



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : l'Université Toulouse III - Paul Sabatier

Discipline : Mathématiques

Présentée et soutenue par : **Laetitia CARBALLAL PERDIZ**

Le 03 Décembre 2010

Intitulée :

ÉTUDE D'UNE MÉTHODOLOGIE MULTIÉCHELLES APPLIQUÉE À DIFFÉRENTS PROBLÈMES EN MILIEU CONTINU ET DISCRET

JURY :

Pierre Degond	Directeur de thèse
Raphaël Loubère	Directeur de thèse
Mohamed Masmoudi	Examineur
Boniface Nkonga	Rapporteur
Valérie Perrier	Rapporteur
Maryse Vaullerin	Examinatrice

Ecole doctorale **Mathématiques, Informatique, Télécommunications de Toulouse**
Institut de Mathématiques de Toulouse

Unité Mixte de Recherche CNRS - UMR 5219

Université Paul Sabatier Toulouse 3 - Bât 1R3, 31 062 TOULOUSE cedex 9, France

Remerciements

Avant tout, je tiens à remercier mes directeurs de Thèse, Pierre Degond et Raphaël Loubère. Ils m'ont fait découvrir le monde de la recherche pendant la thèse et le stage de master. Les bons conseils et la rigueur de Pierre m'ont été très utiles et ses idées ont été indispensables pour mener à bien ce travail. C'est un grand honneur d'avoir travaillé à ses côtés. L'élaboration de cette thèse aurait été difficile sans Raphaël. Sa disponibilité permanente et sa patience m'ont été d'une aide précieuse, autant dans la réalisation que dans la rédaction. Merci encore à tous les deux pour votre engagement et votre soutien durant ces années.

Je suis très reconnaissante envers Boniface Nkonga et Valérie Perrier qui ont accepté la lourde tâche de rapporter mon travail. Je vous remercie chaleureusement de l'intérêt que vous avez porté à ma thèse. C'est également un grand plaisir que Maryse Vaullerin et Mohamed Masmoudi aient accepté de faire partie de mon jury, ainsi que Annalisa Ambroso et Patrick Laborde qui n'ont pas pu être présent le jour de la soutenance.

J'ai eu la chance d'effectuer ma thèse dans le cadre de l'Institut de Mathématiques de Toulouse. Merci tout d'abord aux secrétaires qui ont toujours fait leur travail dans la bonne humeur. Je remercie également Fabrice Deluzet, Jean-Michel Rovarch et Alexei Lozinski pour leur aide et leur soutien durant la thèse.

Je remercie tous les thésards qui ont fait du laboratoire une deuxième famille et ont agrémenté la thèse de purs moments de plaisir. D'abord, je voudrais remercier les précédentes promotions pour leur accueil au sein du labo et pour leurs conseils bien avisés : il s'agit de Raymond, Mounir et mon ancien co-bureau Dominique, mais aussi Aude et Marc pour les gâteaux de la pause thé. Je souhaite évidemment remercier ma promo : un grand merci spécialement à Mélanie, Marthe, Benjamin, Salvador, Tiphaine et Laurent, le meilleur des co-bureau, qui m'ont soutenu durant ces années. Merci aussi à mes nouveaux co-bureau Mathieu et Rémi, à mes anciens co-bureau Stephan et Sever, à Daphné, partie de Toulouse pour la thèse. Enfin, je désire remercier également et tout particulièrement Michaël.

Je remercie naturellement tous mes amis plus anciens : ma meilleure amie Lydie, Aurélie et Houda pour avoir rendu les cours de la fac plus agréables ; Coraline, Christelle, Sandrine, Vincent et Mélanie pour les délires au lycée ; Coralie, Christelle, Emilie et sans oublier ma première grande amie Florence pour leur fidélité depuis l'école primaire. Merci pour tous ces moments inoubliables.

Bien sûr, je n'oublie pas de remercier ma famille à qui je suis très attachée et sans qui je n'aurais jamais atteint la fin de ces études de Mathématiques. Je remercie donc mes parents, ma sœur, mon frère et ma grand-mère pour leur soutien et leur amour inconditionnel ; mais également mes cousins germains que j'adore, le cousin de ma mère et ses deux adorables filles. Merci de m'avoir apporté beaucoup de bonheur et de me donner la force nécessaire pour accomplir tout ce que j'entreprends.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Le cadre multiéchelles	1
1.1 Les problèmes multiéchelles	1
1.2 Les méthodes développées	4
2 Présentation des travaux	8
2.1 Problématique de la thèse	8
2.2 Méthodologie multiéchelles fondée sur les éléments finis multiéchelles	9
2.3 Méthode multiéchelles pour la simulation de fissures	11
2.4 Etude d'un problème de diffusion en milieu urbain	13
2.5 Méthode multiéchelles pour un modèle discret de réseaux électriques	18
2.6 Réseaux de distribution : modélisation et méthode multiéchelles .	20
3 Synthèse	21
Chapitre I : Méthodologie multiéchelles fondée sur les éléments finis multiéchelles	23
1 Notion d'homogénéisation	23
1.1 Homogénéisation dans un domaine monodimensionnel	24
1.2 Homogénéisation en milieu périodique	25
1.3 Homogénéisation en milieu hétérogène	28
2 Homogénéisation numérique	29
2.1 Le principe	29
2.2 Méthode des éléments finis	31
2.3 La méthode des éléments finis multiéchelles (MsFEM)	32
3 La méthodologie multiéchelles	35
3.1 Principe de la méthode	35
3.2 Les étapes de la méthode	36
3.3 Cas de MsFEM pour une équation elliptique linéaire	40
4 Conclusion	41

Chapitre II : Méthode multiéchelles pour la simulation de		
fissures		43
1	Présentation du problème	43
	1.1 Contexte physique	43
	1.2 Apport	43
2	Modèle choisi	44
3	Méthode multiéchelles MsFEM	47
	3.1 Construction des fonctions de base	48
	3.2 Résolution du problème global	50
	3.3 Post-traitement	52
	3.4 La méthode MsFEM avec <i>oversampling</i>	52
4	Simulations numériques en dimension deux	54
	4.1 Configurations de simulations	55
	4.2 Résultats numériques d'un premier cas	56
	4.3 Résultats numériques d'un second cas	57
	4.4 Commentaires	57
5	Conclusion	60
 Chapitre III : Etude d'un problème de diffusion en milieu		
urbain par une méthode multiéchelles avec		
pénalisation		61
1	Présentation du problème	61
	1.1 Contexte	61
	1.2 Apport	62
2	Modèle utilisé	63
3	La méthode de pénalisation	65
	3.1 Motivation	65
	3.2 Présentation de la méthode	66
	3.3 Validité de la méthode	66
4	Le couplage avec la méthode de pénalisation	70
	4.1 Construction des fonctions de base	71
	4.2 Résolution de l'équation globale	72
	4.3 Post-traitement	73
	4.4 Choix des paramètres pour la pénalisation	73
5	Les conditions aux limites dans le calcul des fonctions de base	75
	5.1 Technique d' <i>oversampling</i>	76
	5.2 Technique d'homothétie centrée	76
	5.3 Technique d'homothétie	78
6	Convergence en dimension un	80
	6.1 Une méthode avec solution exacte des problèmes locaux	80
	6.2 Une méthode multiéchelles implémentable	82
7	Equation de convection-diffusion instationnaire	84
	7.1 L'équation de diffusion non stationnaire	84
	7.2 L'équation de convection-diffusion	85
8	Discussion sur le choix des opérateurs	87
9	Conclusion	88

Chapitre IV : Etude d'un problème de diffusion en milieu urbain : résultats numériques en dimension deux 91

1	Implémentation	92
2	Cas tests	92
2.1	Cas test à coefficients oscillants	93
2.2	Cas d'une ville virtuelle	104
2.3	Discussion sur les fonctions de base	116
2.4	Bilan	118
3	Simulations sur une ville réelle	121
3.1	Description	121
3.2	Résultats de la simulation	125
3.3	Bilan	127
4	Conclusion	128

Chapitre V : Méthode multiéchelles pour un modèle discret de réseaux électriques 129

1	Présentation du problème	129
1.1	Contexte	129
1.2	Apport	131
2	Modèle utilisé	131
3	La méthode multiéchelles	135
3.1	Construction des vecteurs de base	137
3.2	Résolution du problème global	138
3.3	Post-traitement	140
3.4	Reconnexion	141
3.5	Mise en place	141
3.6	Performance	142
4	Conclusion	143

Chapitre VI : Réseaux de distribution : modélisation et méthode multiéchelles 145

1	Présentation du problème	145
1.1	Contexte	145
1.2	Apport	146
2	Modélisation d'un réseau de distribution de biens	146
2.1	Modèle pour un produit	147
2.2	Contrôles	149
2.3	Couplages de produits	152
3	La méthode multiéchelles	153
3.1	Construction des vecteurs de base	155
3.2	Résolution du problème global	158
3.3	Post-traitement	159
4	Conclusion	160

Conclusion générale	162
1 Conclusion	163
2 Perspectives	165
Bibliographie	167

Introduction

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la résolution numérique de problèmes multi-échelles. Ceux-ci présentent des échelles multiples. Les effets des échelles fines ont un impact non négligeable sur le comportement global des phénomènes observés. Notre travail consiste à développer une méthodologie générale qui s'applique sans hypothèse particulière sur les échelles, puis à sa mise en œuvre dans différents contextes, issus principalement de la physique. Cette introduction présente le cadre multiéchelles, les travaux effectués durant la thèse et se termine par une synthèse.

1 Le cadre multiéchelles

L'espèce humaine a toujours tenté de comprendre la nature et de prédire le futur. Le monde qui nous entoure, constitué de très nombreux éléments distincts, est d'une extrême complexité. En conséquence, il est difficile de l'appréhender et de répondre aux questions classiques "pourquoi?" et "comment?". De nos jours encore, certains phénomènes sont difficilement appréhendés par notre compréhension et restent parfois inexplicables, voire inconnus.

1.1 Les problèmes multiéchelles

La complexité de la nature vient en partie des multiples échelles qui la compose. En effet, la compréhension de nombreux phénomènes de la nature nécessitent de considérer plusieurs échelles de temps, d'espace et de modèle¹. Nous donnons quelques exemples récapitulés dans le tableau TAB. 1 :

- Echelles de temps : en cinétique chimique, une cassure de liaisons peut prendre quelques heures alors que la vibration de ces liaisons se passe à l'échelle de 10^{-15} seconde. En mécanique, le mouvement du soleil dans notre galaxie est de l'ordre de la centaine de millions d'années alors que la Terre tourne autour du soleil en une année et tourne sur elle-même en une journée.
- Echelles d'espace : la taille d'un organe est de l'ordre du centimètre, alors que celle d'une cellule est plutôt du micromètre. De même, la taille d'un lac est de l'ordre du

¹L'échelle de modèle n'indique pas nécessairement l'échelle spatiale, mais le niveau de description choisi.

kilomètre alors que celle d'une rivière est de l'ordre du mètre et celle d'une goutte d'eau est de l'ordre du millimètre.

- Echelles de modèle : la respiration dans les alvéoles pulmonaires peut être décrite soit par une action mécanique en considérant l'action globale des hématies (globules rouges), soit par des échanges gazeux en considérant les actions individuelles de chaque hématie. La modélisation d'un système de particules peut se faire par un modèle fluide, cinétique ou particulaire dont des représentants connus sont les équations d'Euler, de Vlasov et de Newton.

	Echelles	Temps	Espace	Modèle
<i>Physique</i>	Microscopique	Terre (jour)	goutte (millimètre)	particulaire
	Mésoscopique	système solaire (année)	rivière (mètre)	cinétique
	Macroscopique	galaxie (10^8 années)	lac (kilomètre)	fluide
<i>Biologie</i>	Microscopique	liaisons (10^{-15} seconde)	cellule (micromètre)	échanges moléculaires
	Macroscopique	réaction chimique (heure)	organe (centimètre)	mécanique des solides

TAB. 1 – Différentes échelles de temps, d'espace et de modèle de phénomènes physiques et biologiques.

Généralement, les échelles fines sont souvent négligées dans les modèles. Cependant, il existe des domaines dans lesquels les échelles fines ont une action sur les échelles les plus grosses, et, ce faisant ne peuvent plus être négligées. Pour cette raison, il est difficile de simuler des phénomènes présentant un caractère multiéchelles avec une précision raisonnable car il faut prendre en compte les détails les plus fins des petites échelles. Les phénomènes peuvent être catégorisés suivant leur caractère multiéchelles (voir [40]) :

- Catégorie 1 : les petites échelles peuvent être négligées car elles n'influencent pas les grandes, c'est-à-dire qu'il ne s'agit pas d'un problème multiéchelles à proprement parlé ;
- Catégorie 2 : les petites échelles ont des caractéristiques spéciales comme la séparation d'échelles, la périodicité, ou l'auto-similarité ;
- Catégorie 3 : les petites échelles n'ont aucune caractéristique spéciale *a priori*.

Dans pratiquement tout phénomène physique se cache un problème multiéchelles. Quelques exemples en biologie et en physique ont été mentionnés dans le tableau TAB. 1. Ainsi, dans un contexte de propagation de polluant en milieu urbain, les échelles spatiales les plus fines (bâtiment, ruelle, etc) n'ont pas de caractéristiques particulières ou distribution particulières. Elles sont cependant très importantes pour capturer avec précision tous les phénomènes en jeu (grandes et petites échelles). Dans la suite, seuls les problèmes multiéchelles d'espaces seront considérés.

Pour comprendre les phénomènes étudiés avec un niveau de détail raisonnable, il faut faire face à l'étude des différentes structures, même les plus fines. Une analyse mathématique complète de ces problèmes est extrêmement difficile et il n'existe généralement pas de solution exacte à ceux-ci. L'absence d'expression analytique de la solution

nécessite de calculer une solution approchée à l'aide d'une méthode numérique. Une simulation numérique nous permet d'obtenir efficacement une solution proche (avec une certaine tolérance) de la solution cherchée, à l'aide de l'outil informatique. La résolution numérique directe de problèmes à plusieurs échelles est difficile même avec l'augmentation de la puissance informatique. La difficulté principale réside dans la taille du calcul, qui demande à la fois une grande capacité de mémoire et un long temps de calcul (temps CPU²). En effet, avec une méthode classique, indépendamment de l'ordinateur utilisé :

- soit le temps de calcul devient trop long si une bonne précision est exigée (calcul sur un maillage fin),
- soit le résultat n'est pas précis si un calcul rapide est demandé (calcul sur un maillage grossier).

En conséquence, il semble qu'il faille choisir entre précision (au prix d'un calcul long) ou rapidité (au prix d'une perte de précision car la description est trop grossière).

L'approche traditionnelle de tels problèmes est d'obtenir des équations empiriques pour l'échelle à laquelle le phénomène est observé en négligeant les autres échelles, et par voie de conséquence leur effets. Cette approche était nécessaire en raison des capacités informatiques restreintes (voir la courbe sur le schéma FIG. 1). En simplifiant très fortement le problème, le modèle devient simpliste et le résultat, par une méthode numérique classique, n'est correct que dans une certaine mesure, c'est-à-dire par rapport au modèle utilisé. Ces systèmes simples sont des objets d'études privilégiés. Pendant longtemps ils ont été les seuls systèmes pour lesquels il était possible de réaliser des simulations.

Or, depuis le siècle dernier, il devient possible, grâce au progrès de l'informatique, d'appréhender la complexité des problèmes étudiés. Des études de modèles complexes font alors leur apparition. En essayant de comprendre ce monde, de le prédire par des simulations, il se pose alors la question de la résolution de ces modèles. Pour étudier des problèmes multiéchelles, les modèles doivent décrire le caractère multiéchelles du phénomène étudié où les petites échelles ont des effets sur les grandes. Cependant, indépendamment de la catégorie des problèmes multiéchelles, il peut exister plusieurs types (voir [39]) de situations :

- le modèle macroscopique est connu, mais il n'est plus valable sur des régions locales où le modèle microscopique est alors utilisé, comme dans la simulation de la propagation d'une fissure qui sera traitée par la suite ;
- le modèle macroscopique n'est pas connu explicitement (ou trop cher à calculer), mais son existence est connue, c'est-à-dire qu'il existe des variables macroscopiques obéissant à un modèle macroscopique, par exemple la propagation en milieux poreux.

Pour les problèmes dont la nature multiéchelles n'est pas importante (catégorie 1), les méthodes classiques permettent d'obtenir de bons résultats. En dépit de leur immense succès, elles ont leur limitations, principalement la précision. Pour un problème dont les petites échelles ne peuvent être négligées (catégories 2 et 3), il faut prendre en compte leur effets en les résolvant. Une résolution fine n'est pas une bonne stratégie, non seulement à cause de la résolution longue et coûteuse du modèle fin très complexe, mais aussi parfois à cause du surplus d'information de moindre intérêt. A titre d'exemple, considérons la propagation d'une fissure isolée (catégorie 2) en mécanique du solide. L'échelle spatiale d'observation de cette propagation est de l'ordre de la taille des molécules pour laquelle

²Central Processing Unit.

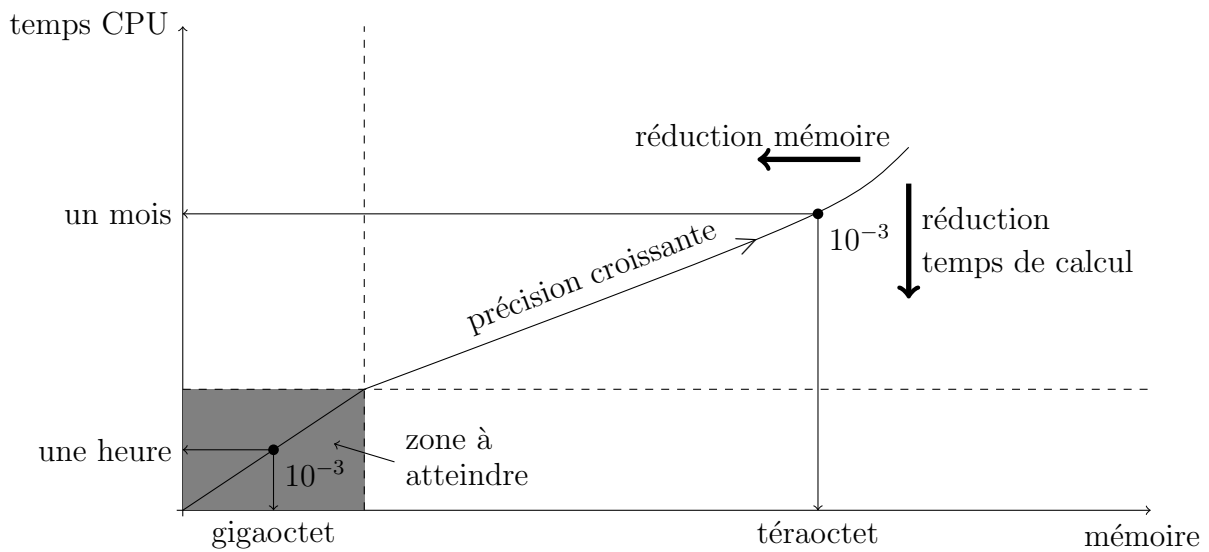


FIG. 1 – Limite de l’informatique et des méthodes. La courbe (paramétrée) représente les capacités de temps de calcul et de mémoire d’un ordinateur en fonction de la précision. Avec une méthode classique, à une précision donnée (le point à droite représente par exemple une erreur de 10^{-3}), il faut considérer un ordinateur ayant une mémoire de l’ordre du téraoctet et effectue le calcul en un mois environ. Dans la zone grisée que l’on voudrait atteindre, le point représente la même précision que le point de droite, mais avec une mémoire de l’ordre du gigaoctet (ordinateur personnel) et un calcul effectué dans l’heure. Des méthodes permettent de réduire le temps de calcul ou la mémoire; dans ce cas la courbe est déplacée soit vers le bas soit vers la gauche.

leurs interactions indiquent si la fissure se propage ou pas. La résolution de cette échelle n’a de sens que dans le voisinage (très local) de la fissure. En s’éloignant de celui-ci, cette résolution microscopique n’a pas d’intérêt. Ainsi, le concept de résolution de plusieurs échelles fait son apparition.

1.2 Les méthodes développées

Définissons le cadre dans lequel les méthodes résolvant de tels problèmes multiéchelles sont développées. Pour simplifier la présentation, nous considérerons, dans la suite, seulement deux échelles : microscopique et macroscopique. Une méthode multiéchelles doit avoir la simplicité et la rapidité d’une méthode classique sur des modèles macroscopiques aussi bien que la précision obtenue classiquement sur des modèles microscopiques. En effet, une tâche de la modélisation multiéchelles est de concevoir des méthodes de calcul combinant la résolution des modèles des deux échelles (macro-micro) qui sont beaucoup plus rapides que la résolution du modèle microscopique entier et en même temps qui donne l’information nécessaire à la précision désirée. Une méthode efficace pour un problème multiéchelles (de catégorie 2 ou 3) doit satisfaire la condition suivante :

Coût de la méthode \ll Coût d’une résolution à l’échelle microscopique.

a) Les méthodes précurseurs

Pour appréhender ces problèmes, plusieurs théories ont été développées et étudiées, notamment la théorie de l'homogénéisation³ (voir [19, 14]), ou la théorie cinétique⁴. Le but de l'homogénéisation (voir [32, 89]) est de calculer le comportement macroscopique d'un milieu hétérogène, de longueur d'échelle très petite. Il s'agit d'extraire des paramètres, dits homogénéisés, ce qui permet d'obtenir des modèles macroscopiques plus simples. En dépit des résultats satisfaisants, cette approche nous force à introduire des conditions qui ne sont pas toujours justifiées ou comprises. Les coefficients homogénéisés peuvent être calculés s'il existe une propriété sur les hétérogénéités, telle que la périodicité. Les méthodes basées sur la théorie de l'homogénéisation (voir [23, 38]) ont été appliquées avec succès afin de déterminer les propriétés efficaces de matériaux hétérogènes. Cependant, les hypothèses restrictives limitent généralement leur degré d'application (voir [19, 67]).

Du point de vue des méthodes numériques, des idées multiéchelles sont utilisées dans les méthodes telles que la méthode multigrille (en V-cycle ou W-cycle; voir [25, 100]), l'homogénéisation basée sur le multigrille (voir [72, 80]) ou les méthodes d'homogénéisation numérique basées sur les ondellettes (voir [26, 35]). Ces méthodes tentent de réduire le temps de calcul ou la mémoire, ce qui est représenté par des flèches sur le schéma FIG. 1. Par exemple, la méthode multipôle rapide (voir [56, 63]), ou le raffinement adaptatif de maillage (voir [88, 101]) résolvent l'échelle microscopique localement (là où il est nécessaire de raffiner). Les méthodes de décomposition de domaines (voir [98]) sont des techniques puissantes pour la résolution de problèmes multiphysiques et permettent de réduire la mémoire nécessaire lors du calcul. Cependant, le coût des itérations, garantissant la convergence sous des hypothèses adéquates, peut être important, en particulier pour des problèmes multiéchelles.

Toutes ces approches ont prouvé leur efficacité dans de nombreux contextes. Néanmoins, elles nécessitent une résolution du modèle le plus fin : leur objectif est de résoudre les détails des solutions du modèle microscopique. Il en résulte que leur coût est généralement du même ordre que celui du solveur microscopique entier si l'ensemble du domaine est sous l'influence d'échelles fines. Elles sont connues pour être valables pour des échelles limitées à cause du temps de calcul ou du besoin en mémoire trop grands.

b) Méthodes multiéchelles

Présentons quelques unes des nombreuses méthodes dites multiéchelles. La différence avec les méthodes précurseurs est que leur objectif est de capturer le comportement macroscopique du système avec un coût inférieur au solveur microscopique entier. En couplant les modèles macroscopiques et microscopiques, l'avantage est de bénéficier de la simplicité et la rapidité des modèles macroscopiques aussi bien que la précision des modèles microscopiques, ce qui permet d'atteindre la "zone à atteindre" dans le schéma FIG. 1. Différentes stratégies dans les méthodes multiéchelles ont été développées :

- Stratégie "top-down" : le problème du modèle le plus grossier (niveau macro) est

³C'est une version rigoureuse de la moyennisation. Elle est encore en cours de développement (voir [51, 52]).

⁴L'homogénéisation étudie des problèmes à plusieurs échelles d'espace et la théorie cinétique à plusieurs échelles de modèles.

résolu, puis, grâce à la solution macroscopique, les modèles sur des niveaux de plus en plus fins sont résolus jusqu'à arriver à la précision souhaitée (ou autorisée).

- **Stratégie "bottom-up"** : le problème au niveau microscopique est résolu localement en remontant l'information (entière ou la partie nécessaire) du niveau le plus fin au niveau plus grossier globalement. Seul le modèle sur l'échelle macroscopique est résolu.

Pour un problème donné, une seule des deux stratégies est souvent préférable en terme d'efficacité et de précision. Des approches ayant pour but de créer un environnement d'étude de problèmes multiéchelles ont été développés. Citons Heterogeneous Multiscale Method (HMM, voir [39]) qui suit une stratégie "top-down" et equation-free (voir [68, 69]) qui suit une stratégie "bottom-up".

Stratégie "top-down". Dans la stratégie "top-down" le point de départ est un modèle macroscopique incomplet, équipé d'un modèle microscopique en supplément. Le modèle macroscopique prend en compte le mieux possible notre connaissance des processus macroscopiques; une procédure est ensuite utilisée pour estimer les données numériques manquantes à partir du modèle microscopique. La méthode HMM s'intéresse au comportement macroscopique d'un problème pour lequel le modèle est connu seulement en partie ou est valide seulement sur une partie du domaine physique (par exemple dû à la présence de défauts ou singularités localisés). L'idée principale de cette approche est de résoudre le modèle microscopique sur de petites régions localisées autour de points de quadrature utilisés lors d'intégrations numériques. La méthode HMM a été étudiée dans la littérature (voir [2, 3, 41, 78]) pour les applications aux équations elliptiques. La méthode "multilevel" (voir [48, 47]) a elle aussi une stratégie "top-down". L'idée est de résoudre le problème à des niveaux de plus en plus fins pour atteindre la précision souhaitée. Ces approches prétendent résoudre des équations macroscopiques basées sur l'information des petites régions localisées et couvrir un grand nombre d'applications. Or, ceci n'est possible seulement que sous certaines conditions :

1. il ne faut pas espérer que la solution soit, de fait, une solution à l'échelle fine : elle n'est représentative que d'un comportement grossier et ne porte pas les détails les plus fins ;
2. il faut exploiter les caractéristiques spéciales⁵ du problème micro, telle que la séparation d'échelles ; il s'agit d'un problème⁶ de catégorie 2.

Stratégie "bottom-up". Les méthodes multiéchelles avec une stratégie "bottom-up", d'un autre côté, tentent de trouver une sous-grille fine capturant les effets des petites échelles en évitant un coût de calcul trop important. Ces méthodes sont aussi appelées méthodes "subgrid" : elles approchent les aspects les plus fins du problème en incorporant l'information à l'intérieur de chaque élément grossier. Par exemple, la méthode des éléments finis multiéchelles (MsFEM, voir [60]) a une stratégie "bottom-up". Il existe des variantes de MsFEM : MsFVM ("multiscale finite volume method", voir [73]), MsMFEM ("multiscale mixed finite element method", voir [29]), MsFVEM ("multiscale finite volume element method", voir [59]), DG-MsFEM ("discontinuous Galerkin multiscale finite

⁵Les caractéristiques spéciales permettent de simplifier le modèle.

⁶Dans le cas des problèmes de catégorie 2, il est possible de capturer des comportements à grande échelle de la solution.

element method”, voir [44]). Le concept de ces méthodes est le couplage de fonctions de base multiéchelles via des formulations variationnelles. L’idée d’utiliser des fonctions de base multiéchelles apparaît également dans les méthodes ”free bubbles” (voir [27, 92]). Dans ces méthodes multiéchelles, l’information à l’échelle microscopique est obtenue par la simulation. Les équations à l’échelle macroscopique ne sont généralement pas exprimées analytiquement mais plutôt formées et résolues numériquement. La méthode des éléments finis étendus (XFEM, voir [79]) a aussi une stratégie ”bottom-up”. L’idée est d’enrichir la base élément fini par une fonction contenant les singularités du problème. Récemment, d’autres méthodes numériques multiéchelles, telles que les méthodes multiéchelles variationnelles (voir [66, 65, 66]), les méthodes éléments finis à deux échelles (voir [76]) pour des microstructures périodiques, l’approche sous-grille conservative à deux échelles (voir [8, 9]), et les méthodes multiéchelles mortar (voir [86, 11]) ont été proposées.

Les méthodes multiéchelles présentées ici sont des méthodes qui capturent les effets des petites échelles aux grandes échelles, sans toutefois nécessiter la résolution de toutes les caractéristiques des petites échelles. Elles permettent une bonne résolution de problèmes de catégorie 2. Ainsi, pour résoudre des problèmes de catégorie 3, il semble plus raisonnable d’utiliser une stratégie de type bottom-up. Nous détaillons alors la méthode MsFEM par la suite.

c) La méthode des éléments finis multiéchelles (MsFEM)

Cette méthode, conçue par Hou (voir [59]) pour étudier des matériaux composites et des milieux poreux (problème elliptique à coefficients fortement oscillants), est basée sur la stratégie ”bottom-up”. Son objectif est de capturer la structure multiéchelles de la solution via des fonctions de base locales. Ces dernières contiennent l’information essentielle de petites échelles. L’idée principale de MsFEM provient d’un travail de Babuska et Osborn (voir [18]). L’utilisation de fonctions de base oscillantes permet de capturer l’information à l’échelle fine. De plus, MsFEM permet de recouvrir l’information locale en s’adaptant aux caractéristiques spéciales des échelles, ce qui fait d’elle un outil puissant. Pour des problèmes dépendant du temps, comme le transport en milieux poreux, les fonctions de base sont précalculées à l’instant initial car les hétérogénéités représentant les propriétés du milieu ne changent pas ou peu, et les modèles sont résolus à l’échelle grossière à chaque pas de temps. Les problèmes locaux peuvent être décrits par un ensemble d’équations différentes des équations globales. En outre, une caractéristique principale de MsFEM est l’utilisation de la formulation variationnelle à l’échelle grossière qui permet de coupler les fonctions de base multiéchelles à travers une formulation globale pour fournir une approximation de la solution.

Lorsqu’il y a séparation des échelles, cette méthode est très similaire à HMM (appliquées aux équations elliptiques), bien qu’elle diffère sur certains détails. La méthode MsFEM diffère des méthodes de décomposition de domaines où les problèmes locaux sont résolus plusieurs fois. Toutefois, elle a des similarités conceptuelles avec certaines approches utilisant une formulation variationnelle à l’échelle grossière, par exemple, la méthode quasi-continuum⁷ (voir [71]). Une des différences entre MsFEM et les méthodes multiéchelles variationnelles est que ces dernières utilisent des termes sources dans la

⁷Cette méthode a été largement utilisée dans des applications en science des matériaux. Elle utilise une description atomistique discrète aux échelles fines.

formulation des problèmes locaux (voir [10]). De façon similaire aux méthodes utilisant l'information globale, des méthodes du type MsFEM utilisant de l'information globale limitée pour construire des fonctions de base multiéchelles sont introduites dans [1, 42, 83]. Cependant, dans le concept de MsFEM, l'information locale est directement couplée via une formulation variationnelle et ne présuppose pas une forme spécifique pour les équations grossières. Remarquons que des fonctions de base spéciales dans les méthodes éléments finis ont été utilisées plus tôt dans [16, 18]. MsFEM a des similarités avec plusieurs autres méthodes multiéchelles, particulièrement celles basées, comme elle, sur la méthode d'homogénéisation (voir par exemple [36, 99]).

Originellement, la méthode MsFEM était proposée pour des équations linéaires et cette idée a été généralisée aux problèmes non linéaires dans [43]. Bien qu'elle ait surtout été appliquée à des problèmes multiéchelles de catégorie 2, elle paraît potentiellement adaptable à des contextes de catégorie 3. C'est pourquoi elle est à la base de nos études.

2 Présentation des travaux

2.1 Problématique de la thèse

Les problèmes multiéchelles étudiés dans la littérature possèdent généralement des caractéristiques spéciales à l'échelle microscopique. Ceci étant rarement le cas dans la nature, nous nous intéressons, dans cette thèse, aux problèmes multiéchelles les plus généraux, que nous avons appelés catégorie 3 dans la section précédente. Toutes les échelles sont alors à prendre en compte. Tout comme Engquist, nous nous demandons si de nouvelles idées⁸ issues de la modélisation multiéchelles peuvent être utilisées afin de développer des techniques permettant de traiter des problèmes multiéchelles plus généraux. Néanmoins, nous supposons que les hétérogénéités des problèmes varient peu à l'échelle de la durée de simulation. Dans ce but, nous développons une méthodologie dédiée à la résolution de ce type de problèmes et nous l'appliquons à plusieurs contextes multiéchelles, à savoir : la propagation d'un polluant en milieu urbain, la propagation d'une fissure, la simulation d'un réseau électrique et celle d'un réseau de distribution de biens. L'importance des simulations pour ces problèmes réside dans la prise de décision. Dans le cas où des expériences ne peuvent pas être réalisées, un grand nombre de simulations permet de combler partiellement ce manque d'expériences. Lorsqu'un calcul en temps réel (temps CPU très petit devant le temps physique) n'est pas réalisable, il faut cependant être capable de simuler ce grand nombre de situations dans un temps raisonnable (ordre de la journée). Ces simulations diffèrent par les conditions aux limites, les conditions initiales, les termes sources, etc. Eventuellement quelques changements locaux des hétérogénéités peuvent avoir lieu. Une méthode correspondant à ces critères doit donc fournir une solution assez rapidement, en n'étant pas trop gourmande en mémoire, afin de réaliser de nombreuses simulations.

Ainsi, la méthode des éléments finis multiéchelles (MsFEM) développée par Hou présente des avantages pour ce type d'étude. En effet, même si le calcul des fonctions de base est assez long⁹, les fonctions de base sont indépendantes entre elles. Leur construc-

⁸"Can these new ideas in multiscale modeling be used to develop techniques that can handle more general problems?" publiée en 2007 dans [40].

⁹Par exemple en 2D le coût des opérations est deux fois plus long que celui des éléments finis classique.

tion peut donc être effectuée en parallèle (voir [60] pour plus de détails), et cela réduit significativement leur coût. Celui-ci peut être encore réduit dans le cas d'un problème avec séparation d'échelles. En réutilisant les fonctions de base, la répétition de simulations est peu coûteuse. En effet, cette répétition réduit d'autant leur coût relatif en comparaison au coût total, et le calcul à l'échelle grossière est peu coûteux.

En s'inspirant de cette méthode, l'objectif est de formaliser une méthodologie multi-échelles pour des problèmes de catégorie 3 et de l'appliquer à des contextes variés représentatifs de problèmes complexes inspirés de situations réelles. Plus précisément, nous proposons :

- la mise en place de la méthodologie s'appliquant à des problèmes multiéchelles complexes représentatifs de situations réelles ;
- le développement de méthodes numériques adaptées (aux différents contextes) et fondées sur les mêmes paradigmes que la méthodologie multiéchelles, une validation numérique de ces méthodes, et, en conséquence, de l'approche globale de la méthodologie multiéchelles.

Pour cela, la thèse s'articule de la façon suivante : d'abord nous construisons une méthodologie multiéchelles, puis, pour différents domaines d'applications, nous développons et validons des méthodes bâties sur cette méthodologie.

2.2 Méthodologie multiéchelles fondée sur les éléments finis multiéchelles

L'intérêt de ce premier chapitre est de poser les fondations d'une méthodologie générale. Nous nous inspirons de la méthode MsFEM de Hou (pour plus de détails voir [44] et section 1.2c), conçue pour des milieux poreux et adaptée à de nombreux contextes, dont l'idée est d'effectuer la résolution en deux étapes :

1. des fonctions de base, dites multiéchelles, sont calculées localement sur un maillage suffisamment fin pour résoudre les détails des petites échelles de taille ε ;
2. ensuite, la solution vérifie une équation macroscopique dont les coefficients dépendent des fonctions de base multiéchelles. Elle est résolue par une méthode de type éléments finis.

Le nombre de fonctions de base est très inférieur au nombre de degrés de liberté nécessaire pour résoudre l'échelle ε , la deuxième étape est, par conséquent, peu coûteuse. Grâce au calcul des fonctions de base multiéchelles qui prennent en compte les détails, ce type de méthode permet d'effectuer des calculs plus complexes qu'une méthode numérique classique avec un faible temps CPU et peu de besoin en mémoire.

Puisque cette méthode est basée sur la théorie de l'homogénéisation (voir [15]), nous rappelons tout d'abord quelques résultats importants de cette théorie. Nous détaillons le cas de la dimension un, puis distinguons les cas d'un milieu périodique et hétérogène général. Le but de l'homogénéisation est de remplacer un milieu très hétérogène par un milieu homogène. Les quantités d'homogénéisation permettent d'améliorer l'analyse asymptotique quand la taille de l'hétérogénéité ε tend vers zéro. Nous étudions la situation classique où le corps est décrit dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ par l'équation suivante

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $A^\varepsilon \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega) = \{A \in (L^\infty(\Omega))^{d \times d}, \alpha \xi^t \cdot \xi \leq \xi^t A \xi \leq \beta \xi^t \cdot \xi \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d\}$, avec ξ^t le transposé du vecteur ξ . L'homogénéisation consiste à chercher une équation du même type que celle de u^ε pour laquelle u^* , dans $H_0^1(\Omega)$, serait solution faible. Si la micro-structure est périodique, la théorie de l'homogénéisation donne une description macroscopique de la limite quand la petite longueur d'échelle ε tend vers zéro. La limite, quand ε tend vers zéro, est la solution d'un problème, dit homogénéisé, plus simple. Il existe différentes méthodes comme le développement asymptotique à deux échelles pour un milieu périodique ou la H-(ou G-)convergence pour un milieu général.

La solution étant une moyenne, l'influence des petites échelles des problèmes multi-échelles n'apparaît pas. Pour cela, en s'inspirant des fonctions tests oscillantes de Tartar (voir [97]), le but de l'homogénéisation numérique est d'obtenir des fluctuations microscopiques sur la solution homogénéisée à l'aide de fonctions de base oscillantes. La méthode MsFEM est une méthode d'homogénéisation numérique où les fonctions de base multiéchelles, contenant l'information microscopique, sont des solutions locales du problème hétérogène et fournissent les coefficients de l'équation homogénéisée. L'équation homogénéisée est ensuite résolue par la méthode des éléments finis en remplaçant les fonctions éléments finis \mathbb{Q}_1 par les fonctions de base multiéchelles. Dans le cas où les conditions aux limites des fonctions de base sont linéaires, nous notons la méthode MsFEM-L. Ces conditions étant artificielles, elles ne reflètent pas le caractère hétérogène du problème. Ceci génère des artefacts numériques. Hou a proposé une amélioration, appelée *oversampling* (voir [60]). Nous notons cette méthode MsFEM-OS.

Nous dégageons ensuite des idées pour une méthodologie multiéchelles générale englobant MsFEM. Nous souhaitons trouver une solution approchée u^ε dans X^ε de u dans X , avec X^ε un espace fonctionnel de (grande) dimension finie. Le problème approché s'écrit $\mathbf{L}^\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon$. Le défi est de se ramener à un problème dans un espace de plus petite dimension, indépendante de ε , tout en préservant les informations de taille ε . L'idée est donc de choisir un sous-espace X^0 de petite dimension, engendré par des profils de solutions $\{\Phi^i\}_i$, qui contiennent les informations à l'échelle ε . En décomposant le domaine spatial $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$ à l'aide d'un maillage composé de cellules, notées K , de taille H et l'intervalle de temps par des intervalles notés $[t_n; t_{n+1}]$, une méthode multiéchelles cherche successivement :

- la base multiéchelles de X^0 dont les éléments Φ^i sont solutions de :

$$\begin{cases} \mathbf{L}^\Phi \Phi^i = 0 & \text{dans } [t_n; t_{n+1}] \times K, \\ \Phi^i|_{\partial K}(t, x) = g_K^i(t, x) & \text{sur } [t_n; t_{n+1}] \times \partial K, \\ \Phi^i|_{t=t_n} = g_K^0 & \text{dans } \{t_n\} \times K, \end{cases}$$

où les conditions aux limites g_K^i , ainsi que les conditions initiales g_K^0 sont à choisir ;

- l'inconnue u^0 comme solution du problème macroscopique :

$$\mathbf{L}^0 u^0 = f^0.$$

Généralement les coefficients de \mathbf{L}^Φ sont ceux de \mathbf{L}^ε restreint à $[t_n; t_{n+1}] \times K$. La condition initiale g_K^0 et les conditions aux limites g_K^i sont classiquement définis comme éléments d'un espace X_H de même dimension que celle de X^0 , mais ne prenant pas en compte les hétérogénéités du problème, elles peuvent par exemple être égales des fonctions de base élément fini sur le maillage de taille H . Pour calculer les coefficients de l'opérateur (linéaire) \mathbf{L}^0 , le terme $\mathbf{L}^\varepsilon u^\varepsilon$ est projeté sur l'espace X^0 engendré par la base multiéchelles.

Afin de récupérer l'information à l'échelle microscopique, la solution $u^0 = \sum_i u_i \Phi^i$ dans X^0 est ensuite reconstruite dans X^ε . Pour un milieu périodique, il est possible de le faire en cherchant le développement asymptotique de u^ε dont u^0 est le premier terme. Pour un milieu non périodique, cette reconstruction peut s'écrire :

$$u^\varepsilon = \sum_i u_i \left(\sum_\alpha \Phi_\alpha^i \psi^\alpha \right),$$

où ψ^α désigne un élément de la base de l'espace X^ε (de grande dimension), par exemple une fonction élément fini Q_1 sur un maillage fin (maillage sur lequel les fonctions Φ^i sont calculées) de taille h . La méthodologie, inspirée du point de vue MsFEM peut être utilisée pour des problèmes très généraux (milieu continu, discret, hétérogénéités non périodiques, etc.). Dans cette méthodologie, MsFEM est décomposée en deux étapes :

1. des solutions modèles (fonctions de base multiéchelles), sont calculées localement sur un maillage suffisamment fin pour résoudre les détails de taille ε ;
2. ensuite, la solution est cherchée dans la base des solutions modèles.

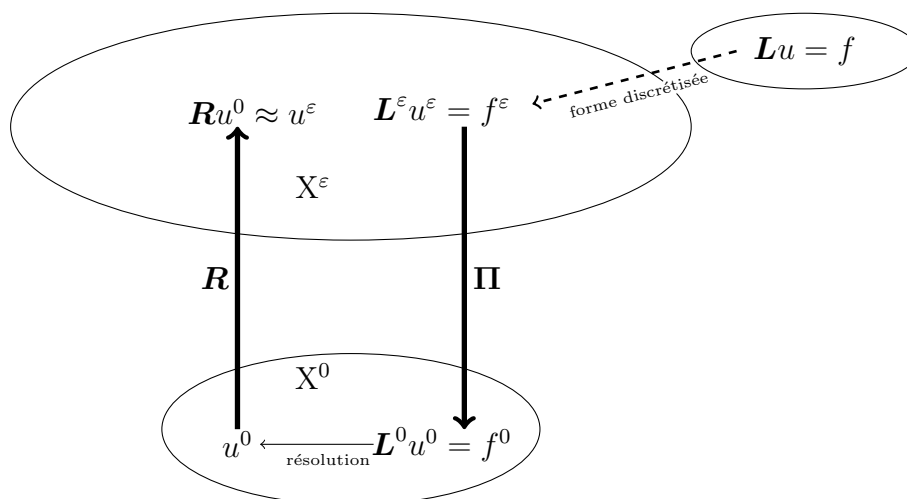


FIG. 2 – Schéma de la méthodologie multiéchelles. Le point de départ est un problème discrétisé de $Lu = f$, dans X^ε (de grande dimension). Il est projeté par l'opérateur Π . Le problème obtenu dans un espace X^0 de petite dimension est ensuite résolu, puis l'opérateur R permet de reconstruire la solution sur l'espace X^ε .

Cette méthodologie est donc décrite de la façon suivante (voir le schéma FIG. 2) :

1. le problème approché $L^\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon$ est projeté par l'opérateur Π ;
2. le problème obtenu dans un espace X^0 de petite dimension est ensuite résolu ;
3. enfin, l'opérateur R permet de reconstruire la solution sur l'espace X^ε .

2.3 Méthode multiéchelles pour la simulation de fissures

Dans un premier chapitre d'application, nous nous intéressons au contexte de simulation de fissures en mécanique des solides. Une fissure est un défaut d'un matériau de

taille extrêmement petite : l'épaisseur de la fissure est négligeable devant la longueur du matériau. Cependant, son effet est non négligeable puisque la propagation de la fissure peut mener à la cassure. Il s'agit donc d'un problème multiéchelles de catégorie 2 pour une unique fissure.

La simulation d'une fissure est généralement réalisée avec succès par des méthodes de type XFEM (voir [79]), ce qui n'est plus le cas en considérant des problèmes plus complexes : beaucoup de fissures disposées non régulièrement qui se croisent, d'épaisseurs différentes, etc. Dans ce cas, le problème devient de catégorie 3. Il est alors impossible de résoudre efficacement un modèle microscopique dans tout le domaine. De plus, un des intérêts est de pouvoir réaliser de nombreuses simulations de façon rapide. Le problème étant de nature multiéchelles, ces difficultés peuvent se résoudre grâce à une méthode multiéchelles adaptée. Nous appliquons alors, à ce contexte, la méthodologie multiéchelles décrite précédemment. Nous choisissons de résoudre ce problème par une méthode de type multiéchelles : la méthode des éléments finis multiéchelles (MsFEM) développée par Hou et jamais utilisée dans ce contexte.

Pour modéliser ce problème, nous partons de l'équation stationnaire associée à l'équation du mouvement donnée par la loi fondamentale de la dynamique, et de la loi du comportement d'un milieu élastique homogène isotrope (la loi de Hooke) donnant le tenseur des contraintes :

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr}(\tilde{\sigma}) I + 2\mu \tilde{\sigma},$$

où tr est la trace, I est le tenseur identité, les coefficients λ et μ sont les coefficients de Lamé, $\tilde{\sigma}$ est le tenseur des déformations linéarisé :

$$\tilde{\sigma}_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

où u est le déplacement. Nous considérons ainsi une équation de Navier de l'élasticité pour le champ des déplacements du matériau. En se restreignant au cas de la dimension deux et à un chargement monodimensionnel f , puis en négligeant le rotationnel de u , nous obtenons une équation elliptique du second ordre à résoudre :

$$-\nabla \cdot \left(\nu \vec{\nabla} u \right) = f,$$

avec u le déplacement (dans la même direction que f) et

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{en dehors de la fissure,} \\ \delta & \text{à l'intérieur de la fissure,} \end{cases}$$

où δ est un paramètre très petit ($\delta \ll 1$).

Les fonctions de base multiéchelles (solutions modèles) sont solutions de l'équation précédente sur une cellule grossière et soumises aux conditions aux limites :

1. linéaires pour MsFEM-L ;
2. égale à une combinaison linéaire de fonctions de base intermédiaires pour MsFEM-OS.

Les conditions aux limites artificielles linéaires sont imposées et ne sont pas données par la physique. Comme l'a déjà observé Hou (voir [59]), elles génèrent des artéfacts numériques sur la solution approchée. Le principe de MsFEM-OS est d'éloigner les conditions aux

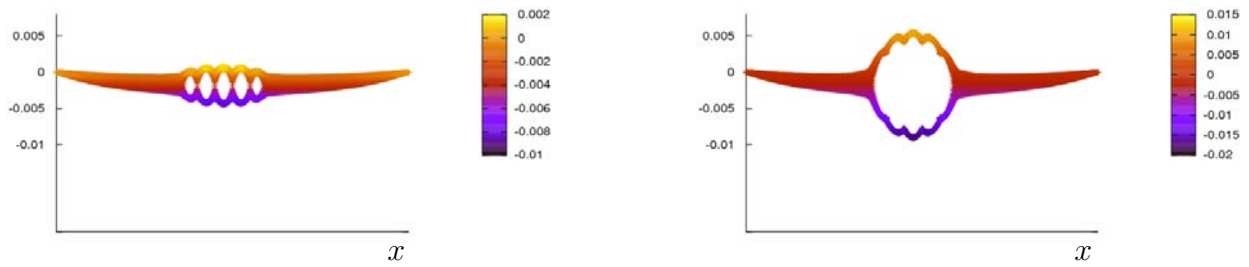


FIG. 3 – Solutions numériques pour la simulation d’une fissure ($y \in [0.47375; 0.475]$) observées sur la tranche ($y \in [0.46; 0.49]$). A gauche : avec MsFEM-L — A droite : avec MsFEM-OS.

limites artificielles afin de limiter leur influence. Des fonctions de base intermédiaires φ^m sont calculées comme solutions de l’équation localement sur un volume de contrôle \tilde{K} , plus grand que K (voir FIG. 4, page 16). Pour chaque fonction Φ^i à déterminer dans K , il y a autant de sommets de K que de fonctions de base intermédiaires associées à calculer. La fonction multiéchelles Φ^i est ensuite construite comme une combinaison linéaire des fonctions φ^m vérifiant la condition¹⁰ :

$$\Phi^i(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j}.$$

Des simulations numériques, à l’aide de notre code 2D en maillage cartésien, montrent la pertinence de cette nouvelle approche au contexte. Elles sont réalisées avec plusieurs chargements (linéaire et oscillant), des conditions aux limites de Dirichlet homogènes (traction pure) et de Neumann (déplacement pur). Les erreurs relatives en normes L^1 , L^2 et L^∞ sont plus petites lorsque les fonctions de base multiéchelles sont calculées à l’aide de MsFEM-OS. Les solutions obtenues par MsFEM-L et MsFEM-OS sont nettement différentes, comme le montre une coupe autour de la fissure sur la figure FIG. 3. En outre, sur une coupe 1D, nous observons que l’influence de la fissure sur les bords des cellules du maillage a disparu avec MsFEM-L, alors que ce n’est pas le cas dans une coupe au centre d’une cellule. L’apport de MsFEM-OS, donc de l’influence des conditions aux limites dans le calcul des fonctions de base, est non négligeable. Cette influence est observée en visualisant les fonctions de base. Les résultats confirment les améliorations apportées en éloignant les conditions aux limites artificielles et valident l’approche multiéchelles dans ce contexte.

2.4 Etude d’un problème de diffusion en milieu urbain

Nous nous intéressons ensuite à la propagation d’un polluant en milieu urbain dans les deux chapitres suivants : le premier concerne l’étude théorique et le second l’étude numérique en dimension deux. En particulier, dans le cadre d’un projet avec la direction générale de l’armement (DGA) de Grammat, nous nous sommes focalisés sur la capacité

¹⁰En maillage cartésien, nous contruisons quatre fonctions φ^m et la fonction Φ^i vérifie quatre conditions.

à simuler en temps réel une situation de crise dans l'hypothèse d'un attentat terroriste utilisant une bombe sale ou d'un accident industriel. Le milieu urbain est un milieu hétérogène, non nécessairement périodique. Ses hétérogénéités sont les obstacles (les petites échelles) qui influencent la diffusion d'un polluant. Lors d'une situation de crise, le but est de calculer en temps réel et de manière précise l'évolution de la concentration d'un polluant dans la zone urbaine. La précision est fondamentale, puisque des erreurs, même locales peuvent mener à de mauvaises décisions, entraînant de graves conséquences (morts, intoxications). Cependant, il est inenvisageable de réaliser des simulations sur un maillage fin : un calcul en temps réel contraint la résolution à une échelle très grossière. Il s'agit d'un problème multiéchelles de catégorie 3, car les obstacles sont fixes, non périodiques et de différentes tailles.

Les études réalisées jusqu'à présent concernent une petite zone urbaine (voir [87, 20]). Pour aborder ce problème, nous appliquons la méthodologie qui permet de résoudre l'échelle fine en temps réel. En effet, l'échelle fine est résolue grâce à la précision des solutions modèles (choix de l'espace X^0) et le calcul est réalisé en temps réel car la première étape (construction de X^0) est de fait un précalcul et la résolution sur X^0 est rapide. En particulier, nous utilisons la méthode des éléments finis multiéchelles. Nous remarquons que MsFEM-OS ne peut être utilisée en l'état dans ce contexte, dû à la présence d'obstacles. En conséquence, nous proposons plusieurs techniques, inspirées de MsFEM-OS, pour améliorer les conditions aux limites linéaires, donc le choix de l'espace X^0 , au milieu urbain. De plus, nous utilisons la méthode de pénalisation (voir [7]) qui nous permet de prendre en compte les obstacles de la ville. Il est alors possible de s'affranchir de l'utilisation d'un maillage non structuré qui devrait suivre la géométrie de la ville ; maillage difficile à construire et à manipuler, en particulier en 3D et dans une situation en temps réel. Celle-ci est alors couplée avec la méthode multiéchelles et simplifie le problème à résoudre. Ce couplage permet aussi d'adapter la méthode MsFEM-OS au contexte.

La modélisation mathématique de ce problème peut se faire de façon simplifiée (voir [58]) par une équation aux dérivées partielles instationnaire de convection-diffusion sur un domaine noté Ω_ε (domaine à trous ne contenant pas les obstacles). Nous nous intéressons en particulier au cas de la résolution du problème de diffusion suivant :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nu^\varepsilon \vec{\nabla} u^\varepsilon) = f^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = g^\varepsilon & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

où u^ε est la concentration, f^ε est la source (ou le puit), g^ε est la condition aux limites et ν^ε est la diffusion. Ceci permet de voir comment est pris en compte la morphologie de la ville. La condition aux limites g^ε est prise nulle au bord des obstacles afin d'éviter la pénétration à l'intérieur d'eux. Nous étudions le couplage de MsFEM avec une méthode de pénalisation, agrémenté des nouvelles techniques pour adapter les conditions aux limites. La méthode de pénalisation consiste en l'ajout, dans l'équation de diffusion, d'un terme d'absorption σu , où σ , appelée fonction de pénalisation, est non nulle à l'intérieur des obstacles. La nouvelle équation étant définie sur le domaine Ω incluant les obstacles, les coefficients sont à définir à l'intérieur de ceux-ci (dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$). Pour u défini dans Ω , notre modèle devient :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) + \sigma u = f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec les coefficients suivants :

$$\nu = \begin{cases} \nu^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\nu^\varepsilon}{\delta} & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad f = \begin{cases} f^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad \sigma = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\nu^\varepsilon}{\delta L_A^2} & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

où L_A désigne la longueur caractéristique d'absorption et δ est un paramètre. La condition aux limites est définie par $g = g|_{\partial\Omega}^\varepsilon$. L'analyse montre que ce terme d'absorption σu garantit la nullité de la solution au bord des obstacles, puisque

$$u \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{sur } \partial(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon).$$

En outre, en dimension un, nous obtenons au bord d'un obstacle $u = \mathcal{O}(\delta)$. Ce nouveau modèle est une bonne approximation du premier. L'étape suivante est le calcul des fonctions de base multiéchelles, solutions du problème précédent dans une zone locale. Autrement dit, la fonction Φ^i , centrée au nœud (grossier) \mathbf{x}_i , est solution de :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} \Phi^i) + \sigma \Phi^i = 0 & \text{dans } K, \\ \Phi^i|_{\partial K} = g_K & \text{sur } \partial K, \end{cases}$$

où K est une cellule grossière dont \mathbf{x}_i est un sommet, et g_K est la donnée des conditions aux limites.

Il reste ensuite à déterminer les paramètres L_A, δ de la méthode de pénalisation et les conditions aux limites g_K pour les fonctions de base multiéchelles. La valeur de L_A est une donnée physique et est de l'ordre de ε . Une analyse numérique nous permet de déterminer le paramètre de pénalisation δ : il est de l'ordre de la taille h du maillage fin (maillage sur lequel les fonctions de base sont calculées). Les fonctions de base sont calculées en utilisant MsFEM-L, MsFEM-OS, mais aussi deux nouvelles idées d'améliorations des conditions aux limites :

1. En s'inspirant de MsFEM-OS, l'idée est d'utiliser une matrice toujours inversible lors du passage des fonctions de base intermédiaires aux fonctions de base multiéchelles. Pour cela, la matrice A donnant la combinaison linéaire des fonctions de base intermédiaires telle que $\Phi^i(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j}$ est remplacée par \hat{A} . Cette nouvelle matrice est définie par

$$\hat{A}_{i,j} = \widetilde{\Psi}^j(\mathbf{x}_i),$$

où $\widetilde{\Psi}^j$ est la fonction \mathbb{Q}_1 dans \widetilde{K} centrée au sommet $\widetilde{\mathbf{x}}_j$ de \widetilde{K} (voir figure FIG. 4(a), page 16). Dans le cas où les coefficients de l'équation sont constants dans K , \hat{A} est égale à A . Le calcul des fonctions de base intermédiaires est identique à celui de MsFEM-OS et Φ^i est alors une fonction \mathbb{Q}_1 dans K . Cette technique est notée MsFEM-Hcentree.

2. Une autre idée pour le calcul des fonctions de base multiéchelles est de remplacer la combinaison linéaire des fonctions de base intermédiaires par une homothétie. Une seule fonction de base intermédiaire est alors nécessaire ici. Cette homothétie est définie, pour tout x dans K , par :

$$\Phi^i(x) = \frac{\varphi^i(x)}{\widetilde{\Psi}^i(\mathbf{x}_i)}.$$

De plus, le volume \tilde{K} est construit comme sur la figure FIG. 4(b) (page 16), en éloignant seulement les arêtes opposées au nœud \mathbf{x}_i afin d'obtenir à une constante multiplicative près, $\Phi^i(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j}$. Il s'agit encore de retrouver pour Φ^i une fonction \mathbb{Q}_1 dans K en l'absence d'obstacle. Cette technique par homothétie est notée MsFEM-H.

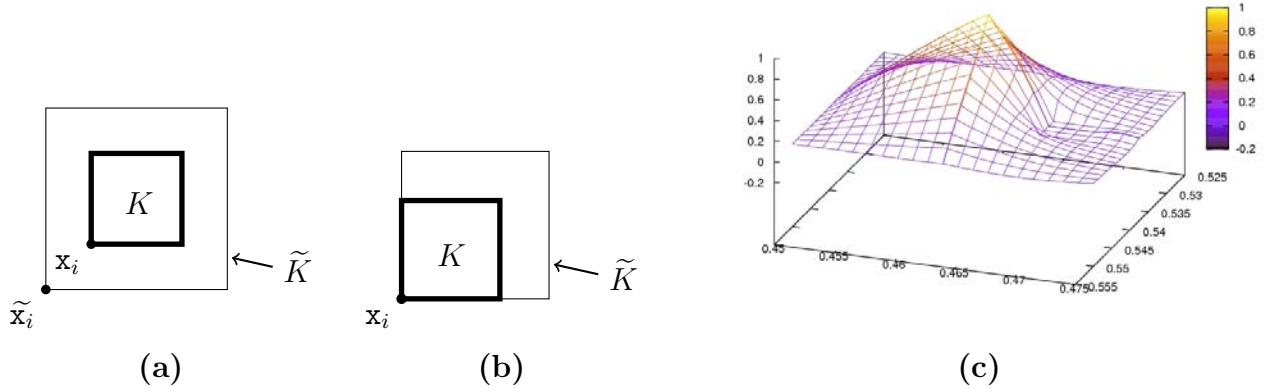


FIG. 4 – Calcul des fonctions de base : — (a) Construction du volume \tilde{K} pour MsFEM-OS et MsFEM-Hcentree — (b) Construction du volume \tilde{K} pour MsFEM-H — (c) Exemple de fonction de base obtenue avec MsFEM-OS où l'obstacle est bien pris en compte.

Nous montrons ensuite que la méthode converge lorsque la taille du maillage diminue. Soit le problème en dimension un :

$$\text{trouver } u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \begin{cases} \mathbf{L}u = -(\nu u)' + \sigma u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

où la fonction $f \in L^2(\Omega)$ est donnée. Nous supposons que les coefficients ν et σ appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et vérifient les conditions $\nu(x) \geq \nu_{\min} > 0$ et $\sigma(x) \geq \sigma_{\min} \geq 0$ pour tout x dans Ω . Notons H la taille du maillage grossier.

Théorème 1. *La solution de Galerkin u^ε vérifie l'estimation d'erreur*

$$\|u - u^\varepsilon\|_E \leq \frac{1}{\pi\sqrt{\nu_{\min}}} H \|f\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{v_h \in X^\varepsilon} \|u - v_h\|_E,$$

où $\|\cdot\|_E$ désigne la norme énergie dans $H_0^1(\Omega)$, définie par $\|v\|_E^2 = \int_\Omega \nu (v')^2 dx + \int_\Omega \sigma v^2 dx$.

Nous donnons également quelques éléments pour résoudre l'équation de convection-diffusion instationnaire dans le contexte de la propagation d'un polluant en milieu urbain :

- l'ajout du terme temporel se fait de manière relativement facile : il suffit alors de discrétiser avec un schéma d'Euler, ou de Crank-Nicolson ;

- l'ajout de la convection est plus délicat :
 - une convection dominante entraîne un problème de stabilité de la méthode numérique : des techniques de stabilisation (voir [64]) sont alors nécessaires,
 - les valeurs du champ de convection ne sont connues qu'en peu de points (stations météo), il faut donc se donner un modèle afin de le calculer intégralement. Ceci peut se faire en découplant les composantes et en utilisant les mêmes fonctions de base que précédemment. Ce faisant, le champ de convection n'est pas qualitativement représentatif du vent ; il n'y a, par exemple, pas de contournement des obstacles. Pour coupler les composantes du champ de convection, il faut ajouter une condition supplémentaire comme la divergence nulle, ce qui demande la construction de fonctions de base multiéchelles à divergence nulle.

Enfin, une validation numérique en deux dimensions (spatiales) du couplage MsFEM-Pénalisation sur l'équation elliptique dans un milieu urbain est réalisée. Ce couplage est testé tout d'abord dans des cas académiques ; avec des coefficients oscillants périodiquement, puis des coefficients représentant une ville générée aléatoirement. Ces tests fournissent une étude exhaustive du couplage pour différentes méthodes de construction de l'espace X^0 (calcul des fonctions de base) : choix de détermination des conditions aux limites et choix des opérateurs problème local, ainsi que le choix des opérateurs du problème global (résolution dans X^0). Une solution de référence est calculée par la méthode des éléments finis \mathbb{Q}_1 pour chaque test sur le maillage le plus fin. Pour ces tests, la comparaison des différentes solutions est réalisée en :

1. calculant les erreurs relatives E_p et F_p définies par :

$$E_p(u^{\text{num}}) = \frac{\|u^{\text{num}} - u^{\text{ref}}\|_p}{\|u^{\text{ref}}\|_p}, \quad F_p(u_H^{\text{num}}) = \frac{\|u_H^{\text{num}} - u_{H/2}^{\text{num}}\|_p}{\|u_{H/2}^{\text{num}}\|_p},$$

où u_H^{num} est la solution numérique MsFEM calculée avec un maillage grossier de taille H , $\|\cdot\|_p$ est la norme dans l'espace L^p et u^{ref} est une solution de référence¹¹ ;

2. visualisant la solution globale, sur un zoom de celle-ci, ainsi que sur une coupe 1D dans une partie du domaine.

Dans le premier test (coefficients oscillants), les résultats obtenus en utilisant MsFEM-OS et MsFEM-Hcentree sont satisfaisants, ce qui n'est pas le cas de ceux obtenus par MsFEM-H et MsFEM-L. Dans le second test (ville virtuelle), les résultats les plus satisfaisants sont obtenus avec l'utilisation de MsFEM-OS et MsFEM-H. Dans ce cas, la méthode MsFEM-Hcentree n'est plus aussi bien adaptée. Grâce au couplage, MsFEM-OS peut donc être utilisée et donne encore de meilleurs résultats que ceux obtenus avec MsFEM-L dans les deux cas tests.

Enfin, une simulation en situation est proposée sur une zone urbaine autour de l'aéroport de Toulouse-Blagnac. Elle est réalisée en utilisant les méthodes déterminées, par les tests précédents, comme étant les plus adaptées au contexte urbain, ainsi que la méthode classique MsFEM-L. Les méthodes MsFEM-L et MsFEM-H sont utilisées avec et sans le couplage. Les résultats obtenus, sur la figure FIG. 5 par exemple, montrent que ces calculs sont réalisables sur un cas réel. De plus, nous observons qu'en utilisant MsFEM-H (avec ou sans pénalisation) les résultats restent satisfaisants. Il en est de même de ceux obtenus par MsFEM-OS avec pénalisation.

¹¹Cette solution est calculée à l'aide des éléments finis standard sur le maillage fin.

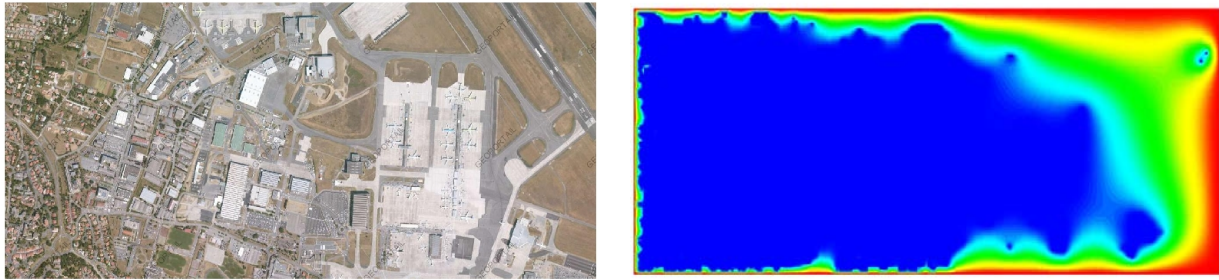


FIG. 5 – Simulation de la diffusion d’un polluant dans une zone urbaine réelle. — A gauche : la photo de l’aéroport. — A droite : la solution calculée par MsFEM-H avec pénalisation sur le maillage grossier 60×32 . Les détails les plus fins, de l’ordre du mètre carré, sont résolus par la méthode numérique, bien que les mailles grossières aient une taille de 23 mètres sur 20 mètres.

Ces simulations révèlent l’apport de MsFEM-OS lorsque la méthode est couplée avec la pénalisation ainsi que l’intérêt de MsFEM-H dans un contexte urbain. En outre, le temps de calcul nécessaire avec les méthodes multiéchelles utilisées dans ce chapitre est négligeable par rapport au temps nécessaire pour un calcul avec la méthode des éléments finis \mathbb{Q}_1 sur le maillage le plus fin : le calcul en temps réel est donc réalisable par ces méthodes multiéchelles.

2.5 Méthode multiéchelles pour un modèle discret de réseaux électriques

Nous nous intéressons ensuite à des problèmes multiéchelles dans des milieux discrets. Un exemple de problème multiéchelles de catégorie 3 dans un domaine discret est la simulation d’un réseau électrique ayant de nombreux composants. L’objectif est de simuler son comportement en terme d’intensité et de tension en tout point. Il s’agit d’un problème multiéchelles où la précision en chaque point est importante. En effet, un problème en un point peut couper le courant dans tout le réseau (exemple : disjoncteur) ou encore si une connexion est changée, le comportement du courant peut être complètement modifié lui aussi. Les petites échelles ont donc une influence non négligeable sur les grandes. Un composant pouvant être relié à un nombre arbitraire de composants, ce problème est de catégorie 3.

Il s’agit alors de proposer une méthode multiéchelles basée sur la méthodologie du premier chapitre. Dans ce contexte, il n’y a pas de problème de rapidité de calcul mais plutôt de complexité du domaine, celui-ci ayant un très grand nombre de composants à traiter. Afin de réaliser un grand nombre de simulations, une méthode multiéchelles s’avère utile. A partir de la méthodologie, nous développons une méthode multiéchelles utilisable dans un domaine discret.

Le réseau est représenté par un graphe (voir [28]) composé de nœuds et de branches connectant les nœuds entre eux. Ce graphe est orienté car le courant ne passe que dans un sens. Les lois de Kirchoff (de tension et de courant) et la loi d’Ohms généralisée four-

nissent les équations régissant le comportement du réseau (voir [85]). Elles s'interprètent en un système linéaire, d'inconnue le vecteur V des potentiels aux nœuds, et de source AJ :

$$YV = AJ,$$

avec A la matrice indiquant le sens du courant, J le vecteur des courants sources et Y la matrice d'admittance qui prend en compte les caractéristiques des composants. La tension s'exprime en fonction des potentiels, puis l'intensité en fonction de la tension. Nous remarquons que, comme il s'agit d'un réseau fermé (pour que le courant passe), il n'y a pas de conditions aux limites. Nous cherchons une approximation V^ε dans $X^\varepsilon = \mathbb{C}^{N^\varepsilon}$ de V , où N^ε est le nombre de nœuds du graphe. Le système linéaire que vérifie V est de la taille du réseau, donc potentiellement très grand.

Une méthode multiéchelles permet alors de réduire la taille d'un tel système en décomposant le graphe du réseau en sous-graphes. Ces sous-graphes sont reliés entre eux à l'aide de certains nœuds, appelés portes. Les solutions modèles sont calculées localement à un sous-graphe. Dans ce contexte, il s'agit de vecteurs de base multiéchelles. Le vecteur de base Φ^i est solution du système précédent restreint à un sous-graphe \mathcal{G}_k , dont \mathbf{x}_i est une de ses portes. Il est soumis aux conditions aux limites suivantes :

$$\Phi^i(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j},$$

où \mathbf{x}_j est une porte de \mathcal{G}_k . La notation $\Phi^i(\mathbf{x}_j)$ signifie la $i^{\text{ième}}$ composante dans la base canonique de X^ε , où la porte \mathbf{x}_j est en fait¹² le nœud \mathbf{x}_α . Nous cherchons ensuite V^0 dans l'espace $X^0 \subseteq \mathbb{C}^{N^0}$ (N^0 est le nombre total de portes) engendré par les vecteurs de base $\{\Phi^i\}_i$. Ce vecteur est solution du système suivant :

$$Y^0 V^0 = J^0,$$

avec $Y^0 \in \mathbb{C}^{N^0 \times N^0}$ et $J^0 = \sum_i J_i \Phi^i \in X^0$ définis par

$$Y_{i,j}^0 = \langle Y \mathbf{R}(\Phi^j), \mathbf{R}(\Phi^i) \rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon}, \quad \text{et} \quad J_i = \langle AJ, \mathbf{R}(\Phi^i) \rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon},$$

où $\mathbf{R}(\Phi^i)$ est le vecteur $\Phi^i \in X^0$ exprimé dans la base de X^ε . Lors de la troisième étape, par un changement de base, le vecteur V^0 , défini dans la base de X^0 , est exprimé dans la base de X^ε à l'aide des vecteurs de base multiéchelles :

$$V^\varepsilon = \mathbf{R}(V^0) = \sum_{i=1}^{N^0} V_i \mathbf{R}(\Phi^i) \in X^\varepsilon,$$

où les V_i sont les composantes de V^0 dans la base $\{\Phi^i\}_i$.

Grâce à une méthode multiéchelles il est possible de simuler des graphes très complexes et, par un changement de conditions de simulation, il est possible de prédire le comportement d'un grand nombre de situations en un temps court. De plus, le comportement du réseau après différentes reconnections peut être étudié : par exemple, une comparaison de solutions après plusieurs simulations permet d'observer la réaction d'un graphe à l'ajout et/ou la suppression de composants.

¹²Une porte est avant tout un nœud du graphe.

2.6 Réseaux de distribution : modélisation et méthode multi-échelles

Les réseaux de distribution de biens et leurs interactions fournissent un deuxième contexte discret d'application de méthodes multiéchelles. L'objectif ici est de modéliser les stocks de différents produits (matières premières par exemple) échangés dans un réseau au niveau planétaire. Les échanges sont multiples puisqu'il est possible de les réaliser entre deux régions quelconques (géographiquement proche ou pas). Les points et les liens à considérer sont alors très nombreux. De plus, les flux des produits au travers du réseau s'influencent mutuellement : par exemple, l'utilisation du fioul peut servir à produire de l'électricité, et réciproquement cette dernière sert à extraire le pétrole. Nous sommes donc amenés à considérer un domaine potentiellement très grand. Il s'agit d'un problème multiéchelles, car en négligeant un producteur ou un consommateur, le comportement global du réseau peut s'avérer totalement différent. De même que pour le cas des réseaux électriques, il s'agit d'un problème multiéchelles de catégorie 3, puisque ce réseau n'est pas une chaîne mais un graphe non coplanaire.

La distribution de produits est généralement modélisée à l'aide d'une chaîne de production, avec, éventuellement, deux machines traitant simultanément deux parties d'un même produit (voir [33, 6, 13, 55]). Ici, la distribution de produits est un réseau où chaque échange, bidirectionnel, se fait pour plusieurs produits, entre deux zones quelconques. Le comportement d'un réseau de distribution n'est pas issu de principes physiques ; il s'agit, par conséquent, dans ce chapitre, de proposer une modélisation d'un réseau de distribution de biens, ainsi qu'une méthode multiéchelles qui permet de simuler efficacement de grands réseaux de distribution de biens et d'itérer les simulations.

Modélisation. Le réseau est modélisé par un graphe non orienté (échanges bidirectionnels) sans boucle. Ce problème est modélisé pour chaque produit \mathbf{p} par une équation instationnaire décrivant l'évolution du stock disponible $\rho_\alpha^{\mathbf{p}}$ en chaque point (région) \mathbf{x}_α du globe. Pour chaque produit, un graphe est normalement associé¹³, mais nous considérons ici un unique graphe qui est l'union de tous ces graphes. Notons ρ le vecteur des stocks $\rho_\alpha^{\mathbf{p}}$. Ce vecteur satisfait, sur un domaine très grand, le système d'équations couplées suivant :

$$\frac{d\rho}{dt} = Q_+(\rho) - Q_-(\rho) + \Pi(\rho) - c(\rho), \quad (1)$$

où Q_+ (respectivement Q_-) est la quantité totale de produit entrante (respectivement sortante), Π est la production et c est la consommation. Les dépendances par rapport aux paramètres sont implicites. Les termes de couplage sont les consommations et les productions, par exemple la production Π est composée de la production $\Pi^e(\rho^e, \rho^{\mathbf{p}}, c^e)$ d'électricité dépendant du stock $\rho^{\mathbf{p}}$ de fioul, et de la production $\Pi^{\mathbf{p}}(\rho^{\mathbf{p}}, c^{\mathbf{p}})$ de fioul. Nous remarquons que si le réseau représente le réseau d'échanges planétaire, il est fermé et il n'y a donc pas de conditions aux limites. La détermination des flux Q_+, Q_- se fait à travers des variables de contrôles, à savoir : la capacité d'un nœud à délivrer un produit à ses nœuds voisins, la proportion d'envoi d'un produit d'un nœud à un autre, la commande d'un produit d'un nœud à un autre. Ces variables dépendent évidemment du stock disponible à chaque instant, mais aussi du temps d'acheminement et de traitement,

¹³Deux zones ne sont pas connectées s'il n'existe pas de moyen d'échange de produit, ce qui dépend entre autre du produit considéré.

de la vitesse de traitement, de la capacité maximale de traitement, et de la quantité minimale de stock (réserve souhaitée).

