



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *l'Université Toulouse III - Paul Sabatier*  
Discipline ou spécialité : *Mathématiques Appliquées*

---

Présentée et soutenue par *Pierre SEIMANDI*  
Le mercredi 1<sup>er</sup> décembre 2010

**Titre :**

*Modélisation mathématique et numérique de décharges couronnes  
pour le contrôle d'écoulements*

---

**JURY**

<i>M. Jean-Pierre BOEUF</i>	<i>Invité</i>
<i>M. Pierre DEGOND</i>	<i>Directeur de thèse</i>
<i>M. Bruno DUBROCA</i>	<i>Examineur</i>
<i>M. Guillaume DUFOUR</i>	<i>Codirecteur de thèse</i>
<i>M. Vincent GIOVANGIGLI</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>M. Jean PAILLOL</i>	<i>Examineur</i>
<i>M. Bernard PECQUEUX</i>	<i>Examineur</i>
<i>M. Jean-Pierre RAYMOND</i>	<i>Président du jury</i>
<i>M. François ROGIER</i>	<i>Codirecteur de thèse</i>

---

<b>École doctorale :</b>	<i>Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)</i>
<b>Unité de recherche :</b>	<i>ONERA DTIM/M2SN - IMT/MIP</i>
<b>Directeur de Thèse :</b>	<i>Pierre DEGOND</i>
<b>Codirecteurs de Thèse :</b>	<i>Guillaume DUFOUR et François ROGIER</i>
<b>Rapporteurs :</b>	<i>Frédéric COQUEL et Vincent GIOVANGIGLI</i>



# Remerciements

---

Depuis mon arrivée à Toulouse il y a trois ans, j'ai croisé le chemin de nombreuses personnes qui ont contribué à la réussite de cette thèse et que je tiens à remercier. Mes premiers remerciements vont à Guillaume Dufour et François Rogier avec qui j'ai eu le plaisir de travailler pendant ces trois ans et qui m'ont plus d'une fois aidé à prendre du recul sur mes travaux. Je les remercie particulièrement de la minutie avec laquelle ils ont relu mon manuscrit et de la patience dont ils ont fait preuve à l'approche de ma soutenance. Je remercie également Pierre Degond pour avoir accepté de superviser cette thèse et pour s'être assuré de son bon déroulement.

Frédéric Coquel et Vincent Giovangigli ont accepté de rapporter mes travaux de thèse, je les remercie pour le temps et de l'énergie qu'ils ont consacré à la relecture de ce manuscrit. Merci également à Jean-Pierre Raymond d'avoir accepté de présider mon jury de soutenance, ainsi qu'à Jean-Pierre Boeuf, Bruno Dubroca et Jean Paillol pour y avoir pris part.

Le travail effectué ces trois années passées n'aurait bien sûr pas pu se concrétiser sans les nombreuses personnes que j'ai eu le plaisir de cotoyer au sein de l'Onera. Je remercie donc l'ensemble du DTIM pour m'y avoir accueilli. Un grand merci à Cédric pour m'avoir appris tant de chose sur `TeX` et `emacs`, mais aussi pour m'avoir initié à `ConTeXt` et `TikZ` sans lesquels ce document ne serait pas ce qu'il est. Je le remercie également pour toutes les pauses thé, bien agréables en période de rédaction intense. Merci à Sophie, qui m'a accueilli dans son bureau pendant plus de deux ans durant lesquels j'ai énormément apprécié son soutien et sa bonne humeur. Merci à Jojo qui m'a fait découvrir les spectacles du Lido ainsi que les bases du jonglage et avec qui j'ai redécouvert l'escalade et le canyoning. Merci également à tous ses colocos pour l'accueil toujours chaleureux et pour les nombreux repas. De manière générale, merci à tous les doctorants et ex-doctorants de l'Onera, avec qui j'ai toujours passés de très bons moments. Je pense en particulier à Domingo pour le tennis, mais aussi à Stéphanie, Julien, J-B et Florian. Bien sûr je n'oublie pas Charles, Maria, Cédric et Sophie pour les (très) nombreuses séances de cinéma qui m'ont permis de voir bons et mauvais films dans la bonne humeur.

Je remercie bien sûr l'ensemble de l'unité M2SN pour son accueil, en particulier Guillaume, Nathalie et François qui m'ont souvent offert la dose de caféine nécessaire à la rédaction de ce manuscrit. Je tiens également à remercier l'équipe du DPRS et en particulier Peter, Thomas, Franck et Armand pour les nombreuses discussions toujours appréciées.

Pour finir, je remercie toute ma famille et mes amis non-toulousains, dont le soutien n'a jamais fait défaut. Un grand merci à mes parents et à mon frère qui m'ont grandement supporté lors des périodes de stress. Merci à Vincent, Lucie et mon frère pour m'avoir accompagné lors de ma visite à Amsterdam et permis de découvrir cette ville magnifique. Merci à Florent, Nicolas, Thomas et Jonathan pour ces barbecues toujours mémorables. Merci aussi à Amélie, Olivia, Émilie, Jennifer, Yannick et Angeline.





# Table des matières

---

<b>Introduction</b> .....	<b>1</b>
---------------------------	----------

## Première partie

### Les décharges plasma à pression atmosphérique

---

<b>1. Physique des décharges plasma</b> .....	<b>9</b>
1.1. Généralités sur les plasmas .....	10
1.1.1. Définitions .....	10
1.1.2. Classification des plasmas .....	10
1.1.3. Échelles caractéristiques .....	11
1.1.4. Processus réactionnels .....	12
1.2. Les décharges hors équilibre dans l'air .....	13
1.2.1. Les décharges à basse pression .....	14
1.2.2. Les décharges à pression atmosphérique .....	16
1.2.3. Les décharges couronnes .....	18
<b>2. Modèle de plasmas d'air</b> .....	<b>21</b>
2.1. Construction du modèle et hypothèses sous-jacentes .....	21
2.1.1. Évolution du champ électrique .....	22
2.1.2. Conservation de la masse .....	23
2.1.3. Équation de transport de la quantité de mouvement .....	23
2.1.4. Approximation du champ local .....	24
2.1.5. Courant électrique .....	24
2.1.6. Force électrique induite par la décharge .....	26
2.2. Composition du plasma et production des espèces .....	26
2.2.1. Modèle de cinétique chimique .....	26
2.2.2. Production d'électrons à la surface des électrodes .....	28
2.2.3. Hypothèse sur le fond d'espèces chargées dans l'air .....	28
2.3. Conditions aux limites .....	28
2.4. Bilan sur le modèle décrivant le plasma .....	29

## Deuxième partie

### Recherche de modèles de décharges couronnes approchés

---

<b>3. Introduction à la méthode d'électrode virtuelle</b> .....	<b>33</b>
3.1. Introduction .....	33

3.2.	Développements asymptotiques raccordés pour la modélisation de décharges couronnes	35
3.2.1.	Développement du modèle et recherche d'une solution	36
3.2.2.	Validation du modèle asymptotique	43
3.2.3.	Bilan sur le modèle asymptotique	46
3.3.	Principe de la méthode d'électrode virtuelle	47
3.3.1.	Concept	47
3.3.2.	Estimation théorique du gain en temps de calcul	48
3.4.	Synthèse	49
<b>4.</b>	<b>Développement des modèles d'électrode virtuelle</b>	<b>51</b>
4.1.	Description du cadre géométrique et mathématique	52
4.1.1.	Géométrie du problème	52
4.1.2.	Définition des espaces fonctionnels	53
4.2.	Approximation de l'équation de Poisson	55
4.2.1.	Construction du modèle approché	56
4.2.2.	Formulation variationnelle du problème approché	60
4.2.3.	Estimation d'erreur a priori	63
4.2.4.	Validation numérique de l'approximation de l'équation de Poisson	68
4.2.5.	Bilan	69
4.3.	Modèles d'électrode virtuelle	69
4.3.1.	Préambule	69
4.3.2.	Modèle asymptotique	72
4.3.3.	Modèle radial	74
4.3.4.	Vérification de la conservation du courant de décharge	80
4.4.	Synthèse	82

### Troisième partie

## Implémentation et validation des modèles d'électrode virtuelle

---

<b>5.</b>	<b>Comportement du modèle asymptotique en dimension 1</b>	<b>85</b>
5.1.	Équations plasmas 1D	85
5.2.	Méthode de résolution numérique	87
5.2.1.	Discrétisation de l'espace inter-électrodes	87
5.2.2.	Description du schéma numérique	89
5.2.3.	Conditions aux limites	92
5.2.4.	Conditions de stabilité	93
5.3.	Étude de l'influence du modèle asymptotique sur une configuration fil-cylindre	94
5.4.	Application du modèle asymptotique à la simulation 1D d'une décharge fil-fil expérimentale	100
5.5.	Synthèse	106
<b>6.</b>	<b>Implémentation et étude des modèles d'électrode virtuelle en dimension 2</b>	<b>109</b>
6.1.	Implémentation 2D des modèles d'électrodes virtuelles	110
6.1.1.	Description des dispositifs	110

---

6.1.2.	Définition du domaine de calcul .....	110
6.1.3.	Construction du maillage .....	111
6.1.4.	Schémas de discrétisation .....	114
6.1.5.	Conditions aux limites .....	120
6.1.6.	Conditions de stabilité .....	121
6.2.	Étude des modèles d'électrodes virtuelles sur une configuration fil-cylindre ...	122
6.2.1.	Validation du modèle asymptotique .....	122
6.2.2.	Validation du modèle radial .....	125
6.2.3.	Comparaisons des temps de calcul .....	128
6.2.4.	Bilan sur l'étude de la configuration fil-cylindre .....	129
6.3.	Étude des modèles d'électrodes virtuelles sur un premier actionneur fil-fil : dispositif de Bérard et al. ....	132
6.3.1.	Validation du modèle asymptotique .....	133
6.3.2.	Validation du modèle radial .....	136
6.3.3.	Comparaison des temps de calcul .....	143
6.3.4.	Bilan sur la première configuration fil-fil .....	143
6.4.	Étude des modèles d'électrodes virtuelles sur un second actionneur fil-fil .....	146
6.4.1.	Courant électrique .....	147
6.4.2.	État stationnaire de la décharge .....	150
6.4.3.	Étude du régime de pulses périodiques .....	154
6.4.4.	Comparaison des temps de calcul .....	154
6.4.5.	Bilan sur la seconde configuration fil-fil .....	160
6.5.	Synthèse .....	160

<b>Conclusion et perspectives .....</b>	<b>161</b>
---	------------

## **Annexes**

---

<b>A. Valeurs des coefficients de la cinétique chimique .....</b>	<b>167</b>
---	------------

<b>B. Solution quasi-analytique d'une décharge fil-cylindre stationnaire .....</b>	<b>171</b>
--	------------

<b>Bibliographie .....</b>	<b>175</b>
----------------------------	------------

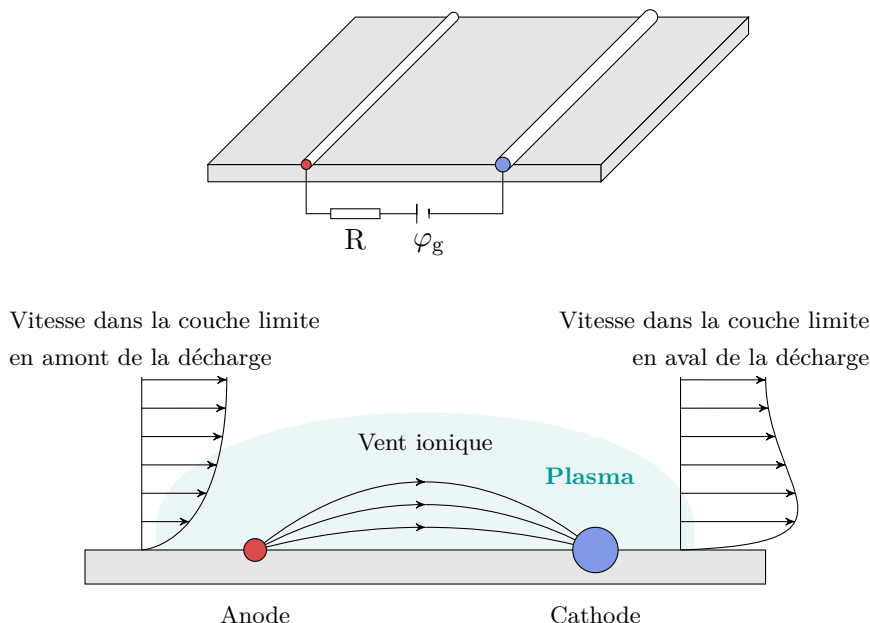


# Introduction

---

Au cours des deux dernières décennies, l'utilisation de décharges électriques pour le contrôle d'écoulements aérodynamiques a suscité un fort intérêt au sein de l'industrie et de la communauté scientifique. D'important efforts de recherche ont ainsi été menés dans le but d'étudier la viabilité d'une telle application et d'en maîtriser le fonctionnement. Ce nouveau type d'actionneurs, appelés actionneurs plasma, vise les mêmes objectifs que les dispositifs traditionnellement utilisés (actionneurs mécanique ou fluide) : il s'agit par exemple de modifier la transition laminaire-turbulent au sein d'une couche limite afin de prévenir ou obtenir des décollements, de diminuer la traînée ou augmenter la portance ou encore de réduire le bruit acoustique. Contrairement aux actionneurs actuels, ces dispositifs agissent directement sur les propriétés de l'écoulement (température, sensibilité aux forces électromagnétiques, ...) et permettent de convertir de l'énergie électrique en énergie mécanique. Cette approche présente l'avantage d'avoir des temps de commutation très courts (de l'ordre de la microseconde) et de ne nécessiter aucune partie mécanique mobile. À ce jour, ces actionneurs ne permettent cependant pas d'influer notablement sur des écoulements à grande vitesse (plus de  $50 \text{ m.s}^{-1}$ ) et des travaux théoriques et expérimentaux sont donc nécessaires pour en améliorer les performances.

À l'heure actuelle, les actionneurs plasma agissent sur l'écoulement selon deux modes différents : le mode thermique (chauffage du gaz) ou le mode mécanique (transfert de quantité de mouvement). En présence d'écoulement à grande vitesse on cherchera le mode d'action thermique (actionneurs DBD nanoseconde, pointe, micro-ondes, etc.) tandis que pour les écoulements à faible vitesse c'est le mode d'action mécanique qui prévaut (actionneurs de type DBD, couronnes, etc.). Les applications considérées dans le cadre de cette thèse rentrent dans cette dernière catégorie et nous ne considérerons donc que le phénomène correspondant, appelé vent ionique. Celui-ci résulte d'un transfert de quantité de mouvement des particules chargées vers les particules neutres du gaz. En effet, les électrons et les ions produits lors du développement de la décharge dérivent sous l'effet du champ électrique et rentrent en collision avec les particules neutres du gaz, leur cédant ainsi une partie de leur quantité de mouvement. Le vent ionique représente ainsi l'écoulement généré par la mise en mouvement des neutres.



**Figure 1** Exemple d'un actionneur plasma fil-fil (haut) et de son action sur la couche limite d'un écoulement (bas)

Au fil des années, de nombreuses géométries d'actionneurs ont été proposées dans le but d'obtenir un vent ionique maximal et d'optimiser son action sur l'écoulement. Parmi l'ensemble des dispositifs existant, deux sortes d'actionneurs ont été particulièrement étudiés : ceux générant des décharges à barrière diélectrique (DBD) et ceux générant des décharges couronnes, toutes deux s'étant montrés capables d'engendrer des vents ioniques de plusieurs mètres par seconde. Dans le cas d'une DBD, les électrodes ont la particularité d'être séparées par un matériau solide non conducteur, tel que le Plexiglas, le verre ou bien les céramiques. Celui-ci permet d'empêcher la création d'arc électrique entre l'anode et la cathode mais impose l'emploi d'une tension alternative afin d'évacuer la charge qui, sinon, s'y accumulerait et provoquerait au bout d'un certain temps sa destruction. Ce type de dispositif a fait l'objet de nombreuses études, notamment par les équipes de Roth [45] et de Moreau [24].

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons plutôt aux décharges couronnes. Celles-ci sont générées par deux électrodes encastrées sur une même face d'un matériau diélectrique. À l'inverse des DBD, les électrodes sont donc isolées par l'air qui, en présence d'un champ électrique suffisamment intense, peut devenir conducteur et mener au passage à l'arc. Ces décharges autorisent cependant l'emploi d'un régime de tension continue et constituent des dispositifs plus efficaces en terme de conversion d'énergie électrique en énergie mécanique. Les décharges couronnes ont été particulièrement étudiées par les équipes d'Artana et de Moreau [37, 38]. Sosa *et al.* [52] ont en particulier démontré leur capacité à réattacher la couche limite pour des vitesses allant jusqu'à  $25 \text{ m.s}^{-1}$  en installant deux électrodes sur le bord d'attaque d'un profil d'aile. Seuls quelques travaux parmi ceux existants ont été cités ici, le lecteur intéressé pourra se reporter à la revue beaucoup plus exhaustive établie par Moreau [36] sur les actionneurs plasma en général et sur leur action sur l'écoulement.

---

S'il existe une littérature très fournie sur l'étude expérimentale des écoulements en présence de décharges électriques, comparativement peu d'auteurs se sont attachés à la modélisation de ces actionneurs plasma et à la simulation numérique de leur effet sur l'écoulement. Le premier modèle de vent ionique fut apporté en 1961 par Robinson [43]. Celui-ci relie de manière empirique la vitesse  $v_i$  du vent ionique à l'intensité du courant de décharge  $i$  par une équation du type  $v_i \simeq \sqrt{i}$ . Par la suite d'autres modèles plus complexes ont été proposés. Parmi les premières recherches effectuées sur le sujet se trouvent les travaux de Colver et El-Khabiry [10, 11], qui ajoutent un terme de force électrique aux équations de la mécanique des fluides bidimensionnelles et stationnaires, couplées à l'équation de Poisson et à la conservation de la charge. Cette force est cependant portée uniquement par les ions positifs et la décharge n'est pas simulée au moyen d'un modèle de cinétique chimique.

À travers la simulation de décharges électriques sur des temps caractéristiques de l'écoulement, les travaux les plus récents visent à obtenir une estimation plus précise de la force électrique en termes de distribution dans l'espace et dans le temps. En faisant le bilan de la quantité de mouvement totale transférée aux particules neutres, Boeuf et Pitchford [3] décrivent cette force volumique de manière simplifiée et l'exprime directement en fonction des caractéristiques du plasma. Ils la définissent comme la charge totale multipliée par le champ électrique  $\mathbf{E}$ , à laquelle s'ajoute des termes de gradients de pression des espèces. Dans les zones non neutres du plasma, ces gradients deviennent négligeables et cette expression de la force se simplifie. Ainsi, en considérant un plasma composé d'électrons, d'ions positifs et d'ions négatifs (respectivement indicés par  $e$ ,  $+$  et  $-$ ), la force électrique  $\mathbf{F}$  devient :

$$\mathbf{F} = q_e(n_+ - n_- - n_e)\mathbf{E},$$

où  $q_e$  est la charge élémentaire et où  $n_k$  est la densité de l'espèce  $k$ . Cette expression révèle une compétition entre les particules de charge opposées, celles-ci se déplaçant dans des sens contraires. En présence d'un plasma neutre, cette force est nulle et cette expression n'est plus valide. La force électrique exercée sur le gaz est alors uniquement due aux gradients de pression des espèces. En aérodynamique, ceux-ci sont généralement trop faibles pour agir efficacement sur l'écoulement.

Du fait de la complexité des phénomènes qui les composent, les décharges électriques se produisant dans l'air sont cependant particulièrement difficiles à simuler. Celles-ci sont régies par des mécanismes fortement non-linéaires et multi-échelles, à la fois en temps et en espace. En effet, pour qu'une décharge puisse se déclencher, il est nécessaire que le champ électrostatique imposé par l'actionneur soit suffisamment intense pour provoquer l'ionisation de l'air. La génération d'un tel champ est le plus souvent obtenue à l'aide de dispositifs asymétriques présentant une forte singularité à proximité d'une des électrodes. Le champ électrique variant très fortement dans cette région et la cinétique chimique de l'air dépendant exponentiellement de celui-ci, un maillage particulièrement fin est nécessaire pour résoudre correctement la dynamique de la décharge. Associée à une vitesse des électrons très élevée du fait de leur grande mobilité dans le champ, cette contrainte impose aux schémas numériques classiques d'importantes limitations sur le pas de temps d'intégration pour que leur stabilité soit assurée. Les temps de calcul alors requis pour simuler la décharge sur des temps longs (plusieurs millions de fois les temps caractéristiques de la décharge) est souvent prohibitif et limite l'intérêt des simulations numériques pour, par exemple, l'optimisation des actionneurs par le biais d'études paramétriques ou tout simplement pour améliorer la compréhension des phénomènes qui régissent les décharges.

Plusieurs schémas numériques ont été proposés afin de pallier ces limitations et réduire le temps de calcul nécessaire aux simulations, l'un des plus connus étant le schéma exponentiel de

Scharfetter et Gummel [47]. Mis en oeuvre par Lagmich [30] pour la simulation d'une DBD, ce schéma semi-implicite a permis une étude paramétrique poussée de ce dispositif. Il s'est cependant montré particulièrement diffusif car uniquement précis au premier ordre en espace. Plus récemment, Unfer [54, 53] a proposé un schéma d'intégration asynchrone permettant une réduction du temps de calcul d'environ un ordre de grandeur dans le cadre d'une décharge DBD.

Cette thèse, effectuée à l'ONERA/DTIM s'inscrit dans une même optique de réduction du temps de calcul nécessaire à la simulation de décharges électriques et traite plus particulièrement de la modélisation et de la simulation de décharges couronnes. Elle s'appuie notamment sur les recherches effectuées durant la thèse de Jean-Charles Matéo-Vélez [34] à l'ONERA/DMAE portant sur la modélisation de décharges couronnes et ayant en particulier abouti au développement d'un code numérique 2D structuré permettant leur simulation. Bien que les premières simulations effectuées avec ce code aient été très encourageantes, un raffinement du maillage est apparu nécessaire. Les temps de calcul requis devenant alors prohibitifs, ce raffinement n'a pas été possible et le besoin d'un outil de simulation plus efficace s'est imposé. Les travaux présentés dans ce manuscrit visent à apporter une réponse à ce besoin à travers une modélisation adéquate des mécanismes régissant l'évolution des décharges couronnes.

La démarche adoptée dans cette thèse consiste à remplacer les équations décrivant le plasma par un modèle simplifié, ce dans un petit voisinage autour des électrodes, où le champ électrique est le plus singulier et où les contraintes numériques sont particulièrement fortes. La construction de ce modèle simplifié se base sur l'étude des singularités du champ électrique et est faite de manière à ne pas être contraint par les limites de pas de temps classiques. Le pas de temps maximal est ainsi celui imposé par le reste du domaine et est donc beaucoup moins contraignant.

Bien qu'abordés dans l'optique d'applications pour l'aérodynamique, notons que l'étude des décharges couronnes et le développement d'un outil numérique efficace pour leur simulation présentent de nombreux autres domaines d'application. En effet, ces décharges se retrouvent actuellement dans beaucoup d'autres problématiques : elles se forment le long des lignes hautes tensions ou sont par exemple utilisées pour la dépollution. De nouvelles applications sont encore découvertes, avec, par exemple, l'apparition récente de systèmes de refroidissement solide pour les ordinateurs, où des décharges couronnes sont employées en remplacement des traditionnels ventilateurs [28].

En préambule à ce travail, le **chapitre 1** propose quelques rappels sur les plasmas en général et sur les plasmas de décharge en particulier. Après avoir décrit les phénomènes essentiels qui apparaissent en leur sein, nous nous attachons à décrire les particularités des plasmas de décharge à pression atmosphérique. Les décharges couronnes et leur principaux mécanismes de fonctionnement sont finalement présentés.

Le **chapitre 2** traite de la modélisation mathématique de ces décharges et détaille en particulier l'ensemble des hypothèses sous-jacentes à la modélisation fluide, très couramment utilisé dans le domaine de la simulation de décharge. Un des points délicat lors de la construction d'un tel modèle est le choix d'un modèle simplifié pour la cinétique chimique de l'air, qui est particulièrement riche. Le choix adopté au cours de cette thèse s'est porté vers une description de la chimie de l'air se limitant aux réactions les plus prépondérantes, à savoir l'ionisation des particules, l'attachement électronique et les mécanismes de recombinaison.

Les chapitres suivant cette partie introductive présentent l'origine, le principe et la construction mathématique des modèles développés dans ce manuscrit. Le **chapitre 3** détaille plus



---

précisément le contexte numérique lié à la simulation de plasmas de décharge et identifie en particulier les contraintes de pas de temps limitantes, qui sont en premier lieu la condition CFL et le pas de temps diélectrique. Dans un second temps, ce chapitre présente un premier modèle approché pour la simulation de décharges couronnes de type fil-fil. Ce modèle stationnaire 1D est construit à l'aide d'une méthode de développements asymptotiques raccordés par rapport à un petit paramètre représentant l'épaisseur de la couche où le champ électrique est assez intense pour permettre l'ionisation des particules. Au vu des résultats prometteurs obtenus, cette analyse de la décharge a inspiré la méthode développée au cours de cette thèse, dite de l'électrode virtuelle et qui est brièvement présentée ensuite. Celle-ci consiste à remplacer la résolution classique des équations plasmas dans un petit voisinage des électrodes par un modèle simplifié, obtenu par une analyse similaire de la singularité du champ électrique.

Le **chapitre 4** traite du développement mathématique des modèles d'électrode virtuelle. Une première section est dédiée à l'étude du champ électrique généré par une électrode filaire ou par une pointe et un modèle approché est proposé pour son calcul. En négligeant la charge d'espace dans un petit voisinage situé autour de l'électrode, il est possible d'obtenir une description analytique du champ ne dépendant que du potentiel sur la frontière reliant cette petite région au reste du domaine, où la charge est toujours prise en compte. À travers une estimation de l'erreur introduite par ce modèle, nous montrons que celle-ci décroît – pour un fil comme pour une pointe – en  $o(\varepsilon)$ , où  $\varepsilon$  est la taille du petit domaine ne tenant pas compte de la charge d'espace. Les résultats obtenus montrent également que, pour un fil, le champ électrique est principalement dirigé selon la direction radial par rapport au centre de l'électrode. En négligeant les effets transverses à proximité de l'électrode, il est possible de construire des modèles approchés ne dépendant de la coordonnée  $\theta$  que par rapport aux conditions aux limites sur la frontière reliant la petite région où le modèle est appliqué au reste du domaine. Deux modèles de ce type sont développés. Le premier, appelé modèle asymptotique, néglige la charge au voisinage de l'électrode et ne considère que les réactions prépondérantes de la cinétique chimique, ce qui lui permet d'admettre une solution quasi-analytique. L'autre, appelé modèle radial, tient compte de ces phénomènes et ne conserve que l'hypothèse sur la direction du champ.

Les **chapitres 5 et 6** sont ensuite consacrés à la validation numérique de ces modèles et à l'estimation du gain qu'ils apportent du point de vue du temps de calcul, le chapitre 5 traitant de la première implémentation faite en dimension 1 et le chapitre 6 étudiant le comportement des modèles en dimension 2. Les résultats obtenus sont en bon accord avec la solution de référence calculée en résolvant les équations du plasma à l'aide d'une méthode explicite usuelle et un gain d'environ un ordre de grandeur est généralement observé sur le temps de calcul. Bien que monodimensionnel, nous montrons que le modèle radial réagit correctement à la présence de charge d'espace importante et qu'il a la capacité de reproduire des régimes de pulses.

Un résumé des travaux effectués et un bilan sur les résultats obtenus clôt finalement ce manuscrit et les voies de développement possibles pour améliorer plus encore l'efficacité et la précision du modèle sont discutées.



— Première partie —

**Les décharges plasma à pression  
atmosphérique**



# Chapitre 1

## Physique des décharges plasma

### Sommaire

---

<b>1.1. Généralités sur les plasmas</b> .....	10
1.1.1. Définitions .....	10
1.1.2. Classification des plasmas .....	10
1.1.3. Échelles caractéristiques .....	11
1.1.4. Processus réactionnels .....	12
<b>1.2. Les décharges hors équilibre dans l'air</b> .....	13
1.2.1. Les décharges à basse pression .....	14
1.2.2. Les décharges à pression atmosphérique .....	16
1.2.3. Les décharges couronnes .....	18

---

Souvent considérés comme le "quatrième état de la matière", les plasmas composent plus de 99% de la matière connue. Dans la terminologie actuelle, ce terme désigne de manière générale tout gaz électriquement neutre partiellement ou totalement ionisé et recouvre un grand nombre de sous types aux caractéristiques très différentes.

Ce chapitre a pour but de situer les décharges plasmas utilisées dans le domaine de l'électrohydrodynamique parmi l'ensemble des plasmas existants. Quelques rappels généraux sur les plasmas sont tout d'abord donnés et les principaux mécanismes présents dans un plasma sont décrits. On s'attache ensuite à décrire les caractéristiques spécifiques des décharges électriques à pression atmosphérique, représentatives des décharges étudiées dans ce manuscrit. Le lecteur intéressé pourra trouver de plus amples détails sur la physique des plasmas et sur les décharges électriques dans des ouvrages de référence, tels que [18, 33, 42].

### 1.1 Généralités sur les plasmas

#### 1.1.1 Définitions

Un gaz ionisé est un gaz ayant été soumis à une énergie suffisante pour dissocier les électrons des atomes. On parle alors de phénomène d'ionisation et on définit le degré d'ionisation  $\alpha$  du gaz par :

$$\alpha = \frac{n_e}{n_{tot}},$$

où  $n_e$  est le nombre d'électrons et  $n_{tot}$  est le nombre total de molécules – chargées ou non – constituant le gaz. Lorsque  $\alpha = 1$ , le gaz est totalement ionisé et lorsque  $\alpha \ll 1$ , on dit que le gaz est faiblement ionisé.

Un gaz ionisé est donc un mélange composé de molécules neutres, d'ions positifs et négatifs ainsi que d'électrons et présente un comportement collectif différent d'un gaz neutre. En effet, ce mélange est sensible aux forces électromagnétiques et les particules chargées peuvent être influencées par une source externe ou interagir les unes avec les autres. Dans un gaz suffisamment ionisé, ces interactions entre particules deviennent suffisamment importantes pour influencer sur le comportement de l'ensemble et on parle alors de plasma.

#### 1.1.2 Classification des plasmas

Les plasmas peuvent se présenter sous des formes très différentes et sont généralement classifiés selon deux critères. Un premier critère est l'équilibre thermodynamique du mélange et la température des différentes particules qui le composent. Un second critère est le degré d'ionisation du gaz, pouvant varier de  $\alpha \ll 1$  à  $\alpha \simeq 1$ . On classe alors les plasmas selon les catégories suivantes :

- **Les plasmas fortement ionisés** : les espèces ont une température identique dont la valeur atteint quelques millions de degrés. Le plasma est alors totalement ionisé. Ces plasmas se retrouvent par exemple au coeur des étoiles, où se produisent des réactions de fusions nucléaires.
- **Les plasmas faiblement ionisés**, parmi lesquels on distingue deux sous-groupes :
  - ★ **Les plasmas thermiques** : les électrons et les ions sont à l'équilibre thermodynamique contrairement aux neutres qui ne le sont pas forcément. En général, les neutres ont une température de quelques milliers de degrés tandis que les particules chargées ont une température de quelques dizaines de milliers de degrés. Ces plasmas se retrouvent par exemple dans les arcs électriques utilisés pour la soudure ou la découpe.
  - ★ **Les plasmas froids** : le mélange est en fort déséquilibre. Les électrons ont une température élevée tandis que les ions et les neutres sont à l'équilibre. Ce type de plasma permet d'obtenir un milieu doté de propriétés chimiques avantageuses tout en gardant des caractéristiques thermodynamique raisonnables et dispose ainsi de nombreuses applications. Les plasmas dans les luminaires, de dépollution ou de décontamination, ainsi que les plasmas interstellaires entrent dans cette classe.

### 1.1.3 Échelles caractéristiques

L'une des principales caractéristiques d'un plasma est d'être électriquement neutre. Cette neutralité est assurée lorsque la densité de particules chargées est suffisamment importante. En effet, ces particules génèrent des champs électriques susceptibles d'agir sur les autres particules et les différentes espèces se répartissent alors de façon à neutraliser localement le milieu. Ces interactions entre particules donnent naissance à la notion d'oscillation plasma autour de cet état de neutralité et amènent à définir plusieurs longueurs caractéristiques d'interaction entre les particules chargées.

#### 1.1.3.1 Oscillation plasma

Considérons un plasma neutre et à l'équilibre constitué d'un nuage d'électrons confiné par un nuage d'ions et de neutres. Si le nuage d'électrons se déplace, la neutralité du gaz n'est plus vérifiée et des forces coulombiennes intenses se créent. Du fait de leur faible masse, les électrons se déplacent alors très rapidement et ont tendance à être ramenés vers leur position d'équilibre en oscillant autour des ions. Ce phénomène est appelé oscillation plasma.

En supposant que les électrons n'entrent pas en collision avec les particules proches, que le plasma n'est pas affecté par un champ extérieur et que la température électronique n'est pas trop élevée, il est possible d'obtenir la pulsation  $\omega_p$  de l'oscillation plasma en résolvant l'équation du mouvement des électrons linéarisée autour de l'état d'équilibre, les ions étant supposés immobiles [18]. Nous avons alors :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e q_e^2}{m_e \epsilon_0}},$$

avec  $m_e$  la masse atomique des électrons,  $q_e$  la charge élémentaire,  $\epsilon_0$  la permittivité du vide et  $n_e$  la densité électronique. Pour une densité  $n_e$  de  $10^{18} \text{ m}^{-3}$  classiquement rencontrée en laboratoire, on a  $\omega_p \sim 10^{11} \text{ s}^{-1}$ . La fréquence des oscillations plasma se définit donc par :

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}.$$

Il s'agit d'une fréquence fondamentale intervenant à tout instant dans la physique des plasmas.

#### 1.1.3.2 Longueur de Debye

Lorsqu'un déséquilibre de charge se crée dans un plasma, les espèces ont tendance à se répartir de façon à retrouver un état d'équilibre. Si une particule de charge  $q$  perturbe le plasma quasi-neutre, les particules de charge opposée sont attirées vers la charge et forment un écran autour celle-ci. Ainsi, au-delà d'une certaine distance la charge  $q$  n'a plus d'effet sur les particules du plasma et on dit qu'elle est écrantée. Cette distance, notée  $\lambda_D$ , est appelée longueur de Debye et représente une longueur critique d'interaction collective. Pour les électrons, Delcroix [18] la définit à travers l'étude de l'équation de Poisson monodimensionnelle régissant une gaine composée d'électrons et obtient :

$$\lambda_D^2 = \frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e q_e^2},$$

avec  $\epsilon_0$  la permittivité du vide,  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $T_e$  la température électronique,  $n_e$  la densité électronique et  $q_e$  la charge élémentaire.

Pour que l'écrantage soit efficace et ait vraiment lieu, il faut néanmoins que le plasma soit assez dense pour fournir un nombre suffisant de particules de charge opposée à la charge  $q$  et que la dimension caractéristique du domaine d'expérience soit très grande devant  $\lambda_D$ . Ces deux conditions sont satisfaites pour de nombreux cas, notamment pour les plasmas utilisés en aérodynamique.

### 1.1.4 Processus réactionnels

De par leur sensibilité aux forces électromagnétiques, les particules chargées d'un plasma sont très mobiles et les collisions avec les particules avoisinantes sont fréquentes. Ces collisions peuvent être de deux types : élastiques ou inélastiques. Dans le cas d'une collision élastique entre deux particules, il y a échange de quantité de mouvement et d'énergie cinétique, mais l'énergie totale est conservée. Les particules ne changent pas de structure interne et sont simplement déviées. À l'inverse, un choc inélastique produit un changement de la structure interne des particules et amène potentiellement à leur création ou à leur destruction. Le plasma est donc le siège d'incessants processus réactionnels, qui mettent en jeu photons, électrons, ions, atomes et molécules. À ceux-ci s'ajoutent divers mécanismes de production d'espèces chargées à partir de surfaces.

#### 1.1.4.1 Les processus radiatifs

Les processus radiatifs regroupent l'ensemble des mécanismes d'absorption ou d'émission de photons. Lorsqu'une particule absorbe un photon, un électron de son nuage électronique peut passer sur une couche supérieure, voire se détacher de la particule, et celle-ci se retrouve alors dans un état excité ou ionisé. À l'inverse, l'émission de photons peut avoir lieu lors de la désexcitation d'une particule.

