on Signal Processing and its Applications (ISSPA'2005), Sydney (Australie), 4p, 29 Août - 1er Septembre 2005.
- [Lehmann 08] F. Lehmann, A. Kazem, G. Salut, "*Blind turbo-detection in the presence of phase noise*", Rapport LAAS N°08080, article soumis à la revue IET Communications, 21p, Mars 2008.
- [Liew 02] T. H. Liew, L. Hanzo, "*Space-Time Codes and Concatenated Channel Codes for Wireless Communications*", Proceedings of the IEEE, Vol. 90, No. 2, pp. 187-219, février 2002.
- [Liptser 77] Liptser, R. S. and Shiriyayev, A. N, "*Statistics of random processes*". Springer, 1977.
- [Liu 95] J.S. Liu & R. Chen, "*Blind deconvolution via sequential computations*", Journal of the American Statistical Association, vol. 430, pages 567-576, 1995.
- [Loat 01] C. Loat, A. Glavieux and J. Labat, "*Turbo equalization: adaptive equalization and channel decoding jointly optimized*", IEEE JSAC, pp. 1744-1752, vol. 19, no. 9, Sept 2001.
- [Lu 01] B. Lu and X. Wang, "*Bayesian blind turbo receiver for coded OFDM systems with frequency offset and frequency-selective fading*", IEEE JSAC, pp. 2516-2527, vol. 19, no. 12, Dec 2001.

- [Luise 92] M. Luise, R. Regiannini, "*A fast Carrier Frequency Estimation Algorithm for Burst Mode M-PSK Satellite Transmission*", 3rd International Workshop on Digital Processing Techniques Applied to Space Communications. p 4.21-4.34, 1992.
- [Lust 00] F. Lustenberger, "*On the Design of Analog VLSI Iterative Decoders*", Dissertation ETH No. 13879, Serie in Signal and Information Processing: Volume 2, Hartung Gorre, Konstanz, Allemagne, novembre 2000.
- [Mayne 66] Mayne, D.Q, "*A solution of the smoothing problem for linear dynamic systems*", Automatica, 4, 73-92, 1966.
- [Meyr 98] H. Meyr, M. Moeneclaey and S.A. Fechtel, "*Digital communication receivers: synchronization*", channel estimation and signal processing. Wiley, 1998.
- [Monin 93] A. Monin & G. Salut, "*Filtrage de Volterra à horizon infini application aux systèmes bilinéaires*", In 14<sup>ème</sup> colloque de GRETSI, Juan-Les-Pins, 13-16 Sptembre 1993.
- [Monin 95] A. Monin, "*Traitement du signal LORAN par estimation dynamique non-linéaire*", Contrat DCN/STERIA/LAAS A 94.75.106, 2, 1995.
- [Nardone 84] Nardone S C, Lindgren A G, Gong K F, "*Fundamental properties and performance of conventional bearings only target motion analysis*", IEEE Trans.on Automatic Control, vol. AC-29, no. 9, sept 1984.
- [Neyman 33] J . Neyman and E.S . Pearson "*On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses*", Phil. Trans . Roy. Soc. Ser. A, 231 :289-337, 1933.
- [Noels 05] N. Noels, H. Steendam, M. Moeneclaey and H. Bruneel, "*A maximum-likelihood based feedback carrier synchronizer for turbo-coded systems*", Proc. IEEE Vehic. Tech. Conf., pp. 3014–3018, Stockholm, Sweden, May-June 2005.
- [Noyer 00] J.C. Noyer & G. Rigal, "*Évaluation expérimentales sur données réelles des techniques prticulaires*", Rapport technique 1, contrat DCAN/STERIA-Diginext A94.77.717, 2000.
- [Noyer 92] J.C. Noyer, "*Résolution particulière en filtrage non-linéaire*", Mémoire de DEA, DEA de Physique des particules, physique mathématique et modélisation. Universités d'Aix-Marseille I,II, Nice, Toulon, Toulouse, juin 1992.
- [Noyer 96] J.C. Noyer, "*Traitement non-linéaire du signal radar par Filtrage particulière*", PhD thesis. Université Paul Sabatier de Toulouse, 1996.
- [Oerder 88] M. Oerder, H. Meyr, "*Digital Filter and Square Timing Recovery*", IEEE Trans. Comm. vol 36 n°5, May 1988.
- [Ogiwara 98] H. Ogiwara and M. Yano, "*Improvement of turbo trellis-coded modulation system*", Trans. Inst. Electron. Inf. Commun. Eng. A, vol. E81-A, pp. 2040–2046, Oct 1998.
- [Peleg 00] M. Peleg, S. Shamai (Shitz) and S. Galan, "*Iterative decoding for coded noncoherent MPSK communications over phase-noisy AWGN channel*", IEE Proc. Commun., vol. 147, pp. 87–95, Apr 2000.
- [Pham 01] Pham, D. T., "*Stochastic methods for sequential data assimilation in strongly nonlinear systems*", Monthly Weather Review, vol. 129, no. 5, pp. 1194-1207, 2001.