Méthode multiéchelles. Une méthode multiéchelles permet ici de réduire la taille du graphe et en conséquence celle du système. Les échanges étant multiples, les points et les liens à considérer sont très nombreux. Le principe est le même que pour les réseaux électriques où le graphe est décomposé en sous-graphes sur lesquels les solutions modèles sont précalculées. Ces sous-graphes sont, par exemple, les pays et les portes (nœuds de connexion entre sous-graphes) sont les régions frontalières ou (aéro)portuaires. Dans ce contexte, les vecteurs de base (solutions modèles) dépendent du temps. En effet, le vecteur de base Φ^i s'exprime dans la base de X^ε :

$$\mathbf{R}(\Phi^i(t)) = \sum_{\alpha,m} \Phi_{\alpha,m}^i \psi^\alpha 1_{]t_{m-1};t_m]}(t).$$

Le vecteur $\Phi_{\alpha,m}^i = \{\Phi_{\alpha,m}^i\}_\alpha$, défini sur l'intervalle de temps $]t_{m-1};t_m]$, vérifie le système (1) restreint à un sous-graphe, soumis aux conditions aux limites suivantes :

$$\Phi_{\alpha,m}^i = \delta_{i,j},$$

où la porte x_j est le même point que le nœud x_α . Le stock est ensuite calculé comme élément de l'espace X^0 , engendré par les vecteurs Φ^i , c'est-à-dire :

$$\rho^0(t) = \sum_{i=1}^{N^0} \rho_i(t) \Phi^i(t).$$

Il vérifie le système (1). Nous remarquons que les fonctions de base peuvent être calculées avec un pas de temps plus grand que celui utilisé dans le calcul de l'évolution des stocks. Le vecteur ρ^ε des stocks dans le réseau est finalement exprimé dans X^ε comme :

$$\rho^\varepsilon(t) = \mathbf{R}(\rho^0(t)) = \sum_{j=1}^{N^0} \rho_j(t) \mathbf{R}(\Phi^j(t)).$$

Cette méthode multiéchelles est adaptée à la simulation d'un réseau de distribution de biens modélisé par le système (1).

3 Synthèse

Dans cette thèse, nous avons :

- mis en place la méthodologie multiéchelles s'appliquant à des problèmes multi-échelles complexes représentatifs de situations réelles ;
- développé des méthodes numériques adaptées (aux différents contextes) et fondées sur les mêmes paradigmes que la méthodologie multiéchelles, puis proposé une validation numérique des méthodes, et, en conséquence, de l'approche globale de la méthodologie multiéchelles.

Plus précisément, dans une première partie (premier chapitre), le but était la mise en place de la méthodologie multiéchelles générale fondée sur les bases de la méthode MsFEM (méthode des éléments finis multiéchelles). Cette méthodologie multiéchelles est le socle de cette thèse et a été testée et validée dans divers contextes. La partie suivante (deuxième chapitre) traite d'un problème de mécanique des solides : la propagation d'une fissure. Le but était de tester et valider numériquement la méthode MsFEM dans ce contexte. Pour cela, nous avons implémenté la méthode dans un code 2D programmé en fortran 90. Nous avons ensuite successivement testé différentes variantes de la méthode MsFEM sur le cas d'une fissure isolée de taille caractéristique inférieure à la taille d'une cellule de calcul. Seule la méthode MsFEM, avec améliorations des conditions aux limites pour les fonctions de base multiéchelles, produit des résultats satisfaisants. Dans une troisième partie (troisième et quatrième chapitres), nous avons utilisé la méthodologie multiéchelles en adaptant MsFEM dans le contexte de simulation en temps réel de propagation de polluant en milieu urbain. Pour cela, nous avons développé de nouvelles techniques de détermination des conditions aux limites des fonctions de base multiéchelles. De plus, nous l'avons couplée avec une méthode de pénalisation afin d'adapter MsFEM et permettant de simplifier la prise en compte des obstacles du milieu. Une étude analytique de la convergence des méthodes numériques a été réalisée en dimension un. Ensuite, une implémentation des méthodes a été effectuée dans un code de simulation 2D. Finalement, par une batterie de cas tests (académiques et réalistes), nous avons validé l'efficacité en précision et temps de calcul de la méthodologie (et des méthodes) multiéchelles pour ce contexte. Dans une dernière partie, nous avons développé des méthodes multiéchelles, issues de la méthodologie, à des contextes en milieux discrets à grand nombre d'inconnues : un réseau électrique (cinquième chapitre) et un réseau de distribution de biens (sixième chapitre). Nous avons étudié théoriquement les modèles à utiliser. Le cas des réseaux de distribution de biens a nécessité un travail de modélisation. Nous avons ensuite étudié la mise en œuvre d'une méthode multiéchelles pour chacun des contextes. En outre, nous nous sommes intéressés à leurs évolutions envisageables dans le cadre d'un code opérationnel.

Dans cette thèse, nous avons montré de manière théorique et numérique la pertinence de la méthodologie multiéchelles pour divers contextes (en milieu continu et discret).

Méthodologie multiéchelles fondée sur les éléments finis multiéchelles

Dans ce chapitre, nous développons une méthodologie multiéchelles afin de donner un cadre général de méthodes pour des problèmes multiéchelles.

Cette méthodologie est inspirée de la méthode des éléments finis multiéchelles (MsFEM) provenant de la théorie de l'homogénéisation. L'objectif de cette méthode est de trouver une approximation numérique de la solution de l'équation homogénéisée qui régit le comportement macroscopique du milieu étudié. Dans une première section, nous passons en revue quelques notions d'homogénéisation, avant de décrire la méthode des éléments finis multiéchelles comme méthode d'homogénéisation numérique dans une seconde section. Enfin, dans une troisième section, nous décrivons la méthodologie multiéchelles.

1 Notion d'homogénéisation

L'homogénéisation est la théorie mathématique de la moyennisation. Elle a été introduite par Babuska dans les années 1970 (voir [15]) pour des problèmes d'ingénierie nucléaire. Il a travaillé dans le contexte d'un milieu périodique comme dans le travail précédent de Sanchez-Palencia (voir [90],[91]) qui considérait des mixtures de matériaux montrant une géométrie périodique pour des questions de diffusion ou d'élasticité linéarisée.

Le but de l'homogénéisation est de remplacer un milieu très hétérogène par un milieu homogène dans lequel les calculs sont plus simples. Les méthodes d'homogénéisation permettent d'étudier le comportement global de corps hétérogènes avec un grand nombre d'hétérogénéités dont la taille caractéristique est petite par rapport à la taille caractéristique du corps. Le corps est décrit par une équation aux dérivées partielles dont les coefficients oscillent rapidement quand le nombre d'hétérogénéités devient très grand. Quand on essaie de résoudre le problème numériquement, on a besoin d'utiliser un maillage très fin pour obtenir une bonne approximation de la solution et ceci est très coûteux. En homogénéisation, on souhaite "moyenner" les hétérogénéités et étudier un problème homogène, avec un matériau fictif dont le comportement est équivalent dans une certaine mesure à celui du problème original, et ceci lorsque le nombre d'hétérogénéités est très grand.

Etudions la situation classique où le corps est décrit dans le domaine borné $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$

par l'équation suivante

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

où $A^\varepsilon \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega) = \{A \in (L^\infty(\Omega))^{d \times d}, \alpha \xi^t \cdot \xi \leq \xi^t A \xi \leq \beta \xi^t \cdot \xi \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d\}$ avec ξ^t le transposé du vecteur ξ . La fonction $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution faible du problème aux conditions aux limites (I.1), avec $f \in L^2(\Omega)$. La suite $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$ est bornée dans l'espace de Banach réflexif $H_0^1(\Omega)$ car, d'après l'inégalité de Poincaré : $\|u^\varepsilon\|_{H^1} \leq C\|f\|_{L^2}$. On peut donc extraire une sous-suite convergant faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers une fonction u^* .

L'homogénéisation consiste à chercher une équation du même type que celle de u^ε pour laquelle $u^* \in H_0^1(\Omega)$ est solution faible. Autrement dit, elle consiste à chercher la matrice A^* associée qui décrit le milieu homogène (du matériau fictif équivalent).

1.1 Homogénéisation dans un domaine monodimensionnel

Commençons par le cas monodimensionnel, c'est-à-dire pour un domaine borné $\Omega \subsetneq \mathbb{R}$. Nous nous intéressons à l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(A^\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et la suite $\{A^\varepsilon\}_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$. Posons

$$\eta^\varepsilon = A^\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx}.$$

Comme u^ε est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, on a $\frac{du^\varepsilon}{dx}$ bornée dans $L^2(\Omega)$. De plus, comme A^ε est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, η^ε est aussi bornée dans $L^2(\Omega)$. Par (I.2), on a aussi $f = -\frac{d\eta^\varepsilon}{dx}$ qui est bornée dans $L^2(\Omega)$, d'où η^ε est bornée dans $H^1(\Omega)$. L'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte, on peut donc extraire une sous-suite convergant fortement dans $L^2(\Omega)$. De plus, $H^1(\Omega)$ étant un espace de Banach réflexif, on peut donc extraire¹ une nouvelle sous-suite, encore notée η^ε , convergant faiblement dans $H^1(\Omega)$, d'où :

$$\frac{d\eta^\varepsilon}{dx} \rightharpoonup \frac{d\eta}{dx} \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega),$$

et par identification des limites, nous obtenons :

$$-\frac{d\eta}{dx} = f. \quad (\text{I.3})$$

D'un autre côté, comme u^ε est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite, encore notée u^ε , telle que :

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^* \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega),$$

¹La sous-suite reste bornée dans $H^1(\Omega)$.

d'où :

$$\frac{du^\varepsilon}{dx} \rightharpoonup \frac{du^*}{dx} \text{ faiblement dans } L^2(\Omega),$$

et

$$\frac{du^\varepsilon}{dx} = \frac{1}{A^\varepsilon} A^\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx} = \frac{1}{A^\varepsilon} \eta^\varepsilon \in L^2(\Omega) \quad (\text{I.4})$$

La suite $\frac{1}{A^\varepsilon}$ étant bornée dans $L^\infty(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement* dans $L^\infty(\Omega)$ vers $\frac{1}{A^*}$. Comme η^ε converge fortement dans $L^2(\Omega)$, donc dans $L^1(\Omega)$, nous obtenons, en identifiant les limites de (I.4) :

$$\frac{du^*}{dx} = \frac{1}{A^*} \eta,$$

ce qui donne, d'après (I.3), l'équation homogénéisée :

$$-\frac{d}{dx} \left(A^* \frac{du^*}{dx} \right) = f. \quad (\text{I.5})$$

Dans le cas d'un milieu périodique, c'est-à-dire si $A^\varepsilon \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ est périodique, écrivons $A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, avec $A(y) > 0$ périodique en y , de période Y . Nous pouvons alors calculer explicitement le coefficient homogénéisé A^* . En effet, la limite de la suite $\frac{1}{A^\varepsilon}$ est :

$$\frac{1}{A^\varepsilon} \rightharpoonup \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{1}{A(y)} dy = \frac{1}{A^*} \text{ faiblement* dans } L^\infty(Y),$$

où $|Y|$ est la mesure de la période Y .

Remarque : Le coefficient homogénéisé A^* est la moyenne harmonique de A . Il n'est pas, en général, égal à la moyenne arithmétique $\frac{1}{|Y|} \int_Y A(y) dy$.

1.2 Homogénéisation en milieu périodique

L'analyse précédente ne peut pas se généraliser à plusieurs dimensions. L'étude peut se faire par des développements asymptotiques à deux échelles dont la justification rigoureuse de la convergence s'appuie sur des méthodes telles que la convergence à deux échelles (voir [4]) ou les fonctions tests oscillantes (voir [97, 89]). On regarde le problème $\mathbf{L}^\varepsilon u^\varepsilon = -\nabla \cdot (A^\varepsilon u^\varepsilon) = f^\varepsilon$ où $A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ avec A périodique sur le volume $Y = [0; 1]^d$, coercive et $f^\varepsilon \in L^2(\Omega)$. On cherche la solution u^ε de ce problème sous la forme d'un développement asymptotique :

$$u^\varepsilon(x) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i u_i(x, \frac{x}{\varepsilon}), \quad (\text{I.6})$$

où les fonctions $(x, y) \mapsto u_i(x, y)$ sont périodiques en y sur Y . L'opérateur \mathbf{L}^ε s'écrit :

$$\mathbf{L}^\varepsilon = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{i,j}^\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (\text{I.7})$$

où x_i désigne la $i^{\text{ième}}$ composante de x dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Remarquons que lorsqu'on différencie une fonction $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon})$ par rapport à la variable x , on a :

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j},$$

où y est évalué en $\frac{x}{\varepsilon}$. Nous avons donc, en utilisant la convention des indices répétés :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^\varepsilon u^\varepsilon &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i u_i(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i u_i(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{i,j}(y) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial y_j} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_1}{\partial y_j} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(A_{i,j}(y) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial y_j} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial y_j} \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \mathbf{L}^3 u_0 + \mathbf{L}^2 u_1 + \mathbf{L}^1 u_2 + \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{L}^2 u_0 + \mathbf{L}^1 u_1) + \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{L}^1 u_0) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

où y_i désigne la $i^{\text{ième}}$ composante de y dans Y et :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^1 &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \\ \mathbf{L}^2 &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \\ \mathbf{L}^3 &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

En identifiant les termes de même puissance en ε , nous obtenons :

$$\mathbf{L}^1 u_0(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} u_0(x, y) \right) = 0,$$

$$\mathbf{L}^1 u_1 + \mathbf{L}^2 u_0 = 0, \tag{I.8a}$$

$$\mathbf{L}^1 u_2 + \mathbf{L}^2 u_1 + \mathbf{L}^3 u_0 = f. \tag{I.8b}$$

La théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre (voir [53]) implique que u_0 est indépendante de y , donc $u_0(x, y) = u^*(x)$. Ceci simplifie l'équation (I.8a) pour u_1 , qui devient :

$$-\frac{\partial}{\partial y_i} \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) u_1(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial y_i} A_{i,j}(y) \right) \frac{\partial u^*}{\partial x_j}(x). \tag{I.9}$$

Nous pouvons interpréter cette dernière comme une équation pour l'inconnue périodique $y \mapsto u_1(x, y)$. Par ailleurs, la variable x n'intervient qu'à travers le facteur $\frac{\partial u^*}{\partial x_j}(x)$, si bien que, par linéarité, cette solution peut s'écrire sous la forme :

$$u_1(x, y) = -\sum_k \chi^k(y) \frac{\partial u^*}{\partial x_k}(x) + \tilde{u}_1(x). \tag{I.10}$$

où nous avons noté χ^k la solution périodique du problème suivant :

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \chi^k(y) = \delta_{j,k} \frac{\partial}{\partial y_i} A_{i,j}(y) = \frac{\partial}{\partial y_i} A_{i,k}(y). \tag{I.11}$$

On peut fixer χ^k nul au bord de Y ou le prendre de moyenne nulle sur Y pour définir une unique solution, puis fixer $\tilde{u}_1(x) = 0$. Finalement, l'équation (I.8b) pour u_2 devient :

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) u_2 = \mathbf{L}^2 u_1 + \mathbf{L}^3 u^* - f.$$

La condition de solvabilité pour les équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre avec conditions aux limites périodiques (voir [53]) nécessite que le membre de droite $\mathbf{L}^2 u_1 + \mathbf{L}^3 u^* - f$ soit de moyenne nulle par rapport à la variable rapide y sur la période Y (alternative de Fredholm). Cette condition permet d'obtenir l'équation homogénéisée pour u^* :

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{i,j}^* \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u^* = f, \quad (\text{I.12})$$

où

$$A_{i,j}^* = \left(\int_Y \left(A_{i,j} - A_{i,k} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k} \right) dy \right).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_Y \mathbf{L}^2 u_1(x, y) dy &= - \int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) dy - \int_Y \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_j \partial x_i} \right) dy \\ &= - \int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\chi^k \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \right) \right) dy \\ &\quad - \int_Y \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial x_i} \left(-\chi^k \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \right) \right) dy \\ &= \int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} \left(A_{i,j}(y) \chi^k \right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_j \partial x_k} dy + \int_Y \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \chi^k \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_i \partial x_k} \right) dy \\ &= - \int_Y A_{i,j}(y) \chi^k(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_j \partial x_k} \right) dy + \int_Y \left(A_{i,j}(y) \frac{\partial \chi^k(y)}{\partial y_j} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_k \partial x_i} \right) dy, \end{aligned}$$

à l'aide d'une intégration par parties où l'intégrale sur le bord ∂Y est nulle par périodicité, pour la dernière égalité. Finalement, le premier terme étant nul, on obtient :

$$\int_Y \mathbf{L}^2 u_1(x, y) dy = \left(\int_Y A_{i,k}(y) \frac{\partial \chi^j(y)}{\partial y_k} dy \right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_i \partial x_j},$$

et la condition $\int_Y (\mathbf{L}^2 u_1 + \mathbf{L}^3 u^* - f) = 0$ devient :

$$f(x) = \int_Y f(x) dy = - \int_Y \left(A_{i,j}(y) - A_{i,k}(y) \frac{\partial \chi^j(y)}{\partial y_k} \right) dy \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_i \partial x_j}.$$

La méthode de développement asymptotique à deux échelles est mathématiquement formelle, elle permet de calculer heuristiquement l'équation homogénéisée (I.12), mais n'est pas une preuve rigoureuse du processus d'homogénéisation. En effet, le développement asymptotique (I.6) de u^ε n'est pas toujours correct. Par exemple, il n'inclut pas la possibilité de couches limites dans le voisinage de $\partial \Omega$ (voir [75]).

Remarque : Cette analyse peut s'appliquer à d'autres équations, comme par exemple à $-\nabla \cdot (A^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) + a_0(x) u^\varepsilon = f$ dans [44]. On obtient comme équation homogénéisée :

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{i,j}^* \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u^* + \int_Y A_0 dy u^* = f,$$

où $A_0(y) = a_0(\frac{y}{\varepsilon})$. L'homogénéisation pour des équations non linéaires a aussi été étudié (voir [84, 44, 50]). Considérons par exemple, pour une équation de la forme :

$$-\nabla \cdot (A^\varepsilon(x, u^\varepsilon, \vec{\nabla} u^\varepsilon)) + A_0^\varepsilon(x, u^\varepsilon, \vec{\nabla} u^\varepsilon) = f,$$

où $u^\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $A^\varepsilon, A_0^\varepsilon$ sont des fonctions périodiques par rapport à la variable spatiale et satisfaisant certaines hypothèses. Il peut être montré que u^ε converge vers $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$, solution d'un problème homogénéisé :

$$-\nabla \cdot (A^*(x, u^*, \vec{\nabla} u^*)) + A_0^*(x, u^*, \vec{\nabla} u^*) = f.$$

Les coefficients homogénéisés sont définis par :

$$A^*(\eta, \xi) = \int_Y A(y, \eta, \xi + \vec{\nabla}_y N_{\eta, \xi}(y)) dy,$$

et

$$A_0^*(\eta, \xi) = \int_Y A_0(y, \eta, \xi + \vec{\nabla}_y N_{\eta, \xi}(y)) dy,$$

où $N_{\eta, \xi}$ est la solution périodique de moyenne nulle de

$$-\nabla \cdot (A(y, \eta, \xi + \vec{\nabla}_y N_{\eta, \xi}(y))) = 0 \text{ dans } Y.$$

1.3 Homogénéisation en milieu hétérogène

Bien qu'introduite pour des milieux périodiques, l'homogénéisation a été étudiée pour des milieux hétérogènes généraux. Cette généralisation est abordée dans cette section. L'approche périodique, c'est-à-dire des développements asymptotiques à deux échelles, se généralise aux cas non périodiques mais il n'y a pas de formule explicite pour A^* . Nous utilisons plutôt la H-convergence introduite par Tartar et Murat (voir [81, 96]). Cette méthode généralise la G-convergence (convergence of Green kernels) de Spagnolo et De Giorgi (voir [94, 34]) dans les années 1960, où on identifie la limite faible des solutions.

Soit $\{A^\varepsilon\}_\varepsilon$ une famille de matrices dans $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$. On dit que A^ε H-converge vers $A^* \in \mathcal{M}(\alpha', \beta', \Omega)$, et on note $A^\varepsilon \xrightarrow{H} A^*$, si pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ solution de :

$$-\nabla \cdot (A^\varepsilon \vec{\nabla} u^\varepsilon) = f \quad \text{dans } \Omega,$$

alors on a :

$$\begin{cases} u^\varepsilon \rightharpoonup u^* & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ A^\varepsilon \vec{\nabla} u^\varepsilon \rightharpoonup A^* \vec{\nabla} u^* & \text{faiblement dans } L^2(\Omega)^d, \end{cases}$$

où $u^* \in H_0^1(\Omega)$ satisfait l'équation homogénéisée

$$-\nabla \cdot (A^* \vec{\nabla} u^*) = f \quad \text{dans } \Omega.$$

Remarque : En un certain sens, la H-convergence désigne la convergence de l'inverse des opérateurs $(-\nabla \cdot (A^\varepsilon \nabla))^{-1}$ de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, où ces espaces sont munis de leur topologie faible.

Lorsque $A^\varepsilon \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$, où $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ est un domaine borné, il existe A^* dans $\mathcal{M}\left(\alpha, \frac{\beta^2}{\alpha}, \Omega\right)$ tel que, pour une sous-suite, $A^\varepsilon \xrightarrow{H} A^*$. De plus, cette limite est unique. Excepté dans le cas périodique, ce résultat abstrait ne donne pas de formule explicite pour la limite A^* . En fait, le tenseur homogénéisé A^* est défini comme la limite au sens des distributions :

$$A^\varepsilon \vec{\nabla} \xi^j \rightharpoonup A^* e_j,$$

où $\{e_i\}_{i=1,\dots,d}$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^d et les ξ^j satisfont

$$\begin{aligned} \xi^j &\rightharpoonup e_j && \text{faiblement dans } H^1(\Omega), \\ -\nabla \cdot (A^\varepsilon \nabla \xi^j) &\rightarrow -\nabla \cdot (A^* e_j) && \text{fortement dans } H^{-1}(\Omega). \end{aligned}$$

Ces fonctions sont appelées fonctions test oscillantes. De telles fonctions tests oscillantes ne sont ni explicites (car dépendent de A^*), ni uniques. On peut les définir (voir [5]) comme solutions de :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A^\varepsilon \vec{\nabla} \xi_j) = -\nabla \cdot (A^* \vec{\nabla} e_j) & \text{dans } \Omega, \\ \xi_j = e_j & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Pour les détails, on pourra se référer à [97].

Techniquement, la méthode la plus puissante et générale pour fournir un tel théorème d'homogénéisation est la méthode des fonctions tests oscillantes de Tartar. Une autre méthode, plus simple mais restreinte au cas périodique, est la convergence à deux échelles introduites par Nguetseng ([82]) et Allaire ([4]).

Remarque : L'homogénéisation en milieu aléatoire pour des problèmes linéaires est également étudié, notamment dans [19] et [67].

2 Homogénéisation numérique

Le but de l'homogénéisation numérique est de calculer la réponse d'un milieu hétérogène de longueur caractéristique ε avec un maillage de taille $H \gg \varepsilon$. On ne se satisfait pas d'un modèle homogénéisé : on veut aussi obtenir les fluctuations microscopiques. Pour cela, on utilise des fonctions test oscillantes, idée inspirée par la méthode introduite juste au dessus.

2.1 Le principe

Dans le cas périodique, on remarque que l'on a $u^\varepsilon(x) \approx u^*(x - \varepsilon \chi(\frac{x}{\varepsilon}))$, où $\chi = (\chi^1, \dots, \chi^d)$ est le vecteur des solutions de (I.11) et u^* est la solution du problème homogénéisé. En effet, d'après (I.6) et (I.10), on a :

$$u^\varepsilon(x) \approx u^*(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = u^*(x) - \varepsilon \sum_i \chi^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x) \quad (\text{I.15})$$

qui est le début d'un développement de Taylor de u^* en $x - \varepsilon \chi(\frac{x}{\varepsilon})$. On peut donc écrire $u^\varepsilon \approx u^* \circ \xi$ où $\xi(x) = (\xi^1(x), \dots, \xi^d(x)) \approx x - \varepsilon \chi(\frac{x}{\varepsilon})$ est le vecteur des fonctions tests

oscillantes solutions de (I.14). En se basant sur cette remarque, Allaire et Brizzi (voir [5]) proposent d'utiliser un maillage grossier et une méthode éléments finis standard de degré quelconque, puis d'effectuer un changement de variables.

La solution u^ε peut s'écrire $u^* \circ \xi + r^\varepsilon$, où r^ε est le reste du développement qui tend vers zéro quand ε tend vers zéro. La résolution d'une formulation variationnelle approchée de $\int_{\Omega} A^\varepsilon \vec{\nabla} u^\varepsilon \cdot \vec{\nabla} v dx = \int_{\Omega} f v dx$ nécessite le calcul des fonctions tests oscillantes qui ne sont pas explicites puisque, d'après la définition (I.14), elles dépendent de A^* qui est inconnue. Il faut donc introduire une procédure d'approximation adéquate. La fonction $u^* \circ \xi + r^\varepsilon$ est solution du problème variationnel que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} A^\varepsilon \vec{\nabla} (u^* \circ \xi) \cdot \vec{\nabla} v dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} A^\varepsilon \vec{\nabla} r^\varepsilon \cdot \vec{\nabla} v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (\text{I.16})$$

où le dernière intégrale tend vers zéro quand ε tend vers zéro. Notons u la solution du problème (I.16) avec r^ε nul et en utilisant des fonctions tests adéquates, c'est-à-dire sous la forme $v \circ \xi$. Autrement dit, la fonction u est solution du problème variationnel suivant :

$$\int_{\Omega} A^\varepsilon \vec{\nabla} (u \circ \xi) \cdot \vec{\nabla} (v \circ \xi) dx = \int_{\Omega} f (v \circ \xi) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (\text{I.17})$$

Afin de calculer une approximation u_h de u , introduisons une fonction de base oscillante définie par :

$$\Phi^k(x) = \psi^k \circ \xi(x), \quad (\text{I.18})$$

où ψ^k est une fonction élément fini, puis cherchons la solution approchée de u dans l'espace engendré par $\{\Phi^i\}_i$. Nous divisons Ω en cellules K , puis nous définissons ξ^i comme solution de :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A^\varepsilon \vec{\nabla} \xi^i) = -\nabla \cdot (A_K^* \vec{\nabla} e_i) & \text{dans } K, \\ \xi^i = e_i & \text{sur } \partial K, \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

où A_K^* est une approximation locale de A^* dans K . L'approximation la plus simple consiste à prendre A_K^* constante dans K , le membre de droite de l'équation précédente étant alors nul. Les fonctions tests oscillantes ξ^i sont calculées à l'aide d'une méthode numérique standard.

Nous cherchons alors la solution numérique approchée sous la forme $u_h \circ \xi$ où $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^d)$ est le vecteur des fonctions tests oscillantes solutions de (I.19). En prenant $\{\psi^k\}_k$ les éléments finis de Lagrange, les fonctions de base $\Phi^k = \psi^k \circ \xi$ sont telles que :

$$\nabla \cdot (A^\varepsilon \vec{\nabla} \Phi^k) = \sum_j \nabla \cdot (A^\varepsilon \vec{\nabla} \xi^j) \frac{\partial \psi^k}{\partial x_j} \quad \text{dans } K,$$

et si A_K^* est constant dans (I.19), on obtient :

$$-\nabla \cdot (A^\varepsilon \vec{\nabla} \Phi^k) = 0 \quad \text{dans } K. \quad (\text{I.20})$$

De plus, comme $\xi^i = e_i$ sur ∂K , les fonctions Φ^k vérifient la condition aux limites $\Phi^k = \psi^k$ sur ∂K . Finalement, on garde la complexité d'un calcul grossier, mais les fonctions de bases contiennent des oscillations microscopiques. On remarque qu'aucune périodicité n'est nécessaire pour la mise en œuvre.

Il est souvent difficile de calculer les coefficients homogénéisés quand le problème (I.11) nécessite une discrétisation très fine. Dans ce cas, les conditions aux limites pour les coefficients homogénéisés peuvent être très utiles. Trouver des conditions aux limites précises dépendant des hétérogénéités est une tâche difficile. Il y a plusieurs travaux dans la littérature où les conditions aux limites sont calculées et les microstructures optimales correspondantes sont déterminées. En présence de bords fins, on peut éviter la résolution des problèmes cellules pour le calcul des solutions homogénéisés. On se réfère à [77] et [30] pour les descriptions de bords variés.

En prenant les éléments finis de degré un, on retrouve la méthode MsFEM de Hou (voir [59]) qui sera détaillé dans la suite. La difficulté réside dans l'oscillation des coefficients de très petite taille, notée ε . Afin de détailler cette méthode que nous avons choisi d'utiliser, rappelons tout d'abord la méthode des éléments finis standard qui est utilisée dans MsFEM.

2.2 Méthode des éléments finis

Soit à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\mathbf{L}u = f \text{ dans } \Omega, \quad (E)$$

où $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$ est un domaine borné régulier ($d \in \{1, 2, 3\}$ est la dimension spatiale), \mathbf{L} est un opérateur défini sur X , avec $X \subseteq \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$. Ecrivons le problème (E) sous forme variationnelle :

$$\text{trouver } u \in X, \quad \forall v \in X, \quad a(u, v) = l(v). \quad (I.21)$$

Afin d'obtenir une approximation numérique de u , nous remplaçons le problème variationnel (I.21) par un problème approché, dans un espace de dimension finie. La méthode d'approximation interne du problème s'écrit :

$$\text{trouver } u_h \in X_h, \quad \forall v_h \in X_h, \quad a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad (I.22)$$

où X_h est un sous-espace de X de dimension N finie.

Afin de trouver une solution u_h dans X_h , nous posons $\{\psi^\alpha\}_{\alpha=1, \dots, N}$ une base de X_h . Nous cherchons u_h sous la forme $u_h = \sum_{\alpha} u_{\alpha} \psi^{\alpha}$ et le problème (I.22) équivaut alors à la résolution d'un système linéaire de taille $N \times N$:

$$\sum_{\beta} a(\psi^{\beta}, \psi^{\alpha}) u_{\beta} = l(\psi^{\alpha}) \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Le choix de l'espace X_h doit vérifier certaines propriétés afin de simplifier le calcul des composantes u_{α} . Pour obtenir une approximation interne (I.22) du problème variationnel (I.21), il s'agit de construire un sous-espace X_h de X de dimension finie. Pour cela, nous introduisons tout d'abord un maillage \mathfrak{M}_h de $\bar{\Omega}$ à l'aide de cellules K de taille h , de sorte que $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathfrak{M}_h} K$. Notons $\{\mathbf{x}_{\alpha}\}_{\alpha=1, \dots, N}$ les sommets des cellules, c'est-à-dire les nœuds du

maillage \mathfrak{M}_h sur $\bar{\Omega}$. Le maillage \mathfrak{M}_h est dessiné en cartésien ($K \in \mathfrak{M}_h$ est un quadrangle) sur la figure FIG. I.1, où une cellule du maillage est représentée en gras, et un point \mathbf{x}_{α} est représenté à l'aide d'un disque. Le choix le plus immédiat pour construire la base

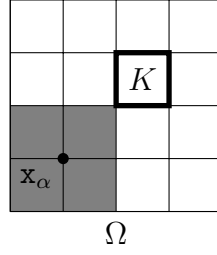


FIG. I.1 – Maillage cartésien \mathfrak{M}_h sur le domaine Ω . Une cellule K est dessinée en gras, un nœud \mathbf{x}_α est représenté par un petit point et le support de la fonction de base ψ^α associée à \mathbf{x}_α est la partie grisée.

$\{\psi^\alpha\}_{\alpha=1,\dots,N}$ de X_h est de prendre des fonctions affines dans chaque cellule de \mathfrak{M}_h . Pour un maillage cartésien, nous obtenons :

$$X_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) : v|_K \in \mathbb{Q}_p \ \forall K \in \mathfrak{M}_h \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \quad (\text{I.23})$$

où \mathbb{Q}_p ($p \in \mathbb{N}$) désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré p par rapport à chaque variable. Pour un maillage composé de triangles, il suffit de remplacer \mathbb{Q}_p par \mathbb{P}_p qui désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré p en les d variables.

Une base de X_h est donc construite de la manière suivante : à tout sommet \mathbf{x}_α , on associe la fonction ψ^α dans X_h définie par $\psi^\alpha(\mathbf{x}_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$ pour tout $1 \leq \alpha, \beta \leq N$. De plus, tout v dans X_h se décompose sur cette base de X_h en $v = \sum_{\alpha} v(\mathbf{x}_\alpha) \psi^\alpha$. Le support de ψ^α se compose de la réunion des cellules de \mathfrak{M}_h qui ont pour sommet \mathbf{x}_α . Il est représenté par une zone grise sur la figure FIG. I.1. Ce support étant localisé autour du nœud \mathbf{x}_α , la matrice $A = (a(\psi^\beta, \psi^\alpha))_{\beta,\alpha}$ est creuse.

Finalement, la méthode des éléments finis consiste à multiplier l'équation (E) par chacune des fonctions ψ^α puis à intégrer sur leur support. Nous obtenons l'équation (I.22) avec X_h défini en (I.23). La solution approchée u_h est ensuite cherchée sur l'espace X_h , c'est-à-dire sous la forme :

$$u_h(x) = \sum_{\alpha=1}^N u_\alpha \psi^\alpha(x),$$

où pour tout $\alpha = 1, \dots, N$, u_α est le nombre réel $u_h(\mathbf{x}_\alpha)$, car $\psi^\alpha(\mathbf{x}_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$.

Les composantes u_α sont calculées en résolvant le système linéaire de taille $N^0 \times N^0$ suivant :

$$A(u.) = b,$$

où $(u.)$ désigne le vecteur de composantes $\{u_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,N^0}$, A la matrice des opérateurs discrétisés $(a(\psi^\beta, \psi^\alpha))_{\beta,\alpha}$ et b le vecteur qui discrétise le second membre de l'équation, c'est-à-dire $b_\alpha = l(\psi^\alpha)$.

2.3 La méthode des éléments finis multiéchelles (MsFEM)

L'objectif de cette méthode est d'approcher la solution homogénéisée dans X_H avec $H \gg \varepsilon$, pour calculer avec un temps CPU et une capacité de mémoire limités, sans

résoudre les problèmes auxiliaires qui surviennent en homogénéisation (par exemple, les problèmes cellulaires périodiques (I.11)). Les composantes de cette solution numérique doivent prendre en compte les petites fluctuations. Soit à résoudre :

$$\mathbf{L}u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{I.24})$$

où $\mathbf{L} = -\nabla \cdot (A^\varepsilon \vec{\nabla} \cdot)$. Cette méthode utilise les éléments finis de degré un pour résoudre la formulation globale (I.17). Notons H la taille du maillage et prenons $p = 1$ dans la définition² (I.23) de X_H . Afin de prendre en compte les petites fluctuations, une fonction de base Φ^i est l'image d'une fonction Ψ^i de X_H , par un opérateur noté F . En notant X^0 l'espace engendré par les fonctions de base $\{\Phi^i\}_i$, nous écrivons $\Phi^i = F(\Psi^i)$, où $F : X_H \rightarrow X^0$. Ces fonctions étant définies par (I.18), cet opérateur est donc défini par $F(v) = v \circ \xi$, où ξ est la fonction test oscillante (voir section 2.1) solution de :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A^\varepsilon \vec{\nabla} \xi) = 0 & \text{dans } K, \\ \xi(x) = x & \text{sur } \partial K, \end{cases}$$

et $\Phi^i = F(\Psi^i)$ est alors solution de (I.20), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A^\varepsilon \vec{\nabla} \Phi^i) = 0 & \text{dans } K, \\ \Phi^i|_{\partial K} = \Psi^i|_{\partial K} & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

Plaçons nous en maillage cartésien pour des raisons de simplifications. Cette reconstruction prendra tout son sens dans les chapitres suivants. Soit un maillage \mathfrak{M} à N^0 nœuds $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1, \dots, N^0}$ sur le domaine de calcul $\bar{\Omega}$, où N^0 est le cardinal de X^0 . Le calcul se déroule en deux étapes : la résolution de (I.25), puis celle de (I.17).

Fonctions de base. La première partie du calcul par MsFEM est la construction des fonctions de base multiéchelles. Comme dans la méthode des éléments finis standard, pour chaque nœud \mathbf{x}_i du maillage \mathfrak{M} , nous construisons une fonction de base associée Φ^i . Pour prendre en compte les variations des coefficients de l'équation, cette fonction est solution locale d'une équation homogène associée à (I.24), sujette à certaines conditions aux limites. Le support Λ_i de Φ^i est l'ensemble des cellules³ K ayant le nœud \mathbf{x}_i pour sommet, soit $\Lambda_i = \cup \{K \in \mathfrak{M}, \mathbf{x}_i \in K\}$. La fonction de base multiéchelles Φ^i est définie, pour tout $K \subset \Lambda_i$, comme solution de :

$$\begin{cases} \mathbf{L}\Phi^i = 0 & \text{dans } K, \\ \Phi^i|_{\partial K}(x) = \Psi^i(x) & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

Ce problème est résolu à l'aide de la méthode des éléments finis de degré un.

Remarque : Lorsqu'une région, notée K_{loc} , plus petite que K permet de caractériser les hétérogénéités locales (exemple : hétérogénéités périodiques), il est possible de résoudre (I.26) sur K_{loc} . Les matrices de discrétisation utilisent seulement l'information dans les petites régions de calcul K_{loc} et les fonctions de base peuvent être étendues périodiquement à la cellule grossière K si nécessaire (voir [44]). De telles régions sont appelées Representative Volume Element (RVE).

² X_H est l'ensemble des éléments finis de degré un.

³Il est composé de quatre cellules dans un maillage cartésien.

Formulation globale. La caractéristique de MsFEM est l'utilisation de la formulation variationnelle à l'échelle grossière qui permet de coupler les fonctions de base multi-échelles. La solution est cherchée sur le maillage \mathfrak{M} en la décomposant dans la base des Φ^i :

$$u^0 = \sum_i u_i \Phi^i,$$

où les u_i sont les valeurs approchées de la solution aux nœuds grossiers \mathbf{x}_i . La solution prend en compte les petites fluctuations grâce aux fonctions de base multi-échelles. En substituant cette décomposition dans l'équation à résoudre, puis en utilisant la méthode des éléments finis où les fonctions de base sont remplacées par les Φ^i , le système à résoudre est de taille $N^0 \times N^0$. Cette méthode permet donc un calcul rapide de la solution.

En général, la formulation globale peut être facilement modifiée avec de nombreuses formulations globales basées sur les volumes finis, les éléments finis mixtes, les méthodes du type Galerkin discontinus, et d'autres. MsFEM peut facilement être étendu aux systèmes d'équations linéaires, tels que les équations d'élasticité.

Remarque : Les conditions aux limites pour les fonctions de base jouent un rôle crucial dans la capture de l'information à l'échelle fine. Si les conditions aux limites locales pour les fonctions de base ne reflètent pas la nature des hétérogénéités sous-jacentes, MsFEM peut avoir de grandes erreurs. Ces erreurs sont dues à la résonance entre la taille H de l'échelle grossière et l'échelle de la longueur caractéristique ε du problème. Pour des coefficients périodiques cette longueur est la période. Par un choix judicieux de conditions aux limites pour les fonctions de base, on peut réduire significativement les erreurs de résonance. Hou et Wu ont proposé une méthode d'*oversampling* dans [60] pour surmonter cette difficulté.

D'après Hou ([59]), pour u dans $H^2(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u \right) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

et u^0 dans X^0 solution de

$$\int_{\Omega} a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u^0 \cdot \nabla \Phi^i dx = \int_{\Omega} f \Phi^i dx \quad \forall i, \quad (\text{I.28})$$

lorsque $h < \varepsilon$, nous obtenons l'estimation d'erreur suivante :

$$\|u - u^0\|_{H^1} \leq Ch(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^2}).$$

Or $\|u\|_{H^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, ce qui implique que cette estimation devient très grande quand le rapport $\frac{h}{\varepsilon}$ augmente, c'est-à-dire quand ε tend vers zéro. Lorsque $h > \varepsilon$, nous obtenons l'estimation d'erreur suivante :

$$\|u - u^0\|_{H^1} \leq C(h + \varepsilon)\|f\|_{L^2} + C\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^{1/2} \|u^*\|_{W^{1,\infty}},$$

où $u^* \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ est la solution du problème homogénéisé suivant :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a^* \nabla u^*) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On peut s'apercevoir ici que lorsque h est de l'ordre de ε , l'erreur de la méthode est maximale. Cet effet, appelé effet de résonance d'échelle (voir [59]), est une résonance entre la taille du maillage et la petite échelle du problème.

3 La méthodologie multiéchelles

Le but est d'obtenir la solution d'une équation pouvant être instationnaire et dont les coefficients n'ont aucune caractéristique particulière (pas nécessairement périodique) en espace. La solution obtenue doit approcher au mieux les variations de la solution exacte avec un coût de calcul (en temps et en mémoire) raisonnable. Il s'agit de s'inspirer de la méthode MsFEM présentée dans la section précédente dont l'idée est de précalculer des fonctions qui prennent en compte les fluctuations des coefficients de l'équation, puis de chercher la solution dans l'espace engendré par ces fonctions. Nous ne sommes pas intéressé par la convergence de la solution numérique vers la solution homogénéisée quand ε tend vers zéro. Nous cherchons une solution numérique approchant finement la solution de l'équation dont les hétérogénéités des coefficients sont fixes.

3.1 Principe de la méthode

Sans perte de généralité, nous regardons un problème stationnaire, quitte à considérer la variable temporelle comme un paramètre. Nous souhaitons trouver une solution approchée u^ε dans X^ε de u dans X , avec X^ε un espace fonctionnel de dimension N^ε finie et u solution de

$$\mathbf{L}u = f \text{ dans } \Omega.$$

Nous devons donc résoudre le problème approché $\mathbf{L}^\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon$ dans X^ε . La dimension de X^ε , $N^\varepsilon = \frac{|\Omega|}{\varepsilon^d}$ avec $|\Omega|$ la mesure⁴ de Ω , est très grande si ε est petit. Notons $\{\psi^\alpha\}_\alpha$ une base de X^ε . La fonction ψ^α est par exemple un élément fini, c'est-à-dire $X^\varepsilon = X_h$.

Le défi de ces méthodes multiéchelles est de se ramener à un problème dans un espace de plus petite dimension, indépendante de ε , tout en gardant les informations de taille ε . L'idée est donc de choisir le "bon" sous-espace X^0 de petite dimension N^0 (avec $N^0 \ll N^\varepsilon$) qui garde "en mémoire" les petites informations. Des profils de solutions $\{\Phi^i\}_i$, contenant les informations de l'échelle ε , sont construits et X^0 est alors l'espace engendré par ces profils. Nous sommes ainsi ramenés à résoudre une équation sur X^0 . Pour construire X^0 , nous devons définir deux opérateurs : un opérateur de reconstruction, noté \mathbf{R} , et un opérateur de projection, noté $\mathbf{\Pi}$. L'opérateur $\mathbf{R} : X^0 \hookrightarrow X^\varepsilon$ est l'injection canonique, il est utilisé pour passer de la solution u^0 calculée dans X^0 à la solution approchée u^ε dans X^ε . Les informations des petites tailles ε , contenues dans la base de X^0 , sont ainsi "remontées" grâce à l'opérateur \mathbf{R} . Il est représenté par une flèche montante sur la figure FIG. I.2. Le passage de $\mathbf{L}^\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon$ à $\mathbf{L}^0 u^0 = f^0$ se fait à l'aide de l'opérateur de projection $\mathbf{\Pi} : X^\varepsilon \rightarrow X^0$, qui est un opérateur satisfaisant la relation suivante :

$$\mathbf{\Pi} \circ \mathbf{R} = \mathbf{Id}_{X^0}.$$

Il est représenté par une flèche descendante sur la figure FIG. I.2. Comme $\mathbf{\Pi} \circ \mathbf{L}^\varepsilon u^\varepsilon = \mathbf{\Pi} f^\varepsilon$, pour avoir $\mathbf{R}u^0 \approx u^\varepsilon$, nous prenons $\mathbf{L}^0 = \mathbf{\Pi} \circ \mathbf{L}^\varepsilon \circ \mathbf{R}$ et $\mathbf{\Pi} f^\varepsilon = f^0$. En effet, $\mathbf{\Pi} \circ \mathbf{L}^\varepsilon u^\varepsilon = \mathbf{\Pi} f^\varepsilon = f^0 = \mathbf{L}^0 u^0 = \mathbf{\Pi} \circ \mathbf{L}^\varepsilon \circ \mathbf{R}u^0$. Sur la figure FIG. I.2 un schéma résume le principe de la méthode multiéchelles.

Pour résoudre le problème dans X^0 , une méthode numérique (type éléments finis, volumes finis, etc.) est utilisée. Dans MsFEM, la résolution du problème dans X^0 se fait

⁴Il s'agit de la mesure de Lebesgue.

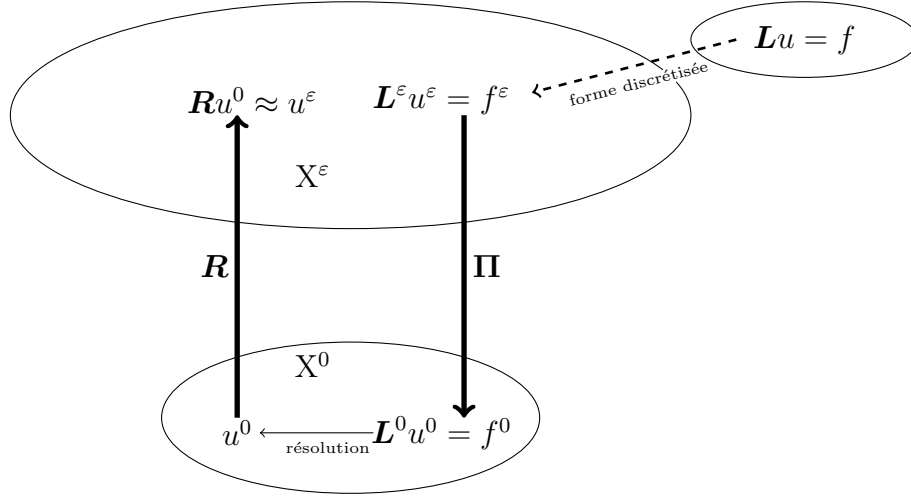


FIG. I.2 – Schéma de la méthodologie. Le point de départ est un problème discrétisé de $\mathbf{L}u = f$, dans X^ε (de grande dimension). Il est projeté par l'opérateur $\mathbf{\Pi}$. Le problème obtenu dans un espace X^0 de petite dimension est ensuite résolu, puis l'opérateur \mathbf{R} permet de reconstruire la solution sur l'espace X^ε .

à l'aide des éléments finis. En général, les fonctions de base Ψ^i utilisées dans la méthode des éléments finis standard sont remplacées par les fonctions de base multiéchelles Φ^i . Les éléments de la base $\{\Phi^i\}_{i=1,\dots,N^0}$ de X^0 sont des solutions locales d'une équation homogène associée à $\mathbf{L}^\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon$.

La méthode MsFEM consiste en deux ingrédients principaux : le calcul des fonctions de base multiéchelles (construction de X^0) et une formulation numérique globale qui couple ces fonctions de base (équation dans X^0). Les fonctions de base multiéchelles servent à capturer l'information de l'échelle caractéristique microscopique de la solution. Une formulation globale utilise ensuite ces fonctions de base afin de fournir une approximation précise des coefficients de la solution dans l'espace X^0 .

3.2 Les étapes de la méthode

Tout d'abord, nous construisons un maillage \mathfrak{M} de taille H sur Ω .

a) Etape 1 : construction d'une base de l'espace X^0

La première partie du calcul est la construction de la base multiéchelles, c'est-à-dire de X^0 . Il s'agit de modifier la base $\{\Psi^i\}_i$ de X_H pour l'adapter à notre problème. Notons Φ^i les éléments de la base de X^0 , comme les fonctions de base multiéchelles dans MsFEM.

Le support Λ_i de Φ^i est l'ensemble des cellules K ayant le nœud \mathbf{x}_i pour sommet, soit $\Lambda_i = \bigcup \{K \in \mathfrak{M}, \mathbf{x}_i \in K\}$. Une fonction $\Phi^i = F(\Psi^i)$ est définie pour tout $K \subseteq \Lambda_i$ par :

$$\begin{cases} \mathbf{L}^\Phi \circ \mathbf{R}(\Phi^i) = 0 & \text{dans } K, \\ \mathbf{R}(\Phi^i|_{\partial K}) = g_K^i & \text{sur } \partial K, \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

où \mathbf{L}^Φ est un opérateur représentatif du problème, permettant de capturer les effets des petites échelles dans K . Les conditions aux limites g_K^i sont à choisir.

Nous pouvons, par exemple, prendre \mathbf{L}^Φ l'opérateur de la discrétisation de \mathbf{L} restreint à K , g_K^i qui coïncide avec Ψ^i de X_H sur ∂K . Dans ce cas, la fonction Ψ^i est l'approximation à l'échelle grossière de Φ^i et $\Phi^i(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j}$. Nous remarquons que les éléments $\mathbf{R}(\Phi^i)$ oscillent à l'intérieur de K car elles prennent en compte les oscillations fines.

Remarque : S'il s'agit de résoudre une équation dépendant du temps, c'est-à-dire dans $[0; T] \times \Omega$, la fonction $\Phi^i = F(\Psi^i)$ est définie pour tout $K \subseteq \Lambda_i$ et tout n par :

$$\begin{cases} \mathbf{L}^\Phi \circ \mathbf{R}(\Phi^i) = 0 & \text{dans } [t_n; t_{n+1}] \times K, \\ \mathbf{R}(\Phi^i|_{\partial K})(t, x) = g_K^i(t, x) & \text{sur } [t_n; t_{n+1}] \times \partial K, \\ \mathbf{R}(\Phi^i|_{t=t_n}) = g_K^0 & \text{dans } \{t_n\} \times K, \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

où les conditions initiales g_K^0 sont aussi à choisir. Dans ce cas, nous pouvons prendre \mathbf{L}^Φ l'opérateur de la discrétisation de \mathbf{L} restreint à $[t_n; t_{n+1}] \times K$, $g_K^i(t, \cdot)$ qui coïncide avec Ψ^i de X_H sur ∂K pour tout t dans $[t_n; t_{n+1}]$, g_K^0 égale à Ψ^i dans K et $\Phi^i(\cdot, \mathbf{x}_j) = \delta_{i,j}$.

Dans certains cas, le calcul de la base multiéchelles peut être fait analytiquement, sinon une méthode numérique est nécessaire, par exemple la méthode des éléments finis comme pour MsFEM. Afin de résoudre le problème (I.29) numériquement, nous construisons un nouveau maillage, dit fin, sur chaque cellule K du maillage \mathfrak{M} , dit alors grossier. Pour trouver la solution $\mathbf{R}(\Phi^i)$ dans X^ε de (I.29) avec la méthode des éléments finis

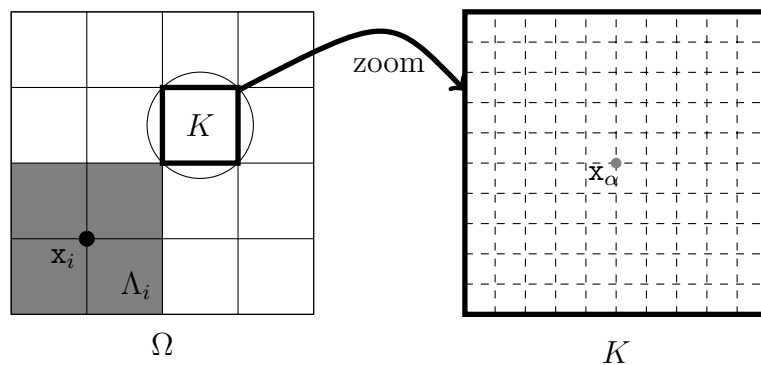


FIG. I.3 – Maillages grossiers et fin utilisés dans MsFEM. — A gauche : le maillage grossier \mathfrak{M} sur le domaine Ω . — A droite : un zoom sur le maillage fin local à la cellule K . Le point \mathbf{x}_α est un nœud du maillage fin local à K . Le support Λ_i de Φ^i est dessiné par une zone grise.

standard décrite dans la section précédente, nous remplaçons X_h par X^ε , Ω par K et dans (I.30) $[0; T]$ est aussi remplacé par⁵ $[t_n; t_{n+1}]$. Pour plus de clareté, choisissons des lettres grecques pour les indices qui concernent les maillages fins. Dans chaque cellule K , notons $\{\mathbf{x}_\alpha\}_\alpha$ les nœuds du maillage fin. Sur la figure FIG. I.3, nous pouvons voir, pour le cas d'un maillage cartésien, un zoom sur la construction du maillage fin sur une cellule K du maillage \mathfrak{M} . Dans le but de ne pas allourdir les notations, nous considérons un unique maillage fin sur le domaine entier $\bar{\Omega}$. Il suffit de renuméroter globalement les

⁵La variable temporelle est considérée comme un paramètre et les composantes de $\mathbf{R}(\Phi^i)$ sont des fonctions du temps.

nœuds des maillages fins. Le maillage fin est donc constitué de N^ε nœuds $\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,N^\varepsilon}$. Le nombre N^ε de nœuds fins est la dimension de X^ε et le maillage fin sur $\bar{\Omega}$ est donc celui qui serait utilisé avec une méthode numérique classique pour résoudre le problème $\mathbf{L}^\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon$. En notant ψ^α un élément de la base de $X^\varepsilon = \{\sum_{\alpha=1}^{N^\varepsilon} v_\alpha \psi^\alpha, v_\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}\}$, le problème variationnel approché (analogue de (I.22)) de (I.29) devient ici :

$$\text{trouver } \Phi^i \in X^\varepsilon \text{ telle que } \forall K \subseteq \Lambda_i, \quad \langle \mathbf{L}^\Phi \Phi^i, \psi^\alpha \rangle = 0 \quad \text{dans } K, \quad \forall \alpha = 1, \dots, N^\varepsilon,$$

ou simplement :

$$\text{trouver } \Phi^i = \sum_{\alpha/\mathbf{x}_\alpha \in \Lambda_i} \Phi_\alpha^i \psi^\alpha \text{ telle que } \forall K \subseteq \Lambda_i, \quad \langle \mathbf{L}^\Phi \Phi^i, \psi^\alpha \rangle = 0 \quad \text{dans } K, \quad \forall \alpha : \mathbf{x}_\alpha \in \Lambda_i.$$

Ceci est équivalent à la résolution de systèmes linéaires (un pour chaque K) de taille $\frac{N^\varepsilon}{N^0}$, petite par rapport à N^ε , en prenant seulement les α tels que le support de ψ^α et K ne soient pas disjoints, c'est-à-dire les nœuds \mathbf{x}_α de K .

Le choix de conditions aux limites g_K^i linéaires pour le calcul de Φ^i sont artificielles. Comme pour les fonctions de base multiéchelles, le choix des conditions aux limites dans (I.29) joue un rôle crucial dans l'approximation de la solution multiéchelles. Intuitivement, les conditions aux limites pour la base de X^0 reflètent l'oscillation multiéchelles de la solution à travers le bord d'une cellule grossière K . En choisissant une condition aux limites linéaire pour cette base, nous créons une erreur entre la solution exacte et l'approximation numérique à travers le bord ∂K de la cellule. Dans le cas monodimensionnel ou multidimensionnel discret, cette question n'est pas présente puisque les bords des cellules grossières (les nœuds du maillage grossier \mathfrak{M}) sont des points isolés. Dans les chapitres suivants, nous regarderons des améliorations à apporter à cette étape de la méthode, en particulier sur le choix des conditions aux limites g_K^i . La méthode utilisant MsFEM et les conditions aux limites g_K^i linéaires est notée MsFEM-L. Nous remarquons que pour des équations elliptiques linéaires, \mathbf{L}^Φ est linéaire et en conséquence X^0 est un espace linéaire engendré par $\{F(\Psi^i), \Psi^i \in X_H\}$.

Remarque : Le terme source n'apparaît pas dans les problèmes (I.29) et (I.30), il n'est donc pris en compte que grossièrement, mais cela permet de faire le calcul des éléments de la base multiéchelles, qui sont un modèle local *a priori* de la solution. Il suffit de connaître certaines informations, sur \mathbf{L} en particulier, sans pour autant connaître la situation (terme source, conditions aux limites et conditions initiales). Ceci permet de précalculer la base de X^0 .

Une fois cette base construite, nous obtenons l'espace X^0 engendré par ces éléments Φ^i qui sont couplés pour obtenir l'équation globale.

b) Etape 2 : Résolution de l'équation globale

Regardons maintenant la deuxième étape du calcul. Il s'agit de la résolution de $\mathbf{L}^\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon$ en utilisant la première étape.

La méthode des éléments finis multiéchelles utilise, dans cette étape, les fonctions de base multiéchelles Φ^i , calculées à l'étape précédente, comme fonctions de base du maillage \mathfrak{M} . Il s'agit de la méthode des éléments finis décrite dans la section précédente (voir 2.2) en remplaçant X_h par X^0 . Nous utilisons ici aussi la base de X^0 comme base pour la

solution approchée, c'est-à-dire que la solution numérique u^0 est cherchée dans l'espace X^0 . Pour trouver la solution de notre problème dans X^0 , nous substituons $u^0 = \sum_i u_i \Phi^i$ dans l'équation discrétisée sur le maillage fin. Comme u^0 est défini sur le maillage grossier, l'équation résultante est projetée sur l'espace X^0 de dimension grossière pour trouver les u_i , qui sont les composantes de u^0 dans la base de X^0 . Ceci peut être fait de différentes façons. Choisissons de multiplier l'équation résultante par les fonctions tests à l'échelle grossière. D'autres approches peuvent être prises, notamment pour des problèmes non linéaires. Notons W_H l'espace des fonctions tests, qui est de dimension N^0 . Dans le cas des méthodes des éléments finis de Galerkin, nous cherchons u^0 dans X^0 et nous prenons les fonctions tests dans $W_H = X^0$. Il est aussi possible de choisir les fonctions tests dans $W_H = X_h$, comme dans la version Petrov-Galerkin de MsFEM introduite dans [62]. Nous remarquons que, dans les deux versions, l'équation à l'échelle fine est multipliée par des fonctions test de l'échelle grossière, donc le système résultant est de dimension N^0 grossière.

La formulation variationnelle approchée de $\mathbf{L}^0 u^0 = f^0$ s'écrit donc :

$$\text{trouver } u^0 \in X^0 \text{ telle que } \forall \Psi \in W_H, \quad \langle \mathbf{L}^0 u^0, \Psi \rangle = \langle f^0, \Psi \rangle,$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre $\mathbf{L}^0(X^0)$ et W_H . En général, \mathbf{L}^Φ et \mathbf{L}^0 sont différents pour des problèmes non linéaires.

Ceci donne lieu à un système d'équations, de taille $N^0 \times N^0$, pour trouver les valeurs de la solution aux nœuds grossiers $\{\mathbf{x}_i\}_i$, donc le système d'équations résultant détermine la solution sur le maillage \mathfrak{M} . En écrivant u^0 dans la base multiéchelles de X^0 , nous obtenons un système de petite taille $N^0 \times N^0$:

$$A(u^0) = b,$$

où nous avons noté (u^0) le vecteur des composantes u_i , A la matrice de l'opérateur \mathbf{L}^0 discrétisé, c'est-à-dire $A_{ij} = \langle \mathbf{L}^0 \Phi^j, \Phi^i \rangle$ si $W_H = X^0$ et $A_{ij} = \langle \mathbf{L}^0 \Phi^j, \Psi^i \rangle$ si $W_H = X_H$, et b le vecteur de discrétisation du second membre f^0 , c'est-à-dire $b_i = \sum_j \langle \Phi^j, \Phi^i \rangle f_j$ si $W_H = X^0$ et $b_i = \sum_j \langle \Phi^j, \Psi^i \rangle f_j$ si $W_H = X_H$. Les composantes de la solution approchée u^0 dans la base de X^0 , obtenues après résolution du système, correspondent aux valeurs approchées de la solution sur les nœuds du maillage \mathfrak{M} .

Remarques :

- La matrice A est creuse. En effet, les nœuds grossiers \mathbf{x}_i ont très peu de nœuds voisins (nœuds appartenant à une même cellule que \mathbf{x}_i) dans un maillage cartésien, donc, pour de nombreux éléments Φ^j , le support de Φ^i (et de Ψ^i) et celui de Φ^j sont disjoints.
- Si le problème est instationnaire, les composantes u_i dépendent du temps. Même dans le cas \mathbf{L}^Φ instationnaire si Φ^i et u^0 ne sont pas calculés sur les mêmes intervalles de temps, les u_i dépendent du temps.

c) Etape 3 : post-traitement

Pour remonter à X^ε , nous reconstruisons la solution en chaque nœud du maillage fin en utilisant la base multiéchelles. Ceci revient à appliquer l'opérateur de reconstruction

\mathbf{R} à u^0 . Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= \mathbf{R}(u^0(x)) = \mathbf{R}\left(\sum_i u_i \Phi^i(x)\right) = \sum_i u_i \mathbf{R}(\Phi^i(x)) \\ &= \sum_i u_i \sum_\alpha \Phi_\alpha^i \psi^\alpha(x). \end{aligned}$$

En identifiant $\Phi^i \in X^0 \subset X^\varepsilon$ et son interpolation $\mathbf{R}(\Phi^i) \in X^\varepsilon$, nous avons tout simplement :

$$u^\varepsilon(x) = \sum_i u_i \cdot \Phi^i(x) = \sum_i u_i \left(\sum_\alpha \Phi_\alpha^i \psi^\alpha(x) \right), \quad x \in \Omega.$$

Dans le cas où le problème est instationnaire, les composantes u_i de u^0 dépendent du temps et ainsi nous obtenons :

$$u^\varepsilon(t, x) = \sum_i u_i \cdot \Phi^i(t, x) = \sum_i u_i \left(\sum_\alpha \Phi_\alpha^i(t) \psi^\alpha(x) \right), \quad x \in \Omega.$$

De plus, si \mathbf{L}^Φ est un opérateur stationnaire, donc Φ_α^i réel, nous obtenons :

$$u^\varepsilon(t, x) = \sum_i u_i(t) \cdot \Phi^i(x) = \sum_i u_i(t) \left(\sum_\alpha \Phi_\alpha^i \psi^\alpha(x) \right), \quad x \in \Omega.$$

3.3 Cas de MsFEM pour une équation elliptique linéaire

Nous regardons, dans cette partie, comment résoudre, avec MsFEM, une équation elliptique linéaire du point de vue de cette méthodologie. Dans le cas de la résolution d'une équation elliptique linéaire de la forme :

$$-\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) = f \quad \text{dans } \Omega,$$

il suffit de prendre tous les opérateurs égaux :

$$\mathbf{L}^\varepsilon(v) = \mathbf{L}^0(v) = \mathbf{L}^\Phi(v) = -\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} v),$$

et l'espace des fonctions test égal à celui engendré par les fonctions de base multiéchelles, c'est-à-dire $W_H = X^0$.

Nous sommes donc amenés à résoudre avec MsFEM le problème approché suivant :

$$-\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u^\varepsilon) = f^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega,$$

où $u^\varepsilon \in X^\varepsilon$, $f^\varepsilon \in \mathbf{L}(X^\varepsilon)$. Ici, les fonctions de base multiéchelles sont solutions du problème suivant :

$$\text{trouver } \Phi^i \text{ dans } X^\varepsilon \text{ telle que } \begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} \Phi^i) = 0 & \text{dans } K, \\ \Phi^i = \Psi^i & \text{sur } \partial K, \end{cases}$$

où Ψ^i est un élément de la base de X_H , qui est défini par :

$$\begin{aligned} X_H &= \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_K \in \mathbb{Q}_1 \ \forall K \in \mathfrak{M} \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad \text{pour un maillage cartésien;} \\ X_H &= \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_K \in \mathbb{P}_1 \ \forall K \in \mathfrak{M} \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

En utilisant la méthode des éléments finis standard sur un maillage plus fin (de taille h), nous obtenons le système :

$$\sum_{\beta} \int \nu \vec{\nabla} \psi^{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi^{\beta} \Phi_{\beta}^i = 0, \quad \forall \alpha.$$

La résolution du système nous donne les composantes Φ_{α}^i de Φ^i dans la base $\{\psi^{\alpha}\}_{\alpha}$ de X^{ε} . La résolution de $-\nabla \cdot (\nu \nabla u^0) = f^0$ dans Ω où $u^0 \in X^0$, ce fait en changeant, dans la méthode des éléments finis, les fonctions de base par les fonctions multiéchelles Φ^i . Ceci nous donne, après résolution du petit système linéaire de taille $N^0 \times N^0$ suivant :

$$\sum_j \int_{\Lambda_i} \nu \vec{\nabla} \Phi^i \cdot \vec{\nabla} \Phi^j u_j = \sum_j \int_{\Lambda_i} \Phi^i \Phi^j f_j \quad \forall i,$$

les composantes u_i de u^0 dans X^0 , soit $u^0 = \sum_i u_i \Phi^i$. Comme $\Phi^i = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}^i \psi^{\alpha}$, la solution approchée est finalement donnée par :

$$u^{\varepsilon} = \sum_{\alpha} \left(\sum_i u_i \Phi_{\alpha}^i \right) \psi^{\alpha}.$$

Remarque : Dans MsFEM, une fonction de base multiéchelles est solution locale⁶ du problème sans second membre. La solution dans X^0 donne une bonne approximation de la solution homogénéisée vers laquelle elle converge lorsque ε tend vers zéro. En remontant à l'espace X^0 , sur lequel les éléments de la base sont calculés, c'est-à-dire celui décrivant les solutions sur le maillage fin, la solution varie à l'échelle des petites hétérogénéités du problème.

4 Conclusion

Une bonne approximation est obtenue avec la méthode des éléments finis standard, ou tout autre méthode, seulement si la taille h du maillage est plus petite que l'échelle la plus fine, c'est-à-dire $h \ll \varepsilon$. Il est bien connu que ceci n'est pas satisfaisant puisque le temps CPU, aussi bien que la place mémoire, croît polynômialement en h^{-1} , ce qui devient rapidement prohibitif. La représentation de la solution à l'échelle fine, via la base multiéchelles permet de réduire la dimension du calcul : N^0 au lieu de N^{ε} .

La méthodologie multiéchelles développée dans ce chapitre décrit un ensemble de méthodes multiéchelles. Elle généralise l'idée de MsFEM en créant une base qui est utilisée lors du calcul de la solution sur un maillage grossier. La solution numérique multiéchelles obtenue varie à l'échelle fine en prenant en compte les fluctuations du problème. Elle est ainsi proche d'une solution numérique obtenue par une méthode classique (éléments finis par exemple) sur un maillage très fin.

Cette méthodologie donne donc un schéma de construction de méthodes numériques multiéchelles permettant de résoudre efficacement un problème hétérogène après un précalcul de solutions modèles.

⁶Dans les cellules ayant en commun le nœud grossier associé à la fonction.

Méthode multiéchelles pour la simulation de fissures

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthodologie multiéchelles à la simulation de fissures. Elle est réalisée par la méthode MsFEM. Nous validons cette méthode sur un modèle simple d'un problème de fissure à l'aide de résultats numériques. Nous présentons le problème dans une première partie, suivi du modèle choisi dans une deuxième partie. De plus, la méthode est adaptée à ce contexte dans une troisième partie et validée dans une quatrième partie.

1 Présentation du problème

1.1 Contexte physique

Un défaut d'un matériau est parfois générateur d'une fissure susceptible de se propager brutalement jusqu'à provoquer une rupture. Le critère de Griffith (voir [57]) désigne une contrainte maximale au-delà de laquelle un matériau fragile rompt. La fissure, signifiant petite fente, est caractérisée par une discontinuité brutale, où la matière est séparée sur une certaine surface, comme sur la figure FIG. II.1. Sa propagation, sous l'effet de contraintes suffisantes, combinée ou non avec un environnement agressif (corrosion sous contrainte), peut mener à la rupture du matériau. La fissure est essentiellement, en pratique, le facteur limitant de la résistance mécanique des matériaux fragiles (par exemple les verres et les céramiques). La mécanique des solides propose des équations représentatives du comportement intrinsèque des matériaux au cours des phénomènes considérés. La théorie de l'élasticité est, le plus souvent, suffisante pour calculer les contraintes et les déformations (voir [74]).

1.2 Apport

La simulation d'une fissure se fait classiquement par la méthode des éléments finis étendus (XFEM), qui est bien adaptée à ce contexte. Elle a été développée à la fin des années 1990 par Moës et Belytschko (voir [79]) et est basée sur la méthode de partition de l'unité de Babuska (voir [17]). Dans cette méthode, la fissure est représentée indépendamment du maillage. Une méthode éléments finis standard est d'abord définie



FIG. II.1 – Fissures.— A gauche : une unique fissure. — A droite : plusieurs fissures qui se croisent.

sur le maillage. Sur les éléments touchés par la fissure, la base élément fini reçoit des degrés de liberté spécifiques pour représenter les effets de la fissure. Le long de la fissure, pour représenter la séparation du matériau, la fonction de base est multipliée par une fonction de Heaviside, et sur le nœud contenant le fond de fissure, les fonctions de base sont multipliées par les singularités du modèle, ce qui permet d'éviter le raffinement près du fond de fissure. L'idée d'enrichir la base élément fini par la singularité n'est pas nouvelle : par exemple, la méthode dite de la singularité ("Singular Function Method") a inspiré XFEM (voir [95, 24]). De plus, en cas de propagation, il n'est pas nécessaire de remailler le domaine, car le maillage n'est pas modifié : seuls les degrés de liberté spécifiques qui représentent la fissure et ses effets doivent être mis à jour.

Cependant, lorsque plusieurs fissures se croisent, le nombre de degrés de liberté spécifiques tend vers celui des éléments finis standard et les singularités sont plus difficiles à calculer aux intersections des fissures. L'épaisseur ε d'une fissure est très petite par rapport à celle du domaine, comme sur la figure FIG. II.1. Ceci est schématisé de façon simplifiée sur la figure FIG. II.2. Ce type de problème nous suggère l'utilisation d'une méthode multiéchelles. Nous choisissons alors la méthode MsFEM pour l'adapter à ce contexte. Le but est de tester et valider numériquement la méthode MsFEM dans ce contexte. Nous verrons, par la suite, que ce contexte illustre bien les améliorations apportées par l'*oversampling*.

2 Modèle choisi

Nous supposons que le domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ est un milieu élastique¹ comportant une fissure. Nous assimilons cette fissure à une surface d'épaisseur négligeable devant sa

¹Un milieu est élastique s'il existe un état de référence sans contrainte et si, après déformation, le tenseur des contraintes ne dépend que du tenseur des déformations calculé à partir de cet état de référence.

longueur. Physiquement, elle correspond à du vide (la zone de séparation du matériau). Notons Ω_ε le domaine sans la fissure comme sur la figure FIG. II.2. Nous regardons le

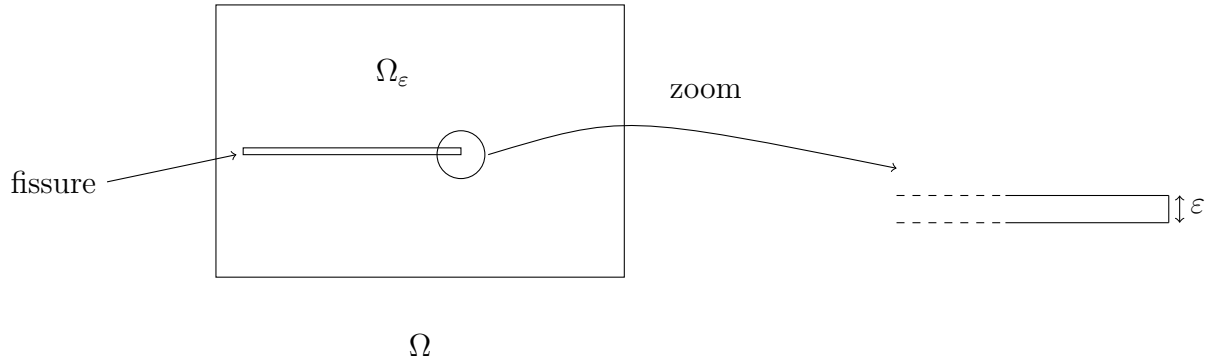


FIG. II.2 – Domaine avec fissure : Ω est le domaine rectangulaire et Ω_ε le domaine physique (sans la fissure). La fissure est d'épaisseur ε très petite.

comportement du déplacement de la surface par rapport à la configuration d'équilibre, c'est-à-dire sans force exercée. Le déplacement est la différence entre l'ancienne et la nouvelle position.

L'équation stationnaire associée à l'équation de mouvement² après linéarisation nous donne les équations d'équilibre (voir [37]) :

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad (\text{II.1})$$

où les f_i sont les densités volumiques des forces et σ est le tenseur des contraintes. La loi de comportement du milieu est définie par :

$$\sigma_{i,j} = \sum_{k,l} a_{i,j,k,l} \tilde{\sigma}_{k,l}, \quad (\text{II.2})$$

où $\tilde{\sigma}$ est le tenseur des déformations linéarisé relié au champ des déplacements \vec{u} par :

$$\tilde{\sigma}_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

et les $a_{i,j,k,l}$ sont des coefficients qui ne dépendent pas de la variable d'espace dans un milieu homogène.

Supposons que le milieu Ω est homogène et isotrope³. Le tenseur σ vérifie alors la loi de comportement de Hooke :

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\tilde{\sigma}) I + 2\mu \tilde{\sigma}, \quad (\text{II.3})$$

où tr est la trace et I est le tenseur identité. Les coefficients λ et μ sont les coefficients de Lamé⁴. Ceci donne, en remplaçant (II.3) dans les équations d'équilibre (II.1), les

²Elle est donnée par la loi fondamentale de la dynamique.

³Un milieu est isotrope s'il a les mêmes propriétés quelques soient les directions autour d'un point, ce qui n'est pas le cas par exemple des cristaux dont la structure est ordonnée.

⁴ λ n'a pas d'interprétation physique et μ est le module de cisaillement.

équations de Navier de l'élasticité pour le champ des déplacements :

$$(\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\operatorname{div} \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u} + \vec{f} = \vec{0}.$$

Remarque : Le terme $\vec{\nabla} (\operatorname{div} \vec{u})$ peut s'écrire sous la forme $\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{u}) + \Delta \vec{u}$.

Plaçons nous en dimension deux et supposons que le rotationnel de \vec{u} est constant, nous écrivons finalement le système sous la forme :

$$\nu \Delta \vec{u} + \vec{f} = \vec{0},$$

avec $\nu = \lambda + 2\mu$. De plus, en prenant la première composante de \vec{f} nulle par un choix de mode de rupture d'ouverture comme sur la figure FIG. II.3, seule la deuxième composante de \vec{u} est non nulle.