#### 1.1.4.2 Les processus électroniques

Les processus électroniques résultent d'une collision entre un électron et un atome ou une molécule. Ceux-ci peuvent être très nombreux selon le gaz considéré. Dans le cas de l'air, les réactions électroniques dominantes sont les suivantes :

- **Ionisation par choc** : il s'agit du principal mécanisme de production d'électrons. L'énergie fournie par la collision d'un électron avec une molécule neutre est suffisante pour arracher un électron de son nuage électronique. La molécule neutre est alors ionisée et un électron supplémentaire est créé.
- **Excitation des molécules neutres** : lorsque l'énergie transférée par le choc n'est pas suffisante pour arracher un électron, elle peut néanmoins permettre à un électron du nuage électronique de passer sur une couche supérieure. La particule se retrouve alors excitée et peut devenir un métastable.
- **Attachement électronique** : dans certains gaz, comme le dioxygène, les électrons ont tendance à s'attacher aux molécules neutres. Ces gaz, dits électronégatifs, ont donc la particularité de permettre l'apparition d'ions négatifs.
- **Recombinaison** : cette réaction se produit lors de la collision entre un électron et un ion positif. L'ion regagne alors un électron et produit une molécule neutre.



- **Détachement électronique** : une molécule excitée entre en collision avec un ion négatif et lui transmet son surplus d'énergie, permettant à un électron de s'en détacher.

### 1.1.4.3 Les processus moléculaires et atomiques

Ces processus regroupent entre autres l'ionisation ou l'excitation de molécules ou atomes suite à un choc inélastique ou à l'absorption d'un photon, ainsi que la réassociation d'atomes pour former une molécule ou inversement la dissociation d'une molécule pour former plusieurs atomes ou molécules.

### 1.1.4.4 Productions d'électrons à partir d'une surface

Lorsque l'énergie fournie à une surface est suffisante, des électrons sont arrachés de celle-ci et sont réinjectés dans le système. Cet apport supplémentaire d'électrons peut être particulièrement important dans le cadre des actionneurs plasmas car il s'agit d'une source continue d'électrons permettant l'entretien du plasma.

L'énergie nécessaire à l'arrachement d'électrons sur une surface est appelée fonction de travail et peut avoir différentes sources [42] :

- **Émission thermique** : lorsqu'un métal est porté à une certaine température, certains électrons acquièrent une énergie suffisante pour s'en détacher.
- **Émission par effet de champ** : en présence d'un champ électrique intense – approximativement  $10^8 \text{ V.m}^{-1}$  – des électrons peuvent être arrachés à la surface du métal. De tels champs apparaissent le plus souvent très localement en raison des nombreuses aspérités naturellement présentes sur la surface du métal.
- **Émission secondaire** : ce type d'émission peut être déclenché par différentes particules : ions positifs, atomes excités, électrons et photons. La collision de ces particules avec le matériau permet à un certain nombre d'électrons de s'échapper. L'émission la plus importante pour les applications visées est celle produite par la collision entre les ions positifs et la cathode, par conséquent le terme émission secondaire se référera par la suite à ce type d'émission. Le flux d'électrons produit est proportionnel au flux d'ions arrivant à la cathode et le rapport de ces flux, noté  $\gamma$ , est appelé coefficient d'émission secondaire.

## 1.2 Les décharges hors équilibre dans l'air

Le terme décharge se rapportait initialement à la décharge se produisant entre les deux électrodes planes d'un condensateur plongé dans un gaz : lorsque le potentiel  $V$  appliqué entre les deux électrodes est suffisamment important, on observe alors l'apparition d'un courant dans le circuit. Ce courant a pour origine le déplacement des électrons – produits par ionisation du gaz – de la cathode vers l'anode. La tension nécessaire à l'apparition de ce courant est appelée tension disruptive ou tension de claquage et dépend principalement de deux paramètres : la pression du gaz  $P$  et la distance inter-électrodes  $d$ .

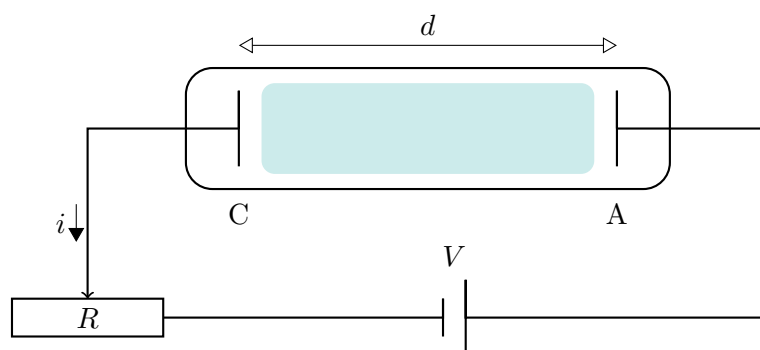
De nos jours, le terme décharge désigne plus généralement tout mécanisme d'ionisation d'un gaz sous l'effet d'un champ électrique ou électromagnétique externe. Les mécanismes régissant les décharges électriques peuvent fortement varier selon le gaz considéré et les valeurs de  $P$  et de  $d$ . On distingue classiquement deux sortes de décharges : les décharges à faible et à forte valeur  $P \times d$ , appelées respectivement décharges à basse et à haute pression. Si les

décharges à basse pression ont été très étudiées et sont correctement décrites par la théorie proposée par Townsend, les décharges à haute pression – qui incluent les décharges à pression atmosphérique – sont quant à elles régies par des mécanismes plus complexes.

Cette section décrit les principaux mécanismes régissant les décharges électriques. De brefs rappels sur les décharges à basse pression permettront d'introduire les mécanismes communs à toutes les décharges. Les mécanismes propres aux décharges à haute pression et en particulier aux décharges dans l'air y sont alors présentés.

### 1.2.1 Les décharges à basse pression

Les premières études sur les mécanismes d'initiation de décharge ont été menées par Townsend au début des années 1930. Le dispositif étudié, représenté schématiquement sur la figure 1.1, est composé de deux électrodes métalliques planes soumises à une tension continue  $V$  et séparées par une distance  $d$ . Le dispositif est placé dans une enceinte fermée, contenant un gaz dont la pression  $P$  est de l'ordre du torr ( $1 \text{ torr} \simeq 1,3 \times 10^{-3} \text{ atm}$ ).



**Figure 1.1** Dispositif de référence étudié par Townsend

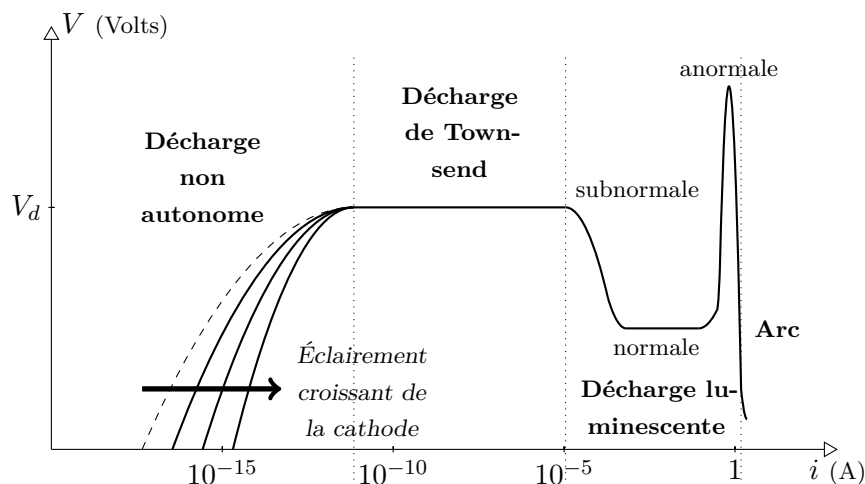
#### 1.2.1.1 Le mécanisme d'avalanche électronique

Sous l'effet du champ électrique généré par les électrodes, les électrons initialement présents dans le système se mettent à dériver de la cathode vers l'anode et entrent en collision avec les particules neutres du gaz. Si l'énergie cinétique qu'un électron acquiert entre deux collisions est suffisante, il est alors capable d'ioniser un neutre en arrachant un des électrons de son nuage électronique. L'électron initial et le nouvel électron sont alors de nouveau accélérés sous l'effet du champ et le phénomène se reproduit à nouveau. Cet enchaînement de réaction est appelé avalanche électronique et son efficacité dépend donc du libre parcours moyen des particules, de la distance séparant les deux électrodes, de la différence de potentiel appliquée. En présence d'un gaz électronégatif, le processus d'attachement électronique s'oppose à ce phénomène.

#### 1.2.1.2 Régimes de décharges

Pour un dispositif et un gaz donnés, différents régimes de décharges sont observés en fonction du potentiel  $V$  appliqué. Ces régimes sont reportés figure 1.2 et leurs caractéristiques sont décrites ci-dessous :

- **Décharge non autonome** : caractérisée par de faibles courants, ce type de décharge n'est pas capable de s'auto-entretenir. Le phénomène d'avalanche électronique n'est pas suffisamment efficace et un apport externe d'électrons – le plus souvent par photoionisation – est nécessaire.
- **Décharge de Townsend** : il s'agit du premier régime de décharge dit auto-entretenu ou autonome. Suffisamment d'électrons sont alors produits par le bombardement ionique à la cathode pour que la décharge ne repose plus sur aucune autre source que le champ extérieur. Les densités électroniques sont faibles et les effets résultants de la charge d'espace sont négligeables.
- **Décharge luminescente** : ce type de décharge fonctionne selon les mêmes mécanismes que la décharge de Townsend mais est caractérisé par de forts effets de charge d'espace. Sous l'effet du champ électrique, les électrons se déplacent très rapidement et laissent les ions derrière eux. La décharge n'est plus alors dirigée par le champ extérieur mais par le champ généré par le déséquilibre de charge d'espace et la tension appliquée nécessaire à l'entretien de la décharge diminue.
- **Régime d'arc** : ce régime présente une très faible tension de maintien et de grandes intensités de courant. La décharge se présente alors sous la forme d'un filament incandescent dégageant une forte puissance thermique. Les mécanismes qui régissent l'évolution du plasma sont alors très différents (effets thermoioniques, émission par effet de champ, ...) et le maintien de ce régime nécessite un matériel adapté, pouvant supporter de fortes chaleurs et des courants très intenses.



**Figure 1.2** Caractéristiques courant-tension des différents régimes de décharges

Le passage d'une décharge non autonome à une décharge auto-entretenu nécessite donc une tension appliquée au moins égale à la tension de claquage  $V_d$ . Pour des tensions inférieures à cette tension, Townsend relie le courant électronique  $i(x)$  à une distance  $x$  de la cathode au courant électronique extrait à la cathode par la relation suivante [33, 42] :

$$i(x) = i_0 \frac{e^{\alpha x}}{1 - \gamma(e^{\alpha x} - 1)},$$

où  $\alpha$  est appelé premier coefficient de Townsend et représente le nombre de collisions ionisantes réalisées par un électron par unité de longueur. Le coefficient  $\gamma$  représente quant à lui le coefficient d'extraction d'électrons secondaire à la cathode et est appelé second coefficient de Townsend. Pour des tensions avoisinant la tension de claquage, l'énergie acquise par les ions augmente et l'extraction d'électron par bombardement ionique à la cathode gagne en efficacité de manière conséquente. Le coefficient  $m = \gamma(e^{\alpha x} - 1)$  passe alors de valeurs proches de 0 à des valeurs proches de 1 et le courant croît de manière sur-exponentielle. La relation  $m = 1$  marque le passage d'une décharge non autonome à une décharge auto-entretenu et est appelée critère de Townsend ou critère d'auto-entretien. Cette relation est utilisée pour construire les courbes de Paschen, reliant la tension disruptive au produit  $P \times d$ .

### 1.2.2 Les décharges à pression atmosphérique

Bien adaptée pour décrire les décharges à faible produit  $P \times d$ , la théorie de Townsend n'est cependant plus valable pour décrire les décharges à haute pression. En effet, lorsque le produit  $P \times d$  dépasse un certain seuil – de l'ordre de 300-500 torr.cm selon le gaz considéré – la structure de la décharge change et de fortes inhomogénéités spatiales apparaissent. La décharge se développe alors en canaux très fins, appelés micro-décharges, pouvant présenter de nombreuses ramifications. Ces micro-décharges ont des durées de vie très faible et peuvent dégénérer vers un régime d'arc transitoire appelé étincelle ou *spark* en anglais. Une seconde observation en contradiction avec la théorie de Townsend est l'apparition de pulses de courant, signes de décharges intermittentes dont la durée est environ 100 fois inférieure au temps caractéristique de dérive des ions de l'anode vers la cathode. Les ions formés par avalanche électronique n'ont donc pas le temps d'atteindre la cathode pour fournir de nouveaux électrons au système. À partir de la fin des années 1930, plusieurs études – menées principalement par les groupes de Meek, Loeb et Raether – s'attachèrent à expliquer ces phénomènes propres aux décharges haute pression.

#### 1.2.2.1 Le mécanisme d'avalanches successives

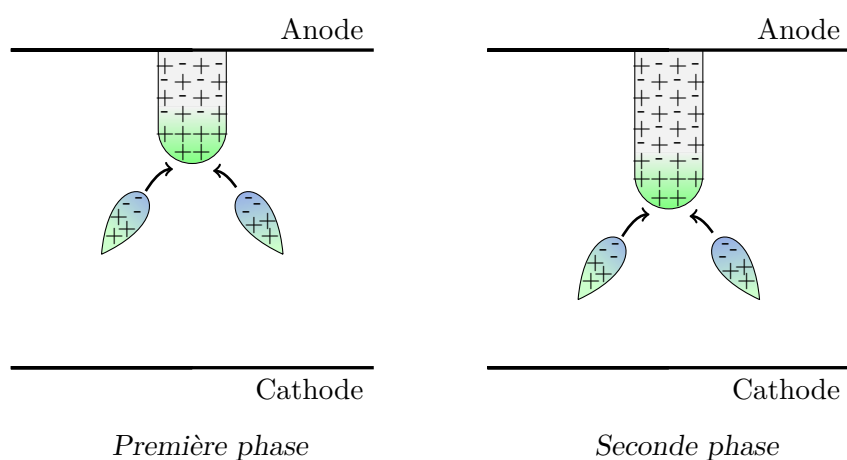
Une première théorie proposée fut le mécanisme d'avalanches successives. Cette théorie stipule que le passage répété d'avalanche électronique amène à la création d'un champ de charge d'espace très intense pouvant déclencher le claquage à haute pression. Ce mécanisme se base sur la grande différence de mobilité entre les électrons et les ions, ces derniers étant supposés quasi-immobiles pendant le temps de dérive des électrons. Cette théorie nécessite cependant un champ Laplacien relativement important dans tout l'espace inter-électrode et peut donc difficilement être appliquée aux dispositifs constitués d'électrodes asymétriques, où le champ électrique est principalement localisé à proximité de la plus petite électrode. De plus les temps de claquage prédits par cette théorie sont encore beaucoup plus long que ceux observés expérimentalement.

#### 1.2.2.2 Les streamers

Par la suite, une seconde théorie a été proposée pour expliquer les phénomènes observés à haute pression, il s'agit du mécanisme des streamers, sorte d'ondes d'ionisation se propageant dans des micro-canaux dont le diamètre est de l'ordre de quelques microns. Le mécanisme à l'origine de l'apparition d'un streamer est une avalanche électronique appelée avalanche primaire. La différence de mobilité entre les électrons et les ions crée un déséquilibre de charge d'espace s'amplifiant avec le développement de l'avalanche. Lorsque la charge d'espace devient

suffisamment importante, le champ Laplacien est négligeable devant le champ ambipolaire induit par la présence de charge et une onde d'ionisation se déplaçant sous l'effet de son propre champ apparaît. Cette onde d'ionisation n'étant plus soumise au champ extérieur, elle n'a *a priori* pas de sens de propagation privilégié et peut donc se déplacer aussi bien de l'anode vers la cathode que dans le sens inverse. Deux type de streamers peuvent alors se créer, les streamers anodiques et les streamers cathodiques.

Le développement d'un streamer anodique est représenté schématiquement figure 1.3. Une avalanche primaire se crée et laisse dans son sillage une forte charge positive. Celle-ci attire alors les électrons voisins, déclenchant de nouvelles avalanches sur leur passage, appelées avalanches secondaires. Les électrons produits rejoignent alors la charge positive et créent un plasma tout en laissant derrière eux un front de charge positive. Le mécanisme peut alors se répéter, permettant ainsi une propagation très rapide du plasma et pouvant potentiellement créer un canal fortement conducteur entre les deux électrodes.



**Figure 1.3** Formation d'un streamer positif

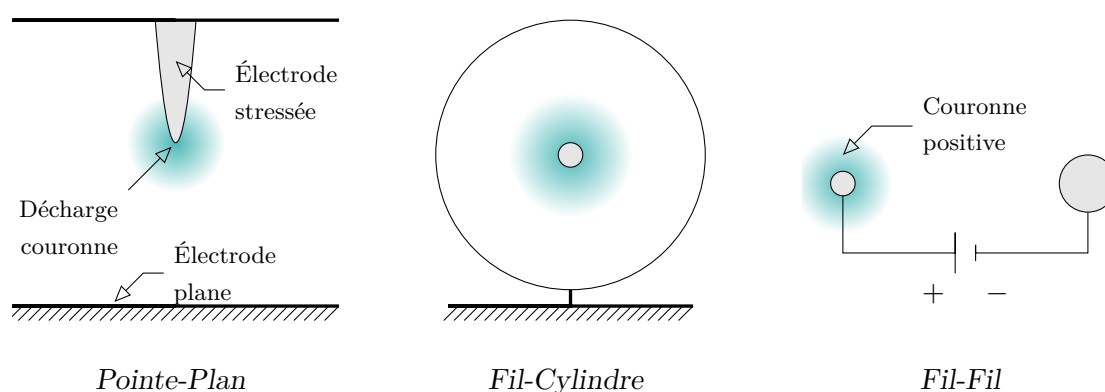
Le développement d'un streamer cathodique fonctionne sur un principe similaire. Si le champ ambipolaire est assez intense et si l'avalanche primaire n'a pas encore atteint la cathode, des avalanches secondaires se forment en front d'avalanche, laissant derrière eux une charge positive importante. Les électrons en front de l'avalanche primaire rejoignent alors ces ions positifs pour former un plasma, étendant ainsi le micro-canal en direction de l'anode. Le front du canal plasma est alors composé d'électrons issus des avalanches secondaires et le processus se répète jusqu'à ce que l'anode soit atteinte ou jusqu'à disparition des électrons en amont du canal.

### 1.2.2.3 Les streamers de retour

En raison de sa forte conductivité, le potentiel d'un streamer anodique diffère très peu du potentiel appliqué à l'anode. Ainsi, au fur et à mesure qu'un tel streamer se développe et se rapproche de la cathode, la chute de potentiel a lieu sur une distance de plus en plus courte et le champ électrique correspondant devient de plus en plus intense. Le nombre d'électrons émis par bombardement ionique croît très rapidement et une nouvelle onde d'ionisation est déclenchée. Celle-ci se propage alors le long du streamer en direction de l'anode, laissant derrière elle un canal fortement ionisé parcouru d'un courant très intense. En rejoignant l'anode, cette onde de retour relie les deux électrodes et une étincelle susceptible de dégénérer en arc se forme.

### 1.2.3 Les décharges couronnes

Les décharges couronnes sont des décharges hors équilibre se produisant en présence de champ fortement inhomogène. De tels champs sont généralement obtenus par un système d'électrodes asymétriques, où le rayon de courbure d'une des électrodes est très faible devant la distance inter-électrode. Le champ électrique généré est alors particulièrement intense près de cette électrode, appelée électrode stressée, et décroît rapidement au fur et à mesure que l'on s'en éloigne. Parmi l'ensemble des dispositifs correspondant à cette description, trois types de configurations sont généralement étudiées : ce sont les dispositifs fil-fil, fil-cylindre et pointe-plan, illustrés figure 1.4.



**Figure 1.4** Principaux dispositifs utilisés pour la génération de décharges couronnes

De par la distribution du champ électrique, les avalanches électroniques nécessaires à l'apparition d'une décharge couronne ne peuvent se produire qu'à proximité de l'électrode stressée. Ainsi, le déclenchement ou non de la décharge dépend principalement de la valeur maximale du champ électrique près de l'électrode stressée. Si la différence de tension appliquée est insuffisante, on ne mesure alors qu'un courant très faible, induit par les particules chargées naturellement présentes dans le gaz. Lorsqu'une certaine tension est atteinte, la décharge s'initie, accompagnée d'une émission de lumière autour de l'électrode stressée, et le courant mesuré augmente. On distingue alors deux types de décharges, appelées respectivement décharges couronnes positives ou négatives selon si l'électrode stressée a le rôle d'anode ou de cathode. Les mécanismes de fonctionnement de chacune de ces décharges sont brièvement décrits dans les sections suivantes.

#### 1.2.3.1 Les décharges couronnes positives

L'électrode stressée est ici l'anode et trois régimes de décharge apparaissent selon la tension appliquée. Le régime "burst", observé aux basses tensions, correspond à une succession de décharges scintillantes caractérisées par de faibles impulsions de courant. Une avalanche se déclenche près de l'anode et se développe en direction de la cathode. Les électrons sont évacués rapidement et laissent derrière eux une charge positive qui s'accroît avec le temps. Éventuellement, l'avalanche se transforme en streamer et le champ électrique devient alors trop faible pour entretenir la décharge. Les électrons sont alors absorbés à l'anode ou s'attachent aux particules neutres et les ions positifs dérivent en direction de la cathode jusqu'à ce que la charge d'espace diminue suffisamment pour qu'un nouveau pulse puisse s'initier. Le régime "burst"

correspond donc à des avalanches ou des streamers se succédant à une fréquence déterminée par le temps d'évacuation des ions et pouvant atteindre quelques kHz.

Lorsque la tension appliquée augmente, l'avalanche initiale donne naissance à des streamers beaucoup plus énergétiques et le comportement observé diffère selon l'efficacité des processus d'attachement. Dans un gaz fortement électronégatif, les électrons formés par les avalanches vont s'attacher aux molécules neutres et former ainsi un nuage d'ions négatifs à proximité de l'anode. Le nuage se développe et le champ de charge devient éventuellement suffisamment intense pour écranter le champ électrostatique. L'écran d'ions négatifs a alors un rôle de cathode et il s'ensuit un claquage de Townsend. L'apport d'électron est assuré par des processus photoioniques entre le nuage et l'anode et les pertes d'ions négatifs – dues à la dérive des ions positifs dans le nuage – sont compensées par les processus d'attachement. La décharge obtenue est ainsi stable et auto-entretenu. Lorsque le gaz n'est pas ou est peu électronégatif, les avalanches initiées près de l'anode se développent et acquièrent une charge d'espace suffisamment importante pour déclencher une onde d'ionisation cathodique. Les streamers se propagent alors en direction de la cathode et s'éteignent avant de l'atteindre, permettant ainsi à un nouveau cycle de s'initier.

Le troisième régime observé pour les décharges couronnes positives se produit pour de hautes tensions. Les streamers produits à proximité de l'anode sont alors suffisamment énergétiques pour traverser l'espace inter-électrode et atteindre la cathode. Il s'ensuit l'apparition d'une étincelle, voire d'un arc, par le phénomène d'onde de retour ou "return stroke" décrit dans la partie 1.2.2.3.

### 1.2.3.2 Les décharges couronnes négatives

À l'instar des décharges positives, les décharges couronnes négatives se développent à partir d'une avalanche électronique s'initiant à proximité de l'électrode stressée. En raison de l'intensité du champ électrique, les ions positifs ainsi créés dérivent rapidement en direction de la cathode et provoquent une forte extraction d'électrons par émission secondaire. Trois régimes de décharges peuvent alors être observés selon la tension appliquée.

Le premier régime est observé aux basses tensions et correspond à un régime de pulses appelés pulses de Trichel. Les électrons, extraits par bombardement ionique à la cathode et multipliés par le mécanisme d'avalanche électronique, dérivent vers les régions à faible champ électrique. Une partie d'entre eux s'attachent alors aux molécules neutres pour former des ions négatifs qui s'accumulent jusqu'à former une charge d'espace suffisamment importante pour écranter le champ électrostatique. L'ionisation ne peut alors plus avoir lieu, les populations d'électrons et d'ions diminuent et un nouveau pulse peut alors s'initier. La fréquence de ces pulses est déterminée par le temps caractéristique de dérive des ions positifs et est comprise entre quelques kHz pour les basses tensions et quelques MHz à haute tension.

Avec l'augmentation de la tension appliquée, l'ionisation est amplifiée et la durée entre deux pulses se réduit. Lorsqu'une certaine fréquence de pulse est atteinte, la décharge transite alors vers un régime de décharge lumineuse stationnaire entretenue par un mécanisme de Townsend. Si l'espace inter-électrodes est suffisamment grand, des streamers peuvent apparaître et une augmentation de la tension amène à la création d'étincelles ou au passage à l'arc, comme dans le cas des décharges couronnes positives.





## Chapitre 2

# Modèle de plasmas d'air

### Sommaire

---

<b>2.1. Construction du modèle et hypothèses sous-jacentes</b>	21
2.1.1. Évolution du champ électrique	22
2.1.2. Conservation de la masse	23
2.1.3. Équation de transport de la quantité de mouvement	23
2.1.4. Approximation du champ local	24
2.1.5. Courant électrique	24
2.1.6. Force électrique induite par la décharge	26
<b>2.2. Composition du plasma et production des espèces</b>	26
2.2.1. Modèle de cinétique chimique	26
2.2.2. Production d'électrons à la surface des électrodes	28
2.2.3. Hypothèse sur le fond d'espèces chargées dans l'air	28
<b>2.3. Conditions aux limites</b>	28
<b>2.4. Bilan sur le modèle décrivant le plasma</b>	29

---

Le chapitre précédent a permis de mettre en évidence la complexité des mécanismes rencontrés lors de l'étude de décharges plasmas à pression atmosphérique. Les interactions entre particules chargées et champ électromagnétique y sont particulièrement importantes et donnent naissance à des phénomènes fortement non-linéaires. À ceci s'ajoute une cinétique chimique de l'air très riche, constituée de nombreux processus réactionnels dont l'importance des uns par rapport aux autres est difficile à quantifier. Le choix du modèle mathématique pour l'évolution des particules chargées du plasmas et leur interaction avec l'écoulement est donc particulièrement délicat. Ce chapitre décrit le modèle utilisé au cours de cette étude et sur lequel les modèles approchés développés dans les chapitres suivants s'appuient.

### 2.1 Construction du modèle et hypothèses sous-jacentes

Deux grands types de modèles sont généralement utilisés pour la simulation des décharges électriques. Le premier modèle offre une description statistique de la décharge, où chaque

espèce  $k$  du gaz est décrite à l'aide d'une fonction de distribution  $f_k$  dont l'évolution est régie par l'équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{v}_k \cdot \nabla_x f_k + \nabla_v \left( f_k \frac{\mathbf{F}}{m_k} \right) = \left\{ \frac{\partial f_k}{\partial t} \right\}_C,$$

où  $m_k$  est la masse de l'espèce  $k$ ,  $\mathbf{v}$  est sa vitesse,  $\mathbf{F}$  est un terme de forces externes et où le terme  $\left\{ \frac{\partial f_k}{\partial t} \right\}_C$  représente la variation de  $f_k$  due aux collisions élastiques et inélastiques. Le grand nombre de collisions et de réactions qui se produisent dans les décharges à pression atmosphérique rend cependant ce type de modèle très complexe à résoudre : le libre parcours moyen des particules est très petit devant les dimensions du dispositif, ce qui impose des contraintes numériques fortes nécessitant l'utilisation de méthodes numériques adaptées, généralement de type Lagrangienne. À partir d'un certain niveau de densité, une description macroscopique du gaz leur est souvent préférée.

La construction de ces modèles macroscopiques, usuellement appelés modèles hydrodynamiques ou modèles fluides, fait appel à la théorie de la cinétique des gaz dilués et a fait l'objet de traitements détaillés, notamment dans [25]. Ces modèles sont composés d'un ensemble d'équations de transport, dérivées à partir des équations de Boltzmann et obtenues selon la méthode rappelée dans [23] que l'on résume ici. Le principe consiste à remarquer que lors d'une collision élastique entre deux particules, la masse, la quantité de mouvement totale et l'énergie totale sont conservées. Ces quantités microscopiques sont appelées invariants collisionnels et sont notées  $\phi_k$ . Moyennées sur l'ensemble de la population de l'espèce  $k$ , ces quantités ( $\phi_k = m_k$ ,  $\phi_k = m_k \mathbf{u}_k$ , ...) permettent de définir des grandeurs macroscopiques dont l'évolution est régie par un ensemble d'équations de conservation. Le modèle hydrodynamique consiste donc en un ensemble d'équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie que l'on couple aux équations de Maxwell pour l'évolution du champ électromagnétique. Afin de réduire plus encore la complexité du modèle, plusieurs hypothèses supplémentaires sont faites. Ces hypothèses et le modèle finalement obtenu sont décrits dans les sections suivantes.

### 2.1.1 Évolution du champ électrique

Une première simplification peut être faite sur le système des équations de Maxwell. En effet, les plasmas considérés dans le cadre d'applications aérodynamiques sont des plasmas non-magnétisés, c'est-à-dire non soumis à un champ magnétique externe. Dans ce cas, la force de Lorentz induite par le mouvement des particules chargées est négligeable devant la force de Coulomb et le champ magnétique peut être considéré comme nul. Le champ électrique  $\mathbf{E}$  dérive alors d'un potentiel  $\varphi$  dont l'évolution est régie une équation de Poisson et on a finalement :

$$-\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (2.1)$$

avec  $\varepsilon_0$  la permittivité de l'air. La densité de charge totale  $\rho$  est définie par

$$\rho = \sum_k z_k n_k,$$

où  $n_k$  est la densité volumique de l'espèce  $k$  et où  $z_k$  est sa charge définie par  $z_k = q_e Z_k$ , avec  $Z_k$  le nombre de charge de l'espèce  $k$  et  $q_e$  la charge élémentaire.

### 2.1.2 Conservation de la masse

L'évolution des densités des différentes espèces est régie par un ensemble d'équations de transport-réaction. Ainsi le taux de variation de densité de charge de l'espèce  $k$  est le bilan des taux de création ou de destruction de particules de l'espèce  $k$  auquel s'ajoute un terme de convection :

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \nabla \cdot (n_k \mathbf{u}_k) = \omega_k, \quad (2.2)$$

avec  $\mathbf{u}_k$  la vitesse de l'espèce  $k$ ,  $n_k$  sa densité et  $\omega_k$  son taux de production par unité de temps et de volume. La cinétique chimique conserve la masse et la charge électrique et on a par conséquent :

$$\sum_k m_k \omega_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_k z_k \omega_k = 0. \quad (2.3)$$

### 2.1.3 Équation de transport de la quantité de mouvement

La résolution de l'équation (2.2) nécessite de connaître la vitesse de l'espèce  $k$  dont l'évolution est donnée par l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Le taux de variation temporelle de la quantité de mouvement de l'espèce  $k$  est un équilibre entre la force électrique et les collisions élastiques avec les autres espèces  $l$ , auxquelles s'ajoutent les termes de convection et de pression partielle.

$$m_k \frac{\partial n_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + m_k \nabla \cdot (n_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k) = -\nabla(p_k) + \sum \mathbf{I}_{kl} + \mathbf{F}_{elec}, \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{I}_{kl}$  est l'impulsion de l'espèce  $l$  sur l'espèce  $k$ . En effectuant une analyse des différents ordres de grandeur caractéristiques de décharges couronnes ou luminescentes, Matéo–Vélez [34] exprime la vitesse des particules chargées comme la vitesse de l'écoulement porteur  $\mathbf{u}_0$  à laquelle s'ajoute une vitesse de dérive dans le champ électrique et une vitesse de diffusion pour les électrons due à leur faible masse. Il est alors possible de remplacer l'équation de transport de la quantité de mouvement (2.4) par des lois de mobilité liant directement la vitesse des particules au champ électrique :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= \mathbf{u}_0 + \text{signe}(Z_k) \mu_k \mathbf{E} \quad \forall k \neq e \\ \mathbf{u}_e &= \mathbf{u}_0 - \mu_e \mathbf{E} - D_e \frac{\nabla n_e}{n_e} \end{aligned}$$

où  $\mu_k$  est le coefficient de mobilité de l'espèce  $k$  et  $D_e$  est le coefficient de diffusion électronique. Les coefficients de mobilité et de diffusion électronique sont définis par :

$$\mu_e = \frac{q_e}{m_e \nu_{e0}} \quad \text{et} \quad \frac{D_e}{\mu_e} = \frac{k_B T_e}{q_e},$$

où  $\nu_{e0}$  est la fréquence de collision des électrons avec les neutres,  $T_e$  est la température électronique et  $k_B$  est la constante de Boltzmann. L'obtention de modèle asymptotique dans un

cadre plus général a été effectuée par Degond et Lucquin-Desreux [16]. Par la suite, le transport diffusif des électrons ne sera cependant pas pris en compte et la vitesse des particules sera donnée indifféremment de l'espèce  $k$  par l'équation :

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0 + \text{signe}(Z_k)\mu_k\mathbf{E} \quad (2.5)$$

Il s'agit ici d'une hypothèse de travail faite dans le cadre du développement des modèles de décharges couronnes approchés présentés dans ce manuscrit.

### 2.1.4 Approximation du champ local

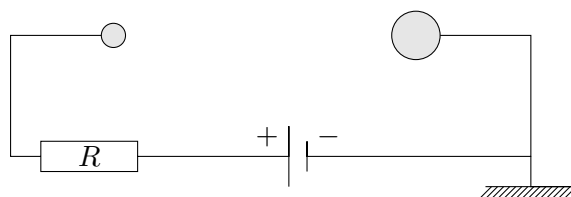
L'évolution de la densité de l'espèce  $k$  est donc régie par l'équation (2.2), où la vitesse  $\mathbf{u}_k$  est obtenue par la loi de mobilité (2.5). Afin de pouvoir résoudre cette équation, il est nécessaire de connaître les taux de production de chaque espèce ainsi que leur mobilité. Les coefficients de réaction entre espèces lourdes ainsi que la mobilité de ces espèces sont généralement supposés constants. À l'inverse, les coefficients de réaction faisant intervenir les électrons sont fortement dépendant de l'énergie électronique et leur calcul nécessite alors la résolution plutôt coûteuse de l'équation d'énergie correspondante.

Un cadre de travail largement répandu pour la description hydrodynamique de gaz ionisés consiste à remplacer la résolution de cette équation par une approximation dite du champ local. Cette approximation consiste à calculer l'ensemble des coefficients électroniques en résolvant l'équation de Boltzmann pour les électrons en régime permanent, sans gradient spatial et sous champ uniforme. Tous les coefficients de transport et de réactions en un point donné et en un instant donné ne dépendent alors plus que du champ réduit  $E/N$ , ratio de l'intensité du champ électrique sur la densité du gaz. Une étude de la validité de cette approche est faite dans [19] dans le cadre de panneaux à plasmas.

L'ensemble des coefficients de transport et de réactions électroniques utilisés dans cette étude ont été calculés à l'aide du solveur BOLSIG [13] pour un gaz composé à 80% d'azote et 20% de dioxygène. La nouvelle version de ce solveur BOLSIG+ [12, 27] n'a pas été utilisée pour des raisons de cohérence avec les simulations existantes.

### 2.1.5 Courant électrique

Au cours du développement de la décharge, le déplacement de particules chargées induit un courant électrique circulant dans le circuit et la tension mesurée au niveau des électrodes varie. Le lien entre ce courant et la variation du potentiel effectif aux électrodes dépend bien entendu de la composition du générateur utilisé pour fournir l'énergie au gaz. Dans ce travail, le circuit électrique sera modélisé par un générateur parfait de tension continue  $\varphi_g$  mis en série avec une résistance  $R$  tel qu'illustré figure 2.1 pour un actionneur fil-fil.