- [Proakis 95] J.G. Proakis, *"Digital communications"*, McGraw-Hill, New York, 1995.
- [Punskaya 02] E. Punskaya and A. Doucet and W. J. Fitzgerald, *"On the use and misuse of particle filtering in digital communications"*, vol II, EUSIPCO'2002, 11th European Signal Processing Conference, EURASIP, TESA, INP, CNES, Toulouse, France, 3-6 Sept 2002.
- [Quinquis 99] André Quinquis, *"Détection et estimation des signaux"*, HERMES Science Publications, Paris, 1999.
- [Raheli 95] R. Raheli, A. Polydoros and C.-K. Tzou, *"Per-survivor processing: a general approach to MLSE in uncertain environments"*, IEEE Trans. Comm., pp. 354-364, vol. 43, no. 2/3/4, Feb./Mar./Apr 1995.
- [Rife 74] D.C. Rife and R.R. Boorstyn, *"Single-tone parameter estimation from discrete-time observations"*, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 20, no. 5, pp. 591-598, Sept 1974.
- [Rigal 92a] G. Rigal and G. Salut, *"L'estimation particulière dans les problèmes non-linéaires généraux"*, Séance du G.D.R. Traitement du signal, Paris, Oct 1992.
- [Rigal 92b] G. Rigal, *"La résolution particulière en estimation-filtrage. Part C"*, Contrat DIGILOG 89.34.553.00.470.75.01, 1992.
- [Rigal 93] G. Rigal, *"Filtrage non-linéaire, résolution particulière et applications au traitement du signal"*, Université Paul Sabatier - Toulouse, 1993.
- [Rigal 95] G. Rigal, *"Poursuite de cibles manoeuvrantes par une méthode de filtrage particulière"*, Contrat DCN/DIGILOG/LAAS A 94.77.773,1, 1995.
- [Robertson 96] P. Robertson and T. Worz, *"A novel bandwidth efficient coding scheme employing turbo codes"*, in Proc. IEEE Int. Conf. Communications, vol. 2, Dallas, TX, pp. 962-967, June 1996.
- [Ryan 93] Ryan, M.S. and Nudd, G.R., *"The Viterbi Algorithm"*, Department of Computer Science, University of Warwick, Coventry, CV4 7Al, England, February 1993 .
- [Salut 01] G. Salut, *"Récepteur particulière pour l'estimation optimale conjointe de l'information digitale et continue dans les signaux à modulation pulsée"*, Brevet INPI:01/00849, jan 2001.
- [Salut 04] G. Salut and A. Ziadi, *"Maximum Likelihood Non-Linear Filtering Using Deterministic Gaussian Particles"*, International Symposium on Information Theory and its Applications, Parme, 10-13, Octobre 2004.
- [Salut 08] G. Salut, *"Procédés et systèmes à base de particules non-aléatoires pour l'estimation non-linéaire optimale des processus"*, Brevet en instance de dépôt.
- [Salut 81] G. Salut, *"Filtrage non-linéaire et projections réalisables"*, In R.C.P. 567: Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des systèmes et le traitement du signal: Filtrage non-linéaire, pages 61-84, Toulouse, Mars 1981.
- [Salut 89] G. Salut, *"Le thème non-linéaire en automatique et traitement du signal"*, Conférence invitée, Journées Nationales du Traitement du signal et images, Chantilly, 25-27 sept 1989.
- [Salut 92] G. Salut, *"La résolution particulière en estimation filtrage. Résultats"*