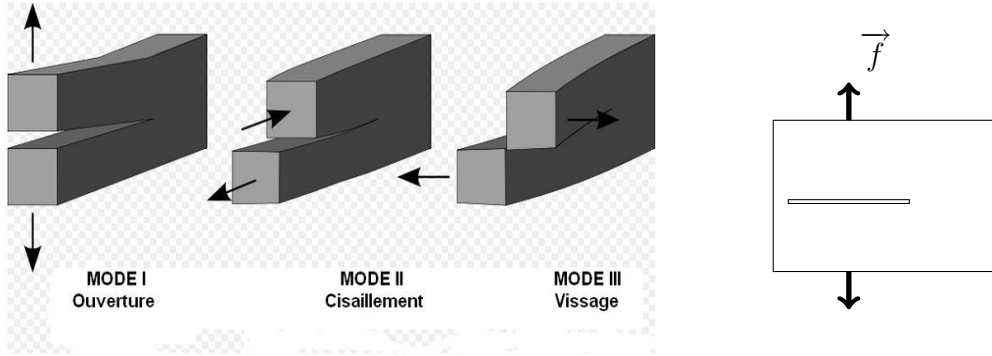


FIG. II.3 – Modes de ruptures⁶. — A gauche : les trois différents modes de ruptures. — A droite : le chargement choisi dans ce chapitre.

Notons simplement u la deuxième composante de \vec{u} et f celle de \vec{f} , puis considérons l'équation d'équilibre dans un domaine fissuré $\Omega_\varepsilon \subsetneq \Omega$, c'est-à-dire l'équation elliptique du second ordre suivante :

$$-\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{II.4})$$

où f est appelé le chargement. Du point de vue de la modélisation, la fissure consiste à prendre dans (II.4) :

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \delta & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

avec δ un paramètre très petit ($\delta \ll 1$). Le déplacement u vérifie (II.4) avec les conditions aux limites de Dirichlet :

$$u|_{\partial\Omega_\varepsilon} = g \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \quad (\text{II.6})$$

pour un problème de traction pure, ou les conditions aux limites de Neumann :

$$\begin{cases} u|_{\partial\Omega} = g & \text{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon), \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

⁶Source : http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Modes_de_rupture.JPG

où \vec{n} est la normale extérieure à Ω , pour un problème de déplacement pur (voir [31]).

Remarques :

- Sans fissure, ni force extérieure, la surface se comporte comme une membrane dont le comportement dynamique est modélisé par l'équation des ondes (voir [49]).
- En l'absence de fissure, c'est-à-dire $\Omega_\varepsilon = \Omega$, le déplacement u vérifie alors l'équation dynamique :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f,$$

où ρ est la densité de masse de la configuration d'équilibre.

Plus généralement, dans un milieu non nécessairement homogène et isotrope, en dimension quelconque et sans hypothèse sur les forces, les équations dynamiques s'écrivent :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_j \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} + f_i,$$

où σ vérifie (II.2).

Sur ce modèle (II.4)-(II.5), nous regardons dans la section suivante comment utiliser la méthode MsFEM (voir chapitre I) dans ce contexte.

3 Méthode multiéchelles MsFEM

Cette méthode numérique nécessite une décomposition du domaine Ω en cellules. Définissons un maillage \mathfrak{M} , dit grossier, à N^0 nœuds $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1,\dots,N^0}$ (voir FIG. II.4). Les

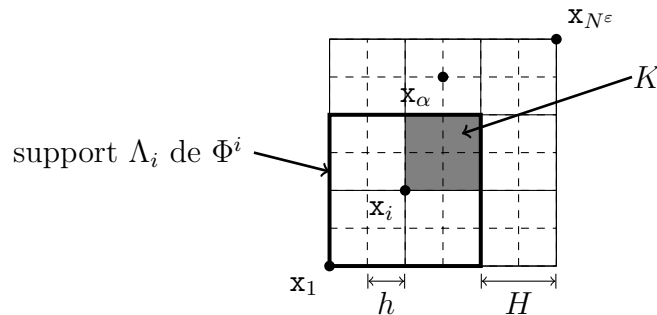


FIG. II.4 – Maillages cartésiens en deux dimensions. Le domaine Ω est décomposé en cellules grossières (en traits pleins) de taille H , qui sont elles même décomposées en cellules fines (en pointillés) de taille h . Le support Λ_i de la fonction Φ^i (marqué par des traits plus épais) est centré au nœud \mathbf{x}_i du maillage grossier et est composé des cellules grossières dont \mathbf{x}_i est le sommet. Une de ces cellules K est indiquée par une zone grisée. Le point \mathbf{x}_α est un nœud du maillage fin et les points $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1,\dots,N^\varepsilon}$ sont les nœuds du maillage fin sur Ω entier.

cellules grossières sont de taille $\Delta x \times \Delta y$, avec Δx le pas d'espace dans la direction x et Δy le pas d'espace dans la direction y , ou simplement $H \times H$ si $\Delta x = \Delta y = H$. Chaque cellule est à son tour décomposée en cellules, dites fines. Nous représentons un exemple de décomposition du domaine sur la figure FIG. II.4, où les cellules grossières sont en traits

pleins et les cellules fines en pointillés. Choisissons de noter avec des lettres grecques les indices du maillage fin. Définissons sur Ω un maillage fin à N^ε nœuds $\{\mathbf{x}_\xi\}_{\xi=1,\dots,N^\varepsilon}$. Ce maillage est pris conforme au maillage grossier, c'est-à-dire qu'à chaque nœud grossier \mathbf{x}_i correspond un nœud fin \mathbf{x}_ξ . Le maillage grossier comporte donc N^0 nœuds et le maillage fin N^ε nœuds.

La méthode se déroule en trois étapes : un précalcul des fonctions de base, puis la résolution globale du problème et enfin le post-traitement. La fonction ν varie à une échelle $\varepsilon \ll H$. Ces variations fines de ν seront portées par les fonctions de base. Précisons ces étapes dans le contexte de la fissure.

3.1 Construction des fonctions de base

Nous présentons ici la première étape du calcul de la méthode, c'est-à-dire comment sont calculées les fonctions de base multiéchelles pour notre problème (II.4). Les fonctions de base $\{\Phi^i\}_{i=1,\dots,N^0}$ doivent prendre en compte les variations de ν . Notons Λ_i le support de Φ^i , c'est-à-dire :

$$\Lambda_i = \bigcup_{\mathbf{x}_i \text{ sommet de } K} K.$$

Chaque fonction de base est solution de l'équation stationnaire homogène associée à (II.4), soit du problème suivant :

$$(P^i) \begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} \Phi^i) = 0 & \text{sur } K, \\ \Phi^i|_{\partial K} = g_K & \text{sur } \partial K, \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

où $K \subseteq \Lambda_i$ est une des cellules grossières du support Λ_i de Φ^i , et g_K est la donnée des conditions aux limites.

Pour chaque cellule K , nous utilisons la méthode des éléments finis standard pour résoudre les problèmes (P^i) avec un maillage fin sur K à N_K nœuds $\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,N_K}$ et de taille inférieure à ε dans les deux directions d'espace.

Remarque : Il s'agit de construire, pour chaque nœud \mathbf{x}_i , une fonction Φ^i en résolvant quatre problèmes (une par cellule K de Λ_i), ou quatre fonctions pour chaque cellule K de \mathfrak{M} .

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la condition aux limites g_K n'étant pas une donnée physique, sa détermination est un point délicat dans le calcul des fonctions de base. Nous utiliserons d'abord des conditions aux limites linéaires puis des conditions aux limites plus adaptées à notre problème dans la suite du chapitre. Ici, nous calculons les fonctions de base en prenant pour g_K la fonction de base des éléments finis \mathbb{Q}_1 centrée au nœud \mathbf{x}_i . Sur le bord de la cellule K , nous posons donc $g_K = \Psi^i|_{\partial K}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} g_K(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j} & \forall \mathbf{x}_j \in \partial K \\ g_K \text{ linéaire sur } \partial K. \end{cases}$$

En multipliant l'équation par une fonction de base ψ^α de X^ε , puis en intégrant formellement sur son support, nous obtenons :

$$-\int_{\gamma_\alpha} \nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} \Phi^i) \psi^\alpha = 0,$$

où γ_α désigne le support de ψ^α . Ceci donne, après intégration par parties :

$$\int_{\gamma_\alpha} \nu \vec{\nabla} \Phi^i \vec{\nabla} \psi^\alpha = 0,$$

car ψ^α est nulle sur le bord de son support γ_α . En cherchant Φ^i dans l'espace X^ε engendré par les ψ^α , nous utilisons la décomposition de Φ^i suivante :

$$\mathbf{R}(\Phi^i)(x) = \sum_{\beta} \psi^\beta(x) \Phi_\beta^i, \quad x \in \partial K,$$

où les Φ_β^i sont les composantes de la fonction Φ^i dans X^ε . En utilisant la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation (II.8), nous obtenons un système linéaire de taille $N_K \times N_K$:

$$\sum_{\beta} \int_{\gamma_\alpha \cap \gamma_\beta} (\nu \vec{\nabla} \psi^\beta \vec{\nabla} \psi^\alpha) \Phi_\beta^i + \sum_{\beta} \int_{\partial(\gamma_\alpha \cap \gamma_\beta)} (-\nu \psi^\alpha \vec{\nabla} \psi^\beta) \cdot \vec{n} ds \Phi_\beta^i = 0.$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$D(\Phi^i) = 0,$$

avec (Φ^i) le vecteur des composantes de la fonction Φ^i dans X^ε , et

$$D_{\alpha,\beta} = \int_{\gamma_\alpha \cap \gamma_\beta} \nu \vec{\nabla} \psi^\beta \cdot \vec{\nabla} \psi^\alpha - \underbrace{\int_{\partial(\gamma_\alpha \cap \gamma_\beta)} \nu \psi^\alpha \vec{\nabla} \psi^\beta \cdot \vec{n} ds}_{=0 \text{ car } \psi^\alpha|_{\partial\gamma_\alpha}=0 \text{ et } \vec{\nabla} \psi^\beta|_{\partial\gamma_\beta}=\vec{0}} = \int_{\gamma_\alpha \cap \gamma_\beta} \nu \vec{\nabla} \psi^\beta \cdot \vec{\nabla} \psi^\alpha.$$

Pour le calcul de ces intégrales, nous utilisons l'expression analytique des fonctions ψ^α . Une fonction de base linéaire 2D (voir FIG. II.5) est le produit de deux fonctions de base linéaire 1D dans chaque direction. Le maillage 2D est le produit cartésien des

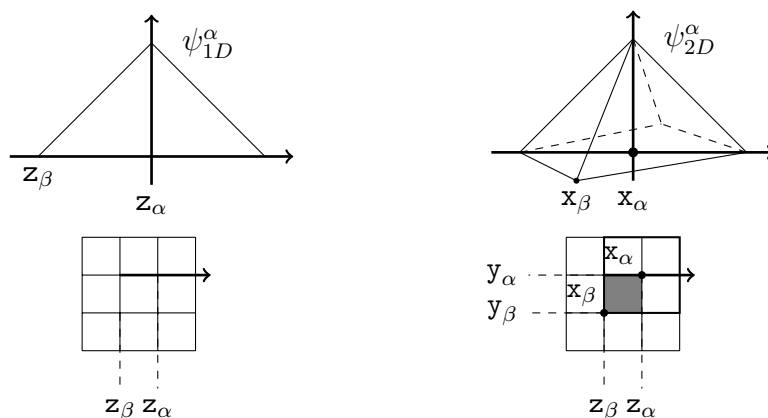


FIG. II.5 – Fonction de base linéaire 2D. — A gauche une fonction de base linéaire en 1D. — A droite une fonction de base linéaire en 2D construite comme un produit de deux fonctions en 1D.

intervalles de deux maillages 1D. Notons y_α et z_α les nœuds de chaque maillage en

1D. Les nœuds du maillage 2D sont alors les $\mathbf{x}_\alpha = (\mathbf{z}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha)$. Sur un intervalle $[\mathbf{z}_\alpha; \mathbf{z}_\beta] \cup [\mathbf{z}_\beta; \mathbf{z}_\alpha]$, nous avons $\psi_{1D}^\alpha(x) = 1 - \frac{x - \mathbf{z}_\alpha}{\mathbf{z}_\beta - \mathbf{z}_\alpha}$. Ceci donne en 2D, pour la fonction de base ψ_{2D}^α centrée en $\mathbf{x}_\alpha = (\mathbf{z}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha)$ sur une cellule fine de son support :

$$\psi_{2D}^\alpha(x, y) = \psi_{1D}^\alpha(x) \times \psi_{1D}^\alpha(y) = 1 + \frac{(x - \mathbf{z}_\alpha)(y - \mathbf{y}_\alpha)}{(\mathbf{z}_\beta - \mathbf{z}_\alpha)(\mathbf{y}_\beta - \mathbf{y}_\alpha)} - \frac{x - \mathbf{z}_\alpha}{\mathbf{z}_\beta - \mathbf{z}_\alpha} - \frac{y - \mathbf{y}_\alpha}{\mathbf{y}_\beta - \mathbf{y}_\alpha},$$

où $\mathbf{x}_\beta = (\mathbf{z}_\beta, \mathbf{y}_\beta)$ est l'autre extrémité de la cellule fine, grisée sur la figure FIG. II.5. Remarquons qu'en $(\mathbf{z}_\beta, \mathbf{y})$ ou (x, \mathbf{y}_β) cette fonction est nulle et $\psi_{2D}^\alpha(\mathbf{x}_\alpha) = 1$.

La fonction de base Φ est connue sur le bord de la cellule K , car $\Phi|_{\partial K} = g_K$ sur ∂K . En séparant les inconnues des données du problème, puis en résolvant les systèmes (un pour chaque cellule $K \subseteq \Lambda_i$), nous obtenons les composantes Φ_α^i de Φ^i dans la base des éléments finis $\{\psi^\alpha\}_\alpha$.

Remarque : Dans cette partie du calcul, il y a beaucoup de systèmes linéaires à résoudre. Cependant, ils ne sont pas trop grand (de taille $N_K \times N_K$), ce qui permet de faire les calculs assez rapidement et n'occupe pas une grande place en mémoire. De plus, ces calculs sont indépendants, ce qui permet de les faire en parallèle et ainsi de gagner du temps de calcul. Ici, ces calculs sont faits au préalable, car ils ne nécessitent pas de connaître les données du problème. Le temps de calcul n'est ainsi pas très important. Nous pouvons donc nous permettre un maillage très fin.

Ce précalcul sert ensuite dans la résolution de l'équation contenant les données "en temps réel" du problème. Cela fait l'objet de la suite.

3.2 Résolution du problème global

Nous présentons ici la deuxième étape du calcul de la méthode, c'est-à-dire comment calculer le déplacement à partir des fonctions de base multiéchelles. Dans ce chapitre, nous résolvons le problème stationnaire (II.4) :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous cherchons la solution approchée u^0 dans X^0 sous la forme :

$$u^0(x) = \sum_{i=1}^{N^0} u_i \Phi^i(x), \quad (\text{II.9})$$

où les u_i sont les composantes de la fonction u^0 dans l'espace X^0 engendré par les fonctions de base multiéchelles $\{\Phi^i\}_{i=1, \dots, N^0}$. La méthode consiste à utiliser la méthode des éléments finis standard en remplaçant les fonctions de base \mathbb{Q}_1 par les fonctions de base multiéchelles $\{\Phi^i\}_{i=1, \dots, N^0}$, précalculées dans l'étape précédente.

La discrétisation de l'équation (II.4) par les éléments finis $\{\psi^\alpha\}_{\alpha=1, \dots, N^\varepsilon}$ donne :

$$\underbrace{- \int_{\gamma_\alpha} \nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u^\varepsilon)}_{(\mathbf{L}^\varepsilon u^\varepsilon)_\alpha} \psi^\alpha = \int_{\gamma_\alpha} f^\varepsilon \psi^\alpha, \quad \forall \alpha = 1, \dots, N^\varepsilon, \quad (\text{II.10})$$

d'où

$$\mathbf{L}^\varepsilon u^\varepsilon = \sum_{\alpha} \left(- \int_{\gamma_\alpha} \nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u^\varepsilon) \psi^\alpha \right) \psi^\alpha.$$

Afin de projeter (II.10) sur X^0 , nous multiplions l'équation (II.4) par une fonction de base multiéchelles Φ^i , puis nous intégrons sur son support, ce qui nous donne :

$$\underbrace{- \int_{\Lambda_i} \nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u^0) \Phi^i}_{(\mathbf{L}^0 u^0)_i} = \int_{\Lambda_i} f \Phi^i, \quad \forall i = 1, \dots, N^0. \quad (\text{II.11})$$

Il s'agit donc d'utiliser l'opérateur de projection suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} : X^\varepsilon &\rightarrow X^0 \\ u^\varepsilon &\mapsto \sum_i \underbrace{\left(\int_{\Lambda_i} u^\varepsilon \Phi^i \right)}_{i^{\text{ème}} \text{ composante}} \Phi^i. \end{aligned}$$

L'opérateur \mathbf{L}^0 est donc défini par :

$$\mathbf{L}^0 u^0 = \sum_i \left(- \int_{\Lambda_i} \nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u^0) \Phi^i \right) \Phi^i.$$

De plus, comme nous cherchons u^0 dans X^0 , en substituant la décomposition (II.9) dans (II.11), nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^{N^0} \int_{\Lambda_i \cap \Lambda_j} \left(- \nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} \Phi^j \Phi^i) \right) u_j = \int_{\Lambda_i} f \Phi^i, \quad \forall i = 1, \dots, N^0.$$

Enfin, après intégration par parties, nous sommes amenés à résoudre le système linéaire de petite taille $N^0 \times N^0$ suivant :

$$\sum_{j=1}^{N^0} \mathbb{D}_{i,j} u_j = \sum_{j=1}^{N^0} \mathbb{M}_{i,j} f_j, \quad \forall i = 1, \dots, N^0, \quad (\text{II.12})$$

avec les matrices :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{i,j} &= \int_{\Lambda_i \cap \Lambda_j} \nu \vec{\nabla} \Phi^j \vec{\nabla} \Phi^i - \int_{\partial(\Lambda_i \cap \Lambda_j)} \nu \Phi^i \vec{\nabla} \Phi^j \cdot \vec{\mathbf{n}}^{ij} ds, \\ \text{et } \mathbb{M}_{i,j} &= \int_{\Lambda_i \cap \Lambda_j} \Phi^i \Phi^j, \end{aligned}$$

où $\vec{\mathbf{n}}^{ij}$ désigne le vecteur normal unitaire extérieur à $\partial(\Lambda_i \cap \Lambda_j)$.

L'inversion du système, c'est-à-dire de la matrice \mathbb{D} , sujet aux conditions aux limites g sur $\partial\Omega$, donne les composantes u_j de la fonction u^0 dans la décomposition (II.9). Dans cette partie le système à résoudre est petit (de taille $N^0 \times N^0$), donc rapide à résoudre. Une méthode numérique classique utiliserait un système de très grande taille, ce qui est très lent. La méthode multiéchelles nous permet de résoudre un système de petite taille, donc d'obtenir une solution approchée très rapidement.

Remarque : Pour calculer les composantes u_j de u^0 dans la base des Φ^i , il suffit d'intégrer dans le système (II.12) les conditions aux limites :

- pour la condition de Dirichlet $u|_{\partial\Omega_\varepsilon} = g$: les termes en u_j correspondants aux nœuds \mathbf{x}_j du bord de Ω_ε sont retirés du membre de gauche et ajoutés dans le vecteur second membre, en le remplaçant par la valeur connue de $g(\mathbf{x}_j)$;
- pour la condition de Neumann $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$: les termes en u_j correspondants aux nœuds \mathbf{x}_j du bord de $\partial(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)$ reste dans le membre de gauche, u_j reste une valeur inconnue à calculer.

Pour le calcul de $\int_{\Lambda_i} f \Phi^i$, nous utilisons une méthode de quadrature. Les fonctions Φ^i sont évaluées en tout point de Ω grâce à l'interpolation éléments finis : $\Phi^i = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}^i \psi^{\alpha}$ et f , connue analytiquement, est évaluée à l'aide de la même interpolation : $f \approx \sum_{\beta} f(\mathbf{x}_{\beta}) \psi^{\beta}$. Autrement dit, nous avons $\int_{\Lambda_i} f \Phi^i \approx \sum_{\alpha, \beta} f(\mathbf{x}_{\beta}) \Phi_{\alpha}^i \int_{\Lambda_i} \psi^{\beta} \psi^{\alpha}$.

3.3 Post-traitement

Il s'agit de la reconstitution d'une solution approchée u^ε dans X^ε . La résolution de (II.4) fournit une solution approchée u^0 dans X^0 . Pour trouver une solution approchée $u^\varepsilon = \mathbf{R}(u^0)$ dans l'espace X^ε , c'est-à-dire sur le maillage fin à N^ε nœuds, il suffit de remplacer les fonctions Φ^i par leur décomposition sur X^ε , soit $\Phi^i(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{N^\varepsilon} \Phi_{\alpha}^i \psi^{\alpha}(x, y)$, où les Φ_{α}^i sont nulles si le support de ψ^{α} et celui de Φ^i sont disjoints. Nous obtenons ainsi :

$$u^\varepsilon(x, y) = \sum_i u_i \Phi^i(x, y) = \sum_{i=1}^{N^0} u_i \sum_{\alpha=1}^{N^\varepsilon} \Phi_{\alpha}^i \psi^{\alpha}(x, y) = \sum_{\alpha} u_{\alpha} \psi^{\alpha}(x, y),$$

où on note $u_{\alpha} = \sum_{j=1}^{N^0} u_j \Phi_{\alpha}^j$ la composante de u^ε correspondant à l'élément ψ^{α} . Finalement, la solution approchée u^ε est définie sur le maillage fin de taille N^ε , ce qui permet d'avoir un comportement détaillé de la solution.

3.4 La méthode MsFEM avec *oversampling*

Ici, nous nous intéressons à la méthode d'*oversampling* mentionnée dans le chapitre I, que nous notons MsFEM-OS. Nous l'appliquons à notre problème de fissure. Cette méthode permet d'éliminer l'effet des conditions aux limites linéaires (voir [61]) dû à l'erreur entre les conditions aux limites locales artificielles imposées aux fonctions de base multiéchelles et la nature globale de la solution oscillatoire de l'opérateur différentiel.

Nous cherchons à construire des fonctions de base multiéchelles solutions de (II.8) avec des conditions aux limites g_K plus adaptées à l'opérateur du problème (II.4). L'idée est d'éloigner les conditions aux limites linéaires⁷ du bord de la cellule K . Pour cela, nous construisons des volumes de contrôle \tilde{K} , comme sur la figure FIG. II.6 pour un maillage cartésien, en élargissant les cellules K d'un certain nombre κ de cellules fines dans chaque direction et de chaque côté. Nous construisons ensuite des fonctions de base intermédiaires, notées φ , solutions des problèmes (P^i) sur ces nouveaux volumes de contrôle. Sur chaque sommet $\tilde{\mathbf{x}}_m$ du volume \tilde{K} ainsi construit, nous construisons une

⁷Dans MsFEM-L, g_K est linéaire.

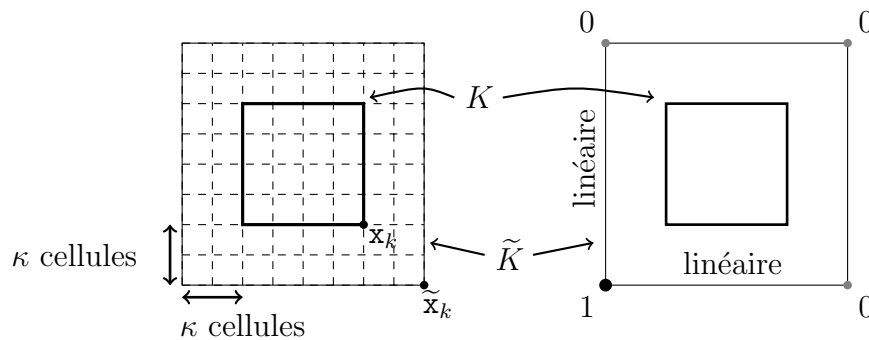


FIG. II.6 – Calcul d’une fonction de base intermédiaire φ^m par la méthode MsFEM-OS. — A gauche : construction du nouveau volume de contrôle \tilde{K} dans le cas où K est divisé en quatre cellules fines dans chaque direction et $\kappa = 2$; les sommets de \tilde{K} sont notés $\tilde{\mathbf{x}}_k$. — A droite : construction de la condition aux limites $g_{\tilde{K}}$ sur $\partial\tilde{K}$.

fonction φ^m solution du problème suivant :

$$(P^m) \begin{cases} \mathbf{L}^\Phi \varphi^m = 0 & \text{dans } \tilde{K}, \\ \varphi^m|_{\partial\tilde{K}} = g_{\tilde{K}} & \text{sur } \partial\tilde{K}, \end{cases}$$

soit ici :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} \varphi^m) = 0 & \text{dans } \tilde{K}, \\ \varphi^m|_{\partial\tilde{K}} = g_{\tilde{K}} & \text{sur } \partial\tilde{K}, \end{cases}$$

avec comme conditions aux limites :

$$\begin{cases} g_{\tilde{K}}(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \delta_{m,k}, \\ g_{\tilde{K}} \text{ linéaire} & \text{sur } \partial\tilde{K}. \end{cases}$$

Le nœud $\tilde{\mathbf{x}}_k$ est un sommet (voir la figure FIG. II.6) de \tilde{K} , situé à une distance (dans toutes les directions) de κ cellules (fines) du sommet \mathbf{x}_k de la cellule K . Chacun des problèmes (P^m) est résolu par la méthode des éléments finis sur un maillage fin sur \tilde{K} , comme expliqué précédemment pour le calcul de (II.8). Le maillage sur \tilde{K} comporte $N_{\tilde{K}}$ nœuds de taille inférieure à ε (dans chaque direction d’espace) En fait, il s’agit des nœuds fins de K auxquels sont ajouté κ nœuds fins dans chaque direction et de chaque côté pour compléter jusqu’à \tilde{K} .

Pour calculer ensuite la fonction de base Φ^k dans la cellule $K \subseteq \Lambda_k$, nous l’écrivons comme une combinaison linéaire des fonctions intermédiaires φ^m calculées ci-dessus. En maillage cartésien, cette combinaison s’écrit :

$$\Phi^k(x) = \sum_{m=1}^4 \lambda_m^k \varphi^m(x), \quad (\text{II.13})$$

où les λ_m^k sont des coefficients tels que les fonctions Φ^k vérifient⁸ $\Phi^k(\mathbf{x}_j) = \delta_{j,k}$. Ceci peut s’écrire à l’aide du système linéaire suivant :

$$A(\lambda^k) = \delta_{.,k}, \quad (\text{II.14})$$

⁸En maillage cartésien, nous contruisons quatre fonctions φ^m et la fonction Φ^k vérifie quatres conditions.

où $\delta_{.,k}$ est le vecteur des $\delta_{i,k}$, (λ^k) est le vecteur composé des λ_m^k à déterminer, et A est la matrice composée des valeurs des φ^m en les sommets de K , c'est-à-dire $A_{i,m} = \varphi^m(\mathbf{x}_i)$. Les fonctions de base Φ^k ainsi obtenues sont bien solutions de (II.8) avec $g_K = \sum_{m=1}^4 \lambda_m^k \varphi_{|\partial K}^m$. En effet, $\mathbf{L}^\Phi(\varphi^m \lambda_m^k) = 0$ dans $\tilde{K} \supset K$ pour tout m , donc $\mathbf{L}^\Phi(\Phi^k) = 0$ dans K et $\Phi_{|\partial K}^k = \sum_{m=1}^4 \lambda_m^k \varphi_{|\partial K}^m = g_K$. Ceci donne Φ^k solution de

$$-\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} \Phi^k) = 0 \quad \text{dans } K,$$

et

$$\Phi_{|\partial K}^k = \sum_{m=1}^4 \lambda_m^k \varphi_{|\partial K}^m = g_K.$$

Les conditions aux limites de φ^m sur $\partial\tilde{K}$ ne sont pas adaptées, mais les valeurs de φ^m le sont sur $\partial K \subset \tilde{K}$. Une combinaison linéaire de ces valeurs est donc adaptée pour servir de conditions aux limites (sur ∂K) pour Φ^k .

Remarques :

1. Lorsque κ est nul, il s'agit de la méthode MsFEM-L.
2. Lorsqu'il n'y a pas d'oscillation des coefficients, les fonctions de base Φ^k sont linéaires (\mathbb{Q}_1), car les φ^m sont linéaires et Φ^k est une combinaison linéaire de ces dernières.
3. En utilisant cette construction des fonctions de base multiéchelles Φ , ces fonctions sont non conformes dans le sens où elles ne sont pas continues sur les arêtes des cellules grossières K . Cependant, ceci n'a pas une grande importance dans la suite du calcul (voir [59]).

4 Simulations numériques en dimension deux

Pour vérifier la pertinence de la méthode MsFEM dans ce contexte, nous réalisons quelques simulations numériques sur un domaine à deux dimensions d'espace ($d = 2$). Les résultats numériques sont comparés à une solution u^{ref} de référence⁹. Les erreurs relatives de u^{num} , la solution numérique MsFEM, calculées pour cette comparaison sont définies par :

$$E_p(u^{\text{num}}) = \frac{\|u^{\text{num}} - u^{\text{ref}}\|_p}{\|u^{\text{ref}}\|_p},$$

avec les normes discrètes L^p :

$$\|u\|_p = \left(h \sum_{\mathbf{x}_\alpha} |u(\mathbf{x}_\alpha)|^p \right)^{1/p} \quad \text{si } p < \infty,$$

et $\|u\|_\infty = \max_{\mathbf{x}_\alpha} |u(\mathbf{x}_\alpha)|,$

où les points \mathbf{x}_α sont les nœuds du maillage fin.

⁹Ne connaissant pas explicitement la solution exacte, celle-ci est remplacée par une solution de référence déterminée par une méthode d'éléments finis \mathbb{Q}_1 standard sur le maillage fin à N^ε nœuds.

4.1 Configurations de simulations

Le domaine considéré correspond au carré unité $\Omega = [0, 1]^2$. Dans les cas tests qui suivent, nous prenons 10^{-6} comme valeur du paramètre δ (valeur du coefficient de diffusion ν à l'intérieur de la fissure).

Pour chaque condition aux limites, de Dirichlet (II.6) et de Neumann (II.7), deux cas tests sont étudiés en prenant les termes sources et les conditions aux limites suivants :

- Cas 1 : $f(x, y) = 2y - 1$ (voir FIG. II.7 à gauche), $g = 0$.
- Cas 2 : $f(x, y) = -\sin(2\pi y)$ (voir FIG. II.7 à droite), $g = 0$.

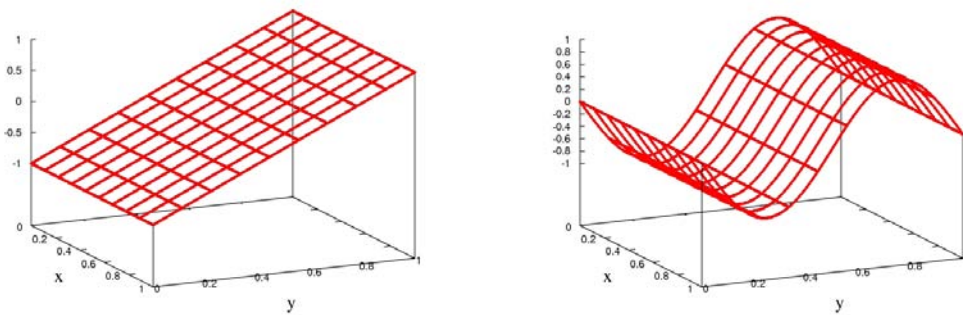


FIG. II.7 – Termes sources considérés. — A gauche : pour le premier cas $f(x, y) = 2y - 1$. — A droite : pour le second cas $f(x, y) = -\sin(2\pi y)$.

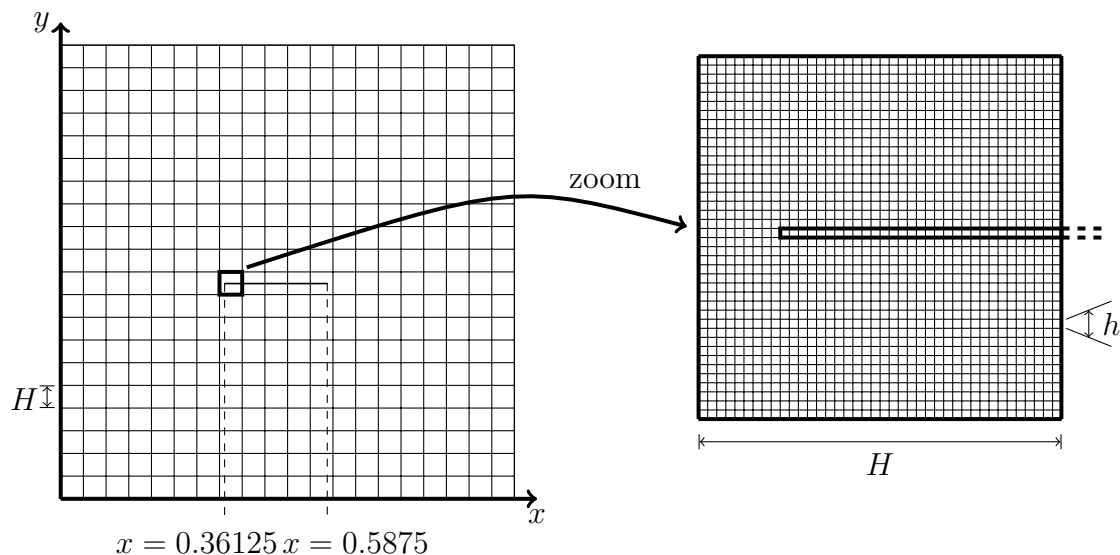


FIG. II.8 – Domaine de calcul utilisé pour les simulations numériques. — A gauche : le domaine entier Ω avec la fissure ($x \in [0.36125; 0.5875]$) et le maillage grossier de taille H . — A droite : un zoom sur la cellule $[0.35; 0.4] \times [0.45; 0.5]$ en gras à gauche, la fissure et le maillage fin sous-jacent de taille h apparaissent.

Le maillage fin est constitué de 800 cellules par direction, soit un pas d'espace $h = \frac{1}{800} = 1.25 \cdot 10^{-3}$. La fissure $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ correspond aux mailles fines d'indices compris entre 290 et 470 dans la direction x et égal à 380 dans la direction y , l'épaisseur est celle d'une seule cellule fine : $\varepsilon = h$. La fissure est donc le rectangle $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon = [0.36125; 0.5875] \times [0.47375; 0.475]$, représenté sur la figure FIG. II.8.

4.2 Résultats numériques d'un premier cas

Dans le premier cas, c'est-à-dire en prenant $f(x, y) = 2y - 1$, les erreurs relatives par rapport à la solution de référence sont représentées dans le tableau TAB. II.1. Nous pouvons voir sur ce tableau que les erreurs avec 21 nœuds dans chaque direction, soit un pas d'espace $H = 0.05$, sont plus petites avec l'utilisation de MsFEM-OS. Cette

	E_1	E_2	E_∞
MsFEM-L	$7.6746 \cdot 10^{-2}$	$1.0985 \cdot 10^{-1}$	$5.0490 \cdot 10^{-1}$
MsFEM-OS	$2.4314 \cdot 10^{-2}$	$2.7986 \cdot 10^{-2}$	$1.4138 \cdot 10^{-1}$

TAB. II.1 – Erreurs relatives E_p des méthodes MsFEM-L et MsFEM-OS avec un maillage de taille $H = 0.05$, dans le cas où $f(x, y) = 2y - 1$ et avec les conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

distinction se voit clairement sur les figures FIG. II.10 et FIG. II.11 en comparant les solutions numériques à la solution de référence.

Une nette différence apparaît entre la solution approchée par MsFEM-L et la solution de référence. En effet, sur la figure FIG. II.10 nous focalisons sur une zone autour de la fissure¹⁰ puis nous projettons sur l'axe des abscisses pour obtenir une coupe presque monodimensionnelle un peu "étalée". Nous nous apercevons alors que la solution MsFEM-L est très différente de la solution de référence : il semble y avoir plusieurs petites fissures. Ceci est dû aux conditions aux limites g_K linéaires sur les arêtes des cellules grossières. Ces conditions rendent les fonctions de base linéaires continues le long de l'arête, même si elles traversent la fissure, et la solution ne prend pas en compte la fissure sur l'arête. Sur la figure FIG. II.11, nous voyons effectivement ce défaut de la méthode MsFEM-L. La fissure devient "invisible" pour les fonctions de base sur les arêtes (voir à gauche de la figure FIG. II.9) puisque ces conditions aux limites linéaires ne représentent pas la présence d'une fissure. Sur la coupe 1D en dehors de la fissure, la solution est continue (courbe de gauche de la figure FIG. II.11). Sur la coupe 1D à l'intérieur de la fissure la solution est soit discontinue (courbe du centre de la figure FIG. II.11), si l'axe de coupe se trouve à l'intérieur de la cellule, soit continue (courbe de droite de la figure FIG. II.11) si l'axe de coupe se trouve sur le bord d'une cellule grossière.

En revanche, la solution MsFEM-OS est proche de la solution de référence. La fissure est mieux représentée : la solution est discontinue tout le long de la fissure comme le montre la figure FIG. II.10. De plus, sur les coupes 1D (voir figure FIG. II.11), nous retrouvons cette discontinuité, quelque soit l'axe de coupe (à l'intérieur ou sur le bord d'une cellule). Sur la droite de la figure FIG. II.9, nous pouvons voir que la fissure est bien

¹⁰Il s'agit de la tranche de visualisation sur le dessin en haut à gauche correspondant à y dans $[0.46; 0.49]$.

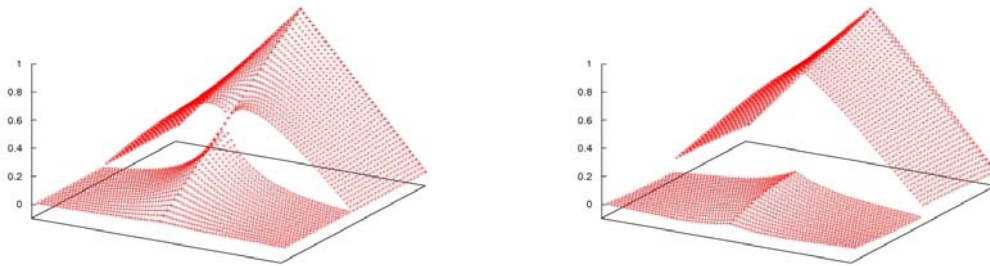


FIG. II.9 – Fonction de base observée sur $[0.45; 0.55] \times [0.45; 0.5]$. — A gauche : Une fonction de base calculée avec MsFEM-L où les conditions aux limites linéaires sont situées sur l’arête (en $x = 0.5$); — A droite : mêmes conditions avec MsFEM-OS.

prise en compte par les fonctions de base lorsque la méthode MsFEM-OS est utilisée. Nous pouvons de la même manière remarquer sur la dernière coupe de la figure FIG. II.11, qui correspond à une coupe sur le bord d’une cellule, une très légère discontinuité due aux fonctions de base non conformes.

4.3 Résultats numériques d’un second cas

Dans le second cas, c’est-à-dire avec $f(x, y) = -\sin(2\pi y)$, les erreurs par rapport à une solution de référence sont représentées dans le tableau TAB. II.2. Ce tableau indique que les erreurs relatives E_p avec 20 cellules dans chaque direction, soit $H = 0.05$, sont plus petites en utilisant MsFEM-OS. Comme pour le premier cas, une nette différence apparaît. Les résultats étant visuellement très proches de ceux obtenus dans le premier cas, ceux-ci ne sont pas représentés. Les conclusions sont identiques.

	E_1	E_2	E_∞
MsFEM-L	$9.7287 \cdot 10^{-2}$	$1.3798 \cdot 10^{-1}$	$5.8929 \cdot 10^{-1}$
MsFEM-OS	$3.3338 \cdot 10^{-2}$	$3.8661 \cdot 10^{-2}$	$1.7079 \cdot 10^{-1}$

TAB. II.2 – Erreurs relatives E_p des méthodes MsFEM-L et MsFEM-OS avec un maillage de taille $H = 0.05$, dans le cas où $f(x, y) = -\sin(2\pi y)$ et avec les conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

4.4 Commentaires

Quelques soient les conditions aux limites, Dirichlet ou Neumann, et le chargement f (cas 1 et 2) utilisés, la méthode MsFEM-L (MsFEM classique) ne donne pas de bons résultats. L’influence néfaste des conditions aux limites linéaires dans le calcul des fonctions de base apparaît ici, d’où l’importance d’en déterminer de plus adaptées. La méthode MsFEM-OS (MsFEM avec *oversampling*) fournit, dans ce contexte de fissure, des résultats tout à fait satisfaisants.

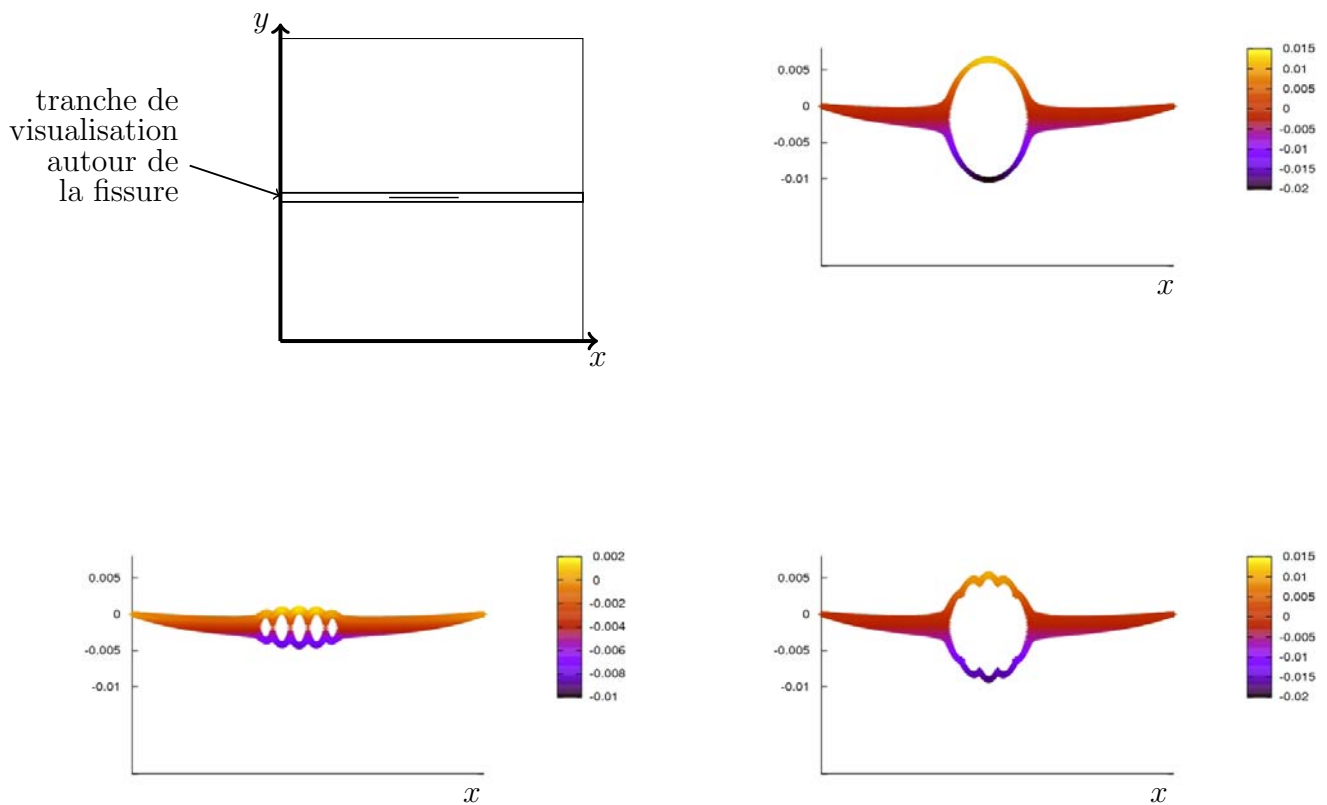


FIG. II.10 – Solutions numériques. — En haut à gauche est représenté le domaine de calcul Ω , ainsi que la tranche ($y \in [0.46; 0.49]$) autour de la fissure ($y \in [0.47375; 0.475]$) sur laquelle les solutions sont observées. — En haut à droite : la solution de référence. — En bas : les solutions numériques pour $H = 0.05$ et $h = 1.25 \cdot 10^{-3}$, avec la solution MsFEM-L (à gauche) et la solution MsFEM-OS (à droite).

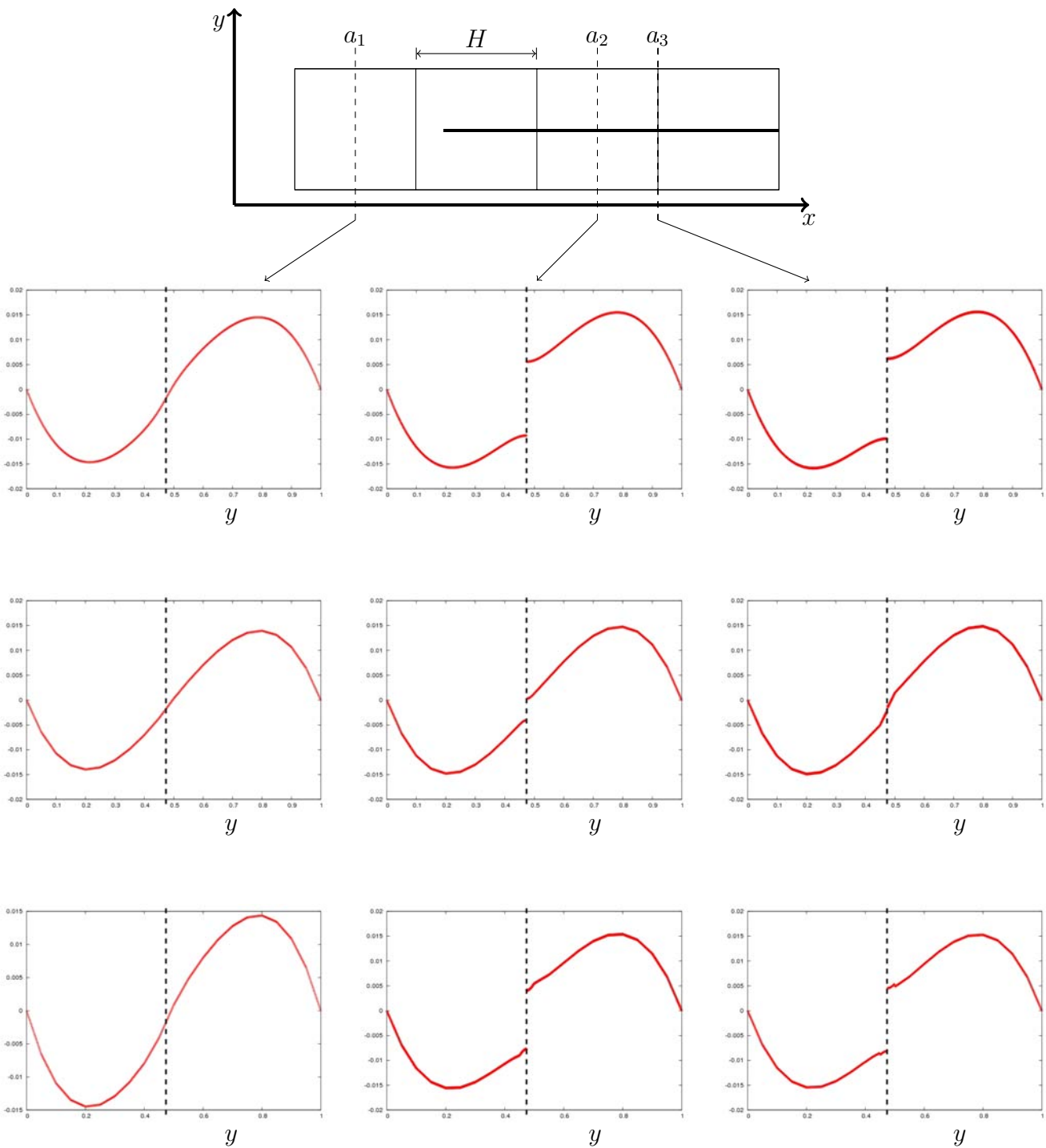


FIG. II.11 – Coupes 1D des solutions numériques. — En haut est représenté un zoom $([0.3; 0.5] \times [0.45; 0.5])$ autour de la fissure, ainsi que les trois axes de coupe sur lesquels nous observons les solutions et le maillage grossier de taille H . — Sur la première ligne, la solution de référence est coupée suivant les trois axes. — Sur la deuxième ligne, la solution MsFEM-L est coupée suivant les trois axes. — Sur la troisième ligne, la solution MsFEM-OS est coupée suivant les trois axes. — De gauche à droite : la coupe en dehors de la fissure, à l'intérieur d'une cellule contenant une partie de la fissure et au bord d'une cellule contenant une partie de la fissure. Sur chaque courbe, l'emplacement exact de la fissure est dessiné en pointillés.

Le choix des conditions aux limites pour le calcul de la base de X^0 est très important. Ces conditions reflètent les oscillations au bord des cellules (grossières) K . Afin d'améliorer le calcul de la solution, des conditions aux limites plus adaptées sont nécessaires ; par exemple avec la technique MsFEM-OS en calculant dans un domaine plus grand que la cellule et en utilisant seulement l'information à l'intérieur de la cellule pour construire les fonctions de base. En faisant cela, nous réduisons significativement l'influence des conditions aux limites artificielles.

5 Conclusion

Le but de ce chapitre était de tester MsFEM dans un contexte de fissure, nouveau pour cette méthode. La simulation d'une fissure est réalisée classiquement par la méthode XFEM. L'idée commune de MsFEM et XFEM d'utiliser des fonctions de base mieux adaptées au problème permet d'utiliser un maillage indépendant de la fissure, même en cas de propagation. Dans XFEM, des fonctions de base, qui prennent en compte la singularité, sont ajoutées. Dans MsFEM, nous modifions, à l'aide de résolutions (numériques par exemple) de problèmes locaux, certaines fonctions de base qui prennent en compte la singularité. Lorsque la taille et/ou le nombre de fissures augmentent, le nombre de degré de liberté dans XFEM augmente très vite, alors que dans MsFEM il reste constant. Pour une unique fissure, la méthode MsFEM n'est d'un intérêt qu'académique. Cependant, pour de grandes et nombreuses fissures qui se croisent, comme sur la droite de la figure FIG. II.1, cette méthode multiéchelles peut se révéler particulièrement adaptée.

Nous avons vu qu'une méthode du type MsFEM est adaptée au problème de fissures. Des cas tests ont été simulés à l'aide d'un code MsFEM 2D que nous avons écrit en fortran 90 sur un maillage cartésien. Ils illustrent, pour la simulation de l'ouverture d'une fissure, non seulement la pertinence de l'approche MsFEM, mais aussi le danger que peuvent représenter une mauvaise détermination des conditions aux limites artificielles. La méthode MsFEM-OS produit des résultats très satisfaisants, car proche d'une solution de référence. Par contre, la méthode MsFEM-L ne permet pas de réaliser une simulation précise de l'ouverture d'une fissure. Les cas tests vus dans ce chapitre ont été réalisés avec une unique fissure, le cas de plusieurs fissures pourrait être simulé sans aucune modification, ni de la méthode, ni du code ; seule l'initialisation serait complexifiée.

Finalement, avec une méthode multiéchelles comme MsFEM, il est aussi possible d'utiliser un modèle physique différent pour le problème local (II.8) des fonctions de base dont le support contient une partie de la fissure. Un modèle à l'échelle moléculaire pourrait être utilisé pour mieux prendre en compte l'ouverture locale de la fissure.

Etude d'un problème de diffusion en milieu urbain par une méthode multiéchelles avec pénalisation

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de diffusion décrivant la propagation d'un polluant en milieu urbain. Nous le résolvons par un couplage de la méthode de pénalisation avec des variantes de MsFEM. Dans une première partie, nous présentons le problème à résoudre, puis le modèle utilisé dans une deuxième partie. Dans les deux parties suivantes, nous décrivons la méthode utilisée : nous commençons par la méthode de pénalisation avant de décrire son couplage avec la méthode multiéchelles. Dans une cinquième partie, nous proposons des techniques d'améliorations des conditions aux limites pour le calcul des fonctions de base. Dans une sixième partie, nous analysons en dimension un la convergence de la méthode, puis, dans une septième partie, nous décrivons des modifications à apporter à la méthode pour des modèles plus complexes. Enfin, dans une dernière partie, nous discutons du choix des opérateurs pour le couplage.

1 Présentation du problème

1.1 Contexte

Nous assistons à une évolution et à une augmentation des attaques auxquelles il faut s'adapter. Citons par exemple les accidents industriels (AZF en 2001, Tchernobyl en 1986, etc) ou les attentats terroristes avec l'apparition du bioterrorisme comme avec l'attaque au gaz sarin dans le métro de Tokyo en 1995 et avec l'apparition d'organisations comme Al-Qaida. De nos jours, ce problème d'insécurité est au cœur des préoccupations, surtout depuis l'attentat du 11 Septembre 2001 aux Etats-Unis. En effet, pour se préparer aux futurs attentats, plusieurs mesures de sécurité se mettent en place : exercice de faux attentat au gaz sarin dans le métro parisien en 2003, création de cartes par scanner laser de certaines villes en 3D, etc. Etant de nature différente : accidentelle, ou terroriste ; la défense diffère en conséquence.

Face à des catastrophes naturelles, comme le cyclone Katrina en 2006, nous ne pouvons pas lutter, mais nous pouvons prévoir certaines situations et préparer les zones à risques (exemple du Japon avec les tremblements de Terre). Pour des catastrophes acci-

dentelles ou des attentats terroristes, il est impossible de prévoir. Il est seulement possible de limiter les risques en créant des normes de sécurité dans les industries ou en renforçant les contrôles dans les transports en commun par exemple. Pour limiter, voire même éviter, les pertes (matérielles mais surtout humaines) lors d'un danger immédiat non prévisible, il faut pouvoir réagir rapidement. Il est évidemment inenvisageable de se donner le temps de réaliser des simulations puisqu'il faudrait prévoir toutes les situations possibles (localisation et quantification du danger, etc.) et toutes les conditions possibles (données météorologiques : le vent n'est pas connu à l'avance, etc.). Il faudrait en conséquence sélectionner ; mais nous nous heurtons alors au problème du choix des situations "importantes", et donc au choix des critères de sélection, alors qu'il y a toujours des imprévus. Ainsi, pour avoir accès aux données, la seule possibilité est d'attendre le moment T_0 d'avoir besoin des calculs. Dans ce cas, le temps restant pour simuler l'évolution de la situation est très fortement réduit. Nous sommes donc amenés à devoir calculer avec une rapidité ressemblant à celle du cerveau lors du déclenchement d'un réflexe. Nous pouvons considérer une ville comme un domaine d'une taille de l'ordre de quelques kilomètres par direction d'espace. De plus, elle est constituée d'obstacles (bâtiments, parcs, rues, etc.) qui sont plus ou moins opaques pour le polluant : nous considérons qu'il ne pénètre pas à l'intérieur d'un bâtiment. Une ville est donc vue comme un domaine avec des trous.

La pollution a certains effets contraires, dont la manifestation et le caractère varient, dépendants par exemple de l'échelle géologique considérée. Pour connaître la propagation à l'intérieur de la ville, il faudrait pouvoir décrire des détails de petite taille ε , ce qui implique l'utilisation d'un maillage de l'ordre du millions de mailles. En outre, les obstacles dans la ville sont de tous types de forme, toutes tailles, etc, ce qui rend la géométrie complexe. Il faudrait utiliser un maillage non structuré (maillage qui suit la géométrie), extrêmement difficile à créer (pas automatique) et à manipuler en 3D, en particulier sur un très grand nombre de mailles. De nombreuses études ont été faite sur la pollution urbaine : étude de la quantité de gaz à effet de serre (CO_2), étude de la pollution de l'air sur les bâtiments.

1.2 Apport

Généralement, les études sur un polluant en milieu urbain concernent la propagation de la pollution urbaine dans des zones localisées comme un canyon ou un croisement de rue (voir [58, 87, 20]). Dans une ville, la géométrie est très complexe, ce qui rend difficile les simulations d'un fluide. Une méthode multiéchelles permet de tels calculs. Nous utilisons la méthodologie multiéchelles dans le contexte de simulation en temps réel de propagation de polluant en milieu urbain. Comme méthode multiéchelles, nous reprenons MsFEM et nous proposons de nouvelles variantes car la méthode MsFEM-OS ne peut pas être utilisée dans ce contexte. De plus, la méthode de pénalisation apporte une simplification de cette complexité géométrique. La méthodologie multiéchelles vue dans le premier chapitre est donc couplée avec la méthode de pénalisation. Nous validons, à l'aide de nombreux tests, son efficacité en précision et temps de calcul pour ce contexte. Nous réalisons également une étude analytique de la convergence en dimension un. Nous remarquons qu'un deuxième avantage de la méthode de pénalisation est l'utilisation de MsFEM-OS dans le contexte du milieu urbain.

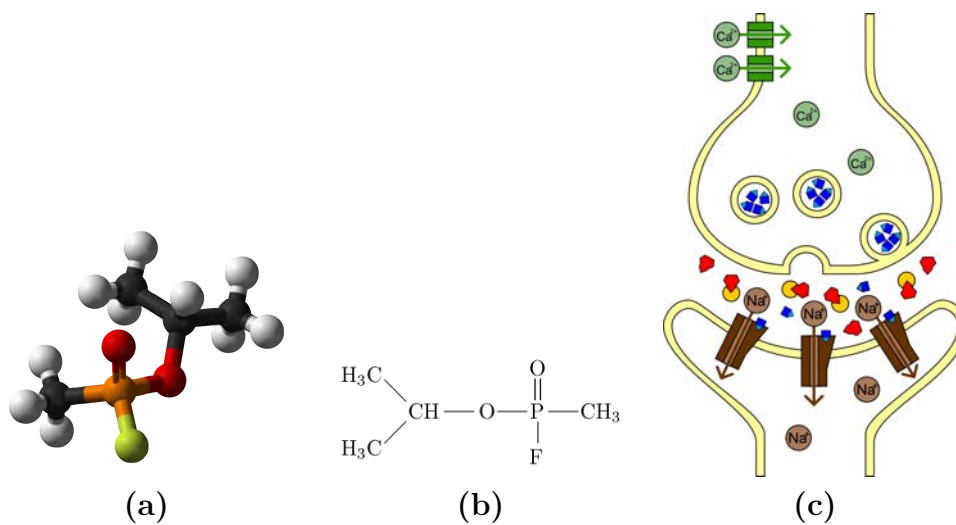


FIG. III.1 – Gaz sarin. — (a) Molécule. — (b) Formule chimique. — (c) Effets sur l'organisme.

2 Modèle utilisé

Est appelé polluant un contaminant ayant une incidence sur l'écosystème, et/ou sur un organisme (voir l'exemple du sarin sur la figure FIG. III.1) au-delà d'un certain seuil. Ce corps de nature complexe a un comportement complexe. Son étude fait appel à différents domaines scientifiques, tels que la physique, la chimie, la mécanique, la turbulence, etc. Ce qui met l'étude complète de sa constitution et de ses effets hors de portée des physiciens. Il peut aussi interagir avec un autre produit ou même se dégrader, ce qui modifie sa constitution et peut ainsi augmenter son pouvoir toxique. Qu'il soit sous forme gazeuse, liquide, ou solide, sa réaction avec l'environnement est complexe. Un polluant peut être radioactif, engendrer des réactions indirectes, se dégrader (la durée de son effet peut changer), avoir des effets combinés qui peuvent différer suivant l'environnement, avoir des répercussions de différents types¹, etc. La modélisation de la propagation d'un polluant dans une ville est donc extrêmement complexe.

Nous choisissons de ne pas nous intéresser à un polluant particulier, à ses propriétés, ses interactions avec l'environnement, etc, mais de modéliser la propagation dans un milieu urbain d'un unique et quelconque polluant passif (pas de réaction chimique, ni avec un autre produit, ni avec son environnement) sous forme gazeuse. Un des modèles de polluant dans une rue les plus simples est le modèle "STREET model". Il est empiriquement basé sur des mesures de pollution dans des rues. Un autre modèle analytique, proposé par Hotchkiss and Harlow (1973), est basé sur une solution approchée d'une équation stationnaire d'advection-diffusion. L'approche meso-échelle regarde typiquement une ville comme une structure rigide de la couche limite de l'atmosphère. Les études micro-échelle, d'un autre côté, analysent la dispersion de polluant et les flots turbulents autour de bâtiments isolés, dans les modèles "street canyon" 2D (voir [93, 70]) focalisant sur le phénomène dispersif à l'échelle d'un bâtiment et de la rue. Dans [58], les auteurs étudient

¹Par exemple, il est encore possible d'observer des conséquences du nuage radioactif de Tchernobyl comme l'épidémie de nombreux cancers de la thyroïde dans les zones fortement exposées.

les villes compactes où la ville entière elle-même agit comme un obstacle à l'approche du vent. La dispersion du polluant dans les réseaux de rue des modèles de villes dépendent principalement des conditions de vent qui, à leur tour, dépendent des caractéristiques morphologiques urbaines telles que la forme de la ville, la densité de bâtiments, la configuration des rues, etc., et les caractéristiques de la source de polluant. Ils étudient les effets de la morphologie urbaine sur la dispersion de polluant dans des modèles de ville idéalisée. Le transport de polluant est modélisé par une équation de convection-diffusion moyenné en temps. Pour modéliser la propagation d'un polluant dans une ville, nous choisissons l'équation instationnaire de convection-diffusion suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}^\varepsilon u^\varepsilon) - \nabla \cdot (\nu^\varepsilon \vec{\nabla} u^\varepsilon) = f^\varepsilon & \text{dans } [0; T] \times \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega_\varepsilon} = g^\varepsilon & \text{dans } [0; T] \times \partial\Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon_{t=0} = u_0^\varepsilon & \text{dans } \{0\} \times \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

où u^ε est la concentration du polluant, f^ε est la source (ou le puit), ν^ε est la diffusion, \vec{V}^ε est le champ de convection, g^ε est la condition aux limites et u_0^ε est la donnée initiale. Le domaine $\Omega_\varepsilon \subsetneq \mathbb{R}^d$ est un domaine non convexe (dû aux obstacles dans une ville) représenté sur la figure FIG. III.2 et $[0; T]$ est un intervalle de temps fini.

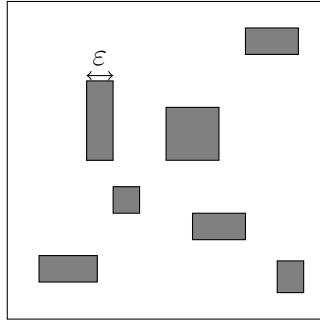


FIG. III.2 – Exemple de domaine de calcul Ω_ε non convexe représentant un milieu urbain. Les zones grisées représentent les obstacles de taille minimale ε . Ces zones ne sont pas inclus dans Ω_ε .

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème simplifié de l'équation stationnaire avec le terme de convection nul suivante :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nu^\varepsilon \vec{\nabla} u^\varepsilon) = f^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega_\varepsilon} = g^\varepsilon & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Ceci permet de voir comment est pris en compte la morphologie de la ville par la méthode multiéchelles. Afin de résoudre le problème sur Ω_ε , nous devons imposer des conditions aux limites aux bords des obstacles : prenons g^ε nulle aux bords des obstacles. La résolution d'un tel problème nécessite un maillage adapté, difficile à mettre en œuvre.

Pour simplifier le problème des obstacles, nous utilisons la méthode de pénalisation qui remplace le problème (III.1) par un autre problème défini sur l'enveloppe convexe de Ω_ε , c'est-à-dire le domaine auquel sont ajoutés les obstacles (bâtiments, etc). Nous notons Ω ce nouveau domaine. Nous présentons donc, dans la section suivante, cette méthode de pénalisation.

3 La méthode de pénalisation

3.1 Motivation

A priori, notre domaine de calcul Ω_ε est un domaine quelconque non convexe, car une ville est une zone contenant des obstacles (parties opaques). Ceux-ci peuvent être de formes, de tailles, et de dispositions quelconques. Le contexte dans lequel nous nous situons nous oblige à calculer rapidement, nous ne pouvons donc pas nous permettre de refaire tous les calculs en cas de modification locale du domaine Ω_ε . Après avoir calculé une base de X^0 (espace de petite dimension), si un changement² a lieu avant la résolution³ sur X^0 , la géométrie de la ville est modifiée, ce qui signifie que Ω_ε est différent de celui utilisé pour le calcul de X^0 . Lorsque le maillage suit la géométrie de la ville, il faut alors remailler et refaire le calcul sur X^0 . Bien que chaque élément de X^0 soit calculé rapidement et de façon indépendante des autres, il est souhaitable de l'éviter. Ce type de maillage est très complexe à réaliser et à manipuler, en particulier en 3D. Si la modification est locale, il est souhaitable d'avoir à recalculer seulement certains éléments de X^0 pour ne pas perdre l'avantage d'une méthode multiéchelles.

Il est alors souhaitable d'utiliser un maillage qui ne suit pas la géométrie de la ville, comme un maillage cartésien, facile à créer et à manipuler, mais aussi à modifier. Dans la suite, nous considérons ce type de maillage. Nous souhaitons donc une méthode qui nous permette de traiter la résolution du problème sur tout type de domaine non convexe par une méthode de type MsFEM. Afin de résoudre ce problème, nous nous inspirons d'une méthode, appelée méthode de pénalisation (voir [7]), utilisée lors de la résolution d'une équation de Navier-Stokes incompressible autour d'obstacles. Cette méthode, décrite dans la suite de cette partie, est ensuite couplée à la méthode multiéchelles MsFEM vue dans le chapitre I.

Remarque : Il est impossible d'utiliser la méthode MsFEM-OS décrite dans le chapitre précédent. En effet, lorsqu'un obstacle touche un nœud du maillage, il n'existe pas de fonction de base associée à ce nœud. Ceci est dû à la non inversion de la matrice A permettant de calculer une combinaison linéaire des fonctions intermédiaires φ^m tel que les conditions $\Phi^i(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j}$ soient vérifiées.

La probabilité pour qu'au moins un nœud du maillage soit sur un obstacle est non nulle, voire proche de un. De plus, il est impossible d'omettre ces obstacles puisque ils peuvent être nombreux dans ce cas, d'autant plus en raffinant le maillage, et peuvent être de tailles potentiellement grandes. La méthode MsFEM-OS ne pourra donc pas être utilisée pour résoudre le problème (III.1). Cependant, la méthode MsFEM-L fonctionne parfaitement ici, dans le sens où elle permet d'obtenir des résultats. Ces résultats ont évidemment les problèmes mentionnés dans le chapitre précédent, à savoir l'effet de couche limite dû aux conditions aux limites artificielles. Nous réglons donc ce problème d'incompatibilité grâce à la pénalisation.

²Par exemple une explosion (changement rapide) ou une simple évolution de la ville (changement plus lent).

³Il peut s'écouler un certain temps entre ces deux étapes.

3.2 Présentation de la méthode

Soit à résoudre le problème

$$\mathbf{L}u = f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \quad (\text{III.2})$$

où le domaine Ω_ε est non convexe. Afin d'éviter de construire un maillage qui suit la géométrie du domaine, nous résolvons un problème sur un ensemble, noté Ω , contenant son enveloppe convexe au lieu de résoudre un problème sur un domaine non convexe Ω_ε . L'idée est d'obliger la solution à être très petite à l'intérieur des obstacles pour simuler la condition $u|_{\partial(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)}^\varepsilon$ nulle sur $\partial(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)$, où $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ est le domaine qui contient les obstacles.

La méthode consiste à ajouter dans l'équation (III.2) dans Ω_ε un terme d'absorption de la forme $\bar{\sigma}1_D$, où D est le domaine dans lequel nous voulons pénaliser, c'est-à-dire ici l'ensemble des obstacles. Le problème (III.2) est donc remplacé par un problème, dit pénalisé. L'inverse du coefficient du nouvel opérateur, c'est-à-dire $\frac{1}{\bar{\sigma}}$, représente la perméabilité du milieu : plus l'obstacle est perméable et plus ce nombre est grand. Le domaine $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ étant composé d'obstacles très imperméables, le coefficient $\frac{1}{\bar{\sigma}}$ doit être très proche de zéro. Il faut donc prendre une valeur très grande pour $\bar{\sigma}$. Le domaine Ω_ε étant un milieu sans obstacle, il est très perméable, le coefficient $\bar{\sigma}$ doit alors être très petit dans Ω_ε . Il est donc annulé en multipliant $\bar{\sigma}$ par $1_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon}$ dans l'équation (III.3). Le problème pénalisé (étendu à Ω) s'écrit donc :

$$\mathbf{L}u + \sigma u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{III.3})$$

où σ est une fonction nulle dans Ω_ε définie par $\sigma = \bar{\sigma}1_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon}$. Elle est appelée fonction de pénalisation. Remarquons qu'à l'intérieur de Ω_ε l'équation (III.3) est en fait l'équation de départ (III.2). Les coefficients de \mathbf{L} , ainsi que la valeur de f , sont à définir à l'intérieur de $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$.

Remarque : Il existe différents types de pénalisation, comme la H^1 -pénalisation (voir [7]), où les auteurs pénalisent la partie linéaire de \mathbf{L} pour Navier-Stokes.

Lorsque le problème (III.2) est résolu dans Ω_ε , la solution n'est pas calculée à l'intérieur des obstacles, étant donné que les obstacles n'appartiennent pas à Ω_ε . Néanmoins, nous devons générer un maillage adapté à la topologie complexe de la ville et il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites appropriées sur les obstacles.

Les obstacles étant inclus dans Ω avec la méthode de pénalisation, il faut calculer la solution à l'intérieur des obstacles. Nous allons voir dans la suite que la solution est presque nulle à l'intérieur. D'un autre côté, cela permet de construire un maillage indépendant de la ville et ne pas se soucier des conditions aux limites sur les obstacles. De plus, nous avons pu remarquer que MsFEM-OS ne peut être utilisé pour la résolution de (III.2) et MsFEM-L donne des résultats bien moins précis en général. Avec la pénalisation, il est également possible d'utiliser la méthode MsFEM-OS.

3.3 Validité de la méthode

Pour prendre en compte les obstacles contenus dans notre domaine, nous remplaçons les fonctions $\nu^\varepsilon, \sigma^\varepsilon, f^\varepsilon$ définies sur Ω_ε par les modèles discontinus ν, σ, f définies sur Ω .

L'équation (III.1) pénalisée s'écrit alors :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) + \sigma u = f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

avec les coefficients suivants :

$$\nu = \begin{cases} \nu^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\nu^\varepsilon}{\delta} & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad f = \begin{cases} f^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad \sigma = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\nu^\varepsilon}{\delta L_A^2} & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

et la condition aux limites $g = g^\varepsilon|_{\partial\Omega}$. Les coefficients de l'opérateur dans l'équation (III.4) sont ainsi des fonctions oscillantes, dont les variations sont de taille minimum ε . Le paramètre ε représente la taille des plus petits obstacles, donc des composantes connexes de $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Les fonctions g et f , respectivement les conditions aux limites et le terme source, sont des données du problème, L_A est la longueur caractéristique d'absorption⁴ et δ est le paramètre de pénalisation.

a) Solution monodimensionnelle à l'intérieur d'un obstacle

Plaçons nous sur un intervalle et ajoutons un obstacle sur celui-ci. Comme la méthode de pénalisation permet d'éviter les problèmes de conditions aux limites au bord des obstacles, nous regardons la solution au bord de cet obstacle. Soit $\Omega = [a; b]$, avec a, b réels quelconques. Quitte à faire un changement de variable, nous positionnons le zéro sur une extrémité de $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, a négatif et b positif. Il s'agit donc de la situation où un obstacle est placé en $[0; \tilde{x}]$ et $\Omega_\varepsilon = [a; 0] \cup [\tilde{x}; b]$, comme sur la figure FIG. III.3. Afin de

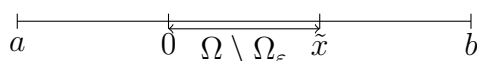


FIG. III.3 – Position d'un obstacle en $[0; \tilde{x}]$ sur le domaine de calcul $[a; b]$.

forcer la solution à être nulle à l'intérieur d'un obstacle, nous ajoutons la fonction σ dans l'équation. Notre équation pénalisée (III.3) en 1D s'écrit alors :

$$-(\nu u)' + \sigma u = f \quad \text{dans } \Omega.$$

Ceci donne dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$:

$$-\frac{\nu^\varepsilon}{\delta} u'' + \frac{\nu^\varepsilon}{\delta L_A^2} u = 0, \quad \text{soit} \quad -u'' + \frac{1}{L_A^2} u = 0.$$

La solution de cette équation est $u(x) = c \operatorname{ch}\left(\frac{x}{L_A}\right) + d \operatorname{sh}\left(\frac{x}{L_A}\right)$ pour tout $x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, où la constante $c = u(0)$ est déterminée en fonction des conditions aux limites et $d = L_A u'(0)$. En effet, $u(x) = c \operatorname{ch}\left(\frac{x}{L_A}\right) + d \operatorname{sh}\left(\frac{x}{L_A}\right)$ vérifie :

$$-u''(x) + \frac{1}{L_A^2} u(x) = -\left(\frac{c}{L_A^2} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{L_A}\right) + \frac{d}{L_A^2} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{L_A}\right)\right) + \frac{c}{L_A^2} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{L_A}\right) + \frac{d}{L_A^2} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{L_A}\right) = 0.$$

⁴La longueur caractéristique d'absorption est petite par rapport à la taille caractéristique d'un bâtiment, c'est-à-dire $L_A \leq \varepsilon$.

La continuité de $\nu u'$ au bord de l'obstacle donne alors :

$$\nu^\varepsilon u'_{|\Omega_\varepsilon} = \frac{\nu^\varepsilon}{\delta} u'_{|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon}.$$

De plus, nous avons $-\nu^\varepsilon u''$ nul dans Ω_ε , ce qui implique que $u'_{|\Omega_\varepsilon}$ est constant et

$$\begin{cases} u'_{|\Omega_\varepsilon}(\tilde{x}) = \frac{u(b) - u(\tilde{x})}{b - \tilde{x}}, \\ u'_{|\Omega_\varepsilon}(0) = \frac{u(a) - u(0)}{a}, \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} u'_{|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon}(\tilde{x}) = \delta \times u'_{|\Omega_\varepsilon}(\tilde{x}) = \delta \times \frac{u(b) - u(\tilde{x})}{b - \tilde{x}}, \\ u'_{|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon}(0) = \delta \times u'_{|\Omega_\varepsilon}(0) = \delta \times \frac{u(a) - u(0)}{a}. \end{cases}$$

En dérivant $u(x)$, nous trouvons $d = \delta L_A u'_{|\Omega_\varepsilon}(0)$ et $c = \frac{L_A \delta}{sh\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right)} \left(u'_{|\Omega_\varepsilon}(\tilde{x}) - u'_{|\Omega_\varepsilon}(0) ch\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right) \right)$.