**Figure 2.1** Modèle de circuit électrique (exemple pour un actionneur fil-fil)

Ainsi, si une électrode est mise à la masse et que l'autre est portée à un potentiel  $\varphi_a$ , le courant  $I$  mesuré dans le circuit est défini par :

$$RI = \varphi_g - \varphi_a. \quad (2.6)$$

La variation du potentiel  $\varphi_a$  est calculée selon un procédé inspiré du travail de Sato [46]. Si l'on note respectivement  $\rho_k = z_k n_k$  et  $\mathbf{j}_k = z_k n_k \mathbf{u}_k$  la densité de charge et la densité de courant de l'espèce  $k$ , alors l'équation de conservation de la masse (2.2) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_k = z_k \omega_k.$$

En sommant sur l'ensemble des espèces  $k$  et en utilisant la conservation de la charge (2.3), l'équation sur le champ électrique (2.1) devient alors :

$$\nabla \cdot \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) = 0.$$

La densité de courant totale traversant le gaz est donc à divergence nulle et est composée d'un courant de déplacement  $\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$  dû aux variations temporelles du champ électrique auquel s'ajoute un courant de conduction  $\mathbf{j} = \sum_k \mathbf{j}_k$ . Soient  $S_a$  et  $S_c$ , les surfaces de l'anode et de la cathode et  $\Omega$  l'espace inter-électrodes où se développe la décharge. Si l'on suppose que la cathode est l'électrode reliée à la masse, alors le courant total entrant dans le circuit est :

$$I = \int_{S_a} \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n} ds,$$

où  $n$  est la normale sortante au domaine  $\Omega$ . Soit  $w$  une fonction scalaire valant 1 sur  $S_a$  et 0 sur  $S_c$ . En supposant que  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$  et  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$  sont nuls sur les frontières du domaine autres que les électrodes, on a alors :

$$\begin{aligned} I &= \int_{S_a \cup S_c} \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n} w ds, \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \left[ \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) w \right] dv, \\ &= \int_{\Omega} \underbrace{\nabla \cdot \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right)}_{=0} w dv + \int_{\Omega} \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) \cdot \nabla w dv. \end{aligned}$$

Puisque  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ , on a :

$$\int_{\Omega} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \nabla w dv = \int_{\Omega} \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta w dv - \int_{S_a} \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla w \cdot \mathbf{n} ds - \underbrace{\int_{S_c} \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla w \cdot \mathbf{n} ds}_{=0}.$$

En supposant que  $w$  vérifie également  $\Delta w = 0$  sur  $\Omega$  et en utilisant la loi d'Ohm (2.6), on obtient alors une équation donnant l'évolution du potentiel à l'anode en fonction de l'intégrale du courant de conduction sur l'ensemble de l'espace inter-électrodes :

$$R \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_a}{\partial t} \int_{S_a} \nabla w \cdot \mathbf{n} ds = \varphi_a - \varphi_g + R \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \nabla w dv. \quad (2.7)$$

L'évolution du potentiel appliqué à l'anode peut donc être calculée à l'aide de cette formule en utilisant la fonction  $w$  vérifiant les hypothèses décrites ci-dessus.

La fonction  $w$  telle qu'elle a été définie représente en fait la composante géométrique du champ électrostatique. En effet, le potentiel électrique satisfait le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \rho/\varepsilon_0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi = \varphi_a & \text{sur } S_a, \\ \varphi = 0 & \text{sur } S_c. \end{cases}$$

D'après le principe de superposition, le champ électrique s'exprime comme la somme d'un champ électrostatique  $\mathbf{E}_{ext}$ , résultant de la différence de potentiel entre les électrodes, et d'un champ de charge d'espace  $\mathbf{E}_{loc}$ . Les champs  $\mathbf{E}_{ext}$  et  $\mathbf{E}_{loc}$  dérivent respectivement des potentiels  $\varphi_{ext}$  et  $\varphi_{loc}$  qui satisfont les problèmes :

$$\begin{cases} \Delta\varphi_{ext} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_{ext} = \varphi_a & \text{sur } S_a, \\ \varphi_{ext} = 0 & \text{sur } S_c, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta\varphi_{loc} = \rho/\varepsilon_0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_{loc} = 0 & \text{sur } S_a, \\ \varphi_{loc} = 0 & \text{sur } S_c. \end{cases}$$

En remarquant que  $\varphi_{ext}$  est linéaire par rapport à  $\varphi_k$ , il est possible d'écrire  $\varphi_{ext} = \varphi_a(t)w(x)$  avec  $w$  une fonction sans dimension et constante dans le temps vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = 1 & \text{sur } S_a, \\ w = 0 & \text{sur } S_c, \end{cases}$$

ce qui correspond à la fonction test utilisée dans l'équation (2.7).

### 2.1.6 Force électrique induite par la décharge

La force  $\mathbf{F}$  induite par la décharge et permettant au dispositif d'agir sur l'écoulement aérodynamique consiste pour les configurations étudiées en un échange de quantité de mouvement entre les particules chargées et les molécules neutres du gaz. Cette force s'exprime directement en fonction du champ électrique  $\mathbf{E}$  et des densités de particules chargées présentes dans le système, à savoir :

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{E},$$

où  $\rho$  est la densité de charge totale introduite précédemment. Cette expression de la force n'est en fait valide que pour les zones de décharges non-neutres, où les forces engendrées par les gradients de densité sont négligeables devant celles induites par les termes électriques (cf Boeuf et Pitchford [3]). Les décharges étudiées dans ce manuscrit entrent dans cette catégorie.

## 2.2 Composition du plasma et production des espèces

### 2.2.1 Modèle de cinétique chimique

Les décharges électriques se produisant dans l'air donnent lieu à une cinétique chimique particulièrement riche et complexe. Dans un modèle relativement exhaustif, Kossyi *et al.* [29]

décrivent jusqu'à 140 espèces et plus de 450 réactions. Pour des raisons évidentes, l'utilisation d'un tel modèle n'est pas possible lors de simulations numériques et l'identification d'un système réduit de réactions prépondérantes est nécessaire.

L'ionisation par choc électronique et l'attachement électronique sont les premières réactions à considérer. En effet, l'ionisation est à l'origine du phénomène d'avalanche électronique nécessaire au déclenchement de la décharge tandis que l'attachement rend compte du caractère électronégatif du dioxygène présent dans l'air et permet la création d'ions négatifs. Les réactions de recombinaisons des électrons et des ions négatifs avec les ions positifs sont généralement prises en compte. Ces réactions permettent la diminution du nombre d'ions positifs et négatifs. Au-delà de ces réactions, le rôle des molécules de dioxygène métastables dans la dynamique de la décharge a également fait l'objet de plusieurs travaux. Leur capacité à détacher par collision les électrons des ions négatifs fut mise en avant par Lowke [32] puis par Morrow [39] comme mécanisme prépondérant dans le développement de streamers. Faisant suite à ces travaux, Degond *et al.* [17] soulignèrent également leur importance pour le développement sur des temps long d'une décharge en présence d'un écoulement.

Le modèle de cinétique chimique utilisé dans cette thèse se limite aux réactions d'ionisation par choc électronique, d'attachement électronique et de recombinaisons. L'utilisation de ce modèle simplifié de chimie de l'air est assez répandu et a montré une bonne concordance avec des résultats expérimentaux dans le cas de décharges couronnes fil-fil [6]. La pertinence de ce modèle a également été montrée dans [30] pour la simulation de décharges à barrière diélectrique. Le plasma consiste alors en un mélange de quatre espèces : les molécules neutres, les électrons ainsi que les ions positifs et négatifs, respectivement repérés par les indices  $n$ ,  $e$ ,  $+$  et  $-$ . Ici, les particules neutres regroupent les molécules  $O_2$  et  $N_2$ , les ions positifs représentent les ions  $O_2^+$  et  $N_2^+$  et les ions négatifs désignent les ions  $O_2^-$ .

**Tableau 2.1** Réactions chimiques considérées

$e + N_2 \rightarrow 2 e + N_2^+$	}	Ionisation par choc électronique
$e + O_2 \rightarrow 2 e + O_2^+$		
$e + O_2 \rightarrow O_2^-$		Attachement électronique
$e + O_2^+ \rightarrow O_2$	}	Recombinaisons
$e + N_2^+ \rightarrow N_2$		
$O_2^- + O_2^+ \rightarrow 2 O_2$		
$O_2^- + N_2^+ \rightarrow O_2 + N_2$		

Les réactions chimiques considérées sont décrites table 2.1. L'expression des taux de production  $\omega_k$  des différentes espèces dépend des coefficients de réactions associée à ces réactions. Pour une réaction du type  $a + b \rightarrow c$ , l'évolution de l'espèce  $c$  est le plus souvent régie par une équations du type :

$$\frac{dn_c}{dt} = k n_a n_b,$$

où  $k$  est le coefficient de réaction, exprimé en  $m^3.s^{-1}$  et où  $n_a$ ,  $n_b$ ,  $n_c$  sont les densités des espèces  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , exprimées en  $m^{-3}$ . Ce coefficient de réaction est une grandeur macroscopique

dépendant entre autres de la section efficace de collision de chaque particule et de leur vitesse. Lorsque l'espèce  $b$  est majoritaire et très lente par rapport à l'espèce  $a$ , la formulation suivante peut également être rencontrée :

$$\frac{dn_c}{dt} = \alpha n_a |\mathbf{u}_a|,$$

où  $\mathbf{u}_a$  est la vitesse de l'espèce  $a$  et où le coefficient  $\alpha$ , exprimé en  $\text{m}^{-1}$ , est comparable à un libre parcours moyen avant que la réaction  $a + b \rightarrow c$  se produise. Finalement, les taux de production des espèces chargées pour la cinétique chimique considérée sont :

$$\begin{aligned}\omega_e &= \alpha n_e |\mathbf{u}_e| - \eta n_e |\mathbf{u}_e| - \beta n_e n_+, \\ \omega_+ &= \alpha n_e |\mathbf{u}_e| - \beta n_e n_+ - \beta n_- n_+, \\ \omega_- &= \eta n_e |\mathbf{u}_e| - \beta n_- n_+, \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est le coefficient d'ionisation,  $\eta$  le coefficient d'attachement et  $\beta$  le coefficient de recombinaison. Les valeurs numériques de chacun de ces coefficients de réactions, mais également des différents coefficients de transport sont résumés dans l'annexe A.

### 2.2.2 Production d'électrons à la surface des électrodes

Comme présenté dans la section 1.1.4.4 du chapitre 1, les matériaux en contact avec la décharge constituent une source supplémentaire et continue d'électrons. Dans le cadre des décharges étudiées ici, seule l'émission secondaire liée à l'impact des ions positifs sur la cathode est considérée. L'émission thermique et l'émission par effet de champ sont donc négligées et le flux d'électrons à la cathode est pris proportionnel au flux d'ions positifs, à savoir :

$$\mathbf{j}_e = -\gamma \mathbf{j}_+,$$

où le coefficient d'émission secondaire  $\gamma$  dépend du matériau constituant la cathode.

### 2.2.3 Hypothèse sur le fond d'espèces chargées dans l'air

Du fait des mécanismes photoionique se produisant dans l'air, un certain nombre de particules chargées est naturellement présent dans le gaz. Pour représenter ce phénomène, nous considérerons que chacune des espèces chargées est initialement présente à un niveau de densité  $n_{init}$  et qu'elle est renouvelée de manière à ne pas descendre en dessous d'un niveau  $n_{min}$ . Concernant la densité des particules neutres dans le gaz, elle est supposée inchangée par les réactions se produisant dans le plasma et est donc fixée à  $n_n = 2,7 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ . Cette hypothèse est valide dans le cadre des plasmas étudiés, qui sont faiblement ionisés.

## 2.3 Conditions aux limites

Le modèle de décharge présenté dans ce chapitre est associé à un ensemble de conditions aux limites qui dépendent des frontières considérées et des phénomènes qu'elles représentent. Nous distinguons dans ce manuscrit trois sortes de frontières :

- i) **Les surfaces des électrodes** : notées  $S_a$  pour l'anode et  $S_c$  pour la cathode. Une condition de type Dirichlet  $y$  est imposée pour le potentiel, fixant celui-ci à 0 pour l'électrode mise à la masse et à  $\varphi_a$  pour l'autre électrode. Les particules chargées sont absorbées aux électrodes,



nous y imposons donc une condition de sortie libre pour les flux sortant, et il n'y a aucune production de particules autre que l'émission secondaire à la cathode. Les flux de particules entrants sont donc nuls pour toutes les espèces, sauf pour les électrons pour qui ce flux est proportionnel au flux d'ions positifs sortant.

- ii) **Les frontières bornant le domaine de calcul :** notées  $S_0$ , ces frontières artificielles délimitent la taille du domaine de simulation. Une condition de Neumann y est imposée pour le calcul du champ électrique, ainsi qu'une condition de sortie libre pour les flux.
- iii) **Les frontières de symétrie :** notées  $S_{sym}$ , ces frontières marquent les axes de symétrie pris en compte pour diminuer la taille du domaine de calcul. Une condition de type Neumann y est imposée pour le potentiel et les flux de particules sont censés être nuls, du fait de l'hypothèse de symétrie (le nombre de particules sortantes est égal au nombre de particules entrantes).

L'ensemble de ces conditions sont résumés dans le tableau 2.2, où " - " désigne une condition de sortie libre pour les flux (les espèces sortantes sont évacuées et aucune production de particules).

**Tableau 2.2** Conditions aux limites

CL	$S_a$	$S_c$	$S_0$	$S_{sym}$
Électrons	-	$\mathbf{j}_e = -\gamma\mathbf{j}_+$	-	$\mathbf{j}_e \cdot \mathbf{n} = 0$
Ions positifs	-	-	-	$\mathbf{j}_+ \cdot \mathbf{n} = 0$
Ions négatifs	-	-	-	$\mathbf{j}_- \cdot \mathbf{n} = 0$
Champ électrique	$\varphi = \varphi_a$	$\varphi = 0$	$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$	$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$

## 2.4 Bilan sur le modèle décrivant le plasma

La modélisation des décharges plasmas est particulièrement difficile du fait de leur complexité et l'obtention d'un modèle simplifié autorisant leur simulation numérique tout en décrivant correctement les phénomènes étudiés demande un certain nombre d'hypothèses. En premier lieu, une description statistique de la décharge n'est pas acceptable d'un point de vue numérique et une description macroscopique est préférée. Ce modèle macroscopique reste cependant très complexe et plusieurs hypothèses liées directement au type de décharges étudiées sont faites. L'influence des forces magnétiques est négligée, les vitesses des particules sont décrites à l'aide de loi de mobilités et les coefficients de la cinétique chimique sont calculés à partir de l'hypothèse du champ local. La cinétique chimique de l'air comprenant plusieurs centaines de réaction, seul un modèle prenant en compte un ensemble de réactions prépondérantes à été considéré.

L'ensemble de ces hypothèses rend bien compte de la complexité inhérente à la modélisation des décharges plasmas et constitue un cadre de travail largement répandu dans la communauté qui les étudie. Le modèle obtenu est composé d'un ensemble d'équations de conservation de la masse, couplées à une équation de Poisson pour le champ électrique et à une équation d'évolution pour le potentiel appliqué. Les vitesses des particules dépendent directement du

champ électrique et sont données par des lois de mobilités. Ainsi, nous avons finalement le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad \text{avec} \quad -\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0 + \text{signe}(Z_k) \mu_k \mathbf{E}, \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = \alpha n_e |\mathbf{u}_e| - \eta n_e |\mathbf{u}_e| - \beta n_e n_+, \\ \frac{\partial n_+}{\partial t} + \nabla \cdot (n_+ \mathbf{u}_+) = \alpha n_e |\mathbf{u}_e| - \beta n_e n_+ - \beta n_- n_+, \\ \frac{\partial n_-}{\partial t} + \nabla \cdot (n_- \mathbf{u}_-) = \eta n_e |\mathbf{u}_e| - \beta n_- n_+, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où, pour rappel,  $\rho = \sum_k z_k n_k$  est la charge d'espace.

Malgré une diminution importante de la complexité du modèle, celui-ci reste numériquement très difficile à résoudre du fait d'importantes contraintes qui imposent des temps de simulations souvent prohibitifs. La recherche d'une solution permettant de diminuer ce temps de calcul est l'objectif de cette thèse et la méthode développée dans ce but fait l'objet de la partie qui suit. Dans un premier temps, un chapitre introductif présente plus en détail la problématique numérique liée à la simulation de décharges électriques dans l'air et décrit la méthode dite de l'électrode virtuelle développée au cours de cette thèse. Le développement mathématique de ces modèles est ensuite présenté en détail dans un second chapitre et est suivi d'une troisième partie consacrée à leur implémentation et à leur validation numérique.

— Deuxième partie —

**Recherche de modèles de décharges  
couronnes approchés**



## Chapitre 3

# Introduction à la méthode d'électrode virtuelle

### Sommaire

---

<b>3.1. Introduction</b> .....	33
<b>3.2. Développements asymptotiques raccordés pour la modélisation de décharges couronnes</b> .....	35
3.2.1. Développement du modèle et recherche d'une solution .....	36
3.2.2. Validation du modèle asymptotique .....	43
3.2.3. Bilan sur le modèle asymptotique .....	46
<b>3.3. Principe de la méthode d'électrode virtuelle</b> .....	47
3.3.1. Concept .....	47
3.3.2. Estimation théorique du gain en temps de calcul .....	48
<b>3.4. Synthèse</b> .....	49

---

Les chapitres précédents ont permis de décrire les phénomènes rencontrés au sein des décharges électriques et ont mis en avant les difficultés rencontrées lors de leur modélisation. Cette complexité se retrouve également au niveau de leur simulation numérique : les principales échelles caractéristiques du plasma, que sont la longueur de Debye et la fréquence plasma, doivent généralement être résolues pour capter correctement la dynamique de la décharge et imposent ainsi de fortes contraintes de pas de temps et de maillage. L'utilisation de schémas numériques classiques est alors difficile du fait de leur coût important en temps de calcul.

Le principe de la méthode développée au cours de cette thèse pour pallier ce problème est présenté dans ce chapitre. Après avoir décrit plus en détail la problématique numérique liée à la simulation des décharges électriques, un premier modèle approché de décharge couronne est proposé. Ce modèle est construit à l'aide de développements asymptotiques raccordés et est à l'origine de la méthode d'électrode virtuelle finalement introduite.

### 3.1 Introduction

La simulation numérique du développement d'une décharge électrique à pression atmosphérique et de ses interactions avec un écoulement est un problème difficile car fortement

multi-échelle, à la fois en temps et en espace. Les temps caractéristiques du plasma – représentant le temps sur lequel la charge d'espace évolue ou le temps de dérive des électrons dans le champ – sont de l'ordre de la picoseconde et doivent être résolus pour décrire correctement la dynamique du plasma. Ces durées sont très inférieures aux temps caractéristiques de l'écoulement et au temps de l'établissement de la décharge : ceux-ci sont respectivement de l'ordre de la milliseconde et de la dizaine de microseconde et les différentes échelles de temps s'étalent ainsi sur environ une dizaine d'ordres de grandeur. À ceci s'ajoute une forte disparité des échelles spatiales due à l'asymétrie des dispositifs étudiés. En effet, comme décrit dans la section 1.2.3 du chapitre 1, les décharges couronnes se développent principalement dans un voisinage restreint autour des électrodes. Ces régions sont caractérisées par un champ électrique particulièrement intense décroissant très rapidement au fur et à mesure que l'on s'éloigne des électrodes. La cinétique chimique y est par conséquent particulièrement active et produit la majeure partie des particules composant le plasma.

Du point de vue numérique, ce caractère multi-échelles se retranscrit tout d'abord par une convergence en maillage très lente. En effet, une description correcte de la dynamique du plasma nécessite un maillage suffisamment fin dans les régions proches des électrodes, et plus particulièrement près de l'électrode stressée. Matéo-Vélez [34] montre qu'un maillage trop grossier induit une diffusion numérique pouvant faire transiter la décharge vers un régime pulsé non physique. Dans sa thèse, Unfer [53] arrive à une conclusion similaire en ce qui concerne les décharges à barrière diélectrique et estime que des mailles de la taille de la longueur de Debye sont nécessaires pour décrire correctement les gaines cathodiques à la surface du diélectrique.

Les contraintes sur le pas de temps d'intégration peuvent également être importantes selon la méthode numérique utilisée et la recherche d'un compromis entre précision et temps de calcul est souvent nécessaire. Les schémas totalement explicites donnent de bon résultats du point de vue précision et permettent une montée en ordre relativement aisée. Ils sont néanmoins soumis à trois conditions très restrictives sur le pas de temps :

- La condition CFL, qui est déterminée par la vitesse des particules les plus rapides et par la taille des mailles. Cette condition est le plus souvent déterminée par la vitesse électronique à proximité des électrodes, où le champ est intense et où le maillage est très raffiné.
- Le temps de relaxation du diélectrique, représentant le temps minimal nécessaire pour que le transport de particules chargées puisse créer une charge d'espace capable de modifier le champ électrique.
- Le pas de temps assurant la stabilité de l'intégration de la cinétique chimique et qui est en général imposé par la réaction d'ionisation par choc électronique.

En pratique, l'intégration de la cinétique chimique est cependant beaucoup moins contraignante que l'intégration des équations de transport et l'évolution du champ électrique. En effet, la condition CFL est généralement la limitation la plus sévère sur le pas de temps. Du fait de son lien intrinsèque avec le champ électrostatique, elle est la contrainte s'imposant naturellement en l'absence de charge d'espace importante. En présence d'un champ ambipolaire suffisamment important pour neutraliser le champ extérieur, cette contrainte se relâche et la contrainte sur le temps de relaxation du diélectrique devient la plus restrictive.

Différents modèles et méthodes numériques destinés à s'affranchir de telles contraintes ont été proposés par la communauté travaillant sur les plasmas, notamment dans le domaine des plasmas haute densité. Dans ce domaine, plusieurs schémas numérique permettant de passer

outre la limitation du temps de relaxation du diélectrique ont été proposés, on peut par exemple citer les travaux [8, 9]. L'utilisation de schémas quasi-neutres est également assez répandue lorsque les propriétés du plasma le permettent. L'hypothèse de quasi-neutralité utilisée permet de déduire la densité d'électrons directement à partir de la densité des ions et il n'est alors plus nécessaire de résoudre les échelles de temps liées aux électrons. La littérature sur le sujet est relativement vaste et ne sera pas décrite ici. Le lecteur intéressé pourra se référer aux travaux reportés dans [14], étude décrivant un schéma asymptotiquement stable dans la limite quasi-neutre pour le système d'Euler-Poisson et établissant un état de l'art assez conséquent sur le sujet.

Les méthodes décrites ci-dessus ne sont généralement pas utilisées pour l'étude de décharges électriques à pression atmosphérique. Le problème étudié est alors différent : l'hypothèse de quasi-neutralité n'est généralement plus vérifiée et d'autres méthodes sont usuellement préférées. L'utilisation de schémas semi-implicites est par exemple très répandue [26, 30]. Ce schéma couple les équations de transport et l'équation de Poisson à l'aide du schéma exponentiel de Scharfetter et Gummel [47] et permet de ne plus être limité par la condition CFL ou par le temps de relaxation du diélectrique. Ce schéma n'est néanmoins précis qu'au premier ordre en espace et est particulièrement diffusif, notamment pour les tailles de dispositifs et les pressions étudiées. Plus récemment, un schéma d'intégration asynchrone des équations plasmas a été proposé par Unfer [54, 53]. Les variables plasmas sont alors mises à jours suivant des contraintes de pas de temps non plus globales mais locales. Couplée à une stratégie de raffinement de maillage adaptatif, cette méthode a permis une réduction notable du temps de calcul nécessaire à la simulation de décharges à barrière diélectrique. Un tel schéma est cependant difficile à implémenter et ne permet pas de monter facilement en ordre.

La démarche adoptée au cours de cette thèse est différente et porte sur le développement d'un modèle approché autorisant une amélioration globale des contraintes de pas de temps et de maillage. La construction d'un tel modèle se fait ici dans le cadre des décharges couronnes et tire parti de la singularité du champ électrique pour simplifier les équations plasmas à l'intérieur des zones les plus limitantes numériquement. Avant de décrire plus en détail le principe de cette approche, un premier modèle approché pour la simulation de décharge fil-fil stationnaire est présenté. Ce modèle est à l'origine de la méthode d'électrode virtuelle décrite ensuite et permet d'en définir les principales idées.

## 3.2 Développements asymptotiques raccordés pour la modélisation de décharges couronnes

Comme nous l'avons présenté précédemment, une décharge couronne dans l'air est caractérisée par une activité principalement localisée autour des électrodes, où le champ électrostatique induit par le dispositif est suffisamment intense pour que l'ionisation des molécules neutres du gaz se produise. En s'en éloignant, l'intensité de ce champ décroît très rapidement et l'ionisation devient très faible devant l'attachement électronique. Une décharge couronne peut ainsi être décrite comme une ou plusieurs fines couches d'ionisation confinées à proximité des électrodes couplées à une zone de dérive, occupant la majeure partie de l'espace inter-électrode.

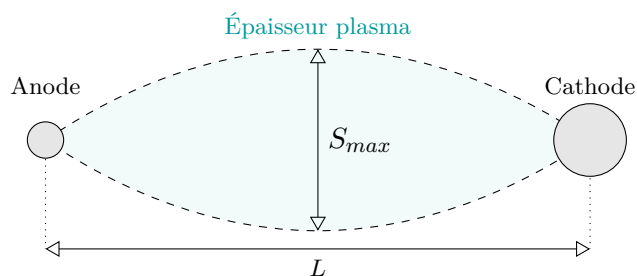
Une telle analyse de la décharge fut appliquée par Durbin et Turyn [21, 22] dans le but de développer un modèle stationnaire de décharge couronne positive générée entre deux cylindres coaxiaux. En utilisant la symétrie du dispositif, ils effectuent une analyse asymptotique mono-dimensionnelle de la décharge pour construire des modèles adaptés aux différentes régions de

la décharge. Les modèles obtenus sont alors raccordés par des conditions limites adéquates de manière à obtenir un modèle approché de décharge admettant une solution quasi-analytique. Dans cette section, nous nous inspirons de cette méthode pour développer un premier modèle approché de décharge fil-fil et nous validons la solution obtenue par comparaison avec une méthode numérique classique ainsi qu'avec quelques résultats expérimentaux. Le modèle et l'étude reportés ici ont fait l'objet d'une publication dans [48].

### 3.2.1 Développement du modèle et recherche d'une solution

#### 3.2.1.1 Description du modèle asymptotique

Le dispositif étudié consiste en deux électrodes cylindriques, l'une de rayon  $r_a$  portée à un potentiel  $\varphi_0$  et l'autre de rayon  $r_c$  mise à la masse. Ces électrodes sont plongées dans l'air et leur centres sont séparés par une distance  $L = r_a + d + r_c$ , où  $d$  est la distance séparant les surfaces des électrodes.



**Figure 3.1** Épaisseur plasma  $S$  pour un dispositif fil-fil

Afin de pouvoir décrire la décharge à l'aide d'un ensemble d'équations monodimensionnelles, nous utilisons le modèle pseudo-1D décrit par Matéo-Vélez dans [34, 35]. Ce modèle prend partiellement en compte l'aspect bidimensionnel de la décharge en supposant que le plasma s'étend verticalement sur une épaisseur  $S$  telle que représentée sur la figure 3.1 et sur laquelle toutes les variables sont supposées constantes. La dérivation du modèle s'effectue alors directement à partir du modèle décrit dans le chapitre 2 en définissant l'opérateur de la divergence de la manière suivante :

$$\nabla \cdot \zeta = \frac{1}{S} \frac{dS\zeta}{dx},$$

où  $\zeta$  désigne une variable quelconque. La définition de l'épaisseur du plasma dépend quant à elle directement de la valeur du potentiel électrostatique. En effet, pour pouvoir assurer la conservation du courant, il est nécessaire que le champ électrostatique vérifie l'équation de Laplace dans notre formulation monodimensionnelle et l'épaisseur plasma  $S$  doit donc être construite de manière à obtenir :

$$\frac{1}{S} \frac{d}{dx} \left( S \frac{d\varphi_{ext}}{dx} \right) = 0.$$



Le potentiel extérieur  $\varphi_{ext}$  est défini ici à partir de la formule proposée par Li et Uhm [31] donnant l'expression analytique d'un potentiel induit par deux fils parallèles, à savoir :

$$\varphi_{ext}(x,y) = \varphi_0 - \frac{\varphi_0}{2 \ln(R_0/r_a)} \ln \left( \frac{(x - \beta_0 r_a)^2 + y^2}{(\beta_0 x - r_a)^2 + (\beta_0 y)^2} \right),$$

avec  $\beta_0$  et  $R_0$  définis par :

$$\beta_0 = \frac{CD + r_a^2 + \sqrt{(C^2 - r_a^2)(D^2 - r_a^2)}}{r_a(D + C)} \quad \text{et} \quad R_0 = \left| \frac{CD - r_a^2 - \sqrt{(C^2 - r_a^2)(D^2 - r_a^2)}}{(D + C)} \right|,$$

où  $C = r_a + d$  et  $D = r_a + d + 2r_c$ .

En prenant  $\varphi_{ext}$  égal à ce potentiel défini sur l'axe inter-électrodes (i.e.  $y = 0$ ), l'épaisseur du plasma  $S$  est déterminée de manière unique à une constante multiplicative  $S_{max}$  près. Cette constante est alors un paramètre du problème et représente en pratique l'épaisseur maximale sur laquelle le plasma s'étend.

À partir de ce modèle, plusieurs hypothèses supplémentaires sont faites. En premier lieu, les mobilités des espèces ionisées sont supposées indépendantes du champ électrique. La cinétique chimique considérée se limite aux réactions d'ionisation et d'attachement électroniques, dont les coefficients de réaction sont respectivement  $\alpha$  et  $\eta$ . La production d'électrons par émission secondaire à la cathode est prise en compte et son coefficient est noté  $\gamma$ .

En second lieu, seules les solutions stationnaires sont recherchées dans ce travail et l'évolution temporelle de la décharge n'est donc pas étudiée. De cette hypothèse de stationnarité découle notre dernière hypothèse qui consiste à supposer que le champ électrique reste strictement positif. En effet, un champ partiellement négatif impliquerait par continuité que celui-ci s'annule en au moins un point. En ce point les espèces chargées seraient immobiles et une accumulation de charge aurait théoriquement lieu, contredisant ainsi l'hypothèse supposant que l'état stationnaire est atteint.

En notant  $\Gamma_k$  le flux de densité de l'espèce  $k$  défini par  $\Gamma_k = S n_k \mathbf{u}_k$ , le modèle finalement obtenu en appliquant nos hypothèses au système (2.8) est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{S} \frac{d}{dx} \left( S \frac{d\varphi}{dx} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \frac{d\Gamma_e}{dx} = -(\alpha - \eta) \Gamma_e \\ \frac{d\Gamma_+}{dx} = -\alpha \Gamma_e \\ \frac{d\Gamma_-}{dx} = -\eta \Gamma_e \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi = \varphi_0 & \text{à l'anode} \\ \varphi = 0 & \text{à la cathode} \\ \Gamma_+ = 0 & \text{à l'anode} \\ \Gamma_- = 0 & \text{à la cathode} \\ \Gamma_e = -\gamma \Gamma_+ & \text{à la cathode.} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Introduisons à présent le petit paramètre  $\varepsilon$  sur lequel notre analyse asymptotique portera. Pour cela, le problème (3.1) est adimensionné par les changements d'échelles suivant :

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \varphi_0 \varphi, & \mu_k^* &= \mu_+^* \mu_k, & n_k^* &= \frac{I_0}{q_e \mu_+^* \varphi_0} n_k, & x^* &= L x, \\ S^*(x^*) &= L S(x), & \Gamma_k^* &= \frac{I_0}{q_e} \Gamma_k, & z_k^* &= q_e z_k, & \rho^* &= \frac{I_0}{\mu_+^* \varphi_0} \rho, \\ \mathbf{E}^* &= \frac{\varphi_0}{L} \mathbf{E}, & \varepsilon &= \frac{\varphi_0}{L E_i}, & \alpha^* &= \frac{\alpha}{\varepsilon L}, & \eta^* &= \frac{\eta}{L}. \end{aligned}$$

Ici,  $L$  représente une longueur caractéristique du système et  $E_i$  est l'intensité du champ électrique nécessaire pour déclencher l'ionisation, qui dépend donc de la pression du gaz. Le paramètre  $\varepsilon$  mesure donc le ratio de l'épaisseur de la couche d'ionisation sur la distance inter-électrodes. Cette couche d'ionisation est généralement de deux ordres de grandeur inférieur à la dimension caractéristique du système, le paramètre  $\varepsilon$  est donc supposé vérifier  $\varepsilon \ll 1$ . Pour finir,  $I_0$  représente le courant linéique de conduction. Celui-ci est directement lié aux flux de particules chargées traversant le système. En choisissant ce courant de manière à ce que le flux d'ions positifs soit normalisé à la cathode, celui-ci devient une inconnue du système. Ainsi, si l'on note  $x_c$  la position de la cathode, alors  $\Gamma_+ = 1$  en  $x = x_c$  et nous avons en ce point :

$$\begin{aligned} 1 &= S n_+ \mathbf{u}_+ \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{S^*}{L} \frac{n_+ q_e \mu_+^* \varphi_0}{I_0} \frac{\mu_+^* \mathbf{E}^* L}{\mu_+^* \varphi_0} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{S^* n_+ q_e \mu_+^* \mathbf{E}}{I_0}. \end{aligned}$$

$I_0$  est donc défini par  $I_0 = S^*(x_c^*) \times \mathbf{j}_+^*(x_c^*)$  et représente le courant de conduction induit par les ions positifs arrivant à la cathode. La contribution des électrons étant négligeable nous supposons que  $I_0$  représente le courant total de conduction.

Après ces changement d'échelles, nous obtenons le modèle adimensionné suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{S} \frac{d}{dx} \left( S \frac{d\varphi}{dx} \right) = J \rho \\ \frac{d\Gamma_e}{dx} = -\left( \frac{\alpha}{\varepsilon} - \eta \right) \Gamma_e \\ \frac{d\Gamma_+}{dx} = -\frac{\alpha}{\varepsilon} \Gamma_e \\ \frac{d\Gamma_-}{dx} = -\eta \Gamma_e \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi = 1 & \text{à l'anode} \\ \varphi = 0 & \text{à la cathode} \\ \Gamma_+ = 0 & \text{à l'anode} \\ \Gamma_+ = 1 & \text{à la cathode} \\ \Gamma_- = 0 & \text{à la cathode} \\ \Gamma_e = -\gamma \Gamma_+ & \text{à la cathode,} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

où  $J$  est proportionnel à  $I_0$  et est défini par :

$$J = \frac{I_0 L^2}{\varepsilon_0 \mu_+^* \varphi_0^2}.$$

Afin de développer des modèles adaptés aux différentes zones de la décharge, nous décomposons maintenant l'espace inter-électrode  $\mathcal{D}_t$  en une couche d'ionisation anodique  $\mathcal{D}_a$ , une couche d'ionisation cathodique  $\mathcal{D}_c$  et une zone de dérive  $\mathcal{D}_d$ . Les domaines  $\mathcal{D}_a$  et  $\mathcal{D}_c$  communiquent respectivement avec le domaine  $\mathcal{D}_d$  aux points  $x_L$  et  $x_R$ . L'ensemble de ces domaines sont donc définis par :

$$\mathcal{D}_a = [r_a, x_L], \quad \mathcal{D}_d = [x_L, x_R], \quad \mathcal{D}_c = [x_R, r_a + d].$$

Notons que les points  $x_L$  et  $x_R$  dépendent de  $\varepsilon$ . Construisons à présent un modèle adapté à chacun de ces domaines. Dans les couches d'ionisation  $\mathcal{D}_a$  et  $\mathcal{D}_c$ , nous effectuons les changements d'échelles suivant :

$$\tilde{x} = \frac{x}{\varepsilon} \text{ pour } x \in \mathcal{D}_a, \quad \tilde{x} = \frac{1-x}{\varepsilon} \text{ pour } x \in \mathcal{D}_c,$$

et nous tronquons formellement les équations aux termes d'ordre le plus bas en  $\varepsilon$ . L'attachement électronique est ainsi négligé et l'influence de la charge d'espace sur le champ électrique

n'est plus prise en compte. Dans la zone de dérive, l'ionisation devient exponentiellement faible et n'est plus considérée. En réécrivant le second membre de l'équation de Poisson de manière à faire apparaître les flux des différentes espèces, nous obtenons finalement le modèle approché résumé dans la proposition suivante :

**Proposition 1.**

L'approximation du problème (3.2) au premier ordre en  $\varepsilon$  s'écrit :

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dx} \left( S \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = 2 S J \left( \frac{\Gamma_e}{\mu_e} + \frac{\Gamma_+}{\mu_+} + \frac{\Gamma_-}{\mu_-} \right) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_d} \\ \frac{d\Gamma_e}{dx} = -\frac{\alpha}{\varepsilon} \Gamma_e \mathbf{1}_{\mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_c} + \eta \Gamma_e \mathbf{1}_{\mathcal{D}_d} \\ \frac{d\Gamma_+}{dx} = -\frac{\alpha}{\varepsilon} \Gamma_+ \mathbf{1}_{\mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_c} \\ \frac{d\Gamma_-}{dx} = -\eta \Gamma_- \mathbf{1}_{\mathcal{D}_d} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi = 1 & \text{à l'anode} \\ \varphi = 0 & \text{à la cathode} \\ \Gamma_+ = 0 & \text{à l'anode} \\ \Gamma_+ = 1 & \text{à la cathode} \\ \Gamma_- = 0 & \text{à la cathode} \\ \Gamma_e = -\gamma \Gamma_+ & \text{à la cathode,} \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{1}_A$  est la fonction indicatrice du domaine  $A$  et où  $J$  est une constante à déterminer, proportionnelle au courant de conduction  $I_0$ .