- expérimentaux*", Part A, Contrat DIGILOG 89.34.553.00.470.75.01, nu 2, 13 jan, 1992.
- [Salut 94] G. Salut, "*Procédé et système pour l'estimation non-linéaire optimale des processus dynamiques en temps-réel*", Brevet (INPI: 94/07274, Europe 95595256.5-5.2206, US patent 5933352), 6 juin 1994.
- [Schetzen 80] M.Schetzen, "*The Volterra and Wiener theories of non-linear systems*", John Wiley & Sons, 1980.
- [Schmidt 70] Schmidt, S. F.; Weinberg, J. D.; and Lukesh, J. S, "*Case study of Kalman filtering in the C-5 aircraft navigation systems*". IEEE Case Studies Seminar, Ann Arbor, Mich., June 1968. (Also AGARDograph 139) Feb. 1970.
- [Shannon 48] C. E. Shannon, "*A mathematical theory of communication*", Bell System Technical Journal, vol. 27, pp. 379-423 and 623-656, July and October, 1948.
- [Shao 99] R.Y. Shao, S. Lin and M.P.C. Fossorier, "*Two simple stopping criteria for turbo coding*", IEEE Trans. Comm., pp. 1117-1120, vol. 47, no. 8, Aug. 1999.
- [Siner 70] R.A .SINGER, "*Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets*", IEEE Trans . Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-6, n° 4, : pp 473-483, Juillet 1970.
- [Singer 71] R .A.SINGER, K.W.BEHNKE, "*Real-time tracking filter evaluation and selection for tactical applications*", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol . AES-7, n° 1, pp 100-110, Janvier 1971.
- [Sorenson 71] H.W. Sorenson & D.L. Alspach, "*Recursive Bayesian Estimation Using Gaussian sum*", Automatica, vol. 7, pages 465-479, 1971.
- [Stratonovich 60] Stratonovich R.L, "*Conditional Markov processes*", Theory of Probability and its Applications, (USSR) 5(2) 156–178, 1960.
- [Teulière 00] Vincent TEULIERE, "*Contribution au filtrage de Volterra et à l'estimation particulière. Application aux transmissions électroniques et acoustiques*", thèse Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes LAAS/CNRS, 2000.
- [Teulière 99] V. Teulière and A. Monin and G. Salut, "*Trajectographie passive SONAR par estimation à maximum de vraisemblance*", pages 705-708, GRETSI'99, Vannes, Sept, 1999.
- [Thorp 72] J .S .THORP, "*Optimal tracking of maneuvering targets*", IEEE Trans . Aerospace and Electronic Systems, Vol . 9 pp 800-810 Nov, 1972.
- [Thourel 95] L. Thourel, "*Initiation aux Techniques modernes des radars*", Ecole nationale supérieur de l'aéronautique et de l'espace. Cepradues editions, 1995.
- [Vale 98] M. C. Valenti, "*Iterative Detection and Decoding for Wireless Communications*", A Preliminary Review of Initial Research and Proposal for Current and Future Work towards Doctor of Philosophy degree, Virginia Polytechnique Institute and State University, Blacksburg, Virginia, Etats-Unis d'Amérique, 1998.
- [Visoz 03] R. Visoz and A. Berthet, "*Iterative decoding and channel estimation for space-time BICM over MIMO block fading multipath AWGN channel*", IEEE Trans. Comm., pp. 1503-1514, vol. 51, no. 8, Aug 2003.

- [Viterbi 67] A.Viterbi, "*Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm*", IEEE Transactions on Information Theory, 1967.
- [Wang 02] Z. Wang, Z. Chi and K.K. Parhi, "*Area-Efficient HighSpeed Decoding Schemes for Turbo/MAP Decoders*", IEEE Trans. on VLSI Systems, 10(12), Dec 2002.
- [Wang 93] T.C.WANG, P.K.VARSHNEY, "*A tracking algorithm for maneuvering targets*", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, Vol .29 pp 910-924, Juillet 1993.
- [Weiss 98] C. Weiss, C. Bettstetter, S. Riedel and D. J. Costello, "*Turbo decoding with tail biting trellises*", URSI International Symposium on Signals, Systems, and Electronics, ISSSE 98, Pisa, Italy, pp. 343-348, Oct 1998.
- [Yang 03] Y. Yang and F.-W. Sun, "*On the performance limits of data-aided synchronization*", IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 49, no. 1, pp. 191-203, Jan. 2003.
- [Zakai 69] Zakai M. (1969), "*On the optimal filtering of diffusion processes*", Z. Wahrsch. Verw. Geb., Vol. 11, pp. 230–243, 1969.
- [Zaritskii 75] V. ZARITSKII, V.Svetnik & L. Shimelevich, "*Monte-Carlo techniques in problems of optimal data processing. Automatic and Remote Control*", pages 95-103, 1975.
- [Zhao 06] Q. Zhao H. Kim and G.L. Stuber, "*Innovations-based MAP estimation with application to phase synchronization for serially concatenated CPM*", IEEE Trans. Wireless Comm., vol. 5, no. 5, pp. 1033–1043, May 2006.
- [Ziadi 01] A. Ziadi, "*Filtre à particules étendues gaussiennes pour le signal GPS*", JDA'01, www.laas.fr/JDA2001, Toulouse, Septembre 2001.
- [Ziadi 07] A. Ziadi, "*Particules déterministes en Filtrage non-linéaire: Application à la Réception à Maximum de Vraisemblance des Signaux Radar et GPS*", thèse doctorat, Université de Paul Sabatier – Toulouse, 2007.