Comme $c = u(0)$, nous obtenons :

$$c = \delta L_A \left(\frac{u(b) - u(\tilde{x})}{b - \tilde{x}} - \frac{u(a)}{a} ch\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right) \right) \times \left(sh\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right) - \frac{\delta L_A}{a} ch\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right) \right)^{-1}.$$

Ceci donne donc :

$$u(\tilde{x}) = \delta L_A \left(1 + \frac{\delta L_A}{b - \tilde{x}} \tilde{c} \right)^{-1} \left(\left(\frac{u(b)}{b - \tilde{x}} + \frac{u(a)}{a} ch\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right) \right) \tilde{c} + \frac{u(a)}{a} sh\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right) \right),$$

où $\tilde{c} = \left(ch\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right) - \frac{\delta L_A}{a} sh\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right) \right) \times \left(sh\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right) - \frac{\delta L_A}{a} ch\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right) \right)^{-1}$. Regardons la dépendance de $u(\tilde{x})$ par rapport à δ et notons $g(\delta) = u(\tilde{x})$. La dérivée $g'(\delta)$ est définie pour $1 + \frac{\delta L_A}{b - \tilde{x}} \tilde{c}(\delta) \neq 0$. Or $\tilde{c}(\delta)$ est continue pour $\delta \neq \frac{ash\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right)}{L_A ch\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right)} > 0$ et nulle pour $\delta = 0$,

il existe donc $\delta_1 \in]0; \frac{ash\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right)}{L_A ch\left(\frac{\tilde{x}}{L_A}\right)}[$ tel que $\tilde{c}(\delta) < 1$ pour $\delta \in [0; \delta_1]$. La fonction g est donc de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \delta_1]$ et par le théorème des accroissements finis, nous obtenons pour tout $\delta \in [0; \delta_1]$:

$$|g(\delta)| \leq \max_{x \in [0; \delta]} |g'(x)| |\delta|,$$

car $g(0) = 0$. Finalement, nous avons pour tout $\delta \in [0; \delta_1]$:

$$|u(\tilde{x})| = |g(\delta)| \leq \max_{x \in [0; \delta_1]} |g'(x)| \delta = \mathcal{O}(\delta).$$

Remarques :

1. Remarquons que $u_{|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon}$ tend vers zéro lorsque δ tend vers zéro.
2. Sans ajout de la fonction σ dans l'équation, la continuité de $\nu u'$ au bord de l'obstacle donne :

$$\nu^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}},$$

où $\vec{\mathbf{n}}$ est la normale extérieure à l'obstacle, donc u est constante (quelconque) à l'intérieur d'un obstacle.

b) Solution bidimensionnelle à l'intérieur d'un obstacle

Regardons maintenant ce qui se passe sur $\partial\Omega_\varepsilon$ dans le cas où la dimension spatiale est $d = 2$. Intuitivement, la solution doit être proche de zéro, voire s'annuler. C'est le but de la méthode de pénalisation.

Le problème pénalisé à résoudre est le suivant :

$$-\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) + \sigma u = f \text{ dans } \Omega.$$

Soit ϕ_λ une fonction test, comme sur la figure FIG. III.4, telle que $\vec{\nabla} \phi_\lambda \sim \frac{1}{\lambda} \vec{n}$, où λ est l'épaisseur⁵ du support γ_λ de ϕ_λ et \vec{n} est la normale extérieure à $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Alors, pour

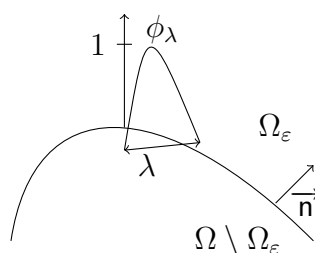


FIG. III.4 – Fonction test ϕ_λ dont le support est inclus dans une boule de petit rayon λ .

tout réel $\lambda > 0$, nous avons :

$$\int_{\gamma_\lambda} \nu \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \phi_\lambda + \int_{\gamma_\lambda} \sigma u \phi_\lambda = \int_{\gamma_\lambda} f \phi_\lambda.$$

En effet, les termes de bords s'annulent car ϕ_λ est nulle sur le bord de son support. En conséquence, en notant $[f]_\Lambda$ le saut de la fonction f à travers la surface Λ , nous avons :

$$\left[\nu \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \right]_{\partial(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0,$$

car σ et f sont des fonctions volumiques ($\sigma = f = 0$ sur $\partial(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)$). Ainsi, nous obtenons :

$$\vec{\nabla} u|_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \cdot \vec{n} = \delta \vec{\nabla} u|_{\Omega_\varepsilon} \cdot \vec{n} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

puis

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u|_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \text{ dans } \partial\Omega_\varepsilon.$$

Ainsi, $u|_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon}$ tend vers une constante c_{lim} quand $\delta \rightarrow 0$.

De plus, quand L_A est très petit, nous pouvons écrire $\frac{\nu^\varepsilon}{\delta} = o\left(\frac{\nu^\varepsilon}{\delta L_A^2}\right)$, c'est-à-dire $\nu = o(\sigma)$ dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Or, $-\frac{\nu^\varepsilon}{\delta} \Delta u + \frac{\nu^\varepsilon}{L_A^2 \delta} u$ est nul dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, donc σu est nul (termes

⁵Cela signifie qu'il existe une boule B_λ de rayon λ qui contient le support de ϕ_λ .

d'ordre L_A^{-1}) dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, car f est nul dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Comme σ est non nulle dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, la constante c_{lim} est donc nulle. Finalement,

$$u \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \text{ dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon.$$

Remarque : Comme dans le cas 1D, en n'ajoutant pas le terme d'absorption, la solution est constante dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, mais pas nécessairement nulle.

4 Le couplage avec la méthode de pénalisation

Décrivons ici la méthode MsFEM couplée avec la méthode de pénalisation afin de résoudre le problème (III.1) qui nous intéresse. Nous cherchons ici à approcher la concentration u du polluant sur un domaine noté Ω_ε . Pour cela, nous modélisons la présence d'obstacles par la méthode de pénalisation présentée dans la section précédente. Nous appliquons la méthode MsFEM couplée avec la méthode de pénalisation sur un maillage cartésien. Il s'agit donc de résoudre le problème (III.4). Dans notre domaine bidimen-

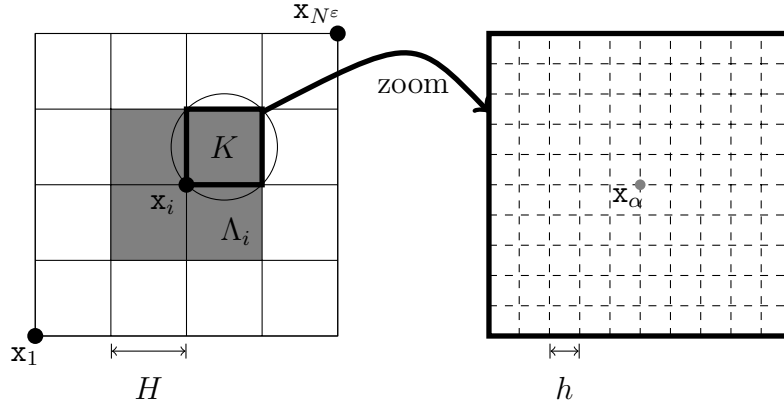


FIG. III.5 – Maillages (grossier et fin). — A gauche : le maillage grossier \mathfrak{M} de taille H sur le domaine Ω . — A droite : un zoom sur le maillage fin (de taille h) local à la cellule K . Le point \mathbf{x}_α est un nœud du maillage fin local sur K et les points $\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,N^\varepsilon}$ sont les nœuds du maillage fin sur Ω . Le support Λ_i de Φ^i est dessiné par une zone grise, il s'agit des cellules ayant le nœud grossier \mathbf{x}_i pour sommet.

sionnel rectangulaire Ω , définissons un maillage grossier \mathfrak{M} à N^0 nœuds $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1,\dots,N^0}$. Les cellules grossières sont de taille H . Définissons sur Ω un maillage fin, conforme⁶ au maillage grossier, à N^ε nœuds $\{\mathbf{x}_\xi\}_{\xi=1,\dots,N^\varepsilon}$ (voir FIG. III.5). Les lettres grecques sont encore réservées aux indices du maillage fin. Les fonctions σ et ν varient à une échelle $\varepsilon \ll H$. Ces variations fines de σ et ν sont portées par les fonctions de base. Dans la suite, nous détaillons les étapes du calcul de MsFEM pour résoudre (III.4).

⁶A chaque nœud grossier \mathbf{x}_i correspond un nœud fin \mathbf{x}_ξ .

4.1 Construction des fonctions de base

Nous présentons ici la première étape du calcul de la méthode MsFEM pour la résolution de (III.4). Comme dans le chapitre II, les fonctions de base multiéchelles $\{\Phi^i\}_{i=1,\dots,N^0}$ doivent prendre en compte les variations de ν et de σ et sont solutions de l'équation stationnaire homogène associée à (III.4) sur une partie locale de Ω . Autrement dit, la fonction Φ^i , centrée au nœud \mathbf{x}_i , est solution de :

$$\begin{cases} \mathbf{L}^\Phi \Phi^i = -\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} \Phi^i) + \sigma \Phi^i = 0 & \text{dans } K, \\ \Phi^i|_{\partial K} = g_K & \text{sur } \partial K, \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

où K est une cellule grossière du support Λ_i de Φ^i , c'est-à-dire une cellule dont \mathbf{x}_i est un sommet (voir figure FIG. III.5) et g_K est la donnée des conditions aux limites.

Afin de résoudre numériquement ce problème local à l'aide de la méthode des éléments finis standard, la cellule K est décomposée en cellules fines avec un maillage fin à N_K nœuds $\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,N_K}$, de taille inférieure à ε dans toutes les directions d'espace. Les coefficients ν, σ sont supposés constants dans les cellules fines. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la condition aux limites g_K n'étant pas une donnée physique, sa détermination est un point délicat dans le calcul des fonctions de base. Les conditions aux limites g_K de Φ^i sont à choisir, par exemple (voir le chapitre II) :

1. en imposant des conditions aux limites artificielles : linéaires pour MsFEM-L,
- ou
2. en les adaptant au problème : à l'aide de la résolution de problèmes supplémentaires pour MsFEM-OS.

Nous utilisons d'abord des conditions aux limites linéaires puis des conditions aux limites plus adaptées (avec MsFEM par exemple) à notre problème dans la suite du chapitre (voir la section 5).

Les fonctions Φ^i se décomposent dans l'espace X^ε engendré par les fonctions éléments finis ψ^α :

$$\mathbf{R}(\Phi^i) = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}^i \psi^{\alpha}.$$

En utilisant cette décomposition et la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation (III.5), nous obtenons un système linéaire de taille $N_K \times N_K$ sous forme matricielle :

$$(D + S)(\Phi^i) = 0, \quad (\text{III.6})$$

où (Φ^i) désigne le vecteur des composantes de la fonction Φ^i sur X^ε ,

$$D_{\alpha,\beta} = \int_{\gamma_\alpha \cap \gamma_\beta} \nu \vec{\nabla} \psi^\beta \cdot \vec{\nabla} \psi^\alpha dx,$$

et

$$S_{\alpha,\beta} = \int_{\gamma_\alpha \cap \gamma_\beta} \sigma \psi^\beta \psi^\alpha dx.$$

Remarque : Dans cette partie du calcul, il y a de nombreux systèmes linéaires à résoudre. Cependant, ils ne sont pas trop grand (de taille $N_K \times N_K$), ce qui permet de faire les calculs assez rapidement et n'occupe pas une grande place mémoire. De plus,

ces calculs sont indépendants, ce qui permet de les faire en parallèle si nécessaire et ainsi de gagner du temps de calcul.

Ici, ces calculs sont faits au préalable car ils ne nécessitent pas de connaître les données du problème; le temps de calcul n'a ainsi pas besoin d'être très rapide. Nous pouvons donc nous permettre un maillage très fin. Ce précalcul sert ensuite dans la résolution de l'équation contenant les données "en temps réel" du problème. Cela fait l'objet de la suite du chapitre.

4.2 Résolution de l'équation globale

Nous présentons ici la deuxième étape du calcul de la méthode MsFEM, c'est-à-dire comment calculer la concentration du fluide à partir des fonctions de base multiéchelles. Dans ce chapitre, nous résolvons le problème stationnaire (III.4), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) + \sigma u = f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous cherchons la solution approchée u^0 dans X^0 , c'est-à-dire sous la forme :

$$u^0(x) = \sum_{i=1}^{N^0} u_i \Phi^i(x), \quad (\text{III.8})$$

où les u_i sont les composantes de la fonction u^0 sur l'espace X^0 engendré par les fonctions de base multiéchelles $\{\Phi^i\}_{i=1, \dots, N^0}$.

La discrétisation de l'équation (III.4) par les éléments finis $\{\psi^\alpha\}_{\alpha=1, \dots, N^\varepsilon}$ donne :

$$\mathbf{L}^\varepsilon u^\varepsilon = \sum_{\alpha=1}^{N^\varepsilon} \left(- \int_{\gamma_\alpha} \nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u^\varepsilon) \psi^\alpha + \int_{\gamma_\alpha} \sigma u^\varepsilon \psi^\alpha \right) \psi^\alpha.$$

L'opérateur \mathbf{L}^0 est ici défini par :

$$\mathbf{L}^0 u^0 = \sum_{i=1}^{N^0} \left(- \int_{\Lambda_i} \nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u^0) \Phi^i + \int_{\Lambda_i} \sigma u^0 \Phi^i \right) \Phi^i.$$

De plus, comme u^0 appartient à X^0 , en substituant la décomposition (III.8) dans l'équation globale $\mathbf{L}^0 u^0 = f^0$, le système linéaire à résoudre de petite taille $N^0 \times N^0$ devient le suivant :

$$\sum_{j=1}^{N^0} (\mathbb{D}_{i,j} + \mathbb{S}_{i,j}) u_j = \sum_{j=1}^{N^0} \mathbb{M}_{i,j} f_j, \quad \forall i = 1, \dots, N^0, \quad (\text{III.9})$$

avec les matrices :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{i,j} &= \int_{\Lambda_i \cap \Lambda_j} \nu \vec{\nabla} \Phi^j \vec{\nabla} \Phi^i dx - \int_{\partial(\Lambda_i \cap \Lambda_j)} \nu \Phi^i \vec{\nabla} \Phi^j \cdot \vec{n}^{ij} ds, \\ \mathbb{S}_{i,j} &= \int_{\Lambda_i \cap \Lambda_j} \sigma \Phi^i \Phi^j dx, \\ \text{et } \mathbb{M}_{i,j} &= \int_{\Lambda_i \cap \Lambda_j} \Phi^i \Phi^j dx, \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

où \vec{n}^{ij} désigne le vecteur normal unitaire extérieur à $\partial(\Lambda_i \cap \Lambda_j)$ et f_j la $j^{\text{ième}}$ composante de f^0 dans X^0 .

Remarque : Dans cette partie, le système à résoudre est petit (de taille $N^0 \times N^0$), donc rapide à résoudre. Une méthode numérique classique utiliserait un système de très grande taille, donc très long. Grâce à la méthode multiéchelles le système à résoudre est de petite taille, donc nous obtenons une solution approchée très rapidement.

4.3 Post-traitement

Pour retrouver la solution approchée $u^\varepsilon = \mathbf{R}(u^0)$ dans X^ε , c'est-à-dire sur le maillage fin à N^ε nœuds, il suffit de remplacer les fonctions Φ^i par $\mathbf{R}(\Phi^i)$ sur X^ε . Nous obtenons ainsi :

$$u^\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{N^0} u_i \mathbf{R}(\Phi^i)(x) = \sum_{i=1}^{N^0} u_i \sum_{\alpha=1}^{N^\varepsilon} \Phi_\alpha^i \psi^\alpha(x).$$

Les composantes de u^ε dans X^ε sont donc $\sum_{i=1}^{N^0} u_i \Phi_\alpha^i$. Finalement, la solution approchée u^ε est définie sur le maillage fin de taille N^ε , ce qui permet d'avoir un comportement détaillé de la solution.

4.4 Choix des paramètres pour la pénalisation

Le but ici est de choisir les valeurs de δ et L_A . La constante L_A est la taille de la couche limite, c'est-à-dire la taille minimale des obstacles considérés. Le coefficient de pénalisation δ dans σ représente la perméabilité d'un obstacle. Plus δ est grand, plus le milieu est considéré comme perméable. Ici, un obstacle est imperméable, δ est donc petit. Afin de justifier numériquement le choix de δ , nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon = f^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

où $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B(0, \varepsilon) \subsetneq \mathbb{R}^2$ avec $\Omega = B(0, 1)$, la boule centrée en zéro et de rayon un. Prenons $f^\varepsilon = 4 - \frac{1+\varepsilon}{r}$, avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, tel que

$$u^\varepsilon = (1 - r)(r - \varepsilon).$$

En effet,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2} &= -(r - \varepsilon) \frac{\partial^2(1 - r)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial(1 - r)}{\partial x} \frac{\partial(r - \varepsilon)}{\partial x} - (r - 1) \frac{\partial^2(r - \varepsilon)}{\partial x^2} \\ &= (r - \varepsilon - 1 + r) \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \\ &= (2r - \varepsilon - 1) \frac{r^2 - x^2}{r^3} + 2 \frac{x^2}{r^2}, \end{aligned}$$

et en procédant de même pour y , ceci nous donne :

$$\begin{aligned} -\Delta u^\varepsilon &= -\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial y^2} \\ &= (2r - \varepsilon - 1) \left(\frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} \right) + 2 \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} \right) \\ &= 2 - \frac{\varepsilon + 1}{r} + 2. \end{aligned}$$

Le problème (III.11) est remplacé par le problème pénalisé suivant :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) + \sigma u = f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

où

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{1}{\delta} & \text{dans } B(0, \varepsilon), \end{cases} \quad \sigma = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{1}{\delta L_A^2} & \text{dans } B(0, \varepsilon), \end{cases} \quad f = \begin{cases} f^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{dans } B(0, \varepsilon). \end{cases}$$

Prenons $\varepsilon = 0.1$ et réalisons des simulations sur plusieurs maillages. Pour chaque taille h de maillage, regardons les erreurs en norme $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$ en variant la valeur de δ . Chaque courbe correspond à un maillage fixé avec h donné dans la légende.

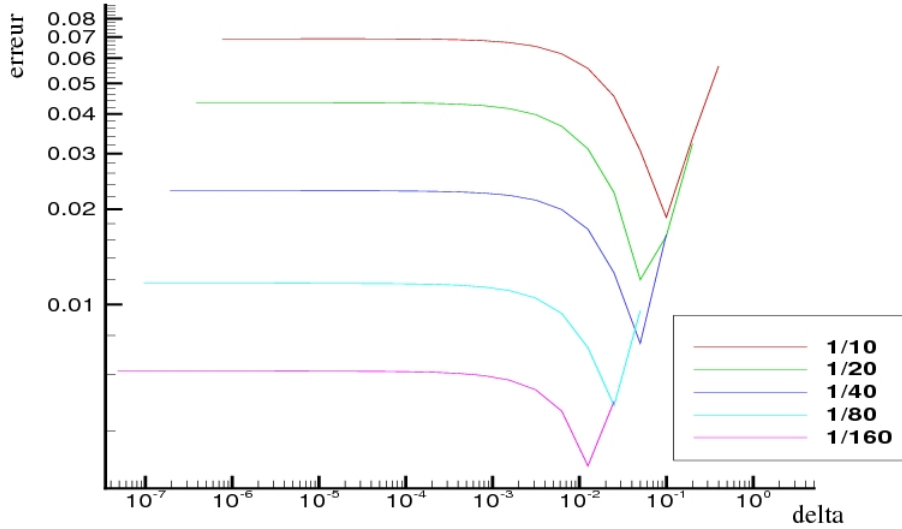


FIG. III.6 – Erreur commise sur (III.12) en fonction du paramètre de pénalisation δ pour différentes tailles h de maillage $(\frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{160})$.

Nous observons sur la figure FIG. III.6 qu'il y a toujours une valeur optimale pour δ dépendant de h . Afin de mieux voir la dépendance en h , redimensionnons δ et l'erreur par h . Ainsi, ceci nous donne le choix optimal est entre $\delta = h$ et $\delta = 2h$ (voir la figure FIG. III.7).

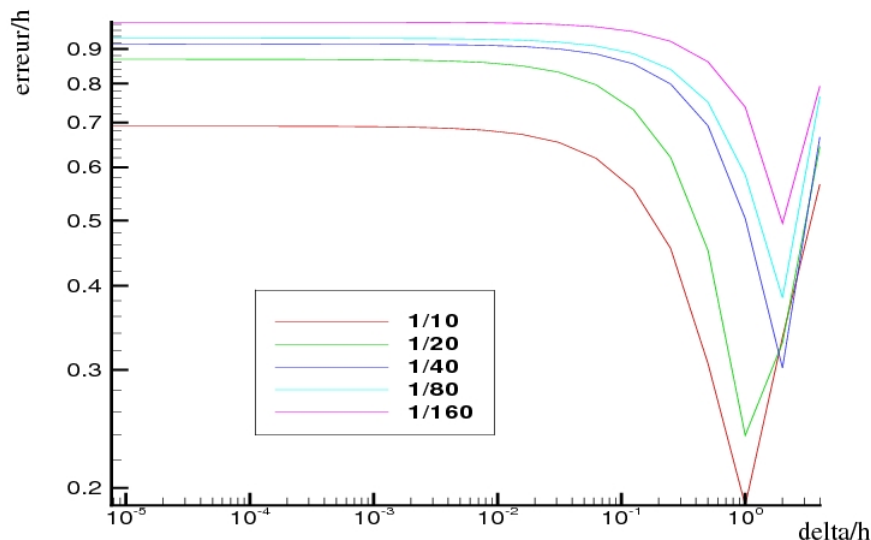


FIG. III.7 – Erreur commise sur (III.12) divisée par la taille h du maillage en fonction du paramètre de pénalisation δ divisé par la taille h pour différentes tailles de maillage ($\frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{160}$).

Le nombre δ étant sans dimension, il est donc pris égal au pas d'espace fin adimensionné par la longueur du domaine (identique dans les deux directions). Plus généralement, il est pris égal au minimum sur les directions du pas d'espace fin adimensionné par la longueur du domaine.

5 Les conditions aux limites dans le calcul des fonctions de base

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que les conditions aux limites dans le problème des fonctions de base multiéchelles avaient un rôle important et des conditions aux limites linéaires ne reflètent pas les oscillations des coefficients. Rappelons que pour MsFEM-L, la fonction Φ^i vérifie les conditions aux limites suivantes :

$$\Phi^i = \Psi^i \quad \text{sur } \partial K,$$

où Ψ^i est la fonction \mathbb{Q}_1 centrée au nœud \mathbf{x}_i . Il est intuitivement clair que les effets des conditions aux limites artificielles ne sont pas négligeables. Ces conditions aux limites linéaires posent problème quand, par exemple, un bâtiment touche le bord d'une cellule grossière : la fonction de base multiéchelles Φ est linéaire sur ∂K alors que les coefficients ν, σ varient sur ∂K . La fonction Φ ne prend donc pas suffisamment en compte les variations de ν, σ proches du bord de la cellule K . Nous présentons dans cette section quelques idées afin d'y remédier.

5.1 Technique d'*oversampling*

Nous nous intéressons ici à la méthode MsFEM-OS, vue dans le chapitre précédent. Nous rappelons que cette méthode permet d'éliminer l'effet des conditions aux limites linéaires (voir [61]) dû à l'erreur entre les conditions aux limites locales artificielles imposées aux fonctions de base multiéchelles et la nature globale de la solution oscillatoire de l'opérateur différentiel.

L'idée de la méthode est d'éloigner les conditions aux limites linéaires du bord de la cellule K afin d'obtenir des conditions aux limites plus adaptées par une combinaison linéaire de fonctions de base intermédiaires. Nous construisons d'abord des fonctions de base intermédiaires φ^m , solutions des problèmes (III.5) sur des nouveaux volumes de contrôle \tilde{K} . Ces volumes \tilde{K} sont construits en élargissant K de κ cellules fines dans chaque direction et chaque côté comme sur la figure FIG. III.8. La fonction Φ^i est ensuite cherchée comme une combinaison linéaire des φ^m telle que $\Phi^i(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j}$ en résolvant le système (II.14). Les fonctions de base Φ^i ainsi obtenues sont solutions de (III.5) avec $g_K = \sum_{m=1}^4 \lambda_m^i \varphi_{|\partial K}^m$ puisque Φ^i est solution dans K de

$$\begin{cases} \mathbf{L}^\Phi(\Phi^i) = \sum_{m=1}^4 \mathbf{L}^\Phi(\varphi^m \lambda_m^i) = 0, \\ \Phi_{|\partial K}^i = \sum_{m=1}^4 \lambda_m^i \varphi_{|\partial K}^m = g_K. \end{cases}$$

Remarques :

1. Les conditions aux limites de φ^m sur $\partial\tilde{K}$ ne sont pas adaptées au problème, mais les valeurs de φ^m sur $\partial K \subset \tilde{K}$ sont adaptées. Une combinaison linéaire de ces valeurs est donc adaptée au problème (III.4) pour servir de conditions aux limites $\Phi_{|\partial K}^i$ pour Φ^i .
2. Lorsqu'il n'y a pas d'obstacle, les fonctions de base sont linéaires, car les φ^m sont linéaires et Φ est une combinaison linéaire de ces dernières.
3. Lorsque, pour tout m , $\varphi^m(\mathbf{x}_i)$ est très proche de zéro, le système linéaire (II.14) est très mal conditionné et la fonction de base Φ obtenue peut ne pas être adaptée, voire pas définie. Cette situation se produit lorsque le nœud grossier \mathbf{x}_i est situé à l'intérieur d'un obstacle.

Il paraît donc nécessaire d'utiliser une méthode qui élimine l'effet des conditions aux limites linéaires, mais qui permette de calculer des fonctions de base multiéchelles, pour tout type de ville et de maillage, c'est-à-dire même lorsque un nœud grossier se trouve à l'intérieur d'un obstacle.

5.2 Technique d'*homothétie centrée*

Dans cette partie, nous nous intéressons au problème mentionné dans la dernière remarque sur la méthode MsFEM-OS. Dans le cas où un nœud du maillage est à l'intérieur d'un obstacle, il semble difficile de trouver une combinaison linéaire des φ^m pour calculer la fonction de base multiéchelles Φ . Cependant, nous ne pouvons pas garder les conditions aux limites linéaires qui ne reflètent pas la géométrie de la ville sur les bords des cellules grossières.

Afin d'obtenir une méthode qui élimine cet effet des conditions aux limites, nous nous inspirons de l'idée de MsFEM-OS qui consiste à éloigner les conditions aux limites linéaires du bord de la cellule K pour calculer des fonctions de base intermédiaires φ^m . Pour pouvoir calculer avec des nœuds grossiers à l'intérieur d'obstacles, situation pouvant survenir en milieu urbain, l'idée est de remplacer la combinaison linéaire des φ^m par une autre combinaison linéaire. Nous notons cette méthode MsFEM-Hcentree.

Les fonctions φ^m sont solutions de (III.5) sur un volume de contrôle \tilde{K} plus grand qu'une cellule grossière K , c'est-à-dire φ^m est solution de

$$\begin{cases} \mathbf{L}^\Phi(\varphi^m) = 0 & \text{sur } \tilde{K}, \\ \varphi^m_{\partial\tilde{K}} = g_{\tilde{K}}. \end{cases} \tag{III.13}$$

avec la condition aux limites sur $\partial\tilde{K}$

$$\begin{cases} g_{\tilde{K}}(\tilde{\mathbf{x}}_j) = \delta_{m,j}, \\ g_{\tilde{K}} \text{ linéaire sur } \partial\tilde{K}. \end{cases}$$

Les volumes de contrôle \tilde{K} sont construits en élargissant les cellules K d'un certain nombre κ de cellules fines (voir figure FIG. III.8), comme pour la méthode MsFEM-OS. Les fonctions φ^m sont les mêmes que celles calculées par la méthode MsFEM-OS précédente. Nous résolvons le problème (III.13) par la méthode des éléments finis stan-

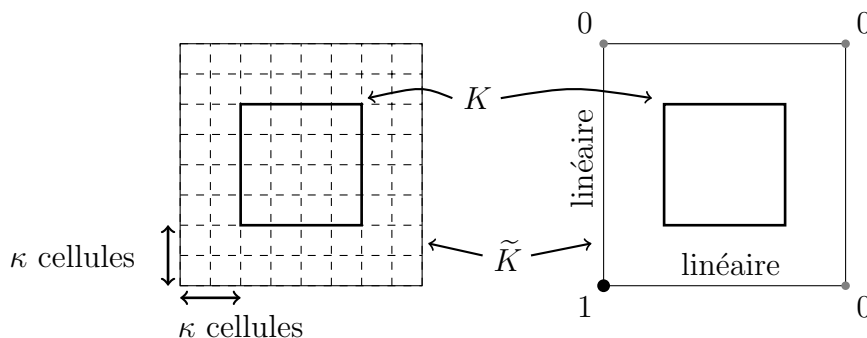


FIG. III.8 – Calcul de la fonction de base intermédiaire φ^m pour les méthodes MsFEM-OS et MsFEM-Hcentree. — A gauche : construction du nouveau volume de contrôle \tilde{K} dans le cas où K est divisé en quatre cellules fines dans chaque direction et $\kappa = 2$. — A droite : construction de la condition aux limites $g_{\tilde{K}}$ sur $\partial\tilde{K}$.

dard sur un maillage fin à $N_{\tilde{K}}$ nœuds, de taille inférieure à ε dans toutes les directions d'espace. Ce maillage est le maillage fin de K auquel sont ajoutées des cellules fines pour compléter jusqu'à obtenir un maillage pour \tilde{K} .

Après avoir calculer les fonctions φ^m , nous utilisons seulement l'information à l'intérieur de K pour construire Φ^k . La combinaison linéaire est telle qu'en l'absence d'obstacle, les fonctions de base soient \mathbb{Q}_1 . Pour cela, nous remplaçons dans (II.14) la matrice A par \hat{A} , qui est définie par $\hat{A}_{i,j} = \tilde{\Psi}^j(\mathbf{x}_i)$, où $\tilde{\Psi}^j$ désigne la fonction de base \mathbb{Q}_1 dans \tilde{K} centrée au sommet $\tilde{\mathbf{x}}_j$ de \tilde{K} . Les composantes du vecteur (λ^k) sont alors déterminées par le système suivant :

$$\hat{A}(\lambda^k) = \delta_{.,k},$$

où $\delta_{.,k}$ est le vecteur des $\delta_{i,k}$. La combinaison linéaire (II.13) permet ensuite d'obtenir la fonction de base multiéchelles Φ^k .

Remarques :

1. Dans le cas où il n'y a pas d'obstacle, φ^m est la fonction de base \mathbb{Q}_1 dans \tilde{K} , et les matrices A et \hat{A} sont égales par définition de \hat{A} . Nous retrouvons ainsi la méthode MsFEM-OS (et MsFEM-L), et Φ^k est une fonction de base \mathbb{Q}_1 dans K .
2. Par construction, les fonctions de base multiéchelles Φ ne sont pas conformes (comme pour MsFEM-OS) dans le sens où elles ne sont pas continues sur les arêtes des cellules grossières.
3. Lorsque les $\varphi^m(\mathbf{x}_i)$ sont très proches de zéro, c'est-à-dire quand le nœud grossier \mathbf{x}_i est situé à l'intérieur d'un obstacle, alors $\Phi^i(\mathbf{x}_i)$ est aussi proche de zéro.

5.3 Technique d'homothétie

Dans cette partie, nous nous intéressons encore au problème mentionné dans la dernière remarque sur la méthode MsFEM-OS. Comme pour la technique précédente, nous cherchons une méthode qui fournisse une solution en toute circonstance, même lorsqu'un nœud du maillage est à l'intérieur d'un obstacle. Pour obtenir une nouvelle méthode qui élimine cet effet des conditions aux limites, nous nous inspirons encore de l'idée de MsFEM-OS qui consiste à éloigner les conditions aux limites linéaires du bord de K pour calculer des fonctions de base intermédiaires φ^m .

Contrairement à la méthode précédente, pour pouvoir se permettre de calculer des cas où des nœuds grossiers se retrouvent à l'intérieur d'obstacles, l'idée ici est d'éloigner encore les conditions aux limites linéaires non nulles, mais de remplacer ensuite la combinaison linéaire des φ^m par une homothétie. Une seule fonction de base intermédiaire φ est alors nécessaire ici. La fonction de base multiéchelles Φ^i est donc la transformée de φ^i par une homothétie. Cette fonction φ^i est solution de (III.5) sur un volume de contrôle \tilde{K} plus grand qu'une cellule grossière K , c'est-à-dire φ^i est solution de

$$\begin{cases} \mathbf{L}^\Phi(\varphi^i) = 0 & \text{sur } \tilde{K}, \\ \varphi^i|_{\partial\tilde{K}} = g_{\tilde{K}}, \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

avec la condition aux limites sur $\partial\tilde{K}$: $g_{\tilde{K}} = \tilde{\Psi}^i$. Afin d'obtenir, après homothétie, $\Phi^i(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j}$ à une constante multiplicative près, nous imposons également $g_{\tilde{K}}(\mathbf{x}_j)$ nulle pour les sommets \mathbf{x}_j de K différents de \mathbf{x}_i . Ceci peut être fait en choisissant correctement \tilde{K} , par exemple en prenant \tilde{K} tel que les sommets \mathbf{x}_j de K , différents de \mathbf{x}_i appartiennent aussi au bord de \tilde{K} . Les volumes de contrôle \tilde{K} sont donc construits en élargissant les cellules K d'un certain nombre κ de cellules fines, du côté des arêtes intérieures au support de la fonction de base (voir figure FIG. III.9). Autrement dit, nous éloignons les arêtes ayant pour sommet le nœud \mathbf{x}_i associé à la fonction de base cherchée Φ^i . Nous résolvons le problème (III.14) par la méthode des éléments finis standard sur un maillage fin à $N_{\tilde{K}}$ nœuds, dont les cellules sont de taille inférieure à ε dans toutes les directions d'espace. Ce maillage est le maillage fin de K auquel des cellules fines sont ajoutées pour le compléter jusqu'à couvrir \tilde{K} .

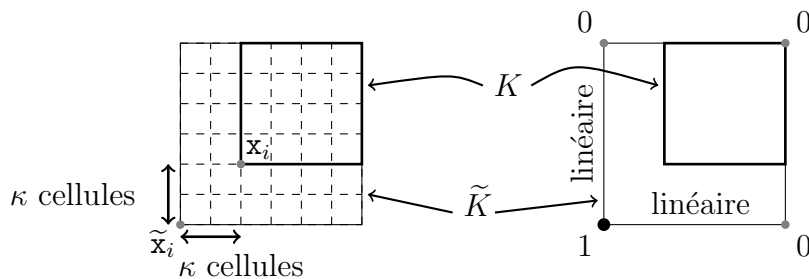


FIG. III.9 – Calcul de la fonction de base intermédiaire φ^i pour la méthode d’homothétie (MsFEM-H). — A gauche : construction du nouveau volume de contrôle \tilde{K} dans le cas où K est divisé en quatre cellules fines dans chaque direction et $\kappa = 2$. — A droite : construction de la condition aux limites $g_{\tilde{K}}$ sur $\partial\tilde{K}$.

Après avoir calculer φ^i , nous utilisons seulement l’information à l’intérieur de K pour construire Φ^i . Le coefficient d’homothétie est pris tel que, en l’absence d’obstacles, Φ^i soit la fonction de base linéaire \mathbb{Q}_1 , comme dans le cas des deux techniques précédentes. La fonction de base multiéchelles Φ^i est donc construite en posant :

$$\Phi^i(x) = \frac{\varphi^i(x)}{\widetilde{\Psi^i(\mathbf{x}_i)}}, \text{ dans } K, \tag{III.15}$$

où $\widetilde{\Psi^i}$ désigne la fonction de base \mathbb{Q}_1 dans \tilde{K} centrée en $\tilde{\mathbf{x}}_i$.

Remarques :

1. En l’absence d’obstacle, φ^i est la fonction de base \mathbb{Q}_1 dans \tilde{K} , c’est-à-dire $\widetilde{\Psi^i}$, et Φ^i est la transformée par homothétie de cette dernière. Nous retrouvons alors les fonctions de base \mathbb{Q}_1 , puisqu’aux nœuds grossiers \mathbf{x}_j (sommets de K), nous obtenons :

$$\Phi^i(\mathbf{x}_j) = \frac{\widetilde{\Psi^i(\mathbf{x}_j)}}{\widetilde{\Psi^i(\mathbf{x}_i)}} = \delta_{i,j},$$

et dans la cellule K , la fonction Φ^i est donc la fonction de base \mathbb{Q}_1 .

2. En utilisant cette construction des fonctions de base multiéchelles, ces fonctions sont, comme pour les méthodes précédentes, non conformes, dans le sens où elles ne sont pas continues sur les arêtes des cellules grossières.
3. Lorsque $\varphi^i(\mathbf{x}_i)$ est très proche de zéro⁷, c’est-à-dire quand le nœud grossier \mathbf{x}_i est situé à l’intérieur d’un obstacle, alors $\Phi^i(\mathbf{x}_i)$ l’est aussi car la condition aux limites $\Phi^i(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j}$ n’est pas imposée dans cette méthode.

⁷La condition aux limites est imposée sur \tilde{K} , qui ne contient pas le nœud \mathbf{x}_i si κ est non nul.

6 Convergence en dimension un

Nous illustrons ici l'approche multiéchelles générale en construisant une méthode éléments finis multiéchelles pour le problème aux conditions aux limites 1D suivant :

$$\text{trouver } u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \begin{cases} \mathbf{L}u = -(\nu u')' + \sigma u = f, \\ u(0) = u(L) = 0, \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est donnée et $\Omega = [0, L]$. Nous supposons que les coefficients ν et σ appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et vérifient les conditions $\nu(x) \geq \nu_{\min} > 0$ et $\sigma(x) \geq \sigma_{\min} \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$. De plus, les fonctions ν et σ oscillent rapidement et changent brutalement sur une petite échelle, notée ε . Notre but est d'exhiber un espace éléments finis multiéchelles $X^0 \subsetneq X$ associé à un maillage de taille $H \gg \varepsilon$, donc tel que la dimension N^0 de X^0 soit de l'ordre de $\frac{L}{H}$. Cet espace doit être choisi pour donner une solution approchée de (III.16) avec une erreur d'ordre H indépendamment de la taille ε des variations dans les coefficients de l'équation.

La formulation variationnelle de (III.16) s'écrit :

$$\text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que } a(u, v) = \int_0^L f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où la forme bilinéaire $a(u, v)$ est définie dans $H_0^1(\Omega)$ par

$$a(u, v) = \int_0^L \nu u' v' dx + \int_0^L \sigma u v dx.$$

6.1 Une méthode avec solution exacte des problèmes locaux

Oublions pour l'instant le maillage fin de taille h et construisons une méthode multiéchelles sur un maillage grossier de taille H . Divisons Ω en intervalles $K_i = [\mathbf{x}_i; \mathbf{x}_{i+1}]$, $i = 1, \dots, N^0 - 1$ où les N^0 nœuds sont définis par $\mathbf{x}_i = iH$ et $H = \frac{L}{N^0 - 1}$. Choisissons l'espace multiéchelles adapté à l'opérateur \mathbf{L} :

$$V_H = \{u_H \in C_0(\Omega) \text{ telle que } \mathbf{L}u_H = 0 \text{ dans } K_i, i = 1, \dots, N^0 - 1\}, \quad (\text{III.17})$$

où $C_0(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions définies sur Ω continues et nulles au bord de Ω . L'approximation Galerkin standard $u_H \in V_H$ de la solution du problème (III.16) est alors

$$a(u_H, \phi_H) = \int_0^L f \phi_H dx, \quad \forall \phi_H \in V_H. \quad (\text{III.18})$$

Théorème 2. *La solution de Galerkin u_H dans (III.18) satisfait l'estimation d'erreur suivante :*

$$\|u - u_H\|_E \leq \frac{H}{\pi \sqrt{\nu_{\min}}} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où $\|\cdot\|_E$ désigne la norme énergie dans $H_0^1(\Omega)$ définie par $\|\cdot\|_E^2 = a(\cdot, \cdot)$.

Démonstration. Nous allons utiliser le résultat suivant :

Lemme 3. (*Lemme de Cea*)

$$\|u - u_H\|_E = \inf_{v_H \in V_H} \|u - v_H\|_E.$$

Prenons $v_H \in V_H$ l'interpolant de u , c'est-à-dire telle que $v_H(\mathbf{x}_i) = u(\mathbf{x}_i)$, $i = 1, \dots, N^0$ et notons e l'erreur d'interpolation, c'est-à-dire $e = u - v_H$. Nous obtenons alors dans chaque cellule du maillage

$$\begin{cases} -(\nu e')' + \sigma e = f \text{ sur } [\mathbf{x}_i; \mathbf{x}_{i+1}], \\ e(\mathbf{x}_i) = e(\mathbf{x}_{i+1}) = 0. \end{cases}$$

En multipliant l'équation précédente par e et en intégrant sur K_i , nous obtenons

$$\int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \nu |e'|^2 dx + \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \sigma e^2 dx = \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} f e dx \leq \|f\|_{L^2(K_i)} \|e\|_{L^2(K_i)}. \quad (\text{III.19})$$

Comme la fonction e s'annule sur la frontière de K_i , nous pouvons lui appliquer l'inégalité de Poincaré, qui borne la norme L^2 par la semi-norme H^1 . De plus, comme la longueur de K_i est $H_i = |\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i|$, la meilleure constante possible dans l'inégalité est $\frac{H_i}{\pi}$, d'où :

$$\|e\|_{L^2(K_i)} \leq \frac{H_i}{\pi} \left(\int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} |e'|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or, σ étant positif, on a

$$\nu_{\min} \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} |e'|^2 dx \leq \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \nu |e'|^2 dx \leq \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \nu |e'|^2 dx + \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \sigma e^2 dx,$$

ce qui implique :

$$\|e\|_{L^2(K_i)} \leq \frac{H_i}{\pi \sqrt{\nu_{\min}}} \left(\int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \nu |e'|^2 dx + \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \sigma e^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{III.20})$$

Notons $I_i = \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \nu |e'|^2 dx + \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \sigma e^2 dx$. En le substituant dans (III.19) nous voyons que :

$$I_i^2 \leq \|f\|_{L^2(K_i)}^2 \|e\|_{L^2(K_i)}^2 \leq \|f\|_{L^2(K_i)}^2 \frac{H_i^2}{\pi^2 \nu_{\min}} I_i,$$

donc

$$\int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \nu |e'|^2 dx + \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \sigma e^2 dx \leq \frac{H_i^2}{\pi^2 \nu_{\min}} \|f\|_{L^2(K_i)}^2.$$

En sommant sur tous les intervalles K_i , nous obtenons finalement

$$\|e\|_E = \|u - v_H\|_E \leq \frac{H}{\pi \sqrt{\nu_{\min}}} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

La preuve se termine en appliquant le lemme de Cea. □

Remarque : Si $\sigma_{\min} > 0$, l'estimation d'erreur peut être améliorée en :

$$\|u - u_H\|_E \leq \frac{H}{\sqrt{\pi^2 \nu_{\min} + H^2 \sigma_{\min}}} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \pi^2 \nu_{\min} \|e\|_{L^2(K_i)}^2 + H_i^2 \sigma_{\min} \|e\|_{L^2(K_i)}^2 &\leq H_i^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \nu |e'|^2 dx + H_i^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sigma e^2 dx \\ &\leq H_i^2 \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \nu |e'|^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sigma e^2 dx \right) = H_i^2 I_i. \end{aligned}$$

L'inégalité (III.20) devient alors :

$$\|e\|_{L^2(K_i)} \leq \frac{H_i}{\sqrt{\pi^2 \nu_{\min} + H_i^2 \sigma_{\min}}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \nu |e'|^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sigma e^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

6.2 Une méthode multiéchelles implémentable

La méthode précédente est seulement d'un intérêt théorique puisque la construction de l'espace V_H comporte une solution exacte de l'équation aux dérivées partielles sur chaque intervalle K_i . L'idée est de remplacer ces solutions exactes par des approximations éléments finis sur un maillage fin de taille h . Introduisons maintenant des nœuds fins $x_\xi = \xi h$, $\xi = 1, \dots, N^\varepsilon$, avec $h = \frac{L}{N^\varepsilon - 1}$. Pour simplifier, nous supposons que $N^\varepsilon - 1$ est un multiple de $N^0 - 1$, en fait $\frac{H}{h} = \frac{N^\varepsilon - 1}{N^0 - 1}$ est un nombre entier et chaque élément K_i est décomposé en $\frac{H}{h}$ éléments finis. L'espace de grande dimension suscitée dans la discussion générale est maintenant :

$$X^\varepsilon = V_h = \{u_h \in C_0(\Omega) \text{ tel que } u_h \text{ est linéaire sur } [x_\xi, x_{\xi+1}], \xi = 1, \dots, N^\varepsilon - 1\}.$$

Le sous-espace multiéchelles X^0 de X^ε est maintenant défini (voir la définition (III.17) de V_H) par :

$$\begin{aligned} X^0 &= V_{Hh} \\ &= \{u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, \phi_h) = 0 \forall \phi_h \in V_h \text{ tel que } \gamma_h \subset K_\xi \text{ pour } \xi \in \{1, \dots, N^0 - 1\}\}, \end{aligned}$$

où γ_h désigne le support de ϕ_h . L'approximation de Galerkin standard $u_{Hh} \in X^0$ de la solution du problème (III.16) est alors :

$$a(u_{Hh}, \phi_{Hh}) = \int_0^L f \phi_{Hh} dx, \quad \forall \phi_{Hh} \in X^0. \quad (\text{III.21})$$

Théorème 4. *La solution de Galerkin u_{Hh} dans (III.21) vérifie l'estimation d'erreur suivante :*

$$\|u - u_{Hh}\|_E \leq \frac{1}{\pi \sqrt{\nu_{\min}}} H \|f\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_E.$$

Démonstration. Notons V l'espace fonctionnel H_0^1 muni du produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$. Décomposons cet espace en la somme directe $V = V^0 + V_H$ où

$$V^0 = \{g \in V \text{ telle que } g(\mathbf{x}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N^0\}$$

et V_H est défini par (III.17) :

$$V_H = \{u_H \in C_0(\Omega) \text{ telle que } \mathbf{L}u_H = 0 \text{ dans } K_i, \quad i = 1, \dots, N^0 - 1\}.$$

En effet, pour $u \in V$ il suffit de prendre $\tilde{u} \in V^0$ tel que pour tout i , $\mathbf{L}\tilde{u} = \mathbf{L}u$ dans K_i et $u_H = u - \tilde{u}$ est bien élément de V_H . Remarquons que V_H est le complément orthogonal de V^0 dans V . Décomposons de même $V_h = V_h^0 + V_{Hh}$ où $V_h^0 = V_h \cap V^0$ et notons que V_{Hh} est le complément orthogonal de V_h^0 dans V_h . Soit $u_h \in V_h$ la solution élément fini sur le maillage fin, c'est-à-dire

$$a(u_h, \phi_h) = \int_0^L f \phi_h dx, \quad \forall \phi_h \in V_h. \quad (\text{III.22})$$

Il existe des décompositions uniques de $u \in V$ et $u_h \in V_h$

$$u = \tilde{u} + u_H \quad \text{avec } \tilde{u} \in V^0 \text{ et } u_H \in V_H \quad (\text{III.23})$$

$$u_h = \tilde{u}_h + u_{Hh} \quad \text{avec } \tilde{u}_h \in V_h^0 \text{ et } u_{Hh} \in V_{Hh} \quad (\text{III.24})$$

où u_H et u_{Hh} sont les solutions approchées définies par (III.18) et (III.21) respectivement. Nous avons

$$\|\tilde{u}_h\|_E^2 = a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) = a(u_{Hh}, \tilde{u}_h) + a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) = a(u_h, \tilde{u}_h),$$

car V_h^0 est orthogonal à V_{Hh} , donc, par (III.22), cela donne

$$\|\tilde{u}_h\|_E^2 = \int_0^L f \tilde{u}_h dx = a(u, \tilde{u}_h),$$

car $a(u, \Phi) = \int f \Phi$ pour tout $\Phi \in V$. Or V_h^0 , qui est inclus dans V^0 , est orthogonal à V_H donc

$$\|\tilde{u}_h\|_E^2 = a(\tilde{u}, \tilde{u}_h) + a(u_H, \tilde{u}_h) = a(\tilde{u}, \tilde{u}_h) \leq \|\tilde{u}\|_E \|\tilde{u}_h\|_E,$$

et

$$\begin{aligned} \|u - u_{Hh}\|_E &\leq \|u - u_h\|_E + \|u_h - u_{Hh}\|_E \\ &\leq \|u - u_h\|_E + \|\tilde{u}_h\|_E && \text{d'après (III.24),} \\ &\leq \|u - u_h\|_E + \|\tilde{u}\|_E && \text{par l'inégalité précédente,} \\ &\leq \|u - u_h\|_E + \|u - u_H\|_E && \text{d'après (III.23).} \end{aligned}$$

Concluons par le lemme de Cea en remarquant que :

$$\|u - u_h\|_E = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_E.$$

□

Finalement, le théorème 4 indique que la méthode converge lorsque la taille H du maillage tend vers zéro.

7 Equation de convection-diffusion instationnaire

Rappelons le modèle choisi :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\mathbf{V}}^\varepsilon u^\varepsilon) - \nabla \cdot (\nu^\varepsilon \vec{\nabla} u^\varepsilon) = f^\varepsilon & \text{dans } [0; T] \times \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega_\varepsilon} = g^\varepsilon & \text{dans } [0; T] \times \partial\Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0^\varepsilon & \text{dans } \{0\} \times \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

où $u^\varepsilon(x, t)$ est l'inconnue, $\nu^\varepsilon(x)$ est la diffusion (constante dans l'air), $\vec{\mathbf{V}}^\varepsilon(x)$ est le champ de convection à l'instant initial⁸, $f^\varepsilon(x, t)$ est la source, $g^\varepsilon(x, t)$ est la condition aux limites et $u_0^\varepsilon(x)$ est la condition initiale. Remarquons que le domaine Ω_ε contient des trous, donc il faut utiliser un maillage complexe (surtout en 3D), difficile à construire et à manipuler⁹. Pour cela, la météo néglige les bâtiments, ce qui n'est pas assez précis. De plus, les conditions aux limites nulles sont difficiles à mettre en œuvre. En utilisant la pénalisation, le but est donc de résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\mathbf{V}}u) - \nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) + \sigma u = f & \text{sur } [0; T] \times \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g & \text{sur } [0; T] \times \partial\Omega, \\ u(t=0) = u_0 & \text{sur } \{0\} \times \Omega. \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

Remarques :

- Avantages : le maillage est cartésien (donc rapide et simple, etc.) et le domaine Ω est rectangulaire (convexe).
- Inconvénients : les coefficients et le terme source restent à définir sur le complémentaire $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Les valeurs de $\nu, \sigma, \vec{\mathbf{V}}$ et f sont données par :

$$\nu = \begin{cases} \nu^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\nu^\varepsilon}{\delta} & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad \vec{\mathbf{V}} = \begin{cases} \vec{\mathbf{V}}^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\nu^\varepsilon}{\delta L_A^2} & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad f = \begin{cases} f^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

ce qui rend les coefficients discontinus (variations rapides).

L'étude du cas stationnaire sans convection en utilisant la méthode MsFEM couplée à la pénalisation dans ce contexte à été réalisé dans ce chapitre, voyons ce qu'il manque pour rajouter les termes instationnaire et de convection.

7.1 L'équation de diffusion non stationnaire

Il est encore possible ici d'utiliser MsFEM et la pénalisation puisqu'il s'agit encore d'un problème multiéchelles d'espace : la variable temporelle t est considérée comme un paramètre. Il suffit juste de discrétiser en plus temporellement.

⁸Le champ de convection peut être considéré constant au cours du temps de la simulation.

⁹Rappelons que le but est de calculer en temps réel.

Dans le cas du problème de diffusion non stationnaire, l'inconnue u^ε dépend du temps et de l'espace et les fonctions de base Φ^i uniquement de l'espace, c'est-à-dire que u^ε s'écrit sous la forme :

$$u^\varepsilon(t, x) = \sum_{i=1}^{N^0} \Phi^i(x) u_i(t),$$

et le système (III.9) à résoudre devient :

$$\sum_j \mathbb{M}_{i,j} (\partial_t u_j) + \sum_j (\mathbb{D}_{i,j} + \mathbb{S}_{i,j}) u_j^* = \sum_j \mathbb{M}_{i,j} f_j, \quad (\text{III.26})$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{i,j} &= \int_{\Lambda_j \cap \Lambda_i} \Phi^i \Phi^j dx, \\ \mathbb{D}_{i,j} &= \int_{\Lambda_i \cap \Lambda_j} \nu \vec{\nabla} \Phi^j \vec{\nabla} \Phi^i dx + \int_{\partial(\Lambda_i \cap \Lambda_j)} (-\nu \vec{\nabla} \Phi^j \Phi^i) \cdot \vec{n} ds, \\ \text{et } \mathbb{S}_{i,j} &= \int_{\Lambda_i \cap \Lambda_j} \sigma \Phi^i \Phi^j dx. \end{aligned}$$

Pour résoudre le système d'équations différentielles du premier ordre précédent (III.26) de manière explicite (respectivement implicite), les termes en espace sont évalués à l'instant t (respectivement à l'instant $t + \Delta t$). Le schéma d'Euler explicite sera contraint par une condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) sur le pas de temps Δt pour assurer la stabilité de la méthode. Le schéma d'Euler implicite, quant à lui, est inconditionnellement stable. Il est aussi possible d'utiliser par exemple un schéma de Crank-Nickolson, ou de Runge-Kutta.

Afin de déterminer $(\partial_t u.)$, nous devons attribuer une valeur approchée à $\partial_t u_j$. Pour cela, nous pouvons utiliser par exemple un schéma décentré. En approchant $\partial_t u_j$ par $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$ et en notant \mathbb{I} la matrice identité de taille $N^0 \times N^0$, (III.26) s'écrit :

$$(\mathbb{M} + \Delta t \theta (\mathbb{D} + \mathbb{S})) (u^{n+1}.) = (\mathbb{M} - \Delta t (1 - \theta) (\mathbb{D} + \mathbb{S})) (u^n.) + (1 - \theta) \mathbb{M} (f^n.) + \theta \mathbb{M} (f^{n+1}.),$$

avec θ compris entre zéro et un, ou simplement :

- avec un SCHÉMA EXPLICITE ($\theta = 0$) :

$$(u^{n+1}.) = (\mathbb{I} - \Delta t \mathbb{M}^{-1} (\mathbb{D} + \mathbb{S})) (u^n.) + \Delta t (f^n.),$$

- avec un SCHÉMA IMPLICITE ($\theta = 1$) :

$$(u^{n+1}.) = (\mathbb{M} + \Delta t (\mathbb{D} + \mathbb{S}))^{-1} \mathbb{M} (u^n. + \Delta t f^{n+1}.),$$

- avec un SCHÉMA CRANK-NICHOLSON ($\theta = \frac{1}{2}$) :

$$\left(\mathbb{M} + \frac{\Delta t}{2} (\mathbb{D} + \mathbb{S}) \right) (u^{n+1}.) = \left(\mathbb{M} - \frac{\Delta t}{2} (\mathbb{D} + \mathbb{S}) \right) (u^n.) + \frac{1}{2} \mathbb{M} (f^n.) + \frac{1}{2} \mathbb{M} (f^{n+1}.).$$

7.2 L'équation de convection-diffusion

Nous sommes dans un contexte de convection dominante. En effet, le nombre de Reynolds Re est le rapport entre la vitesse multipliée par la longueur caractéristique et la

viscosité cinématique ν . Or ν est de l'ordre de $10^{-5}m^2.s^{-1}$ pour l'air, le vent est de l'ordre du mètre par seconde (plusieurs kilomètres par heure) et la longueur caractéristique de notre problème de l'ordre du mètre (ou la dizaine de mètres), ce qui donne un nombre de Reynolds très grand. L'influence du champ de convection $\overrightarrow{V}^\varepsilon$ est donc importante. Pour résoudre l'équation (III.25), plusieurs problèmes se posent :

- La discrétisation : problème de stabilité. Il faut alors utiliser la méthode des éléments finis stabilisés (voir [64]), qui consiste à ajouter de la diffusion numérique.
- Les valeurs de $\overrightarrow{V}^\varepsilon$ sont données sur un ensemble fini, de cardinal assez petit, de points \mathbf{x}^s (station météo) de Ω_ε . Il faut alors se donner un modèle que doit vérifier $\overrightarrow{V}^\varepsilon$ afin de le connaître à l'échelle fine.

Le champ de convection est supposé constant à l'échelle de la simulation, ou du moins constant par morceaux¹⁰ et dans ce cas il est recalculé sur chaque intervalle de temps (sur lequel il est constant). Le système à résoudre s'écrit :

$$\sum_j \mathbb{M}_{i,j} (\partial_t u_j) + \sum_j \left(\mathbb{D}_{i,j} + \mathbb{S}_{i,j} + \sum_k \overrightarrow{\mathbb{B}}_{i,j,k} \cdot \overrightarrow{V}_k \right) u_j = \sum_j \mathbb{M}_{i,j} f_j,$$

avec :

$$\overrightarrow{\mathbb{B}}_{i,j,k} = - \int_{\Lambda_i \cap \Lambda_j \cap \Lambda_k} \Phi^j \overrightarrow{\nabla} \Phi^i \Phi^k dx + \int_{\partial(\Lambda_i \cap \Lambda_j \cap \Lambda_k)} \Phi^k \Phi^j \Phi^i \vec{n} ds.$$

soit sous forme matricielle :

$$\sum_j \mathbb{M}_{i,j} (\partial_t u_j) + \sum_j (\mathbb{D}_{i,j} + \mathbb{S}_{i,j} + \mathbb{C}_{i,j}) u_j = \sum_j \mathbb{M}_{i,j} f_j,$$

où \mathbb{C} est la matrice de la discrétisation de la convection : $\mathbb{C}_{i,j} = \sum_k \overrightarrow{\mathbb{B}}_{i,j,k} \cdot \overrightarrow{V}_k$. Après

discrétisation temporelle, nous obtenons :

- avec un SCHÉMA EXPLICITE ($\theta = 0$) :

$$(u^{n+1}.) = (\mathbb{I} - \Delta t \mathbb{M}^{-1} (\mathbb{D} + \mathbb{S} + \mathbb{C})) (u^n.) + \Delta t (f^n.),$$

- avec un SCHÉMA IMPLICITE ($\theta = 1$) :

$$(u^{n+1}.) = (\mathbb{M} + \Delta t (\mathbb{D} + \mathbb{S} + \mathbb{C}))^{-1} \mathbb{M} (u^n. + \Delta t f^{n+1}.),$$

- avec un SCHÉMA CRANK-NICHOLSON ($\theta = \frac{1}{2}$) :

$$\left(\mathbb{M} + \frac{\Delta t}{2} (\mathbb{D} + \mathbb{S} + \mathbb{C}) \right) (u^{n+1}.) = \left(\mathbb{M} - \frac{\Delta t}{2} (\mathbb{D} + \mathbb{S} + \mathbb{C}) \right) (u^n.) + \frac{1}{2} \mathbb{M} ((f^n.) + (f^{n+1})).$$

En pratique, une grande partie du temps est consacrée à construire les fonctions de base Φ^i qui portent les petites échelles de variations : inversion de matrices de grande taille (quatre pour un maillage cartésien). Cependant, ces calculs sont réalisés une seule fois, au préalable ("preprocessing"). La résolution de (III.25), c'est-à-dire le calcul en temps réel, n'implique qu'une seule inversion de matrice de petite taille $N^0 \times N^0$, ce qui, en pratique, est très rapide. De ce fait, il est possible, aussi pour ce modèle, de

¹⁰Le vent change très peu de direction ou d'intensité sur un court intervalle de temps.

réaliser un grand nombre de simulations numériques précises en changeant uniquement les conditions aux limites ou les conditions initiales dès lors que les fonctions de base sont précalculées et stockées.

Le calcul du champ de convection se fait sur le maillage grossier et il est reconstitué sur le maillage fin grâce aux fonctions de base. Le champ de convection est solution de l'équation suivante :

$$-\nu \Delta \vec{\mathbf{V}}^\varepsilon = \vec{\mathbf{0}} \text{ dans } \Omega_\varepsilon. \quad (\text{III.27})$$

Remarque : Si le problème est à convection dominante, il faut introduire le terme de transport $(\vec{\mathbf{V}}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{\mathbf{V}}^\varepsilon$ dans l'équation précédente qui devient :

$$(\vec{\mathbf{V}}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{\mathbf{V}}^\varepsilon - \nu \Delta \vec{\mathbf{V}}^\varepsilon = \vec{\mathbf{0}}$$

Malheureusement, ce terme est non linéaire. La notation $\vec{\mathbf{V}}^\varepsilon \cdot \nabla$ utilisée ici signifie simplement :

$$\sum_k \vec{\mathbf{V}}_k^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Afin de résoudre (III.27) sur tout le domaine Ω , nous rajoutons le terme de pénalisation $\sigma \vec{\mathbf{V}}$, ce qui donne l'équation suivante à résoudre :

$$-\nabla \cdot (\nu \cdot \nabla \vec{\mathbf{V}}) + \sigma \vec{\mathbf{V}} = 0, \quad (\text{III.28})$$

muni de la condition aux limites $\vec{\mathbf{V}}|_{\partial\Omega}$ donnée (condition de Dirichlet par exemple). L'inconnue $\vec{\mathbf{V}}$ étant un vecteur, il est possible de :

- découpler les composantes du vent en calculant séparément les coordonnées (chacune vérifiant (III.28)). La méthode des éléments finis nous donne donc pour chaque composante \mathbf{V}^m du vecteur $\vec{\mathbf{V}}$:

$$\sum_j (\mathbb{D}_{i,j} + \mathbb{S}_{i,j}) \mathbf{V}_j^m = 0, \quad (\text{III.29})$$

Nous utilisons les mêmes fonctions de base multiéchelles que précédemment pour chaque composante. Ce faisant, le champ de convection n'est pas qualitativement représentatif du vent ; il n'y a, par exemple, pas de contournement des obstacles.

- ajouter la condition supplémentaire $\nabla \cdot \vec{\mathbf{V}} = 0$ qui permet de coupler les composantes. Cette condition a pour conséquence la construction de fonctions de base à divergence nulle, mais qui crée des tourbillons, et ne permettent pas de représenter une solution constante par une combinaison des fonctions de base.

Une fois le champ de convection reconstruit sur le maillage fin, ce n'est plus une inconnue du problème et il suffit de résoudre (III.25).

8 Discussion sur le choix des opérateurs

Nous avons décrit dans ce chapitre la méthode MsFEM utilisant les mêmes opérateurs pour le calcul des fonctions de base et de l'équation globale, c'est-à-dire $\mathbf{L}^0 = \mathbf{L}^\Phi$. Ceci

est un choix, d'autres opérateurs pourraient être utilisés comme il a été mentionné dans le chapitre précédent. Cependant, ce choix est le plus immédiat. Jusqu'à présent ce type de problème n'a pas été abordé dans le monde multiéchelles.

Pour résoudre des équations de la forme (III.4), Hou suggère (voir [43]) dans un contexte géophysique de ne pas prendre en compte le terme de réaction $\sigma\Phi$ dans le calcul des fonctions de base et de changer le terme de réaction σu par $\sigma\bar{u}$ où \bar{u} est la moyenne de u dans les cellules grossières, c'est-à-dire $\sum_j \frac{1}{|K|} \int_K \Phi^j dx u_j$. Ceci n'est pas plus complexe à mettre en œuvre que le calcul précédent. En retirant le terme de pénalisation $\sigma\Phi$ dans le calcul des fonctions de base, celles-ci ne sont plus des solutions modèles de l'équation (III.4) et ne sont pas négligeables dans un obstacle. La solution globale est donc nulle seulement si elle l'est aux nœuds grossiers autour de l'obstacle, ce qui n'est pas oligatoirement le cas et va aussi dépendre du maillage choisi. De plus, la fonction \bar{u} n'a pas véritablement de sens physique. La solution de $-\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) + \sigma\bar{u} = f$ est proche de la solution du problème homogénéisé, que nous ne pouvons pas expliciter ici. Cette solution n'a *a priori* aucune raison d'être proche de la solution physique de notre problème $-\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) + \sigma u = f$.

Un intermédiaire entre ces deux choix est de ne pas prendre en compte le terme de réaction $\sigma\Phi$ dans le calcul des fonctions de base et de conserver le terme de réaction σu dans l'équation globale. Ceci permet de résoudre le problème physique, mais uniquement à l'échelle grossière.

A priori, retirer le terme de pénalisation dans le calcul des fonctions de base ne devrait pas être un bon choix. L'amélioration du résultat par le remplacement dans l'équation globale de σu par $\sigma\bar{u}$ n'est pas garanti non plus. L'importance la plus grande entre le terme $\sigma\Phi$ et le terme σu ne semble pas claire. Le premier choix semble donc plus adéquat dans le contexte urbain. Le chapitre suivant aura donc pour but de tester ces méthodes et ainsi de valider ou invalider ces intuitions sur les opérateurs. Il aura aussi pour but de déterminer les techniques de choix des conditions aux limites dans le calcul des fonctions de base.

Remarques :

- Toutes ces méthodes proposées pour améliorer les conditions aux limites dans le calcul des fonctions de base sont des méthodes MsFEM non conformes, dans le sens où les fonctions de base sont discontinues le long des arêtes des cellules grossières. Dans [45, 60, 61] les auteurs ont montré que l'erreur de non conformité était petite et qu'elle peut donc être négligée.
- La résonance d'échelle mentionnée dans le chapitre I existe *a priori* ici aussi. Cependant, dans notre contexte, le cas intéressant est de prendre H bien plus grand que ε .

9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthodologie multiéchelles, en adaptant la méthode MsFEM, au contexte de la propagation d'un polluant en milieu urbain. Nous avons considéré un modèle de transport simplifié dans un milieu hétérogène, étant donné que le but était de développer une méthode numérique performante. La méthode de pénalisation est couplée ici avec la méthode multiéchelles, puisqu'elle permet une simpli-

fication du problème : elle permet, entre autre, de s'affranchir d'un maillage non structuré qui suivrait les hétérogénéités du milieu urbain. De fait, le modèle avec pénalisation est une approximation de l'équation de diffusion choisie comme modèle.

Nous avons présenté plusieurs méthodes existantes pour le calcul de l'espace X^0 dans ce contexte : MsFEM-L, MsFEM-OS, mais aussi deux nouvelles techniques plus adaptées : MsFEM-Hcentree, MsFEM-H. Sans la pénalisation, MsFEM-OS ne permet pas de calculer une base de X^0 . Cependant, nous avons montré que le couplage avec la méthode de pénalisation rend possible ce calcul par MsFEM-OS. De plus, nous avons proposé une analyse en dimension un de la convergence des méthodes multiéchelles couplées. Ensuite, nous avons étudié l'adaptation de la méthode multiéchelles au cas d'une équation de convection-diffusion instationnaire. Le passage au cas instationnaire est simple, puisque la géométrie de la ville est constante au cours de la simulation. Néanmoins, la prise en compte d'un terme convectif dominant est plus délicate puisqu'il faut, dans ce cas, ajouter un terme de stabilisation (diffusion) numérique à la méthode. Enfin, plusieurs choix d'opérateurs \mathbf{L}^0 et \mathbf{L}^Φ peuvent être envisagés ; en particulier la (non)prise en compte du terme de pénalisation dans le calcul des fonctions de base.

La discrimination entre ces choix et les améliorations des conditions aux limites artificielles nécessite une étude numérique, réalisée en dimension deux dans le chapitre suivant.

Etude d'un problème de diffusion en milieu urbain : résultats numériques en dimension deux

Dans ce chapitre, nous résolvons numériquement, en deux dimensions spatiales, par la méthode des éléments finis multiéchelles couplée avec la pénalisation, l'équation de diffusion présentée au chapitre précédent. Ceci revient à la résolution, par la méthode des éléments finis multiéchelles, de l'équation pénalisée, à savoir :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) + \sigma u = f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

avec les coefficients suivants

$$\nu = \begin{cases} \nu^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\nu^\varepsilon}{\delta} & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad f = \begin{cases} f^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad \sigma = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\nu^\varepsilon}{\delta L_A^2} & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

La condition aux limites est définie par $g = g|_{\partial\Omega}^\varepsilon$. Les choix de $\Omega, \Omega_\varepsilon, \nu^\varepsilon, L_A, \delta, f^\varepsilon$ et g^ε sont à définir suivant les différents cas étudiés dans ce chapitre. Le but est de tester numériquement les différentes méthodes présentées dans le chapitre précédent. Dans un premier temps, elles sont testées sur des cas "académiques". Nous nous intéressons à un premier cas test pour lequel les coefficients ν, σ sont continus, oscillants et périodiques. Ce cas est bien adapté à un traitement par des méthodes d'homogénéisation et la solution numérique doit converger vers la solution homogénéisée. Cependant, de tels coefficients oscillants ne sont pas représentatifs d'un contexte urbain pour lequel ν, σ sont discontinus et non-périodiques. Ainsi, nous proposons un cas test "académique" dit de "ville virtuelle". Il n'existe alors pas de solution homogénéisée calculable explicitement vers laquelle nos solutions numériques sont censées converger. Nous comparerons pour cela nos solutions numériques à une solution de référence obtenue à l'aide d'une méthode des éléments finis standard \mathbb{Q}_1 sur un maillage très fin. Enfin, ces méthodes sont testées sur des données réelles issues d'une image satellite de la zone urbaine autour de l'aéroport de Toulouse-Blagnac.

1 Implémentation

Rappelons que la méthode MsFEM consiste à calculer un jeu de fonctions $\{\Phi^i\}_{i=1,\dots,N^0}$ qui sert de fonctions de base lors de la résolution éléments finis du problème. Ces fonctions, ainsi que la solution globale, sont calculées numériquement.

Formules d'intégration. Nous approchons les intégrales du chapitre précédent, à l'aide de la méthode de quadrature de Gauss à quatre points. A l'intérieur de la cellule fine sur laquelle nous intégrons, prenons quatre points en lesquels la fonction est évaluée (voir la figure FIG. IV.1). Les poids de Gauss sont égaux à la surface du domaine d'intégration. Une intégrale sur une cellule fine ω , de la forme $\int_{\omega} f dx dy$, est donc approchée par $\sum_{g=1}^4 w_g f(x_g, y_g)$, où les w_g sont les poids de Gauss et les points (x_g, y_g) sont les points de Gauss de la figure FIG. IV.1.

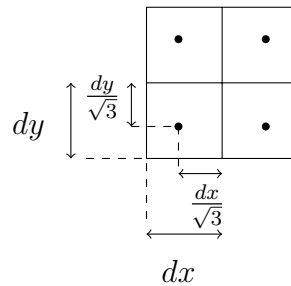


FIG. IV.1 – Points de Gauss • sur le domaine d'intégration (ici, une cellule fine).

Nous décomposons d'abord sur les cellules fines les intégrales sur les cellules grossières K , c'est-à-dire $\int_K f dx dy = \sum_{\omega \subset K} \int_{\omega} f dx dy$, puis nous approchons chaque intégrale sur les cellules fines avec la méthode de quadrature de Gauss. Comme les fonctions à intégrer sur une cellule fine sont des polynômes de degré au plus un, une quadrature de Gauss à quatre points est exacte.

Résolution des systèmes. L'inversion des systèmes linéaires peut se faire par une méthode de résolution itérative. Ici, nous choisissons d'utiliser la méthode GMRES (Généralisation de la méthode de Minimisation du RESidu), basée sur l'algorithme d'Arnoldi, avec préconditionneur. GMRES donne une approximation de la solution dans un espace de Krylov qui minimise la norme du résidu.

Visualisation. Comme nous utilisons des maillages cartésiens réguliers, les fichiers de sorties sont formatés pour être lus par le logiciel gnuplot.

2 Cas tests

Afin de savoir quelles méthodes multiéchelles présentées dans le chapitre précédent sont les plus appropriées dans un contexte urbain, nous définissons plusieurs cas tests. Pour chacun d'entre eux, nous comparons les différentes méthodes multiéchelles avec la

méthode des éléments finis standard (de degré un) sur un maillage fin qui résoud les plus petits détails en jeu. Cette comparaison est réalisée en calculant les erreurs relatives de la solution approchée u^{num} obtenue par une méthode multiéchelles par rapport à celle obtenue par les éléments finis standard u^{ref} . Ces erreurs, notées E_p , sont calculées pour toutes les méthodes avec plusieurs maillages successivement raffinés. Nous comparons aussi l'erreur relative, notée F_p , entre la solution numérique multiéchelles pour une méthode donnée et la solution de la même méthode obtenue avec un maillage deux fois plus fin. Ceci permet de s'assurer que la suite des solutions approchées quand le pas d'espace H tend vers zéro est bien une suite de Cauchy. Les deux types d'erreurs relatives utilisées sont donc définis par :

$$E_p(u^{\text{num}}) = \frac{\|u^{\text{num}} - u^{\text{ref}}\|_p}{\|u^{\text{ref}}\|_p}, \quad (\text{IV.2})$$

$$F_p(u_H^{\text{num}}) = \frac{\|u_H^{\text{num}} - u_{H/2}^{\text{num}}\|_p}{\|u_{H/2}^{\text{num}}\|_p}, \quad (\text{IV.3})$$

avec les normes discrètes L^p :

$$\|u\|_p = \left(h \sum_{\mathbf{x}_\alpha} |u(\mathbf{x}_\alpha)|^p \right)^{1/p} \quad \text{si } p < \infty,$$

$$\|u\|_\infty = \max_{\mathbf{x}_\alpha} |u(\mathbf{x}_\alpha)|,$$

où les \mathbf{x}_α sont les nœuds du maillage fin, et u_H^{num} est la solution numérique multiéchelles calculée avec un maillage grossier de taille H . Nous regardons les erreurs $E_1, E_2, E_\infty, F_1, F_2$ et F_∞ pour chaque méthode et pour différents maillages grossiers successivement raffinés : $H = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ et $\frac{1}{80}$. Le maillage fin utilisé pour le calcul des fonctions de base et le calcul de la solution de référence possède un pas d'espace fin $h = \frac{1}{800}$. Ce pas d'espace est suffisamment petit pour résoudre les détails les plus fins des problèmes que nous traitons.