### 3.2.1.2 Recherche d'une solution

Sous certaines hypothèses supplémentaires, le problème (3.3) admet une solution quasi-analytique. Tout d'abord, le coefficient d'ionisation  $\alpha$  est pris sous la forme explicite donnée par [22], à savoir :

$$\alpha^* = \beta_i^* \exp\left(-\frac{E_i}{|\mathbf{E}|}\right) \quad \text{soit} \quad \alpha = \beta_i \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon |\mathbf{E}|}\right),$$

où le coefficient  $\beta_i^*$  est une constante dépendant de la pression du gaz dont la forme adimensionnée est définie par  $\beta_i^* = \beta_i / \varepsilon L$ . Nous supposons ensuite que l'impact de la charge d'espace sur le champ électrique n'est pas suffisamment important pour modifier significativement le coefficient d'attachement  $\eta$  ou la mobilité électronique  $\mu_e$ . Leur valeur en tout point du domaine ne dépend donc que de l'intensité du champ électrostatique. Il s'agit là d'une hypothèse raisonnable dans le cadre des décharges étudiées ici. Pour finir, l'épaisseur plasma dans les couches d'ionisation est approchée par le premier ordre de son développement limité, soit :

$$S(x) = \begin{cases} x S'(0) + o(\varepsilon) & \forall x \in \mathcal{D}_a, \quad \text{avec } S'(0) \simeq S(r_a)/r_a, \\ -(1-x) S'(1) + o(\varepsilon) & \forall x \in \mathcal{D}_c, \quad \text{avec } S'(1) \simeq -S(r_a + d)/r_a. \end{cases}$$

**Proposition 2.**

Sous les hypothèses décrites ci-dessus, le modèle asymptotique (3.3) admet une solution analytique définie à des constantes positives  $A_1$ ,  $A_2$  et  $J$  près. Les différentes variables décrivant le plasma sont alors données par :

$$\mathbf{E}(x) = \frac{1}{S(x)} \sqrt{A_1^2 + 2J \int_{r_a}^x S(u) \left( \frac{\Gamma_e}{\mu_e} + \frac{\Gamma_+}{\mu_+} + \frac{\Gamma_-}{\mu_-} \right) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_d} du}, \quad (3.4)$$

$$\Gamma_e(x) = \Gamma_{e,L} \exp[f_{A_1}(x) - f_{A_1}(x_L)] \mathbf{1}_{\mathcal{D}_a} + \Gamma_{e,R} \exp\left(-\int_x^{x_R} \eta du\right) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_d}$$

$$\begin{aligned}
 & -\gamma \exp [g_{A_2}(r_c) - g_{A_2}(1-x)] \mathbf{1}_{\mathcal{D}_c}, \\
 \Gamma_+(x) &= [\Gamma_e(x) - \Gamma_e(r_a)] \mathbf{1}_{\mathcal{D}_a} + [1 + \gamma + \Gamma_{e,R}] \mathbf{1}_{\mathcal{D}_d} + [1 + \gamma + \Gamma_e(x)] \mathbf{1}_{\mathcal{D}_c}, \\
 \Gamma_-(x) &= \Gamma_{-,L} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_a} + \Gamma_{e,R} \left( 1 - \exp \left( \int_x^{x_R} \eta du \right) \right) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_d},
 \end{aligned}$$

où  $\Gamma_{k,L}$  et  $\Gamma_{k,R}$  sont les flux de densité de l'espèce  $k$  aux points de raccord entre les domaines  $x_L$  et  $x_R$  et sont déterminés ultérieurement par la continuité des flux de densité sur l'ensemble du domaine  $\mathcal{D}_t$ . Les fonctions  $f_{A_1}(x)$  et  $g_{A_2}(x)$  représentent quant à elles la primitive du coefficient d'ionisation au point  $x$  pour les domaines  $\mathcal{D}_a$  et  $\mathcal{D}_c$  et sont définies par :

$$f_{A_1}(x) = \beta_i \frac{A_1}{|S'(0)|} \exp \left( -\frac{|S'(0)|}{A_1 \varepsilon} x \right) \quad \text{et} \quad g_{A_2}(x) = \beta_i \frac{A_2}{|S'(1)|} \exp \left( -\frac{|S'(1)|}{A_2 \varepsilon} x \right).$$

### Démonstration.

L'intégration de l'équation de Poisson du problème (3.3) donne une expression analytique du champ électrique dans les couches d'ionisation  $\mathcal{D}_a$  et  $\mathcal{D}_c$  :

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{A_1}{S'(0)x}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_a \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{A_2}{S'(1)(1-x)}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_c,$$

où  $A_1$  et  $A_2$  sont des constantes strictement positives à déterminer. De manière similaire, le flux de densité électronique se définit comme l'exponentielle de l'intégrale du coefficient d'ionisation ou d'attachement selon le domaine étudié. En notant respectivement  $\Gamma_{e,L}$  et  $\Gamma_{e,R}$  les flux de densité électronique aux points de raccord entre les domaines  $x_L$  et  $x_R$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_e(x) &= \Gamma_{e,L} \exp [f_{A_1}(x) - f_{A_1}(x_L)] \mathbf{1}_{\mathcal{D}_a} + \Gamma_{e,R} \exp \left( -\int_x^{x_R} \eta du \right) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_d} \\
 &\quad - \gamma \exp [g_{A_2}(r_c) - g_{A_2}(1-x)] \mathbf{1}_{\mathcal{D}_c},
 \end{aligned}$$

où les fonctions  $f_{A_1}$  et  $g_{A_2}$  proviennent de l'intégration analytique du coefficient d'ionisation en utilisant l'expression du champ électrique obtenue pour  $\mathcal{D}_a$  et  $\mathcal{D}_c$ . Ainsi ces fonctions sont définies par :

$$f_{A_1}(x) = \beta_i \frac{A_1}{|S'(0)|} \exp \left( -\frac{|S'(0)|}{A_1 \varepsilon} x \right) \quad \text{et} \quad g_{A_2}(x) = \beta_i \frac{A_2}{|S'(1)|} \exp \left( -\frac{|S'(1)|}{A_2 \varepsilon} x \right).$$

Les flux de densité ioniques s'expriment quant à eux directement en fonction du flux de densité électronique. En utilisant les différentes conditions limites, nous obtenons ainsi pour les ions positifs :

$$\Gamma_+(x) = [\Gamma_e(x) - \Gamma_e(r_a)] \mathbf{1}_{\mathcal{D}_a} + [1 + \gamma + \Gamma_{e,R}] \mathbf{1}_{\mathcal{D}_d} + [1 + \gamma + \Gamma_e(x)] \mathbf{1}_{\mathcal{D}_c}.$$

De la même manière, le flux de densité des ions négatifs est défini par :

$$\Gamma_-(x) = \Gamma_{-,L} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_a} + \Gamma_{e,R} \left( 1 - \exp \left( \int_x^{x_R} \eta du \right) \right) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_d},$$

où  $\Gamma_{-,L}$  est le flux d'ions négatifs au point  $x_L$ .

L'expression du champ électrique est obtenue en intégrant l'équation de Poisson du problème (3.3) entre  $r_a$  et  $x$  et en prenant en compte le comportement du champ à proximité des électrodes. Ainsi, nous avons :

$$\int_{r_a}^x \frac{d}{dx} \left( S \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx = 2J \int_{r_a}^{r_a+d} S \left( \frac{\Gamma_e}{\mu_e} + \frac{\Gamma_+}{\mu_+} + \frac{\Gamma_-}{\mu_-} \right) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_d} dx$$

$$\Leftrightarrow S^2(x) \mathbf{E}^2(x) - A_1^2 = 2J \int_{r_a}^{r_a+d} S \left( \frac{\Gamma_e}{\mu_e} + \frac{\Gamma_+}{\mu_+} + \frac{\Gamma_-}{\mu_-} \right) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_d} dx.$$

◆

### Détermination des constantes définissant la solution

La continuité des flux de densité aux points raccordant les domaines est assurée si, pour chaque espèce  $k$ , les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\lim_{x \rightarrow x_L, x \in \mathcal{D}_a} \Gamma_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_L, x \in \mathcal{D}_d} \Gamma_k(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_R, x \in \mathcal{D}_c} \Gamma_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_R, x \in \mathcal{D}_d} \Gamma_k(x).$$

Ainsi, les flux de raccord  $\Gamma_{e,L}$ ,  $\Gamma_{e,R}$  et  $\Gamma_{-,L}$  sont déterminés de manière à assurer la continuité du flux des électrons et des ions négatifs et nous avons :

$$\Gamma_{e,R} = -\gamma \exp [g_{A_2}(r_c) - g_{A_2}(1 - x_R)],$$

$$\Gamma_{e,L} = \Gamma_{e,R} \exp \left( - \int_{x_L}^{x_R} \eta du \right),$$

$$\Gamma_{-,L} = \Gamma_{e,R} - \Gamma_{e,L}.$$

La continuité du flux d'ions positifs et celle du champ électrique doivent également être vérifiées. Nous montrons que cela amène à écrire  $A_2$  et  $J$  en fonction de  $A_1$ , qui doit alors être déterminé de manière à satisfaire les conditions aux limites sur le potentiel électrique. Ainsi, nous obtenons finalement la proposition suivante :

#### Proposition 3.

Les trois constantes  $A_1$ ,  $A_2$  et  $J$  sont liées entre elles et trouver une solution au problème (3.3) telle que définie dans la proposition 2 revient à résoudre le problème suivant :

$$\text{Trouver } A_1 \in ]0, A_{1,max}[ \text{ tel que } \int_{r_a}^{r_a+d} \mathbf{E}(x) dx = \varphi_0, \quad (3.5)$$

où la constante strictement positive  $A_{1,max}$  est définie de manière à satisfaire :

$$f_{A_1}(r_a) - f_{A_1}(x_L) = \ln \left( \frac{C_1 - 1}{C_2} + 1 \right),$$

avec les constantes  $C_1$  et  $C_2$  définies par :

$$C_1 = 1 + \gamma^{-1} \quad \text{et} \quad C_2 = \exp \left( - \int_{x_L}^{x_R} \eta du \right).$$

**Démonstration.**

La continuité du flux d'ions positifs impose alors :

$$\exp [f_{A_1}(r_a) - f_{A_1}(x_L)] = \frac{C_1 + \exp [g_{A_2}(r_c) - g_{A_2}(1 - x_R)](C_2 - 1)}{C_2 \exp [g_{A_2}(r_c) - g_{A_2}(1 - x_R)]} \quad (3.6)$$

où les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont définies par :

$$C_1 = 1 + \gamma^{-1} \quad \text{et} \quad C_2 = \exp \left( - \int_{x_L}^{x_R} \eta \, du \right).$$

Puisque  $x_L$  est supérieur à  $r_a$ , nous avons  $f_{A_1}(r_1) > f_{A_1}(x_L)$  et le terme  $B = \exp [f_{A_1}(r_a) - f_{A_1}(x_L)]$  est donc strictement supérieur à 1. Ainsi, à  $A_1$  fixé, l'égalité (3.6) ne peut être satisfaite que si il existe un  $A_2$  tel que :

$$g_{A_2}(r_c) - g_{A_2}(1 - x_R) = \ln(C_1) - \ln(C_2(B - 1) + 1)$$

Le terme du membre de gauche est positif, tend vers zéro lorsque  $A_2$  devient infiniment petit et croît avec  $A_2$ . Ainsi, cette équation admet toujours une unique solution si le terme de droite est strictement positif, c'est-à-dire si :

$$B < 1 + \frac{C_1 - 1}{C_2}.$$

Cette dernière condition permet alors de fixer une borne maximale sur les  $A_1$  pour lesquels l'équation (3.6) peut être satisfaite. Cette borne, notée  $A_{1,max}$ , vérifie :

$$f_{A_1}(r_a) - f_{A_1}(x_L) = \ln \left( \frac{C_1 - 1}{C_2} + 1 \right).$$

La continuité du champ électrique est quant à elle assurée en intégrant l'équation de Poisson du problème (3.3) sur toute la zone inter-électrodes et en prenant en compte le comportement du champ à proximité des électrodes. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{r_a}^{r_a+d} \frac{d}{dx} \left( S \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx &= 2J \int_{r_a}^{r_a+d} S \left( \frac{\Gamma_e}{\mu_e} + \frac{\Gamma_+}{\mu_+} + \frac{\Gamma_-}{\mu_-} \right) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_d} dx \\ \Leftrightarrow A_2^2 - A_1^2 &= 2J \int_{r_a}^{r_a+d} S \left( \frac{\Gamma_e}{\mu_e} + \frac{\Gamma_+}{\mu_+} + \frac{\Gamma_-}{\mu_-} \right) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_d} dx, \end{aligned}$$

ce qui permet d'exprimer  $J$  en fonction de  $A_1$  et  $A_2$ .

Pour que les conditions limites sur le potentiel soient satisfaites il faut finalement déterminer la constante  $A_1$ , si elle existe, telle que l'intégrale du champ électrique sur tout l'espace inter-électrode soit égale à la différence de potentiel appliquée, c'est-à-dire :

$$\int_{r_a}^{r_a+d} \mathbf{E}(x) \, dx = \varphi_0.$$

◆

### 3.2.2 Validation du modèle asymptotique

La validation de ce modèle asymptotique est faite par comparaison de notre solution avec celle obtenue par la résolution du problème (3.1) à l'aide d'un schéma aux volumes finis du premier ordre. Les différents coefficients de la cinétique chimique et autres paramètres du modèle sont fixés pour les deux problèmes aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma &= 10^{-4}, & E_i &= 24 \times 10^6 \text{ V.m}^{-1}, & \beta_i^* &= 10^6 \text{ m}^{-1}, \\ \mu_+^* &= 2.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}.\text{V}^{-1}, & \mu_-^* &= 2.7 \times 10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}.\text{V}^{-1}. \end{aligned}$$

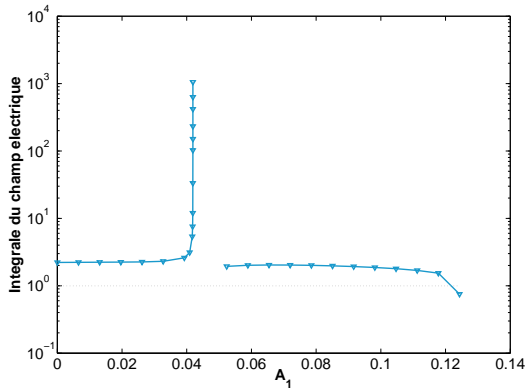
Le coefficient d'attachement et la mobilité électronique sont quant à eux calculés à l'aide du code numérique BOLSIG [13] et leurs valeurs sont fixées à celles obtenues pour le champ extérieur. Deux configurations fil-fil sont étudiées dans cette section. La première est constituée de deux électrodes de rayon  $r_a = 0.1$  mm et  $r_c = 1$  mm et séparées par une distance  $L = 1$  cm. Cette configuration a notamment été étudiée à la fois expérimentalement et numériquement par Bérard *et al.* [6]. La deuxième configuration, proche de celle étudiée par Moreau *et al.* [37, 38], est quant à elle constituée de deux électrodes de rayons  $r_a = 0.35$  mm et  $r_c = 1$  mm séparées par une distance  $L = 4$  cm. Notons que la configuration étudiée par Moreau *et al.* diffère cependant par la présence d'un matériau diélectrique dans lequel les électrodes sont encastrées. Pour finir, le paramètre  $S_{max}$  fixant l'épaisseur maximale du plasma vaut 0.25 cm pour la première configuration et 0.5 cm pour la seconde.

#### 3.2.2.1 Discussion préalable sur la résolution problème

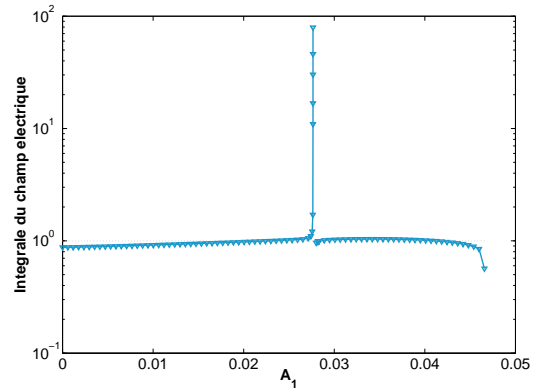
Les solutions du problème (3.3) ont été définies dans la section précédente à des constantes  $A_1$  et  $A_2$  près, reliées entre elles par l'équation (3.6). Pour qu'une solution soit admissible, il est nécessaire que la constante  $A_1$  vérifie le problème (3.5), assurant que les conditions aux limites de l'équation de Poisson sont satisfaites. L'existence d'une telle solution dépend du dispositif étudié et, lorsqu'elle existe, son unicité n'est pas nécessairement assurée.

En représentant pour différentes configurations la valeur  $I_E$  de l'intégrale du champ électrique sur l'ensemble de l'espace inter-électrode en fonction de  $A_1$ , une structure récurrente apparaît. Une telle courbe est représentée sur la figure 3.2 pour les deux configurations étudiées, avec  $\varphi_0$  valant respectivement 11 et 30 kV. Nous remarquons tout d'abord que cette courbe n'est pas définie en tout point. En effet, pour  $A_1$  appartenant à une certaine plage de valeurs que nous noterons  $]A_{1,a}, A_{1,b}[$ , le terme sous la racine dans l'expression du champ électrique (3.4) devient négatif en au moins un point et le champ n'est plus correctement défini. En dehors de cette plage, la fonction  $I_E(A_1)$  peut être caractérisée par trois parties monotones. Elle est strictement croissante pour  $A_1 \in ]0, A_{1,a}[$  et présente ensuite une partie croissante puis une partie décroissante pour  $A_1 \in ]A_{1,b}, A_{1,max}[$ .

Le problème (3.5) semble donc pouvoir admettre jusqu'à trois solutions. Quand elle existe, la première solution correspondant à la plage  $]0, A_{1,a}[$  donne cependant des valeurs de  $J$ , et donc du courant  $I_0$ , négatives. Elle n'est par conséquent pas admissible physiquement. La seconde et la troisième solution, correspondant respectivement aux parties croissante et décroissante de la courbe  $I_E(A_1)$  pour  $A_1 \in ]A_{1,b}, A_{1,max}[$ , peuvent ou non exister selon la configuration étudiée. En traçant la valeur du courant de conduction en fonction du potentiel appliqué pour les deux configurations (figure 3.3), nous remarquons que la troisième solution existe de manière continue sur une certaine plage de tension. Le courant augmente avec la tension appliquée, tout d'abord très fortement puis de manière quasi-linéaire. À l'inverse,

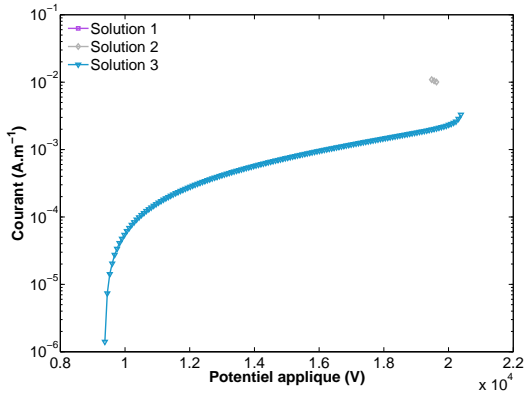


Configuration 1 -  $\varphi_0 = 11 \text{ kV}$

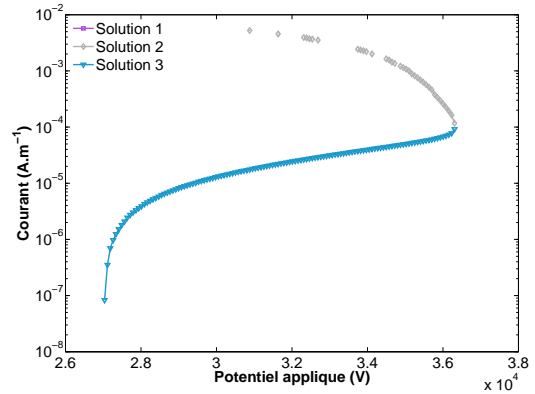


Configuration 2 -  $\varphi_0 = 30 \text{ kV}$

Figure 3.2 Intégrale du champ électrique en fonction de  $A_1$ .



Configuration 1



Configuration 2

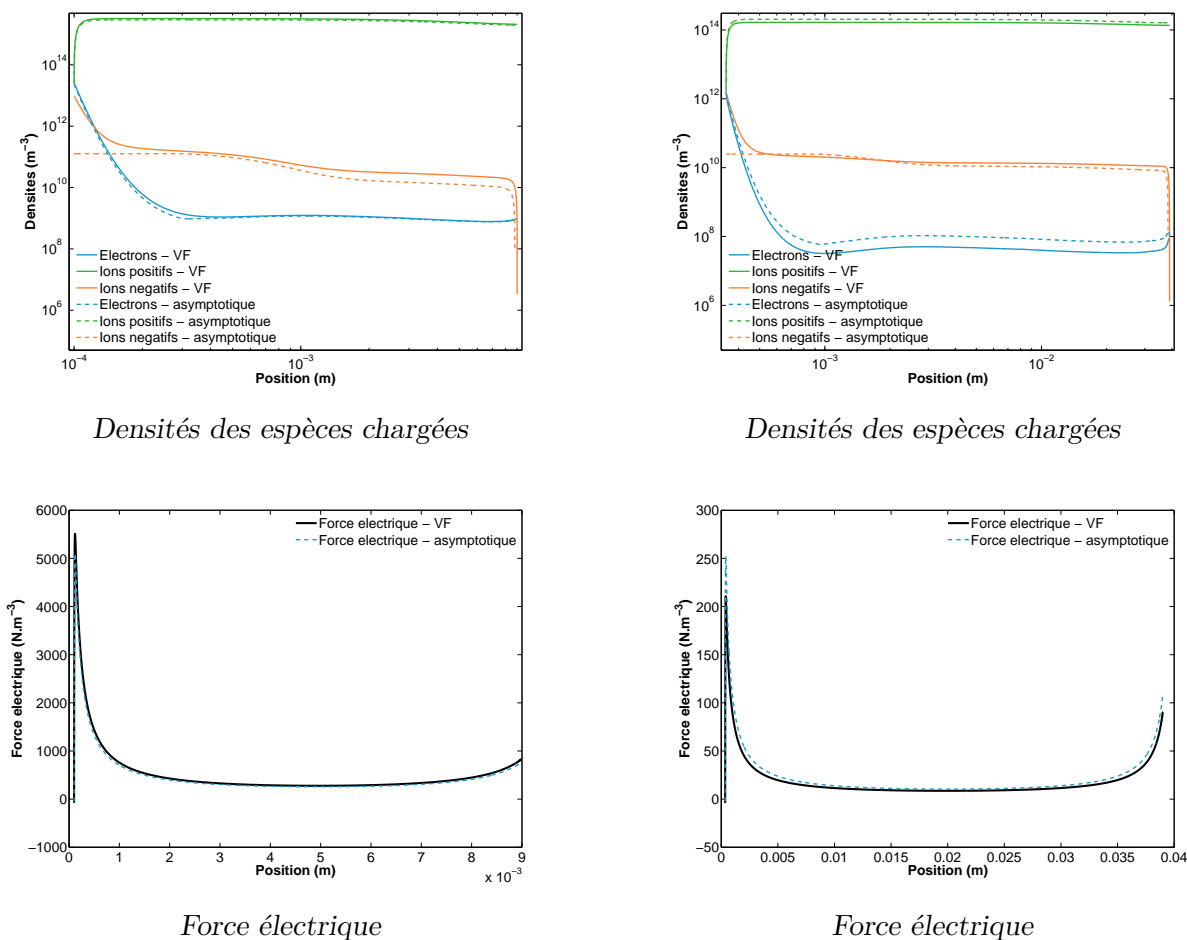
Figure 3.3 Courant de conduction en fonction du potentiel appliqué.

la seconde solution n'existe que de manière sporadique et le courant décroît lorsque la tension appliquée augmente. Bien que les niveaux de densités et le champ électrique obtenus ne permettent pas d'éliminer *a priori* cette solution, cette décroissance du courant semble contre intuitive pour les régimes de décharges étudiées ici. Ceci et une existence de la solution instable par rapport aux paramètres du dispositif nous ont amenés à préférer la troisième solution pour les comparaisons effectuées dans cette section. La justification formelle d'un tel choix nécessiterait une étude plus approfondie du système qui ne s'inscrit pas dans la démarche adoptée ici pour la validation du modèle asymptotique.

### 3.2.2.2 Validation du modèle

La solution retenue est comparée dans cette section à la solution du modèle stationnaire complet (3.1) résolu par un schéma aux volumes finis, décentré amont et du premier ordre. La tension appliquée  $\varphi_0$  est fixée ici à 11 kV pour la première configuration et à 30 kV pour la seconde.

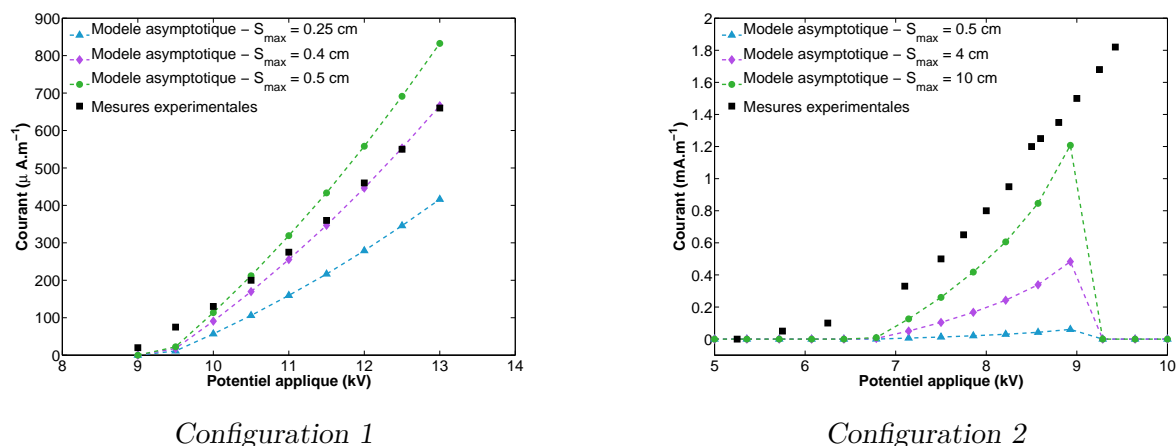




**Figure 3.4** Comparaison des densités des espèces chargées et de la force électrique. À gauche, la première configuration pour  $\varphi_0 = 11$  kV. À droite, la seconde configuration pour  $\varphi_0 = 30$  kV.

La figure 3.4 reporte les densités d'espèces chargées et la force électrique obtenues pour chacune des configurations. Dans les deux cas, la solution de référence est correctement approchée par le modèle asymptotique. Puisque le modèle asymptotique néglige l'attachement électronique à proximité des électrodes, le niveau de densité des ions négatifs n'est pas correctement représenté dans ces zones. Leur densité moyenne dans l'espace inter-électrodes est cependant relativement bien approchée et cet écart sur le niveau de densité n'influence pas l'intensité de la force électrique obtenue, celle-ci dépendant principalement de la densité des ions positifs et de l'intensité du champ électrique. Ce dernier est particulièrement bien représenté par le modèle asymptotique : une erreur relative de l'ordre de 1% est généralement observée (non illustrée ici). Les courants de conduction donnés par les deux modèles sont également très proches. Pour la première configuration, le modèle asymptotique prédit un courant de  $159 \mu\text{A.m}^{-1}$  pour un courant de référence de  $173 \mu\text{A.m}^{-1}$ . Pour la seconde configuration, ces courants valent respectivement  $13 \mu\text{A.m}^{-1}$  et  $10.7 \mu\text{A.m}^{-1}$ .

Afin de valider plus encore le modèle asymptotique, les courants prédits par celui-ci pour différentes tensions appliquées sont comparés figure 3.5 à des mesures expérimentales. Ces mesures ont été effectuées par Bérard *et al.* [6] pour la première configuration et Moreau



**Figure 3.5** Courant de conduction en fonction de la tension appliquée.

*et al.* [38] pour la seconde. Rappelons que la construction du modèle pseudo-1D amène à introduire une épaisseur plasma fictive définie à un paramètre  $S_{\max}$  près. Ce paramètre a une influence directe sur le courant calculé et, bien que choisi de manière arbitraire, il doit approcher raisonnablement l'épaisseur réelle du plasma.

Le courant calculé pour la première configuration est particulièrement proche des mesures expérimentales et une légère variation de 0.25 cm à 0.4 cm de l'épaisseur maximale du plasma  $S_{\max}$  permet d'obtenir une évolution similaire du courant avec la tension appliquée. Bien que la décharge s'initie pour des tensions légèrement plus élevées qu'expérimentalement, l'évolution quasi-linéaire du courant observée après est bien reproduite par le modèle.

Les résultats obtenus pour la seconde configuration sont quant à eux en fort contrastes avec les mesures expérimentales. En effet, les courants calculés sont presque de deux ordres de grandeurs inférieurs à ceux mesurés par Moreau *et al.* L'épaisseur maximale du plasma doit être augmenter jusqu'à 10 cm afin de pouvoir obtenir un courant comparable. Cette épaisseur étant plus du double de la distance inter-électrodes, cette hypothèse n'est évidemment pas physique. Une telle différence provient probablement de l'incapacité du modèle à capter le régime correct de la décharge et n'est pas due au modèle asymptotique lui même mais plutôt à la description stationnaire et monodimensionnelle de la décharge ainsi qu'au degré de modélisation adopté. En effet, à l'inverse des décharges étudiées par Bérard *et al.*, qui sont expérimentalement stables et stationnaires, celles étudiés par Moreau *et al.* peuvent présenter selon le cas un régime de pulses de courant périodiques. L'apparition de tels pulses peut éventuellement s'expliquer par la présence du matériau diélectrique dans lequel sont encastrées les électrodes qui aurait ainsi un impact non négligeable sur le développement de la décharge.

### 3.2.3 Bilan sur le modèle asymptotique

Un premier modèle approché de décharge couronnes monodimensionnel et stationnaire a été développé dans cette section pour des dispositifs fil-fil. Le principe de ce modèle consiste à décrire la décharge comme de fines couches d'ionisation couplées à une zone de dérive plus étendue et à construire ensuite des modèles adaptés à chacune de ces zones à l'aide d'une analyse asymptotique des équations plasmas. À proximité des électrodes, l'influence de la charge d'espace sur le champ électrique est ainsi négligée et l'attachement électronique n'est plus pris en compte. Le modèle admet alors une solution analytique définie à une constante près permettant de vérifier les conditions aux limites sur le potentiel électrique.

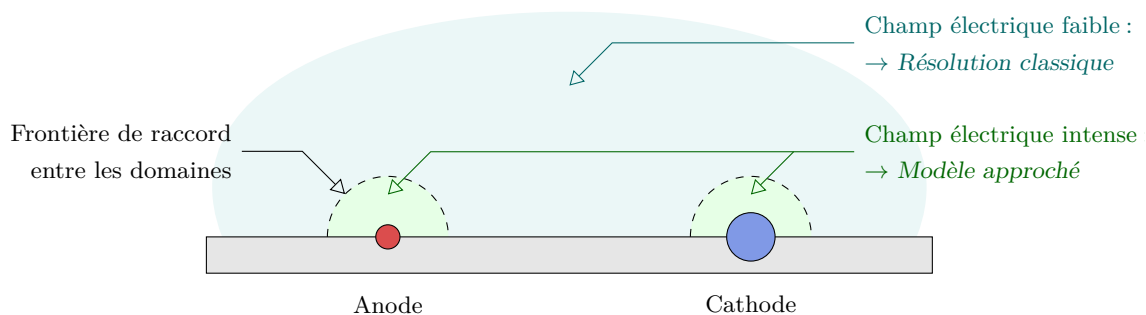
Des comparaisons avec un schéma numérique classique ont permis de valider l'approche adoptée et une confrontation avec des mesures expérimentales a montré la capacité du modèle à approcher correctement une décharge stationnaire. Les décharges électriques sont cependant le siège de régimes pulsés, pour lesquels d'importantes différences ont été observées. Ces décharges sortent néanmoins du domaine de validité de notre modèle et ne peuvent être décrites correctement qu'à l'aide d'un modèle instationnaire et *a priori* bidimensionnel.

### 3.3 Principe de la méthode d'électrode virtuelle

#### 3.3.1 Concept

Comme présenté dans la section introductive de ce chapitre, les principales contraintes numériques rencontrées lors de la simulation de décharges couronnes se situent à proximité des électrodes. La distribution du champ électrique et les contraintes de maillage dans ces zones imposent des limitations globales sur le pas de temps qui rendent le coût en temps de calcul souvent prohibitif. La méthode étudiée dans cette thèse vise à pallier ces limitations en développant un modèle approché où, dans un petit voisinage autour des électrodes, l'intégration numérique classique des équations plasmas est remplacée par la résolution d'un problème simplifié n'induisant plus de contrainte sur le maillage et le pas de temps.

La construction d'un tel modèle se base sur une approche similaire à celle introduite dans la section précédente. La décharge est caractérisée par des couches d'ionisations situées autour des électrodes et couplées à une zone de dérive constituant la majeure partie de l'espace inter-électrodes, telle que représentée schématiquement figure 3.6 dans le cas de deux fils parallèles. En tirant parti de la singularité du champ électrique, il est possible de développer à proximité de chaque électrode un modèle monodimensionnel, dirigé selon les lignes de champ et prenant en compte l'essentiel de la dynamique du plasma. Dans le reste de l'espace inter-électrodes, le modèle hydrodynamique complet est utilisé et son intégration numérique est effectuée de manière classique. Les échanges entre les différents domaines se font alors à travers les frontières de raccord par le biais de conditions aux limites adaptées. Les flux de densités sont transférés d'un domaine à un autre en chaque point de ces frontières et la continuité du potentiel et du champ électrique est assurée à l'aide d'une condition de type Dirichlet-Neumann, appelée aussi condition de Robin. Notons que, bien que monodimensionnel, le modèle approché décrivant la décharge à proximité des électrodes tient bien compte des variations entre les lignes de champ à travers la variation des conditions aux limites le long des frontières de raccord.

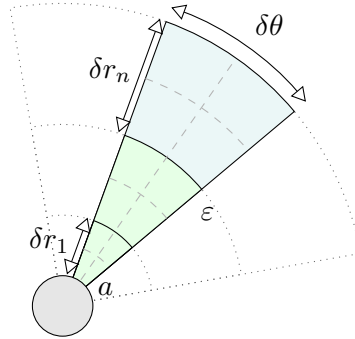


**Figure 3.6** Principe de la méthode d'électrode virtuelle (cas d'un actionneur fil-fil)

Les zones où le modèle approché est utilisé se comportent donc finalement comme des électrodes virtuelles fournissant des conditions aux limites fictives au modèle de la zone inter-électrodes. Dans le cas d'un fil, ces zones seront par exemple considérées comme des électrodes d'un rayon plus large et suivant une loi d'émission secondaire particulière.

### 3.3.2 Estimation théorique du gain en temps de calcul

La diminution du coût en temps de calcul apportée par la méthode d'électrode virtuelle repose donc principalement sur la suppression des contraintes sur le pas de temps dans un petit domaine  $D_\varepsilon$  de rayon  $\varepsilon$  autour des électrodes. Le principal gain attendu concerne la condition liée à l'intégration des équations de transports et nous cherchons ici à l'estimer de manière théorique.



**Figure 3.7** Discrétisation du domaine au voisinage d'une électrode

Considérons un voisinage autour d'une électrode cylindrique de rayon  $a$ . Chaque point  $y$  est décrit par sa distance  $r$  au centre de l'électrode et par un angle  $\theta$  également lié à l'électrode. Ce voisinage est discrétisé selon  $r$  et  $\theta$  tel que représenté figure 3.7. Le pas de discrétisation angulaire est supposé être fixe, de valeur  $\delta\theta$ . Le pas de discrétisation radial est quant à lui supposé croître avec la distance, valant de  $\delta r_1$  pour les cellules en contact avec l'électrode jusqu'à  $\delta r_n$  pour les cellules à l'extérieur du domaine  $D_\varepsilon$ . La condition CFL imposée par une cellule d'un tel maillage est classiquement donnée par la formule suivante :

$$\Delta t_i = \frac{\mathcal{A}_i}{L_{f,i} |\mathbf{u}_{max,i}|},$$

où pour une cellule  $i$ ,  $\mathcal{A}_i$  est son aire,  $L_{f,i}$  est la longueur de la plus grande de ses faces et  $\mathbf{u}_{max,i}$  est la vitesse locale de l'espèce la plus rapide, à savoir les électrons. La vitesse électronique dépend du champ électrique que nous supposons ici homogène à l'inverse de la distance au centre de l'électrode. Ainsi en écrivant  $|\mathbf{E}| = |E(\theta)|/r$ , la valeur absolue de la vitesse électronique devient  $|\mathbf{u}_e(r)| = \mu_e |E(\theta)|/r$ .