## GENERALIZED DETERMINISTIC PARTICLES IN NONLINEAR FILTERING: DEFENCE AND TELECOMMUNICATIONS' APPLICATIONS

### **Abstract**

Particle filters are presently among the most powerful tools to estimate Markovian dynamical systems, regardless of the nature of nonlinearities and/or noise probability distributions. The purpose of this dissertation is to show the generality of deterministic particle filtering, which avoids randomization in the prediction stage as well as in the resampling stage.

This work relies on two kinds of results: the first concerns the particle filter-based maximum likelihood estimator for sequential estimation of the state variables. The second, introducing deterministic particle filtering in the minimum variance sense, focuses on the current state marginal estimation using a resampling scheme consistent with the a posteriori distribution. This approach simultaneously delivers all modes (local maxima) of the marginal probability density function of the current state.

The thesis focuses on several achievements in various fields:

Communications: The proposed particle algorithm makes possible the joint estimation of the kinematic channel parameters at the receiver side and the detection of the message transmitted by a satellite. We have also proposed several techniques for the iterative estimation and decoding of the turbo-coded message compliant with the DVB-RCS standard.

Target estimation for sonar: We built a passive particle receiver only listening to its target, in order to identify its kinematic parameters.

Radar signal processing: The first receiver, with deterministic maximum likelihood filtering, is used for the detection / tracking of steady and manoeuvring targets, when there is a very limited number of available measurements during a circular period of antenna of the radar. The second receiver applies the minimum variance technique to the ARMOR radar, confirming unusually high signal-to-noise gains.

### **Keywords**

Optimal Nonlinear filtering; Particle filter; Deterministic approach; Maximum likelihood; Minimum variance; Joint estimation/detection; Optimal reception; Satellite telecommunication; Signal detection/tracking; Radar; Sonar.



**AUTEUR: Ali KAZEM**

**TITRE : PARTICULES DETERMINISTES GENERALISEES EN FILTRAGE  
NONLINAIRE : APPLICATIONS DEFENCE ET TELECOMMUNICATIONS**

**DIRECTEURS DE THESE : G. SALUT, F. LEHMANN**

**LIEU ET DATE DE SOUTENANCE : LAAS-CNRS, 17 Septembre 2008**

---

**RESUME**

La technique de filtrage particulière s'applique à tous les problèmes d'estimation des systèmes dynamiques markoviens, sans restriction sur la nature des non-linéarités et/ou des distributions de bruits, l'objet de ce mémoire est de montrer la généralité de sa version déterministe, qui permet d'éviter l'aléa inutilement introduit tant en prédiction qu'en redistribution.

Le présent travail, s'articule autour de deux apports: Le premier, concerne le filtrage optimal à maximum de vraisemblance trajectorielle, le second concerne celui à minimum de variance marginale à l'instant courant, par redistribution déterministe conforme en loi. Ce dernier délivre simultanément tous les modes (maxima locaux) de la densité de probabilité marginale de l'état courant.

Le mémoire met l'accent sur plusieurs réalisations,

Communications: Nous avons développé un outil à base de filtrage particulière qui permet conjointement d'estimer les paramètres cinématiques relatifs au récepteur et de détecter le message transmis par un satellite. Nous avons également proposé une série de schémas d'estimation/décodage itératifs du message turbo-codé conforme au standard DVB-RCS.

Estimation de cible en sonar: On a construit un récepteur passif particulière se contentant d'écouter sa cible, afin d'identifier ses paramètres cinématiques.

Traitement du signal radar: Le premier récepteur déterministe, à maximum de vraisemblance est utilisé pour la détection/poursuite de cibles furtives et manoeuvrantes, dans le cas où il y a un nombre très limité de mesures disponibles pendant un tour d'antenne du radar de veille. Le second récepteur consiste à appliquer la technique à minimum de variance au radar ARMOR, ce qui a permis de confirmer des gains inhabituels en termes de rapport signal sur bruit.

---

**MOTS-CLES:**

Filtrage optimal non linéaire; Filtre particulière ; Approche déterministe ; Maximum de vraisemblance; Minimum de variance; Détection/estimation conjointes; Réception optimale; Télécommunication par satellite; Détection/Poursuite ; Radar ; Sonar.

---

**DISCIPLINE:** Automatique et Traitement du Signal

---

**INTITULE ET ADRESSE DU LABORATOIRE :**

[LAAS CNRS - 7 avenue du Colonel Roche - 31077 Toulouse Cedex 4](#)