2.1 Cas test à coefficients oscillants

Commençons par un cas proche de ceux issus de la littérature (voir [46], [62] et [60]). Celui-ci est modifié afin d'être représentatif de ce qui se passe dans un contexte de diffusion avec pénalisation. En effet, nous ajoutons un terme de pénalisation à une équation de diffusion à coefficient ν oscillant.

a) Définition du cas test

Prenons une équation elliptique de la forme $-\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) = f$ sur Ω à coefficient ν oscillant. Choisissons une valeur particulière de ν , notée ν^* , à partir de laquelle les points seront considérés comme étant en dehors de Ω_ε , c'est-à-dire prenons

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega, \nu(x) < \nu^*\}.$$

Les obstacles sont donc représentés par tous les points x tels que $\nu(x) \geq \nu^*$. Pénalisons maintenant cette équation par une fonction de pénalisation σ oscillante, nulle en dehors des obstacles, donc lorsque $\nu < \nu^*$. La fonction σ sera définie par $\sigma = \frac{1}{\delta}(\nu - \nu^*)_+$, où δ

est un petit paramètre et $(\cdot)_+$ désigne la partie positive. Cette fonction σ est nulle aux points en lesquels ν est en dessous de la valeur seuil ν^* , c'est-à-dire

$$\sigma = \begin{cases} \frac{1}{\delta}(\nu - \nu^*) & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Finalement, nous choisissons $\nu^* = 5$, $\delta = \frac{1}{800}$, $\Omega = [0; 1]^2$, $f = 1$ et $u|_{\partial\Omega} = 0$, puis nous testons les méthodes multiéchelles sur le problème suivant :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) + \sigma u = 1 & \text{sur } [0; 1]^2, \\ u_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

avec les coefficients oscillants suivants :

$$\nu = \frac{\sum_{i=1}^4 \nu_i}{\min_{x \in \Omega} (\sum_{i=1}^4 \nu_i(x))}, \quad \sigma = (\nu - 5)_+ \times 800,$$

où les fonctions ν_i oscillantes sont définies par :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{2 + p \sin(50qx)}{2 + p \cos(37qy)} + \frac{2 + p \sin(37qy)}{2 + p \cos(50qx)}, & \nu_2 &= \frac{2 + p \cos(27qx)}{2 + p \sin(20qy)} + \frac{2 + \cos(20qy)}{2 + p \cos(27qx)}, \\ \nu_3 &= \frac{2 + p \sin(34qx)}{2 + p \sin(41qy)} + \frac{2 + p \sin(41qy)}{2 + p \cos(34qx)}, & \nu_4 &= (3 + \sin(33qx))(3 + \sin(30qy)), \end{aligned}$$

avec $p = 1.8$ et $q = 2\pi \frac{8}{5}$. Remarquons que ν prend des valeurs entre un et dix, certaines plus grandes que cinq et d'autres plus petites, ce qui implique que Ω_ε est non vide et différent de Ω .

Nous avons vu dans le chapitre précédent que MsFEM-OS nous permet de réduire, voire d'éliminer, l'effet de résonance d'échelle. Ce test nous permet de vérifier si, dans un contexte qui se rapproche du contexte urbain, et avec un terme de pénalisation, MsFEM-OS améliore toujours les résultats. Il nous permet aussi de tester les choix des opérateurs du calcul des fonctions de base et ceux du calcul de l'équation globale. Ces choix sont ceux dont nous avons discuté dans le chapitre précédent, à savoir s'il faut retirer le terme de pénalisation $\sigma\Phi$ et/ou changer σu en $\sigma\bar{u}$.

b) Résultats numériques

L'équation (IV.4) est résolue par la méthode des éléments finis standard afin de fournir une solution de référence pour les comparaisons. La solution de référence obtenue se trouve sur la figure FIG. IV.2. Elle est comparée aux différentes méthodes multiéchelles. Cette comparaison des différentes solutions est réalisée en :

1. calculant les erreurs E_p et F_p définies précédemment ;
2. visualisant la solution globale, un zoom de celle-ci, et une coupe 1D dans une partie du domaine.

Référence. La solution obtenue par les éléments finis standard avec le maillage fin croît de zéro à 0.025 sur Ω (voir FIG. IV.2) du bord du domaine vers le centre. En regardant sur une partie du domaine, zoom de la figure FIG. IV.2, nous apercevons une décroissance régulière de la solution. De plus, la solution prend bien en compte les variations des coefficients. En effet, sur la coupe 1D en $y = 0.5$ de la figure FIG. IV.2 nous pouvons voir les petites variations de la solution sur l'intervalle $[0; 0.05]$ en x . Cette coupe 1D est dessinée sur une petite section du domaine qui couvre quarante cellules. Les petits détails sont pris en compte grâce à l'utilisation d'un maillage assez fin. En prenant une taille de maillage quarante fois plus grande, nous aurions observé une solution linéaire sur le zoom de la coupe 1D, bien que les coefficients ν et σ varient à une plus petite échelle.

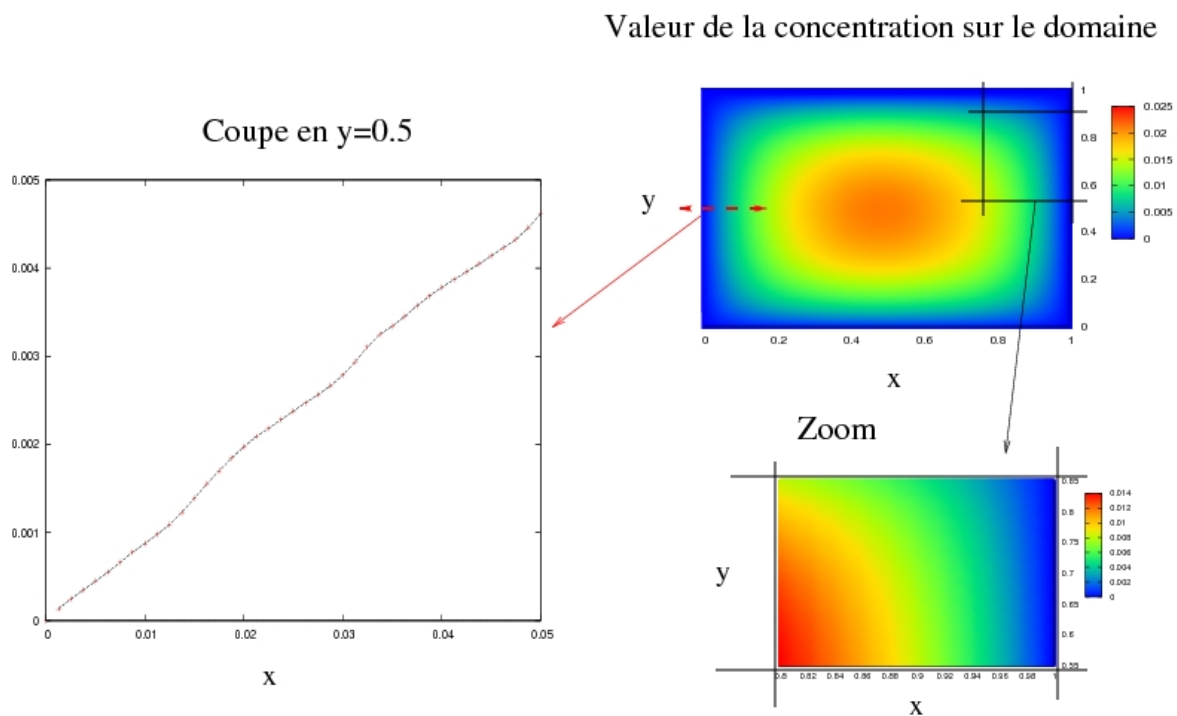


FIG. IV.2 – Solution de référence (éléments finis standard) dans le cas test à coefficients oscillants pour le maillage fin. — Sur la figure du dessus, nous pouvons voir la solution obtenue sur le domaine entier Ω . — En bas à droite, nous voyons un zoom sur une partie du domaine $[0.8; 1] \times [0.55; 0.85]$, encadrée en noir sur la figure du haut. — A gauche est représentée une coupe 1D en $y = 0.5$ avec un zoom sur une cellule grossière ($x \in [0; 0.05]$).

H	E_1	E_2	E_∞	F_1	F_2	F_∞
<i>MsFEM-L</i>						
0.2	$7.10 \cdot 10^{-2}$	$7.00 \cdot 10^{-2}$	$6.99 \cdot 10^{-2}$	$5.36 \cdot 10^{-2}$	$5.57 \cdot 10^{-2}$	$7.29 \cdot 10^{-2}$
0.1	$1.99 \cdot 10^{-2}$	$1.94 \cdot 10^{-2}$	$2.34 \cdot 10^{-2}$	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$1.35 \cdot 10^{-2}$	$2.23 \cdot 10^{-2}$
0.05	$8.93 \cdot 10^{-3}$	$8.18 \cdot 10^{-3}$	$1.26 \cdot 10^{-2}$	$4.25 \cdot 10^{-3}$	$4.38 \cdot 10^{-3}$	$1.08 \cdot 10^{-2}$
0.025	$1.02 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$	$1.22 \cdot 10^{-2}$	$6.59 \cdot 10^{-3}$	$6.72 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-2}$
0.0125	$1.63 \cdot 10^{-2}$	$1.64 \cdot 10^{-2}$	$1.80 \cdot 10^{-2}$	—	—	—
<i>MsFEM-OS</i>						
0.2	$7.70 \cdot 10^{-2}$	$7.45 \cdot 10^{-2}$	$7.17 \cdot 10^{-2}$	$5.92 \cdot 10^{-2}$	$6.00 \cdot 10^{-2}$	$7.47 \cdot 10^{-2}$
0.1	$1.98 \cdot 10^{-2}$	$1.93 \cdot 10^{-2}$	$2.02 \cdot 10^{-2}$	$1.53 \cdot 10^{-2}$	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$2.13 \cdot 10^{-2}$
0.05	$4.85 \cdot 10^{-3}$	$4.75 \cdot 10^{-3}$	$6.75 \cdot 10^{-3}$	$3.96 \cdot 10^{-3}$	$4.06 \cdot 10^{-3}$	$7.02 \cdot 10^{-3}$
0.025	$1.14 \cdot 10^{-3}$	$1.21 \cdot 10^{-3}$	$4.11 \cdot 10^{-3}$	$1.18 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$4.11 \cdot 10^{-3}$
0.0125	$1.16 \cdot 10^{-3}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$	$3.59 \cdot 10^{-3}$	—	—	—
<i>MsFEM-H</i>						
0.2	$7.23 \cdot 10^{-2}$	$7.09 \cdot 10^{-2}$	$7.22 \cdot 10^{-2}$	$5.24 \cdot 10^{-2}$	$5.49 \cdot 10^{-2}$	$7.59 \cdot 10^{-2}$
0.1	$2.93 \cdot 10^{-2}$	$2.97 \cdot 10^{-2}$	$4.81 \cdot 10^{-2}$	$3.28 \cdot 10^{-2}$	$3.52 \cdot 10^{-2}$	$6.99 \cdot 10^{-2}$
0.05	$2.84 \cdot 10^{-2}$	$3.17 \cdot 10^{-2}$	$6.92 \cdot 10^{-2}$	$1.74 \cdot 10^{-1}$	$1.85 \cdot 10^{-1}$	$2.45 \cdot 10^{-1}$
0.025	$1.55 \cdot 10^{-1}$	$1.63 \cdot 10^{-1}$	$2.51 \cdot 10^{-1}$	1.31	1.43	1.72
0.0125	$6.35 \cdot 10^{-1}$	$6.55 \cdot 10^{-1}$	$7.46 \cdot 10^{-1}$	—	—	—
<i>MsFEM-Hcentree</i>						
0.2	$1.02 \cdot 10^{-1}$	$9.42 \cdot 10^{-2}$	$8.43 \cdot 10^{-2}$	$7.73 \cdot 10^{-2}$	$7.40 \cdot 10^{-2}$	$8.29 \cdot 10^{-2}$
0.1	$2.70 \cdot 10^{-2}$	$2.51 \cdot 10^{-2}$	$2.54 \cdot 10^{-2}$	$2.15 \cdot 10^{-2}$	$2.08 \cdot 10^{-2}$	$3.30 \cdot 10^{-2}$
0.05	$8.21 \cdot 10^{-3}$	$8.29 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$	$5.76 \cdot 10^{-3}$	$6.14 \cdot 10^{-3}$	$1.17 \cdot 10^{-2}$
0.025	$5.24 \cdot 10^{-3}$	$5.76 \cdot 10^{-3}$	$1.40 \cdot 10^{-2}$	$7.54 \cdot 10^{-3}$	$7.86 \cdot 10^{-3}$	$1.90 \cdot 10^{-2}$
0.0125	$9.16 \cdot 10^{-3}$	$9.51 \cdot 10^{-3}$	$1.91 \cdot 10^{-2}$	—	—	—

TAB. IV.1 – Erreurs relatives $E_1, E_2, E_\infty, F_1, F_2$ et F_∞ , des méthodes MsFEM-L, MsFEM-OS, MsFEM-H et MsFEM-Hcentree dans le cas test à coefficients oscillants. Pour chaque méthode, les erreurs sont calculées avec les maillages de taille $H = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ et $\frac{1}{80}$. Les erreurs E_p comparent la solution multiéchelles à la solution de référence et les erreurs F_p comparent la solution multiéchelles à celle obtenue avec un pas d'espace H deux fois plus fin.

H	E_1	E_2	E_∞	F_1	F_2	F_∞
<i>MsFEM-L</i>						
0.2	$6.15.10^{-2}$	$6.24.10^{-2}$	$6.50.10^{-2}$	$4.70.10^{-2}$	$4.99.10^{-2}$	$6.93.10^{-2}$
0.1	$1.71.10^{-2}$	$1.72.10^{-2}$	$2.31.10^{-2}$	$1.10.10^{-2}$	$1.22.10^{-2}$	$2.18.10^{-2}$
0.05	$8.26.10^{-3}$	$7.56.10^{-3}$	$1.26.10^{-2}$	$4.54.10^{-3}$	$4.63.10^{-3}$	$1.06.10^{-2}$
0.025	$1.00.10^{-2}$	$9.91.10^{-3}$	$1.22.10^{-2}$	$6.70.10^{-3}$	$6.82.10^{-3}$	$1.05.10^{-2}$
0.0125	$1.63.10^{-2}$	$1.64.10^{-2}$	$1.80.10^{-2}$	—	—	—
<i>MsFEM-OS</i>						
0.2	$6.06.10^{-2}$	$6.17.10^{-2}$	$6.47.10^{-2}$	$4.75.10^{-2}$	$5.03.10^{-2}$	$7.01.10^{-2}$
0.1	$1.54.10^{-2}$	$1.59.10^{-2}$	$1.90.10^{-2}$	$1.21.10^{-2}$	$1.30.10^{-2}$	$2.00.10^{-2}$
0.05	$3.85.10^{-3}$	$4.02.10^{-3}$	$6.61.10^{-3}$	$3.19.10^{-3}$	$3.46.10^{-3}$	$6.81.10^{-3}$
0.025	$1.01.10^{-3}$	$1.12.10^{-3}$	$4.11.10^{-3}$	$1.26.10^{-3}$	$1.35.10^{-3}$	$4.12.10^{-3}$
0.0125	$1.16.10^{-3}$	$1.16.10^{-3}$	$3.59.10^{-3}$	—	—	—
<i>MsFEM-H</i>						
0.2	$6.14.10^{-2}$	$6.23.10^{-2}$	$6.67.10^{-2}$	$4.70.10^{-2}$	$4.98.10^{-2}$	$7.08.10^{-2}$
0.1	$2.64.10^{-2}$	$2.70.10^{-2}$	$4.47.10^{-2}$	$3.11.10^{-2}$	$3.32.10^{-2}$	$6.77.10^{-2}$
0.05	$2.82.10^{-2}$	$3.15.10^{-2}$	$6.91.10^{-2}$	$1.74.10^{-1}$	$1.85.10^{-1}$	$2.46.10^{-1}$
0.025	$1.55.10^{-1}$	$1.63.10^{-1}$	$2.51.10^{-1}$	1.32	1.43	1.72
0.0125	$6.35.10^{-1}$	$6.56.10^{-1}$	$7.47.10^{-1}$	—	—	—
<i>MsFEM-Hcentree</i>						
0.2	$6.15.10^{-2}$	$6.26.10^{-2}$	$6.72.10^{-2}$	$4.80.10^{-2}$	$5.07.10^{-2}$	$6.92.10^{-2}$
0.1	$1.63.10^{-2}$	$1.68.10^{-2}$	$2.08.10^{-2}$	$1.33.10^{-2}$	$1.44.10^{-2}$	$3.03.10^{-2}$
0.05	$6.89.10^{-3}$	$7.31.10^{-3}$	$1.56.10^{-2}$	$4.34.10^{-3}$	$4.98.10^{-3}$	$1.09.10^{-2}$
0.025	$5.19.10^{-3}$	$5.78.10^{-3}$	$1.41.10^{-2}$	$7.16.10^{-3}$	$7.54.10^{-3}$	$1.89.10^{-2}$
0.0125	$9.19.10^{-3}$	$9.54.10^{-3}$	$1.91.10^{-2}$	—	—	—

TAB. IV.2 – Erreurs relatives $E_1, E_2, E_\infty, F_1, F_2$ et F_∞ , des méthodes MsFEM-L, MsFEM-OS, MsFEM-H et MsFEM-Hcentree sans σ dans le calcul des fonctions de base, dans le cas test à coefficients oscillants. Pour chaque méthode, les erreurs sont calculées avec les maillages de taille $H = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ et $\frac{1}{80}$. Les erreurs E_p comparent la solution multiéchelles à la solution de référence et les erreurs F_p comparent la solution multiéchelles à celle obtenue avec un pas d'espace H deux fois plus fin.

H	E_1	E_2	E_∞	F_1	F_2	F_∞
<i>MsFEM-L</i>						
0.2	$1.79 \cdot 10^{-1}$	$2.06 \cdot 10^{-1}$	$2.83 \cdot 10^{-1}$	$4.57 \cdot 10^{-2}$	$4.69 \cdot 10^{-2}$	$6.08 \cdot 10^{-2}$
0.1	$2.13 \cdot 10^{-1}$	$2.29 \cdot 10^{-1}$	$2.60 \cdot 10^{-1}$	$1.02 \cdot 10^{-2}$	$1.09 \cdot 10^{-2}$	$1.86 \cdot 10^{-2}$
0.05	$2.23 \cdot 10^{-1}$	$2.33 \cdot 10^{-1}$	$2.50 \cdot 10^{-1}$	$5.25 \cdot 10^{-3}$	$5.43 \cdot 10^{-3}$	$9.75 \cdot 10^{-3}$
0.025	$2.19 \cdot 10^{-1}$	$2.27 \cdot 10^{-1}$	$2.42 \cdot 10^{-1}$	$9.91 \cdot 10^{-3}$	$1.01 \cdot 10^{-2}$	$1.26 \cdot 10^{-2}$
0.0125	$2.07 \cdot 10^{-1}$	$2.15 \cdot 10^{-1}$	$2.29 \cdot 10^{-1}$	—	—	—
<i>MsFEM-OS</i>						
0.2	$5.35 \cdot 10^{-2}$	$5.57 \cdot 10^{-2}$	$6.26 \cdot 10^{-2}$	$4.31 \cdot 10^{-2}$	$4.60 \cdot 10^{-2}$	$6.87 \cdot 10^{-2}$
0.1	$2.17 \cdot 10^{-1}$	$2.32 \cdot 10^{-1}$	$2.64 \cdot 10^{-1}$	$1.18 \cdot 10^{-2}$	$1.22 \cdot 10^{-2}$	$1.74 \cdot 10^{-2}$
0.05	$2.30 \cdot 10^{-1}$	$2.40 \cdot 10^{-1}$	$2.57 \cdot 10^{-1}$	$2.86 \cdot 10^{-3}$	$3.03 \cdot 10^{-3}$	$5.94 \cdot 10^{-3}$
0.025	$2.33 \cdot 10^{-1}$	$2.41 \cdot 10^{-1}$	$2.55 \cdot 10^{-1}$	$2.76 \cdot 10^{-3}$	$2.81 \cdot 10^{-3}$	$4.22 \cdot 10^{-3}$
0.0125	$2.30 \cdot 10^{-1}$	$2.38 \cdot 10^{-1}$	$2.51 \cdot 10^{-1}$	—	—	—
<i>MsFEM-H</i>						
0.2	$5.38 \cdot 10^{-2}$	$5.59 \cdot 10^{-2}$	$6.24 \cdot 10^{-2}$	$4.62 \cdot 10^{-2}$	$4.81 \cdot 10^{-2}$	$6.91 \cdot 10^{-2}$
0.1	$2.01 \cdot 10^{-1}$	$2.14 \cdot 10^{-1}$	$2.66 \cdot 10^{-1}$	$3.34 \cdot 10^{-2}$	$3.59 \cdot 10^{-2}$	$6.90 \cdot 10^{-2}$
0.05	$2.24 \cdot 10^{-1}$	$2.40 \cdot 10^{-1}$	$3.17 \cdot 10^{-1}$	$2.20 \cdot 10^{-1}$	$2.30 \cdot 10^{-1}$	$2.84 \cdot 10^{-1}$
0.025	$4.13 \cdot 10^{-2}$	$5.21 \cdot 10^{-2}$	$1.64 \cdot 10^{-1}$	1.59	1.72	2.06
0.0125	$6.12 \cdot 10^{-1}$	$6.33 \cdot 10^{-1}$	$7.30 \cdot 10^{-1}$	—	—	—
<i>MsFEM-Hcentree</i>						
0.2	$1.80 \cdot 10^{-1}$	$2.07 \cdot 10^{-1}$	$2.81 \cdot 10^{-1}$	$4.69 \cdot 10^{-2}$	$4.79 \cdot 10^{-2}$	$6.19 \cdot 10^{-2}$
0.1	$2.16 \cdot 10^{-1}$	$2.31 \cdot 10^{-1}$	$2.61 \cdot 10^{-1}$	$1.34 \cdot 10^{-2}$	$1.40 \cdot 10^{-2}$	$2.76 \cdot 10^{-2}$
0.05	$2.31 \cdot 10^{-1}$	$2.41 \cdot 10^{-1}$	$2.56 \cdot 10^{-1}$	$4.34 \cdot 10^{-3}$	$4.89 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-2}$
0.025	$2.35 \cdot 10^{-1}$	$2.43 \cdot 10^{-1}$	$2.55 \cdot 10^{-1}$	$7.83 \cdot 10^{-3}$	$8.04 \cdot 10^{-3}$	$1.82 \cdot 10^{-2}$
0.0125	$2.42 \cdot 10^{-1}$	$2.50 \cdot 10^{-1}$	$2.62 \cdot 10^{-1}$	—	—	—

TAB. IV.3 – Erreurs relatives $E_1, E_2, E_\infty, F_1, F_2$ et F_∞ , des méthodes MsFEM-L, MsFEM-OS, MsFEM-H et MsFEM-Hcentree sans σ dans le calcul des fonctions de base et avec la moyenne de u dans le calcul grossier, dans le cas test à coefficients oscillants. Pour chaque méthode, les erreurs sont calculées avec les maillages de taille $H = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ et $\frac{1}{80}$. Les erreurs E_p comparent la solution multiéchelles à la solution de référence et les erreurs F_p comparent la solution multiéchelles à celle obtenue avec un pas d'espace H deux fois plus fin.

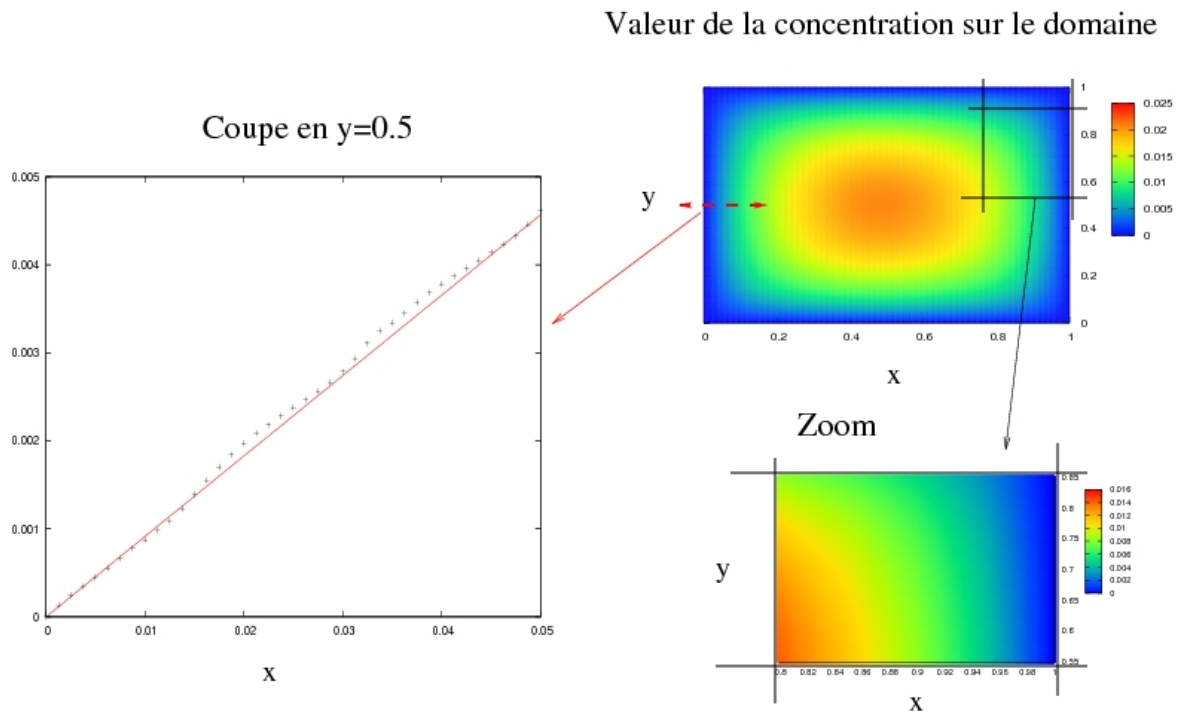


FIG. IV.3 – Solution MsFEM-L dans le cas test à coefficients oscillants avec le maillage de taille $H = \frac{1}{20}$. — Sur la figure en haut à droite, nous voyons la solution obtenue sur le domaine Ω . — En bas à droite, nous voyons un zoom sur une partie du domaine, $[0.8; 1] \times [0.55; 0.85]$, correspondant au cadre noir de la figure située au-dessus. — En bas à gauche est représentée une coupe 1D en $y = 0.5$ avec un zoom sur une cellule grossière (soit $x \in [0; 0.05]$) de la solution MsFEM (en rouge), ainsi que de la solution de référence (en pointillés noirs).

MsFEM-L. La première méthode est la méthode des éléments finis multiéchelles classique. La solution obtenue est visuellement proche de la solution de référence sur le domaine Ω , ainsi que sur le zoom sur $[0.8; 1] \times [0.55; 0.85]$, comme nous pouvons le voir sur la figure FIG. IV.3 (avec le maillage de taille $H = \frac{1}{20}$). Cependant, si nous regardons une coupe 1D en $y = 0.5$ avec un zoom sur une cellule grossière ($x \in [0; 0.05]$), nous pouvons voir l'influence de la condition aux limites linéaire sur les arêtes des cellules : la solution approchée semble linéaire alors que la solution de référence oscille. Les détails les plus fins ne sont pas correctement pris en compte avec MsFEM-L. Dans le tableau TAB. IV.1, nous pouvons voir l'évolution des erreurs en divisant par deux la taille du maillage. Les erreurs E_p comparent la solution MsFEM-L à la solution de référence et les erreurs F_p comparent la solution MsFEM-L à celle obtenue avec un pas d'espace deux fois plus fin. Quelques soient les erreurs, le comportement est identique. Les erreurs E_p décroissent lorsque la taille du maillage diminue puis croissent à partir de $H = \frac{1}{20}$. Ce comportement était prévisible avec cette méthode puisque nous avons vu dans le chapitre précédent que la méthode MsFEM-L crée des effets de résonance d'échelle. Lorsque les deux tailles de maillages sont proches, l'erreur est d'ordre un. Nous pouvons voir la courbe des erreurs E_2 sur la figure FIG. IV.7(b). Les erreurs F_p décroissent lorsque la taille du maillage

diminue, ce qui signifie que la solution approchée semble converger. De plus, sur les tableaux TAB. IV.2 et TAB. IV.3, nous voyons que les erreurs ne sont pas vraiment réduites en retirant le terme de pénalisation $\sigma\Phi$ du calcul des fonctions de base.

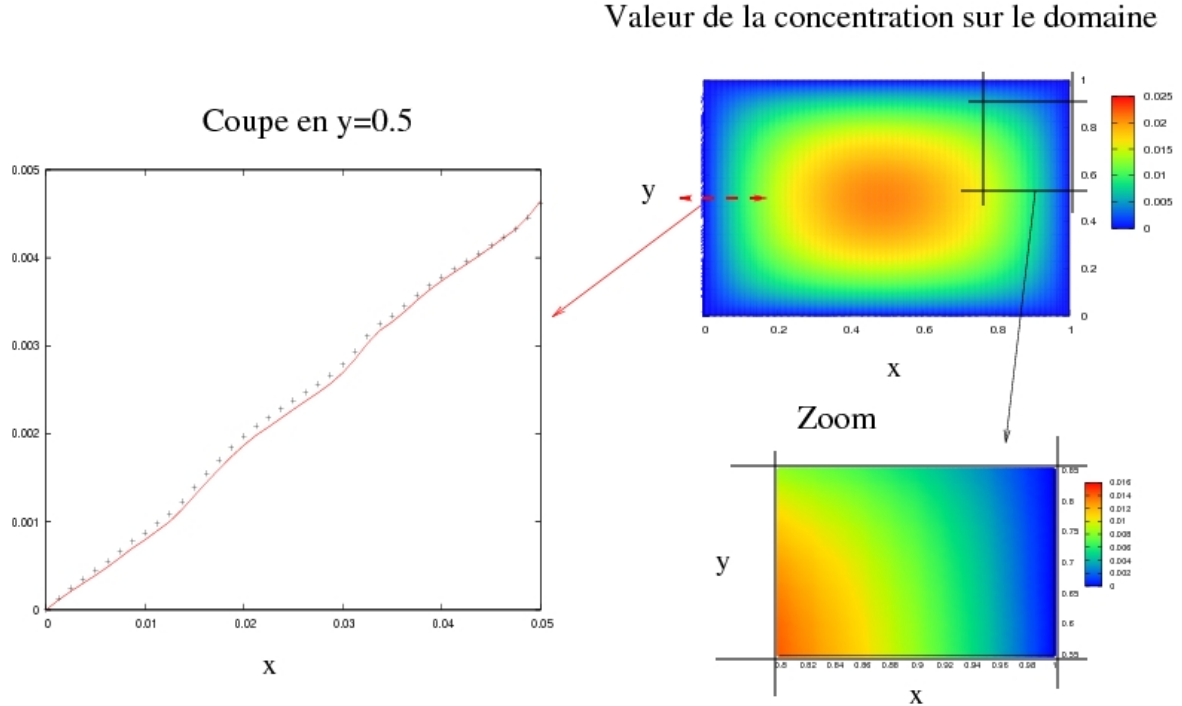


FIG. IV.4 – Solution MsFEM-OS dans le cas test à coefficients oscillants avec le maillage de taille $H = \frac{1}{20}$. — Sur la figure en haut à droite, nous voyons la solution obtenue sur le domaine Ω . — En bas à droite, nous voyons un zoom sur une partie du domaine, $[0.8; 1] \times [0.55; 0.85]$, correspondant au cadre noir de la figure située au-dessus. — En bas à gauche est représentée une coupe 1D en $y = 0.5$ avec un zoom sur une cellule grossière (soit $x \in [0; 0.05]$) de la solution MsFEM (en rouge), ainsi que de la solution de référence (en pointillés noirs).

MsFEM-OS. La deuxième méthode est la méthode des éléments finis multiéchelles avec *oversampling*. La solution obtenue est visuellement proche de la solution de référence sur le domaine Ω et sur le zoom $[0.8; 1] \times [0.55; 0.85]$ (voir figure FIG. IV.4 pour le maillage de taille $H = \frac{1}{20}$). De plus, si nous regardons une coupe 1D en $y = 0.5$ avec un zoom sur $x \in [0; 0.05]$ (une cellule grossière), nous voyons clairement l'influence des oscillations des coefficients ν, σ . Nous voyons aussi l'amélioration faite au niveau des arêtes des cellules : la solution approchée oscille et est plus proche de la solution de référence. Les détails les plus fins sont mieux pris en compte avec MsFEM-OS. Dans le tableau TAB. IV.1, nous pouvons voir l'évolution des erreurs E_p et F_p avec MsFEM-OS. Quelques soient les erreurs, le comportement est identique. Les erreurs E_p décroissent lorsque la taille du maillage diminue et semblent stagner à partir de $H = \frac{1}{40}$. Nous pouvons voir la courbe des erreurs E_2 sur la figure FIG. IV.7(a). Les erreurs F_p décroissent lorsque la taille du maillage diminue. La solution approchée semble donc converger. Cette méthode est

meilleure que la précédente car les erreurs sont plus petites et elles continuent de décroître après $H = \frac{1}{20}$. Cependant, l'erreur doit croître à nouveau lorsque H est de l'ordre de h . Dans le tableau TAB. IV.2, nous remarquons que les erreurs sans le terme $\sigma\Phi$ dans le calcul des fonctions de base stagnent. Dans le tableau TAB. IV.3 sont présentées les erreurs sans le terme $\sigma\Phi$ et avec le terme $\sigma\bar{u}$; les E_p sont dix à cent fois plus grandes et les erreurs F_p sont sensiblement les mêmes que dans les autres tableaux.

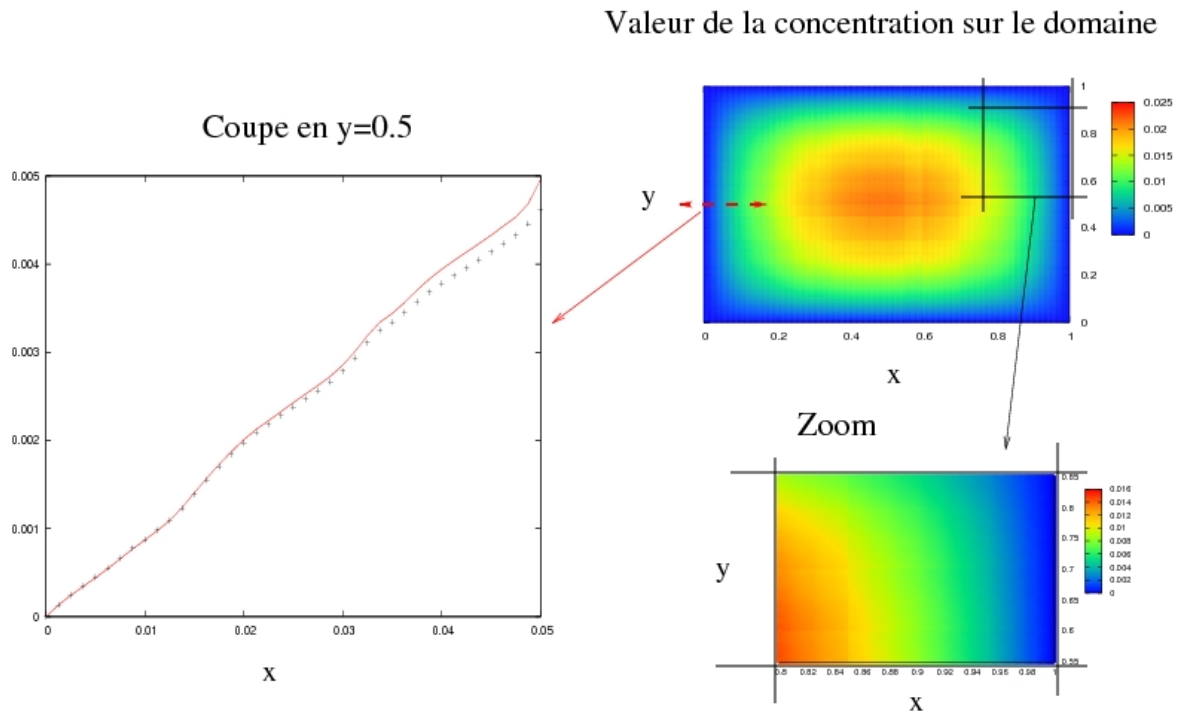


FIG. IV.5 – Solution MsFEM-H dans le cas test à coefficients oscillants avec le maillage de taille $H = \frac{1}{20}$. — Sur la figure en haut à droite, nous voyons la solution obtenue sur le domaine Ω . — En bas à droite, nous voyons un zoom sur une partie du domaine, $[0.8; 1] \times [0.55; 0.85]$, correspondant au cadre noir de la figure située au-dessus. — En bas à gauche est représentée une coupe 1D en $y = 0.5$ avec un zoom sur une cellule grossière (soit $x \in [0; 0.05]$) de la solution MsFEM (en rouge), ainsi que de la solution de référence (en pointillés noirs).

MsFEM-H. La troisième méthode est la méthode des éléments finis multiéchelles avec homothétie. La solution obtenue est visuellement proche de la solution de référence sur le domaine Ω , ainsi que sur le zoom $[0.8; 1] \times [0.55; 0.85]$. Nous pouvons le voir par exemple sur la figure FIG. IV.5 pour le maillage de taille $H = \frac{1}{20}$. De plus, si nous regardons la coupe 1D de cette figure en $y = 0.5$ avec un zoom sur $x \in [0; 0.05]$, soit une cellule grossière, nous pouvons voir distinctement que la méthode prend bien en compte les détails les plus fins : la solution approchée oscille et est proche de la solution de référence. Cette solution est meilleure que celle obtenue avec MsFEM-L et ressemble à celle obtenue avec MsFEM-OS. Les détails les plus fins sont bien pris en compte. Dans le tableau TAB. IV.1, nous pouvons voir l'évolution des erreurs E_p et F_p avec MsFEM-

H. Toutes ces erreurs ont le même comportement. Les erreurs E_p décroissent lorsque la taille du maillage diminue puis croissent à partir de $H = \frac{1}{20}$. Nous pouvons voir la courbe des erreurs E_2 sur la figure FIG. IV.7(b). Les erreurs F_p décroissent lorsque la taille du maillage diminue puis croissent à partir de $H = \frac{1}{10}$. Nous avons calculés d'autres erreurs qui apparaissent dans les tableaux TAB. IV.2 pour les fonctions de base correspondant au calcul sans $\sigma\Phi$, et dans TAB. IV.3 pour les erreurs correspondant au calcul sans $\sigma\Phi$ et avec $\sigma\bar{u}$. Dans ces tableaux les erreurs F_p et E_p sont du même ordre que dans le précédent tableau, voire bien plus grandes. Cette méthode n'est donc pas meilleure que MsFEM-L car les erreurs sont au mieux du même ordre de grandeur et souvent plus grandes. Les erreurs E_2 de ces dernières sont tracées sur la figure FIG. IV.7(b) où nous observons qu'elles sont comparables.

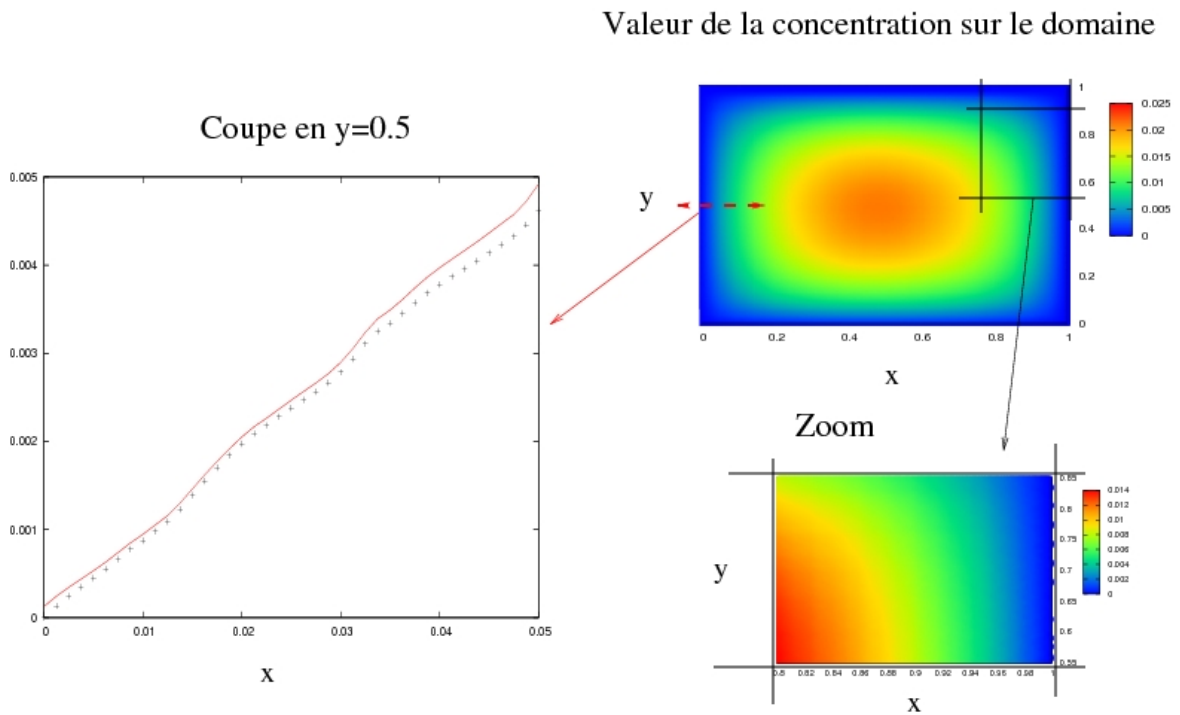


FIG. IV.6 – Solution MsFEM-Hcentree dans le cas test à coefficients oscillants avec le maillage de taille $H = \frac{1}{20}$. — Sur la figure en haut à droite, nous voyons la solution obtenue sur le domaine Ω . — En bas à droite, nous voyons un zoom sur une partie du domaine, $[0.8; 1] \times [0.55; 0.85]$, correspondant au cadre noir de la figure située au-dessus. — En bas à gauche est représentée une coupe 1D en $y = 0.5$ avec un zoom sur une cellule grossière (soit $x \in [0; 0.05]$) de la solution MsFEM (en rouge), ainsi que de la solution de référence (en pointillés noirs).

MsFEM-Hcentree. La quatrième méthode est la méthode des éléments finis multi-échelles avec homothétie centrée. La solution obtenue est elle aussi visuellement correcte sur le domaine Ω et sur le zoom $[0.8; 1] \times [0.55; 0.85]$ (voir la figure FIG. IV.6 pour le maillage de taille $H = \frac{1}{20}$). De plus, si nous regardons la coupe 1D en $y = 0.5$ avec un zoom sur une cellule grossière, c'est-à-dire $x \in [0; 0.05]$, nous voyons l'influence

des bâtiments et l'amélioration faite par rapport à MsFEM-L au niveau des arêtes des cellules : la solution approchée oscille et ressemble aux solutions de MsFEM-OS et de MsFEM-H. Cette méthode prend bien en compte les détails les plus fins : la solution approchée oscille avec des variations de petite taille. Dans le tableau TAB. IV.1, nous pouvons voir l'évolution des erreurs avec MsFEM-Hcentree. Les erreurs ont le même comportement pour tout p . Elles décroissent lorsque la taille du maillage diminue puis croissent à partir de $H = \frac{1}{40}$ pour E_p et de $H = \frac{1}{20}$ pour F_p . Cette méthode est donc meilleure que MsFEM-L et MsFEM-H car les erreurs sont plus petites. Cependant ces erreurs restent plus grandes que celles de la méthode MsFEM-OS. Les erreurs E_2 de ces dernières sont tracées sur la figure FIG. IV.7(a) où nous observons qu'elles sont comparables.

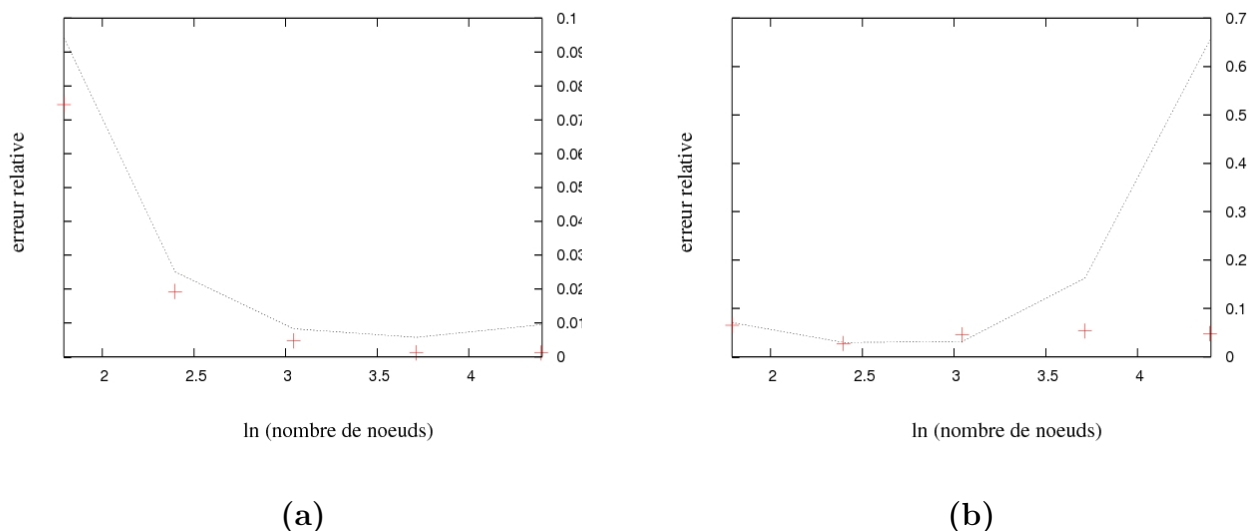


FIG. IV.7 – Courbes d'erreurs relatives E_2 pour les maillages de taille $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{80}$ en échelle logarithmique. **(a)** Les points rouges sont les erreurs de MsFEM-OS, la ligne en pointillés noirs représente les erreurs de MsFEM-Hcentree. — **(b)** Les points rouges sont les erreurs de MsFEM-L, la ligne en pointillés noirs représente les erreurs de MsFEM-H.

c) Commentaires

Retirer le terme de pénalisation $\sigma\Phi$ dans l'équation des fonctions de base, en changeant celui de l'équation globale ou pas, détériore les résultats de toutes les méthodes testées ici. En effet, en retirant le terme $\sigma\Phi$ dans le calcul des fonctions de base, nous remarquons (voir le tableau TAB. IV.2) que les erreurs obtenues sont identiques à celles obtenues avec le terme $\sigma\Phi$, et ceci quelque soit la méthode utilisée. De plus, remplacer l'inconnue u par \bar{u} dans le terme de pénalisation σu de l'équation globale, ne réduit pas les erreurs, voire les augmente pour certaines méthodes.

Dans ce cas test MsFEM-OS améliore qualitativement et quantitativement les résultats. Nous avons pu constater sur les zooms 1D le gain de précision par rapport à la

méthode MsFEM-L. Dans ce cas test, nous avons observé, par le calcul des erreurs (voir le tableau TAB. IV.1), que MsFEM-OS est la méthode qui produit la solution multiéchelles la plus proche de la solution de référence (éléments finis standard sur un maillage fin). En comparant quantitativement les différentes méthodes MsFEM sur le cas test à coefficients oscillants, nous nous apercevons, en regardant les erreurs E_p et F_p du tableau TAB. IV.1, que la méthode multiéchelles classique (MsFEM-L) ne donne pas de résultat satisfaisant, même avec un maillage plutôt fin (par exemple, $H = \frac{1}{80} = 10\varepsilon$). Par contre, les erreurs E_p et F_p avec la méthode MsFEM-OS sont très satisfaisantes : de l'ordre de 10^{-2} ou 10^{-3} . De plus, la méthode MsFEM-Hcentree donne de meilleurs résultats que la méthode MsFEM-L. Ces résultats sont comparables à ceux de MsFEM-OS, même si les erreurs ne sont pas aussi satisfaisantes que pour MsFEM-OS. Par contre, la méthode MsFEM-H fournit une solution multiéchelles avec la même précision que celle obtenue avec MsFEM-L. La figure FIG. IV.7(a) compare les courbes d'erreurs E_2 des deux méthodes MsFEM-OS et MsFEM-Hcentree pour lesquelles les erreurs sont du même ordre, et la figure FIG. IV.7(b) compare les courbes d'erreurs E_2 des deux méthodes MsFEM-L et MsFEM-H pour lesquelles les erreurs sont aussi du même ordre.

Ce cas test valide l'implémentation des méthodes mais n'est pas discriminant pour le contexte urbain. En effet, dans un contexte urbain, les coefficients ν, σ ne sont pas oscillants périodiques. C'est pourquoi nous poursuivons les tests sur un cas d'une ville virtuelle.

2.2 Cas d'une ville virtuelle

Le but est d'observer le comportement des méthodes multiéchelles dans un contexte plus représentatif du milieu urbain pour lequel ν et σ sont discontinus. Nous les testons donc sur un domaine qui représente une ville virtuelle. Pour cela, nous positionnons aléatoirement un ensemble de bâtiments sur le domaine Ω , ce qui est équivalent à définir Ω_ε représentant la partie ouverte de la ville. Toutes les méthodes sont ensuite testées et comparées dans cette configuration.

a) Définition du cas test

Pour créer une ville virtuelle, nous concentrons N_b bâtiments, principalement autour du centre du domaine. La taille des bâtiments dans la direction x est notée l_x et celle dans la direction y est notée l_y . La taille minimale des obstacles est fixée à ε , qui correspond au plus petit détail que nous souhaitons pouvoir capturer. La taille maximale est fixée à 7ε . Les données sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega &= [0; 1]^2, & N_b &= 50, & \varepsilon &= \frac{1}{800}, \\ \varepsilon \leq l_x \leq 7\varepsilon, & \varepsilon \leq l_y \leq 7\varepsilon, \\ L_A &= \varepsilon, & \delta &= 2.10^{-3}, & \nu^\varepsilon &= 1, \end{aligned}$$

avec le terme source nul et la condition aux limites constante, égale à un.

Il s'agit alors de résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -\nabla(\nu \vec{\nabla} u) + \sigma u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 1 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

avec les coefficients :

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ 5.10^2 & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ 32.10^7 & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

b) Générateur de ville virtuelle

La ville virtuelle est générée aléatoirement de la façon suivante : pour chaque bâtiment (de 1 à N_b) :

1. Tirons aléatoirement et uniformément la position (x, y) du centre (compris dans le domaine Ω). Nous notons $r = \sqrt{(2x-1)^2 + (2y-1)^2}$ le rayon du vecteur dans le référentiel $[-1; 1]^2$ et θ son angle.
2. Confinons le bâtiment vers le centre du domaine. En d'autres termes, nous créons un centre-ville dense et une banlieue dispersée.
 - (a) Nous notons $d = \max\{\varrho, 1.1\}$ où ϱ est un nombre aléatoire compris entre 0 et 5.
 - (b) Utilisons $d > 1$ pour réduire le rayon r , c'est-à-dire que nous construisons un nouveau vecteur $(\frac{r}{d} \cos(\theta), \frac{r}{d} \sin(\theta))$. Nous translatons ainsi le centre du bâtiment vers le centre 0 du domaine $[-1; 1]^2$.
 - (c) Nous nous ramenons au domaine Ω par un simple changement de variable : le centre du bâtiment est donc $\mathbf{x}^c = \frac{1}{2} (\frac{r}{d} \cos(\theta) + 1, \frac{r}{d} \sin(\theta) + 1)$.

Nous avons donc construit un bâtiment qui est en fait une cellule de taille fixe ε et de centre \mathbf{x}^c .

3. Tirage aléatoire de la taille du bâtiment (voir figure FIG. IV.8) :
 - (a) Tirons aléatoirement et uniformément sur l'intervalle $[0; 3]$ deux entiers : m_x pour la direction x et m_y pour la direction y .
 - (b) Nous rajoutons m_x cellules fines dans la direction x de chaque côté du bâtiment, et m_y cellules dans la direction y .

Finalement, le bâtiment construit est centré en \mathbf{x}^c et est de taille aléatoire $l_x \times l_y = (2m_x + 1)\varepsilon \times (2m_y + 1)\varepsilon$ et nous avons effectivement $(l_x, l_y) \in [\varepsilon; 7\varepsilon]^2$.

En itérant ce procédé sur le nombre de bâtiment, nous obtenons une ville virtuelle à N_b bâtiments rectangulaires confinés autour du centre du domaine. Le résultat final est représenté sur la figure FIG. IV.9.

c) Résultats numériques

L'équation (IV.5) est résolue par la méthode des éléments finis standard pour fournir une solution de référence. Cette solution est ensuite comparée aux mêmes méthodes que dans le cas test à coefficients oscillants. Comme pour le cas précédent, la comparaison des solutions est réalisée en :

1. calculant les erreurs E_p et F_p définies par (IV.2) et (IV.3) ;
2. visualisant la solution sur le domaine Ω , sur une partie du domaine, ainsi que sur une coupe 1D au centre du domaine.

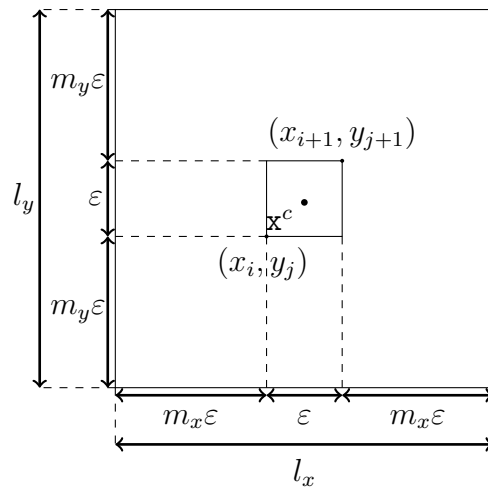


FIG. IV.8 – Construction d'un bâtiment à partir de données (\mathbf{x}^c, m_x, m_y) prises aléatoirement. A la cellule de taille $\varepsilon \times \varepsilon$ centrée en \mathbf{x}^c , nous ajoutons $m_x \varepsilon$ (respectivement $m_y \varepsilon$) dans la direction x (respectivement y) de chaque côté pour former le bâtiment de taille $l_x \times l_y = (2m_x + 1)\varepsilon \times (2m_y + 1)\varepsilon$.

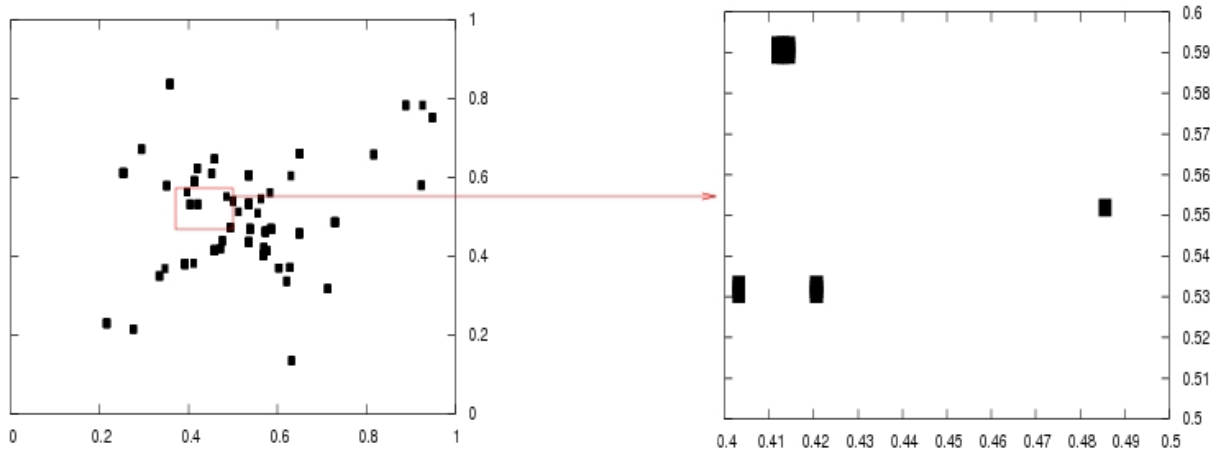


FIG. IV.9 – Ville virtuelle. — A gauche : les cinquante bâtiments de la ville. — A droite : un zoom sur les bâtiments de la ville dans la zone $(x, y) \in [0.4; 0.5] \times [0.5; 0.6]$.

Référence. La solution obtenue par les éléments finis standard décroît de un à zéro sur Ω en allant vers le centre, comme sur la figure FIG. IV.10. Cette solution est qualitativement raisonnable. En effet, nous avons simulé l'arrivée d'un polluant par l'extérieur du domaine, ce dernier se propage vers l'intérieur du domaine par diffusion. En regardant sur une partie du domaine (voir le zoom de la figure FIG. IV.10), nous voyons que la

concentration décroît vers zéro à l'approche d'un bâtiment, représenté par un petit carré noir. Ceci est normal car, dans un bâtiment, la concentration doit être nulle. Sur la coupe 1D en $y = 0.5$ de la figure FIG. IV.10, nous pouvons voir que, partant des conditions aux limites égales à un, la solution décroît jusqu'à atteindre zéro dans le "centre-ville", c'est-à-dire au centre du domaine. Les bâtiments qui influencent la solution sont représentés par des carrés noirs en dessous de cette coupe. Il s'agit des bâtiments qui se situent autour de la zone $y = 0.5$. La solution est perturbée par la présence de bâtiments puisqu'elle décroît plus vite lorsqu'elle rencontre l'un d'eux. Les petits bâtiments sont pris en compte grâce à l'utilisation d'un maillage assez fin. *A contrario*, en prenant une taille de maillage plus grande, les bâtiments les plus petits, c'est-à-dire dont la taille est plus petite que celle du maillage, auraient été "transparents".

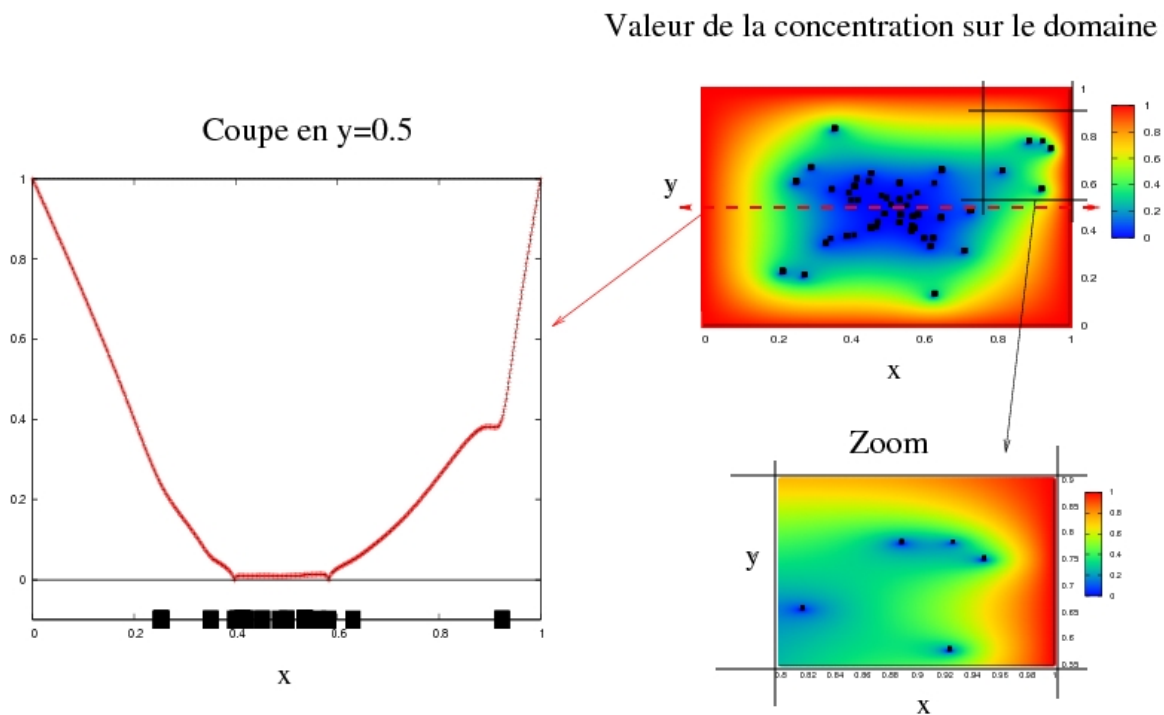


FIG. IV.10 – Solution de référence (éléments finis standard) dans le cas de la ville virtuelle pour le maillage fin. — Sur la figure en haut à droite, nous pouvons voir la solution obtenue sur le domaine entier Ω , avec en surimpression la position des obstacles en noir. — En bas à droite est représenté un zoom sur une partie $[0.8; 1] \times [0.55; 0.9]$ du domaine, encadrée en noir sur la figure située au-dessus. — A gauche est représentée une coupe 1D en y au milieu du domaine. Sur cette coupe sont aussi représentés, avec des carrés noirs, les bâtiments autour de $y = 0.5$ et pour $x \in [0; 1]$.

H	E_1	E_2	E_∞	F_1	F_2	F_∞
<i>MsFEM-L</i>						
0.2	$4.57 \cdot 10^{-2}$	$6.51 \cdot 10^{-2}$	$3.50 \cdot 10^{-1}$	$3.99 \cdot 10^{-2}$	$6.01 \cdot 10^{-2}$	$3.95 \cdot 10^{-1}$
0.1	$2.35 \cdot 10^{-2}$	$2.79 \cdot 10^{-2}$	$1.42 \cdot 10^{-1}$	$2.27 \cdot 10^{-2}$	$3.91 \cdot 10^{-2}$	$2.94 \cdot 10^{-1}$
0.05	$3.58 \cdot 10^{-2}$	$4.55 \cdot 10^{-2}$	$2.62 \cdot 10^{-1}$	$1.97 \cdot 10^{-2}$	$3.43 \cdot 10^{-2}$	$3.82 \cdot 10^{-1}$
0.025	$4.30 \cdot 10^{-2}$	$5.34 \cdot 10^{-2}$	$3.48 \cdot 10^{-1}$	$1.88 \cdot 10^{-2}$	$2.75 \cdot 10^{-2}$	$2.53 \cdot 10^{-1}$
0.0125	$4.41 \cdot 10^{-2}$	$4.81 \cdot 10^{-2}$	$2.86 \cdot 10^{-1}$	—	—	—
<i>MsFEM-OS</i>						
0.2	$1.02 \cdot 10^{-2}$	$1.39 \cdot 10^{-2}$	$1.12 \cdot 10^{-1}$	$9.44 \cdot 10^{-3}$	$1.34 \cdot 10^{-2}$	$1.11 \cdot 10^{-1}$
0.1	$7.99 \cdot 10^{-3}$	$1.03 \cdot 10^{-2}$	$8.11 \cdot 10^{-2}$	$5.49 \cdot 10^{-3}$	$8.50 \cdot 10^{-3}$	$7.56 \cdot 10^{-2}$
0.05	$5.09 \cdot 10^{-3}$	$6.50 \cdot 10^{-3}$	$4.95 \cdot 10^{-2}$	$2.41 \cdot 10^{-3}$	$4.11 \cdot 10^{-3}$	$5.19 \cdot 10^{-2}$
0.025	$4.16 \cdot 10^{-3}$	$4.59 \cdot 10^{-3}$	$3.07 \cdot 10^{-2}$	$1.40 \cdot 10^{-3}$	$2.08 \cdot 10^{-3}$	$2.83 \cdot 10^{-2}$
0.0125	$3.17 \cdot 10^{-3}$	$3.41 \cdot 10^{-3}$	$2.55 \cdot 10^{-2}$	—	—	—
<i>MsFEM-H</i>						
0.2	$3.24 \cdot 10^{-2}$	$4.28 \cdot 10^{-2}$	$2.30 \cdot 10^{-1}$	$2.06 \cdot 10^{-2}$	$3.33 \cdot 10^{-2}$	$1.95 \cdot 10^{-1}$
0.1	$1.95 \cdot 10^{-2}$	$2.39 \cdot 10^{-2}$	$9.34 \cdot 10^{-2}$	$1.35 \cdot 10^{-2}$	$1.74 \cdot 10^{-2}$	$9.59 \cdot 10^{-2}$
0.05	$1.59 \cdot 10^{-2}$	$1.77 \cdot 10^{-2}$	$9.25 \cdot 10^{-2}$	$7.20 \cdot 10^{-3}$	$1.06 \cdot 10^{-2}$	$6.53 \cdot 10^{-2}$
0.025	$1.38 \cdot 10^{-2}$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	$6.19 \cdot 10^{-2}$	$6.97 \cdot 10^{-3}$	$9.11 \cdot 10^{-3}$	$7.07 \cdot 10^{-2}$
0.0125	$1.12 \cdot 10^{-2}$	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$6.04 \cdot 10^{-2}$	—	—	—
<i>MsFEM-Hcentree</i>						
0.2	$4.86 \cdot 10^{-2}$	$6.17 \cdot 10^{-2}$	$3.35 \cdot 10^{-1}$	$4.24 \cdot 10^{-2}$	$5.61 \cdot 10^{-2}$	$2.77 \cdot 10^{-1}$
0.1	$3.69 \cdot 10^{-2}$	$3.94 \cdot 10^{-2}$	$1.65 \cdot 10^{-1}$	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$2.18 \cdot 10^{-2}$	$1.33 \cdot 10^{-1}$
0.05	$3.17 \cdot 10^{-2}$	$3.31 \cdot 10^{-2}$	$8.62 \cdot 10^{-2}$	$7.19 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-2}$	$8.35 \cdot 10^{-2}$
0.025	$2.98 \cdot 10^{-2}$	$3.08 \cdot 10^{-2}$	$8.58 \cdot 10^{-2}$	$5.99 \cdot 10^{-3}$	$7.72 \cdot 10^{-3}$	$7.30 \cdot 10^{-2}$
0.0125	$2.53 \cdot 10^{-2}$	$2.64 \cdot 10^{-2}$	$8.95 \cdot 10^{-2}$	—	—	—

TAB. IV.4 – Erreurs relatives $E_1, E_2, E_\infty, F_1, F_2$ et F_∞ , des méthodes MsFEM-L, MsFEM-OS, MsFEM-H et MsFEM-Hcentree dans le cas test d'une ville virtuelle à 50 bâtiments. Pour chaque méthode, les erreurs sont calculées avec les maillages de taille $H = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ et $\frac{1}{80}$. Les erreurs E_p comparent la solution MsFEM à la solution de référence et les erreurs F_p comparent la solution MsFEM à celle obtenue avec un pas d'espace H deux fois plus fin.

H	E_1	E_2	E_∞	F_1	F_2	F_∞
<i>MsFEM-L</i>						
0.2	$4.01.10^{-1}$	$4.69.10^{-1}$	1.49	$3.43.10^{-1}$	$5.79.10^{-1}$	1.43
0.1	$3.31.10^{-1}$	$4.35.10^{-1}$	2.47	$2.24.10^{-1}$	$3.72.10^{-1}$	2.22
0.05	$1.92.10^{-1}$	$2.11.10^{-1}$	$5.82.10^{-1}$	$7.96.10^{-2}$	$9.47.10^{-2}$	$3.90.10^{-1}$
0.025	$1.23.10^{-1}$	$1.32.10^{-1}$	$3.51.10^{-1}$	$6.47.10^{-2}$	$7.04.10^{-2}$	$2.58.10^{-1}$
0.0125	$6.24.10^{-2}$	$6.75.10^{-2}$	$2.77.10^{-1}$	—	—	—
<i>MsFEM-OS</i>						
0.2	$8.74.10^{-1}$	$9.08.10^{-1}$	1.00	1.38	1.26	1.48
0.1	$3.31.10^{-1}$	$4.35.10^{-1}$	2.47	$2.24.10^{-1}$	$3.71.10^{-1}$	2.23
0.05	$1.90.10^{-1}$	$2.09.10^{-1}$	$5.82.10^{-1}$	$7.71.10^{-2}$	$9.62.10^{-2}$	$4.17.10^{-1}$
0.025	$1.23.10^{-1}$	$1.31.10^{-1}$	$3.51.10^{-1}$	$5.43.10^{-2}$	$5.78.10^{-2}$	$2.04.10^{-1}$
0.0125	$7.24.10^{-2}$	$7.67.10^{-2}$	$2.34.10^{-1}$	—	—	—
<i>MsFEM-H</i>						
0.2	$4.01.10^{-1}$	$4.69.10^{-1}$	1.49	$3.43.10^{-1}$	$5.79.10^{-1}$	1.43
0.1	$3.31.10^{-1}$	$4.35.10^{-1}$	2.47	$2.23.10^{-1}$	$3.70.10^{-1}$	2.22
0.05	$1.89.10^{-1}$	$2.09.10^{-1}$	$5.82.10^{-1}$	$7.90.10^{-2}$	$9.79.10^{-2}$	$4.24.10^{-1}$
0.025	$1.20.10^{-1}$	$1.29.10^{-1}$	$3.49.10^{-1}$	$6.72.10^{-2}$	$7.24.10^{-2}$	$2.59.10^{-1}$
0.0125	$5.71.10^{-2}$	$6.18.10^{-2}$	$2.26.10^{-1}$	—	—	—
<i>MsFEM-Hcentree</i>						
0.2	$4.01.10^{-1}$	$4.69.10^{-1}$	1.49	$3.43.10^{-1}$	$5.79.10^{-1}$	1.43
0.1	$3.31.10^{-1}$	$4.35.10^{-1}$	2.47	$2.23.10^{-1}$	$3.70.10^{-1}$	2.22
0.05	$1.91.10^{-1}$	$2.10.10^{-1}$	$5.82.10^{-1}$	$7.62.10^{-2}$	$9.46.10^{-2}$	$4.12.10^{-1}$
0.025	$1.25.10^{-1}$	$1.33.10^{-1}$	$3.52.10^{-1}$	$4.79.10^{-2}$	$5.22.10^{-2}$	$2.04.10^{-1}$
0.0125	$8.06.10^{-2}$	$8.50.10^{-2}$	$2.46.10^{-1}$	—	—	—

TAB. IV.5 – Erreurs relatives $E_1, E_2, E_\infty, F_1, F_2$ et F_∞ , des méthodes MsFEM-L, MsFEM-OS, MsFEM-H et MsFEM-Hcentree dans le cas test d'une ville virtuelle à 50 bâtiments, sans le terme $\sigma\Phi$ dans le calcul des fonctions de base. Pour chaque méthode, les erreurs sont calculées avec les maillages de taille $H = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ et $\frac{1}{80}$. Les erreurs E_p comparent la solution MsFEM à la solution de référence et les erreurs F_p comparent la solution MsFEM à celle obtenue avec un pas d'espace H deux fois plus fin.

H	E_1	E_2	E_∞	F_1	F_2	F_∞
<i>MsFEM-L</i>						
0.2	$5.70 \cdot 10^{-1}$	$5.82 \cdot 10^{-1}$	$9.60 \cdot 10^{-1}$	$2.05 \cdot 10^{-1}$	$2.41 \cdot 10^{-1}$	$4.29 \cdot 10^{-1}$
0.1	$3.03 \cdot 10^{-1}$	$3.12 \cdot 10^{-1}$	$8.85 \cdot 10^{-1}$	$2.05 \cdot 10^{-1}$	$2.14 \cdot 10^{-1}$	$3.82 \cdot 10^{-1}$
0.05	$8.14 \cdot 10^{-2}$	$1.02 \cdot 10^{-1}$	$6.24 \cdot 10^{-1}$	$1.21 \cdot 10^{-1}$	$1.30 \cdot 10^{-1}$	$3.82 \cdot 10^{-1}$
0.025	$3.66 \cdot 10^{-2}$	$4.29 \cdot 10^{-2}$	$2.93 \cdot 10^{-1}$	$1.98 \cdot 10^{-2}$	$2.97 \cdot 10^{-2}$	$2.17 \cdot 10^{-1}$
0.0125	$4.14 \cdot 10^{-2}$	$4.41 \cdot 10^{-2}$	$1.91 \cdot 10^{-1}$	—	—	—
<i>MsFEM-OS</i>						
0.2	1.35	1.70	5.35	1.66	1.89	2.95
0.1	$2.17 \cdot 10^{-1}$	$2.32 \cdot 10^{-1}$	$2.64 \cdot 10^{-1}$	$9.79 \cdot 10^{-1}$	$9.89 \cdot 10^{-1}$	1.00
0.05	$8.34 \cdot 10^{-2}$	$1.03 \cdot 10^{-1}$	$6.23 \cdot 10^{-1}$	$1.21 \cdot 10^{-1}$	$1.29 \cdot 10^{-1}$	$4.16 \cdot 10^{-1}$
0.025	$3.65 \cdot 10^{-2}$	$4.30 \cdot 10^{-2}$	$3.17 \cdot 10^{-1}$	$2.17 \cdot 10^{-2}$	$3.09 \cdot 10^{-2}$	$2.45 \cdot 10^{-1}$
0.0125	$3.85 \cdot 10^{-2}$	$4.15 \cdot 10^{-2}$	$1.58 \cdot 10^{-1}$	—	—	—
<i>MsFEM-H</i>						
0.2	1.35	1.69	5.37	1.64	1.87	2.90
0.1	$3.04 \cdot 10^{-1}$	$3.13 \cdot 10^{-1}$	$8.85 \cdot 10^{-1}$	$2.01 \cdot 10^{-1}$	$2.10 \cdot 10^{-1}$	$3.77 \cdot 10^{-1}$
0.05	$8.57 \cdot 10^{-2}$	$1.05 \cdot 10^{-1}$	$6.23 \cdot 10^{-1}$	$1.20 \cdot 10^{-1}$	$1.27 \cdot 10^{-1}$	$4.08 \cdot 10^{-1}$
0.025	$3.37 \cdot 10^{-2}$	$4.06 \cdot 10^{-2}$	$3.24 \cdot 10^{-1}$	$1.83 \cdot 10^{-2}$	$2.87 \cdot 10^{-2}$	$2.20 \cdot 10^{-1}$
0.0125	$3.27 \cdot 10^{-2}$	$3.50 \cdot 10^{-2}$	$1.41 \cdot 10^{-1}$	—	—	—
<i>MsFEM-Hcentree</i>						
0.2	1.35	1.70	5.42	1.65	1.88	2.91
0.1	$3.80 \cdot 10^{-1}$	$4.79 \cdot 10^{-1}$	2.06	$2.63 \cdot 10^{-1}$	$3.72 \cdot 10^{-1}$	1.48
0.05	$2.19 \cdot 10^{-1}$	$2.40 \cdot 10^{-1}$	$6.11 \cdot 10^{-1}$	$8.91 \cdot 10^{-2}$	$1.02 \cdot 10^{-1}$	$3.88 \cdot 10^{-1}$
0.025	$1.48 \cdot 10^{-1}$	$1.59 \cdot 10^{-1}$	$5.80 \cdot 10^{-1}$	$9.70 \cdot 10^{-2}$	$1.69 \cdot 10^{-1}$	1.01
0.0125	$1.16 \cdot 10^{-1}$	$1.51 \cdot 10^{-1}$	2.19	—	—	—

TAB. IV.6 – Erreurs relatives $E_1, E_2, E_\infty, F_1, F_2$ et F_∞ , des méthodes MsFEM-L, MsFEM-OS, MsFEM-H et MsFEM-Hcentree dans le cas test d'une ville virtuelle à 50 bâtiments, sans le terme $\sigma\Phi$ dans le calcul des fonctions de base et avec le terme de pénalisation $\sigma\bar{u}$ dans le calcul grossier. Pour chaque méthode, les erreurs sont calculées avec les maillages de taille $H = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ et $\frac{1}{80}$. Les erreurs E_p comparent la solution MsFEM à la solution de référence et les erreurs F_p comparent la solution MsFEM à celle obtenue avec un pas d'espace H deux fois plus fin.