En notant  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_n$  les plus fortes CFL imposées respectivement dans et en dehors du domaine  $D_\varepsilon$ , nous obtenons :

$$\frac{\Delta t_n}{\Delta t_1} = \frac{\mathcal{A}_n}{\mathcal{A}_1} \times \frac{L_{f,1}}{L_{f,n}} \times \frac{|\mathbf{u}_{e,1}|}{|\mathbf{u}_{e,n}|}.$$

Les aires des cellules  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_n$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= ([a + \delta r_1]^2 - a^2) \delta\theta & \text{et} & & \mathcal{A}_n &= ([\varepsilon + \delta r_n]^2 - \varepsilon^2) \delta\theta \\ &= (\delta r_1 - 2a) \delta r_1 \delta\theta & & & &= (\delta r_n - 2\varepsilon) \delta r_n \delta\theta. \end{aligned}$$

En supposant que le maillage est toujours plus raffiné selon  $r$  que selon  $\theta$ , les longueurs maximales des faces des cellules sont données par :

$$L_{f,1} = (a + \delta r_1) \delta\theta \quad \text{et} \quad L_{f,n} = (\varepsilon + \delta r_n) \delta\theta.$$

Ainsi, en prenant la vitesse électronique au centre de gravité de chaque cellule, nous obtenons finalement après quelques simplifications :

$$\frac{\Delta t_n}{\Delta t_1} = \frac{\delta r_n}{\delta r_1} \left( \frac{\delta r_n + 2\varepsilon}{\delta r_1 + 2a} \right)^2 \frac{\delta r_1 + a}{\delta r_n + \varepsilon}.$$

En notant maintenant  $\delta r_n$  et  $\varepsilon$  comme des multiples de  $\delta r_1$  et de  $a$ , c'est-à-dire  $\delta r_n = l \delta r_1$  et  $\varepsilon = k a$ , où  $k$  et  $l$  sont des réels supérieurs à 1, il est alors possible de minorer la valeur du ratio entre les deux conditions CFL et nous obtenons :

$$\frac{\Delta t_n}{\Delta t_1} \geq l \times \frac{\min(k, l)^2}{\max(k, l)}$$

Ainsi, en présence d'un maillage suffisamment raffiné à proximité de l'électrode, la méthode d'électrode virtuelle permet d'améliorer la condition CFL d'au moins un facteur  $k^2$ . Dans le cas contraire, un gain d'un facteur  $k$  est au minimum assuré par la décroissance du champ électrique entre  $r = a$  et  $r = \varepsilon$ .

### 3.4 Synthèse

La simulation numérique de décharges électriques se heurte donc principalement à deux types de contraintes sur le pas de temps : la condition CFL et le pas de temps diélectrique. Dans le cas de décharges couronnes, les contraintes les plus limitantes se situent à proximité des électrodes, où le champ électrique très intense impose de prendre un maillage particulièrement fin. La démarche adoptée dans cette thèse pour pallier ces limitations a été présentée dans ce chapitre et consiste à développer un modèle approché s'affranchissant des contraintes de maillage et de pas de temps classiques dans un petit voisinage autour des électrodes. Une estimation rapide du gain de CFL montre que l'utilisation d'un tel modèle peut permettre une diminution substantielle du temps de calcul.

Deux modèles d'électrode virtuelle ont été développés au cours de cette thèse. Leur construction est décrite dans le chapitre suivant et reprend en partie la démarche adoptée pour la construction du premier modèle approché présenté dans la section 3.2, étendue à une décharge instationnaire et bidimensionnelle.



## Chapitre 4

# Développement des modèles d'électrode virtuelle

### Sommaire

---

<b>4.1. Description du cadre géométrique et mathématique</b> .....	52
4.1.1. Géométrie du problème .....	52
4.1.2. Définition des espaces fonctionnels .....	53
<b>4.2. Approximation de l'équation de Poisson</b> .....	55
4.2.1. Construction du modèle approché .....	56
4.2.2. Formulation variationnelle du problème approché .....	60
4.2.3. Estimation d'erreur a priori .....	63
4.2.4. Validation numérique de l'approximation de l'équation de Poisson .....	68
4.2.5. Bilan .....	69
<b>4.3. Modèles d'électrode virtuelle</b> .....	69
4.3.1. Préambule .....	69
4.3.2. Modèle asymptotique .....	72
4.3.3. Modèle radial .....	74
4.3.4. Vérification de la conservation du courant de décharge .....	80
<b>4.4. Synthèse</b> .....	82

---

Nous avons vu dans le chapitre 1 que la génération de décharges couronnes dans l'air se base principalement sur des dispositifs constitués d'électrodes filaires (fil-fil, fil-cylindre) ou de pointes (pointe-plan). Ces dispositifs sont à l'origine d'une forte singularité de champ électrique nécessitant un maillage très fin à proximité de l'électrode pour être résolue numériquement. Cela impose alors des contraintes trop fortes pour permettre la simulation de décharges électriques à l'aide de schémas numériques classiques et la recherche de modèles approchés permettant de s'affranchir de telles contraintes est alors nécessaire.

Ce chapitre a pour objectif de présenter les modèles développés au cours de cette thèse dans cette optique. Leur principe – qui a été décrit dans le chapitre précédent – consiste à décrire le plasma autour de la singularité de champ à l'aide d'un modèle approché construit de manière à ne plus être limité par les contraintes de pas de temps habituelles. Ce modèle permet

alors de définir des conditions aux limites fictives pour le reste du domaine, où le plasma est décrit de manière classique.

Après une brève section introductive définissant le cadre géométrique et mathématique dans lequel nous nous plaçons, une première partie s'attache à l'étude du potentiel électrique induit par une électrode filaire ou par une pointe. Une approximation de l'équation de Poisson y est développée et est validée par le biais d'estimations d'erreur *a priori* et de tests numériques. Cette approximation de la singularité de champ est finalement utilisée pour la construction de deux modèles d'électrode virtuelle approchant les équations plasma à proximité de l'électrode.

### 4.1 Description du cadre géométrique et mathématique

Les modèles approchés développés dans ce chapitre se basent tout deux sur l'hypothèse selon laquelle les particules chargées se déplacent principalement le long des lignes de champ à proximité des électrodes, où le champ électrostatique est particulièrement intense. La construction d'un modèle approché pour le champ électrique constitue donc la première étape du développement de nos modèles approchés et dépend naturellement de la géométrie de l'électrode considérée. Si les dispositifs filaires sont relativement faciles à étudier de manière générale du fait de leur géométrie commune, il n'en va pas de même en ce qui concerne les dispositifs comprenant une pointe. En effet, les formes utilisées varient d'un travail à un autre : certains considèrent par exemple un fil mince dont l'extrémité est arrondie [2], alors que d'autres en utilisent un terminé par un cône tronqué [23], ou bien utilisent d'autres géométries encore [39, 41]. La construction d'une approximation valable pour l'ensemble de ces pointes est par conséquent difficile et nous ne nous intéressons ici qu'à une forme simple mais présentant une véritable singularité de champ, à savoir une pointe infinie non tronquée.

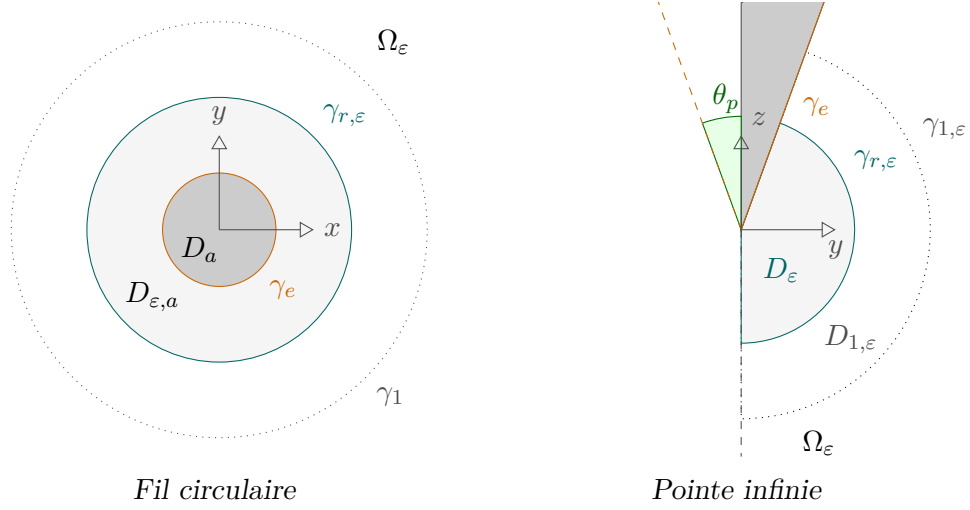
#### 4.1.1 Géométrie du problème

Les modèles approchés présentés dans ce chapitre sont développés pour deux types d'électrodes, à savoir un fil circulaire de rayon  $a$  ou une pointe infinie d'angle  $\theta_p$ . Dans les deux cas, l'électrode est portée à un potentiel constant  $\varphi_0$  et la décharge est supposée localement gouvernée par cette électrode. L'influence d'objet distant, telle qu'une autre électrode, est donc négligée. Ces deux systèmes présentent une invariance, soit par translation le long du fil, soit par rotation autour de l'axe de la pointe, et sont ainsi respectivement étudiés soit dans  $\mathbb{R}^2$  soit dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ .

Les géométries étudiées sont reportées figure 4.1. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  contenant le disque unité et de frontière  $\partial\Omega = \gamma_e \cup \gamma_\infty$ , où  $\gamma_e$  est la frontière délimitant la surface de l'électrode et où  $\gamma_\infty = \partial\Omega \setminus \gamma_e$ . Si l'on considère un repère centré sur le fil ou sur l'extrémité de la pointe, alors chaque élément  $x$  de  $\Omega$  est défini par sa distance au centre du repère  $r \in [r_0, +\infty[$  et par un angle  $\theta$  défini selon la géométrie étudiée. Pour un fil,  $r_0$  vaut  $a$  et  $\theta$  est l'angle avec l'axe des  $x$  compris entre  $\theta_0 = 0$  et  $\theta_n = 2\pi$ . Pour une pointe,  $r_0$  vaut 0 et  $\theta$  est l'angle avec l'axe de la pointe compris entre  $\theta_0 = \theta_p$  et  $\theta_n = \pi$ . Dans ce repère, la frontière de l'électrode est définie par :

$$\gamma_e = \begin{cases} \{x \in \Omega, r = a\}, & [fil] \\ \{x \in \Omega, \theta = \theta_p\}. & [pointe] \end{cases}$$





**Figure 4.1** Géométrie des dispositifs étudiés

Les géométries relatives aux deux types d'électrodes ayant été présentées, nous définissons finalement les suites d'ouverts paramétrés par  $0 < \alpha \leq 1$  :

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \{x \in \Omega, r_0 \leq r \leq \alpha\}, \\ D_{\alpha,\beta} &= \{x \in \Omega, \beta \leq r \leq \alpha\}, \\ \Omega_\alpha &= \{x \in \Omega \setminus D_\alpha\}, \end{aligned}$$

ainsi que les frontières paramétrées suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_{r,\alpha} &= \{x \in \Omega, r = \alpha\}, \\ \gamma_{e,\alpha} &= \{x \in \gamma_e, r \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

#### 4.1.2 Définition des espaces fonctionnels

Nous allons à présent décrire le cadre fonctionnel dans lequel nous nous plaçons tout au long de ce chapitre. Nous commençons par introduire l'espace fonctionnel  $H_0^1(\Omega_\alpha)$  défini par :

$$H_0^1(\Omega_\alpha) = \{u \in H^1(\Omega_\alpha), u = 0 \text{ sur } \gamma_\infty\}.$$

La norme de  $u$  dans  $H_0^1(\Omega_\alpha)$  est notée  $\|u\|_{1,\Omega_\alpha}$ . Les normes de  $f$  dans  $L^2(\Omega_\alpha)$  et dans  $L^\infty(\Omega)$  sont notées respectivement  $\|f\|_{L^2(\Omega_\alpha)}$  et  $\|f\|_\infty$ .

Afin de pouvoir étudier développer nos modèles approchés dans un petit domaine autour de l'électrode, nous décomposons le domaine  $\Omega$  en  $\Omega = \Omega_1 \cup D_1$  et nous caractérisons sur  $D_1$  l'espace  $H^1(D_1)$  à l'aide de la décomposition en série suivante :

$$v(r,\theta) = \sum_p v_p(r) e_p(\theta).$$

Pour ce faire, nous appliquons la méthode de séparation des variables sur  $r$  et  $\theta$  – justifiée dans [15] (p. 102-108) – et nous diagonalisons l'opérateur  $-\Delta_\theta$  associé à des conditions aux limites adéquates. Cet opérateur est défini par :

$$-\Delta_\theta = -1 \times \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, & [\text{fil}] \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). & [\text{pointe}] \end{cases}$$

Celui-ci est positif, auto-adjoint et d'inverse compact dans les espaces  $L^2(]0, 2\pi[)$  et  $L^2_\theta(]0, \pi])$  muni respectivement des mesures  $d\theta$  et  $\sin \theta d\theta$ . Il existe donc une base dénombrable de vecteurs propres orthonormés  $e_p$  dont les valeurs propres, réelles et positives, forment une suite dénombrable que l'on peut supposer croissante tendant vers plus l'infini ([4], pages 94-98).

Dans le cas d'un fil, les vecteurs propres de l'opérateur  $-\Delta_\theta$  sont donnés classiquement par les fonctions  $e^{ip\theta}$ , pour  $p \in \mathbb{Z}$ , avec comme valeur propre associée  $p^2$ .

Dans le cas d'une pointe, les solutions de l'équation  $-\Delta_\theta e_p = K_p e_p$  sont les fonctions de Legendre de la première espèce et d'ordre 0 [1] qui sont notées  $P_{l_p}$ , avec  $K_p = l_p(l_p + 1)$ ,  $l_p \in \mathbb{R}$ . Les fonctions de la seconde espèce ne sont pas prises en compte car elles sont divergentes en  $\theta = \pm\pi$ . Ici, la suite ordonnée  $(l_p)_{p \geq 0}$  doit être définie de manière à satisfaire la condition limite de Dirichlet à la surface de la pointe, c'est-à-dire :

$$(l_p)_{p \geq 0} = \{l_0 = 0; P_{l_p}(-\cos \theta_p) = 0, \forall p > 0\}.$$

Ainsi, dans le cas d'une pointe, nous avons  $e_p = Y_{l_p}(\cos \theta) = C_p P_{l_p}(-\cos \theta)$ , où  $C_p$  est une constante de normalisation assurant :

$$\int_{\theta_0}^{\theta_n} |Y_{l_p}(\cos \theta)|^2 \sin \theta d\theta = 1.$$

**Remarque.**

L'opérateur  $-\Delta_\theta$  est positif, ce qui implique dans le cas de la pointe que  $l_p(l_{p+1} + 1)$  est positif ou nul et impose donc soit  $l_p \geq 0$ , soit  $l_p \leq -1$ . Puisque pour tout  $l_p$ ,  $Y_{l_p} = Y_{-l_p-1}$  (voir [1]), seul l'ensemble des  $l_p \geq 0$  sera pris en compte pour le développement en série.

Au final, les vecteurs propres  $e_p$  satisfont :

$$-\Delta_\theta e_p = K_p e_p \quad \text{avec} \quad K_p = \begin{cases} p^2, & [\text{fil}] \\ l_p(l_p + 1). & [\text{pointe}] \end{cases}$$

avec  $e_p(\theta_p) = 0$  pour  $p \neq 0$  dans le cas d'une pointe. Ces fonctions sont orthogonales et sont définies par :

$$e_p(\theta) = \begin{cases} e^{ip\theta}, & [\text{fil}] \\ Y_{l_p}(\cos \theta), & [\text{pointe}] \end{cases}$$

et les fonctions  $v_p$  associées sont données par :

$$v_p(r) = \frac{1}{\theta_n - \theta_0} \times \begin{cases} \int_{\theta_0}^{\theta_n} v(r, \theta) e^{-ip\theta} d\theta, & [\text{fil}] \\ \int_{\theta_0}^{\theta_n} v(r, \theta) Y_{l_p}(\cos \theta) \sin \theta d\theta. & [\text{pointe}] \end{cases}$$

Introduisons à présent les mesures  $\mu_r$  et  $\mu_\theta$ , dépendant respectivement de  $r$  et de  $\theta$  définies par :

$$\mu_r(r) = \begin{cases} r & [\text{fil}] \\ r^2 & [\text{pointe}] \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu_\theta(\theta) = \begin{cases} 1 & [\text{fil}] \\ \sin \theta & [\text{pointe}] \end{cases}$$

Après décomposition en série, la norme  $L^2$  et la semi-norme  $H_1$  sur le domaine  $D_1$  peuvent être réécrites à l'aide des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(D_1)}^2 &= \sum_p \int_{r_0}^1 |v_p(r)|^2 \mu_r dr, \\ \int_{r_0}^1 \int_{\theta_0}^{\theta_n} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 \mu_r \mu_\theta d\theta dr &= \sum_p \int_{r_0}^1 |v_p'(r)|^2 \mu_r dr, \\ \int_{r_0}^1 \int_{\theta_0}^{\theta_n} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|^2 \mu_r \mu_\theta d\theta dr &= \sum_p K_p \int_{r_0}^1 |v_p(r)|^2 \frac{\mu_r}{r^2} dr. \end{aligned}$$

Ainsi, l'espace  $H_1$  peut donc être caractérisé sur  $D_1$  de la manière suivante :

$$H^1(D_1) = \left\{ v = \sum_p v_p(r) e_p(\theta), \sum_p \int_{r_0}^1 \left( 1 + \frac{K_p}{r^2} \right) |v_p(r)|^2 \mu_r dr + \int_{r_0}^1 |v_p'(r)|^2 \mu_r dr < \infty \right\},$$

et le produit scalaire de  $H_0^1(\Omega)$  peut être exprimé de façon classique sur  $\Omega_1$  et à l'aide de la décomposition en série sur  $D_1$ , à savoir :

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega_1} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega_1} uv + \sum_p \int_{r_0}^1 \left( 1 + \frac{K_p}{r^2} \right) u_p(r) v_p(r) \mu_r dr + \int_{r_0}^1 u_p'(r) v_p'(r) \mu_r dr.$$

## 4.2 Approximation de l'équation de Poisson

Afin de pouvoir développer un modèle de décharge couronne approché pour les dispositifs présentés dans la section 4.1.1, il est avant tout nécessaire de construire une approximation du champ électrique régissant la décharge. Pour cela, nous étudions le potentiel  $u$  satisfaisant une équation de Poisson dont le second membre  $f$  représente la présence de particules chargées. Le potentiel est fixé à  $u = u_0$  à la surface de l'électrode et est nul sur les autres frontières du domaine. Le problème étudié est donc le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_{r,\theta} u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \gamma_\infty, \\ u = u_0 & \text{sur } \gamma_e, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\Delta_{r,\theta}$  est l'opérateur Laplacien en coordonnées cylindriques ou sphériques selon la géométrie considérée. L'étude et l'approximation de ce problème se divisent en principalement trois parties. Le développement du problème approché est tout d'abord détaillé pour les deux géométries et l'étude variationnelle du système obtenu est faite. Cette étude amène alors à la construction d'une inégalité de type inégalité de Poincaré qui est alors utilisée pour obtenir une estimation d'erreur *a priori* de notre problème par rapport au problème initial.

### 4.2.1 Construction du modèle approché

Afin de développer notre modèle approché, nous introduisons un réel positif  $\varepsilon$  très petit devant 1 et destiné à tendre vers 0. Ce réel définit la taille du domaine  $D_\varepsilon$  où le problème est approché et doit par conséquent être plus grand que  $a$  dans le cas d'un fil. Pour cette géométrie, nous supposons par la suite que la taille du fil est très petite devant  $\varepsilon$ , par exemple  $a = \varepsilon^2$ , et que celle-ci décroît plus rapidement que  $\varepsilon$ , c'est-à-dire que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{a} = +\infty.$$

L'approximation du problème (4.1) est décrite dans la définition 1. Sa construction reprend un procédé similaire à celui décrit par Rogier *et al.* [44] qui consiste à se ramener à la résolution d'un problème sur le domaine  $\Omega_\varepsilon$  où la dérivée normale de la solution sur la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$  est donnée par un opérateur de Dirichlet-Neumann  $K_\varepsilon$ . Cet opérateur est défini par la résolution du problème sur le domaine  $D_\varepsilon$  et est ici formellement approché à l'aide d'un développement asymptotique de la solution sur  $D_\varepsilon$  par rapport à  $\varepsilon$ .

**Définition 1.**

L'approximation du problème (4.1) est définie par :

$$\begin{cases} -\Delta_{r,\theta} u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = K_\varepsilon^0(u_\varepsilon) & \text{sur } \gamma_{r,\varepsilon}, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \gamma_\infty, \\ u_\varepsilon = u_0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \cap \gamma_e, \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $K_\varepsilon^0$  est une approximation de l'opérateur de Dirichlet-Neumann défini par :

$$K_\varepsilon^0(g) = (u_0 - g) \times \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon \ln(a/\varepsilon)}, & [\text{fil}] \\ \frac{l_1}{\varepsilon}. & [\text{pointe}] \end{cases}$$

Le prolongement de  $u_\varepsilon$  dans  $D_\varepsilon$  est défini par :

$$u_\varepsilon(r,\theta) = u_0 + (u_\varepsilon(\varepsilon, \theta) - u_0) \times \begin{cases} \frac{\ln(r/a)}{\ln(\varepsilon/a)}, & [\text{fil}] \\ \frac{r^{l_1}}{\varepsilon^{l_1}}, & [\text{pointe}] \end{cases}$$

où  $l_1$  est un réel provenant du développement de  $u_\varepsilon$  en série sur  $D_\varepsilon$ .

En effet, la résolution du problème (4.1) est strictement équivalente à la résolution de deux problèmes, l'un défini sur un petit domaine  $D_\varepsilon$  de taille relative à  $\varepsilon$  et l'autre défini sur le reste du domaine  $\Omega_\varepsilon$ . L'échange entre les deux domaines se fait par le biais de conditions limites à la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$ . La continuité du potentiel est assurée par le problème sur le domaine  $D_\varepsilon$  tandis

que la continuité de sa dérivé normale est assurée par l'autre problème. Nous définissons ainsi le problème :

$$\begin{cases} -\Delta_{r,\theta} u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \frac{\partial u_\varepsilon^I}{\partial n} & \text{sur } \gamma_{r,\varepsilon}, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \gamma_\infty, \\ u_\varepsilon = u_0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \cap \gamma_e, \end{cases} \quad (4.3)$$

avec  $u_\varepsilon^I$  solution de :

$$\begin{cases} -\Delta_{r,\theta} u_\varepsilon^I = f & \text{dans } D_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^I = u_\varepsilon & \text{sur } \gamma_{r,\varepsilon}, \\ u_\varepsilon^I = u_0 & \text{sur } \gamma_{e,\varepsilon}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Le changement d'échelle  $r = r/\varepsilon$  sur  $D_\varepsilon$  permet alors de définir une approximation asymptotique du problème (4.4) en se limitant aux termes du premier ordre en  $\varepsilon$ . L'influence du second membre  $f$  est alors négligée dans un petit voisinage autour de l'électrode et nous obtenons le lemme suivant :

**Lemme 1.**

L'approximation du problème (4.4) au premier ordre en  $\varepsilon$  s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta_{r,\theta} u_\varepsilon^I = 0 & \text{dans } D_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^I = u_\varepsilon & \text{sur } \gamma_{r,\varepsilon}, \\ u_\varepsilon^I = u_0 & \text{sur } \gamma_{e,\varepsilon}, \end{cases} \quad (4.5)$$

et admet pour solution

$$u_\varepsilon^I(r,\theta) = u_0 + \begin{cases} (u_{\varepsilon,0}(\varepsilon) - u_0) \frac{\ln(r/a)}{\ln(\varepsilon/a)} + \sum_{p>0} (a_p r^p + b_p r^{-p}) e^{ip\theta} + (a_{-p} r^p + b_{-p} r^{-p}) e^{-ip\theta}, & [\text{fil}] \\ \sum_{p>0} u_{\varepsilon,p}(\varepsilon) \frac{r^{l_i}}{\varepsilon^{l_i}} Y_{l_i}(\cos \theta), & [\text{pointe}] \end{cases}$$

où les coefficient  $a_p$  et  $b_p$  sont définis pour  $p \neq 0$  par :

$$a_p = u_{\varepsilon,p}(\varepsilon) \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon^{2p} - a^{2p}} \quad \text{et} \quad b_p = -a^{2p} a_p.$$

Les coefficients  $u_{\varepsilon,i}$  sont quant à eux issus du développement de  $u_\varepsilon$  en série sur  $D_1$ , à savoir  $u_\varepsilon = \sum_p u_{\varepsilon,p}(r) e_p$ .

**Démonstration.**

D'après le principe de superposition, la solution  $u_\varepsilon^I$  peut s'écrire comme la somme des fonctions  $u_\varepsilon^{I,0}$  et  $u_\varepsilon^{I,1}$  satisfaisant les problèmes suivant :

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\Delta_{r,\theta} u_\varepsilon^{I,0} = 0 & \text{dans } D_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^{I,0} = u_\varepsilon & \text{sur } \gamma_{r,\varepsilon}, \\ u_\varepsilon^{I,0} = u_0 & \text{sur } \gamma_{e,\varepsilon}. \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}_1) \begin{cases} -\Delta_{r,\theta} u_\varepsilon^{I,1} = f & \text{dans } D_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^{I,1} = 0 & \text{sur } \gamma_{r,\varepsilon}, \\ u_\varepsilon^{I,1} = 0 & \text{sur } \gamma_{e,\varepsilon}. \end{cases}$$

En effectuant le changement d'échelle  $r = r/\varepsilon$ , le problème  $(\mathcal{P}_1)$  devient :

$$\begin{cases} -\Delta_{r,\theta} u_\varepsilon^{I,1} = \varepsilon^2 f & \text{dans } D_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^{I,1} = 0 & \text{sur } \gamma_{r,\varepsilon}, \\ u_\varepsilon^{I,1} = 0 & \text{sur } \gamma_{e,\varepsilon}. \end{cases}$$

Ainsi, en négligeant les termes d'ordre 2 ou plus en  $\varepsilon$ , le problème  $(\mathcal{P}_1)$  n'admet plus que la solution uniformément nulle  $u_\varepsilon^{I,1} = 0$  et résoudre le problème (4.5) revient à résoudre le problème  $(\mathcal{P}_0)$ . En développant alors  $u_\varepsilon^I$  en série sur  $D_\varepsilon$ , c'est-à-dire en posant :

$$u_\varepsilon^I(r,\theta) = \sum_p u_{\varepsilon,p}^I(r) e_p,$$

le problème (4.5) revient à résoudre :

$$\left\{ \sum_p \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_{\varepsilon,p}^I}{\partial r} \right) - \frac{p^2}{r^2} u_{\varepsilon,p}^I \right) e^{ip\theta} = 0, \quad [\text{fil}] \quad (4.6) \right.$$

$$\left. \left\{ \sum_{p \geq 0} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_{\varepsilon,p}^I(r)}{\partial r} \right) - l_p(l_p + 1) u_{\varepsilon,p}^I(r) \right) Y_{l_p}(\cos \theta) = 0. \quad [\text{pointe}] \quad (4.7) \right. \right.$$

Les fonctions de bases étant orthogonales entre elles, il faut donc que chaque terme de la somme soit nul. En écrivant le développement de  $u_\varepsilon$  en série sur  $D_1$  :

$$u_\varepsilon = \sum_p u_{\varepsilon,p}(r) e_p,$$

nous recherchons la solution sous la forme de puissance de  $r$  de la façon décrite ci-après.

### Cas d'un fil :

La solution recherchée est de la forme :

$$u_\varepsilon^I(r,\theta) = a_0 \ln(r) + b_0 + \sum_{p > 0} (a_p r^p + b_p r^{-p}) e^{ip\theta} + (a_{-p} r^p + b_{-p} r^{-p}) e^{-ip\theta}.$$

où les coefficients  $a_p$  et  $b_p$  sont déterminés par les conditions limites en  $r = a$  et en  $r = \varepsilon$  :

– Pour  $p = 0$ , nous avons :

$$\begin{cases} a_0 \ln(\varepsilon) + b_0 = u_{\varepsilon,0}(\varepsilon), \\ a_0 \ln(a) + b_0 = u_0, \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a_0 = \frac{u_{\varepsilon,0} - u_0}{\ln(\varepsilon/a)}, \\ b_0 = u_0 - a_0 \ln(a). \end{cases}$$

– Pour  $p \neq 0$ , nous avons :

$$\begin{cases} a_p \varepsilon^p + b_p \varepsilon^{-p} = u_{\varepsilon,p}(\varepsilon), \\ a_p a^p + b_p a^{-p} = 0, \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a_p = u_{\varepsilon,p}(\varepsilon) \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon^{2p} - a^{2p}}, \\ b_p = -a^{2p} a_p. \end{cases}$$

La solution est donc finalement donnée par :

$$u_\varepsilon^I(r, \theta) = u_0 + (u_{\varepsilon,0} - u_0) \frac{\ln(r/a)}{\ln \varepsilon/a} + \sum_{p>0} \frac{u_{\varepsilon,p}(\varepsilon) e^{ip\theta} + u_{\varepsilon,-p}(\varepsilon) e^{-ip\theta}}{1 - (a/\varepsilon)^{2p}} \left( \frac{r^p}{\varepsilon^p} - \frac{a^{2p}}{\varepsilon^p} r^{-p} \right).$$

Puisque  $a$  est plus petit que  $\varepsilon$  et que  $a \leq r \leq \varepsilon$ , chacun des termes définissant la solution reste borné lorsque  $a$  tend vers 0, ce quelque soit  $p$  positif.

### Cas d'une pointe :

Le problème à résoudre est équivalent au problème suivant :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_{\varepsilon,p}^I(r)}{\partial r} \right) - l_p(l_p + 1) u_{\varepsilon,p}^I(r) = 0 \quad \forall p \geq 0.$$

En cherchant des solutions sous la forme  $u_{\varepsilon,p}^I(r) = a_p r^{\alpha_p}$ , nous obtenons :

$$a_p r^{\alpha_p} (\alpha_p(\alpha_p + 1) - l_p(l_p + 1)) = 0,$$

soit  $\alpha_p = l_p$  ou  $\alpha_p = -(l_p + 1)$ . Puisque la solution recherchée doit être finie en  $r = 0$  et que  $l_p \geq 0$ , nous ne prenons en compte que les puissances positives de  $r$  :

$$u_\varepsilon^I(r, \theta) = \sum_{p \geq 0} a_p r^{l_p} Y_{l_p}(\cos \theta).$$

Les coefficients  $a_p$  sont alors identifiés par le biais des conditions limites :

- La condition limite à la surface de la pointe impose  $u_\varepsilon^I(r, \theta_p) = u_0$  pour tout  $r$ . Puisque  $Y_{l_p}(\cos \theta_p) = 0$  pour tout  $p > 0$ , cela fixe  $a_0 = u_0$ .
- La condition limite sur la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$  impose  $u_\varepsilon^I(\varepsilon, \theta) = u_\varepsilon(\varepsilon, \theta)$  pour tout angle  $\theta$ , ce qui fixe  $a_p = u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)/\varepsilon^{l_p}$ , pour tout  $p > 0$ .

L'ensemble des coefficients  $a_p$  est donc déterminé et nous obtenons finalement :

$$u_\varepsilon^I(r, \theta) = u_0 + \sum_{p>0} u_{\varepsilon,p}(\varepsilon) \frac{r^{l_p}}{\varepsilon^{l_p}} Y_{l_p}(\cos \theta).$$

◆

La solution du problème (4.5) est maintenant approchée en se limitant aux premiers termes de la série, à savoir :

$$u_\varepsilon^I(r, \theta) = u_0 + \begin{cases} (u_{\varepsilon,0}(\varepsilon) - u_0) \frac{\ln(r/a)}{\ln(\varepsilon/a)}, & [\text{fil}] \\ u_{\varepsilon,1}(\varepsilon) \frac{r^{l_1}}{\varepsilon^{l_1}} Y_{l_1}(\cos \theta). & [\text{pointe}] \end{cases} \quad (4.8)$$

Il est alors possible de calculer l'opérateur de Dirichlet-Neumann pour le problème (4.3) :

$$\left. \frac{\partial u_\varepsilon^I}{\partial n} \right|_{r=\varepsilon} = -1 \times \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \frac{u_{\varepsilon,0}(\varepsilon) - u_0}{\ln(\varepsilon/a)}, & [\text{fil}] \\ u_{\varepsilon,1}(\varepsilon) \frac{l_1}{\varepsilon} Y_{l_1}(\cos \theta). & [\text{pointe}] \end{cases} \quad (4.9)$$

Dans le cas d'un fil, cette approximation impose à la dérivée normale d'être principalement radiale. En effet, seul le premier mode est conservé et la solution  $u_\varepsilon^I$  ne dépend que de la valeur moyenne de  $u_\varepsilon$  sur la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$ . Afin de réintroduire une dépendance en  $\theta$  et d'obtenir une solution plus facilement calculable numériquement,  $u_\varepsilon$  est approché par les premiers termes de son développement en série, à savoir :

$$u_\varepsilon(\varepsilon, \theta) = \begin{cases} u_{\varepsilon,0}, & [\text{fil}] \\ u_0 + u_{\varepsilon,1} Y_{l_1}(\cos \theta). & [\text{pointe}] \end{cases}$$

Nous pouvons alors de remplacer les termes  $u_{\varepsilon,0/1}$  par  $u_\varepsilon(\varepsilon, \theta)$  dans les équations (4.8) et (4.9) pour finalement obtenir :

$$u_\varepsilon^I(r, \theta) = u_0 + (u_\varepsilon(\varepsilon, \theta) - u_0) \times \begin{cases} \frac{\ln(r/a)}{\ln(\varepsilon/a)}, & [\text{fil}] \\ \frac{r^{l_1}}{\varepsilon^{l_1}}, & [\text{pointe}] \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial u_\varepsilon^I}{\partial n} \right|_{r=\varepsilon} = (u_0 - u_\varepsilon(\varepsilon, \theta)) \times \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon \ln(\varepsilon/a)}, & [\text{fil}] \\ \frac{l_1}{\varepsilon}. & [\text{pointe}] \end{cases}$$

Ceci définit le problème approché décrit dans la définition 1, où la solution définie analytiquement sur le petit domaine  $D_\varepsilon$  permet d'obtenir l'expression de la condition limite de Dirichlet-Neumann pour le problème défini sur  $\Omega_\varepsilon$ .

#### 4.2.2 Formulation variationnelle du problème approché

Le problème (4.2) peut être écrit sous forme variationnelle. En prenant une fonction test  $v$  et en intégrant sur le domaine  $\Omega_\varepsilon$ , nous obtenons :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx + \chi_\varepsilon \int_{\gamma_{r,\varepsilon}} u_\varepsilon v \, d\gamma = \int_{\Omega_\varepsilon} f v \, dx + \chi_\varepsilon \int_{\gamma_{r,\varepsilon}} u_0 v \, d\gamma. \quad (4.10)$$

où  $\chi_\varepsilon$  est une constante provenant de la conditions aux limites sur la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$  définie par :

$$\chi_\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon \ln(\varepsilon/a)}, & [\text{fil}] \\ \frac{l_1}{\varepsilon}, & [\text{pointe}] \end{cases}$$

À partir de cette formulation variationnelle, il est possible d'obtenir une majoration de la norme  $\|u_\varepsilon\|_{1,\Omega_\varepsilon}$  indépendante de  $\varepsilon$  que nous utiliseront pour obtenir une estimation d'erreur *a priori*. Nous avons alors la proposition suivante :

**Proposition 4.**

Le problème (4.10) admet une unique solution et il existe une constante  $C_0$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que :

$$\|u_\varepsilon\|_{1,\Omega_\varepsilon} \leq C_0. \quad (4.11)$$



**Démonstration.**

Puisque  $\chi_\varepsilon$  est strictement positive, la forme bilinéaire du membre de gauche de l'équation (4.10) est coercive et l'unicité de la solution est assurée par le théorème de Lax-Milgram.

L'estimation de la norme de  $u_\varepsilon$  est obtenue en construisant tout d'abord une inégalité de Poincaré ne dépendant pas de  $\varepsilon$  pour l'espace  $H_1(\Omega_\varepsilon)$ . Soit  $\psi_\alpha$  une fonction de  $D(\bar{\Omega}_\alpha)$  et  $\psi_1 \in D(\bar{\Omega}_1)$  sa restriction à  $\Omega_1$ . Nous avons alors l'égalité suivante :

$$\psi_\alpha(r, \theta) = \psi_\alpha(1, \theta) - \int_r^1 \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial s} ds.$$

En utilisant une inégalité polynomiale classique et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons alors la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\psi_\alpha(r, \theta)|^2 &\leq |\psi_\alpha(1, \theta)|^2 + \left| \int_r^1 \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial s} ds \right|^2 \\ &\leq |\psi_\alpha(1, \theta)|^2 + \left| \int_r^1 \frac{1}{\mu_r(s)} ds \right| \int_r^1 \left| \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial s} \right|^2 \mu_r(s) ds \\ &\leq |\psi_\alpha(1, \theta)|^2 + I_{\mu_r} \int_r^1 \left| \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial s} \right|^2 \mu_r(s) ds, \end{aligned}$$

où  $I_{\mu_r}$  est la valeur absolue de l'intégrale de  $r$  à 1 de l'inverse de la mesure  $\mu_r$ , soit :

$$I_{\mu_r} = \begin{cases} |\ln(r)|, & [\text{fil}] \\ (1/r - 1). & [\text{pointe}] \end{cases}$$

L'intégration de l'inégalité précédente sur  $r$  et  $\theta$  donne la majoration suivante pour la norme  $\|\psi\|_{L^2(D_{1,\alpha})}$  :

$$\begin{aligned} \int_\alpha^1 \int_{\theta_0}^{\theta_n} |\psi_\alpha(r, \theta)|^2 \mu_r \mu_\theta d\theta dr &\leq 2 \int_\alpha^1 \int_{\theta_0}^{\theta_n} |\psi_\alpha(1, \theta)|^2 \mu_r \mu_\theta d\theta dr \\ &\quad + 2 \int_\alpha^1 \int_{\theta_0}^{\theta_n} I_{\mu_r} \int_r^1 \underbrace{\left| \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial s} \right|^2 \mu_r(s)}_{(a)} ds \mu_r(r) \mu_\theta d\theta dr. \end{aligned}$$

En majorant sur  $D_{1,\alpha}$  l'intégrale du terme (a) de  $r$  à 1 par son intégrale de  $\alpha$  à 1, il est alors possible de mettre en facteur une constante  $C_m$ , définie par :

$$C_m = 2 \max \left( \int_0^1 \mu_r dr, \int_0^1 \mu_r I_{\mu_r} dr \right),$$

et nous obtenons :

$$\|\psi_\alpha\|_{L^2(D_{1,\alpha})} \leq C_m \left( \underbrace{\int_{\theta_0}^{\theta_n} |\psi_\alpha(1, \theta)|^2 \mu_\theta d\theta}_{(b)} + \int_{\theta_0}^{\theta_n} \int_\alpha^1 \left| \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial r} \right|^2 \mu_r \mu_\theta dr d\theta \right).$$

Le terme (b) se majore par la norme  $L^2$  du gradient de  $\psi_\alpha$  dans  $\Omega_\alpha$  en utilisant l'inégalité de trace dans  $H_0^1(\Omega_1)$ , puis l'inégalité de Poincaré dans  $\Omega_1$  :

$$\int_{\theta_0}^{\theta_n} |\psi_\alpha(1, \theta)|^2 \mu_\theta d\theta \leq C_t \|\psi_\alpha\|_{1, \Omega_1}^2 \leq C_t C_{P_1} \|\nabla \psi_\alpha\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq C_t C_{P_1} \|\nabla \psi_\alpha\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2,$$

ce qui nous permet d'obtenir une majoration de la norme  $L^2$  de  $\psi_\alpha$  sur  $D_{1, \alpha}$  par la norme  $L^2$  de son gradient sur  $\Omega_\alpha$  :

$$\|\psi_\alpha\|_{L^2(D_{1, \alpha})}^2 \leq C_{P_2} \|\nabla \psi_\alpha\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2.$$

où  $C_{P_2}$  est une constante définie par  $C_{P_2} = C_m \max(1, C_t C_{P_1})$ . La norme de  $\psi_\alpha$  sur  $\Omega_1$  est quant à elle directement majorée grâce à l'inégalité de Poincaré :

$$\|\psi_\alpha\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq C_{P_1} \|\nabla \psi_\alpha\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq C_{P_1} \|\nabla \psi_\alpha\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2.$$

Finalement, nous obtenons une inégalité de Poincaré sur  $\psi_\alpha$  portant sur l'ensemble du domaine  $\Omega_\alpha$  :

$$\|\psi_\alpha\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2 \leq (C_{P_1} + C_{P_2}) \|\nabla \psi_\alpha\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2.$$

et la densité de  $D(\bar{\Omega}_\alpha)$  dans  $H^1(\Omega_\alpha)$  implique que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2 \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\alpha)}^2 \quad \forall u \in H^1(\Omega_\alpha), \quad (4.12)$$

où  $C_P = C_{P_1} + C_{P_2}$  est une constante indépendante de  $\alpha$ .

Reprenons maintenant la formulation variationnelle du problème approché (4.10) avec comme fonction test  $v = u_\varepsilon$ . Nous avons alors :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \leq \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \chi_\varepsilon \int_{\gamma_{r, \varepsilon}} |u_\varepsilon|^2 d\gamma \leq \underbrace{\left| \int_{\Omega_\varepsilon} f u_\varepsilon dx \right|}_{(c)} + \chi_\varepsilon \underbrace{\left| \int_{\gamma_{r, \varepsilon}} u_0 u_\varepsilon d\gamma \right|}_{(d)}. \quad (4.13)$$

Le premier terme (c) du membre de droite peut-être majoré en utilisant tout d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis en se servant de l'inégalité de Poincaré (4.12) :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_\varepsilon} f u_\varepsilon dx \right| &\leq \left( \int_{\Omega_\varepsilon} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \left( \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} && \text{d'après (4.12)} \\ &\leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \left( \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \chi_\varepsilon \int_{\gamma_{r, \varepsilon}} |u_\varepsilon|^2 d\gamma \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Le second terme (d) du membre de droite se majore également grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon \left| \int_{\gamma_{r, \varepsilon}} u_0 u_\varepsilon d\gamma \right| &\leq \left( \int_{\gamma_{r, \varepsilon}} |u_0|^2 \chi_\varepsilon d\gamma \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\gamma_{r, \varepsilon}} |u_\varepsilon|^2 \chi_\varepsilon d\gamma \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_{\gamma_{r, \varepsilon}} |u_0|^2 \chi_\varepsilon d\gamma \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\gamma_{r, \varepsilon}} |u_\varepsilon|^2 \chi_\varepsilon d\gamma + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

L'utilisation de ces majorations dans l'inégalité (4.13) nous amène alors la majoration suivante :

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left( \int_{\gamma_{r,\varepsilon}} |u_0|^2 \chi_\varepsilon d\gamma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque la fonction  $f$  appartient à  $L^2(\Omega_\varepsilon)$  et que  $u_0$  est une constante bornée, nous obtenons finalement deux majorations semblables selon la géométrie étudiée :

$$\|u_\varepsilon\|_{1,\Omega_\varepsilon} \leq (C_P + 1) \left( C_P \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (\theta_n - \theta_0) |u_0| \begin{cases} \frac{1}{\ln(\varepsilon/a)} & [\text{fil}] \\ \varepsilon l_1 & [\text{pointe}] \end{cases} \right).$$

Dans le cas d'un fil, nous avons fait l'hypothèse que  $a \ll \varepsilon$ , par exemple  $a = \varepsilon^2$ . Par conséquent, le terme du membre de droite dépendant de  $\varepsilon$  est toujours borné et il existe une constante  $C_0$  dépendant principalement de  $C_P$  et de la norme  $L^2$  de  $f$ , mais indépendante de  $\varepsilon$  telle que :

$$\|u_\varepsilon\|_{1,\Omega_\varepsilon} \leq C_0.$$

◆

### 4.2.3 Estimation d'erreur a priori

Nous cherchons ici à obtenir une estimation d'erreur *a priori* entre le problème approché (4.2) et le problème exact (4.1). Pour cela, nous introduisons la fonction  $\bar{u}_\varepsilon = u - u_\varepsilon$ . Puisque  $u_\varepsilon$  et sa dérivée normale sont continues à la traversée de la frontière entre  $D_\varepsilon$  et  $\Omega_\varepsilon$ ,  $\bar{u}_\varepsilon$  satisfait le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_{r,\theta} \bar{u}_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ -\Delta_{r,\theta} \bar{u}_\varepsilon = f + \Delta_{r,\theta} u_\varepsilon & \text{dans } D_\varepsilon, \\ [\bar{u}_\varepsilon] = \left[ \frac{\partial \bar{u}_\varepsilon}{\partial n} \right] = 0 & \text{sur } \gamma_{r,\varepsilon}, \\ \bar{u}_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.14)$$

Soit une fonction  $v \in H^1(\Omega)$ , telle que  $v = 0$  sur  $\partial\Omega$ . La formulation variationnelle du problème (4.14) est alors la suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u}_\varepsilon \cdot \nabla v \mu_r \mu_\theta dr d\theta = \int_{D_\varepsilon} f v \mu_r \mu_\theta dr d\theta + \int_{D_\varepsilon} \Delta_{r,\theta} u_\varepsilon v \mu_r \mu_\theta dr d\theta.$$

En remplaçant  $u_\varepsilon$  par sa définition dans  $D_\varepsilon$ , le Laplacien  $\Delta_{r,\theta} u_\varepsilon$  s'écrit après simplifications :

$$\Delta_{r,\theta} u_\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\ln(r/a)}{\ln(\varepsilon/a)} \frac{\partial^2 u_\varepsilon(\varepsilon, \theta)}{\partial \theta^2}, & [\text{fil}] \\ \frac{1}{r^2} \frac{r^{l_1}}{\varepsilon^{l_1}} \left[ l_1(l_1 + 1)(u_\varepsilon(\varepsilon, \theta) - u_0) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_\varepsilon(\varepsilon, \theta)}{\partial \theta} \right) \right]. & [\text{pointe}] \end{cases}$$

La formule de Green permet alors dans le cas du fil de reporter une dérivée en  $\theta$  de  $u_\varepsilon$  sur  $v$ . Nous développons ensuite  $u_\varepsilon$  en série sur  $D_\varepsilon$  et la formulation variationnelle devient après quelques simplifications :

$$(4.15) \quad \int_{\Omega} \nabla \bar{u}_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = \int_{D_\varepsilon} f v \, dx + \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p \neq 0} u_{\varepsilon,p}(\varepsilon) \frac{p^2}{\ln(\varepsilon/a)} \int_a^\varepsilon \frac{1}{r^2} \ln(r/a) v_p \, \mu_r \, dr, \quad [\text{fil}] \\ \sum_{p \geq 2} [l_1(l_1 + 1) - l_p(l_p + 1)] \frac{u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)}{\varepsilon^{l_1}} \int_0^\varepsilon r^{l_1} v_p(r) \, dr. \quad [\text{pointe}] \end{array} \right.}_{(f)}$$

Les sommes discrète (e) et (f) peuvent être majorée en utilisant successivement deux inégalités de Cauchy-Schwarz. Pour un fil, nous avons :

$$\begin{aligned} |(e)| &\leq \sum_{p \neq 0} \frac{|u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|}{\ln(\varepsilon/a)} \left( \int_a^\varepsilon p^2 \frac{|\ln(r/a)|^2}{r^2} \mu_r \, dr \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^\varepsilon p^2 \frac{|v_p(r)|^2}{r^2} \mu_r \, dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\frac{\ln(\varepsilon/a)}{3}} \underbrace{\left( \sum_{p \neq 0} p^2 |u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{(g)} |v|_{1,D_\varepsilon}. \end{aligned}$$

De la même manière, nous obtenons pour une pointe :

$$\begin{aligned} |(f)| &\leq \sum_{p \geq 2} |l_1(l_1 + 1) - l_p(l_p + 1)| \frac{|u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{l_1}} \left( \int_0^\varepsilon r^{2l_1} \, dr \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^\varepsilon \frac{|v_p(r)|^2}{r^2} \mu_r \, dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2l_1 + 1}} \left( \sum_{p \geq 2} \frac{|l_1(l_1 + 1) - l_p(l_p + 1)|^2}{l_p(l_p + 1)} |u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |v|_{1,D_\varepsilon} \\ &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2l_1 + 1}} \underbrace{\left( \sum_{p \geq 2} l_p(l_p + 1) |u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{(h)} |v|_{1,D_\varepsilon}, \end{aligned}$$

où le passage de la deuxième à la dernière ligne de cette majoration utilise le fait que  $l_p(l_p + 1) > l_1(l_1 + 1)$  pour tout  $p$  plus grand que 2 et que par conséquent :

$$\frac{|l_1(l_1 + 1) - l_p(l_p + 1)|^2}{l_p(l_p + 1)} = l_p(l_p + 1) \underbrace{\left( \frac{l_1(l_1 + 1)}{l_p(l_p + 1)} - 1 \right)^2}_{\leq 1} \leq l_p(l_p + 1).$$

La majoration de la norme  $H_0^1$  de  $\bar{u}_\varepsilon$  dans  $\Omega$  nécessite donc le contrôle de la norme  $H^1$  de  $u_\varepsilon$  sur la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$ , représentée par les sommes (g) et (h). Pour ce faire, nous allons à présent démontrer la proposition suivante :

**Proposition 5.**

En supposant que  $f \in H_1(\Omega)$ , il existe des constantes  $A_0$ ,  $C_0$  et  $C_\phi$  indépendantes de  $\varepsilon$

telles que :

$$\sum_{p \neq 0} p^2 |u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|^2 \leq A_0 C_0 (|f|_{1,D_\varepsilon} + C_\phi C_0) \times \varepsilon^2 \ln(\varepsilon/a) \quad [\text{fil}]$$

$$\sum_{p \geq 2} l_p(l_p + 1) |u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|^2 \leq A_0 C_0 (|f|_{1,D_\varepsilon} + C_\phi C_0) \times \varepsilon \quad [\text{pointe}]$$

où  $C_0$  est la constante provenant de l'inégalité de Poincaré (4.11).

### Démonstration.

En reprenant la formulation variationnelle du problème approché (4.10) et en développant en série sur  $D_{1,\varepsilon}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx + \sum_p \int_\varepsilon^1 u'_{\varepsilon,p} v'_p \mu_r \, dr + K_p \int_\varepsilon^1 u_{\varepsilon,p} v_p \frac{\mu_r}{r^2} \, dr + \chi_\varepsilon \mu_r(\varepsilon) u_{\varepsilon,p}(\varepsilon) v_p(\varepsilon) \\ = \int_{\Omega_1} f v \, dx + \sum_p \int_\varepsilon^1 f_p v_p \mu_r \, dr + \delta_{p,0} \chi_\varepsilon \mu_r(\varepsilon) u_0 v_p(\varepsilon). \end{aligned}$$

Introduisons maintenant la fonction  $\phi \in C^2(]0, +\infty[)$  dont l'allure est représentée figure 4.2. Il s'agit d'une fonction positive à valeurs dans  $]0,1]$  pour  $r < 1$  et nulles sinon. Elle vaut 1 en  $r = \varepsilon$  et sa dérivée s'annule en  $\varepsilon$  et en 1. Nous supposons de plus qu'il existe une constante  $\beta$  comprise entre  $\varepsilon$  et 1, indépendante de  $\varepsilon$ , telle que les dérivées première et seconde de  $\phi$  s'annule pour tout  $r$  plus petit que  $\beta$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \phi(r) \leq 1 \text{ pour } 0 < r < 1, \\ \phi(r) = 0 \text{ pour } r \geq 1, \\ \phi(\varepsilon) = 1, \\ \phi'(1) = \phi'(\varepsilon) = 0, \\ \exists \beta, \varepsilon < \beta < 1, \text{ tel que :} \\ \phi''(r) = \phi'(r) = 0, \forall r < \beta. \end{array} \right.$$

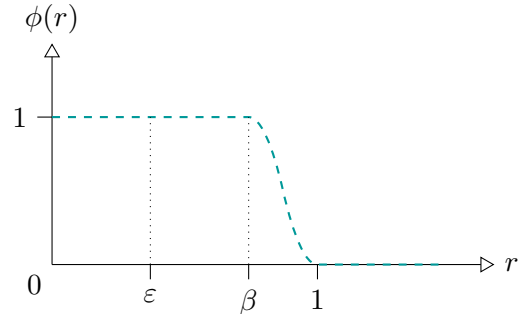


Figure 4.2 Allure de la fonction  $\phi$

En prenant comme fonction test la fonction  $v$  définie par

$$v = u_{\varepsilon,p}(r) \frac{\phi(r)}{r^{\alpha_p}} e_p(\theta),$$

où  $\alpha_p$  est un réel positif à déterminer, nous obtenons alors pour  $p \neq 0$  :

$$\overbrace{\int_\varepsilon^1 u'_{\varepsilon,p} \left( u_{\varepsilon,p} \frac{\phi}{r^{\alpha_p}} \right)' \mu_r \, dr}^{(i)} + K_p \int_\varepsilon^1 |u_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\phi}{r^{\alpha_p+2}} \mu_r \, dr + \chi_\varepsilon \mu_r(\varepsilon) \frac{|u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|^2}{\varepsilon^{\alpha_p}} = \int_\varepsilon^1 f_p u_{\varepsilon,p} \frac{\phi}{r^{\alpha_p}} \mu_r \, dr \quad (4.16)$$

Le premier terme (i) du membre de gauche se décompose en trois parties :

$$(i) = \int_{\varepsilon}^1 |u'_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\phi}{r^{\alpha_p}} \mu_r dr + \underbrace{\int_{\varepsilon}^1 u'_{\varepsilon,p} u_{\varepsilon,p} \frac{\phi'}{r^{\alpha_p}} \mu_r dr}_{(j)} - \underbrace{\int_{\varepsilon}^1 u'_{\varepsilon,p} u_{\varepsilon,p} \alpha_p \frac{\phi}{r^{\alpha_p+1}} \mu_r dr}_{(l)}. \quad (4.17)$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et d'une inégalité classique permet de majorer la valeur absolue du terme (l) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left| -\alpha_p \int_{\varepsilon}^1 u'_{\varepsilon,p} u_{\varepsilon,p} \frac{\phi}{r^{\alpha_p+1}} \mu_r dr \right| &\leq \left( \alpha_p \int_{\varepsilon}^1 |u'_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\phi}{r^{\alpha_p}} \mu_r dr \right)^{\frac{1}{2}} \left( \alpha_p \int_{\varepsilon}^1 |u_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\phi}{r^{\alpha_p+2}} \mu_r dr \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq \frac{\eta_p \alpha_p}{2} \int_{\varepsilon}^1 |u'_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\phi}{r^{\alpha_p}} \mu_r dr + \frac{\alpha_p}{2 \eta_p} \int_{\varepsilon}^1 |u_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\phi}{r^{\alpha_p+2}} \mu_r dr, \end{aligned}$$

où  $\eta_p$  est un réel strictement positif. Le terme (l) est donc minoré comme suit :

$$-\alpha_p \int_{\varepsilon}^1 u'_{\varepsilon,p} u_{\varepsilon,p} \frac{\phi}{r^{\alpha_p+1}} \mu_r dr \geq -\frac{\eta_p \alpha_p}{2} \int_{\varepsilon}^1 |u'_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\phi}{r^{\alpha_p}} \mu_r dr - \frac{\alpha_p}{2} \int_{\varepsilon}^1 |u_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\phi}{r^{\alpha_p+2}} \mu_r dr.$$

En minorant le terme (l) et en reportant le terme (j) dans le membre de droite, l'équation (4.16) devient :

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(1 - \frac{\eta_p \alpha_p}{2}\right)}_{(m)} \int_{\varepsilon}^1 |u'_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\phi}{r^{\alpha_p}} \mu_r dr + \left(K_p - \frac{\alpha_p}{2 \eta_p}\right) \int_{\varepsilon}^1 |u_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\phi}{r^{\alpha_p+2}} \mu_r dr + \chi_{\varepsilon} \mu_r(\varepsilon) \frac{|u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|^2}{\varepsilon^{\alpha_p}} \\ \leq \int_{\varepsilon}^1 f_p u_{\varepsilon,p} \frac{\phi}{r^{\alpha_p}} \mu_r dr - \int_{\varepsilon}^1 u'_{\varepsilon,p} u_{\varepsilon,p} \frac{\phi'}{r^{\alpha_p}} \mu_r dr. \end{aligned}$$

Le coefficient  $\eta_p$  est alors choisit de manière à ce que le terme (m) s'annule pour tout  $p$ , c'est-à-dire  $\eta = 2/\alpha_p$ . Ainsi, sous la condition  $K_p - \alpha_p^2/4 \geq 0$ , nous obtenons finalement la majoration suivante :

$$\chi_{\varepsilon} \mu_r(\varepsilon) \frac{|u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|^2}{\varepsilon^{\alpha_p}} \leq \underbrace{\int_{\varepsilon}^1 f_p u_{\varepsilon,p} \frac{\phi}{r^{\alpha_p}} \mu_r dr}_{(s_1)} - \underbrace{\int_{\varepsilon}^1 u'_{\varepsilon,p} u_{\varepsilon,p} \frac{\phi'}{r^{\alpha_p}} \mu_r dr}_{(s_2)}.$$

Nous allons maintenant majorer chaque terme du membre de droite. Tout d'abord, le terme (s<sub>2</sub>) peut être réécrit à l'aide d'une intégration par partie. Ainsi, nous avons :

$$\int_{\varepsilon}^1 u'_{\varepsilon,p} u_{\varepsilon,p} \frac{\phi'}{r^{\alpha_p}} \mu_r dr = \frac{1}{2} \underbrace{\left[ |u_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\phi'}{r^{\alpha_p}} \mu_r \right]_{\varepsilon}}_{=0} - \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^1 |u_{\varepsilon,p}|^2 \left( \frac{\phi''}{r^{\alpha_p}} - (\alpha_p - k) \frac{\phi'}{r^{\alpha_p+1}} \right) \mu_r dr,$$

où  $k$  est la puissance de  $r$  dans la mesure  $\mu_r$ , à savoir  $k = 1$  pour un fil et  $k = 2$  pour une pointe. Ainsi, puisque nous avons supposé qu'il existe un réel positif  $\beta < 1$  tel que  $\phi'$  s'annulent pour  $r$  plus petit que  $\beta$ , il existe une constante  $C_{\phi}$  positive et indépendante de  $\varepsilon$  telle que :

$$|(s_2)| \leq C_{\phi} \int_{\varepsilon}^1 |u_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\mu_r}{r^2} dr.$$

Le terme  $(s_1)$  portant sur  $f$  peut quant à lui être majoré en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(s_1)| \leq \left( \int_{\varepsilon}^1 |f_p|^2 \frac{\phi}{r^{2\alpha_p-2}} \mu_r dr \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\varepsilon}^1 |u_{\varepsilon,p}| \phi \frac{\mu_r}{r^2} dr \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant ces majorations et en majorant  $\phi$  par 1, nous obtenons finalement :

$$\chi_{\varepsilon} \mu_r(\varepsilon) \frac{|u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|^2}{\varepsilon^{\alpha_p}} \leq \left( \int_{\varepsilon}^1 |f_p|^2 \frac{\mu_r}{r^{2\alpha_p-2}} dr \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\varepsilon}^1 |u_{\varepsilon,p}| \frac{\mu_r}{r^2} dr \right)^{\frac{1}{2}} + C_{\phi} \int_{\varepsilon}^1 |u_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\mu_r}{r^2} dr.$$

Après multiplication de cette inégalité par  $K_p$ , remplaçons à présent les coefficients  $\chi_{\varepsilon}$  et  $\mu_r(\varepsilon)$  par leur valeur respective selon la géométrie étudiée et sommions sur l'ensemble des  $p$  non nuls pour un fil ou supérieurs à 1 pour une pointe. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \sum_p K_p |u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|^2 &\leq \sum_p \varepsilon^{\alpha_p - (k-1)} A_p \left[ \left( K_p \int_{\varepsilon}^1 |f_p|^2 \frac{\mu_r}{r^{2\alpha_p-2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( K_p \int_{\varepsilon}^1 |u_{\varepsilon,p}| \frac{\mu_r}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + \sum_p \varepsilon^{\alpha_p - (k-1)} A_p C_{\phi} K_p \int_{\varepsilon}^1 |u_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\mu_r}{r^2} dr, \end{aligned}$$

où, pour rappel,  $k$  est la puissance de  $r$  dans la mesure  $\mu_r$ . En utilisant une inégalité de Cauchy-Schwartz discrète, cette inégalité devient finalement :

$$\begin{aligned} \sum_p K_p |u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|^2 &\leq \left( \sum_p \varepsilon^{2\alpha_p - 2(k-1)} A_p^2 \overbrace{K_p \int_{\varepsilon}^1 |f_p|^2 \frac{\mu_r}{r^{2\alpha_p-2}}}^{(t_1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_p K_p \int_{\varepsilon}^1 |u_{\varepsilon,p}| \frac{\mu_r}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \sum_p \varepsilon^{\alpha_p - (k-1)} A_p \underbrace{C_{\phi} K_p \int_{\varepsilon}^1 |u_{\varepsilon,p}|^2 \frac{\mu_r}{r^2} dr}_{(t_3)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

La constante  $A_p$  est ici définie par :

$$A_p = \begin{cases} \ln(\varepsilon/a), & [\text{fil}] \\ \frac{1}{l_1}, & [\text{pointe}] \end{cases}$$

Dans le cas d'une pointe, cette constante est bornée par  $A_0$ , une constante dépendant de l'angle de la pointe  $\theta_0$  par le biais de  $l_1$ . En effet, plus  $\theta_0$  est petit, plus  $l_1$  tend vers 0. En pratique,  $l_1$  est cependant compris entre 0,1 et 1. Dans le cas d'un fil,  $A_p$  dépend de  $\varepsilon$  et doit être conservé. Nous majorons donc  $A_p$  par  $\ln(\varepsilon/a)A_0$ , avec  $A_0 = 1$ .

Intéressons nous à présent aux contraintes devant être imposées sur le coefficient  $\alpha_p$  pour terminer notre majoration. Comme cela a été dit précédemment, ces coefficients doivent en premier lieu vérifier  $K_p - \alpha_p^2/4 \geq 0$ , soit :

$$\alpha_p \leq \begin{cases} 2|p|, & [\text{fil}] \\ 2\sqrt{l_p(l_p+1)}. & [\text{pointe}] \end{cases}$$

Dans le cas d'un fil, la plus forte contrainte est donnée par les termes d'ordre  $|p| = 1$  qui imposent  $\alpha_p \leq 2$ . Dans le cas d'une pointe, nous observons empiriquement que les coefficients  $l_p$  sont tous plus grands que 1 pour  $p \geq 2$  et la pire contrainte imposée par cette condition est donc de l'ordre de  $\alpha_p \leq 2,82$ .

La présence d'un second membre  $f$  impose également une contrainte sur les coefficients  $\alpha_p$ . En effet, la somme des termes  $(t_1)$  dans l'inégalité (4.18) ne peut être majorée par la norme  $H_1$  de  $f$  que si  $2\alpha_p - 2 \leq 2$ , c'est-à-dire si  $\alpha_p \leq 2$ . Les sommes des termes  $(t_2)$  et  $(t_3)$  peuvent être quant à elles toutes deux majorées par  $C_0^2$  en utilisant l'inégalité de Poincaré (4.11) et n'imposent pas de contraintes sur  $\alpha_p$ .

Le plus petit  $\alpha_p$  est donc imposé par la présence des termes d'ordre 1 pour un fil et par le second membre  $f$  pour les deux configurations. En mettant en facteur la plus petite puissance de  $\varepsilon$  dans l'inégalité (4.18) et en effectuant les majorations décrites ci-dessus, nous obtenons finalement :

$$\sum_p K_p |u_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|^2 \leq A_0 C_0 (|f|_{1,D_\varepsilon} + C_\phi C_0) \times \begin{cases} \varepsilon^2 \ln(\varepsilon/a), & [\text{fil}] \\ \varepsilon, & [\text{pointe}] \end{cases}$$

où la somme porte sur les  $p$  non nuls pour un fil et sur les  $p$  strictement plus grand que 1 pour une pointe. ◆

Disposant des majorations données par la proposition 5, nous pouvons maintenant terminer notre estimation d'erreur. En reprenant la forme variationnelle (4.15) avec comme fonction test  $v = \bar{u}_\varepsilon$  et en introduisant les majorations de la proposition 5, nous obtenons :

$$|\bar{u}_\varepsilon|_{1,\Omega}^2 \leq \|f\|_{L^2(D_\varepsilon)} \|\bar{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + |\bar{u}_\varepsilon|_{1,\Omega} A_0 C_0 (|f|_{1,D_\varepsilon} + C_\phi C_0) \times \begin{cases} \frac{\varepsilon \ln(\varepsilon/a)}{\sqrt{3}} & [\text{fil}] \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{2l_1 + 1}} & [\text{pointe}] \end{cases}.$$

Nous utilisons alors l'inégalité de Poincaré sur  $\Omega$  pour majorer la norme de  $\bar{u}_\varepsilon$  par la norme de son gradient. Nous bornons également la norme  $f$  sur le domaine  $D_\varepsilon$  par sa valeur maximale multipliée par le volume du domaine, soit :

$$\|f\|_{L^2(D_\varepsilon)} \leq \|f\|_{\infty,\Omega} \times \begin{cases} C_v \varepsilon & [\text{fil}] \\ C_v \varepsilon^{3/2} & [\text{pointe}] \end{cases},$$

où  $C_v$  est une constante de volume indépendante de  $\varepsilon$ . Ceci nous permet finalement d'obtenir l'estimation suivante pour notre problème approché :

**Théorème 1.**

En supposant que  $f \in H^1(\Omega)$ , il existe des constantes  $C_{t,1}$  et  $C_{t,2}$  indépendantes de  $\varepsilon$  et positives telles que :

$$\|\bar{u}_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq C_{t,1} (\|f\|_{\infty,\Omega} + (|f|_{1,D_\varepsilon} + C_{t,2})) \times \begin{cases} \varepsilon \ln(\varepsilon/a) & [\text{fil}] \\ \varepsilon & [\text{pointe}] \end{cases}.$$

#### 4.2.4 Validation numérique de l'approximation de l'équation de Poisson

L'approximation du potentiel développée dans la section précédente est mise en oeuvre numériquement pour le calcul du potentiel électrostatique généré par des dispositifs fil-fil et



pointe-plan. Le premier dispositif est composé de deux fils parallèles séparés par une distance de 1 cm. L'anode a un rayon de 0.1 mm et est portée à une tension de 13 kV tandis que la cathode a un rayon égal à 1 mm et est mise à la masse. La pointe du second dispositif mesure 5 mm de hauteur et un rayon à sa base de 0.4 mm. Elle est portée à une tension négative de -4,2 kV tandis que le plan situé à 7 mm de son extrémité est mis à la masse.

Les résultats obtenus sont comparés figure 4.3 au potentiel électrostatique calculé à l'aide d'un schéma numérique classique. Bien que l'approximation développée ne dépendent de  $\theta$  dans le domaine  $D_\varepsilon$  qu'à travers la frontière de raccord  $\gamma_{r,\varepsilon}$ , les variations angulaires dans ce domaine sont bien reproduites et aucune différence notable avec la solution de référence n'apparaît. Dans le reste du domaine  $\Omega_\varepsilon$ , l'influence de l'électrode est également bien retranscrite à travers la condition de Dirichlet-Neumann et les iso-valeurs du potentiel sont quasiment identiques.

### 4.2.5 Bilan

Dans cette section, une analyse asymptotique de l'équation de Poisson a permis la construction d'une approximation où l'influence de la charge d'espace sur le champ électrostatique est négligée dans un petit domaine circulaire  $D_\varepsilon$  situé autour de la singularité de champ. La solution dans ce domaine est alors décrite de manière analytique à l'aide d'un développement en série dont seuls les premiers modes sont pris en compte et des conditions aux limites adéquates pour le reste du domaine sont définies.

Une telle approximation a été validée numériquement sur le calcul du potentiel électrostatique induit par des dispositifs fil-fil et pointe-plan, et théoriquement par le biais d'une estimation *a priori* de l'erreur faite par rapport au problème initial. Cette estimation a montré que cette erreur décroît au moins en  $o(\varepsilon)$ .

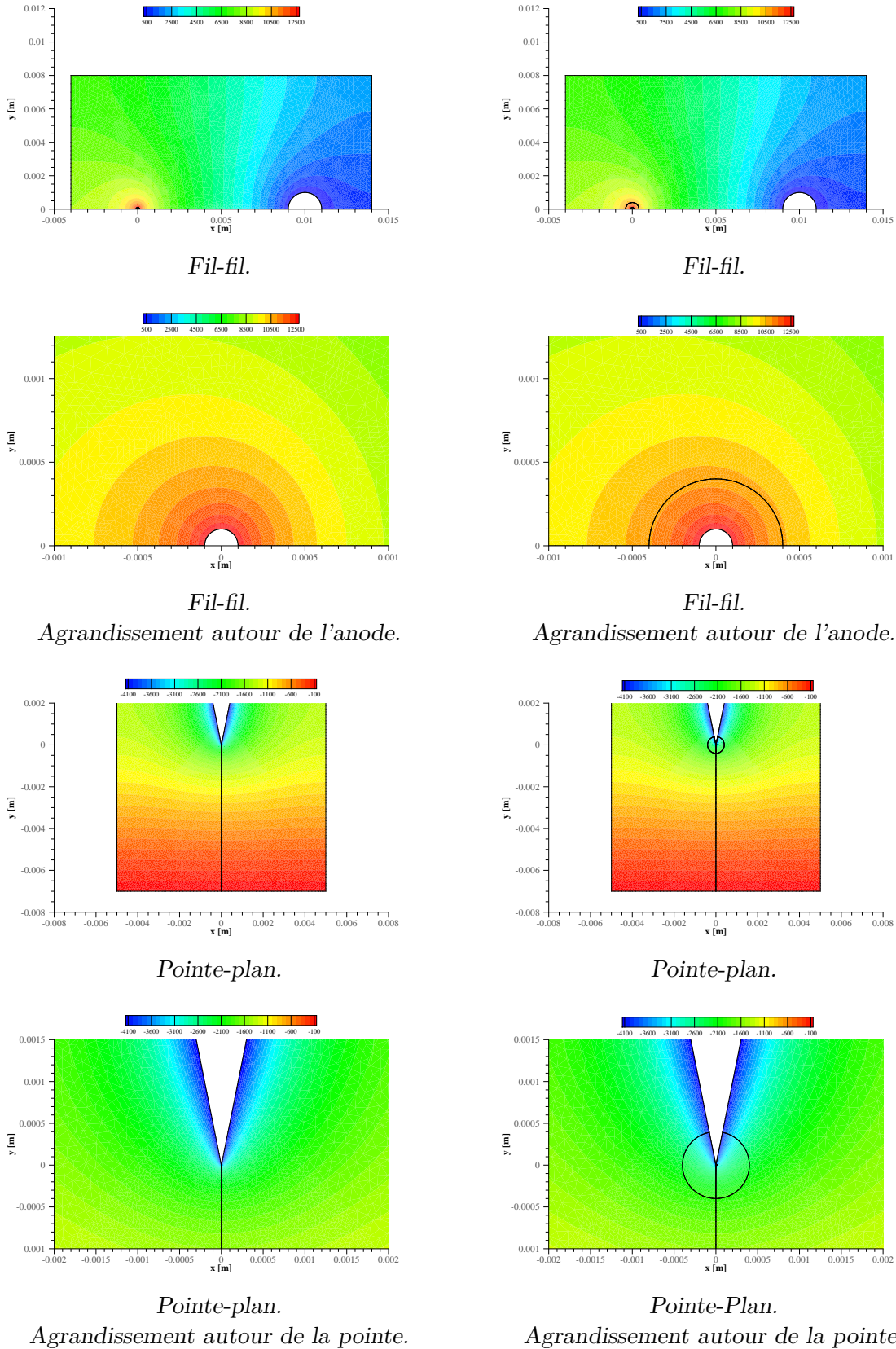
## 4.3 Modèles d'électrode virtuelle

### 4.3.1 Préambule

Disposant de l'approximation de l'équation de Poisson développée dans la section précédente, nous pouvons à présent construire les modèles d'électrode virtuelle. Pour les deux types modèles présentés ici, nous supposons que le déplacement des particules chargées à proximité de l'électrode est principalement dû à leur dérive dans le champ électrique et nous adoptons par conséquent une description monodimensionnelle de la décharge dirigée selon les lignes de ce champ. La question de l'approximation de ces lignes de champs et celle de la discrétisation du domaine  $D_\varepsilon$  se posent alors.