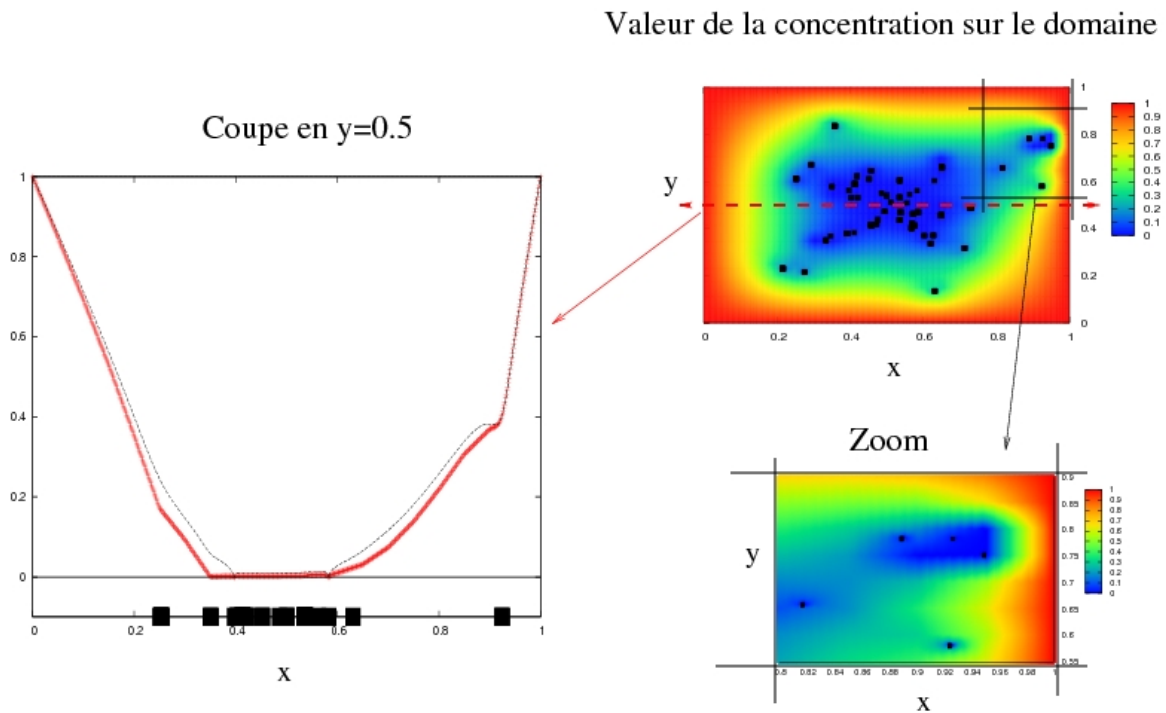


FIG. IV.11 – Solution MsFEM-L dans le cas de la ville virtuelle avec un maillage de taille $H = \frac{1}{20}$. — Sur la figure en haut à droite, nous pouvons voir la solution obtenue sur Ω , avec en surimpression la position des obstacles en noir. — En bas à droite est représenté un zoom sur une partie $[0.8; 1] \times [0.55; 0.9]$ du domaine, encadrée en noir sur la figure située au-dessus. — A gauche est représentée une coupe 1D en y au milieu du domaine de la solution multiéchelles en rouge, ainsi que de la solution de référence en pointillés noirs. Sur cette coupe sont aussi représentés, avec des carrés noirs, les bâtiments autour de $y = 0.5$ et pour $x \in [0; 1]$.

MsFEM-L. La première méthode est la méthode des éléments finis multiéchelles classique. La solution obtenue est visuellement proche de la solution de référence sur le domaine Ω (voir FIG. IV.11) pour le maillage de taille $H = \frac{1}{20}$. Sur le zoom sur $[0.8; 1] \times [0.55; 0.9]$, nous pouvons tout de même voir des artefacts numériques dus aux conditions aux limites linéaires sur les arêtes des cellules lors du calcul des fonctions de base. De plus, en regardant la coupe 1D en $y = 0.5$, nous pouvons voir plus précisément l'influence sur la solution approchée de cette condition aux limites linéaire sur les arêtes des cellules grossières. La solution obtenue par MsFEM-L est distinctement différente de la solution de référence. Ceci se reflète dans le tableau TAB. IV.4, où nous voyons l'évolution des erreurs E_p et F_p en divisant par deux la taille H du maillage. Les erreurs E_p comparent la solution MsFEM-L à la solution de référence calculée précédemment et les erreurs F_p comparent la solution MsFEM-L à celle obtenue avec un pas d'espace deux fois plus fin. Les erreurs E_p ont toutes le même comportement : elles décroissent lorsque la taille du maillage diminue puis croissent à partir de $H = \frac{1}{20}$. La méthode a le même comportement que pour le cas test à coefficients oscillants. Sur la courbe des erreurs E_2 de la figure FIG. IV.15, nous pouvons voir ce comportement. Les erreurs F_p se comportent

aussi comme dans le cas test à coefficients oscillants : elles décroissent lorsque la taille du maillage diminue, ce qui signifie que la solution approchée semble converger. De plus, dans le tableau TAB. IV.5, nous voyons que les erreurs E_p sont dix fois plus grandes (ou du même ordre pour $H = \frac{1}{80}$) en retirant le terme $\sigma\Phi$ du calcul des fonctions de base. Les erreurs F_p sont elles aussi jusqu'à dix fois plus grandes. En remplaçant l'inconnue u par sa moyenne dans le terme σu de l'équation globale, les erreurs E_p sont dix fois plus grandes (voir TAB. IV.3) pour $H = \frac{1}{5}$ et $H = \frac{1}{10}$, et légèrement plus petites pour $H = \frac{1}{40}$ et $H = \frac{1}{80}$. Les erreurs F_∞ restent quasiment identiques à celles observées jusqu'à présent et les autres erreurs F_p sont dix fois plus grandes. Les erreurs avec la moyenne de u et sans le terme $\sigma\Phi$ sont très proches de celles obtenues sans le terme $\sigma\Phi$.

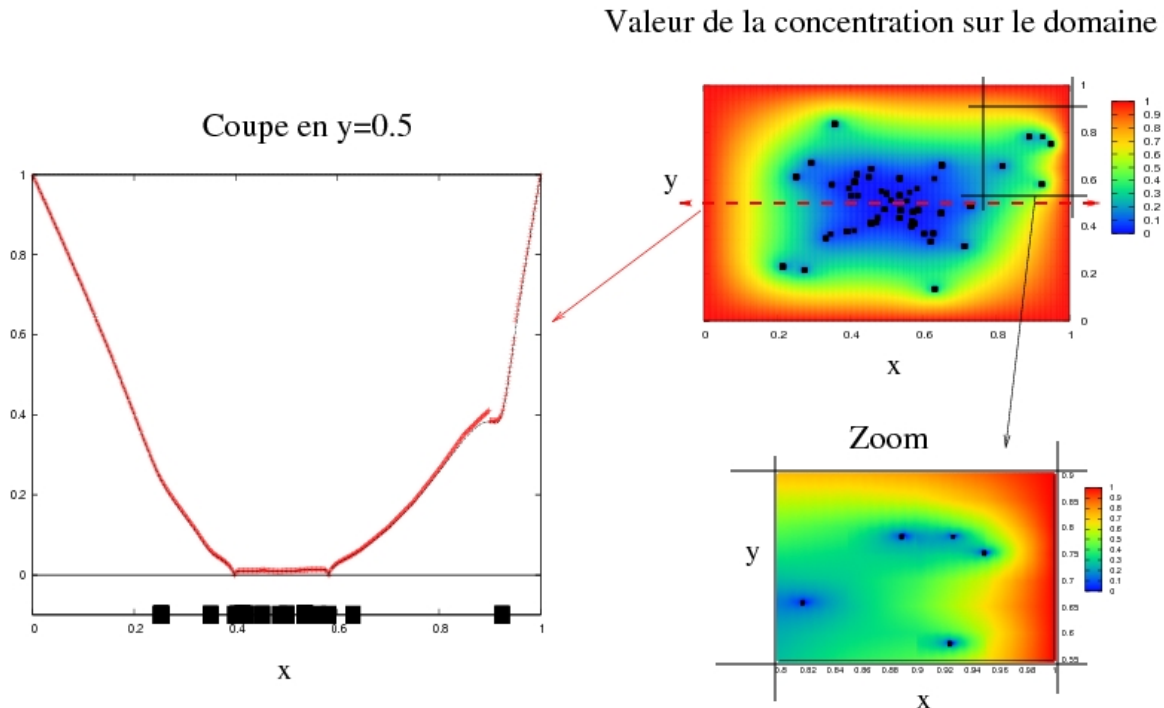


FIG. IV.12 – Solution MsFEM-OS dans le cas de la ville virtuelle avec un maillage de taille $H = \frac{1}{20}$. — Sur la figure en haut à droite, nous pouvons voir la solution obtenue sur Ω , avec en surimpression la position des obstacles en noir. — En bas à droite est représenté un zoom sur une partie $[0.8; 1] \times [0.55; 0.9]$ du domaine, encadrée en noir sur la figure située au-dessus. — A gauche est représentée une coupe 1D en y au milieu du domaine de la solution multiéchelles en rouge, ainsi que de la solution de référence en pointillés noirs. Sur cette coupe sont aussi représentés, avec des carrés noirs, les bâtiments autour de $y = 0.5$ et pour $x \in [0; 1]$.

MsFEM-OS. La solution est toujours proche de la solution de référence globalement (voir la figure FIG. IV.12 pour le maillage de taille $H = \frac{1}{20}$). Si nous regardons le zoom sur $[0.8; 1] \times [0.55; 0.9]$, nous pouvons voir qu'elle semble moins perturbée que celle obtenue par MsFEM-L. Nous voyons sur la coupe 1D que l'influence des bâtiments est relativement bien prise en compte avec cette méthode. En effet, contrairement à la

méthode précédente, la solution suit bien le comportement de la solution de référence. Cependant, sur cette coupe, nous pouvons aussi voir l'influence de la non conformité des fonctions de base (le décrochage en $x \approx 0.9$). Dans le tableau TAB. IV.4, l'évolution des erreurs de MsFEM-OS, en divisant par deux la taille du maillage, est présentée. Toutes les erreurs, E_p et F_p , ont le même comportement : elles diminuent lorsque la taille H du maillage grossier diminue. Sur la courbe des erreurs E_2 de la figure FIG. IV.15, nous pouvons voir cette décroissance de l'erreur. Dans le tableau TAB. IV.5, ainsi que dans le tableau TAB. IV.6, la plupart des erreurs obtenues sont au moins dix fois plus grandes. Les erreurs calculées en utilisant \bar{u} dans l'équation globale ne sont que légèrement plus petites.

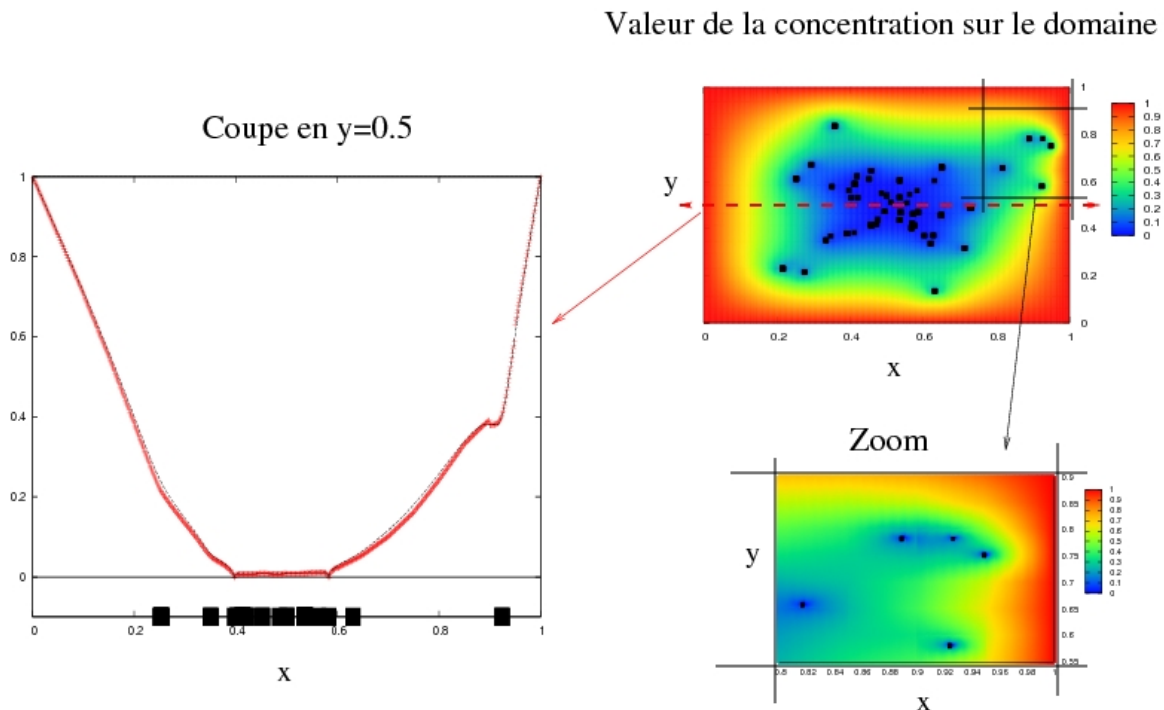


FIG. IV.13 – Solution MsFEM-H dans le cas de la ville virtuelle avec un maillage de taille $H = \frac{1}{20}$. — Sur la figure en haut à droite, nous pouvons voir la solution obtenue sur Ω , avec en surimpression la position des obstacles en noir. — En bas à droite est représenté un zoom sur une partie $[0.8; 1] \times [0.55; 0.9]$ du domaine, encadrée en noir sur la figure située au-dessus. — A gauche est représentée une coupe 1D en y au milieu du domaine de la solution multiéchelles en rouge, ainsi que de la solution de référence en pointillés noirs. Sur cette coupe sont aussi représentés, avec des carrés noirs, les bâtiments autour de $y = 0.5$ et pour $x \in [0; 1]$.

MsFEM-H. La méthode avec homothétie fournit une solution approchée visuellement proche de la solution de référence. Nous voyons cette solution sur la figure FIG. IV.13 avec le maillage de taille $H = \frac{1}{20}$, ainsi que le zoom sur $[0.8; 1] \times [0.55; 0.9]$ sur lequel nous pouvons aussi voir que la solution est bien approchée. Elle ressemble à la solution de MsFEM-OS. De plus, la coupe 1D révèle une amélioration des résultats par rapport à

MsFEM-L en changeant les conditions aux limites linéaires dans le calcul des fonctions de base. Nous voyons sur la coupe 1D que l'influence des bâtiments est prise en compte correctement avec cette méthode. En effet, comme pour la méthode précédente, la solution suit exactement la solution de référence et ces deux solutions ne se distinguent pas sur la courbe. De plus, sur cette coupe, nous pouvons aussi voir une amélioration par rapport à MsFEM-OS. Cependant, dans le tableau TAB. IV.4, nous pouvons voir que la méthode MsFEM-OS reste meilleure que MsFEM-H. En effet, les erreurs de MsFEM-H sont plus grandes que celles de MsFEM-OS. En divisant par deux la taille du maillage, toutes les erreurs de MsFEM-H diminuent. Cependant, comme pour toute méthode MsFEM, cette décroissance ne pourra pas dépasser la limite $H = \varepsilon$ à partir de laquelle l'erreur stagne. Sur la courbe des erreurs E_2 de la figure FIG. IV.15, nous pouvons voir cette décroissance de l'erreur. Sur le tableau TAB. IV.5, ainsi que sur le tableau TAB. IV.6, nous remarquons que les erreurs E_p et F_p sont jusqu'à dix fois plus grandes. Les résultats sont très peu améliorés avec la moyenne de u dans l'équation globale.

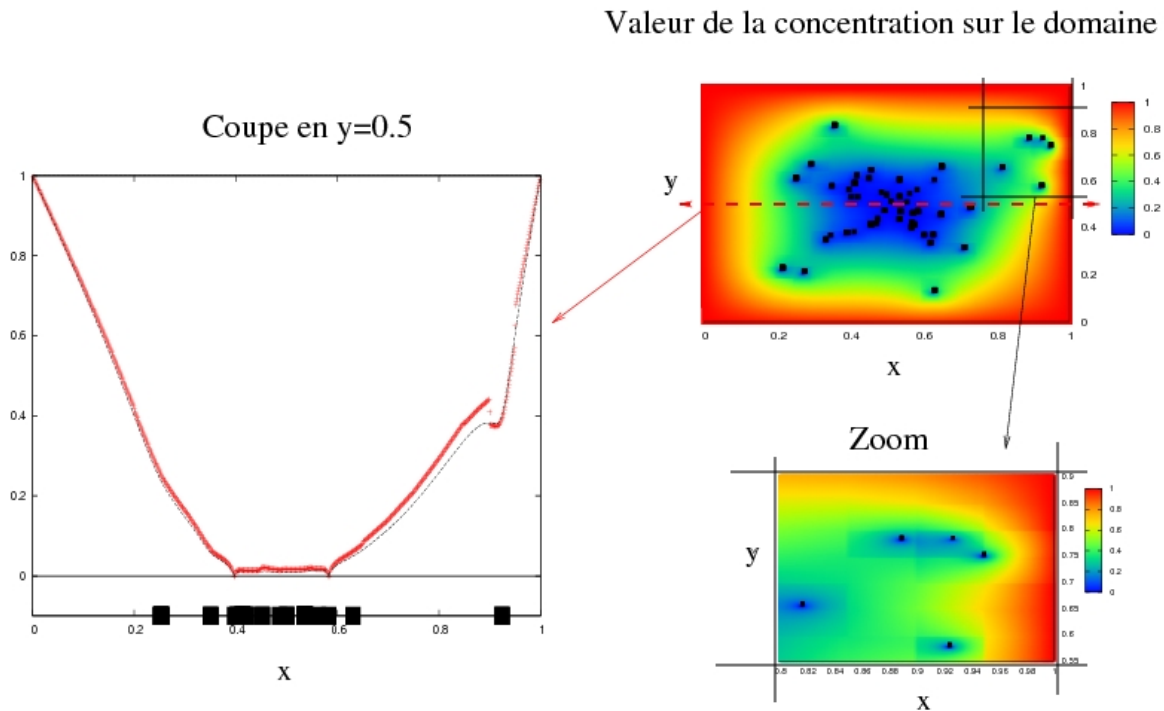


FIG. IV.14 – Solution MsFEM-Hcentree dans le cas de la ville virtuelle avec un maillage de taille $H = \frac{1}{20}$. — Sur la figure en haut à droite, nous pouvons voir la solution obtenue sur Ω , avec en surimpression la position des obstacles en noir. — En bas à droite est représenté un zoom sur une partie $[0.8; 1] \times [0.55; 0.9]$ du domaine, encadrée en noir sur la figure située au-dessus. — A gauche est représentée une coupe 1D en y au milieu du domaine de la solution multiéchelles en rouge, ainsi que de la solution de référence en pointillés noirs. Sur cette coupe sont aussi représentés, avec des carrés noirs, les bâtiments autour de $y = 0.5$ et pour $x \in [0; 1]$.

MsFEM-Hcentree. La solution approchée obtenue par la méthode avec homothétie centrée est visuellement proche de la solution de référence. Elle est visible sur la figure FIG. IV.14 avec le maillage de taille $H = \frac{1}{20}$. Le zoom sur $[0.8; 1] \times [0.55; 0.9]$ de cette solution est très proche de celui obtenu avec MsFEM-OS et MsFEM-H. D'ailleurs, la coupe 1D ressemble beaucoup à celle de la méthode MsFEM-OS. Ces deux méthodes ont globalement le même comportement. La solution est correctement approchée; elle est bien influencée par la présence de bâtiments et suit le comportement de la solution de référence, même si nous pouvons voir l'influence de la non conformité. Dans le tableau TAB. IV.4, nous pouvons voir l'évolution des erreurs, en divisant par deux la taille du maillage. Toutes les erreurs, E_p et F_p , ont le même comportement : elles diminuent en raffinant le maillage. Cependant, ces erreurs révèlent un comportement moins bon que MsFEM-OS et MsFEM-H. Sur la courbe des erreurs E_2 de la figure FIG. IV.15, nous pouvons voir cette décroissance de l'erreur. Sur le tableau TAB. IV.5 donnant les erreurs sans le terme d'absorption dans le calcul des fonctions de base multiéchelles, ainsi que sur le tableau TAB. IV.6 donnant les erreurs sans le terme d'absorption et avec le terme $\sigma \bar{u}$ dans l'équation globale, nous voyons la décroissance de l'erreur mais qui reste supérieure à celles de MsFEM-OS et MsFEM-H et plus élevées que celle du tableau TAB. IV.4.

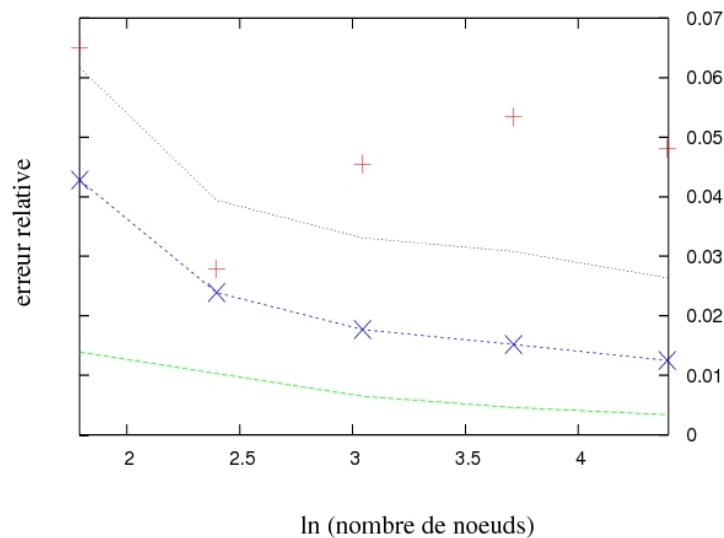


FIG. IV.15 – Courbes d'erreurs relatives en norme L^2 des différentes méthodes MsFEM pour les tailles de maillages de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{80}$ en échelle logarithmique pour le cas test de la ville virtuelle. Les points rouges sont les erreurs de MsFEM-L, la ligne bleue avec des points est la courbe d'erreurs de MsFEM-H, la ligne verte représente les erreurs de MsFEM-OS et celle en pointillés noirs l'erreur de MsFEM-Hcentree.

d) Commentaires

Retirer le terme $\sigma\Phi$, avec la moyenne de u dans le calcul grossier ou pas, détériore, dans ce cas également, les résultats pour toutes les méthodes multiéchelles testées ici et quelque soit le maillage utilisé. En effet, en retirant le terme $\sigma\Phi$ dans le calcul des fonctions de base, nous remarquons (voir le tableau TAB. IV.5) que les erreurs obtenues sont plus grandes que celle obtenues avec le terme $\sigma\Phi$, et ceci, quelque soit la méthode utilisée. De plus, en remplaçant l'inconnue u par sa moyenne dans le terme de pénalisation σu de l'équation globale, les erreurs sont plus petites mais elles restent encore bien plus grandes que celles trouvées en gardant le terme $\sigma\Phi$ dans le calcul des fonctions de base.

Comme dans le cas test précédent, l'utilisation de MsFEM-OS améliore qualitativement et quantitativement les résultats par rapport à MsFEM-L. Dans ce cas test, plus proche de notre contexte, la méthode multiéchelles donnant les meilleurs résultats reste celle avec MsFEM-OS. Les méthodes d'homothétie donnent de meilleurs résultats que la méthode MsFEM-L. L'influence des plus petits détails, c'est-à-dire les plus petits bâtiments, est mieux prise en compte avec ces méthodes. En comparant quantitativement les différentes méthodes dans le cas d'une ville virtuelle, nous nous apercevons, en regardant les erreurs E_p et F_p dans le tableau TAB. IV.4, que la méthode multiéchelles classique (MsFEM-L) ne donne pas de résultats très satisfaisants, même avec l'utilisation d'un maillage plutôt fin ($H = \frac{1}{80} = 10\varepsilon$). Par contre, la méthode MsFEM-OS crée des erreurs de l'ordre de 10^{-3} (ou 10^{-2} pour la norme L^∞). La méthode MsFEM-H avec le maillage le plus grossier, c'est-à-dire $\frac{1}{5}$, donne de meilleurs résultats que MsFEM-L avec le maillage le plus fin, c'est-à-dire $\frac{1}{80}$. La méthode MsFEM-Hcentree donne des résultats intermédiaires entre ceux de MsFEM-L et MsFEM-H. La courbe de la figure FIG. IV.15 résume bien le comportement général des erreurs commises par les différentes méthodes testées ici. La méthode classique (MsFEM-L) a les erreurs les plus grandes, et la méthode MsFEM-OS les plus petites. L'erreur diminue lorsque le nombre de nœuds croît. Nous retrouvons l'effet de résonance attendu sur la courbe d'erreur de la méthode classique (MsFEM-L), alors que sur les autres courbes, nous pouvons voir que cet effet a été partiellement éliminé.

2.3 Discussion sur les fonctions de base

Présentons pour commencer plusieurs fonctions de base obtenues avec différentes méthodes : la méthode classique (MsFEM-L) ainsi que les méthodes présentant les meilleurs résultats dans un cas de ville virtuelle, c'est-à-dire MsFEM-OS et MsFEM-H. Pour cela, choisissons une configuration très simple¹ dans laquelle quelques bâtiments sont positionnés "stratégiquement", c'est-à-dire en des zones pouvant poser des problèmes lors du calcul des fonctions de base.

Prenons un domaine décomposé en neuf cellules grossières (trois dans chaque direction) dans lequel nous nous concentrons sur une unique cellule grossière (celle du centre). Choisissons par exemple $\Omega = [0, \frac{3}{4}] \times [0, \frac{3}{4}]$. Puisque les autres cellules ne nous intéressent pas, notons 1, 2, 3 et 4 les indices des nœuds grossiers de la cellule centrale sur la figure FIG. IV.16. La taille du plus petit obstacle considéré est $\varepsilon = \frac{2}{48} \times \frac{3}{4}$. Pour calculer les fonctions de base, le maillage fin est pris à $N^\varepsilon = 49$ nœuds fins, 16 cellules fines pour la cellule centrale, dans chaque direction pour avoir ε plus grand que la taille d'une cellule

¹Le but est seulement de regarder en détail le calcul (et les résultats) des fonctions de base.

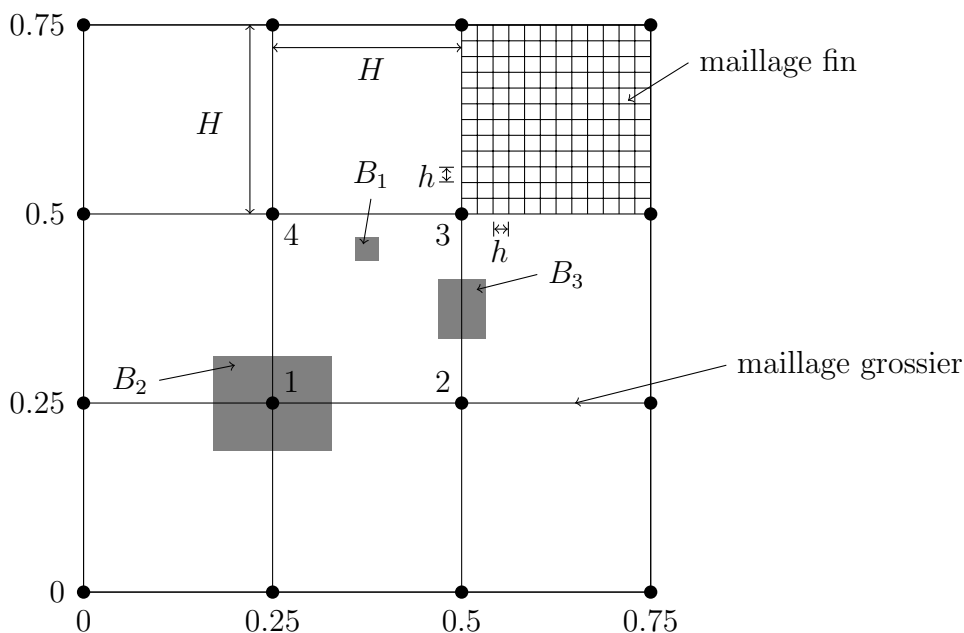


FIG. IV.16 – Domaine de calcul avec un maillage grossier à $N^0 = 4$ et un maillage fin à $N^\varepsilon = 49$. Trois obstacles, dont la taille la plus petite est $\varepsilon = \frac{1}{32}$, sont positionnés. Les quatre nœuds de la cellule centrale qui nous intéresse sont indicés par 1, 2, 3 et 4.

fine ($h = \frac{1}{48} \times \frac{3}{4}$). Regardons seulement trois obstacles $\{B_1, B_2, B_3\}$ placés en trois zones différentes :

- B_2 est centré au nœud d'indice 1 et de taille 5ε dans la direction x et 4ε dans la direction y ,
- B_1 est centré dans la cellule centrale et de taille $\varepsilon \times \varepsilon$,
- B_3 est positionné sur une arête de la cellule centrale centré en $(0.5, \frac{3}{8})$ et de taille $2\varepsilon \times 2.5\varepsilon$.

Les fonctions de base de la méthode MsFEM-L ont, sur la figure FIG. IV.17, des valeurs comprises entre zéro et un. Cependant, les valeurs linéaires sur les arêtes $[\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]$ de Φ^2 et de Φ^3 ne sont pas précises : à une distance L_A d'un obstacle (au moins au milieu de l'obstacle B_3), les fonctions de base doivent être nulles. Ceci ne peut être le cas par construction, puisque cette méthode impose sur les cellules des conditions aux limites linéaires. Pour la méthode MsFEM-OS, les fonctions de base intermédiaires φ^k (à gauche de la figure FIG. IV.18) prennent en compte correctement les trois obstacles B_1, B_2 et B_3 (contrairement à la méthode précédente). Cependant, $\varphi^k(\mathbf{x}_1) = 0$ pour tout $k = 2, 3, 4$, ce qui mène à la non inversibilité de la matrice A du système (II.14) permettant de calculer Φ^1 . Cette matrice est ici égale à :

$$\begin{pmatrix} 5.191 \cdot 10^{-9} & 1.490 \cdot 10^{-9} & 1.410 \cdot 10^{-9} & 4.037 \cdot 10^{-10} \\ 0.103 & 0.514 & 2.540 \cdot 10^{-2} & 0.168 \\ 6.578 \cdot 10^{-2} & 2.700 \cdot 10^{-2} & 0.427 & 0.160 \\ 1.551 \cdot 10^{-2} & 0.165 & 0.156 & 0.550 \end{pmatrix},$$

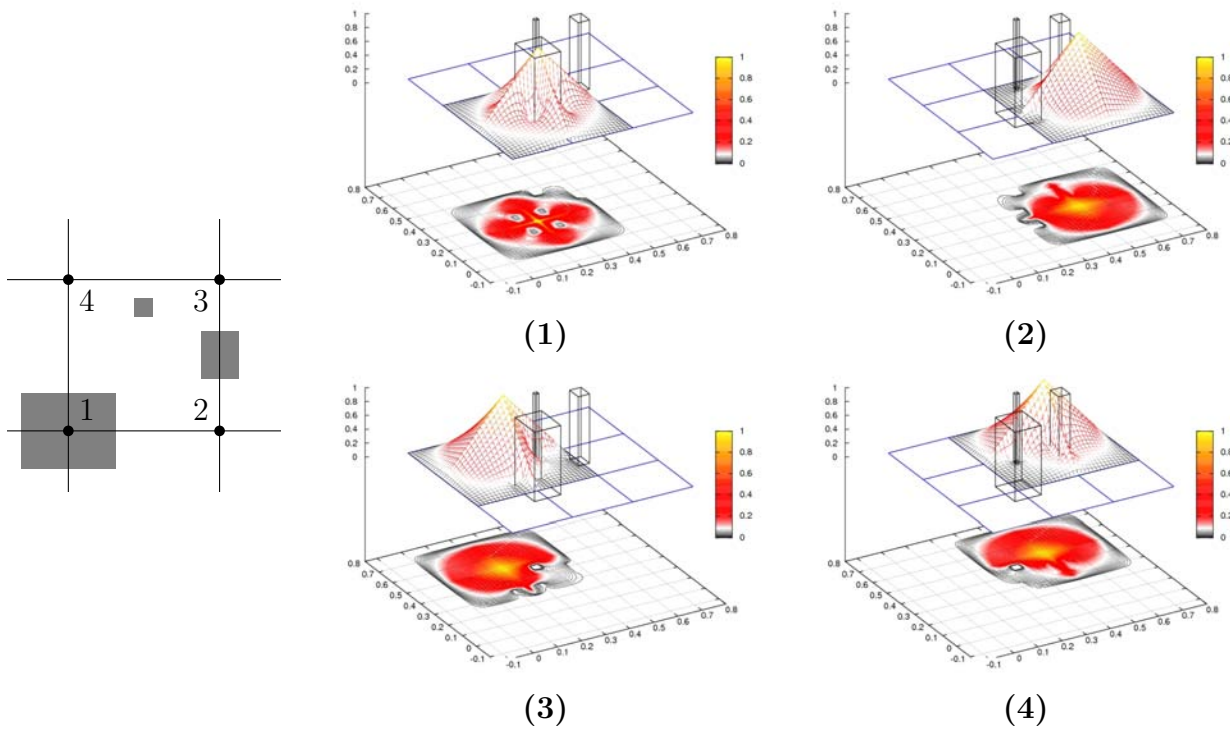


FIG. IV.17 – Fonctions de base multiéchelles obtenues avec MsFEM-L — A gauche : Configuration des obstacles dans la cellule centrale — A droite : Fonction de base multiéchelles dans la cellule centrale **(1)** fonction Φ^1 associée au nœud \mathbf{x}_1 — **(2)** fonction Φ^2 associée au nœud \mathbf{x}_2 — **(3)** fonction Φ^3 associée au nœud \mathbf{x}_3 — **(4)** fonction Φ^4 associée au nœud \mathbf{x}_4 . La condition aux limites linéaire sur l'arête n'est clairement pas appropriée.

contrairement à celle utilisée pour calculer Φ^3 qui est ici égale à :

$$\begin{pmatrix} 0.463 & 0.179 & 0.167 & 6.081 \cdot 10^{-2} \\ 0.179 & 0.562 & 6.0785 \cdot 10^{-2} & 0.187 \\ 0.177 & 6.165 \cdot 10^{-2} & 0.561 & 0.187 \\ 5.767 \cdot 10^{-2} & 0.187 & 0.186 & 0.562 \end{pmatrix}.$$

La première ligne de la matrice pour le calcul de Φ^1 est presque nulle, ce qui rend difficile le calcul de son inverse. Les fonctions de base de la méthode MsFEM-H sont linéaires sur les arêtes ne contenant pas d'obstacle, mais sont nulles lorsqu'il y a un obstacle (même sur un nœud grossier), comme nous pouvons le voir sur la figure FIG. IV.19.

2.4 Bilan

A l'aide de ces différents tests, nous avons pu nous apercevoir que les méthodes MsFEM couplées avec la pénalisation donnent des solutions approchées cohérentes. De plus, l'utilisation de la méthode MsFEM-OS apporte un gain notable par rapport à la méthode classique (MsFEM-L). Elle donne aussi de meilleurs résultats que les méthodes MsFEM-H et MsFEM-Hcentree. Dans le cas test des coefficients oscillants (voir section 2.1), la méthode MsFEM-OS et la méthode MsFEM-Hcentree se comportent bien, alors que les deux autres produisent des résultats insatisfaisants. Dans le cas test de la ville

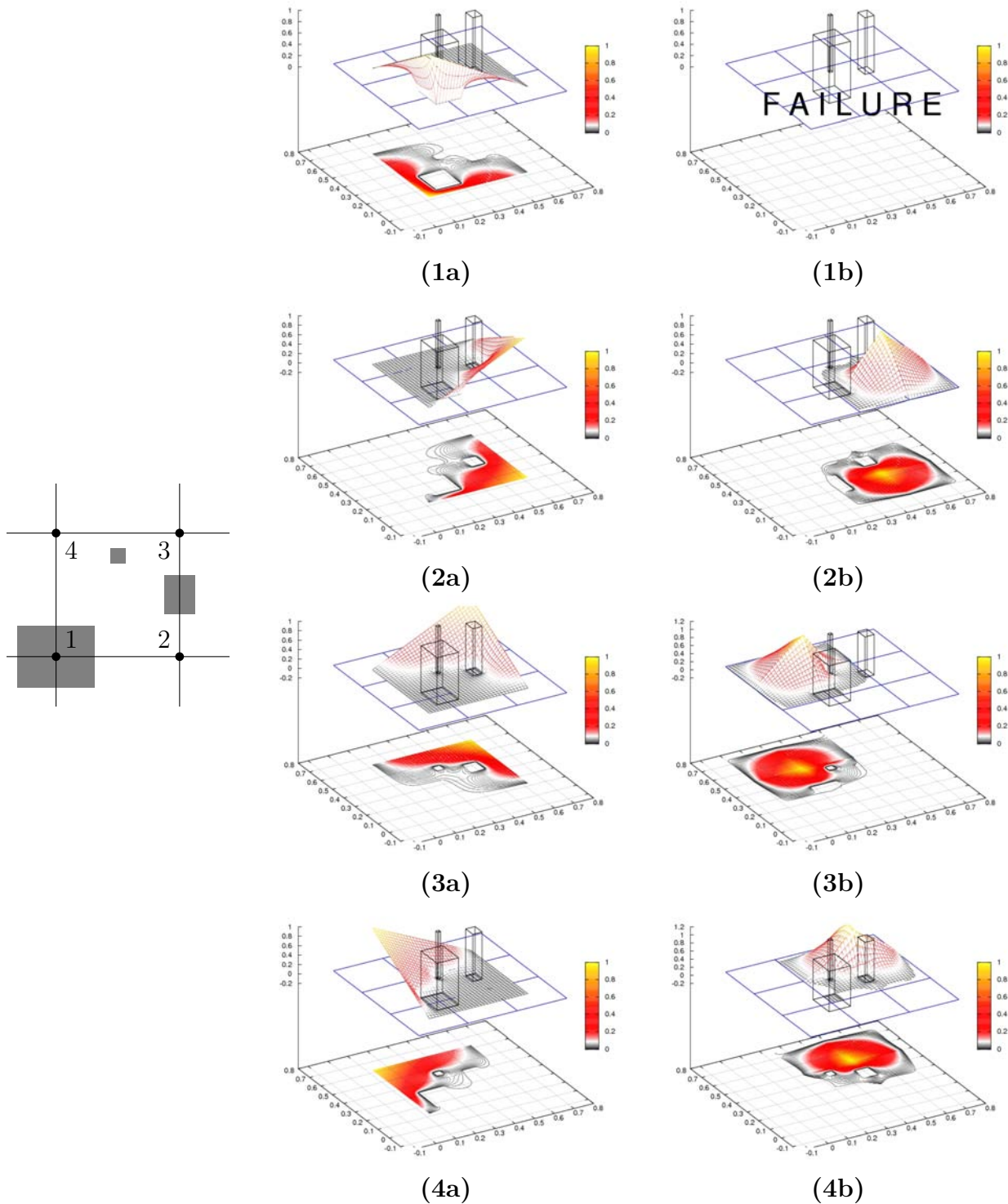


FIG. IV.18 – Fonctions de base multiéchelles pour MsFEM-OS — A gauche : Configuration des obstacles dans la cellule centrale — A droite : **(1a)** fonction de base multiéchelles intermédiaire φ^1 associée au nœud \mathbf{x}_1 — **(1b)** fonction de base multiéchelles Φ^1 associée au nœud \mathbf{x}_1 . La matrice A étant non inversible dans le cas de MsFEM-OS, Φ^1 n'existe pas dans ce cas — **(2a)** fonction φ^2 — **(2b)** fonction Φ^2 — **(3a)** fonction φ^3 — **(3b)** fonction Φ^3 — **(4a)** fonction φ^4 — **(4b)** fonction Φ^4 .

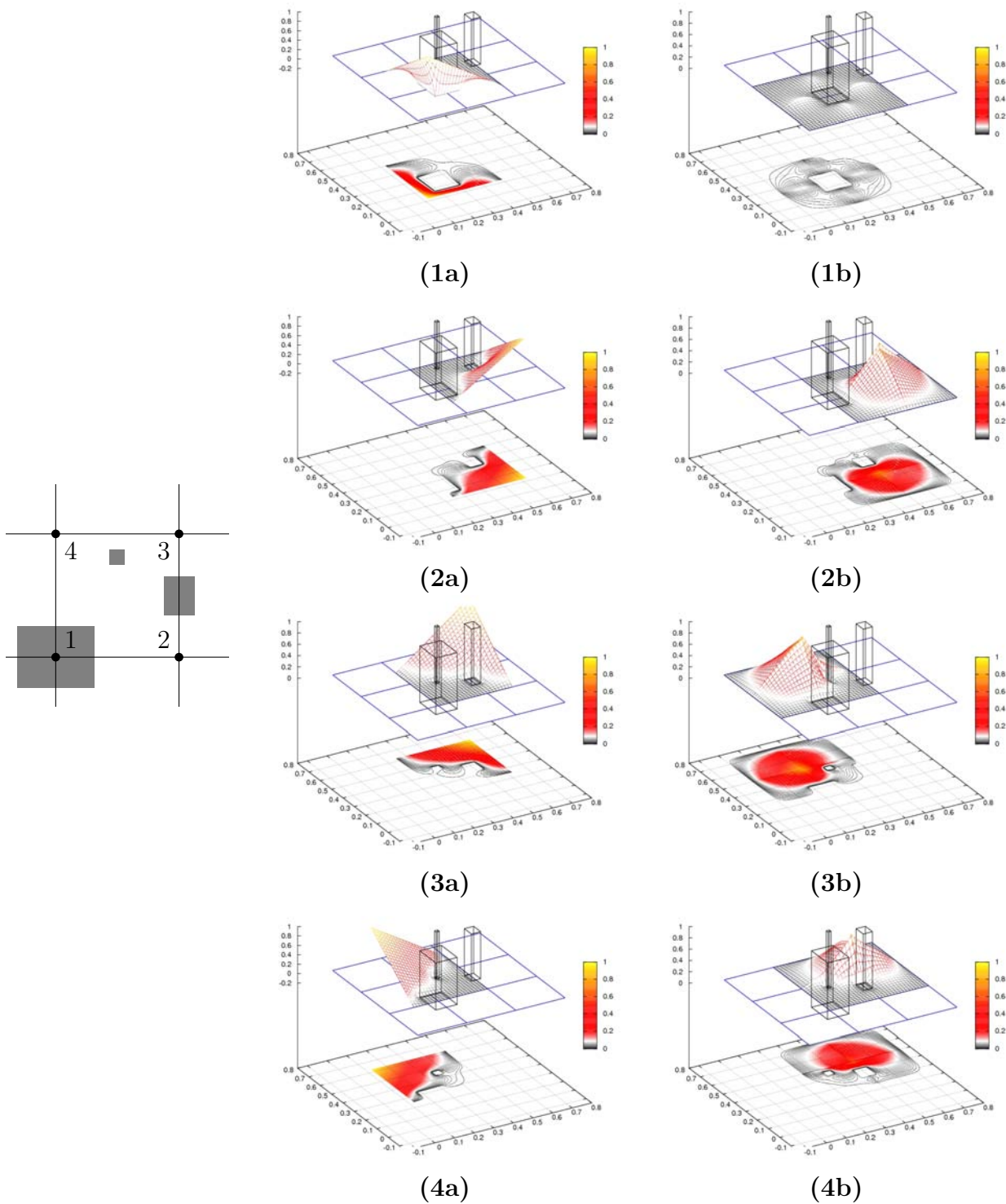


FIG. IV.19 – Fonctions de base multiéchelles pour MsFEM-H — A gauche : Configuration des obstacles dans la cellule centrale — A droite : **(1a)** fonction de base multiéchelles intermédiaire φ^1 associée au nœud \mathbf{x}_1 — **(1b)** fonction de base multiéchelles Φ^1 associée au nœud \mathbf{x}_1 — **(2a)** fonction φ^2 — **(2b)** fonction Φ^2 — **(3a)** fonction φ^3 — **(3b)** fonction Φ^3 — **(4a)** fonction φ^4 — **(4b)** fonction Φ^4 .

virtuelle (voir section 2.2), la méthode MsFEM-OS et la méthode MsFEM-H se comportent bien, alors que les deux autres produisent des résultats insatisfaisants. De plus, la modification de l'équation des fonctions de base, c'est-à-dire le retrait du terme de pénalisation $\sigma\Phi$, n'améliore pas les résultats dans le cas test des coefficients oscillants et les détériore dans le cas test de la ville virtuelle, pour toutes les méthodes utilisées. En remplaçant le terme de pénalisation σu par $\sigma\bar{u}$ dans l'équation globale, en plus du retrait de $\sigma\Phi$, les solutions MsFEM s'éloignent encore plus de la solution éléments finis standard avec le maillage fin (solution de référence).

Avec la méthode de pénalisation, MsFEM-OS est la méthode la plus adaptée. Cependant, la méthode MsFEM-H donne des résultats tout à fait comparables dans le contexte urbain. Nous pouvons maintenant tester ces méthodes sur des données réelles issues d'une zone urbaine autour de l'aéroport de Toulouse-Blagnac. Ceci fait l'objet de la section suivante.

3 Simulations sur une ville réelle

Dans cette section, nous étudions le comportement de ces méthodes multiéchelles à partir de données réelles. Pour cela, nous extrayons les données à partir d'une photo satellite. D'après les résultats de la section précédente, les méthodes les plus adaptées sont MsFEM-OS et MsFEM-H en utilisant les mêmes opérateurs pour le calcul des fonctions de base et l'équation globale, c'est-à-dire $\mathbf{L}^0 = \mathbf{L}^\Phi = \mathbf{L}^\varepsilon$. C'est pourquoi, nous réalisons, avec MsFEM-OS, MsFEM-L et MsFEM-H, des simulations avec ces paramètres réalistes.

3.1 Description

Etant donné un milieu urbain, l'aéroport de Toulouse-Blagnac par exemple, nous souhaitons savoir si une des variantes de la méthode MsFEM est capable de nous fournir une bonne approximation de la concentration. La première étape consiste à construire les paramètres numériques, c'est-à-dire les valeurs des paramètres ν et σ dont nous avons besoin pour le calcul, à partir de données réelles, comme par exemple une photo satellite, puis à définir les conditions de simulation.

a) Construction des paramètres numériques

Afin de simuler une situation dans une ville réelle, il faut transformer la réalité en données numériques. Prenons par exemple la photo satellite de l'aéroport de Toulouse que nous pouvons voir sur la figure FIG. IV.20. Il s'agit ici d'extraire les valeurs des coefficients de notre opérateur \mathbf{L} à partir de cette photo. Pour cela, faisons l'hypothèse que la végétation est un obstacle au même titre qu'un bâtiment. Le but est d'être capable de définir si un pixel de l'image est ou n'est pas dans un bâtiment. Grâce à cette discrimination, nous construisons Ω_ε et par voie de conséquence les valeurs de ν et de σ .

Une photo est un ensemble de pixels dont la couleur est codée par un triplet (R, G, B) , avec $0 \leq R, G, B \leq 255$. Le code (R, G, B) donne la proportion de rouge (R), vert (V) et bleu (B). Chaque pixel représente une cellule fine. Le triplet (R, G, B) associé à un pixel doit être transformé en des valeurs pour les coefficients en ces points. Nous pouvons donc créer une matrice S associée à la photo (première étape décrite sur la figure FIG. IV.21) dont chaque élément est le code (R, G, B) du pixel correspondant, c'est-à-dire



FIG. IV.20 – Photo satellite de la zone urbaine de l’aéroport de Toulouse-Blagnac.

$$S_{i,j} = (R_{i,j}, G_{i,j}, B_{i,j}).$$

où $R_{i,j}$ (respectivement $G_{i,j}, B_{i,j}$) est la quantité de rouge (respectivement de vert et de bleu) du pixel placé au point $\mathbf{x}_{i,j}$.

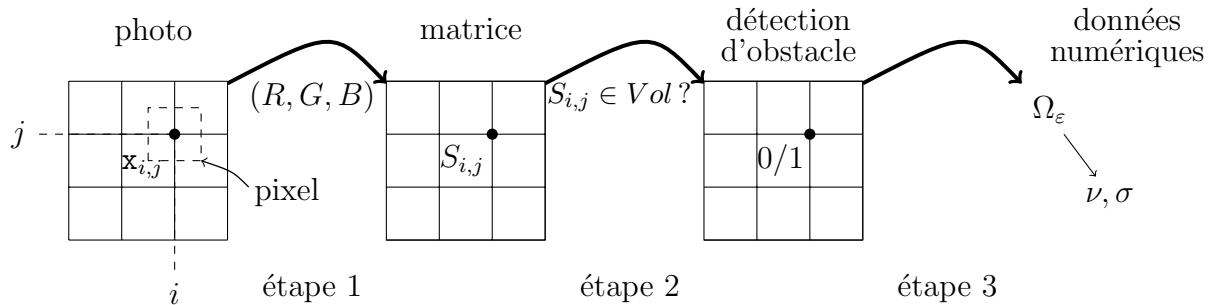


FIG. IV.21 – Etapes du traitement de données à partir d’une photo satellite : identification du code de couleurs type (R, G, B) du pixel centré en chaque $\mathbf{x}_{i,j}$, création de la matrice des codes de couleurs, puis détection des obstacles pour la création des coefficients du modèle et enfin la construction de Ω_ϵ, ν et σ .

A l’aide de ces codes de couleurs, nous souhaitons déterminer s’il s’agit d’un obstacle ou pas. En attribuant respectivement un ou zéro comme valeur à chaque pixel, nous construisons une fonction de détection qui vaut un dans un obstacle et zéro sinon. En fait, nous déterminons un code (R, G, B) pour la couleur caractéristique d’un obstacle, que nous notons (R^*, G^*, B^*) , puis une marge (η_R, η_G, η_B) autour de laquelle la teinte d’un obstacle peut varier, c’est-à-dire que nous considérons comme faisant partie d’un obstacle tous les pixels dont le code (R, G, B) appartient au parallélépipède :

$$Vol = [R^* - \eta_R; R^* + \eta_R] \times [G^* - \eta_G; G^* + \eta_G] \times [B^* - \eta_B; B^* + \eta_B].$$

Les autres pixels sont considérés en zone libre (dans la rue). La fonction de détection est l'indicatrice sur ce parallélépipède, c'est-à-dire $S_{i,j} \mapsto 1_{Vol}(S_{i,j})$. Ceci constitue l'étape 2 de la figure FIG. IV.21.

Remarque : En considérant plusieurs types d'obstacles (bâtiments, végétations, etc), nous pouvons soit prendre pour Vol la réunion des parallélépipèdes construits avec des couleurs caractéristiques, soit attribuer des valeurs différentes de zéro ou un à la fonction de détection, qui sera alors une combinaison linéaire d'indicatrices sur les différents parallélépipèdes correspondants à chaque type d'obstacles.

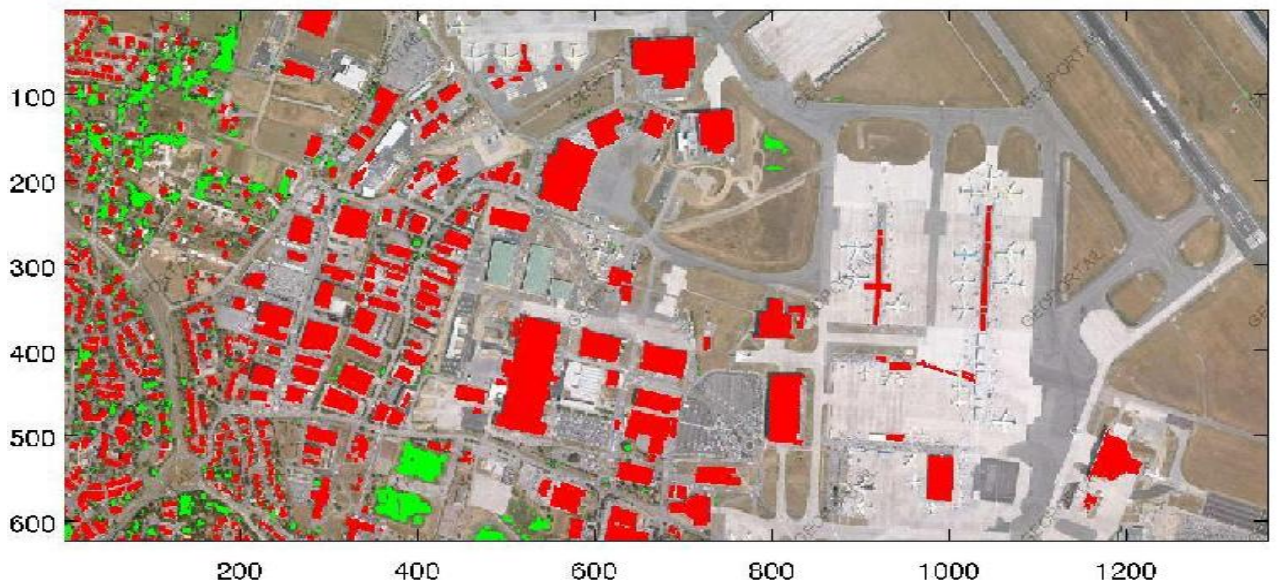


FIG. IV.22 – Photo satellite de la zone urbaine de l'aéroport de Toulouse avec les bâtiments en surimpression : étape 2 de la figure FIG. IV.21.

Après avoir détecté les bâtiments, il reste à attribuer des valeurs aux coefficients ν, σ selon que le point soit à l'intérieur d'un obstacle ou pas (étape 3 de la figure FIG. IV.21). Construisons Ω_ϵ en prenant les cellules de centre $\mathbf{x}_{i,j}$ dont l'image de $S_{i,j}$ par la fonction de détection est nulle, c'est-à-dire :

$$\Omega_\epsilon = \bigcup_{i,j} \{\omega_{i,j}, S_{i,j} \notin 1_{Vol}^{-1}\{1\} = Vol\},$$

où $\omega_{i,j}$ est la cellule de centre $\mathbf{x}_{i,j}$.

Remarque : En 2D, la récupération de données est quasi-instantanée. En 3D, il faut ajouter la hauteur des bâtiments. Pour traiter cela, en ayant un scan 3D de la ville nous pouvons faire la même chose qu'en 2D, et la matrice S devient alors un tenseur. Dans le cas contraire (pas de scan 3D disponible), nous pouvons attribuer la hauteur d'un obstacle en procédant par tirage aléatoire de valeurs autour d'une hauteur représentative du quartier en question, un peu comme pour détecter les obstacles en 2D avec le code (R, G, B) .

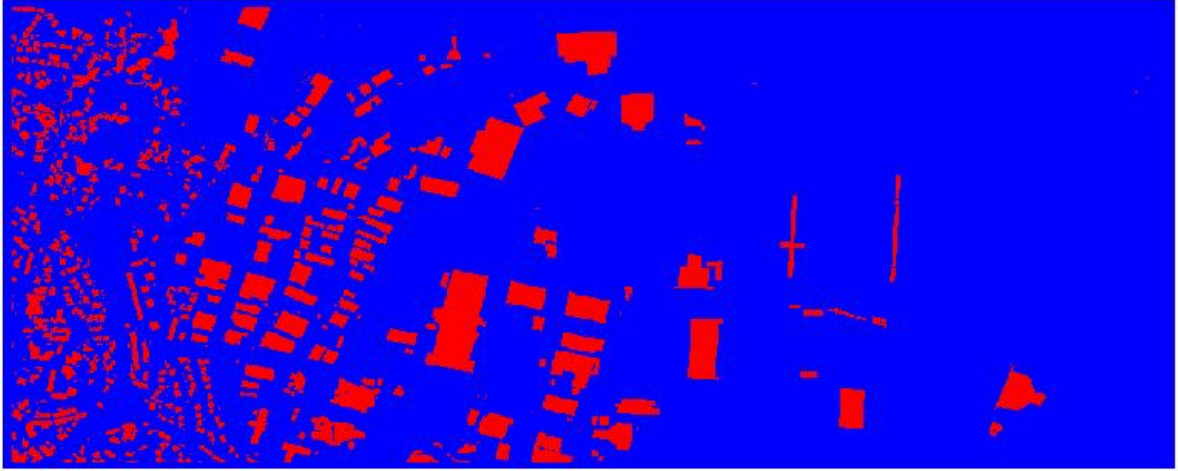


FIG. IV.23 – Données numériques issues de la photo FIG. IV.22.

b) Configuration de simulation

Avec les données obtenues par le traitement de la photo de l'aéroport, nous souhaitons tester le comportement des méthodes multiéchelles. La taille ε du détail considéré (généralement, la taille du plus petit bâtiment) est déterminée, ou du moins bornée, par la taille d'un pixel de la photo. Le maillage fin est donc fixé ici à 1380×640 . Nous considérons deux maillages grossiers² : 15×8 et 60×32 .

Chaque pixel représente un mètre carré, c'est-à-dire que la taille du pixel est $\varepsilon = 1m$. Le choix du domaine de calcul, qui est l'ensemble de tous les pixels de la photo, est donc fixé à $\Omega = [0; 1380] \times [0; 640]$, et les paramètres du modèle sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{la longueur caractéristique d'absorption :} & L_A = 1m, \\ \text{le paramètre de pénalisation :} & \delta = 7.25 \cdot 10^{-4}, \\ \text{la diffusion dans l'air :} & \nu^\varepsilon = 1m^2s^{-1}. \end{array} \right.$$

Nous souhaitons simuler ce qui se passe lorsque un polluant arrive de l'extérieur de la ville. Choisissons pour cela un terme source nul à l'intérieur de Ω , c'est-à-dire $f = 0$ et la condition aux limites constante, égale à un sur le bord pour représenter l'arrivée d'un polluant extérieur à la zone d'observation Ω . Afin d'analyser l'apport des méthodes multiéchelles ainsi que le couplage avec la méthode de pénalisation, cette configuration de simulation est testée dans la section suivante sur les deux maillages grossiers 15×8 et 60×32 en utilisant la méthode classique (MsFEM-L) ainsi qu'avec les méthodes qui, d'après la section 2.2, sont les mieux adaptées dans le cas d'un milieu urbain, à savoir MsFEM-OS et MsFEM-H. Ces méthodes sont utilisées avec et sans la méthode de pénalisation. La méthode des éléments finis standard sur un maillage très fin est utilisée

²Ce sont des diviseurs du nombre de cellules fines pour que le maillage fin s'adapte au grossier, c'est-à-dire que l'ensemble des nœuds grossiers est inclus dans celui des nœuds fins.

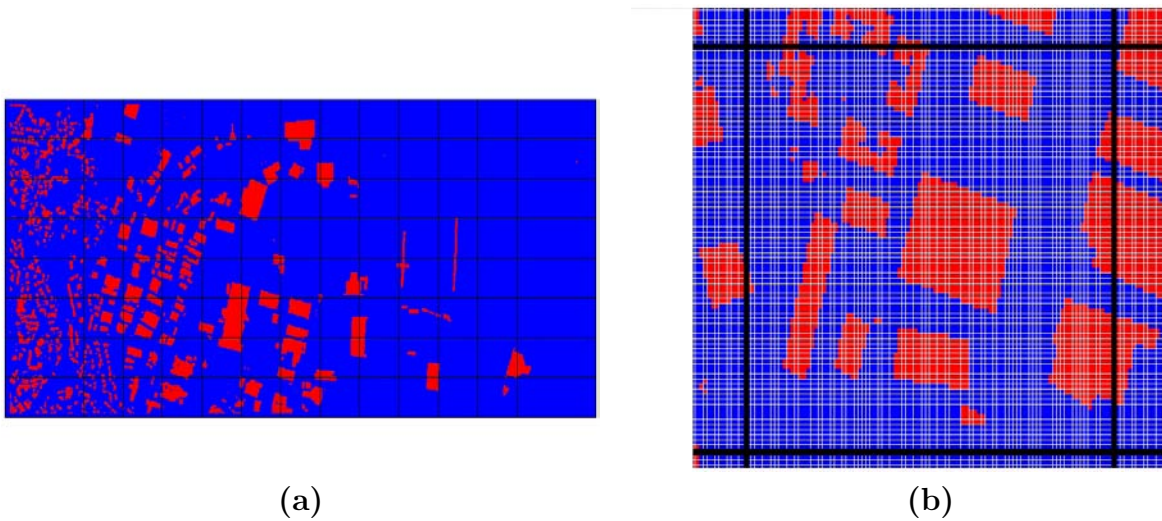


FIG. IV.24 – Exemple de maillages utilisés pour l’aéroport. — (a) Maillage grossier 15×8 — (b) Zoom sur le maillage fin 1380×640 à l’intérieur d’une cellule du maillage grossier 15×8 .

pour fournir une solution de référence, comme avec les cas tests de la section précédente. Cette solution de référence est comparée aux différentes méthodes MsFEM sur différents maillages.

3.2 Résultats de la simulation

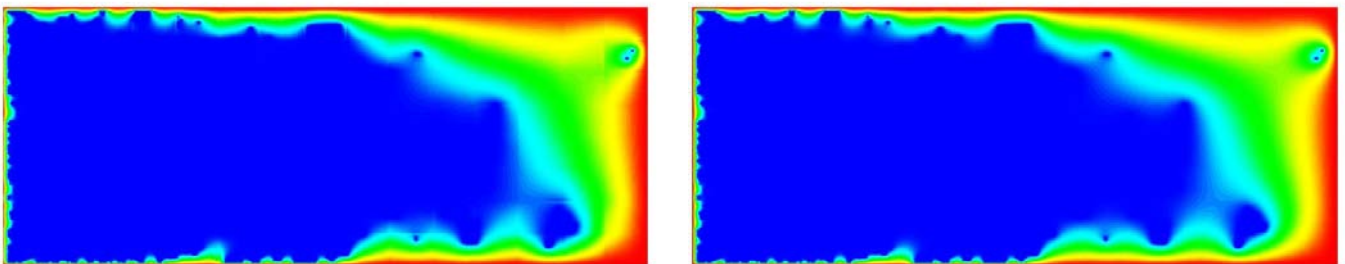


FIG. IV.25 – Solutions de référence calculée avec la méthode des éléments finis standard sur le maillage fin (1380×640) pour des données géométriques réelles. — A gauche : la solution calculée avec les conditions aux limites nulles au bord des obstacles (sans pénalisation). — A droite : la solution calculée avec pénalisation.

Référence. Dans le cas de la simulation basée sur la photo autour de l’aéroport, nous voyons sur la figure FIG. IV.25 l’évolution de la propagation du polluant. Ce polluant entre dans la ville et est rapidement bloqué par la zone dense de bâtiments. La ”condition draconienne” de perméabilité des obstacles modélisé par le terme d’absorption dans notre

modèle impose une concentration nulle à l'intérieur des obstacles. La solution à droite de la figure FIG. IV.25 chute donc à zéro à l'approche d'un obstacle comme nous l'avons déjà constaté dans le cas test de la ville virtuelle (section 2.2). En imposant des conditions aux limites nulles au bord des obstacles (sans utiliser la méthode de pénalisation), le comportement de la solution à gauche de la figure FIG. IV.25 est identique.

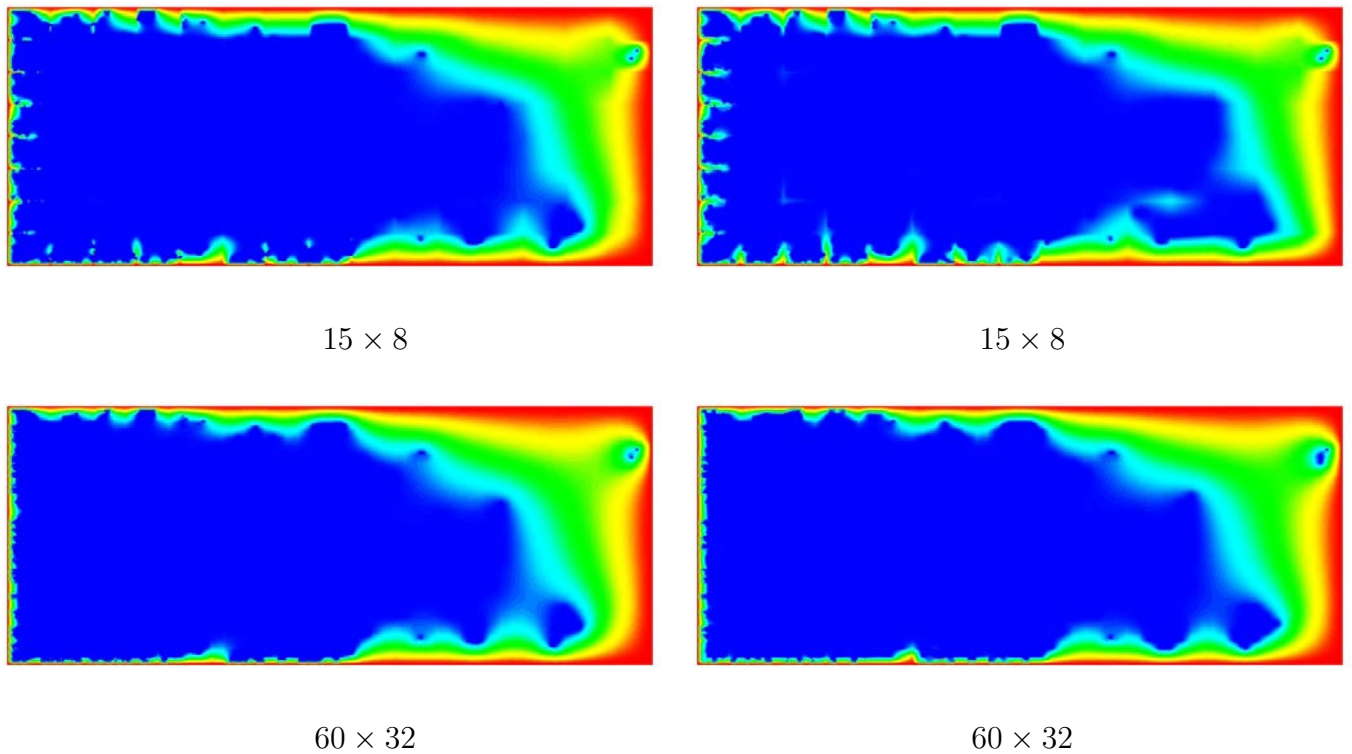


FIG. IV.26 – Solution MsFEM-L pour des données géométriques réelles. — A gauche : la solution calculée sans pénalisation. — A droite : la solution calculée avec pénalisation. — En haut : avec le maillage 15×8 . — En bas : avec le maillage 60×32 .

MsFEM-L. Dans le cas de la simulation basée sur la photo autour de l'aéroport, la solution calculée avec MsFEM-L avec le maillage 15×8 présente des défauts sur les bords des cellules (grossières), comme nous pouvons le voir sur la figure FIG. IV.26. Ceci avec ou sans utilisation de la pénalisation. Cependant, ils sont moins marqués avec le maillage 60×32 .

MsFEM-H. Dans le cas de la simulation basée sur la photo autour de l'aéroport, les défauts visuels de la solution calculée avec MsFEM-L ont été corrigés par MsFEM-H, même avec le maillage 15×8 . La solution obtenue avec le maillage 60×32 ressemble fortement à la solution de référence, avec ou sans utilisation de la méthode de la pénalisation.

MsFEM-OS. Dans le cas de la simulation basée sur la photo autour de l'aéroport, les résultats obtenus sont toujours satisfaisants en utilisant la pénalisation. Pour les

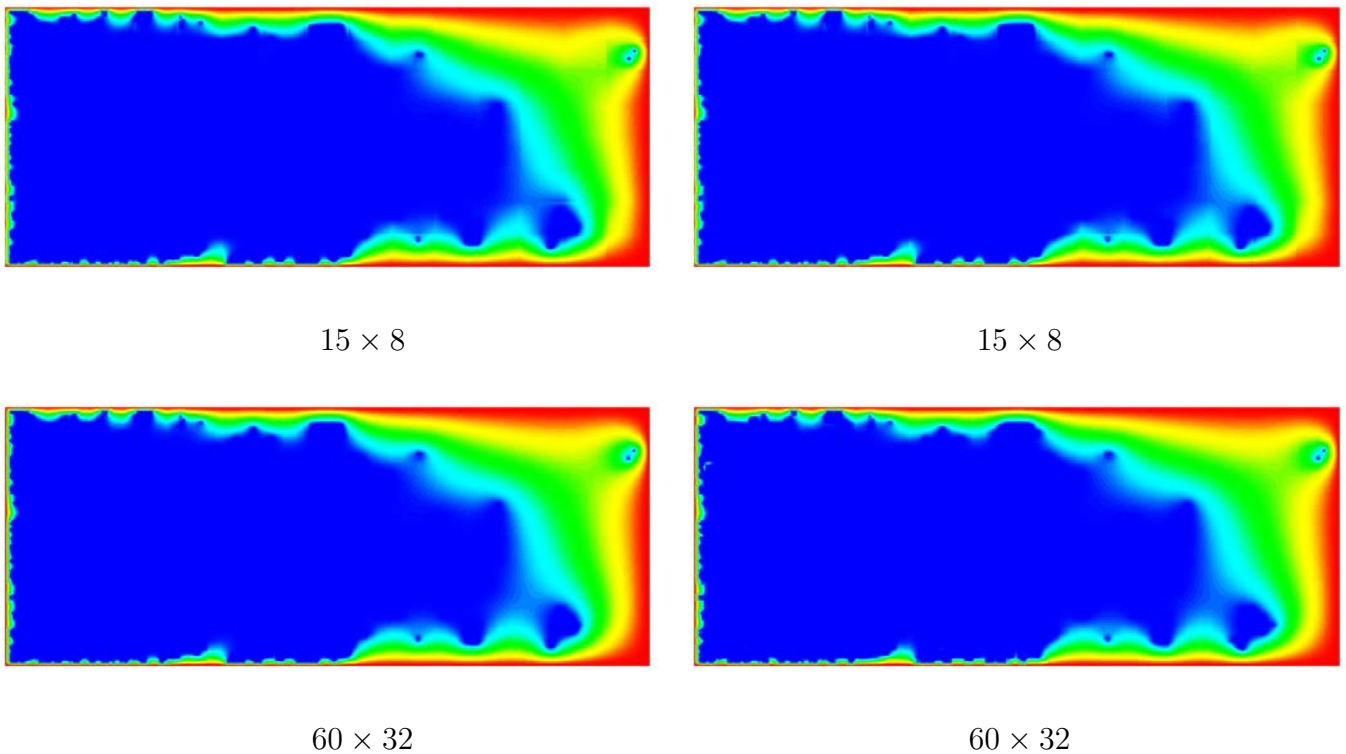


FIG. IV.27 – Solution MsFEM-H pour des données géométriques réelles. — A gauche : la solution calculée sans pénalisation. — A droite : la solution calculée avec pénalisation. — En haut : avec le maillage 15×8 . — En bas : avec le maillage 60×32 .

deux maillages, ces résultats sont très proches de ceux obtenus avec MsFEM-H couplée avec pénalisation et aucun résultat n'est obtenu sans pénalisation. Ils ne sont donc pas représentés.

Temps CPU. Le temps de calcul de la solution de référence est de 573 secondes, alors que pour une méthode multiéchelles le calcul grossier met 10^{-3} seconde avec le maillage 15×8 et $9 \cdot 10^{-2}$ seconde avec le maillage 60×32 . Le calcul des fonctions de base met 623 secondes avec le maillage grossier 15×8 et 310 secondes avec le maillage grossier 60×32 .

3.3 Bilan

Comme pour la ville virtuelle, la visualisation des solutions obtenues permet d'affirmer que les méthodes se comportent bien globalement. MsFEM-L produit encore des artefacts numériques dus aux conditions aux limites linéaires. MsFEM-OS ne permet pas de faire les calculs dans l'utilisation de la pénalisation, mais couplée avec celle-ci les résultats répondent aux attentes. La dernière méthode testée est la méthode MsFEM-H, elle peut se coupler avec la pénalisation et elle fournit des résultats similaires à ceux de MsFEM-OS.

Les tests réalisés dans la section 2 ont révélés qu'en prenant le même opérateur

pénalisé pour l'équation des fonctions de base et pour l'équation globale, cela permet une meilleure précision pour toutes les méthodes. Dans le cas d'une ville virtuelle, il est préférable d'utiliser MsFEM-OS ou MsFEM-H qui produisent des résultats plus précis que MsFEM-L ou MsFEM-Hcentree. Les simulations réalisées sur des données réelles de l'aéroport confirme la précision des résultats obtenus avec les méthodes MsFEM-OS et MsFEM-H par rapport à ceux des éléments finis, ainsi que la rapidité des calculs. En effet, les méthodes MsFEM apportent un gros gain de temps et de place mémoire par rapport à la méthode des éléments finis standard en fournissant des résultats comparables quantitativement. Ceci est possible grâce au précalcul des fonctions de base. De plus, l'utilisation de la méthode de pénalisation permet de réaliser les calculs avec la méthode MsFEM-OS dans un contexte urbain et ainsi de garder les améliorations apportées par cette méthode. Nous avons remarqué que MsFEM-H fournit des résultats satisfaisants sans utiliser la méthode de pénalisation et rend facultative l'utilisation de la pénalisation.

4 Conclusion

Cette étude numérique montre qu'une méthode multiéchelles du type de MsFEM, couplée avec la méthode de pénalisation, est efficace pour simuler la propagation d'un polluant en milieu urbain. La taille d'une ville réelle est telle qu'une méthode numérique classique ne permet pas de réaliser des simulations numériques en temps réel. *A contrario*, nous avons montré qu'une méthode multiéchelles en était capable.

Les méthodes ont été validées sur des cas tests académiques, représentatifs d'une ville virtuelle et sur des données réelles issues d'une image satellite. La méthode MsFEM-L, même avec la pénalisation n'est pas concluante. Dans ce contexte de propagation de polluant en milieu urbain, nous avons constaté que MsFEM-OS ne peut être utilisé en l'état. Néanmoins, la méthode de pénalisation permet d'adapter MsFEM-OS. Elle simplifie les calculs et rend possible la construction de X^0 pour MsFEM-OS. Les nouvelles améliorations de MsFEM (MsFEM-Hcentree, MsFEM-H) proposées dans le chapitre précédent et testées dans celui-ci montrent de bons comportements, qu'elles soient couplées ou pas avec la pénalisation. Il suffit donc d'utiliser quelques adaptations de MsFEM comme MsFEM-H et/ou un couplage avec la pénalisation. De plus, nous avons testé différents type d'opérateurs pour le calcul des fonctions de base et celui de l'équation grossière. Les meilleurs résultats sont obtenus avec le terme d'absorption dans le calcul des fonctions de base multitéchelles et dans l'équation globale.