Le champ électrique approché dans le domaine  $D_\varepsilon$  dérive du potentiel correspondant et est donc défini analytiquement. Son expression pour un fil et pour une pointe est donnée par :

$$\mathbf{E}_\varepsilon(r,\theta) = -\nabla_{r,\theta}\varphi_\varepsilon(r,\theta) = -1 \times \begin{cases} \frac{1}{r \ln(\varepsilon/a)} \times [(\varphi_\varepsilon(\varepsilon,\theta) - \varphi_0) \mathbf{e}_r + \ln(r/a) \frac{\partial \varphi_\varepsilon(\varepsilon,\theta)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta], & [\text{fil}] \\ l_1 \frac{r^{l_1-1}}{\varepsilon^{l_1}} \times [(\varphi_\varepsilon(\varepsilon,\theta) - \varphi_0) \mathbf{e}_r + \frac{1}{l_1} \frac{\partial \varphi_\varepsilon(\varepsilon,\theta)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta]. & [\text{pointe}] \end{cases}$$

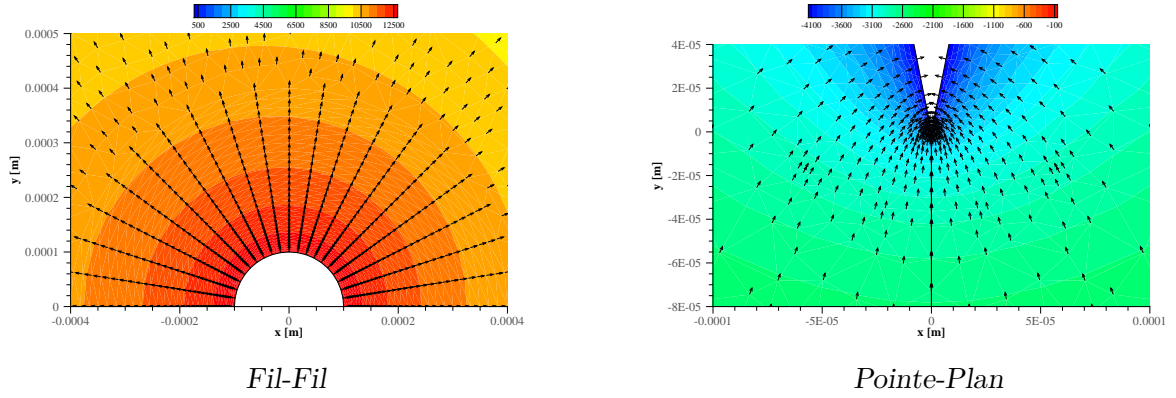


**Figure 4.3** Potentiel électrostatique induit par des configurations fil-fil et pointe-plan pour le problème complet (à gauche) et le problème approché (à droite). La frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$  apparaît en noir.

où  $\varphi_0$  est le potentiel de l'électrode. Pour les deux géométries, la composante angulaire du champ électrique dépend donc de la variation du potentiel sur la frontière de raccord  $\gamma_{r,\varepsilon}$  dont l'intégrale sur cette même frontière est donnée par.

$$\int_{\theta_0}^{\theta_n} \left| \frac{\partial \varphi_\varepsilon(\varepsilon, \theta)}{\partial \theta} \right|^2 \mu_\theta d\theta = \begin{cases} \sum_{p \neq 0} p^2 |\varphi_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|^2, & [\text{fil}] \\ \sum_{p \geq 1} l_p (l_p + 1) |\varphi_{\varepsilon,p}(\varepsilon)|^2. & [\text{pointe}] \end{cases}$$

Rappelons que la majoration de cette intégrale est l'objet de la proposition 5 de la section 4.2.3. Dans le cas d'un fil, nous avons montré que sa valeur décroît en  $o(\varepsilon^2 \ln(\varepsilon/a))$  et donc *a priori* bien plus rapidement que la composante radiale du champ électrique. Nous considérons ainsi que le champ électrique est dirigé uniquement selon l'axe radial au voisinage de l'électrode. Une telle hypothèse se vérifie numériquement, comme le montre la figure 4.4 qui représente la direction du champ électrostatique autour des électrodes pour les configurations décrite dans la section 4.2.4.



**Figure 4.4** Potentiel électrostatique et direction du champ électrique correspondant.

Dans le cas d'une pointe, les termes d'ordres  $p \geq 2$  sont majorés par une borne en  $o(\varepsilon)$ . En reprenant la démonstration de la proposition 5, le terme d'ordre  $p = 1$  peut être contrôlé de manière similaire par un terme dont l'ordre en  $\varepsilon$  dépend du coefficient  $l_1$ . Une valeur typique de ce coefficient est  $l_1 = 0.3$ , ce qui donne alors approximativement une borne en  $o(\varepsilon^{0,24})$ . Il s'agit là d'une décroissance bien moins rapide que dans le cas du fil et la composante angulaire du champ électrique joue alors un rôle important, comme le montre la figure 4.4. Le domaine où le modèle approché est appliqué ne peut donc plus être discrétisé uniquement selon  $r$ .

Plusieurs difficultés se posent alors du point de vue implémentation numérique. En premier lieu, les lignes du champ électrique doivent être connues avant de discrétiser le domaine  $D_\varepsilon$ , ce afin de permettre la construction d'un maillage 1D adéquat. À condition de connaître le potentiel électrostatique sur la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$ , ces lignes peuvent être *a priori* relativement facilement reconstruites numériquement à l'aide de la forme analytique du champ électrostatique sur  $D_\varepsilon$ . La discrétisation de ces lignes de champ pose également problème, notamment à la jonction entre la frontière de raccord  $\gamma_{r,\varepsilon}$  et la surface de la pointe. En ce point, la ligne de champ reliant la frontière de raccord à l'électrode n'est constituée que d'un unique point et il n'est pas possible sur la première face de la frontière de raccord de construire un maillage adapté à un modèle monodimensionnel. Le champ électrique dans cette zone étant cependant colinéaire à la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$ , cette face pourrait être théoriquement ignorée, aucun flux d'espèces chargées n'y entrant.

L'ensemble de ces contraintes font que les modèles d'électrode virtuelle n'ont pas été mis en oeuvre numériquement pour une pointe, bien que leur implémentation reste *a priori* possible. Dans ce qui suit, ces modèles ne sont par conséquent présentés que dans le cadre d'électrodes filaires. Leur généralisation à toute une courbe paramétrée représentant les lignes du champ électrique est toutefois possible.

### 4.3.2 Modèle asymptotique

La construction de ce premier modèle d'électrode virtuelle – qui a fait l'objet d'une publication dans [49] – se base sur un principe similaire à celui utilisé pour les développements asymptotiques raccordés présentés dans la section 3.2 du chapitre 3. Rappelons tout d'abord que, pour un fil, la composante angulaire du champ électrique est négligée et que par conséquent dans le domaine  $D_\varepsilon$  celui-ci est approché par :

$$\mathbf{E}_\varepsilon = -\frac{1}{r \ln(\varepsilon/a)} (\varphi_\varepsilon(\varepsilon, \theta) - \varphi_0) \mathbf{e}_r.$$

À proximité de l'électrode, la vitesse de l'écoulement  $\mathbf{u}_0$  est supposée négligeable devant la vitesse de dérive dans le champ et nous construisons ainsi un modèle radial dans le domaine  $D_\varepsilon$ . Nous considérons alors que, dans ce domaine, les densités s'adaptent instantanément aux variations se produisant dans le domaine  $\Omega_\varepsilon$  qui sont alors transmises par le biais de la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$ . La dépendance en temps des équations de conservation de la masse dans  $D_\varepsilon$  n'est par conséquent pas prise en compte. Notons que cette hypothèse de modélisation est valable dans la limite où la taille du domaine  $D_\varepsilon$  tend vers zéro. Les équations de transport obtenues sous les hypothèses décrites ci-dessus sont ensuite adimensionnées à l'aide des changements d'échelles suivant :

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{\varepsilon}{L} r, & \mu_k^* &= \mu_+^* \mu_k, & N_k^* &= \frac{N_+}{L^3}, & \varphi_\varepsilon^* &= \varphi_0 \varphi_\varepsilon, \\ \alpha^* &= \frac{\alpha}{L \varepsilon}, & \eta^* &= \frac{\eta}{L}, & \beta^* &= L \mu_+^* \varphi_0, \end{aligned}$$

où une astérisque dénote une variable dimensionnée. Les équations adimensionnées sont alors tronquées à l'ordre le plus bas en  $\varepsilon$  et, après redimensionnement, nous obtenons finalement le système suivant sur  $D_\varepsilon$  :

$$\begin{cases} \frac{d\Gamma_e}{dr} = \alpha |\Gamma_e| \\ \frac{d\Gamma_+}{dr} = \alpha |\Gamma_e| \\ \frac{d\Gamma_-}{dr} = 0, \end{cases} \quad (4.19)$$

où  $\Gamma_k$  désigne le flux de densité de l'espèce  $k$  défini par  $\Gamma_k = r n_k \mathbf{u}_k^\varepsilon$ . La vitesse approchée  $\mathbf{u}_k^\varepsilon$  de l'espèce  $k$  est quant à elle définie par :

$$\mathbf{u}_k^\varepsilon(r, \theta) = \text{signe}(Z_k) \mu_k \frac{\varphi_0 - \varphi_\varepsilon(\varepsilon, \theta)}{r \ln(\varepsilon/a)} \mathbf{e}_r.$$

Pour un angle  $\theta$  donné, le signe de  $\mathbf{u}_k^\varepsilon$  est constant et ne dépend que de la valeur de  $\varphi_\varepsilon$  sur la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$  et nous avons finalement la proposition suivante :

**Proposition 6.**

Les conditions aux limites associées au problème (4.19) et sa solution dépendent du signe de  $\varphi_0 - \varphi_\varepsilon(\varepsilon, \theta)$  et nous distinguons deux cas :

- i) Lorsque  $\varphi_0 < \varphi_\varepsilon(\varepsilon, \theta)$ , les ions positifs arrivent du domaine  $\Omega_\varepsilon$  et se déplacent en direction de l'électrode tandis que les espèces chargées négativement dérivent en sens inverse. L'émission secondaire fournit dans ce cas une source supplémentaire d'électrons à la surface de l'électrode. Les conditions aux limites associées au problème (4.19) sont définies par :

$$\Gamma_+(\varepsilon) = \Gamma_+^E(\varepsilon, \theta), \quad \Gamma_e(a) = -\gamma\Gamma_+(a) \quad \text{et} \quad \Gamma_-(a) = 0,$$

où  $\Gamma_+^E$  est le flux d'ions positifs provenant du domaine  $\Omega_\varepsilon$ . La solution du problème (4.19) est alors donnée par :

$$\begin{cases} \Gamma_+(r) = \Gamma_+(\varepsilon) + \Gamma_e(r) - \Gamma_e(\varepsilon), \\ \Gamma_e(r) = -\gamma\Gamma_+(a) \exp\left(-\int_a^r \alpha d\rho\right), \\ \Gamma_-(r) = 0, \end{cases}$$

où le flux d'ions positif à la surface de l'électrode  $\Gamma_+(a)$  est défini par :

$$\Gamma_+(a) = \frac{\Gamma_+(\varepsilon)}{1 + \gamma \left(1 - \exp\left(\int_a^\varepsilon \alpha\right)\right)}$$

- ii) Lorsque  $\varphi_0 > \varphi_\varepsilon(\varepsilon, \theta)$ , ce sont les espèces chargées négativement qui arrivent du domaine  $\Omega_\varepsilon$  et se déplacent en direction de l'électrode, tandis que les ions positifs dérivent en sens inverse. Il n'y a pas de production d'ions à la surface de l'électrode. Les conditions aux limites associées au problème (4.19) sont alors définies par :

$$\Gamma_+(a) = 0, \quad \Gamma_e(\varepsilon) = \Gamma_e^E(\varepsilon, \theta) \quad \text{et} \quad \Gamma_-(\varepsilon) = \Gamma_-^E(\varepsilon, \theta),$$

où  $\Gamma_e^E$  et  $\Gamma_-^E$  sont respectivement les flux d'électrons et d'ions négatifs provenant du domaine  $\Omega_\varepsilon$ . La solution du problème (4.19) est donnée par :

$$\begin{cases} \Gamma_+(r) = \Gamma_e(r) - \Gamma_e(a), \\ \Gamma_e(r) = \Gamma_e(\varepsilon) \exp\left(\int_r^\varepsilon \alpha d\rho\right), \\ \Gamma_-(r) = \Gamma_-(\varepsilon, \theta). \end{cases}$$

Ce modèle admet donc dans les deux cas une solution unique et quasi-analytique, définie à l'intégrale du coefficient d'ionisation près. Notons que, si le coefficient d'ionisation n'est pas connu sous une forme analytique, cette intégrale doit être approchée numériquement. Un tel calcul est relativement coûteux mais peut aisément être évité par la construction de tables donnant la valeur de l'intégrale pour différentes valeurs de  $r$  et  $\varphi_0 - \varphi_\varepsilon(\varepsilon, \theta)$ .

### 4.3.3 Modèle radial

Ce second modèle d'électrode virtuelle constitue un modèle intermédiaire entre le modèle asymptotique développé dans la section précédente et le modèle de référence. L'influence de la charge d'espace dans le domaine  $D_\varepsilon$  est maintenant prise en compte, de même que l'évolution temporelle des densités d'espèces chargées. La seule hypothèse conservée est celle selon laquelle les espèces chargées évoluent le long des lignes du champ électrique, supposées radiales dans  $D_\varepsilon$ . La décharge dans ce domaine est donc décrite par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \varepsilon_0 r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \rho \quad \text{dans } D_\varepsilon \\ \frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n_k \mathbf{u}_k) = \omega_k \quad \text{dans } D_\varepsilon \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi_\varepsilon \quad \text{sur } \gamma_{r,\varepsilon}, \\ \varphi = \varphi_0 \quad \text{sur } \gamma_{e,\varepsilon}, \end{array} \right.$$

auxquelles nous ajoutons des conditions aux limites adéquates pour le transport des espèces chargées, à savoir sortie libre et aucune de production d'espèces au niveau de l'électrode, sauf pour l'émission secondaire et ajout des flux provenant du domaine extérieur  $\Omega_\varepsilon$  sur la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$ .

Si ce modèle ne présente pas de difficultés spécifiques d'un point de vue théorique, son implémentation numérique et son couplage avec le modèle bidimensionnel dans  $\Omega_\varepsilon$  doivent être faits avec soin. En particulier, le schéma numérique résolvant l'équation de Poisson dans les domaines  $D_\varepsilon$  doit être consistant avec celui utilisé pour le domaine  $\Omega_\varepsilon$  tout en prenant en compte l'aspect monodimensionnel du modèle. Dans cette thèse, le choix du schéma s'est porté sur une méthode d'éléments finis d'ordre 1 que nous allons à présent décrire.

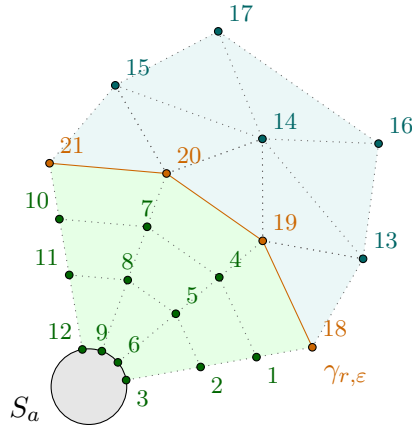
Nous considérons ici un domaine  $\Omega$  où se trouve une électrode filaire portée à une tension  $u_a$  ainsi qu'une autre électrode quelconque portée à une tension  $u_c$ . Par commodité, nous nous référerons au fil en tant qu'anode et à l'autre électrode en tant que cathode. À l'intérieur du domaine  $D_\varepsilon$ , qui englobe le fil, la décharge est décrite à l'aide du modèle approché présenté ci-dessus. Dans le reste de l'espace  $\Omega_\varepsilon$ , la décharge est décrite par le modèle de référence. Le problème à résoudre pour le calcul du potentiel électrique est donc le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (\varepsilon_0 \nabla u) = \rho \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] = 0 \quad \text{sur } \gamma_{r,\varepsilon} \\ u = u_c \quad \text{sur } S_c \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus (\gamma_{r,\varepsilon} \cup S_c) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \varepsilon_0 r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \rho \quad \text{dans } D_\varepsilon \\ [u] = 0 \quad \text{sur } \gamma_{r,\varepsilon} \\ u = u_a \quad \text{sur } S_a, \end{array} \right. \quad (4.20)$$

où  $S_a$  et  $S_c$  sont respectivement la surface de l'anode et celle de la cathode.

Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation du domaine  $\Omega_\varepsilon$  et  $\mathcal{Q}_h$  une quadrangulation de  $D_\varepsilon$  telles que représentées figure 4.5. Les noeuds composant les quadrangles de  $D_\varepsilon$  sont notamment distribués le long des rayons reliant le centre de l'électrode aux noeuds de la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$ . Nous définissons alors les ensembles d'indices suivant :

- $I_i = \{k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n_i^s\}$ , l'ensemble indiquant les  $n_i^s$  sommets appartenant au domaine intérieur  $D_\varepsilon \setminus \gamma_{r,\varepsilon}$ . Le potentiel sur l'ensemble de ces sommets est donné par le vecteur  $u_i$ .
- $I_e = \{k \in \mathbb{N}, n_i^s + 1 \leq k \leq n_i^s + n_e^s\}$ , l'ensemble indiquant les  $n_e^s$  sommets appartenant au domaine intérieur  $\Omega_\varepsilon \setminus \gamma_{r,\varepsilon}$ . Le potentiel sur l'ensemble de ces sommets est donné par le vecteur  $u_e$ .



**Figure 4.5** Discretisation du domaine  $D_\varepsilon$  et du domaine  $\Omega_\varepsilon$

- $I_f = \left\{ k \in \mathbb{N}, n_i^s + n_e^s + 1 \leq k \leq n_i^s + n_e^s + n_f^s \right\}$ , l'ensemble indiquant les  $n_f^s$  sommets appartenant à la frontière de raccord  $\gamma_{r,\varepsilon}$ . Le potentiel sur l'ensemble de ces sommets est donné par le vecteur  $u_f$ .

Le vecteur  $u_h$  donnant la valeur du potentiel en chacun des noeuds du domaine se décompose donc en  $u_h = (u_i, u_e, u_f)$ . Nous avons alors la proposition suivante :

**Proposition 7.**

Avec les notations introduites ci-dessus, le problème (4.20) approché par une formulation éléments finis d'ordre 1 équivaut à résoudre le système matriciel suivant :

$$\begin{cases} (A_i + B_i) u_i + A_i^f u_f & = H_i \\ (A_e + B_e) u_e + A_e^f u_f & = H_e \\ (A_{f,1} + A_{f,2}) u_f + A_f^i u_i + A_f^e u_e & = H_f, \end{cases} \quad (4.21)$$

où  $H_i = F_i + G_i$ ,  $H_e = F_e + G_e$  et  $H_f = H_{f,1} + H_{f,2}$ , avec :

$$\begin{aligned} k \in I_i, \quad (A_i)_{k,l} &= \int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \frac{\partial \phi_l}{\partial r} r \, dr \, d\theta, \quad l \in I_i, & k \in I_e, \quad (A_e)_{k,l} &= \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_0 \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_l \, dv, \quad l \in I_e, \\ (A_i^f)_{k,l} &= \int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \frac{\partial \phi_l}{\partial r} r \, dr \, d\theta, \quad l \in I_f, & (A_e^f)_{k,l} &= \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_0 \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_l \, dv, \quad l \in I_f, \\ (B_i)_{k,l} &= \int_{S_a} \frac{\varepsilon_0}{\delta} \phi_k \phi_l r \, dr \, d\theta, \quad l \in I_i, & (B_e)_{k,l} &= \int_{S_c} \frac{\varepsilon_0}{\delta} \phi_k \phi_l r \, dr \, d\theta, \quad l \in I_e, \\ k \in I_f, \quad (A_{f,1})_{k,l} &= \int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \frac{\partial \phi_l}{\partial r} r \, dr \, d\theta, \quad l \in I_f, & k \in I_f, \quad (A_{f,2})_{k,l} &= \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_0 \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_l \, dv, \quad l \in I_f, \\ (A_f^i)_{k,l} &= \int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \frac{\partial \phi_l}{\partial r} r \, dr \, d\theta, \quad l \in I_i, & (A_f^e)_{k,l} &= \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_0 \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_l \, dv, \quad l \in I_e, \\ (F_i)_l &= \int_{D_\varepsilon} \rho \phi_l r \, dr \, d\theta, \quad l \in I_i, & (F_e)_l &= \int_{D_\varepsilon} \rho \phi_l \, dv, \quad l \in I_e, \\ (G_i)_l &= \int_{S_a} \frac{\varepsilon}{\delta} u_a \phi_l r \, dr \, d\theta, \quad l \in I_i, & (G_e)_l &= \int_{S_c} \frac{\varepsilon}{\delta} u_c \phi_l r \, dr \, d\theta, \quad l \in I_e, \\ (H_{f,1})_l &= \int_{D_\varepsilon} \rho \phi_l r \, dr \, d\theta, \quad l \in I_f, & (H_{f,2})_l &= \int_{D_\varepsilon} \rho \phi_l \, dv, \quad l \in I_f, \end{aligned}$$

où  $\delta$  est un coefficient de pénalisation strictement positif tendant vers 0 et où  $\phi_k$  est la fonction de base associée au sommet  $s^k$ .

**Démonstration.**

Afin d'écrire notre formulation éléments finis de manière générale pour l'ensemble des conditions aux limites, celles-ci sont écrites sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{\delta} u = \frac{1}{\delta} g$$

où  $\delta$  est un coefficient de pénalisation tendant vers l'infini sur  $\partial\Omega \setminus (\gamma_{r,\varepsilon} \cup S_c)$  et vers 0 sur  $S_a \cup S_c$ . Le coefficient  $g$  vaut quant à lui  $u_a$  sur  $S_a$  et  $u_c$  sur  $S_c$ . En construisant les formulations variationnelles du problème (4.20) dans  $D_\varepsilon$  et  $\Omega_\varepsilon$ , puis en les sommant nous obtenons la formulation suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_0 \nabla u \cdot \nabla v \, dv + \int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} r \, dr \, d\theta + \int_{S_c} \frac{\varepsilon_0}{\delta} uv \, ds + \int_{S_a} \frac{\varepsilon_0}{\delta} uvr \, dr \, d\theta \\ & = \int_{\Omega_\varepsilon} \rho v \, dv + \int_{D_\varepsilon} \rho vr \, dr \, d\theta + \int_{S_c} \frac{\varepsilon_0}{\delta} u_c v \, ds + \int_{S_a} \frac{\varepsilon_0}{\delta} u_a vr \, dr \, d\theta, \end{aligned}$$

où  $v$  est une fonction test quelconque. De manière classique, nous introduisons à présent l'espace d'approximation  $V_h^1$  défini par :

$$V_h^1 = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_h|_K \in \mathbb{P}_1 \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathbb{Q}_1 \forall K \in \mathcal{Q}_h\},$$

Nous associons alors à chaque sommet  $s^k$  dans  $\Omega$  une fonction de base  $\phi_k \in V_h^1$  dont le support se restreint à l'ensemble des triangles ou quadrangles auxquels appartient ce sommet. Il est alors possible de décomposer une fonction  $v$  de  $V_h^1$  sur cette base de la manière suivante :

$$v = \sum_{k \in I_i} v_k \phi_k + \sum_{k \in I_f} v_k \phi_k + \sum_{k \in I_e} v_k \phi_k.$$

Ainsi, en faisant cette décomposition pour  $u$  et pour  $v$  dans la formulation variationnelle et en distinguant les sommets appartenant au domaine intérieur, à la frontière de raccord et au domaine extérieur, nous obtenons finalement pour tout  $v \in V_h^1$  :

– Si  $k \in I_i$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in I_i} u_k v_l \int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \frac{\partial \phi_l}{\partial r} r \, dr \, d\theta + \sum_{l \in I_f} u_k v_l \int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \frac{\partial \phi_l}{\partial r} r \, dr \, d\theta + \sum_{l \in I_i} u_k v_l \int_{S_a} \frac{\varepsilon_0}{\delta} \phi_k \phi_l r \, dr \, d\theta \\ & = \sum_{l \in I_i} v_l \int_{D_\varepsilon} \rho \phi_l r \, dr \, d\theta + \sum_{l \in I_i} v_l \int_{S_a} \frac{\varepsilon_0}{\delta} u_a \phi_l r \, dr \, d\theta. \end{aligned}$$

– Si  $k \in I_e$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in I_e} u_k v_l \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_0 \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_l \, dv + \sum_{l \in I_f} u_k v_l \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_0 \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_l \, dv + \sum_{l \in I_e} u_k v_l \int_{S_c} \frac{\varepsilon_0}{\delta} \phi_k \phi_l \, ds \\ & = \sum_{j \in I_e} v_j \int_{\Omega_\varepsilon} \rho \phi_l \, dv + \sum_{l \in I_e} v_l \int_{S_c} \frac{\varepsilon_0}{\delta} u_c \phi_l \, ds. \end{aligned}$$



– Si  $k \in I_f$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{l \in I_i} u_k v_l \int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \frac{\partial \phi_l}{\partial r} r \, dr \, d\theta + \sum_{l \in I_e} u_k v_l \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_0 \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_l \, dv + \sum_{l \in I_f} u_k v_l \int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \frac{\partial \phi_l}{\partial r} r \, dr \, d\theta \\ + \sum_{l \in I_f} u_k v_l \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_0 \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_l \, dv = \sum_{l \in I_f} v_l \int_{D_\varepsilon} \rho \phi_l r \, dr \, d\theta + \sum_{l \in I_f} v_j \int_{\Omega_\varepsilon} \rho \phi_l \, dv. \end{aligned}$$

Ce qui est strictement équivalent à la formulation de la proposition 7.

◆

Disposant du système matriciel (4.21), nous pouvons à présent exprimer le potentiel intérieur  $u_i$  directement en fonction du potentiel à la frontière de raccord  $u_f$ , soit :

$$u_i = (A_i + B_i)^{-1} \times (H_i - A_i^f u_f). \quad (4.22)$$

En regroupant les potentiels  $u_e$  et  $u_f$  en un vecteur unique  $u_{e,f} = (u_e, u_f)$ , ce dernier doit alors vérifier le système suivant :

$$\left[ \begin{pmatrix} A_e + B_e & A_e^f \\ A_f^e & A_{f,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{Robin} \end{pmatrix} \right] \times u_{e,f} = \begin{pmatrix} H_e \\ H_f - A_f^i (A_i + B_i)^{-1} H_i \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

où la matrice  $A_{Robin}$  est définie par  $A_{Robin} = A_{f,1} - A_f^i (A_i + B_i)^{-1} A_i^f$  et représente la contribution du domaine  $D_\varepsilon$  aux noeuds de la frontière de raccord  $\gamma_{r,\varepsilon}$ . La première matrice du membre de gauche représente quant à elle l'ensemble des contributions propres au domaine  $\Omega_\varepsilon$ . Rappelons que nous cherchons au final à obtenir une formulation représentative de l'invariance de la solution par rapport à  $\theta$  dans  $D_\varepsilon$ . Pour ce faire, il est nécessaire que chacun des noeuds de ce domaine ne puisse interagir qu'avec des voisins situés à un angle identique au sien. Bien que cela ne soit *a priori* pas vérifié du fait de la dépendance en  $\theta$  des fonctions de bases, l'utilisation d'une méthode de condensation de masse permet de pallier ce problème et nous avons alors la proposition suivante :

### Proposition 8.

Soit  $\mathcal{Q}_h$  une quadrangulation polaire du domaine  $D_\varepsilon$ , c'est à dire une quadrangulation dont les sommets sont obtenues par une tensorisation de l'espace discrétisé en  $r$  et en  $\theta$ . Il existe alors un ensemble de formules de quadrature tel que la matrice  $A_{Robin}$  est diagonale et tel que la résolution du problème (4.22) est équivalente à la résolution de  $n_f^s$  problèmes indépendants.

En notant  $\mathcal{V}(s^k)$  l'ensemble des quadrangle  $K$  contenant le sommet  $s^k$  et  $\psi_K$  la fonction transformant le carré unité de sommets  $\hat{A}_j$  en le quadrangle  $K$  de sommets  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , alors les coefficients des différentes matrices liées au domaine  $D_\varepsilon$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \frac{\partial \phi_l}{\partial r} r \, dr \, d\theta &= \sum_{K \in \mathcal{V}(s^k)} \varepsilon_0 \frac{\omega_K(\hat{A}_j) + \omega_K(\hat{A}_{j'})}{(r(A_j) - r(A_{j'}))^2} (-1 + 2\delta_{k,l}), \\ \int_{D_\varepsilon} \rho \phi_l r \, dr \, d\theta &= \sum_{K \in \mathcal{V}(s^l)} \rho \omega_K(\hat{A}_j), \\ \int_{S_a} \frac{\varepsilon_0}{\delta} \phi_k \phi_l &= \sum_{J \in \mathcal{V}(s^k)} \frac{\varepsilon_0}{\delta} \frac{\mathcal{L}_K}{2} \delta_{k,l} \quad \text{si } s^k \in S_a, 0 \text{ sinon,} \end{aligned}$$

$$\int_{S_a} \frac{\varepsilon_0}{\delta} u_a \phi_l = \sum_{J \in \mathcal{V}(s^l)} \frac{\varepsilon_0}{\delta} \frac{\mathcal{L}_K}{2} u_a \quad \text{si } s^l \in S_a, 0 \text{ sinon,}$$

où  $\mathcal{L}_K$  est la longueur de la face du quadrangle  $K$  appartenant à la frontière  $S_a$  et où  $j'$  est l'indice du sommet  $A_{j'} \neq A_j$  du quadrangle  $K$  dont l'angle est identique à celui du sommet  $A_j$ . Les poids de quadrature  $\omega_K$  sont quant à eux définis par :

$$\omega_K(\hat{A}_j) = \frac{1}{4} |\det(J_K(\hat{A}_j))|,$$

où  $J_K$  est la matrice Jacobienne de la fonction  $\psi_K$ .

### Démonstration.

L'intégrale sur  $D_\varepsilon$  d'une fonction  $f$  dont le support se limite aux quadrangles voisins du sommets  $s^k$  se décompose en une somme d'intégrales portant sur chacun de ces quadrangles, pouvant chacune être ramenée à une intégrale sur le carré unité  $C_1 = [0,1] \times [0,1]$ . En notant  $\mathcal{V}(s^k)$  l'ensemble des quadrangles voisins au sommet  $s^k$ , défini par  $\mathcal{V}(s^k) = \{K \in \mathcal{Q}_h / s^k \in K\}$ , nous avons alors :

$$\int_{D_\varepsilon} f dx = \sum_{K \in \mathcal{V}(s^k)} \int_K f dv = \sum_{K \in \mathcal{V}(s^k)} \int_{C_1} f(\psi_K(\xi, \eta)) |\det(J_K(\xi, \eta))| d\xi d\eta,$$

où  $\psi_K$  dénote la fonction envoyant le carré unité  $C_1 = [0,1] \times [0,1]$  vers un quadrangle  $K \in \mathcal{Q}_h$  et où  $J_K$  est la matrice Jacobienne de la fonction  $\psi_K$ . Rappelons que la fonction de transformation  $\psi_K$  est définie par :

$$\begin{aligned} \psi_K : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \xi + c \eta + d \xi \eta \\ e + f \xi + g \eta + h \xi \eta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En notant  $\hat{A}_1 = (0,0)$ ,  $\hat{A}_2 = (1,0)$ ,  $\hat{A}_3 = (0,1)$  et  $\hat{A}_4 = (1,1)$ , les coefficients  $a$  à  $h$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} a &= x_1, & b &= (x_2 - x_1), & c &= (x_3 - x_1), & d &= (x_1 - x_2 - x_3 + x_4), \\ e &= y_1, & f &= (y_2 - y_1), & g &= (y_3 - y_1), & h &= (y_1 - y_2 - y_3 + y_4) \end{aligned}$$

où  $x_j$  et  $y_j$  sont les coordonnées du sommet  $A_j$  du quadrangle  $K$  défini par  $A_j = \psi_K(\hat{A}_j)$ , pour  $j = 1, \dots, 4$ . La matrice Jacobienne  $J_K$  de la fonction  $\psi_K$  et son déterminant s'écrivent donc :

$$J_K(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} b + d \eta & c + d \xi \\ f + h \eta & g + h \xi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(J_K(\xi, \eta)) = (bg - fc) + (bh - fd) \xi + (dg - hc) \eta.$$

L'intégrale d'une fonction  $f$  sur le carré unité est maintenant approchée par la somme de sa valeur en chacun des noeuds pondérée par un poids de quadrature  $\omega_K$ . Ainsi, nous obtenons finalement :

$$\int_{D_\varepsilon} f dx = \sum_{K \in \mathcal{V}(s^k)} \sum_{j=1,4} f(A_j) \omega_K(\hat{A}_j), \quad \text{avec } \omega_K(\hat{A}_j) = \frac{1}{4} |\det(J_K(\hat{A}_j))|. \quad (4.24)$$

Notons que cette formule n'est exacte que pour les fonctions quadratiques appartenant à  $\mathcal{Q}_1$ .

Disposant de cette formule de quadrature, il reste à déterminer la valeur de la dérivée radiale d'une fonction de base  $\phi_k$  en chacun des noeuds d'un quadrangle  $K$  contenant le sommet  $s^k$ . Nous savons par construction que la fonction  $\phi_k$  est affine le long des faces du quadrangle  $K$  et qu'à un sommet  $A_j$  de ce quadrangle est associé un sommet  $A_{j'}$  placé à un angle est identique à celui de  $A_j$ . Par conséquent, la dérivée radiale de  $\phi_k$  sur une face  $[A_j, A_{j'}]$  est donnée par :

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial r} = \frac{\phi_k(A_j) - \phi_k(A_{j'})}{r(A_j) - r(A_{j'})}.$$

En utilisant la formule de quadrature (4.24) et en supposant que la permittivité  $\varepsilon_0$  est constante par quadrangle, nous avons donc :

$$\int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \frac{\partial \phi_l}{\partial r} r \, dr \, d\theta = \sum_{K \in \mathcal{V}(s^k)} \varepsilon_0 \sum_{j=1}^4 \frac{\phi_k(A_j) - \phi_k(A_{j'})}{r(A_j) - r(A_{j'})} \times \frac{\phi_l(A_j) - \phi_l(A_{j'})}{r(A_j) - r(A_{j'})} \omega_K(\hat{A}_j)$$

Puisque la fonction  $\phi_k$  vaut 1 au sommet  $s^k$  et 0 sur l'ensemble des autres sommets, cette intégrale n'est non nulle que si les sommets  $s^k$  et  $s^l$  sont situés à un angle identique et vaut alors :

$$\int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \frac{\partial \phi_l}{\partial r} r \, dr \, d\theta = \sum_{K \in \mathcal{V}(s^k)} \varepsilon_0 \frac{\omega_K(\hat{A}_j) + \omega_K(\hat{A}_{j'})}{(r(A_j) - r(A_{j'}))^2} (-1 + 2\delta_{k,l}).$$

où  $j$  est l'indice du sommet  $s^k$  dans la numérotation locale au quadrangle  $K$  et où  $A_{j'}$  est le sommet associé à  $A_j$  tel que défini précédemment. De façon similaire, nous avons également :

$$\int_{D_\varepsilon} \rho \phi_l r \, dr \, d\theta = \sum_{K \in \mathcal{V}(s^l)} \rho \omega_K(\hat{A}_j),$$

où  $j$  est cette fois l'indice du sommet  $s^l$  dans la numérotation locale au quadrangle  $K$ . Les intégrales portant sur la surface  $S_a$  du fil sont quant à elles être approchées à l'aide de la méthode des trapèzes, exacte pour les fonctions  $\mathbb{P}_1$ , et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{S_a} \frac{\varepsilon_0}{\delta} \phi_k \phi_l &= \sum_{J \in \mathcal{V}(s^k)} \frac{\varepsilon_0}{\delta} \frac{\mathcal{L}_K}{2} \delta_{k,l} \quad \text{si } s^k \in S_a, 0 \text{ sinon,} \\ \int_{S_a} \frac{\varepsilon_0}{\delta} u_a \phi_l &= \sum_{J \in \mathcal{V}(s^l)} \frac{\varepsilon_0}{\delta} u_a \frac{\mathcal{L}_K}{2} \quad \text{si } s^l \in S_a, 0 \text{ sinon,} \end{aligned}$$

où  $\mathcal{L}_K$  est la longueur de la face du quadrangle  $K$  appartenant à la frontière  $S_a$ .

Chacun des coefficients dont l'intégrale porte sur  $D_\varepsilon$  a donc été approché de manière à supprimer toute interaction entre deux noeuds d'angles différents : la formulation obtenue rend bien compte de l'invariance du problème par rapport à  $\theta$ . Puisque qu'aucun noeud de la frontière de raccord, ne peut interagir avec d'autres noeuds de cette frontière, la matrice  $A_{Robin}$  est diagonale et nous retrouvons l'équivalent d'une condition aux limites de Dirichlet-Neumann (ou de Robin) discrète.