Finalement, avec les différents tests réalisés dans ce chapitre, nous avons constaté que les méthodes MsFEM couplées avec la pénalisation produisent des résultats précis, en particulier MsFEM-OS et MsFEM-H dans le cas d'une ville (virtuelle ou réelle). En conséquence, la méthodologie multiéchelles permet d'obtenir un bon compromis entre précision et rapidité également dans un contexte urbain.

Méthode multiéchelles pour un modèle discret de réseaux électriques

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la simulation d'un réseau électrique ayant de nombreux composants. Le réseau est un domaine constitué de points et de lignes qui les relient. Ces points étant très nombreux, une méthode multiéchelles se révèle nécessaire afin de réduire la taille des systèmes en jeu. Nous développons dans ce chapitre une méthode multiéchelles issue de la méthodologie développée dans le premier chapitre et adaptée au réseau électrique. Nous présentons le modèle, puis la méthode multiéchelles adaptée à ce contexte.

1 Présentation du problème

1.1 Contexte

La répartition d'électricité se fait à travers des réseaux de distribution. Un tel réseau est un ensemble d'infrastructures permettant d'acheminer l'énergie électrique des centres de production vers les consommateurs d'électricité. Il est constitué de composants connectés par des lignes électriques. Parmi ces composants, certains permettent de modifier la tension électrique (énergie échangée par unité de charge). Différents niveaux de tension apparaissent donc sur les lignes électriques. Les connexions sont généralement complexes, étant donné qu'un composant électrique est connecté à un ou plusieurs autres composants, qui sont eux-mêmes interconnectés. Cependant, une structure globale en "étoiles" est souvent observée. Certains nœuds, appelés pôles, sont connectés à un grand nombre de nœuds voisins qui ne sont connectés qu'au pôle, d'où la structure en étoile. Ces pôles sont connectés à d'autres pôles connectant les structures étoilées entre elles. Un exemple classique de réseau en étoile à plusieurs échelles est le réseau internet, dont nous voyons une représentation schématique sur la figure FIG. V.1. Dans le cas plus général d'une structure non étoilée, les pôles sont des nœuds ayant beaucoup de connexions. Les connexions entre pôles sont peu nombreuses comparées à celles entre nœuds.

Chaque réseau électrique est différent : son comportement dépend de tous ses composants et de leurs connexions. Les générateurs alimentent le réseau en électricité qui est

répartie dans tout le réseau. Un réseau électrique doit assurer la gestion dynamique de l'ensemble (production, transport, consommation), mettant en œuvre des réglages ayant pour objectif d'assurer la stabilité de l'ensemble. Prévoir le courant dans l'ensemble du réseau demande la connaissance de son intensité (quantité de charge électrique) en n'importe quel point : il faut donc prendre en compte l'ensemble du réseau. La maîtrise de l'intensité, donc sa connaissance dans l'intégralité du réseau, est importante. En effet, une ampoule, par exemple, a besoin d'une certaine intensité pour fonctionner correctement : si l'intensité est trop faible elle n'éclairera pas (suffisamment). La panne d'un seul générateur, ou même parfois d'un autre composant fortement connecté au réseau, modifie considérablement la nature du réseau. Il est alors nécessaire que le réseau puisse réagir en fonction des données pour corriger les "défauts" et assurer la distribution convenable d'électricité.

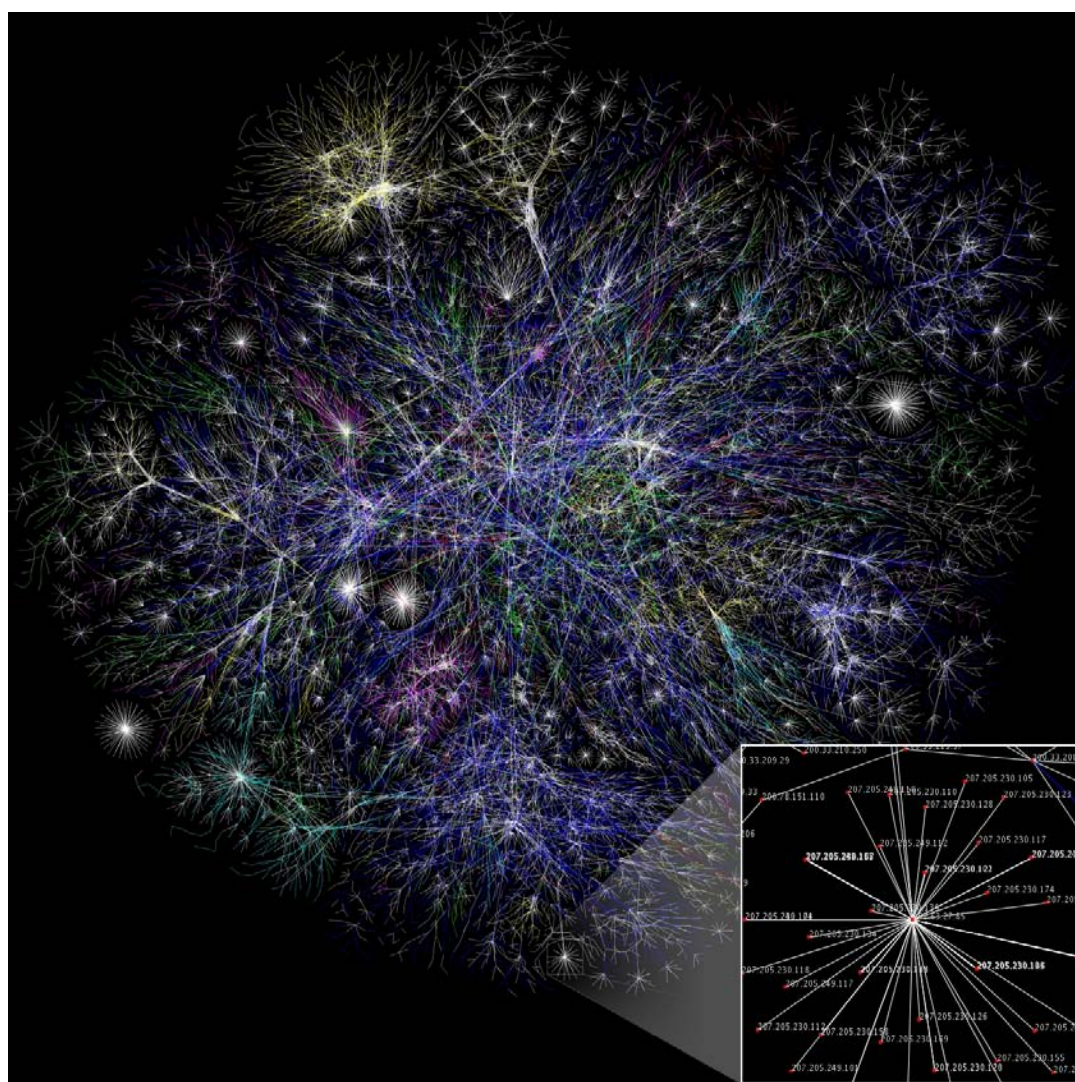


FIG. V.1 – Exemple de réseau en étoiles : le réseau internet¹.

¹Source : http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Internet_map_1024.jpg

1.2 Apport

La simulation d'un circuit électrique peut se faire par des méthodes classiques, mais, pour un réseau électrique contenant de nombreux composants interconnectés entre eux, cela nécessite des calculs très longs et gourmands en mémoire. Afin d'éviter ces contraintes, plusieurs solutions sont possibles. La structure d'un réseau offre la possibilité de considérer ce problème sous un angle multiéchelles : l'échelle des pôles serait l'échelle grossière², alors que l'échelle des nœuds serait l'échelle fine. Contrairement à un domaine spatial continu, le nombre de pôles par "zone" grossière n'est pas limité (voir figure FIG. V.2). Nous choisissons de résoudre le problème de simulation d'un réseau électrique à l'aide d'une méthode multiéchelles. Son utilisation permet de réduire la taille du système à résoudre. Grâce à cela, il est possible de réaliser des calculs potentiellement coûteux en temps et en mémoire, et en conséquence d'itérer des simulations d'un réseau complexe à un moindre coût. Aucune méthode multiéchelles n'a été utilisée jusqu'à présent sur ce type de problème en réseau. Dans les chapitres précédents, nous avons utilisé des variantes de la méthode MsFEM dans un domaine physique continu rectangulaire. Dans ce contexte, le domaine est discret et complexe. Une méthode multiéchelles est particulièrement utile lorsque le réseau est grand. La méthodologie multiéchelles est donc utilisée ici afin de construire une méthode adaptée à ce milieu discret.

2 Modèle utilisé

Les réseaux électriques que nous traitons et analysons ici consistent en une interconnexion d'éléments physiques idéalisés tels que des inducteurs, des capacités, des résistances et des générateurs.

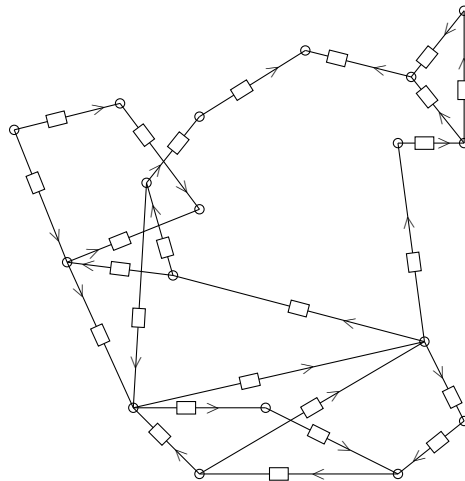


FIG. V.2 – Exemple simple de réseau électrique avec des composants en connexion avec plusieurs autres. Les rectangles sont les composants électriques, les cercles sont les points de connexion entre composants et les lignes sont les fils électriques dont le sens du courant qui y circule est représenté par les flèches.

²Des groupes de quelques pôles et des nœuds avec lesquels ils sont connectés constitueraient la cellule grossière.

En accord avec les méthodes de résolution pour la théorie des graphes (voir [28]), un réseau électrique peut être représenté par un graphe orienté avec des arêtes désignant les branches composées de composants électriques et des sommets représentant les connexions finales des composants.

Définition 5. *Un graphe \mathcal{G} est constitué de points \mathbf{x}_α appelés nœuds et de couples de nœuds $[\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta]$ formant des lignes appelées arêtes connectant les nœuds \mathbf{x}_α et \mathbf{x}_β . Réciproquement, les nœuds \mathbf{x}_α et \mathbf{x}_β sont dit connectés s'il existe une branche $[\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta]$ reliant ces deux points.*

Le nombre de nœuds d'un graphe est noté N^ε et l'ensemble de ces nœuds est noté $\mathcal{N} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N^\varepsilon}\}$. Le domaine de calcul Ω est alors une partie de l'espace discret \mathbb{Z}^d , avec $1 \leq d \leq N^\varepsilon - 1$ (cas où tous les nœuds sont connectés entre eux), puisque les nœuds du graphe peuvent être représentés par un nombre dans cet espace³.

Définition 6. *Un graphe \mathcal{G} orienté est un graphe dont les branches sont des couples de nœuds $(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta)$ ordonnés, c'est-à-dire $(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta) \neq (\mathbf{x}_\beta, \mathbf{x}_\alpha)$. Dans le cas d'une branche orientée $(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta)$ le nœud \mathbf{x}_α est le nœud initial et \mathbf{x}_β le nœud final.*

Le nombre de branches orientées d'un graphe est noté N_b^ε et l'ensemble de ces branches est noté $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{N_b^\varepsilon}\}$. Nous permettons ici à un nœud d'être connecté à plusieurs autres nœuds. Par contre le graphe est sans boucle, c'est-à-dire qu'un nœud ne peut pas être connecté à lui-même. Nous remarquons que, *a priori*, le nombre de branches est différent du nombre de nœuds : $N_b^\varepsilon \neq N^\varepsilon$.

Considérons un réseau électrique décrit sur la figure FIG. V.2. C'est une version simple d'un réseau électrique qui nous permet d'expliquer le principe. Un réseau réaliste ressemblerait plus à la figure FIG. V.1 mais non exploitable dans la suite pour des raisons de clarté. Le réseau est associé à un graphe orienté \mathcal{G} connectant N^ε nœuds à l'aide de N_b^ε branches (voir la figure FIG. V.3). La théorie des réseaux électriques est formulée en terme de deux variables, appelées courant et tension. Le courant et la tension sont les inconnues du problème, ils sont définis aux branches du graphe. Chaque composant est alors associé à une branche. Nous choisissons d'orienter le graphe comme sur la figure FIG. V.4, c'est-à-dire que nous orientons les branches de la façon suivante : dans la branche le courant traverse le composant du nœud initial vers le nœud final.

Remarque : Lors d'un montage en dérivation, si deux composants (au moins) sont parcourus par le courant dans le même sens, comme sur la figure FIG. V.6, le couple $(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta)$ représente deux (ou plus) branches. Nous pouvons donc choisir d'identifier les branches ayant les mêmes nœuds initiaux et finaux. Ceci n'est pas nécessaire puisque nous rangeons séparément les branches et les nœuds du graphe. Cependant, cela permet de définir une branche comme un couple ordonné de nœuds, indépendamment du composant, et nous ne considérons qu'un seul composant par branche, c'est-à-dire $(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta)$ représente une unique branche, et nous pouvons identifier \mathbf{b} et $(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta)$. Dans le cas contraire, nous ne pouvons pas écrire $\mathbf{b} = (\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta)$, mais juste que \mathbf{x}_α est le nœud initial de \mathbf{b} , \mathbf{x}_β le nœud final de \mathbf{b} et la branche \mathbf{b} doit aussi comporter l'information du composant. Nous verrons par la suite les conséquences de cette identification, c'est-à-dire que nous préciserons les modifications à apporter.

³Deux nœuds connectés sont représentés par $\{0; 1\} \subsetneq \mathbb{Z}$. Trois nœuds, tous connectés, sont représentés par $\{(0, 0); (0, 1); (1, 0)\} \subsetneq \mathbb{Z}^2$, et ensuite de suite.

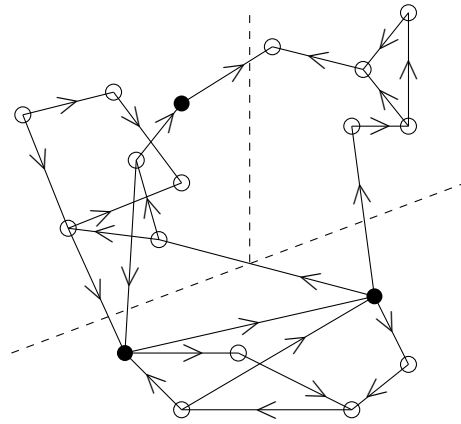


FIG. V.3 – Exemple simple de graphe orienté : graphe correspondant au réseau électrique de la figure FIG. V.2. Les lignes sont les branches orientées du graphe dont l'orientation est indiquée par les flèches. Les cercles sont les nœuds du graphe. Les cercles pleins sont les portes (ou pôles). Les lignes en pointillés représentent la décomposition de Ω en sous-domaines (cellules).

Pour étudier les circuits en régime variable, il est plus pratique d'écrire les variables sinusoïdales⁴ en variables complexes. Cette notation complexe simplifie les équations à résoudre pour déterminer l'état d'un circuit en régime sinusoïdal puisque une dérivation se traduit par une multiplication. Introduisons les notations suivantes sur les matrices et les vecteurs :

- $A \in \mathbb{Z}^{N^e \times N_b^e}$ est la matrice d'incidence nœud-branche, désignant le sens du courant, définie par

$$\begin{cases} A_{\alpha,b} = 1 & \text{si } \mathbf{x}_\alpha \text{ est le nœud final de } \mathbf{b}, \\ A_{\alpha,b} = -1 & \text{si } \mathbf{x}_\alpha \text{ est le nœud initial de } \mathbf{b}, \\ A_{\alpha,b} = 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
- $I \in \mathbb{C}^{N_b^e}$ est le vecteur des intensités aux branches, c'est-à-dire I_b désigne l'intensité dans la branche \mathbf{b} ,
- $U \in \mathbb{C}^{N_b^e}$ est le vecteur des tensions aux branches, c'est-à-dire U_b désigne la tension dans la branche \mathbf{b} ,
- $J \in \mathbb{C}^{N_b^e}$ est le vecteur des courants sources, c'est-à-dire J_b désigne le courant source dans la branche \mathbf{b} , qui correspond au courant d'un générateur dans la branche \mathbf{b} ,
- $\tilde{Y} \in \mathbb{C}^{N_b^e \times N_b^e}$ est la matrice d'admittance de branche, qui donne les caractéristiques des composants (par exemple les résistances ou les capacités),
- $V \in \mathbb{C}^{N^e}$ est le vecteur des potentiels nodaux, c'est-à-dire V_α désigne le potentiel au nœud \mathbf{x}_α .

Remarquons, d'après la convention d'orientation du graphe (voir FIG. V.4), que l'élément $A_{\beta,b}$ de la matrice A est égal à un lorsque le courant arrive au nœud \mathbf{x}_β (nœud final de \mathbf{b}). La matrice \tilde{Y} est une matrice diagonale qui, à chaque branche du graphe, prend la valeur de l'admittance du dipôle dans la branche. L'admittance d'un dipôle linéaire passif est le rapport entre l'intensité du courant qui le traverse et la tension à ses bornes. Son inverse est l'impédance, de partie réelle la résistance et d'argument le déphasage de la

⁴EDF fournit un courant sinusoïdal.

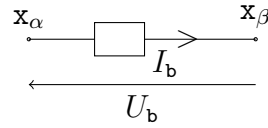


FIG. V.4 – Convention des signes : dans la branche \mathbf{b} , de nœud initial \mathbf{x}_α et final \mathbf{x}_β , le courant $I_{\mathbf{b}}$ traverse le composant du nœud \mathbf{x}_α vers le nœud \mathbf{x}_β et la tension $U_{\mathbf{b}}$ est la différence de potentiel entre le nœud \mathbf{x}_α et le nœud \mathbf{x}_β : $U_{\mathbf{b}} = V_\alpha - V_\beta$.

tension par rapport à l'intensité (voir [85]). Par exemple, pour un résistor, l'admittance est l'inverse de la résistance, pour un condensateur idéal de capacité C , il s'agit de $iC\omega$ et pour une bobine idéale d'inductance L , il s'agit de $\frac{1}{iL\omega}$.

La tension et l'intensité, inconnues du problème, respectent certaines lois de la physique, précisément les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm. Rappelons ces lois qui nous permettent de modéliser le problème du réseau électrique.

La loi de tension de Kirchhoff. Elle est aussi appelée loi des mailles. Appliquée à une boucle fermée du circuit, elle signifie que la somme des potentiels est nulle. Ceci implique que dans un montage en dérivation, la tension aux branches est la même.

La loi de courant de Kirchhoff. Elle est aussi appelée loi des nœuds. Appliquée à un nœud \mathbf{x}_α , elle signifie que la somme des courants entrants est égale à la somme des courants sortants, c'est-à-dire

$$\sum_{\mathbf{b}} I_{\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{b}' } I_{\mathbf{b}'},$$

où la somme porte sur les branches \mathbf{b} dont le nœud \mathbf{x}_α est le nœud final de la branche et sur les branches \mathbf{b}' dont le nœud \mathbf{x}_α est le nœud initial de la branche. Après identification des branches : $\mathbf{b} = (\mathbf{x}_\beta, \mathbf{x}_\alpha)$ et $\mathbf{b}' = (\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta)$. Ceci revient à écrire simplement :

$$\sum_{\mathbf{b}=(\mathbf{x}_\beta, \mathbf{x}_\alpha)} A_{\alpha, \mathbf{b}} I_{\mathbf{b}} = 0,$$

ce qui se traduit pour l'ensemble des nœuds du graphe par le système suivant

$$AI = 0_{N^\varepsilon}. \quad (\text{V.1})$$

La loi d'Ohm généralisée. Elle relie les variables de courant I et de tension U grâce à la matrice d'admittance de branche \tilde{Y} et est décrite par la relation suivante :

$$I = J + \tilde{Y}U. \quad (\text{V.2})$$

Pour tout nœud \mathbf{x}'_β différent de \mathbf{x}_β la tension $U_{\mathbf{b}}$ dans la branche \mathbf{b} , de nœud initial \mathbf{x}_β et final \mathbf{x}'_β , est la différence entre les potentiels V_β et $V_{\beta'}$ aux nœuds \mathbf{x}_β et β' respectivement, c'est-à-dire

$$U_{\mathbf{b}} = V_\beta - V_{\beta'} = -A_{\beta, \mathbf{b}} V_\beta - A_{\beta', \mathbf{b}} V_{\beta'} = - \sum_{\mathbf{x}_\alpha \in \mathcal{N}} A_{\alpha, \mathbf{b}} V_\alpha.$$

Le vecteur U peut donc s'écrire en fonction du vecteur V à l'aide de la transposée de la matrice $-A$, c'est-à-dire

$$U = -A^t V. \quad (\text{V.3})$$

En remplaçant U par $-A^t V$ dans (V.2) et en utilisant (V.1), nous obtenons :

$$0 = AI = AJ + A\tilde{Y}U = AJ - A\tilde{Y}A^t V.$$

Notons $Y \in \mathbb{C}^{N^\varepsilon \times N^\varepsilon}$ égale à la matrice d'admittance $A\tilde{Y}A^t$. Le système linéaire précédent se réécrit :

$$YV = AJ. \quad (\text{V.4})$$

Ce système d'inconnue V et de source AJ est de taille $N^\varepsilon \times N^\varepsilon$. Il est équivalent à la résolution du problème variationnel :

$$\text{trouver } V^\varepsilon \in X^\varepsilon \text{ tel que pour tout } W \in X^\varepsilon, \quad \langle YV^\varepsilon, W \rangle = \langle AJ, W \rangle,$$

où X^ε désigne l'espace vectoriel dans lequel nous cherchons la solution approchée V^ε , c'est-à-dire⁵ $X^\varepsilon = \mathbb{C}^{N^\varepsilon}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit hermitien dans X^ε . Ce système étant de très grande taille, il est résolu à l'aide de la méthode multiéchelles. Nous décrivons cette méthode dans la section suivante.

3 La méthode multiéchelles

La résolution de (V.4) correspond à la résolution d'un problème de réseau électrique à l'échelle des nœuds du réseau. Notons ε la longueur caractéristique de cette échelle. Nous considérons que deux nœuds sont à une distance ε s'ils sont connectés par une branche : $\varepsilon = \frac{1}{N^\varepsilon - 1}$. Lorsque le réseau contient beaucoup de composants, donc de branches et de nœuds, la taille $N^\varepsilon \times N^\varepsilon$ du système (V.4) à résoudre devient très grande. Nous utilisons ici une méthode multiéchelles pour réduire la taille du système. En effet, une méthode multiéchelles permet d'obtenir une solution approchée en résolvant un système de petite taille $N^0 \times N^0$ (avec $H = \frac{1}{N^0 - 1} \gg \varepsilon$). Ceci est possible grâce aux précalculs des vecteurs de base multiéchelles qui contiennent l'information à petite échelle. Cette réduction de taille du système permet donc de faire des calculs rapides, ce qui rend possible la simulation de nombreuses situations. En effet, après avoir réalisé le précalcul des vecteurs de base, la résolution du système (de petite taille) est quasiment instantanée.

Comme il a été vu dans le chapitre I, le domaine de calcul, ici le réseau électrique, doit être divisé en sous-domaines (cellules) en faisant des "paquets". Par exemple, comme sur la figure FIG. V.3, le graphe orienté \mathcal{G} est décomposé en sous-graphes⁶ que l'on note \mathcal{G}_k (voir figure FIG. V.5). Autrement dit, nous avons la décomposition suivante :

$$\mathcal{G} = \bigcup_k \mathcal{G}_k.$$

Un sous-graphe est lui aussi composé de nœuds et de branches. Dans \mathcal{G}_k , notons \mathcal{N}_k l'ensemble des nœuds et \mathcal{B}_k l'ensemble des branches. Pour chaque sous-graphe \mathcal{G}_k , est

⁵Pour chacun des N^ε nœuds, nous cherchons une valeur complexe.

⁶Il s'agit des cellules grossières, ou d'une étoile pour le réseau en étoiles.

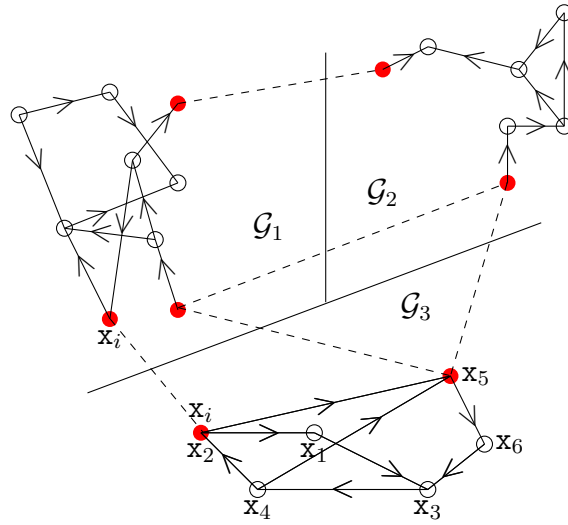


FIG. V.5 – Décomposition du graphe \mathcal{G} de la figure FIG. V.3 en trois sous-graphes \mathcal{G}_k . Le point \mathbf{x}_i est une porte, il est commun aux sous-graphes \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_3 . Les nœuds $\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,6}$ sont les nœuds du sous-graphe \mathcal{G}_3 .

appelé porte un nœud de \mathcal{N}_k tel qu'il existe une branche qui connecte ce nœud à un nœud d'un autre sous-graphe. Notons \mathcal{P}_k l'ensemble des portes de \mathcal{G}_k , c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_k = \{\mathbf{x}_\alpha \in \mathcal{N}_k : \exists k' \neq k, \mathbf{b} \in \mathcal{B}_{k'}, A_{\alpha,\mathbf{b}} \neq 0\}.$$

Il s'agit des nœuds connectés à un autre sous-graphe⁷. Ils sont donc communs à plusieurs sous-graphes, et les \mathcal{P}_k ne sont pas disjoints. Notons \mathcal{S}_k son complémentaire dans \mathcal{N}_k , c'est-à-dire l'ensemble des nœuds de \mathcal{G}_k tel qu'il n'existe aucune connexion (directe) avec un nœud d'un autre sous-graphe :

$$\mathcal{S}_k = \{\mathbf{x}_\alpha \in \mathcal{N}_k : \forall k' \neq k, \mathbf{b} \in \mathcal{B}_{k'}, A_{\alpha,\mathbf{b}} = 0\}.$$

Il s'agit de nœuds "internes" à \mathcal{G}_k . Les sous-graphes sont construits de telle sorte que les ensembles \mathcal{S}_k soient disjoints, puisque les nœuds de \mathcal{S}_k ne sont connectés à aucun nœud d'un autre sous-graphe. De plus, notons $\mathcal{P} = \cup_k \mathcal{P}_k$ l'ensemble des portes de \mathcal{G} , de cardinal N^0 et $\mathcal{S} = \cup_k \mathcal{S}_k$.

Un sous-graphe peut être vu comme un méta-composant électrique avec plusieurs portes, où une porte coïncide avec un nœud fin, comme sur la figure FIG. V.5. Localement à un sous-graphe, les portes sont traitées comme nœuds de bord. Du point de vue multiéchelles, ces sous-graphes constituent les éléments à l'échelle grossière⁸ et les portes constituent les nœuds grossiers⁹.

Le temps de calcul dépend du nombre N^0 , il est donc souhaitable de décomposer le graphe \mathcal{G} en évitant un nombre de portes trop élevé, soit $N^0 \ll N^\varepsilon$. Dans le cas d'une structure en étoiles, les portes sont les nœuds centraux des étoiles qui connectent les étoiles entre elles. Dans la mesure du possible, il s'agit de regrouper les nœuds qui

⁷Une porte a été appelée pôle pour un réseau en étoiles.

⁸Il s'agit des cellules grossières K dans les chapitres précédents.

⁹Il s'agit des nœuds grossiers \mathbf{x}_i dans les chapitres précédents.

ont beaucoup de connexions entre eux et de prendre pour les portes les nœuds n'ayant pas trop de connexions avec les autres sous-graphes. Sur la figure FIG. V.5, nous avons représenté un exemple de décomposition (en pointillés) avec trois portes. Une porte peut être connectée à plusieurs nœuds et plusieurs portes d'un même sous-graphe.

La résolution du système (V.4) se fait en trois étapes :

1. Précalcul, pour chaque porte $\mathbf{x}_i \in \mathcal{P}$, du vecteur de base multiéchelles Φ^i associé.
2. Résolution du système global de taille $N^0 \times N^0$.
3. Post-traitement.

Le détail de ces étapes fait l'objet de cette section.

3.1 Construction des vecteurs de base

La première étape est le calcul des vecteurs de base multiéchelles des sous-graphes portant l'information à petite échelle ε . Ce sont les vecteurs qui engendrent l'espace X^0 (voir chapitre I). L'opérateur \mathbf{R} , introduit dans le chapitre I, définit l'opération de passage de la base de X^ε vers celle de X^0 . Il est construit en multipliant un vecteur à gauche par la matrice $P^\Phi \in \mathbb{C}^{N^\varepsilon \times N^0}$ de changement de base de $X^\varepsilon = \mathbb{C}^{N^\varepsilon}$ dans la base de $X^0 \subset \mathbb{C}^{N^0}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} : X^0 &\rightarrow X^\varepsilon \\ x &\mapsto P^\Phi x. \end{aligned}$$

La matrice de passage P^Φ est définie par $P_{\alpha,i}^\Phi = \Phi_\alpha^i$ pour $i = 1, \dots, N^0$ et $\alpha = 1, \dots, N^\varepsilon$. Les images par \mathbf{R} des vecteurs de base de X^0 sont solutions de problèmes locaux (calculés dans les sous-graphes). Notons $\mathbf{R}_k : X^0 \rightarrow \mathbb{C}^{N_k}$ la restriction de \mathbf{R} aux nœuds de \mathcal{N}_k , tel que $\mathbf{R}_k(x)$ est le vecteur des composantes de $P^\Phi x$ correspondant seulement aux éléments de \mathcal{N}_k , c'est-à-dire $\mathbf{R}_k(x) = (P^\Phi x)_{\alpha: \mathbf{x}_\alpha \in \mathcal{N}_k}$.

En fait, pour toute porte \mathbf{x}_i dans \mathcal{P} , nous construisons une solution modèle Φ^i . Pour tout k tel que $\mathbf{x}_i \in \mathcal{P}_k$, notons $\tilde{\Phi}^i = \mathbf{R}_k(\Phi^i) \in X^\varepsilon$, c'est-à-dire que $\tilde{\Phi}^i$ est le vecteur Φ^i exprimé dans la base de X^ε restreint aux nœuds de \mathcal{N}_k . Ce vecteur $\tilde{\Phi}^i$ est solution du problème homogène suivant :

$$\begin{cases} Y^k \tilde{\Phi}^i = 0 & \text{dans } \mathcal{G}_k, \\ \tilde{\Phi}^i(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j} & \forall \mathbf{x}_j \in \mathcal{P}_k, \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

où Y^k est la restriction de Y à \mathcal{G}_k , c'est-à-dire la matrice d'admittance nodale $Y^k = A^k \tilde{Y}^k (A^k)^t$ du sous-graphe \mathcal{G}_k , avec \tilde{Y}^k est la restriction de \tilde{Y} à \mathcal{G}_k et A^k celle de A . La notation $\tilde{\Phi}^i(\mathbf{x}_j)$ signifie la $i^{\text{ème}}$ composante dans la base canonique de X^ε , où la porte \mathbf{x}_j est¹⁰ le nœud \mathbf{x}_α . Le système (V.5) est de taille $N_k \times N_k$, où $N_k \ll N^\varepsilon$ est le nombre de nœuds dans \mathcal{G}_k , c'est-à-dire le cardinal de \mathcal{N}_k .

Le vecteur $\mathbf{R}_k(\Phi^i)$ est donc défini pour tout nœud de \mathcal{N}_k tel que $\mathbf{x}_i \in \mathcal{P}_k$ en résolvant le problème (V.5). Pour les nœuds de \mathcal{N}_k tels que $\mathbf{x}_i \notin \mathcal{P}_k$, le vecteur $\mathbf{R}_k(\Phi^i)$ est nul. Le support Λ_i de $\mathbf{R}(\Phi^i)$ est alors l'ensemble

$$\Lambda_i = \bigcup_k \{\mathcal{N}_k \text{ tel que } \mathbf{x}_i \in \mathcal{P}_k\}.$$

¹⁰Une porte est avant tout un nœud du graphe.

Remarques :

- Les matrices A et \tilde{Y} caractérisent entièrement le réseau électrique. La matrice A caractérise seulement le graphe \mathcal{G} associé. De la même manière, pour tout k , les matrices A^k et \tilde{Y}^k caractérisent entièrement les sous-réseaux électriques et A^k uniquement les sous-graphes \mathcal{G}_k associés. Ce sont en fait les sous-matrices (blocs de matrices) des matrices A et \tilde{Y} .
- Le calcul des vecteurs $\tilde{\Phi}^i$ est un calcul local (aux sous-graphes \mathcal{G}_k).
- Les vecteurs de base Φ^i sont indépendants.

En notant $\{\psi^\alpha\}_{\alpha=1,\dots,N^\varepsilon}$ la base canonique de X^ε , nous cherchons $\mathbf{R}(\Phi^i)$ dans X^ε , tel que les $\mathbf{R}_k(\Phi^i)$ soient solutions des problèmes (V.5), sous la forme :

$$\mathbf{R}(\Phi^i) = \sum_{\beta=1}^{N^\varepsilon} \psi^\beta \Phi_\beta^i. \quad (\text{V.6})$$

En fait, il suffit de sommer sur les indices des nœuds des sous-graphes du support Λ_i de Φ^i , c'est-à-dire sur les nœuds des \mathcal{G}_k tels que $\mathbf{x}_i \in \mathcal{P}_k$. Pour résoudre (V.5), nous multiplions $Y^k \tilde{\Phi}^i = 0$ par ψ^α , puis nous décomposons $\tilde{\Phi}^i$ grâce à (V.6), en sommant sur les β tels que $\mathbf{x}_\beta \in \mathcal{N}_k$. Nous obtenons alors pour tout α tel que $\mathbf{x}_\alpha \in \mathcal{N}_k$:

$$\sum_{\beta} \langle Y^k \psi^\beta, \psi^\alpha \rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon} \Phi_\beta^i = \sum_{\eta=1}^{N^\varepsilon} \sum_{\beta} (Y^k \psi^\beta)_\eta \psi_\eta^\alpha \Phi_\beta^i = \sum_{\beta} \left(\sum_{\eta,j=1}^{N^\varepsilon} Y_{\eta,j}^k \psi_j^\beta \psi_\eta^\alpha \right) \Phi_\beta^i = 0, \quad (\text{V.7})$$

en sommant sur les β tels que $\mathbf{x}_\beta \in \mathcal{N}_k$. Notons S la matrice définie par $S_{\alpha,\beta} = \sum_{\eta,j=1}^{N^\varepsilon} Y_{\eta,j}^k \psi_j^\beta \psi_\eta^\alpha$, le système précédent s'écrit alors simplement, en prenant en compte les conditions aux limites :

$$\sum_{\beta/\mathbf{x}_\beta \in \mathcal{S}_k} S_{\alpha,\beta} \Phi_\beta^i = S_{\alpha,i}, \quad (\text{V.8})$$

où $(S_{\alpha,i})_\alpha$ est le vecteur des conditions aux limites, car $\sum_{\beta/\mathbf{x}_\beta \in \mathcal{P}_k} S_{\alpha,\beta} \delta_{i,\beta} = S_{\alpha,i}$.

Remarque : Ce système à résoudre est en fait de taille plus petite que $N_k \times N_k$ car le cardinal de \mathcal{S}_k est inférieur à N_k , le cardinal de \mathcal{N}_k .

Ces vecteurs constituent une base de l'espace vectoriel X^0 , isomorphe à \mathbb{C}^{N^0} , c'est-à-dire que X^0 est engendré par $\{\Phi^i\}_{i \in \mathcal{P}}$. Une fois l'espace X^0 construit, il est utilisé pour le calcul de la solution de (V.4).

3.2 Résolution du problème global

La deuxième étape de la méthode est le calcul d'une solution approchée de (V.4) dans X^0 . En multipliant le système (V.4), c'est-à-dire $YV^\varepsilon = AJ$, dans l'espace X^ε par un vecteur $\mathbf{R}(\Phi^j)$ de X^ε , nous obtenons :

$$\langle YV^\varepsilon, \mathbf{R}(\Phi^j) \rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon} = \langle AJ, \mathbf{R}(\Phi^j) \rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon},$$

où V^ε est une solution approchée dans X^ε . Il s'agit donc d'utiliser l'opérateur de projection suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} : X^\varepsilon &\rightarrow X^0 \\ V^\varepsilon &\mapsto \sum_i \underbrace{\langle V^\varepsilon, \mathbf{R}(\Phi^i) \rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon}}_{i^{\text{ème}} \text{ composante}} \Phi^i. \end{aligned}$$

En utilisant la décomposition de $V^\varepsilon \in X^\varepsilon : V^\varepsilon = \sum_j \mathbf{R}(\Phi^j) V_j$, nous obtenons, pour toute porte $\mathbf{x}_j \in \mathcal{P}$:

$$\sum_{j=1}^{N^0} V_j \langle Y \mathbf{R}(\Phi^j), \mathbf{R}(\Phi^i) \rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon} = \langle A J, \mathbf{R}(\Phi^i) \rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon} .$$

Ce système s'écrit également :

$$\sum_{j=1}^{N^0} Y_{i,j}^0 V_j = J^0, \quad (\text{V.9})$$

avec $Y^0 \in \mathbb{C}^{N^0 \times N^0}$ et $J^0 = \sum_i J_i \Phi^i \in X^0$ définis par :

$$Y_{i,j}^0 = \langle A \tilde{Y} A^t \mathbf{R}(\Phi^j), \mathbf{R}(\Phi^i) \rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon} = \langle \tilde{Y} A^t \mathbf{R}(\Phi^j), A^t \mathbf{R}(\Phi^i) \rangle_{\mathbb{C}^{N_b^\varepsilon}, \mathbb{C}^{N_b^\varepsilon}},$$

et

$$J_i = \langle A J, \mathbf{R}(\Phi^i) \rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon} .$$

Le système (V.9) peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire de taille $N^0 \times N^0$:

$$Y^0 V^0 = J^0, \quad (\text{V.10})$$

avec $V^0 \in X^0 \subset \mathbb{C}^{N^0}$ le vecteur dans la base $\{\Phi^i\}_i : V^0 = \sum_{i=1}^{N^0} V_i \Phi^i$. Ce système à résoudre est de petite taille $N^0 \times N^0$. Il est équivalent à la résolution du problème variationnel :

trouver $V^0 \in X^0$ tel que pour tout $W^0 \in X^0$, $\langle Y^0 V^0, W^0 \rangle_{X^0, X^0} = \langle J^0, W^0 \rangle_{X^0, X^0}$.

Grâce à la méthode multiéchelles, le système (V.4) de taille $N^\varepsilon \times N^\varepsilon$ est approché par le système (V.10) de taille $N^0 \times N^0$, où $N^0 \ll N^\varepsilon$ lorsque la décomposition du graphe \mathcal{G} est bien choisie pour réduire le nombre N^0 de portes.

Remarque : Les coefficients de la matrice Y^0 sont calculés localement aux sous-graphes :

$$Y_{j,i}^0 = \langle \tilde{Y} A^t \mathbf{R}(\Phi^i), A^t \mathbf{R}(\Phi^j) \rangle_{\mathbb{C}^{N_b^\varepsilon}, \mathbb{C}^{N_b^\varepsilon}} = \sum_k \langle \tilde{Y}^k A_k^t \mathbf{R}_k(\Phi^i), A_k^t \mathbf{R}_k(\Phi^j) \rangle,$$

en sommant sur les indices des sous-graphes appartenant à l'intersection des supports de $\mathbf{R}(\Phi^i)$ et $\mathbf{R}(\Phi^j)$. Nous utilisons ensuite la décomposition (V.6) de $\mathbf{R}(\Phi^i)$. Pour être plus précis, nous avons :

$$\begin{aligned} Y_{i,j}^0 &= \sum_{\alpha=1}^{N^\varepsilon} \left(A \tilde{Y} A \mathbf{R}(\Phi^j) \right)_\alpha \mathbf{R}(\Phi^i)_\alpha \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{N^\varepsilon} \sum_{\mathbf{b}=1}^{N_b^\varepsilon} A_{\alpha,\mathbf{b}} \tilde{Y}_{\mathbf{b},\mathbf{b}} A_{\beta,\mathbf{b}} \mathbf{R}(\Phi^j)_\beta \mathbf{R}(\Phi^i)_\alpha \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{N^\varepsilon} \sum_{\mathbf{b}=1}^{N_b^\varepsilon} \sum_{\eta,\gamma=1}^{N^\varepsilon} A_{\alpha,\mathbf{b}} \tilde{Y}_{\mathbf{b},\mathbf{b}} A_{\beta,\mathbf{b}} \Phi_\eta^j \psi_\beta^\eta \Phi_\gamma^i \psi_\alpha^\gamma, \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{N^\varepsilon} \sum_{\mathbf{b}=1}^{N_b^\varepsilon} A_{\alpha,\mathbf{b}} \tilde{Y}_{\mathbf{b},\mathbf{b}} A_{\beta,\mathbf{b}} \Phi_\beta^j \Phi_\alpha^i. \end{aligned}$$

3.3 Post-traitement

La troisième et dernière étape de la méthode multiéchelles est la reconstitution d'une solution approchée V^ε dans X^ε . La résolution de (V.10) fournit une solution approchée V^0 dans X^0 . Pour obtenir une solution approchée dans l'espace X^ε , il suffit d'appliquer l'opérateur \mathbf{R} qui permet de changer de base. Pour cela, nous utilisons les composantes des vecteurs de base multiéchelles $\mathbf{R}(\Phi^i)$ dans X^ε , à l'aide de la matrice de passage P^Φ .

En utilisant le changement de base dans la décomposition de $V^0 \in X^0$, c'est-à-dire $V^0 = \sum_{j=1}^{N^0} V_j \Phi^j$, nous obtenons, avec (V.6), une solution approchée V^ε dans l'espace X^ε :

$$\begin{aligned} V^\varepsilon &= \mathbf{R}(V^0) = \sum_{i=1}^{N^0} V_i \mathbf{R}(\Phi^i) \\ &= \sum_{i=1}^{N^0} V_i \sum_{\alpha=1}^{N^\varepsilon} \Phi_\alpha^i \psi^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N^\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{N^0} V_i \Phi_\alpha^i \right) \psi^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N^\varepsilon} V_\alpha \psi^\alpha, \end{aligned}$$

où $V_\alpha = \sum_{i=1}^{N^0} V_i \Phi_\alpha^i$ est la composante de V^ε correspondant à l'élément ψ^α de la base de X^ε . En fait, pour calculer V_α , il suffit de sommer sur les portes \mathbf{x}_i du sous-graphe auquel appartient le nœud \mathbf{x}_α .

Il reste ensuite à restituer les valeurs des inconnues (tension et courant) dans toutes les branches du réseau, c'est-à-dire les U_b et I_b pour tout $b \in \mathcal{B}$. Par un simple produit matriciel, nous obtenons la tension : $U = -A^t V$. Un second produit matriciel, permet de récupérer le courant : $I = J + \tilde{Y}U$, grâce à la loi d'Ohm généralisée (V.2) et à l'ajout des sources J . De plus, pour connaître l'intensité du courant il n'est pas nécessaire de calculer explicitement la tension dans le réseau ; il suffit pour cela de multiplier V directement par $-\tilde{Y}A^t$ afin d'obtenir l'intensité $I = J - \tilde{Y}A^t V$.

Remarque : Lorsque des composants sont montés en dérivation (comme à gauche de la figure FIG. V.6), du point de vue du graphe, les branches auxquelles ils appartiennent sont les mêmes si le courant les parcourt dans le même sens. Ceci ne pose bien évidemment pas de problème pour la tension qui est la même aux bornes des composants (loi des mailles). Par contre, il faut faire attention pour la restitution du courant. Le vecteur I que nous calculons donne la tension aux branches du réseau après identification des branches d'un montage en dérivation des composants. L'intensité calculée dans cette branche est en fait la somme des intensités (voir à droite de la figure FIG. V.6). En connaissant l'intensité totale, la tension et les caractéristiques des composants, il est possible de récupérer correctement, grâce à la matrice d'admittance, la valeur de l'intensité du courant traversant tous les composants du réseau.

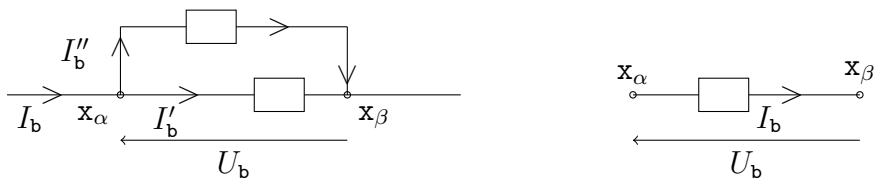


FIG. V.6 – Equivalence dans un schéma en dérivation : $I_b = I'_b + I''_b$.

3.4 Reconnexion

Une particularité du problème de réseau électrique est la possibilité de modifier la topologie du domaine. En effet, il est possible ici d'ajouter ou de retirer des nœuds, ainsi que des branches (connexions). Dans un milieu continu, les connexions sont fixes puisque deux points sont connectés s'ils sont proches physiquement. Par contre, dans les deux milieux (continu et discret), il est possible de modifier les données sur les nœuds. Cette modification topologique peut se faire :

- i) au niveau local : en ajoutant ou en retirant un composant dans un sous-graphe, c'est-à-dire en modifiant \mathcal{S}_k et \mathcal{B}_k ;
- ii) au niveau semi-local : en ajoutant ou en retirant une connexion entre sous-graphes, c'est-à-dire en modifiant \mathcal{P} ;
- iii) au niveau global : en ajoutant ou en retirant un sous-graphe. Remarquons que retirer un sous-graphe est équivalent à retirer les portes de ce sous-graphe, puisque les nœuds de \mathcal{S}_k sont alors isolés et n'intéragissent plus avec les autres sous-graphes.

Par la méthode multiéchelles, il est alors intéressant, pour un réseau donné, de simuler plusieurs termes sources J . Notons V_- la solution de l'équation dont une (ou plusieurs) composante(s) du vecteur terme source J est annulée, pour simuler par exemple une panne. Nous pouvons aussi regarder la différence $V^0 - V_-^0$ qui représente la réaction globale du réseau, ainsi que $V^\varepsilon - V_-^\varepsilon$ qui représente la réaction locale du réseau.

3.5 Mise en place

Construction des graphes. Le réseau est représenté par un graphe orienté. Un graphe est composé d'une liste \mathcal{N} de nœuds et d'une autre liste \mathcal{B} de branches qui sont des couples ordonnés de nœuds. La méthode multiéchelles implique la création de sous-graphes \mathcal{G}_k qui sont composés d'ensembles (à créer) de nœuds \mathcal{N}_k et de branches \mathcal{B}_k , qui sont des couples représentant les connexions dans le sous-graphe \mathcal{G}_k . De plus, pour lier ces sous-graphes entre eux, certains nœuds, communs à plusieurs sous-graphes, appelés portes, jouent un rôle particulier. Nous créons donc une liste \mathcal{P} de portes et, pour chaque sous-graphe \mathcal{G}_k . Nous pouvons aussi créer la liste \mathcal{S}_k de nœuds qui ne sont pas des portes. Remarquons que, dans \mathcal{B}_k , il y a des couples de nœuds appartenant à $\mathcal{S}_k \cup \mathcal{P}$, puisque \mathcal{B}_k représente l'ensemble des connexions entre les nœuds de \mathcal{N}_k .

Entrée des paramètres. Comme chaque branche ne connecte que deux nœuds ensemble, et que chaque nœud n'est connecté qu'à un nombre restreint de branches, la matrice A est creuse. La matrice d'admittance de branche \tilde{Y} est donnée par le problème électrique sous-jacent au graphe ; c'est une matrice diagonale qui, pour chaque branche, prend la valeur caractéristique du composant donnant l'intensité en fonction de la tension. En identifiant les branches d'un montage en dérivation (voir figure FIG. V.6), la valeur de \tilde{Y} est alors la somme des valeurs en les différentes branches identifiées. Nous calculons ensuite, par un simple produit matriciel, la matrice, du système (V.4), à inverser $Y = A\tilde{Y}A^t$.

Reconnexion. Dans le cas d'une reconnexion topologique du graphe \mathcal{G} , plusieurs si-

tuations sont à envisager et les calculs qui en découlent sont différents :

- Pour ajouter ou retirer un nœud à l'intérieur d'un sous-graphe, il suffit d'ajouter un élément dans les listes \mathcal{N}_k (et \mathcal{S}_k) et \mathcal{B}_k , puis de recalculer les vecteurs de base dans le sous-graphe \mathcal{G}_k .
- Pour ajouter une connexion entre les sous-graphes \mathcal{G}_k et \mathcal{G}_j , il faut ajouter dans \mathcal{P} la nouvelle porte \mathbf{x}_i , retirer de \mathcal{S}_k et de \mathcal{S}_j le nœud \mathbf{x}_i devenu une porte, ajouter la connexion dans \mathcal{B}_k et \mathcal{B}_j . Il faut ensuite recalculer les vecteurs de base dans les sous-graphes \mathcal{G}_k et \mathcal{G}_j , puis calculer un nouveau vecteur de base Φ^i dans \mathcal{G}_k et \mathcal{G}_j .
- Pour retirer une connexion entre sous-graphes, il faut supprimer le vecteur de base Φ^i , où \mathbf{x}_i est la porte de la connexion perdue, dans ces sous-graphes et recalculer les autres vecteurs de base dans ces sous-graphes. De plus, il faut réactualiser les listes : il faut supprimer \mathbf{x}_i de \mathcal{P} et l'ajouter dans les listes \mathcal{S}_k et \mathcal{B}_k des sous-graphes.
- Retirer un sous-graphe est équivalent à retirer toutes les connexions de ce sous-graphe.
- Pour ajouter un sous-graphe \mathcal{G}_k , il faut créer les nouveaux ensembles \mathcal{N}_k (et \mathcal{S}_k) et \mathcal{B}_k , ajouter les nouvelles portes dans \mathcal{P} et retirer dans \mathcal{S}_j les nœuds devenus des portes avec ces nouvelles connexions. Il faut donc calculer de nouveaux vecteurs de base pour chaque nouvelle porte et reprendre les modifications lors d'un ajout de connexions pour les sous-graphes auxquels \mathcal{G}_k est connecté.

3.6 Performance

Précédemment, un calcul en temps réel se devait d'être un calcul plus rapide que le temps physique pour une équation aux dérivées partielles dépendante du temps. Dans ce modèle, le temps physique des phénomènes observés est quasi-instantané et la solution à un instant donné ne dépend pas de celle à l'instant précédent : il s'agit de la réponse du réseau à une condition de générateurs. Généralement, il est intéressant de tester un grand nombre de scénarii : différentes conditions de générateurs, différents composants, etc. La méthode multiéchelles est bien adaptée pour simuler efficacement un grand nombre de simulations. En effet, le précalcul des vecteurs de base permet de réduire notablement le temps de résolution d'un système. Pour une seule simulation, nous considérons le temps de calcul du système grossier (V.10) de la méthode multiéchelles, noté τ^M , auquel nous lui ajoutons le temps de précalcul, noté τ^P , des vecteurs de base. Le temps de calcul total de la méthode multiéchelles est du même ordre que τ^C , celui d'une méthode classique, c'est-à-dire :

$$\tau^P + \tau^M \approx \tau^C \quad \text{pour une simulation.}$$

Cependant, pour $k \gg 1$ simulations, le gain apparaît clairement car, dans ce cas, le temps de calcul est :

$$\tau^P + k \times \tau^M \ll k \times \tau^C \quad \text{pour réaliser } k \text{ simulations.}$$

Ceci devient rapidement très coûteux lorsque le nombre k de simulations devient grand. Une autre méthode optimisant le calcul sur tout le réseau, comme une méthode de décomposition de domaine, ne permet pas forcément de nombreuses simulations s'il faut recalculer sur le réseau entier à chaque fois.

Essayons de fournir une première analyse des bénéfices de la méthode multiéchelles dans ce contexte. Comme nous avons besoin d'utiliser un réseau à l'échelle fine pour

calculer les vecteurs de base multiéchelles avec l'aide des sous-réseaux (voir la première étape du calcul dans la section 3.1), il est logique de comparer une méthode multiéchelles avec une résolution du problème (V.4) à l'échelle fine en utilisant une méthode classique. Le premier avantage de cette méthode est bien évidemment le gain significatif en temps de calcul. En effet, la méthode multiéchelles consiste en la formation, puis la résolution numérique d'un système à une échelle grossière approchant un problème à échelles multiples. Ceci permet de réduire le nombre de degrés de liberté (N^0 au lieu de N^ε) mais sans la perte de précision qui survient avec une méthode classique, puisque le système (V.10) formé prend en compte les informations aux petites échelles. Le système à l'échelle grossière étant plus petit que le système à l'échelle fine, il est en conséquence plus rapide à résoudre. De plus, les résolutions (pour les différents vecteurs de base) du problème (V.5) sont coûteuses mais, les vecteurs de base étant indépendants, ils peuvent être calculés efficacement en parallèle, comme dans le contexte du transport de polluant. La première étape du calcul peut donc aussi être faite assez rapidement. Les vecteurs de base ne dépendent pas du terme source et des conditions sur l'opérateur, ils peuvent être réutilisés pour d'autres simulations. Un autre avantage de la méthode multiéchelles est le gain de place mémoire. En effet, la mémoire d'un ordinateur nécessaire pour résoudre le problème initial avec une méthode numérique classique à l'échelle fine est de l'ordre du nombre de nœuds dans le réseau, alors que la méthode multiéchelles nécessite seulement $\mathcal{O}(\max\{N^0, \max_k\{N_k\}\})$ quantité de mémoire pour la résolution de (V.10) et (V.5), où N_k (cardinal de \mathcal{N}_k) est le nombre de nœuds à l'intérieur du sous-graphe \mathcal{G}_k .

4 Conclusion

Jusqu'à présent, les méthodes multiéchelles n'existent pas pour les réseaux électriques à notre connaissance, malgré leur grand potentiel dans ce contexte. En effet, elles apportent de la rapidité lors de la réalisation de nombreuses simulations, un gain de mémoire non négligeable, et surtout la possibilité de reconnexion topologiques¹¹.

Nous avons développé, dans ce chapitre, une méthode multiéchelles adaptée à ce contexte de réseau électrique de grande taille. L'espace continu $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$ (avec $d \in \{1, 2, 3\}$) des précédents chapitres a laissé place ici à un espace discret, de très grande dimension : le domaine de calcul est $\Omega \subsetneq \mathbb{Z}^d$, avec $1 \leq d \leq N^\varepsilon - 1$ (cas où tous les nœuds sont connectés entre eux). Les variantes de MsFEM utilisées pour les deux contextes précédents, ont été remplacées ici par une méthode pour des problèmes discrets où la notion d'éléments finis a disparu. L'espace discret implique aussi la disparition du problème des conditions aux limites artificielles, qui a nécessité la mise en place de techniques spécifiques dans les chapitres précédents. Cette difficulté n'apparaît pas dans ce contexte puisque, comme pour le cas de la dimension un en milieu continu, le bord des cellules grossières est constitué de points isolés (voir [44]). La seule condition aux limites imposée dans (V.5) est $\delta_{i,j}$. Cette méthode multiéchelles offre la possibilité de réaliser, à moindre coût, de nombreuses simulations afin d'étudier le comportement du réseau face à des modifications locales ou globales du réseau. La méthodologie multiéchelles est donc avantageuse pour la simulation de réseaux électriques ayant de nombreux composants.

Cette méthode multiéchelles doit être testée sur un réseau avec différents termes

¹¹Dans un réseau, il est intéressant de pouvoir retirer et/ou ajouter une connexion qui le modifie localement, voire même globalement et simuler l'impact de cette modification.

sources afin d'observer, par exemple, l'impact d'une défaillance de générateur. Il est aussi possible de simuler la réaction du réseau face à des changements de connexions ou de composants.

Réseaux de distribution : modélisation et méthode multiéchelles

Dans ce chapitre, nous considérons un réseau de distribution de biens. Ce réseau est constitué d'un ensemble de zones échangeant (transferts dans les deux sens) différents produits avec d'autres zones. Le nombre de zones étant très grand, l'idée est d'utiliser une méthode multiéchelles, comme dans le cas d'un réseau électrique (voir chapitre V), mais pour un modèle écrit sous la forme d'un système d'équations différentielles couplées. Nous proposons de modéliser et de développer une méthode de résolution pour ce type de réseau. Nous présentons dans une première partie le problème. Ensuite, dans une deuxième partie, nous modélisons un réseau de distribution de biens par un modèle général pour un unique produit. Ce modèle est ensuite étendu à plusieurs produits couplés. Dans une troisième partie, nous développons une méthode multiéchelles pour la résolution de ce problème.

1 Présentation du problème

1.1 Contexte

L'objectif ultime est de simuler les échanges de multiples produits, par exemple les matières premières, sur la planète. Chaque zone pouvant potentiellement interagir avec toutes les autres dans le réseau, la dimension de l'espace est de l'ordre du nombre de ces zones¹. Les flux de produits sont soit des commandes soit des livraisons. Chaque zone consomme (et produit éventuellement) des biens qu'elle peut échanger avec ses voisins dans le réseau. Par un bien, nous entendons tout produit échangeable avec une autre zone. Un équilibre mondial est généralement constaté, mais l'augmentation généralisée de la consommation des pays émergents (Chine, Inde, etc) met à mal cet équilibre. De plus, des tensions géopolitiques font que des producteurs se retirent parfois violemment du réseau. Par exemple, en janvier 2009, l'Ukraine bloque le transit de gaz en provenance de la Russie, qui fournit 40% du besoin en gaz de l'Europe, dont la quasi-totalité (80%)

¹Remarquons qu'il ne s'agit pas d'une chaîne où chaque point n'échange qu'avec le ou les point(s) suivant(s).

transite par l'Ukraine. En représaille, la Russie stoppe la livraison de gaz les mois suivants générant une crise. Ceci a des répercussions évidemment non négligeables : la France a subi une baisse de plus de 70%, alors que la Pologne a pu compenser en ayant recours à un autre fournisseur. Le réseau mondial voit transiter un ensemble de matières premières (pétrole, gaz, fioul, charbon, combustible nucléaire, électricité, etc). Tous ces produits sont consommés de diverses manières : en tant que produit fini (gaz, fioul, charbon, électricité par exemple) ou encore comme produit dérivé pour créer de l'électricité. Le combustible nucléaire produit de l'électricité dans des centrales nucléaires, le charbon et le gaz dans des centrales thermiques. La particularité de l'électricité par rapport à tous les autres produits est la difficulté de stockage, ce qui rend la prévision de consommation et de production extrêmement importante. La simulation du réseau de distribution mondial est donc d'importance stratégique.

1.2 Apport

La gestion des chaînes de production est souvent étudiée (voir [55, 33, 6]). Il s'agit de chaînes où une machine transmet un produit à celle qui suit, et éventuellement, dans certains cas, en passant par deux autres machines intermédiaires traitant le produit simultanément. Dans [21], les auteurs modélisent un processus avec trois activités (consolidation, fabrication et distribution) et cherchent à calculer le temps de réponse minimum pour délivrer le produit à la destination finale. Le but ici est d'étudier un réseau de distribution de biens où chaque échange, bidirectionnel, se fait pour plusieurs produits, entre deux zones quelconques. En particulier, nous souhaitons étudier la mise en place théorique d'un outil de simulation fondé sur un modèle permettant l'ajout de centres de production, l'évolution du réseau à moyen et long terme, la stabilité de celui-ci en réponse à des changements brusques, etc. Chaque zone est caractérisée par son stock, sa production, sa consommation et sa capacité à échanger avec les autres. A l'aide d'une méthode multiéchelles, il est possible de réaliser plusieurs simulations d'un réseau de distribution, et d'inclure des effets de différentes échelles. Dans ce chapitre, le modèle que nous proposons simule un tel réseau de distribution de biens. Nous développons ensuite une méthode multiéchelles, issue de la méthodologie, qui permet de simuler ce type de problèmes complexes par le modèle proposé sur de grands réseaux.

2 Modélisation d'un réseau de distribution de biens

Nous modélisons ici un réseau de distribution de biens. Le réseau est un domaine constitué de zones reliées entre elles par des échanges. Lorsque le réseau correspond à la planète entière, il est nécessairement fermé². Chaque zone d'échange est assimilée à un point et deux zones échangeant un produit sont reliées par des lignes. Associons à ce réseau un graphe \mathcal{G} (voir [22, 54]). Ce graphe est constitué de points, appelés nœuds, connectés par des lignes, appelées branches (voir chapitre V pour les définitions). Il est donc composé d'un ensemble \mathcal{N} de nœuds, notés \mathbf{x}_α et d'un ensemble \mathcal{B} de branches. Une branche est un couple de nœuds $[\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta]$ qui correspond à une connexion entre les nœuds \mathbf{x}_α et \mathbf{x}_β . Remarquons que, comme dans le chapitre V, le nombre de branches peut être différent du nombre de nœuds. Néanmoins, ici une zone peut *a priori* livrer un produit

²Les échanges en dehors de notre planète sont négligés ici.

à une autre zone, puis commander à celle-ci ce même produit. Les interactions entre les zones sont donc à double sens. Nous supposons alors que le graphe \mathcal{G} est non orienté³.

Définition 7. *Un graphe \mathcal{G} est dit non orienté si pour tous les nœuds $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta \in \mathcal{N}$, l'identification $[\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta] = [\mathbf{x}_\beta, \mathbf{x}_\alpha]$ est satisfaite.*

Les produits sont échangés entre les différents nœuds. Les nœuds sont connectés s'il existe un moyen d'échanger des produits entre eux, comme une route, un pipeline, etc, c'est-à-dire que la branche entre ces nœuds existe s'il y a un échange potentiel entre eux. Il est possible de convenir que des nœuds soient connectés entre eux, alors qu'il n'y a aucun échange. Il est ensuite plus facile d'ajouter une voie d'échange si la branche existe déjà dans le graphe. Nous appelons nœud voisin d'un nœud \mathbf{x}_α un des nœuds avec lequel \mathbf{x}_α est connecté. Nous considérons que les échanges entre une zone et elle-même sont nuls, c'est-à-dire que le graphe est sans boucle.

Définition 8. *Une boucle est une branche partant d'un nœud et arrivant sur lui-même, c'est-à-dire une branche de la forme $[\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\alpha]$.*

Comme nous considérons plusieurs produits, si \mathcal{G}^p désigne le graphe pour le produit p constitué de l'ensemble \mathcal{N}^p de nœuds et \mathcal{B}^p de branches, le graphe \mathcal{G} pour l'ensemble des produits est alors constitué des ensembles $\mathcal{N} = \cup_p \mathcal{N}^p$ et $\mathcal{B} = \cup_p \mathcal{B}^p$. Notons N^ε la somme du nombre de nœuds dans chaque graphe \mathcal{G}^p , c'est-à-dire la somme des cardinaux des \mathcal{N}^p . Remarquons que pour un seul produit N^ε est le nombre de nœuds, comme dans les autres chapitres. Pour plusieurs produits, N^ε est le nombre de nœuds de \mathcal{G} si une zone est représentée par des nœuds distincts pour des produits différents, c'est-à-dire que l'on considère que les ensembles \mathcal{N}^p sont disjoints.

Remarque : Comme N^ε est la somme sur les produits p des cardinaux des \mathcal{N}^p , il peut exister α, β tels que \mathbf{x}_α et \mathbf{x}_β représentent la même zone mais pour deux produits différents ; ils sont alors connectés⁴ si un des produits permet de fabriquer l'autre.

En chaque nœud, une certaine quantité de produit p est disponible. Notons ρ_α^p cette quantité. Elle évolue en fonction des différents échanges qui se produisent avec ses voisins.

2.1 Modèle pour un produit

Nous cherchons ici à modéliser les échanges qui se traduisent par une évolution de ρ_α^p . Cette évolution dépend des quantités de produit p qui entrent et sortent de la zone située en \mathbf{x}_α , ainsi que des activités à l'intérieur de cette zone. Introduisons les notations suivantes :

- $q_{\alpha,\beta}^p$ est la quantité de produit p livré par le nœud \mathbf{x}_α au nœud \mathbf{x}_β ,
- $\tilde{q}_{\alpha,\beta}^p$ est la quantité de produit p arrivant au nœud \mathbf{x}_β en provenance du nœud \mathbf{x}_α ; comme il n'y a pas de perte en chemin, cela signifie que

$$\tilde{q}_{\alpha,\beta}^p (t + \tau_{\alpha,\beta}^p (q_{\alpha,\beta}^p(t))) = q_{\alpha,\beta}^p(t),$$

où $\tau_{\alpha,\beta}^p (q_{\alpha,\beta}^p(t))$ est le temps d'acheminement et de traitement de $q_{\alpha,\beta}^p(t)$,

³Il n'y a pas de sens privilégié.

⁴Remarquons que le graphe est bien sans boucle car les deux points sont distincts même s'il représente la même zone.

- $Q_{\alpha+}^p$ est la quantité totale de produit p entrant au nœud \mathbf{x}_α , c'est-à-dire

$$Q_{\alpha+}^p(t) = \sum_{\beta \neq \alpha} \tilde{q}_{\beta,\alpha}^p(t) = \sum_{\beta \neq \alpha} q_{\beta,\alpha}^p(t - \tau_{\alpha,\beta}^p(t)), \quad (\text{VI.1})$$

- $Q_{\alpha-}^p$ est la quantité totale de produit⁵ p sortant du nœud \mathbf{x}_α , c'est-à-dire

$$Q_{\alpha-}^p(t) = \sum_{\beta \neq \alpha} q_{\alpha,\beta}^p(t),$$

- Π_α^p est la production de produit p au nœud \mathbf{x}_α ,
- c_α^p est la consommation de produit p au nœud \mathbf{x}_α .

Ces flux sont représentés sur la figure FIG. VI.1 ; $Q_{\alpha+}^p + \Pi_\alpha^p$ est le flux entrant, $Q_{\alpha-}^p + c_\alpha^p$ est le flux sortant.

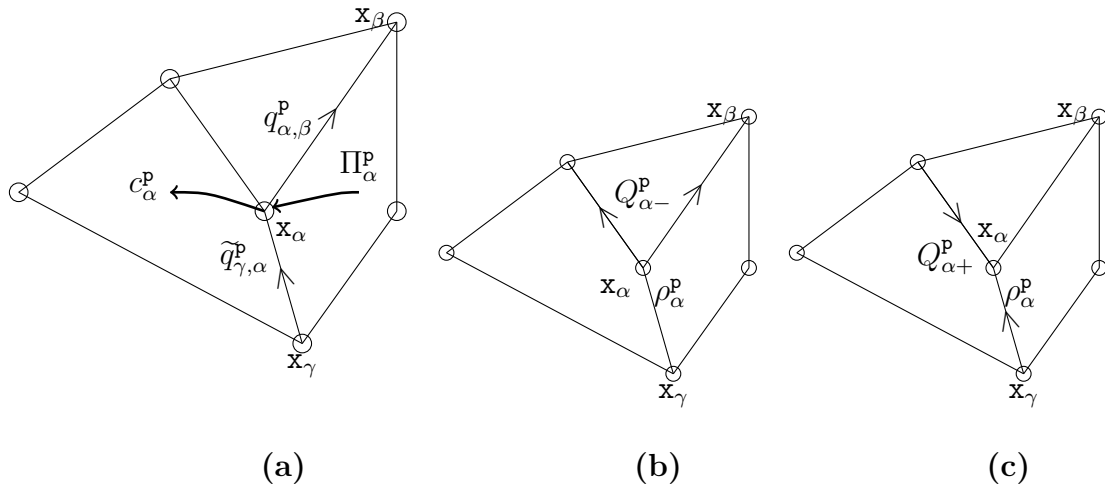


FIG. VI.1 – Exemple d'un graphe de réseau de distribution de biens autour d'un nœud \mathbf{x}_α pour un produit p . — (a) Au nœud \mathbf{x}_α , c_α^p est la quantité de produit p consommée, Π_α^p est la quantité produite, $q_{\alpha,\beta}^p$ est la quantité envoyée par le nœud \mathbf{x}_α au nœud \mathbf{x}_β et $\tilde{q}_{\gamma,\alpha}^p$ est celle qui arrive du nœud \mathbf{x}_γ vers le nœud \mathbf{x}_α . — (b) Au nœud \mathbf{x}_α , ρ_α^p est la quantité de produit p disponible et $Q_{\alpha-}^p$ est celle qui sort du nœud \mathbf{x}_α pour être distribuée aux nœuds voisins. — (c) Au nœud \mathbf{x}_α , ρ_α^p est la quantité de produit p disponible et $Q_{\alpha+}^p$ est celle qui entre au nœud \mathbf{x}_α en provenance des nœuds voisins.

Remarques :

- Il s'agit en fait de sommes sur les $\beta \neq \alpha$ tels que \mathbf{x}_β soit connecté à \mathbf{x}_α . En effet, si \mathbf{x}_α et \mathbf{x}_β ne sont pas connectés, alors $q_{\alpha,\beta}^p(t)$ est nul pour tout t .
- Si le temps d'acheminement et de traitement est instantané, alors $\tau_{\alpha,\beta}^p$ est nul et $\tilde{q}_{\alpha,\beta}^p(t) = q_{\alpha,\beta}^p(t)$.
- La fonction Π est une fonction majorée puisque la production est limitée par une capacité maximale.

⁵Il s'agit de la quantité retirée du stock avant d'être traitée et livrée.

Pour chaque produit p , la loi de conservation se traduit (voir [13, 55]) par l'évolution temporelle de la quantité disponible (stock) ρ_α^p au nœud \mathbf{x}_α (pour $\alpha = 1, \dots, N^\varepsilon$). Elle est donnée par la quantité de produit provenant des nœuds voisins à laquelle il faut ajouter la production et retirer la quantité de produit qui part et la consommation, c'est-à-dire que ρ_α^p satisfait l'équation suivante :

$$\frac{d\rho_\alpha^p}{dt} = Q_{\alpha+}^p - Q_{\alpha-}^p + \Pi_\alpha^p - c_\alpha^p. \quad (\text{VI.2})$$

Ceci s'écrit pour le vecteur ρ^p de composantes ρ_α^p :

$$\frac{d\rho^p}{dt} = Q_+^p - Q_-^p + \Pi^p - c^p \quad \text{dans } \mathcal{G}^p, \quad (\text{VI.3})$$

où Q_+^p, Q_-^p, Π^p et c^p sont les vecteurs de composantes respectives $Q_{\alpha+}^p, Q_{\alpha-}^p, \Pi_\alpha^p$ et c_α^p .

Afin de fermer le système, il faut définir les liens (échanges) entre les nœuds et les contraintes à appliquer sur chaque nœud. Pour cela, nous définissons des variables de contrôles.

2.2 Contrôles

Nous définissons en premier lieu les paramètres permettant les échanges de produits et donc caractérisent le réseau de distribution de biens. La production Π_α^p existe si le nœud \mathbf{x}_α est capable de produire le produit p . La consommation c_α^p est une donnée du problème.

D'abord, nous voulons que le stock ρ_α^p de produit p au nœud \mathbf{x}_α ne tombe pas en dessous d'un certain seuil, noté ρ_α^{p*} . Ce seuil est une réserve de produit p qui correspond, par exemple, à la consommation de ce produit sur un petit intervalle de temps permettant de "tenir" durant l'acheminement⁶ de la "livraison". Supposons qu'au nœud \mathbf{x}_α le produit p est traité avec une vitesse de traitement v_α^p et avec une capacité de traitement maximale μ_α^p . Ceci signifie que le nœud \mathbf{x}_α a la capacité de délivrer le produit p à tous ses nœuds voisins avec le flux suivant (voir [54]) :

$$f_\alpha^p = f_\alpha^p(\rho_\alpha^p) = \min \{ \mu_\alpha^p, v_\alpha^p(\rho_\alpha^p - \rho_\alpha^{p*})_+ \},$$

comme sur la figure FIG. VI.2. Elle représente la quantité maximale de produit p que le nœud \mathbf{x}_α peut envoyer.

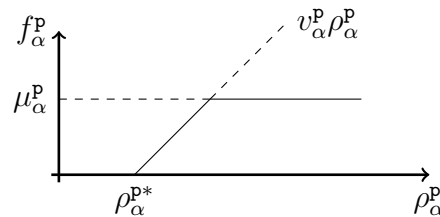


FIG. VI.2 – Forme de la fonction $f_\alpha^p(\rho_\alpha^p)$ du flux maximal de produit p au nœud \mathbf{x}_α .

⁶L'acheminement n'est pas instantané comme dans un fil électrique (voir chapitre V).

Nous définissons maintenant le taux auquel le nœud \mathbf{x}_α délivre le produit \mathbf{p} à chacun de ses nœuds voisins. Comme nous voulons intégrer le fait que le nœud receveur peut contrôler le taux auquel il reçoit le produit, nous introduisons la variable de contrôle $y_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}$, qui représente la demande de produit \mathbf{p} au nœud \mathbf{x}_α par le nœud \mathbf{x}_β . Cette quantité doit être nulle lorsque les nœuds \mathbf{x}_α et \mathbf{x}_β ne sont pas connectés. Posons $Y_\alpha^{\mathbf{p}}$ la demande totale de produit \mathbf{p} au nœud \mathbf{x}_α par ses nœuds voisins, c'est-à-dire

$$Y_\alpha^{\mathbf{p}}(t) = \sum_{\beta=1}^{N^\varepsilon} y_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}(t).$$

Nous définissons enfin la quantité

$$q_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}(t) = \min \{d_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}(t)f_\alpha^{\mathbf{p}}, y_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}(t)\}, \quad (\text{VI.4})$$

où $d_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}$ est la proportion de produit \mathbf{p} que le nœud \mathbf{x}_α décide d'envoyer au le nœud \mathbf{x}_β . Le nœud \mathbf{x}_α ne peut délivrer au nœud \mathbf{x}_β plus de produit \mathbf{p} que ce dernier n'en a besoin.

Remarque : Si les nœuds \mathbf{x}_α et \mathbf{x}_β ne sont pas connectés, alors $q_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}} = \min \{d_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}f_\alpha^{\mathbf{p}}, 0\}$ est nul. De plus, si $\rho_\alpha^{\mathbf{p}}$ est nul, alors $f_\alpha^{\mathbf{p}}$ est nul et ainsi $q_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}$ est nul pour tout β .

La matrice de répartition (de distribution) $D^{\mathbf{p}}$ du produit \mathbf{p} , dont les coefficients sont les $d_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}$, reste à définir. Elle vérifie cependant

$$\sum_{\beta \neq \alpha} d_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}} = 1, \quad \text{et } d_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}} = 0 \quad \text{si } \mathbf{x}_\beta \text{ et } \mathbf{x}_\alpha \text{ ne sont pas connectés, en particulier si } \beta = \alpha. \quad (\text{VI.5})$$

Dans le contexte de réseaux de distribution de biens auquel nous sommes intéressés, le coefficient $d_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}$ de la matrice de répartition de produit \mathbf{p} est basé en terme de stratégies politiques, économiques, de capacités techniques, etc. Par exemple, nous pouvons choisir de ne pas livrer un voisin, bien qu'il ait fait une demande, pour différentes raisons : offre non suffisante, désaccord politique, difficultés techniques d'acheminement, etc. Dans [12], plusieurs ordres de priorités sont proposés lorsque les commandes sont traitées les unes à la suite des autres. Afin que la quantité délivrée $q_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}$ soit proportionnelle à la demande $y_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}$, nous proposons⁷ par exemple la matrice de répartition $D^{\mathbf{p}}$ du produit \mathbf{p} donnée par :

$$d_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}} = \frac{y_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}}{Y_\alpha^{\mathbf{p}}}. \quad (\text{VI.6})$$

Autrement dit, le nœud \mathbf{x}_α répartit équitablement ses livraisons entre ses "clients". De plus, remarquons que les coefficients de la matrice $D^{\mathbf{p}}$ satisfont bien la condition (VI.5).

Le flux sortant $Q_{\alpha-}^{\mathbf{p}}$ de produit \mathbf{p} au nœud \mathbf{x}_α est ensuite déterminé à l'aide de (VI.6) par :

$$Q_{\alpha-}^{\mathbf{p}}(t) = \min \{f_\alpha^{\mathbf{p}}, Y_\alpha^{\mathbf{p}}(t)\} = \min \{\mu_\alpha^{\mathbf{p}}, v_\alpha^{\mathbf{p}}\rho_\alpha^{\mathbf{p}}, Y_\alpha^{\mathbf{p}}(t)\}.$$

En conséquence, avec le choix (VI.6), si la capacité $f_\alpha^{\mathbf{p}}$ excède la demande totale $Y_\alpha^{\mathbf{p}}$, toutes les demandes des nœuds voisins seront satisfaites. D'un autre côté, ceci permet à chaque nœud voisin \mathbf{x}_β de recevoir le produit \mathbf{p} d'autres nœuds, à condition que la capacité $f_\alpha^{\mathbf{p}}$ et la demande $y_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}$ soient non nulles.

⁷Cette stratégie est un choix et n'est pas un outil de modélisation.

Remarque : Les $q_{\beta,\alpha}^p$ sont connus en tous les nœuds et sont définis par (VI.4). Les flux entrants externes $Q_{\alpha+}^p$ résultent alors de (VI.1), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} Q_{\alpha+}^p(t) &= \sum_{\beta \neq \alpha} q_{\beta,\alpha}^p(t - \tau_{\alpha,\beta}^p) \\ &= \sum_{\beta \neq \alpha} y_{\beta,\alpha}^p(t - \tau_{\alpha,\beta}^p) \min \left\{ \frac{f_{\beta}^p}{Y_{\beta}^p(t - \tau_{\alpha,\beta}^p)}, 1 \right\} \\ &= \sum_{\beta \neq \alpha} d_{\beta,\alpha}^p(t - \tau_{\alpha,\beta}^p) Q_{\beta-}^p(t - \tau_{\alpha,\beta}^p) \quad (\text{par le choix (VI.6)}). \end{aligned}$$

Il est important de spécifier la stratégie de la demande, c'est-à-dire de définir les quantités $y_{\alpha,\beta}^p$. De même que pour $d_{\alpha,\beta}^p$, la demande est une fonction de différents types de facteurs tels que des stratégies politiques, le coût des produits, leur disponibilités, etc. Ici, nous proposons certaines règles possibles. La commande du nœud \mathbf{x}_{β} au nœud \mathbf{x}_{α} , pour des nœuds connectés, est effective si et seulement si le stock est en dessous du seuil ρ_{β}^{p*} , ce qui signifie que :

$$y_{\alpha,\beta}^p = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{\tau}_{\beta}^p} (\rho_{\beta}^{p*} - \rho_{\beta}^p) \tilde{y}_{\alpha,\beta}^p & \text{quand } \rho_{\beta}^p < \rho_{\beta}^{p*}, \\ 0 & \text{quand } \rho_{\beta}^p \geq \rho_{\beta}^{p*}, \end{cases}$$

soit

$$y_{\alpha,\beta}^p = \frac{1}{\tilde{\tau}_{\beta}^p} (\rho_{\beta}^{p*} - \rho_{\beta}^p)_+ \tilde{y}_{\alpha,\beta}^p,$$

où • $(\cdot)_+$ signifie la partie positive,

- $\tilde{\tau}_{\beta}^p$ est le temps de retour au stock "minimal" ρ_{β}^{p*} et
- $\tilde{y}_{\alpha,\beta}^p$ désigne la répartition de la demande telle que $\sum_{\alpha \neq \beta} \tilde{y}_{\alpha,\beta}^p = 1$.

Le seuil ρ_{β}^{p*} doit être tel que ρ_{β}^p soit strictement positif en tout temps, donc il faut⁸ par exemple que, pour tout t : $\sum_{\beta} y_{\beta,\alpha}^p(t - \tau_{\beta,\alpha}^p) \leq \rho_{\alpha}^{p*}(t)$. Autrement dit, la réserve au temps t doit au moins couvrir ce qui est attendu au temps t . Nous remarquons que les différentes quantités mentionnées précédemment peuvent être prises en compte à travers les coefficients $\tilde{y}_{\alpha,\beta}^p$ de la matrice de répartition de la demande \tilde{Y}^p . La quantité $\tilde{y}_{\alpha,\beta}^p$ dépend de la stratégie : coût, disponibilité du produit, etc. De plus, si $\rho_{\alpha}^p = 0$, alors il est souhaitable d'avoir $y_{\alpha,\beta}^p$ nul pour tout \mathbf{x}_{β} , en prenant, par exemple, $\tilde{y}_{\alpha,\beta}^p$ nul pour tout \mathbf{x}_{β} . Nous pouvons vérifier que cela ne contredit pas la condition sur $\tilde{y}_{\alpha,\beta}^p$ puisque la somme se fait sur les α .

Le stock ρ^p est ainsi entièrement défini. Remarquons que les flux s'écrivent :

$$\begin{aligned} Q_{\alpha+}^p(t) &= \frac{1}{\tilde{\tau}_{\alpha}^p} (\rho_{\alpha}^{p*} - \rho_{\alpha}^p)_+(t - \tau_{\alpha,\beta}^p) \\ &\quad \times \sum_{\beta=1}^{N^e} \frac{\tilde{y}_{\alpha,\beta}^p(\rho_{\beta}^p(t - \tau_{\alpha,\beta}^p))}{Y_{\beta}^p(t - \tau_{\alpha,\beta}^p)} \min \{ \mu_{\beta}^p, v_{\beta}^p \rho_{\beta}^p(t - \tau_{\alpha,\beta}^p), Y_{\beta}^p(t - \tau_{\alpha,\beta}^p) \} \\ &= Q_{\alpha+}^p(\rho^p(t - \tau_{\alpha,\beta}^p), t). \end{aligned}$$

⁸Le stock doit être suffisant pour compenser les commandes du nœud \mathbf{x}_{β} non livrées.

et

$$\begin{aligned} Q_{\alpha-}^{\mathbf{p}}(t) &= \min \left\{ \mu_{\alpha}^{\mathbf{p}}, v_{\alpha}^{\mathbf{p}} \rho_{\alpha}^{\mathbf{p}}(t), \sum_{\beta=1}^{N^{\varepsilon}} \left(\frac{1}{\tilde{\tau}_{\beta}^{\mathbf{p}}} (\rho_{\beta}^{\mathbf{p}*} - \rho_{\beta}^{\mathbf{p}})_{+}(t) \tilde{y}_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}(\rho_{\alpha}^{\mathbf{p}}(t)) \right) \right\} \\ &= Q_{\alpha-}^{\mathbf{p}}(\rho^{\mathbf{p}}(t), t). \end{aligned}$$

Finalement (VI.2) devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{\alpha}^{\mathbf{p}}}{dt} &= \underbrace{\frac{1}{\tilde{\tau}_{\alpha}^{\mathbf{p}}} (\rho_{\alpha}^{\mathbf{p}*} - \rho_{\alpha}^{\mathbf{p}})_{+} \sum_{\beta=1}^{N^{\varepsilon}} \frac{\tilde{y}_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}(\rho_{\beta}^{\mathbf{p}})}{Y_{\beta}^{\mathbf{p}}} \min \{ \mu_{\beta}^{\mathbf{p}}, v_{\beta}^{\mathbf{p}} \rho_{\beta}^{\mathbf{p}}, Y_{\beta}^{\mathbf{p}} \}}_{Q_{\alpha+}^{\mathbf{p}}(\rho^{\mathbf{p}}(t-\tau_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}), t)} (t - \tau_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}}) \\ &\quad - \underbrace{\min \left\{ \mu_{\alpha}^{\mathbf{p}}, v_{\alpha}^{\mathbf{p}} \rho_{\alpha}^{\mathbf{p}}, \sum_{\beta=1}^{N^{\varepsilon}} \left(\frac{1}{\tilde{\tau}_{\beta}^{\mathbf{p}}} (\rho_{\beta}^{\mathbf{p}*} - \rho_{\beta}^{\mathbf{p}})_{+} \tilde{y}_{\alpha,\beta}^{\mathbf{p}} \right) \right\}}_{Q_{\alpha-}^{\mathbf{p}}(\rho^{\mathbf{p}}(t), t)} (t) + \Pi_{\alpha}^{\mathbf{p}}(t) - c_{\alpha}^{\mathbf{p}}(t). \end{aligned} \quad (\text{VI.7})$$

Lorsque les paramètres $\tilde{\tau}^{\mathbf{p}}$, $\mu^{\mathbf{p}}$, $v^{\mathbf{p}}$, $\tau^{\mathbf{p}}$ et la matrice $\tilde{Y}^{\mathbf{p}}$ sont fixés, puis lorsque les valeurs en $t \leq t_n$ de $\rho^{\mathbf{p}}$, $\rho^{\mathbf{p}*}$ sont connues, une discrétisation temporelle de (VI.7) écrit sous forme vectorielle nous donne la valeur de $\rho^{\mathbf{p}}$ à l'instant t_{n+1} . Remarquons que $\Pi^{\mathbf{p}}$ et $c^{\mathbf{p}}$ à l'instant t_n sont des fonctions données, dépendantes de $\rho^{\mathbf{p}}(t_n)$.

2.3 Couplages de produits

Nous nous intéressons ici à la modélisation d'un réseau de distribution de biens reliant le produit électricité et d'autres produits. Notons

- $\mathbf{p} = e$ le produit électricité,
- \mathbf{p} les autres produits.

Le produit électricité vérifie les hypothèses suivantes :

1. L'électricité est un produit très faiblement stockable. Néanmoins, le modèle reste inchangé ; le stock est simplement très petit à tout instant.
2. Les centrales électriques thermiques sont des centrales utilisant du fioul, du charbon, etc, c'est-à-dire qu'elles consomment d'autres matières premières pour produire de l'électricité. Ceci donne les relations de couplage suivantes :

$$c^{\mathbf{p}} = c^{\mathbf{p}}(\Pi^e) \text{ et } \Pi^e = \Pi^e(\rho^e, \rho^{\mathbf{p}}, c^e). \quad (\text{VI.8})$$

3. La production d'électricité est quasi-instantannée en réponse à la consommation d'électricité, ce qui implique $\tau_{\alpha,\beta}^e = 0$ pour tout α, β .
4. La production d'électricité d'une centrale nucléaire est minorée car elle ne peut jamais être arrêtée véritablement, sa production ne peut qu'être limitée à une valeur minimale de fonctionnement.
5. La production d'électricité est la somme des productions par les différents types de centrales (qui utilisent différentes matières premières).

Considérons la modélisation d'un réseau de distribution de biens à deux catégories de produits, par exemple l'électricité et le charbon. Ces deux produits suivent le modèle

(VI.3). Le modèle pour les deux produits est alors le système d'équations couplées :

$$\begin{cases} \frac{d\rho^p}{dt} = Q_+^p(\rho^p) - Q_-^p(\rho^p) + \Pi^p(\rho^p) - c^p(\Pi^e(\rho^e, \rho^p, c^e)) & \text{dans } \mathcal{G}^p, \\ \frac{d\rho^e}{dt} = Q_+^e(\rho^e) - Q_-^e(\rho^e) + \Pi^e(\rho^e, \rho^p, c^e) - c^e & \text{dans } \mathcal{G}^e, \end{cases} \quad (\text{VI.9})$$

où les termes de couplage sont les consommations et les productions. Ceci s'écrit pour le vecteur $\rho = \begin{pmatrix} \rho^p \\ \rho^e \end{pmatrix}$:

$$\frac{d\rho}{dt} = Q_+(\rho) - Q_-(\rho) + \Pi(\rho) - c(\rho) \quad \text{dans } \mathcal{G}, \quad (\text{VI.10})$$

où la production Π est composée de la production $\Pi^e(\rho^e, \rho^p, c^e)$ d'électricité et de la production $\Pi^p(\rho^p, c^p)$ de charbon. Les dépendances par rapports aux paramètres sont implicites. Le système (VI.10) devient le modèle général pour un ensemble de produits $\{\mathbf{p}_m\}_m$ en prenant le vecteur ρ composé des vecteurs $\{\rho^{p_m}\}_m$, c'est-à-dire pour le vecteur $\rho = \begin{pmatrix} \rho^{p_1} \\ \vdots \end{pmatrix}$.

3 La méthode multiéchelles

La résolution de (VI.3) ou de (VI.10) implique la résolution d'un problème de réseau à l'échelle des nœuds du graphe. Notons $\varepsilon = \frac{1}{N^\varepsilon - 1}$ la longueur caractéristique de cette échelle. Lorsque des simulations sont réalisées au niveau planétaire, les nœuds et les branches sont très nombreux. La taille $N^\varepsilon \times N^\varepsilon$ du système⁹ (VI.3) à résoudre devient très grande. De plus, en considérant plusieurs produits, la taille du système d'équations couplées (VI.10) est alors extrêmement grande. Le but ici est de réduire la taille du système¹⁰ (VI.10) en utilisant une méthode multiéchelles. En effet, une méthode multiéchelles permet d'obtenir une solution approchée en résolvant un système de petite taille $N^0 \times N^0$. Ceci est possible grâce aux précalculs de vecteurs de base multiéchelles qui contiennent l'information à petite échelle ε . Cette réduction de taille du système permet donc de faire des calculs rapides, ce qui rend possible la simulation de nombreuses situations. En effet, lorsque le précalcul des vecteurs de base est réalisé, la résolution du système est très rapide, ce qui rend possible de multiples résolutions.

Cherchons une solution approchée $\rho^\varepsilon \in X^\varepsilon$ avec $X^\varepsilon = \mathbb{R}^{N^\varepsilon}$. Notons $\{\psi^\alpha\}_{\alpha=1, \dots, N^\varepsilon}$ la base canonique de X^ε . Afin d'utiliser cette méthode, nous décomposons le domaine en sous-domaines. Le réseau est donc divisé en plusieurs parties reliées entre-elles par des points appelés nœuds grossiers (voir par exemple la figure FIG. VI.3). Le graphe non orienté \mathcal{G} est décomposé en sous-graphes¹¹ que nous notons \mathcal{G}_k . Autrement dit nous avons la décomposition suivante :

$$\mathcal{G} = \bigcup_k \mathcal{G}_k.$$

⁹Pour chaque nœud \mathbf{x}_α , les flux $Q_{\alpha+}^p, Q_{\alpha-}^p$ dépendent des valeurs de tous les ρ_β^p .

¹⁰Le système (VI.3) est un cas particulier de (VI.10).

¹¹Il s'agit des cellules grossières, notées génériquement K dans les premiers chapitres.

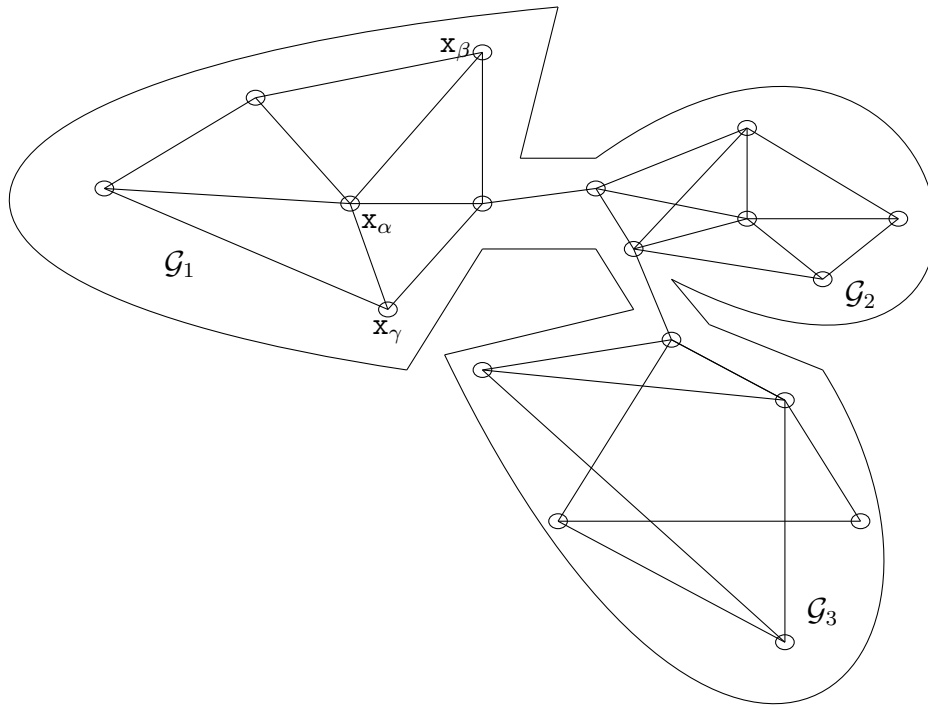


FIG. VI.3 – Décomposition de graphe en trois sous-graphes.

Un sous-graphe est lui aussi composé de nœuds et de branches. Dans \mathcal{G}_k , notons \mathcal{N}_k l'ensemble des nœuds et \mathcal{B}_k l'ensemble des branches.

Remarque : Si nous considérons un réseau différent par produits¹², chaque graphe $\mathcal{G}^{\mathcal{P}}$ est décomposé en sous-graphes $\mathcal{G}_k^{\mathcal{P}}$. et la dimension de X^ε est $N^\varepsilon = \sum_{\mathcal{P}} N^{\mathcal{P}}$, où $N^{\mathcal{P}}$ est le nombre de nœuds dans le graphe $\mathcal{G}^{\mathcal{P}}$.

Pour chaque sous-graphe \mathcal{G}_k , appelons porte un nœud de \mathcal{N}_k tel qu'il existe une branche qui connecte ce nœud à un nœud d'un autre sous-graphe. Notons \mathcal{P}_k l'ensemble des portes (nœuds grossiers) de \mathcal{G}_k , c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}_k = \{x_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha, \exists k' \neq k \text{ et } x_\beta \in \mathcal{N}_{k'}, \text{ tels que } [x_\alpha, x_\beta] \in \mathcal{B}_{k'}\}.$$

Ces nœuds sont donc communs à plusieurs sous-graphes. Les \mathcal{P}_k sont des ensembles non disjoints et supposés non vides. Une porte est connectée à d'autres nœuds de plusieurs sous-graphes. Elle peut être connectée à une autre porte, donc il peut y avoir plusieurs portes par sous-graphes, c'est-à-dire que \mathcal{P}_k n'est pas nécessairement un singleton. De plus, notons $\mathcal{P} = \cup_k \mathcal{P}_k$, l'ensemble des portes de \mathcal{G} et notons N^0 la somme des cardinaux des $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$, différent de la somme des cardinaux des \mathcal{P}_k .

Le temps de calcul dépend du nombre N^0 , il est donc souhaitable de décomposer le graphe \mathcal{G} en évitant un nombre de portes trop élevé pour avoir $N^0 \ll N^\varepsilon$. Dans la mesure du possible, il s'agit de regrouper les nœuds ayant beaucoup de connexions

¹²Les connexions sont différentes suivant les produits.

entre eux et de prendre des portes n'ayant pas trop de connexions avec les autres sous-graphes. Dans ce cas, comme à l'intérieur d'un pays les échanges sont très nombreux, il est logique de prendre le découpage en sous-graphes correspondant au découpage frontalier (ou éventuellement de regrouper plusieurs pays entre eux). Un sous-graphe peut donc être vu comme un pays communiquant avec plusieurs autres pays à travers des régions frontalières ou (aéro)portuaires¹³. Ces régions voisines à fort transit (et peu nombreuses) sont les portes de notre réseau.

Localement à un sous-graphe, les portes sont traitées comme nœuds de bord. D'un point de vue multiéchelles, ces sous-graphes constituent les éléments à l'échelle grossière et les portes constituent les nœuds grossiers¹⁴. Notons \mathcal{S}_k le complémentaire de \mathcal{P}_k dans \mathcal{N}_k , c'est-à-dire l'ensemble des nœuds de \mathcal{G}_k tel qu'il n'existe aucune connexion¹⁵ avec un nœud d'un autre sous-graphe :

$$\mathcal{S}_k = \{x_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha \text{ tels que } \forall k' \neq k, \forall x_\beta \in \mathcal{N}_{k'}, [x_\alpha, x_\beta] \notin \mathcal{B}_{k'}\}.$$

Il s'agit de nœuds "internes" à \mathcal{G}_k . Les ensembles \mathcal{S}_k sont disjoints puisque les nœuds de \mathcal{S}_k ne sont connectés à aucun nœud d'un autre sous-graphe. De plus, notons $\mathcal{S} = \cup_k \mathcal{S}_k$. Finalement :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= (\mathcal{N}, \mathcal{B}) = (\mathcal{S} \cup \mathcal{P}, \mathcal{B}), \\ \mathcal{G}_k &= (\mathcal{N}_k, \mathcal{B}_k) = (\mathcal{S}_k \cup \mathcal{P}_k, \mathcal{B}_k). \end{aligned}$$

Nous cherchons à approcher ρ dans l'espace X^ε par ρ^ε avec une méthode multiéchelles. La résolution du système (VI.10) se fait en trois étapes :

1. Précalcul des vecteurs de base multiéchelles Φ^i associés aux portes $x_i \in \mathcal{P}$;
2. Résolution du système global de taille $N^0 \times N^0$;
3. Post-traitement.

Le détail de ces étapes fait l'objet de cette partie.

3.1 Construction des vecteurs de base

Dans cette première étape, les vecteurs multiéchelles Φ^i portant l'information à petite échelle ε sont calculés localement, dans les sous-graphes. Notons X^0 l'espace engendré par ces vecteurs. Rappelons que l'opérateur de reconstruction \mathbf{R} , introduit dans le premier chapitre, définit l'opération de passage de la base de X^ε vers celle de X^0 . Il est construit en multipliant un vecteur à gauche par la matrice $P^\Phi \in \mathbb{R}^{N^\varepsilon \times N^0}$ de changement de base de X^ε dans la base de $X^0 \subset \mathbb{R}^{N^0}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbf{R} : X^0 &\rightarrow X^\varepsilon \\ x &\mapsto P^\Phi x, \end{aligned}$$

La matrice de passage P^Φ est définie par $P_{\alpha,i}^\Phi = \Phi_\alpha^i$ pour $i = 1, \dots, N^0$ et $\alpha = 1, \dots, N^\varepsilon$. L'image par \mathbf{R} des vecteurs de base multiéchelles de X^0 sont solutions de problèmes locaux aux sous-graphes. Notons $\mathbf{R}_k : X^0 \rightarrow \mathbb{R}^{N_k}$ la restriction aux nœuds de \mathcal{N}_k , c'est-à-dire que $\mathbf{R}_k(x)$ est le vecteur des composantes de $P^\Phi x$ correspondant seulement aux

¹³L'import-export transite par des "régions clés".

¹⁴Il s'agit des nœuds x_i dans les chapitres précédents.

¹⁵Il existe un chemin de connexion mais pas de connexion directe avec un autre sous-graphe.

éléments de \mathcal{N}_k . Pour toute porte $\mathbf{x}_i \in \mathcal{P}$, nous construisons un vecteur Φ^i tel que $\mathbf{R}(\Phi^i)$ soit une solution élémentaire du problème (VI.10).

Pour un produit \mathbf{p} , notons $\Phi^{i,\mathbf{p}}$ un vecteur de base multiéchelles prenant en compte le réseau. Il est associé à un nœud grossier \mathbf{x}_i . Pour tout k tel que $\mathbf{x}_i \in \mathcal{P}_k$, notons $\tilde{\Phi}^{i,\mathbf{p}}$ la restriction de $\mathbf{R}(\Phi^{i,\mathbf{p}})$ à \mathcal{N}_k . Ce vecteur est solution du problème (VI.3) localement au sous-graphe \mathcal{G}_k , c'est-à-dire qu'il vérifie le problème :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\Phi}^{i,\mathbf{p}}}{dt} + \mathbf{L}^\Phi(\tilde{\Phi}^{i,\mathbf{p}}) = 0 & \text{dans } \mathcal{G}_k, \\ \tilde{\Phi}^{i,\mathbf{p}}(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j} & \forall \mathbf{x}_j \in \mathcal{P}_k, \end{cases} \quad (\text{VI.11})$$

où

$$\mathbf{L}^\Phi(\tilde{\Phi}^{i,\mathbf{p}}) = Q_{+|\mathcal{G}_k}^\mathbf{p}(\tilde{\Phi}^{i,\mathbf{p}}) - Q_{-|\mathcal{G}_k}^\mathbf{p}(\tilde{\Phi}^{i,\mathbf{p}}) + \Pi^\mathbf{p}(\tilde{\Phi}^{i,\mathbf{p}}) - c^\mathbf{p}(\tilde{\Phi}^{i,\mathbf{p}}),$$

et la notation $\tilde{\Phi}^{i,\mathbf{p}}(\mathbf{x}_j)$ signifie la $\alpha^{\text{ième}}$ composante dans la base canonique de X^ε , où la porte \mathbf{x}_j est¹⁶ le nœud \mathbf{x}_α . Ces vecteurs représentent le comportement des sous-graphes en cas d'isolation et de réactions instantannées du réseau ($\tau_{\alpha,\beta}^\mathbf{p} = 0$). Pour plusieurs produits $\{\mathbf{p}_m\}_m$, la production et la consommation d'un produit peuvent dépendre du stock des autres produits lors d'un couplage comme dans (VI.8). Le vecteur $\Phi^{i,\mathbf{p}}$ doit, dans ce cas, dépendre des autres vecteurs $\{\Phi^{i,\mathbf{p}_m}\}_m$. Notons alors Φ^i le vecteur composé de tous les

vecteurs $\{\Phi^{i,\mathbf{p}_m}\}_m$, c'est-à-dire : $\Phi^i = \begin{pmatrix} \Phi^{i,\mathbf{p}_1} \\ \Phi^{i,\mathbf{p}_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$. La restriction $\tilde{\Phi}^i = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}^{i,\mathbf{p}_1} \\ \tilde{\Phi}^{i,\mathbf{p}_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$ de $\mathbf{R}(\Phi^i)$ à

\mathcal{N}_k vérifie (VI.10) localement :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\Phi}^i}{dt} + \mathbf{L}^\Phi(\tilde{\Phi}^i) = 0 & \text{dans } \mathcal{G}_k, \\ \tilde{\Phi}^i(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j} & \forall \mathbf{x}_j \in \mathcal{P}_k. \end{cases} \quad (\text{VI.12})$$

Avec les produits électricité et charbon, la production s'écrit $\Pi(\tilde{\Phi}^i) = \Pi(\tilde{\Phi}^{i,e}, \tilde{\Phi}^{i,\mathbf{p}}, c^e, c^\mathbf{p})$.

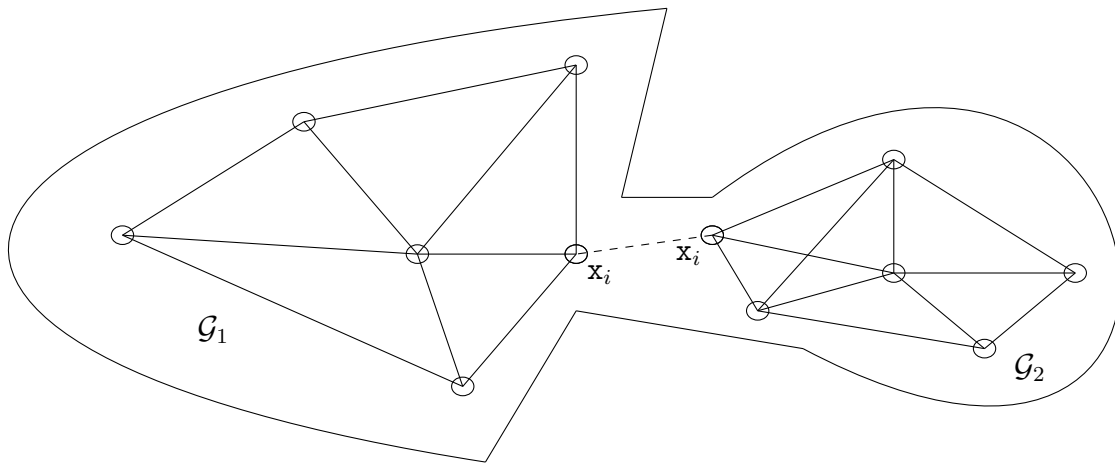
Remarque : Si le graphe \mathcal{G} est associé au produit \mathbf{p} , le sous-graphe \mathcal{G}_k dans (VI.11) est alors remplacé par $\mathcal{G}_k^\mathbf{p}$ et le sous-graphe \mathcal{G}_k dans (VI.12) est construit en concaténant tous les sous-graphes $\mathcal{G}_k^{\mathbf{p}_m}$.

Le système (VI.12) est de taille $N_k \times N_k$, où $N_k \ll N^\varepsilon$ est le nombre de nœuds dans \mathcal{G}_k , c'est-à-dire le cardinal de \mathcal{N}_k . Le vecteur $\mathbf{R}(\Phi^i)$ est donc déterminé pour tout nœud \mathbf{x}_α de \mathcal{N}_k , avec \mathcal{N}_k tel que $\mathbf{x}_i \in \mathcal{P}_k$, en résolvant le problème (VI.12) sur chaque¹⁷ sous-graphe \mathcal{G}_k . Pour les nœuds \mathbf{x}_α de \mathcal{N}_k , où \mathcal{N}_k est tel que $\mathbf{x}_i \notin \mathcal{P}_k$, la composante du vecteur $\mathbf{R}(\Phi^i)$ associée à l'élément ψ^α est nulle. Le support (voir FIG. VI.4) Λ_i de $\mathbf{R}(\Phi^i)$ est alors l'ensemble suivant :

$$\Lambda_i = \bigcup_k \{\mathcal{N}_k \text{ tel que } \mathbf{x}_i \in \mathcal{P}_k\}.$$

¹⁶Une porte est avant tout un nœud du graphe.

¹⁷Un problème à résoudre pour chaque k tel que $\mathbf{x}_i \in \mathcal{P}_k$.

FIG. VI.4 – Support Λ_i de $\mathbf{R}(\Phi^i)$: union de \mathcal{G}_1 et de \mathcal{G}_2 .

La résolution de (VI.12) se fait en cherchant $\mathbf{R}(\Phi^i) \in X^\varepsilon \times [0; T]$ tel que les $\mathbf{R}_k(\Phi^i)$ soient solutions des problèmes locaux (VI.12), sous la forme :

$$\mathbf{R}(\Phi^i(t)) = \sum_{\alpha=1}^{N^\varepsilon} \psi^\alpha \Phi_\alpha^i(t). \quad (\text{VI.13})$$

En fait, il suffit de sommer sur les indices α des nœuds des sous-graphes du support Λ_i de Φ^i , c'est-à-dire des \mathcal{G}_k tels que $\mathbf{x}_i \in \mathcal{P}_k$. Les productions et les consommations utilisées dans (VI.11) et (VI.12) sont des données dans \mathcal{G}_k pour tout temps. En supposant que Φ^i est constant sur des intervalles de la forme $]t_{m-1}; t_m]$, la résolution de ces problèmes sur ces intervalles nous donne les valeurs $\{\Phi_{\alpha,m}^i\}_{\alpha,m}$ de $\Phi_\alpha^i(t) = \sum_m \Phi_{\alpha,m}^i 1_{]t_{m-1}; t_m]}(t)$, et donc de

$$\mathbf{R}(\Phi^i(t)) = \sum_{\alpha,m} \Phi_{\alpha,m}^i \psi^\alpha 1_{]t_{m-1}; t_m]}(t).$$

En multipliant le terme $\frac{d\tilde{\Phi}^i}{dt} + \mathbf{L}^\Phi(\tilde{\Phi}^i)$ dans (VI.12) par un élément ψ^α de la base de X^ε , nous obtenons, pour tout α tel que $\mathbf{x}_\alpha \in \mathcal{N}_k$:

$$\left\langle \frac{d\tilde{\Phi}^i}{dt}, \psi^\alpha \right\rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon} + \left\langle \mathbf{L}^\Phi(\tilde{\Phi}^i), \psi^\alpha \right\rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{G}_k \times]t^{m-1}; t^m],$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon}$ désigne le produit scalaire usuel : $\langle r, s \rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon} = \sum_\alpha r_\alpha s_\alpha$. En introduisant la décomposition (VI.13) de $\tilde{\Phi}^i$, nous obtenons :

$$\sum_{\mathbf{x}_\beta \in \mathcal{N}_k} \frac{d\Phi_\beta^i(t)}{dt} \underbrace{\langle \psi^\beta, \psi^\alpha \rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon}}_{=0 \text{ pour } \alpha \neq \beta} + \left\langle \mathbf{L}^\Phi \left(\sum_{\mathbf{x}_\beta \in \mathcal{N}_k} \Phi_\beta^i(t) \psi^\beta \right), \psi^\alpha \right\rangle_{X^\varepsilon, X^\varepsilon} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{G}_k \times]t^{m-1}; t^m],$$

puis en discrétisant explicitement :

$$\Phi_{\alpha,m+1}^i = \Phi_{\alpha,m}^i - \Delta t \mathbf{L}^\Phi \left(\sum_{\mathbf{x}\beta \in \mathcal{N}_k} \Phi_{\beta,m}^i \psi^\beta \right) \psi^\alpha,$$

avec $\Delta t = t^m - t^{m-1}$. Ceci s'écrit encore sous forme vectorielle :

$$\Phi_{.,m+1}^i = \Phi_{.,m}^i - \Delta t s,$$

où s est le vecteur défini par :

$$s_\alpha = \mathbf{L}^\Phi \left(\sum_{\mathbf{x}\beta \in \mathcal{N}_k} \Phi_{\beta,m}^i \psi^\beta \right) \psi^\alpha.$$

Remarque : Les vecteurs $\tilde{\Phi}^i$ sont indépendants et leur calculs sont locaux. Ils nécessitent la résolution d'un système de taille plus petite que $N_k \times N_k$ car le cardinal de \mathcal{S}_i est inférieur au cardinal N_k de \mathcal{N}_k .

Ces vecteurs constituent une base de l'espace vectoriel X^0 , isomorphe à \mathbb{R}^{N^0} . Une fois l'espace X^0 construit, il est utilisé pour le calcul de la solution de (VI.10).

3.2 Résolution du problème global

Dans la deuxième étape de la méthode, nous calculons les valeurs des stocks aux portes (nœuds grossiers). Nous cherchons à approcher ρ dans l'espace X^0 par ρ^0 , soit sous la forme :

$$\rho^0(t) = \sum_{i=1}^{N^0} \rho_i(t) \Phi^i(t). \quad (\text{VI.14})$$

Le vecteur ρ^ε vérifie (VI.10), soit $\frac{d\rho^\varepsilon}{dt} + \mathbf{L}^\varepsilon(\rho^\varepsilon) = \frac{d\rho^\varepsilon}{dt} - Q_+ + Q_- - \Pi + c = 0$, et nous cherchons le vecteur ρ^0 dans X^0 vérifiant :

$$\frac{d}{dt} \rho^0 + \mathbf{L}^0(\rho^0) = 0, \quad (\text{VI.15})$$

avec $\mathbf{L}^0 = \mathbf{L}^\varepsilon$ restreint aux portes.

Les vecteurs de base $\Phi^i(t)$ sont dépendants du temps, donc il y a plusieurs possibilités pour résoudre le problème global :

1. A chaque pas de temps δt , les vecteurs $\mathbf{R}(\Phi^i)$ sont recalculés ($\Delta t = \delta t$). Dans ce cas, nous pouvons supposer que les ρ_i sont constants.
2. Les vecteurs $\mathbf{R}(\Phi^i)$ ne sont recalculés qu'à certains instants ($\Delta t \geq \delta t$).

Pour résoudre (VI.15), nous multiplions le terme $\frac{d\rho^0}{dt} + \mathbf{L}^0(\rho^0)$ par un élément Φ^i de la base de X^0 , puis décomposons ρ^0 dans la base de X^0 avec (VI.14). Nous obtenons ainsi pour tout i :

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\sum_j \rho_j \Phi^j \right) + \mathbf{L}^0 \left(\sum_j \rho_j \Phi^j \right) \right) \Phi^i = 0 \quad \text{dans } \mathcal{G} \times [0; T],$$

et pour tout i et tout n :

$$\left(\sum_j \left(\frac{d}{dt} (\rho_j \Phi^{j,m}) \right) + \mathbf{L}^0 \left(\sum_j \rho_j \Phi^{j,m} \right) \right) \Phi^{i,m} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{G} \times [t^n; t^{n+1}].$$

Avec la première stratégie, nous avons $m = n + 1$, alors qu'avec la deuxième stratégie m est tel que $[t_n; t_{n+1}] \subsetneq [t_{m-1}; t_m]$ et les vecteurs $\Phi^{i,m}$ utilisés sont les derniers vecteurs à avoir été calculés. Ceci donne après une discrétisation Euler explicite retrograde :

$$\sum_j \rho_{j,m} \Phi^{j,m} \Phi^{i,m} = \sum_j \rho_{j,n} \Phi^{j,m} \Phi^{i,m} - \delta t \Phi^{i,m} \mathbf{L}^0 \left(\sum_j \rho_j \Phi^{j,m} \right),$$

avec $\delta t = t_{n+1} - t_n$. Ceci s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbb{M} \rho_{\cdot, n+1} = \mathbb{M} \rho_{\cdot, n} - \delta t \langle \Phi^{\cdot, m}, s(\rho_{\cdot, n}, \Phi^{\cdot, n}) \rangle_{X^0, X^0}, \quad (\text{VI.16})$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^0, X^0}$ est le produit scalaire usuel dans X^0 , $\mathbb{M}_{i,j} = \langle \Phi^{j,m}, \Phi^{i,m} \rangle_{X^\varepsilon} = \sum_\alpha \Phi_\alpha^{j,m} \Phi_\alpha^{i,m}$,

$s(\rho_n^0, \Phi^{\cdot, n}) = \mathbf{L}^0 \left(\sum_j \rho_j \Phi^{j,m} \right)$ est une constante, $\Phi^{\cdot, m}$ est le vecteur de composantes $\{\Phi^{i,m}\}_i$, et $\rho_{\cdot, n}$ celui de composantes $\{\rho_{i,n}\}_i$. L'inversion du système matriciel (VI.16) nous donne les valeurs $\rho_{i,n}$.

Remarque : Il est possible d'utiliser une discrétisation implicite, en utilisant une méthode itérative de Newton.

3.3 Post-traitement

Après avoir calculer les valeurs de ρ_j , nous utilisons les vecteurs Φ^i pour obtenir une solution approchée ρ^ε dans X^ε à partir de ρ^0 dans X^0 . Nous écrivons :

$$\begin{aligned} \rho^\varepsilon(t) &= \mathbf{R}(\rho^0(t)) = \sum_{j=1}^{N^0} \rho_j(t) \mathbf{R}(\Phi^j(t)) \\ &= \sum_{j=1}^{N^0} \rho_j(t) \sum_{\alpha=1}^{N^\varepsilon} \sum_m \Phi_{\alpha,m}^j \psi^\alpha 1_{]t_{m-1}; t_m]}(t) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N^\varepsilon} \left(\sum_m \sum_{j=1}^{N^0} \rho_j(t) \Phi_{\alpha,m}^j 1_{]t_{m-1}; t_m]}(t) \right) \psi^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N^\varepsilon} \rho_\alpha(t) \psi^\alpha, \end{aligned}$$

où $\rho_\alpha(t)$ est alors la composante de $\rho^\varepsilon(t)$ correspondant à l'élément ψ^α de la base de X^ε . En fait, $\rho_\alpha(t) = \sum_m \sum_{j=1}^{N^0} \rho_j(t) \Phi_{\alpha,m}^j 1_{]t_{m-1}; t_m]}(t) = \sum_n \sum_{j=1}^{N^0} \rho_{j,n} \Phi_{\alpha,m}^j 1_{]t_n; t_{n+1]}(t)$ avec, suivant la stratégie, $m = n + 1$ ou tel que $[t_n; t_{n+1}] \subsetneq [t_{m-1}; t_m]$.

Les composantes du vecteur ρ^ε ainsi obtenu sont les valeurs approchées des stocks des différents produits (ou du produit) en tous les nœuds du réseau sur des intervalles de temps de taille δt .

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la modélisation et à la mise en place d'une méthode de simulation d'un réseau planétaire de distribution de biens. Le terme "bien" peut être synonyme de matières premières (pétrole, gaz, charbon, uranium) et de dérivés de celles-ci (fioul, électricité, produits alimentaires, etc).

Le modèle. Le réseau mondial est représenté par un graphe non orienté constitué d'un très grand nombre de nœuds en interaction. Chaque nœud représente une région de la planète qui consomme et produit potentiellement les biens qui se déplacent cependant vers ses voisins par des liens d'échanges réciproques. Notez que les voisins ne sont pas nécessairement des voisins au sens géographique du terme mais aussi des voisins avec lesquels des liens d'échanges sont forts¹⁸. Chaque nœud possède un stock (éventuellement très petit) de produit qu'il souhaite ne pas laisser chuter en deçà d'une valeur seuil : c'est une des contraintes qui pousse un nœud à s'approvisionner chez ses voisins et/ou à augmenter sa production locale. Dans notre modèle, la variation temporelle du stock de produit en chaque nœud est une fonction des flux de produit entrant et sortant, de la consommation et de la production. Plusieurs produits peuvent être traités conjointement dans ce modèle, chacun vérifiant une équation du même type que précédemment (seuls les flux diffèrent). Notons cependant que l'électricité ne peut quasiment pas être stockée et doit être produite à partir d'une autre source (gaz, charbon dans des centrales thermiques, ou uranium dans des centrales nucléaires), ce qui rend ce produit spécifique. En particulier, la consommation de certains produits dépend de la production d'électricité, ce qui couple les équations modélisant chaque produit entre elles *via* les termes de production et de consommation.

La méthode multiéchelles. Généralement, un tel graphe peut être découpé en sous-graphes reliés entre eux par des nœuds, appelés "portes", particulièrement connectés au voisinage. Le découpage en sous-graphes (en pays par exemple) amène à penser qu'une méthode multiéchelles serait utile pour réduire le coût de calcul. En effet, le nombre de nœuds (et de branches) du graphe est tellement grand qu'une simulation complète est difficilement envisageable, en particulier si plusieurs produits sont considérés. Nous avons alors mis en place une méthode multiéchelles. Celle-ci calcule des vecteurs de base pour chaque porte de chaque sous-graphe. Ces vecteurs de base pour chaque produit vérifient le même modèle. Localement, un calcul fin au niveau des nœuds des sous-graphes est réalisé. Nous faisons ensuite l'hypothèse qu'une répartition des stocks suffisamment fidèle peut être décrite sur cette base réduite. Un calcul sur la base réduite (au niveau des portes) permet alors de réduire drastiquement la taille du système à résoudre. Dans cette approche, les vecteurs de base sont dépendants du temps, mais ils peuvent ne pas être recalculés à chaque cycle de calcul. En effet, ils peuvent être conservés pendant plusieurs cycles, en particulier tant qu'aucune modification importante (nouveau producteur, panne, changement de consommation, nouvelle stratégie, etc) n'apparaît dans le sous-graphe considéré. De plus, en cas de changements locaux, il est possible de ne

¹⁸Par exemple les échanges de biens, donc les liens, entre Cuba et les USA sont quasiment nuls. Ils sont historiquement plus développés entre Cuba et la Russie bien que celle dernière soit géographiquement très éloignée de Cuba.

recalculer que certains vecteurs de base pour une "mise à jour" locale. Ce faisant, le gain en coût de calcul est d'autant plus grand que la fréquence de recalcul des vecteurs de base est faible.

Evolutions possibles. La méthode multiéchelles présentée possède aussi la qualité de ne pas être dépendante du modèle sous-jacent. Il est donc envisageable d'utiliser un modèle plus précis pour calculer les vecteurs de base au sein des sous-graphes, par exemple le modèle à l'intérieur d'un pays pourrait prendre en compte la production d'énergies renouvelables, et conserver un modèle plus grossier à l'échelle globale, par exemple à l'échelle planétaire où seuls les flux les plus importants de matières premières sont considérés. Nous aurions alors une méthode multiéchelles au niveau spatial mais aussi au niveau des modèles. Enfin, les échelles de temps des phénomènes mis en jeu sont de l'ordre de l'heure (évolution du vent pour une éolienne), de la journée (mise en route d'une centrale thermique), de la saison (variation de la consommation d'électricité hiver/été), de l'année ou de plusieurs décennies (construction de nouvelles centrales). Enfin, certaines décisions géopolitiques ont une influence pratiquement instantanée sur les prix des matières premières, donc sur les flux de ceux-ci. La caractéristique multiéchelles en temps pourrait rendre encore plus pertinente l'approche multiéchelles pour ce contexte. Comme pour les réseaux électriques (voir chapitre V), il est envisageable de considérer des reconnexions topologiques du graphe de départ. Ceci est particulièrement intéressant pour :

- créer dynamiquement de nouvelles portes : par exemple, pour connecter un pays émergent à un marché ou prendre en compte la construction de nouveaux pipelines¹⁹ ;
- ajouter de nouveaux producteurs : par exemple, le Canada qui pourrait devenir, dans un avenir proche, un producteur de pétrole incontournable à l'aide de ses schistes bitumeux qui sont en quantité très importante dans son sol²⁰ ;
- enlever des consommateurs ou producteurs par déconnexions de certaines portes : par exemple, les guerres en Irak ont durablement réduit la quantité de pétrole extraite mais aussi le nombre de clients, donc, du point de vue de la modélisation, elles ont réduit le nombre de nœuds (et de portes) du graphe associé.

Le but d'un outil de simulation est de tester, à partir d'une situation "stable", plusieurs scénarii. Par exemple, en augmentant la consommation dans le temps, nous souhaitons observer la réaction du système *via* les stratégies de production proposées. L'approche multiéchelles permet de multiplier le nombre de scénarii testés dans un temps de calcul relativement court, d'autant plus court que les fonctions de base ne sont pas recalculés à chaque cycle de calcul.

¹⁹Le projet Nord Stream est un pipeline de gaz naturel parcourant 1 220 kilomètres entre Vyborg (Russie) et Greifswald (Allemagne), sous la mer Baltique. Nord Stream est conçu pour transporter jusqu'à 55 milliards de mètres cubes de gaz par an, suffisamment pour approvisionner plus de 25 millions de ménages et s'affranchir du pipeline passant par l'Ukraine. Le réseau ukrainien est stratégique pour l'union européenne, car l'approvisionnement en provenance de la Russie (fournisseur à hauteur de 40% de l'UE) transite à 80% par l'Ukraine.

²⁰Les schistes bitumineux (également appelés pyroschistes ou schistes kérobitumeux) sont des roches sédimentaires à grain fin, contenant des substances organiques, les kérogènes, en quantité suffisante pour fournir du pétrole et du gaz combustible.

Conclusion générale

Les problèmes multiéchelles sont des problèmes complexes par essence. Les effets des petites échelles sur le comportement global de la solution sont souvent non négligeables. Quand les petites échelles possèdent des caractéristiques spéciales, le problème est simplifié et un ensemble de méthodes, dites multiéchelles, sont à disposition pour le résoudre. Ces caractéristiques sont placées au cœur de ces méthodes (elles en dépendent intrinsèquement). Cependant, dans une vaste majorité de problèmes multiéchelles, les petites échelles ont rarement des caractéristiques utilisables. Dans ce cas, il serait souhaitable d'avoir à disposition une méthodologie multiéchelles la plus générale possible.

1 Conclusion

Dans cette thèse, nous avons développé une méthodologie multiéchelles générale. Nous l'avons appliquée et testée à différents contextes : mécanique des solides (fissure), mécanique des fluides (propagation d'un polluant en milieu urbain), électrocinétique (réseau électrique) et modélisation d'un réseau de distribution de biens. Cette étude montre l'apport des méthodes multiéchelles, construites à partir de cette méthodologie, dans la résolution de problèmes complexes.

La méthodologie multiéchelles du premier chapitre a été appliquée aux précédents contextes et validée numériquement pour les contextes en milieux continus. Cette méthodologie est inspirée de la méthode des éléments finis multiéchelles (MsFEM) développée par Hou (voir [44]).

Mécanique des solides. Une fissure est habituellement simulée à l'aide de la méthode des éléments finis étendus (XFEM). Or cette méthode perd en efficacité lorsque le nombre de fissures augmente, en particulier si ces dernières se croisent. Nous avons donc proposé l'utilisation de la méthodologie multiéchelles du premier chapitre. Nous avons adapté la méthode MsFEM à ce contexte de mécanique des solides. Des simulations numériques montrent que la méthode classique (MsFEM-L) n'est pas suffisamment précise. Elle ne peut pas rendre compte de l'ouverture d'une fissure sur un maillage grossier. Par une adaptation (MsFEM-OS) des conditions aux limites dans les calculs locaux (solutions modèles), nous avons montré numériquement que la méthode donne de bons résultats.

En effet, elle permet de simuler l'ouverture d'une fissure bien que la taille de la fissure soit négligeable par rapport à la taille d'une maille grossière.

Mécanique des fluides. Le problème de propagation d'un polluant en milieu urbain devient rapidement difficile lorsque la morphologie de la ville se complexifie. De ce fait, il est souvent étudié que sur des zones locales (deux rues qui se croisent par exemple) pour examiner la pollution urbaine (CO_2). Nous avons considéré un modèle très simplifié consistant en une équation de diffusion dans un milieu hétérogène. Nous avons mis en place la méthode MsFEM pour ce contexte. Nous avons montré que la méthode MsFEM-OS n'est pas définie et donc ne peut être appliquée en l'état. Deux nouvelles idées ont en conséquence été développées pour déterminer des conditions aux limites des fonctions de base multiéchelles : MsFEM-Hcentree et MsFEM-H. De plus, nous avons aussi couplé la méthode multiéchelles avec la méthode de pénalisation qui permet d'utiliser des maillages cartésiens simples à manipuler et à implémenter informatiquement. Ce couplage permet dans ce cas d'utiliser MsFEM-OS sans modification de celle-ci. Nous avons implémenté toutes ces méthodes. Elles ont été testées sur des cas académiques et enfin sur des données réelles issues d'images satellites. Nous avons d'ailleurs développé un outil d'extraction automatique de ces données. Nous avons montré que ces méthodes allient précision et rapidité. En effet, sur un maillage grossier, elles permettent d'obtenir une solution qui capte des échelles dont la taille caractéristique est très inférieure à celle d'une maille grossière. Comme le maillage global possède peu de cellules, le temps de calcul est drastiquement réduit. Les méthodes les plus performantes dans ce contexte, avec la pénalisation, sont MsFEM-OS et MsFEM-H. Cette dernière reste performante sans le couplage. Nous avons donc montré la pertinence de la méthodologie multiéchelles dans ce contexte simplifié de transport de polluant en milieu urbain.

Electrocinétique. Aucune méthode multiéchelles n'ayant été utilisée, à notre connaissance, pour simuler un réseau électrique, l'idée est d'appliquer la méthodologie multiéchelles. Le but est d'appréhender des réseaux de plus en plus complexes, ainsi que de pouvoir réaliser un grand nombre de simulations dans un temps raisonnable. Cependant, dans un milieu discret, il est impossible d'utiliser MsFEM ou une variante adaptant les conditions aux limites. En effet, de manière analogue au milieu continu en dimension un, aucune adaptation des conditions aux limites n'est nécessaire *a priori* car les nœuds sont isolés. Nous avons proposé une méthode multiéchelles, issue de la méthodologie multiéchelles générale et adaptée à ce contexte discret. Cette méthode devrait hériter des propriétés d'efficacité montrées dans les tests numériques pour les milieux continus.

Réseau de distribution. L'objectif est de s'attaquer à des problèmes sociétaux en simulant des échanges (aucun sens privilégié) de plusieurs produits entre des zones quelconques. Nous avons tout d'abord proposé une modélisation de l'évolution du stock par un système d'équations instationnaires pouvant être couplées à travers les variables de consommation et de production²¹. Il s'agit encore d'un problème en milieu discret pour lequel nous appliquons la méthodologie multiéchelles. Dans la méthode que nous avons développée pour ce réseau, les solutions modèles dépendent du temps puisque les microstructures évoluent plus rapidement dans ce contexte. Cependant, elles peuvent être

²¹Par exemple, la production d'un produit dépend de la consommation d'un autre.

calculées sur des pas de temps plus longs que ceux utilisés pour la solution macroscopique. Ce faisant, cette méthode multiéchelles devrait être efficace dans ce contexte.

2 Perspectives

Nous mentionnons maintenant quelques perspectives d'évolution pour les différents contextes.

Mécanique des solides. Après avoir testé la méthode sur une fissure soumise à un chargement monodimensionnel, il serait intéressant de pouvoir le faire sur plusieurs fissures d'épaisseurs différentes qui se croisent. Puis, nous souhaiterions tester la méthode avec un chargement multidimensionnel pour lequel le modèle serait différent. Il serait aussi intéressant d'utiliser un modèle décrivant les actions au niveau moléculaire au bout de la fissure. De plus, comme dans le problème de propagation de polluant, nous pourrions utiliser d'autres variantes de MsFEM.

Mécanique des fluides. Les résultats étant obtenus en dimension deux, le passage à la dimension trois pourrait être réalisé. L'étude du milieu urbain s'appuyant sur une équation de diffusion, il faudrait poursuivre les tests en enrichissant le modèle pour qu'il soit plus proche de la réalité à l'aide de termes non linéaires, en utilisant un modèle de turbulence, ce qui requiert une adaptation supplémentaire de la méthode, voire de la méthodologie. En outre, le vent ne pouvant pas être considéré comme une donnée, il doit plutôt être modélisé. Cette modélisation doit coupler les composantes du vent, par exemple en ajoutant la condition de divergence nulle. Ceci demande des solutions modèles adaptées à ce nouveau problème, ces solutions étant maintenant des fonctions vectorielles dont les composantes sont couplées. Il serait aussi intéressant d'utiliser des méthodes numériques de type volumes finis pour ces problèmes à convection dominante.

Réseaux. Pour les problèmes en milieux discrets, il serait intéressant de simuler sur un cas réaliste, ce qui demande un accès à des données de terrain. Dans ces réseaux, un des objectifs serait de simuler des reconnections, c'est-à-dire des ajouts/retraits de connexions, des changements de composants pour le réseau électrique et de stratégies de production dans certaines zones pour le réseau de distribution. Dans un réseau de distribution de biens, il serait aussi possible d'y intégrer plusieurs modèles à des échelles différentes : afin d'inclure les effets nationaux qui diffèrent des effets internationaux.

Bibliographie

- [1] J. E. AARNES, *On the use of a mixed multiscale finite element method for greater flexibility and increased speed or improved accuracy in reservoir simulation*, Multiscale Model. Simul., 2 (2004), pp. 421–439.
- [2] A. ABDULLE, *On a priori error analysis of fully discrete heterogeneous multiscale FEM*, Multiscale Model. Simul., 4 (2005), pp. 447–459.
- [3] A. ABDULLE AND B. ENGQUIST, *Finite element heterogeneous multiscale methods with near optimal computational complexity*, Multiscale Model. Simul., 6 (2007), pp. 1059–1084.
- [4] G. ALLAIRE, *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal., 23 (1992), pp. 1482–1518.
- [5] G. ALLAIRE AND R. BRIZZI, *A multiscale finite element method for numerical homogenization*, Multiscale Model. Simul., 4 (2005), pp. 790–812.
- [6] E. ANDERSON, *A new continuous model for job-shop scheduling*, International journal of systems science, 12 (1981), pp. 1469–1475.
- [7] P. ANGOT, C.-H. BRUNEAU, AND P. FABRIE, *A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows*, Numer. Math., 81 (1999), pp. 497–520.
- [8] T. ARBOGAST, *An overview of subgrid upscaling for elliptic problems in mixed form*, in Current trends in scientific computing, vol. 329 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, pp. 21–32.
- [9] —, *Analysis of a two-scale, locally conservative subgrid upscaling for elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal., 42 (2004), pp. 576–598.
- [10] T. ARBOGAST AND K. J. BOYD, *Subgrid upscaling and mixed multiscale finite elements*, SIAM J. Numer. Anal., 44 (2006), pp. 1150–1171.
- [11] T. ARBOGAST, G. PENCHEVA, M. F. WHEELER, AND I. YOTOV, *A multiscale mortar mixed finite element method*, Multiscale Model. Simul., 6 (2007), pp. 319–346.
- [12] D. ARMBRUSTER, P. DEGOND, AND C. RINGHOFER, *Continuum models for interacting machines*, Networks of Interacting Machines : Production Organization in Complex Industrial Systems and Biological Cells, pp. 1–32.

- [13] ———, *A model for the dynamics of large queuing networks and supply chains*, SIAM J. Appl. Math., 66 (2006), pp. 896–920.
- [14] I. BABUŠKA, *Homogenization and its application- Mathematical and computational problems (partial differential equation solutions for diffusion and composite material analysis)*, Numerical solution of partial differential equations- III, (1976), pp. 89–116.
- [15] I. BABUŠKA, *Homogenization approach in engineering*, in Computing methods in applied sciences and engineering, Part 1, Springer, Berlin, 1976, pp. 137–153. Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, Vol. 134.
- [16] I. BABUŠKA, G. CALOZ, AND J. E. OSBORN, *Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients*, SIAM J. Numer. Anal., 31 (1994), pp. 945–981.
- [17] I. BABUŠKA AND J. MELENK, *The partition of unity method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40 (1997), pp. 727–758.
- [18] I. BABUŠKA AND J. E. OSBORN, *Generalized finite element methods : their performance and their relation to mixed methods*, SIAM J. Numer. Anal., 20 (1983), pp. 510–536.
- [19] A. BENSOUSSAN, J.-L. LIONS, AND G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures*, vol. 5 of Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.
- [20] R. BERKOWICZ, O. HERTEL, S. LARSEN, N. SØRENSEN, AND M. NIELSEN, *Modelling traffic pollution in streets*, (1997).
- [21] V. BHASKAR AND P. LALLEMENT, *Modeling a supply chain using a network of queues*, Appl. Math. Model., 34 (2010), pp. 2074–2088.
- [22] S. BORNHOLDT AND H. G. SCHUSTER, eds., *Handbook of graphs and networks*, Wiley-VCH, Weinheim, 2003.
- [23] A. BOURGEAT, *Homogenized behavior of two-phase flows in naturally fractured reservoirs with uniform fractures distribution*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 47 (1984), pp. 205–216.
- [24] M. BOURLARD, M. DAUGE, M. LUBUMA, AND S. NICAISE, *Coefficients of the singularities for elliptic boundary value problems on domains with conical points. III : Finite element methods on polygonal domains*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 29 (1992), pp. 136–155.
- [25] A. BRANDT, *Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems*, Math. Comp., 31 (1977), pp. 333–390.
- [26] M. E. BREWSTER AND G. BEYLKIN, *A multiresolution strategy for numerical homogenization*, Appl. Comput. Harmon. Anal., 2 (1995), pp. 327–349.
- [27] F. BREZZI, *Interacting with the subgrid world*, in Numerical analysis 1999, vol. 420 of Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000, pp. 69–82.
- [28] W. CHEN, *Graph theory and its engineering applications*, World Scientific Pub Co Inc, 1997.

- [29] Z. CHEN AND T. HOU, *A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients*, Mathematics of Computation, 72 (2003), pp. 541–576.
- [30] A. CHERKAEV, *Variational methods for structural optimization*, vol. 140 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [31] P. G. CIARLET, *Élasticité tridimensionnelle*, vol. 1 of Recherches en Mathématiques Appliquées, Masson, Paris, 1986.
- [32] D. CIORANESCU AND P. DONATO, *An introduction to homogenization*, vol. 17 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999.
- [33] C. DAGANZO, *A theory of supply chains*, Springer Verlag, 2003.
- [34] E. DE GIORGI AND S. SPAGNOLO, *Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine*, Boll. Un. Mat. Ital. (4), 8 (1973), pp. 391–411.
- [35] M. DOROBANTU AND B. ENGQUIST, *Wavelet-based numerical homogenization*, SIAM J. Numer. Anal., 35 (1998), pp. 540–559.
- [36] L. DURLOFSKY, *Numerical calculation of equivalent grid block permeability tensors for heterogeneous porous media*, Water Resour. Res., 27 (1991), pp. 699–708.
- [37] G. DUVAUT, *Mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1990.
- [38] B. DYKAAR AND P. KITANIDIS, *Determination of the effective hydraulic conductivity for heterogeneous porous media using a numerical spectral approach : 1. Method*, Water Resour. Res., 28 (1992), pp. 1155–1166.
- [39] W. E AND B. ENGQUIST, *The heterogeneous multiscale methods*, Commun. Math. Sci., 1 (2003), pp. 87–132.
- [40] W. E, B. ENGQUIST, X. LI, W. REN, AND E. VANDEN-EIJNDEN, *Heterogeneous multiscale methods : a review*, Commun. Comput. Phys., 2 (2007), pp. 367–450.
- [41] W. E, P. MING, AND P. ZHANG, *Analysis of the heterogeneous multiscale method for elliptic homogenization problems*, J. Amer. Math. Soc., 18 (2005), pp. 121–156.
- [42] Y. EFENDIEV, V. GINTING, T. HOU, AND R. EWING, *Accurate multiscale finite element methods for two-phase flow simulations*, J. Comput. Phys., 220 (2006), pp. 155–174.
- [43] Y. EFENDIEV, T. HOU, AND V. GINTING, *Multiscale finite element methods for nonlinear problems and their applications*, Commun. Math. Sci., 2 (2004), pp. 553–589.
- [44] Y. EFENDIEV AND T. Y. HOU, *Multiscale finite element methods*, vol. 4 of Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, 2009.
- [45] Y. R. EFENDIEV, T. Y. HOU, AND X.-H. WU, *Convergence of a nonconforming multiscale finite element method*, SIAM J. Numer. Anal., 37 (2000), pp. 888–910.
- [46] ———, *Convergence of a nonconforming multiscale finite element method*, SIAM J. Numer. Anal., 37 (2000), pp. 888–910.
- [47] Ö. ERGÜL AND L. GÜREL, *Efficient parallelization of the multilevel fast multipole algorithm for the solution of large-scale scattering problems*, IEEE Trans. Antennas and Propagation, 56 (2008), pp. 2335–2345.

- [48] ———, *A hierarchical partitioning strategy for an efficient parallelization of the multilevel fast multipole algorithm*, IEEE Trans. Antennas and Propagation, 57 (2009), pp. 1740–1750.
- [49] A. FETTER AND J. WALECKA, *Theoretical mechanics of particles and continua*, Dover Pubns, 2003.
- [50] J. FISH AND K. SHEK., *Multiscale analysis of composite materials and structures*, Composites Science and Technology, 60 (2000), pp. 2547–2556.
- [51] G. A. FRANCFORT, F. MURAT, AND L. TARTAR, *Homogenization of monotone operators in divergence form with x -dependent multivalued graphs*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 188 (2009), pp. 631–652.
- [52] G. FRIESECKE, R. D. JAMES, AND S. MÜLLER, *A hierarchy of plate models derived from nonlinear elasticity by gamma-convergence*, Arch. Ration. Mech. Anal., 180 (2006), pp. 183–236.
- [53] D. GILBARG AND N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [54] S. GÖTTLICH, M. HERTY, AND A. KLAR, *Network models for supply chains*, Commun. Math. Sci., 3 (2005), pp. 545–559.
- [55] ———, *Modelling and optimization of supply chains on complex networks*, Commun. Math. Sci., 4 (2006), pp. 315–330.
- [56] L. GREENGARD AND V. ROKHLIN, *A fast algorithm for particle simulations*, J. Comput. Phys., 73 (1987), pp. 325–348.
- [57] A. GRIFFITH, *The phenomena of rupture and flow in solids*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, 221 (1921), pp. 163–198.
- [58] J. HANG, M. SANDBERG, Y. LI, AND L. CLAESSON, *Pollutant dispersion in idealized city models with different urban morphologies*, Atmospheric Environment, 43 (2009), pp. 6011–6025.
- [59] T. Y. HOU, *Multiscale computations for flow and transport in porous media*, in Multi-scale phenomena in complex fluids, vol. 12 of Ser. Contemp. Appl. Math. CAM, World Sci. Publishing, Singapore, 2009, pp. 175–285.
- [60] T. Y. HOU AND X.-H. WU, *A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media*, J. Comput. Phys., 134 (1997), pp. 169–189.
- [61] ———, *A multiscale finite element method for PDEs with oscillatory coefficients*, in Numerical treatment of multi-scale problems (Kiel, 1997), vol. 70 of Notes Numer. Fluid Mech., Vieweg, Braunschweig, 1999, pp. 58–69.
- [62] T. Y. HOU, X.-H. WU, AND Y. ZHANG, *Removing the cell resonance error in the multiscale finite element method via a Petrov-Galerkin formulation*, Commun. Math. Sci., 2 (2004), pp. 185–205.
- [63] T. HRYCAK AND V. ROKHLIN, *An improved fast multipole algorithm for potential fields*, SIAM J. Sci. Comput., 19 (1998), pp. 1804–1826.
- [64] T. HUGHES, *A simple scheme for developing 'upwind' finite elements*, International journal for numerical methods in engineering, 12 (1978), pp. 1359–1365.

- [65] T. J. R. HUGHES, *Multiscale phenomena : Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 127 (1995), pp. 387–401.
- [66] T. J. R. HUGHES, G. R. FEIJÓO, L. MAZZEI, AND J.-B. QUINCY, *The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 166 (1998), pp. 3–24.
- [67] V. V. JIKOV, S. M. KOZLOV, AND O. A. OLEĬNIK, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [68] I. G. KEVREKIDIS, C. W. GEAR, J. M. HYMAN, P. G. KEVREKIDIS, O. RUNBORG, AND C. THEODOROPOULOS, *Equation-free, coarse-grained multiscale computation : enabling microscopic simulators to perform system-level analysis*, Commun. Math. Sci., 1 (2003), pp. 715–762.
- [69] ———, *Equation-free, coarse-grained multiscale computation : enabling microscopic simulators to perform system-level analysis*, Commun. Math. Sci., 1 (2003), pp. 715–762.
- [70] Y. KIM AND J. BAIK, *Daily maximum urban heat island intensity in large cities of Korea*, Theoretical and Applied Climatology, 79 (2004), pp. 151–164.
- [71] J. KNAP AND M. ORTIZ, *An analysis of the quasicontinuum method*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49 (2001), pp. 1899–1923.
- [72] S. KNAPEK, *Matrix-dependent multigrid homogenization for diffusion problems*, SIAM J. Sci. Comput., 20 (1998), pp. 515–533.
- [73] S. H. LEE, P. JENNY, AND H. A. TCHELEPI, *A finite-volume method with hexahedral multiblock grids for modeling flow in porous media*, Comput. Geosci., 6 (2002), pp. 353–379. Locally conservative numerical methods for flow in porous media.
- [74] J. LEMAITRE AND J. CHABOCHE, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod Paris, 1985.
- [75] J.-L. LIONS, *Some methods in the mathematical analysis of systems and their control*, Kexue Chubanshe (Science Press), Beijing, 1981.
- [76] A.-M. MATACHE AND C. SCHWAB, *Homogenization via p -FEM for problems with microstructure*, in Proceedings of the Fourth International Conference on Spectral and High Order Methods (ICOSAHOM 1998) (Herzliya), vol. 33, 2000, pp. 43–59.
- [77] G. W. MILTON, *The theory of composites*, vol. 6 of Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [78] P. MING AND X. YUE, *Numerical methods for multiscale elliptic problems*, J. Comput. Phys., 214 (2006), pp. 421–445.
- [79] N. MOES, J. DOLBOW, AND T. BELYTSCHKO, *A finite element method for crack growth without remeshing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46 (1999), pp. 131–150.
- [80] J. D. MOULTON, J. E. DENDY, JR., AND J. M. HYMAN, *The black box multigrid numerical homogenization algorithm*, J. Comput. Phys., 142 (1998), pp. 80–108.
- [81] F. MURAT, *Compacité par compensation : condition nécessaire et suffisante de continuité faible sous une hypothèse de rang constant*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 8 (1981), pp. 69–102.

- [82] G. NGUETSENG, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal., 20 (1989), pp. 608–623.
- [83] H. OWHADI AND L. ZHANG, *Metric-based upscaling*, Comm. Pure Appl. Math., 60 (2007), pp. 675–723.
- [84] A. PANKOV, *G-convergence and homogenization of nonlinear partial differential operators*, vol. 422 of Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [85] J. PEREZ, C. LAGOUTE, J. FOURNIOLS, AND S. BOUHOURS, *Électronique, fondements et applications avec exercices et problèmes résolus*, 2006.
- [86] M. PESZYŃSKA, M. F. WHEELER, AND I. YOTOV, *Mortar upscaling for multi-phase flow in porous media*, Comput. Geosci., 6 (2002), pp. 73–100.
- [87] J. POSPISIL AND M. JICHA, *Computational model for transient pollutants dispersion in city intersection and comparison with measurements*, Air Pollution Modeling and Its Application XVII, (2007), pp. 207–214.
- [88] W. C. RHEINBOLDT, *Adaptive mesh refinement processes for finite element solutions*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., 17 (1981), pp. 649–662.
- [89] J. SANCHEZ-HUBERT AND E. SANCHEZ-PALENCIA, *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l’homogénéisation : application à la mécanique des milieux continus*, Masson, 1992.
- [90] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Solutions périodiques par rapport aux variables d’espace et applications*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 271 (1970), pp. A1129–A1132.
- [91] —, *Équations aux dérivées partielles dans un type de milieux hétérogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 272 (1971), pp. A1410–A1413.
- [92] G. SANGALLI, *Capturing small scales in elliptic problems using a residual-free bubbles finite element method*, Multiscale Model. Simul., 1 (2003), pp. 485–503.
- [93] J. SINI, S. ANQUETIN, AND P. MESTAYER, *Pollutant dispersion and thermal effects in urban street canyons*, Atmospheric Environment, 30 (1996), pp. 2659–2677.
- [94] S. SPAGNOLO, *Convergence in energy for elliptic operators*, in Numerical solution of partial differential equations, III, Academic Press, New York, 1976, pp. 469–498.
- [95] G. STRANG AND G. FIX, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [96] L. TARTAR, *Problèmes de contrôle des coefficients dans des équations aux dérivées partielles*, in Control theory, numerical methods and computer systems modelling, Springer, Berlin, 1975, pp. 420–426.
- [97] —, *The general theory of homogenization*, vol. 7 of Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [98] A. TOSELLI AND O. WIDLUND, *Domain decomposition methods—algorithms and theory*, vol. 34 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [99] X. H. WU, Y. EFENDIEV, AND T. Y. HOU, *Analysis of upscaling absolute permeability*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 2 (2002), pp. 185–204.

-
- [100] J. XU, *Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs*, SIAM J. Numer. Anal., 33 (1996), pp. 1759–1777.
- [101] O. C. ZIENKIEWICZ AND A. W. CRAIG, *Adaptive mesh refinement and a posteriori error estimation for the p-version of the finite element method*, in Adaptive computational methods for partial differential equations, SIAM, Philadelphia, PA, 1983, pp. 33–56.

Title : Study of a multiscale methodology applied to various problems on continuous and discrete area.

Abstract : In this thesis, we have interested in multiscale problems meaning problems with very fine scales which effects have non negligible impact. The mathematical resolution is often very difficult and a numerical resolution requires demanding discretizations in terms of memory and CPU time. Our purpose has been to develop a general multiscale methodology founded on the multiscale finite element method (MsFEM). This methodology has been the basis of our work. We have developed, tested and validated the methodology for multiscale problems. These problems has been representative of real situations from various contexts (continuous and discrete area) : solids mechanics, fluids mechanics, electrokinetic and distribution network modelling. First we have validated several MsFEM variants applied to a fissure problem. Then, we have mesured the methodology efficiency in a real time simulation of pollutant propagation in urban area context. Moreover, we have improved MsFEM and further coupled with a penalisation method. We have also developed extensions, derived from the same methodology, for discrete area dealing with many unknowns. The contexts of this study have been electric and distribution networks. The later has required some modelling. Thus we have illustrated the efficiency of the multiscale methodology on these various contexts.

Auteur : Laetitia Carballal Perdiz

Titre : Étude d'une méthodologie multiéchelles appliquée à différents problèmes en milieu continu et discret

Directeurs de Thèse : Pierre Degond et Raphaël Loubère

Date et lieu de soutenance : le 03 Décembre 2010 à l'Université Toulouse III - Paul Sabatier

Résumé : Dans cette thèse, nous nous intéressons à des problèmes multiéchelles, c'est-à-dire présentant des échelles très fines dont les effets ont un impact non négligeable. La résolution mathématique est souvent très difficile et une résolution numérique précise nécessite des discrétisations coûteuses en temps et en mémoire. Notre objectif est la mise en place d'une méthodologie multiéchelles générale fondée sur la méthode des éléments finis multiéchelles (MsFEM). Cette méthodologie est le socle de cette thèse. Elle est testée et validée pour des problèmes multiéchelles représentatifs de situations réelles dans divers contextes (en milieu continu et discret) : mécanique des solides, mécanique des fluides, électrocinétique et modélisation de réseau de distribution. Nous validons d'abord numériquement différentes variantes de MsFEM sur le cas d'une fissure. Nous vérifions ensuite l'efficacité de la méthodologie dans un contexte de simulation en temps réel de propagation de polluant en milieu urbain, en développant de nouvelles techniques d'amélioration de MsFEM et en la couplant avec une méthode de pénalisation. Nous développons aussi des méthodes, issues de la méthodologie, pour des milieux discrets à grand nombre d'inconnues : un réseau électrique et un réseau de distribution de biens. Ce dernier nécessite un travail de modélisation. Nous montrons ainsi la pertinence de la méthodologie multiéchelles.

Mots-clés : Méthodologie multiéchelles - Méthode des éléments finis - Méthode de pénalisation - Milieu hétérogène - Problèmes physiques.

Discipline : Mathématiques

Intitulé et adresse du laboratoire : Institut de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 Toulouse