Nous pouvons de plus noter que les matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $A_i^f$ ,  $A_j^i$  et  $A_{f,1}$  sont creuses et présentent une structure très simple. Les matrices  $B_i$  et  $A_{f,1}$  sont diagonales et, à condition d'adopter une numérotation des noeuds adaptée, la matrice  $A_i$  est constituée de blocs diagonaux où chaque bloc est tridiagonal. Pour s'en convaincre, reprenons l'exemple donné sur la figure 4.5, où  $n_i^s = 12$ ,  $n_e^s = 5$  et



Dans le domaine  $D_\varepsilon$ , les variables sont radiales et l'intégrale (a) portant sur le champ électrique devient :

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \nabla w \, dv &= - \int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial r} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{D_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right)}_{=0} r \, dr \, d\theta + \int_{S_a} \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial r} r \, dr \, d\theta - \int_{\gamma_{r,\varepsilon}} \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial r} r \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

Dans le domaine  $\Omega_\varepsilon$ , cette même intégrale s'écrit :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \nabla w \, dv = \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \underbrace{\Delta w}_{=0} \, dv - \int_{\gamma_{r,\varepsilon}} \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla w \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{S_c} \varepsilon_0 \underbrace{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}_{=0} \nabla w \cdot \mathbf{n} \, ds$$

En supposant que le saut de la dérivée normale de  $w$  et que le saut de  $\varphi$  sont nuls sur la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$ , la somme des intégrales portant sur cette frontière s'annule et l'intégrale (a) est alors équivalente à la variation temporelle du potentiel  $\varphi$  à l'anode multipliée par une intégrale portant sur la fonction  $w$ . Ainsi, en utilisant la loi d'Ohm  $\varphi_a = \varphi_g - R I$ , nous obtenons finalement l'équation suivante pour l'évolution du potentiel à l'anode :

$$-R \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_a}{\partial t} \int_{S_a} \frac{\partial w}{\partial r} r \, dr \, d\theta = \varphi_a - \varphi_g + R \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \nabla w \, dv$$

Il ne reste plus qu'à vérifier l'hypothèse supposant que la divergence du courant total est nulle en chaque point du domaine  $\Omega$ , soit :

$$\underbrace{\nabla \cdot \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right)}_{(b)} = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

L'intégrale sur  $\Omega$  du terme (b) au sens des distributions est égale à son intégrale sur les domaines  $\Omega_\varepsilon$  et  $D_\varepsilon$  auxquelles s'ajoute le saut de (b) sur la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$ . Dans le domaine  $\Omega_\varepsilon$ , (b) est nul en tout point par construction. Dans le domaine  $D_\varepsilon$ , la solution est radiale est nous avons par conséquent :

$$\nabla \cdot \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) = \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)}_{(c)} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathbf{j})}{\partial r}}_{(d)}$$

Nous distinguons alors deux cas selon le modèle utilisé pour décrire la décharge dans  $D_\varepsilon$  :

- Pour le modèle asymptotique, le champ est électrostatique et le terme (c) est nul. Le terme (d) est quant à lui équivalent à la somme des équations de conservation de la masse et est par conséquent nul. Notons que ce dernier point n'est alors valable que grâce à la forme stationnaire de ces équations. Un modèle prenant en compte l'évolution temporelle des densités dans les domaines  $D_\varepsilon$  tout en ne prenant pas en compte l'influence de la charge sur le champ, ou inversement, ne conserverait *a priori* pas le courant de décharge.
- Avec le modèle radial, le terme (c) est en fait égal à la dérivée temporelle de la charge locale  $\rho$  et la somme des termes (c) et (d) est équivalente à la somme des équations de conservation de la masse et est donc nulle puisque la charge est conservée.

Le courant total est donc nul sur les domaines  $\Omega_\varepsilon$  et  $D_\varepsilon$ . En faisant l'hypothèse que les sauts de la dérivée normale du champ électrique et de celle du courant de conduction sont nulles le long de la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$ , alors le saut du courant total y est également nul.

Finalement, la conservation du courant est donc assurée sous des hypothèses raisonnables et déjà vérifiées pour la plupart. Celles-ci supposent principalement la continuité du potentiel, de la dérivée normale du champ électrique et de celle des flux de densités à travers la frontière  $\gamma_{r,\varepsilon}$ . Les hypothèses faites sur la fonction  $w$  imposent de la même manière sa continuité et celle de sa dérivée normale sur cette même frontière. Ainsi, la fonction  $w$  est en fait la composante géométrique du potentiel électrostatique approché.

### 4.4 Synthèse

Les modèles d'électrode virtuelle développés au cours de cette thèse ont été présentés dans ce chapitre. Chacun de ces modèles se base sur un principe commun qui consiste à approcher le mouvement des particules chargées à proximité des électrodes par leur mouvement le long des lignes du champ électrostatique. Les interactions entre deux de ces lignes de champ sont donc négligées et la décharge dans ce domaine est décrite de manière monodimensionnelle.

Le premier modèle approché développé dans ce chapitre, appelé modèle asymptotique, constitue une extension de la méthode de développements asymptotiques raccordés présentée dans le chapitre 3. Dans un petit voisinage autour de la singularité de champ, la cinétique chimique est simplifiée de manière à ne considérer que la réaction d'ionisation par choc électronique, prépondérante en présence de champ fort. Le modèle est stationnaire et l'influence de la charge d'espace y est négligée. Le champ électrique est alors décrit analytiquement à l'aide de l'approximation de l'équation de Poisson développée dans une première partie. Ce modèle se distingue particulièrement par sa solution quasi-analytique et n'est donc sujet à aucune contrainte de pas de temps et de maillage dans le domaine où il est appliqué.

Le second modèle d'électrode virtuelle, appelé modèle radial, constitue un modèle intermédiaire entre le premier modèle et le modèle classique. Celui-ci prend en compte la présence d'une charge d'espace et l'évolution temporelle des densités. Ainsi, seule l'hypothèse sur le déplacement des particules chargées le long des lignes de champ est conservée. Une méthode éléments finis du premier ordre couplée à une méthode de condensation de masse ont été mis en oeuvre afin de discrétiser l'équation de Poisson de manière consistante sur l'ensemble du domaine tout en conservant l'aspect monodimensionnel du modèle approché à proximité de l'électrode.

Les modèles différents modèles d'électrode virtuelle ayant été décrits, leur validation d'un point de vue numérique et l'estimation de l'estimation du gain en temps de calcul qu'ils apportent doivent être faites. Ces aspects sont l'objet de la troisième partie de ce manuscrit que nous allons à présent aborder.

— Troisième partie —

**Implémentation et validation des modèles  
d'électrode virtuelle**





## Chapitre 5

# Comportement du modèle asymptotique en dimension 1

### Sommaire

---

<b>5.1. Équations plasmas 1D</b> .....	85
<b>5.2. Méthode de résolution numérique</b> .....	87
5.2.1. Discrétisation de l'espace inter-électrodes .....	87
5.2.2. Description du schéma numérique .....	89
5.2.3. Conditions aux limites .....	92
5.2.4. Conditions de stabilité .....	93
<b>5.3. Étude de l'influence du modèle asymptotique sur une configuration fil-cylindre</b>	94
<b>5.4. Application du modèle asymptotique à la simulation 1D d'une décharge fil-fil expérimentale</b> .....	100
<b>5.5. Synthèse</b> .....	106

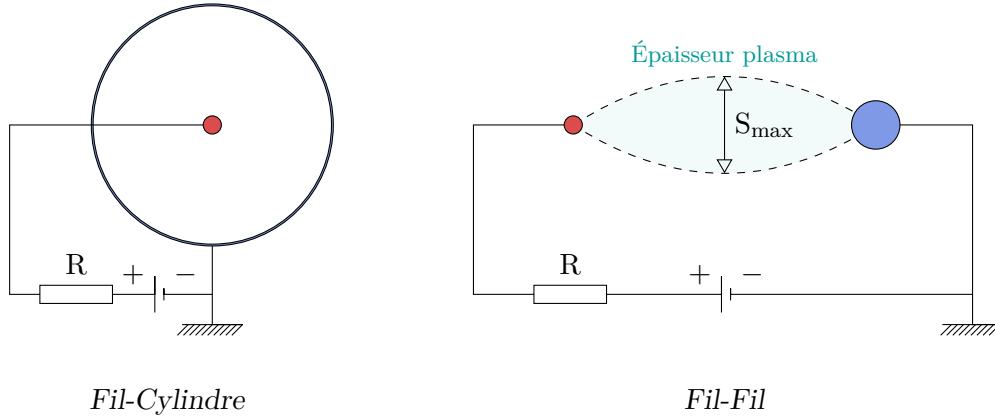
---

Les premiers test numériques sur les modèles d'électrode virtuelle ont porté sur la validation du modèle asymptotique couplé à un modèle monodimensionnel. Pour cela, deux configurations sont étudiées. La première consiste en un dispositif fil-cylindre dont l'électrode intérieure, portée à une tension positive, est modélisée à l'aide du modèle asymptotique. La cinétique considérée se limite à l'ionisation par choc électronique afin d'obtenir un cas test simple admettant une solution quasi-analytique à l'état stationnaire et permettant de caractériser l'influence du modèle approché sur la simulation de la décharge.

Dans un deuxième temps, le modèle est appliqué à la simulation d'une décharge fil-fil, ramenée à un problème monodimensionnel via l'introduction d'une épaisseur plasma. Le modèle asymptotique est alors appliqué à la fois à l'anode et à la cathode pour une cinétique chimique comprenant l'ionisation et l'attachement électronique.

### 5.1 Équations plasmas 1D

Les deux dispositifs étudiés sont représentés schématiquement figure 5.1. Pour les deux configurations, les électrodes, de longueur  $L_{elec}$ , sont reliées à un générateur de tension continue  $\varphi_g$  mis en série avec une résistance  $R$ . L'électrode stressée, de rayon  $r_a$ , est donc portée à une tension positive  $\varphi_a$  tandis que l'autre électrode, de rayon  $r_c$  est mise à la masse.



**Figure 5.1** Configurations de décharges couronnes Fil-Cylindre et Fil-Fil positives

Si la géométrie d'un dispositif fil-cylindre est naturellement monodimensionnelle du fait de son invariance par translation le long de l'axe des électrodes et par rotation autour de ce même axe, il n'en est pas de même pour un dispositif fil-fil. Nous avons vu dans la section 3.2 du chapitre 3 qu'il était possible de se ramener à un problème monodimensionnel via l'introduction d'une épaisseur plasma, de valeur maximale  $S_{max}$  et sur laquelle toutes les variables sont supposées constantes.

En utilisant cette formulation, les équations plasmas décrites dans le chapitre 2 peuvent s'écrire en dimension 1 sous une forme unique pour les deux configurations. L'équation de conservation de la masse de l'espèce  $k$  devient notamment :

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial S n_k \mathbf{u}_k}{\partial x} = \omega_k, \quad (5.1)$$

où  $S(x)$  représente ici soit l'épaisseur plasma introduite pour le dispositif fil-fil, soit la distance à l'axe des électrodes provenant du passage en coordonnées cylindriques pour le dispositif fil-cylindre (i.e.  $S(x) = x$ ). Rappelons que la vitesse  $\mathbf{u}_k$  de l'espèce  $k$  est donnée par :

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0 + Z_k \mu_k \mathbf{E}.$$

où  $Z_k$  est le signe de la charge de l'espèce  $k$  et où  $\mu_k$  est sa mobilité. L'équation de Poisson s'écrit quant à elle sous la forme suivante :

$$-\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left( S \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (5.2)$$

Pour finir, l'équation régissant l'évolution du potentiel à la surface de l'anode  $\varphi_a$  s'écrit à présent :

$$\left( R \varepsilon_0 \int_{S_a} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \mathbf{n} ds \right) \frac{\partial \varphi_a}{\partial t} = \varphi_a - \varphi_g + R \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dv. \quad (5.3)$$

où  $S_a$  est la surface de l'anode et où  $w$  est la composante géométrique du potentiel électrostatique unitaire, valant 0 sur l'électrode mise à la masse et 1 sur l'autre électrode. La valeur de  $w$  dépend donc du dispositif étudié et nous avons :

$$w(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x/r_c)}{\ln(r_a/r_c)}, & [\text{fil-cylindre}] \\ 1 - \frac{1}{2 \ln(R_0/r_a)} \ln \left( \frac{(x - \beta_0 r_a)^2}{(\beta_0 x - r_a)} \right), & [\text{fil-fil}] \end{cases}$$

où, pour rappel, les constantes  $\beta_0$  et  $R_0$  sont définies par :

$$\beta_0 = \frac{CD + r_a^2 + \sqrt{(C^2 - r_a^2)(D^2 - r_a^2)}}{r_a(D + C)} \quad \text{et} \quad R_0 = \left| \frac{CD - r_a^2 - \sqrt{(C^2 - r_a^2)(D^2 - r_a^2)}}{(D + C)} \right|,$$

avec  $C = r_a + d$  et  $D = r_a + d + 2r_c$ . La dérivée de la fonction  $w$  est par conséquent donnée par :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \begin{cases} \frac{1}{x} \frac{1}{\ln(r_a/r_c)}, & [\text{fil-cylindre}] \\ -\frac{1}{\ln(R_0/r_a)} \frac{(\beta_0^2 - 1)r_a}{(x - \beta_0 r_a)(\beta_0 x - r_a)}. & [\text{fil-fil}] \end{cases}$$

Les mesures d'intégrations  $ds$  et  $dv$  sont quant à elles définies par :

$$ds = L_{elec} \times \begin{cases} 2\pi r_a & [\text{fil-cylindre}] \\ S(r_a) & [\text{fil-fil}] \end{cases} \quad \text{et} \quad dv(x) = dx L_{elec} \times \begin{cases} 2\pi x & [\text{fil-cylindre}] \\ S(x) & [\text{fil-fil}] \end{cases}$$

Le modèle asymptotique est quant à lui peu modifié par le passage en dimension 1 (étant lui même un modèle monodimensionnel). Le flux  $\Gamma_k$  de l'espèce  $k$  est maintenant défini par  $\Gamma_k = S n_k \mathbf{u}_k$  et la présence de l'épaisseur plasma  $S(x)$  modifie légèrement l'équation de Poisson pour la configuration fil-fil. Il est cependant possible d'obtenir à nouveau une équation radiale en approchant l'épaisseur plasma à proximité des électrodes par son développement au premier ordre :

$$S(r) = r S'(r_{elec}) + o(\varepsilon)$$

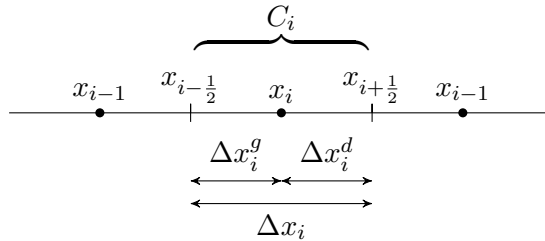
où  $r$  est la distance au centre de l'électrode considérée, dont le rayon est noté  $r_{elec}$ .

## 5.2 Méthode de résolution numérique

### 5.2.1 Discrétisation de l'espace inter-électrodes

L'espace séparant la surfaces des deux électrodes est discrétisé par  $l_x$  mailles, auxquelles on ajoute deux mailles fictives d'indices 0 et  $l_x + 1$  pour représenter les électrodes. La figure 5.2 présente les termes utilisés pour décrire le maillage. Le centre de la cellule  $C_i$  est noté  $x_i$  et ses deux faces sont respectivement notées  $x_{i-\frac{1}{2}}$  et  $x_{i+\frac{1}{2}}$ . Pour  $i \in [0, l_x + 1]$ , on pose :

$$\Delta x_i^g = x_i - x_{i-\frac{1}{2}}, \quad \Delta x_i^d = x_{i+\frac{1}{2}} - x_i \quad \text{et} \quad \Delta x_i = \Delta x_i^g + \Delta x_i^d.$$



**Figure 5.2** Structure du maillage

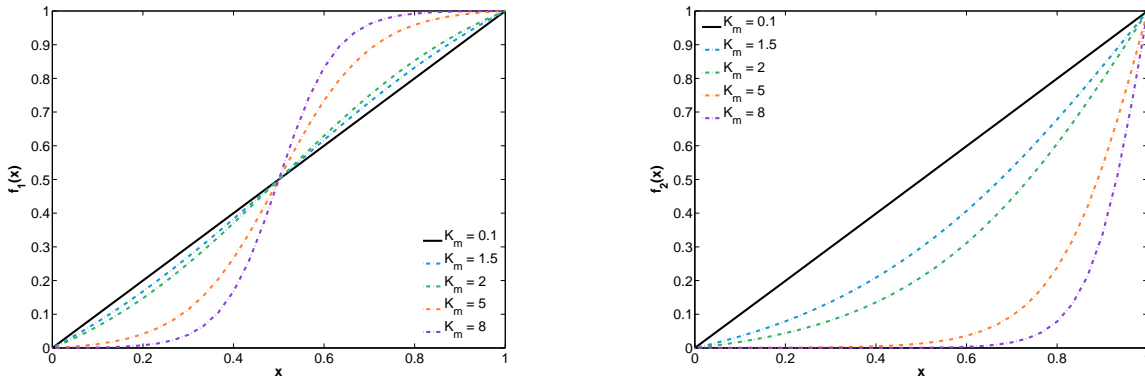
Afin de pouvoir simuler correctement la dynamique de la décharge tout en conservant un nombre limité de mailles, le maillage a été raffiné à proximité des électrodes. Pour ce faire, deux fonctions ont été définies, selon que l'on souhaite obtenir un raffinement de maillage à proximité des deux électrodes ou à proximité d'une seule. Ces fonctions, respectivement notées  $f_1$  et  $f_2$ , sont à valeurs de  $[x_0, x_n]$  dans  $[x_0, x_n]$  et sont définies par :

$$f_1(x) = x_0 + \frac{(x_n - x_0)}{2} \times \left( \frac{\tanh [K_m(x - x_0)/(x_n - x_0) - K_m/2]}{\tanh [K_m/2]} + 1 \right), \quad (5.4)$$

$$f_2(x) = x_n - (x_n - x_0) \times \left( \frac{\tanh [K_m(x - x_n)/(x_0 - x_n)]}{\tanh [K_m]} \right). \quad (5.5)$$

où  $K_m$  est un paramètre strictement positif permettant de modifier l'allure de la fonction, comme le montre la figure 5.3. Ainsi, si l'on veut discrétiser le segment  $[x_0, x_n]$ , il suffit de prendre comme maillage l'image d'une discrétisation régulière de ce segment par la fonction  $f_1$  ou la fonction  $f_2$ . Le paramètre  $K_m$  permet alors d'obtenir une discrétisation plus ou moins raffinée à proximité des électrodes : plus  $K_m$  est grand, plus le raffinement est important. Bien que non défini, le choix  $K_m = 0$  désignera le choix d'un maillage régulier.

Pour éviter que le maillage impose une condition CFL trop contraignante, nous adjoignons un paramètre  $\Delta x_{min}$  à ces fonctions de raffinement, qui fixe la taille minimale autorisée pour une cellule. Si la taille de la plus petite cellule est inférieure à cette valeur, le paramètre  $K_m$  est automatiquement ajusté de manière à ce que ne soit plus le cas.

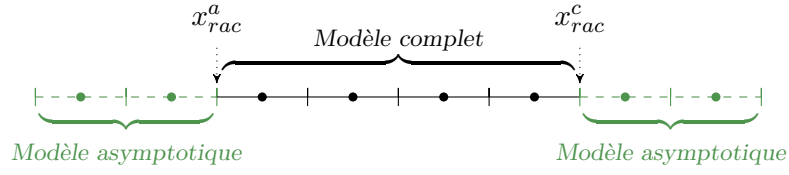


Fonction  $f_1$ , pour un raffinement près de  $x_0$  et  $x_n$

Fonction  $f_2$ , pour un raffinement près de  $x_0$  uniquement

**Figure 5.3** Fonctions utilisées pour le raffinement de maillage à proximité des électrodes

Concernant le modèle asymptotique, son implémentation est faite de manière à conserver un même maillage quelque soit l'épaisseur de la couche d'ionisation choisie. Ainsi, pour une configuration donnée, l'ensemble de l'espace inter-électrodes est discrétisé selon la fonction de raffinement voulue et selon les paramètres  $l_x$ ,  $K_m$  et  $\Delta x_{min}$ . Les mailles traitées par le modèle asymptotique sont alors identifiées en fonction de l'épaisseur de la couche d'ionisation donnée. Par la suite, les faces correspondant aux raccords entre le modèle asymptotique et le modèle complet seront notées  $x_{rac}^a$  pour l'anode et  $x_{rac}^c$  pour la cathode (voir figure 5.4).



**Figure 5.4** Mailles traitées par le modèle asymptotique

### 5.2.2 Description du schéma numérique

La méthode d'intégration numérique des équations de transport est une méthode de type volumes finis, déjà utilisée par Quinio [41] dans le cas d'un maillage 2D cartésien et par Matéo-Vélez [34] pour une discrétisation 1D. Pour commencer, les équations continues (5.1) et (5.2) sont réécrites de la manière suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma(n, \mathbf{u})}{\partial x} = \omega$$

avec

$$\begin{aligned} n &= (n_e, n_+, n_-), & \mathbf{u} &= (\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \\ \Gamma &= (S n_e \mathbf{u}_e, S n_+ \mathbf{u}_+, S n_- \mathbf{u}_-), & \omega &= (\omega_e, \omega_+, \omega_-). \end{aligned}$$

Nous posons par la suite :

$$\begin{aligned} t^{n+1} &= t_n + \Delta t^n, & n_i^n &= \frac{1}{\Delta x_i} \int_{C_i} n(t^n, x) dx, & \omega_i^n &= (\omega_e, \omega_+, \omega_-)(t^n, x_i), \\ \varphi_i^n &= \frac{1}{\Delta x_i} \int_{C_i} \varphi(t^n, x) dx, & \mu_i^n &= (\mu_e, \mu_+, \mu_-)(t^n, x_i). \end{aligned}$$

où le temps initial  $t_0$  est donné et où  $\Delta t^n$  est le pas de temps d'intégration permettant de passer de l'instant  $t^n$  à l'instant  $t^{n+1}$ .

### Équation de conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse est discrétisée en espace à l'aide d'un schéma de type volumes finis d'ordre 2, dont la stabilité est assurée par un limiteur de pente de type minmod. Son intégration temporelle est quant à elle faite de manière explicite à l'aide d'un schéma d'ordre 1. Ainsi, pour  $i \in [1, l_x]$ , le schéma numérique s'écrit :

$$n_i^{n+1} = n_i^n + \Delta t^n \left( \omega_i^n + \frac{1}{S_i} \frac{1}{\Delta x_i} \left( \Gamma_{i-\frac{1}{2}}^n - \Gamma_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \right).$$

Les flux numériques aux interfaces entre les cellules sont calculés en introduisant :

$$\begin{aligned} (f_i^n)_d &= S_{i+\frac{1}{2}} \times (\mathbf{u}_i + p_u \Delta x_i^d) \times (n_i + p_n \Delta x_i^d), \\ (f_i^n)_g &= S_{i-\frac{1}{2}} \times (\mathbf{u}_i - p_u \Delta x_i^g) \times (n_i - p_n \Delta x_i^g). \end{aligned}$$

Les pentes  $p_u$  et  $p_n$  sont définies par :

$$p_u = \text{sminmod} \left( \frac{\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_{i-1}^n}{\Delta x_i^g + \Delta x_{i-1}^d}, \frac{\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n}{\Delta x_{i+1}^g + \Delta x_i^d} \right)$$

$$p_n = \text{sminmod} \left( \frac{n_i^n - n_{i-1}^n}{\Delta x_i^g + \Delta x_{i-1}^d}, \frac{n_{i+1}^n - n_i^n}{\Delta x_{i+1}^g + \Delta x_i^d} \right)$$

où

$$\text{sminmod}(a, b) = \text{signe}(a) \times \text{minmod}(a, b)$$

avec

$$\text{signe}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ -1 & \text{si } a < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{minmod}(a, b) = \begin{cases} \min(|a|, |b|) & \text{si } a \times b > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ce limiteur permet ainsi d'évaluer les vitesses et les densités provenant de la cellule  $C_i$  aux interfaces  $i - \frac{1}{2}$  et  $i + \frac{1}{2}$  à partir de leur variation entre la cellule  $C_i$  et les cellules  $C_{i-1}$  et  $C_{i+1}$ . Pour chacune des faces, deux flux locaux sont obtenus : un flux amont  $(f_i^n)_d$  et un flux aval  $(f_{i+1}^n)_g$  pour la face d'indice  $i + \frac{1}{2}$  par exemple. Le calcul des flux totaux aux interfaces se fait alors à l'aide de la formulation décentrée suivante :

$$\Gamma_{i+\frac{1}{2}}^n = \max((f_i^n)_d, 0) + \min((f_{i+1}^n)_g, 0)$$

$$\Gamma_{i-\frac{1}{2}}^n = \max((f_{i-1}^n)_d, 0) + \min((f_i^n)_g, 0)$$

### Évolution du potentiel aux électrodes

L'équation différentielle vérifiée par le potentiel  $\varphi_a$  est intégrée selon le même schéma, d'ordre 1 en temps, que pour les équations de transport et nous avons :

$$\varphi_a^{n+1} = \varphi_a^n + \frac{\Delta t^n}{C_s} \left( \varphi_a^n - \varphi_g + R \sum_{i=1}^{l_x} \mathbf{j}_i^n \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \Delta v_i \right),$$

où  $\Delta v_i = dv(x_i)$  et où la constante  $C_s$  est définie par :

$$C_s = R\varepsilon_0 \int_{S_a} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \mathbf{n} ds.$$

### Équation de Poisson

L'équation de Poisson est discrétisée à l'aide d'une méthode de type volumes finis, qui nous amène à :

$$S_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}} - S_{i-\frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}} = -S_i \Delta x_i \frac{\rho_i^n}{\varepsilon_0}. \quad (5.6)$$

Pour une maille  $C_i$  dont aucune des faces ne correspond à une condition aux limites de type Dirichlet-Neumann (provenant du modèle asymptotique), les dérivées en  $x$  sont approchées au premier ordre et nous obtenons :

$$A_i^p \varphi_{i+1} - B_i \varphi_i + A_i^m \varphi_{i-1} = -S_i \Delta x_i \frac{\rho_i^n}{\varepsilon_0},$$

avec

$$A_i^p = \frac{S_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i+1}^g + \Delta x_i^d}, \quad A_i^m = \frac{S_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i^g + \Delta x_{i-1}^d} \quad \text{et} \quad B_i = A_i^p + A_i^m.$$

En présence d'une telle condition aux limites, la discrétisation doit être faite différemment. Nous avons alors :

$$\text{Pour l'anode :} \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{i_a - \frac{1}{2}} = \chi_a \varphi_{i_a - \frac{1}{2}} - \chi_a \varphi_a, \quad \text{avec} \quad \chi_a = \frac{1}{x_{i_a - \frac{1}{2}} \ln(x_{i_a - \frac{1}{2}}/r_a)},$$

$$\text{Pour la cathode :} \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{i_c + \frac{1}{2}} = -\chi_c \varphi_{i_c + \frac{1}{2}}, \quad \text{avec} \quad \chi_c = \frac{1}{(1 - x_{i_c + \frac{1}{2}}) \ln((1 - x_{i_c + \frac{1}{2}})/r_c)},$$

où les indices  $i_a - \frac{1}{2}$  et  $i_c + \frac{1}{2}$  sont ici les indices des faces dont les coordonnées sont respectivement  $x_{i_a - \frac{1}{2}} = x_{rac}^a$  et  $x_{i_c + \frac{1}{2}} = x_{rac}^c$ . Les potentiels  $\varphi_{i_a - \frac{1}{2}}$  et  $\varphi_{i_c + \frac{1}{2}}$  n'appartenant pas au domaine de résolution par le modèle complet, nous les approchons au second ordre en espace de la manière suivante :

$$\varphi_{i_a - \frac{1}{2}} = \varphi_{i_a + \frac{1}{2}} - \Delta x_{i_a} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{i_a + \frac{1}{2}} + o(\Delta x_{i_a}) \simeq \frac{\Delta x_{i_a}^d \varphi_{i_a + 1} + \Delta x_{i_a + 1}^g \varphi_{i_a}}{\Delta x_{i_a + 1}^g + \Delta x_{i_a}^d} - \Delta x_{i_a} \frac{\varphi_{i_a + 1} - \varphi_{i_a}}{\Delta x_{i_a + 1}^g + \Delta x_{i_a}^d}$$

$$\varphi_{i_c + \frac{1}{2}} = \varphi_{i_c - \frac{1}{2}} + \Delta x_{i_c} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{i_c - \frac{1}{2}} + o(\Delta x_{i_c}) \simeq \frac{\Delta x_{i_c - 1}^d \varphi_{i_c} + \Delta x_{i_c}^g \varphi_{i_c - 1}}{\Delta x_{i_c}^g + \Delta x_{i_c - 1}^d} + \Delta x_{i_c} \frac{\varphi_{i_c} - \varphi_{i_c - 1}}{\Delta x_{i_c}^g + \Delta x_{i_c - 1}^d}$$

Introduisons à présent la condition limite dans l'équation (5.6). Si elle concerne l'anode, nous obtenons après simplifications :

$$A_{i_a}^p \varphi_{i_a + 1} - B_{i_a} \varphi_{i_a} = -S_{i_a} \Delta x_{i_a} \frac{\rho_{i_a}^n}{\varepsilon_0} - \varphi_a^n S_{i_a - \frac{1}{2}} \chi_a,$$

avec

$$A_{i_a}^p = \frac{S_{i_a + \frac{1}{2}} + S_{i_a - \frac{1}{2}} \chi_a \Delta x_{i_a}^g}{\Delta x_{i_a + 1}^g + \Delta x_{i_a}^d} \quad \text{et} \quad B_{i_a} = \frac{S_{i_a + \frac{1}{2}} + S_{i_a - \frac{1}{2}} \chi_a (\Delta x_{i_a + 1}^g + \Delta x_{i_a}^d)}{\Delta x_{i_a + 1}^g + \Delta x_{i_a}^d}.$$

Si cette condition concerne la cathode, nous obtenons alors :

$$-B_{i_c} \varphi_{i_c} + A_{i_c}^m \varphi_{i_c - 1} = -S_{i_c} \Delta x_{i_c} \frac{\rho_{i_c}^n}{\varepsilon_0},$$

avec

$$B_{i_c} = \frac{S_{i_c - \frac{1}{2}} + S_{i_c + \frac{1}{2}} \chi_c (\Delta x_{i_c - 1}^d + \Delta x_{i_c}^g)}{\Delta x_{i_c}^g + \Delta x_{i_c - 1}^d} \quad \text{et} \quad A_{i_c}^m = \frac{S_{i_c - \frac{1}{2}} + S_{i_c + \frac{1}{2}} \chi_c \Delta x_{i_c}^d}{\Delta x_{i_c}^g + \Delta x_{i_c - 1}^d}.$$

### Bilan sur le schéma de discrétisation

Le schéma numérique utilisé pour la discrétisation des équations plasmas à été décrit ci-dessus. Le schéma obtenu est du premier ordre en temps et du second ordre en espace. Le passage de l'instant  $t^n$  à l'instant  $t^{n+1}$  se fait de la manière suivante.

- Détermination des flux de densités  $\Gamma^n$  et des coefficients de réactions  $\omega^n$ .
- Calcul des densités  $n^{n+1}$ .
- Calcul du potentiel appliqué  $\varphi_a^{n+1}$  et du courant de décharge  $I^{n+1}$ .
- Résolution de l'équation de Poisson pour le calcul du potentiel  $\varphi^{n+1}$  et du champ électrique  $\mathbf{E}^{n+1}$ .
- Mise à jour des coefficients de transport et calcul de la vitesse des particules  $\mathbf{u}^{n+1}$ .

### 5.2.3 Conditions aux limites

Comme nous l'avons vu lors de la discrétisation de l'équation de Poisson, les conditions aux limites dépendent du modèle utilisé pour décrire les zones proches des électrodes et nous distinguons deux cas :

- i) En l'absence de modèle asymptotique, le potentiel aux électrodes est donné par des conditions aux limites de type Dirichlet et nous avons :

$$\varphi_0^n = \varphi_a^n \quad \text{et} \quad \varphi_{l_x+1}^n = 0.$$

Puisqu'il n'y a pas n'y a pas d'accumulation de charge sur les électrodes, les densités d'espèces chargées sont nulles aux mailles limites, d'où :

$$n_0^n = 0, \quad n_{l_x+1}^n = 0$$

Sur ces mêmes mailles, il n'y a pas de production d'espèces chargées et donc les flux locaux sont nuls :

$$(f_0^n)_m = 0, \quad (f_0^n)_p = 0, \quad (f_{l_x+1}^n)_m = 0, \quad (f_{l_x+1}^n)_p = 0.$$

Du fait de l'émission secondaire par bombardement ionique, il y a production d'électrons à la cathode. Le flux d'électrons émis est donc proportionnel au flux d'ions positifs incident. Puisque nous avons supposé que la cathode se situe à droite, à la maille  $l_x+1$ , nous avons :

$$(f_{l_x+1}^n)_m^e = -\gamma(f_{l_x}^n)_p^+.$$

- ii) Lorsque le modèle asymptotique est utilisé pour décrire le plasma à proximité des électrodes, les conditions aux limites sont données aux faces de raccordant les deux modèles. Notons  $i_a$  et  $i_c$  les indices désignant respectivement la première et la dernière maille appartenant au domaine de résolution du modèle complet, c'est à dire les indices tels que :

$$x_{i_a-\frac{1}{2}} = x_{rac}^a \quad \text{et} \quad x_{i_c+\frac{1}{2}} = x_{rac}^c.$$



Comme présenté lors de la discrétisation de l'équation de Poisson, les conditions aux limites pour le potentiel sont des conditions du type Dirichlet-Neumann définies par :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{i_a - \frac{1}{2}} &= \chi_a \varphi_{i_a - \frac{1}{2}} - \chi_a \varphi_a, & \text{avec } \chi_a &= \frac{1}{x_{i_a - \frac{1}{2}} \ln(x_{i_a - \frac{1}{2}}/r_a)}, \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{i_c + \frac{1}{2}} &= -\chi_c \varphi_{i_c + \frac{1}{2}}, & \text{avec } \chi_c &= \frac{1}{(1 - x_{i_c + \frac{1}{2}}) \ln((1 - x_{i_c + \frac{1}{2}})/r_c)}. \end{aligned}$$

Les flux provenant du modèle asymptotique dépendent des flux provenant du modèle complet, du potentiel au raccord entre les modèles et du potentiel de l'électrode considérée. Ainsi nous avons :

$$(f_{i_a - 1}^n)_p = A_{ev}((f_{i_a}^n)_m, \varphi_{i_a - \frac{1}{2}}, \varphi_a) \quad \text{et} \quad (f_{i_c + 1}^n)_m = A_{ev}((f_{i_c}^n)_p, \varphi_{i_c + \frac{1}{2}}, 0),$$

où  $A_{ev}$  est la fonction donnant les flux provenant du modèle asymptotique au point de raccord entre les modèles en fonction des flux provenant du modèle complet.

#### 5.2.4 Conditions de stabilité

Plusieurs conditions sur le pas de temps doivent être imposées afin d'assurer la stabilité des schémas numériques présentés précédemment. Du fait de l'intégration des équations de transport, le pas de temps doit tout d'abord respecter la condition CFL. Les électrons étant l'espèce la plus rapide, celle-ci s'exprime de la manière suivante :

$$\Delta t_{conv}^n = \min_i \left( \frac{\Delta x_i}{(\mathbf{u}_e)_i^n} \right).$$

Le couplage entre le transport des espèces chargées avec le champ électrique impose également une restriction de pas de temps liée à la relaxation diélectrique du milieu. Il s'agit d'un temps caractéristique d'équilibre entre le transport des espèces et le champ électrique défini par :

$$\Delta t_{rel}^n = \frac{\varepsilon_0}{q_e \sum_k \mu_k^n n_k^n}.$$

Le couplage du circuit extérieur avec la décharge possède également sa propre dynamique. Celle-ci se retranscrit lors de l'intégration de l'équation régissant l'évolution du potentiel à l'anode, à laquelle on associe le pas de temps suivant :

$$\Delta t_{pot} = R \varepsilon_0 \int_{S_a} \left( -\frac{\partial w}{\partial x} \right) ds$$

Concernant l'intégration de la cinétique chimique, il est également nécessaire d'imposer une restriction sur le pas de temps pour assurer sa stabilité. Si la quantité d'espèces produites par la cinétique chimique dans la cellule  $C_i$  pendant un intervalle de temps  $\Delta t^n$  s'écrit  $n_i^{n+1} = n_i^n + \Delta t^n \omega_i^n$ , alors le pas de temps associé à la cinétique est défini par :

$$\Delta t_{cin}^n = \min_i \left( \min_k \left( \frac{(n_k)_i^n}{|(\omega_k)_i^n|} \right) \right).$$

Le pas de temps  $\Delta t^n$  est finalement choisi de manière à satisfaire le pas de temps caractéristique lié à chacun des problèmes linéaires. Ces différents problèmes étant couplés à l'aide d'une

méthode de splitting précise au premier ordre en temps, cela assure la stabilité globale du problème non-linéaire.

### 5.3 Étude de l'influence du modèle asymptotique sur une configuration fil-cylindre

#### Paramètres physiques et numériques

Les caractéristiques du dispositif fil-cylindre étudié ici et les paramètres de simulation sont résumés dans le tableau 5.1. L'électrode intérieure, de rayon  $r_a$  égal à 0,2 mm, est reliée à un générateur délivrant une tension continue  $\varphi_g$  de 4 kV relié à une résistance de 1  $\Omega$ . L'électrode extérieure a quant à elle un rayon  $r_c$  de 1 mm et est reliée à la masse. Ces deux électrodes ont une longueur d'un mètre et le coefficient d'émission secondaire de la cathode  $\gamma$  est fixé à  $10^{-4}$ . La décharge se développe en l'absence d'écoulement externe dans des conditions normales de température et de pression.

La discrétisation de l'espace inter-électrodes est constituée de 400 mailles obtenues à l'aide de la fonction de raffinement  $f_1$  (équation (5.4)), avec le paramètre  $K_m$  pris égal à 8 et une taille de maille minimale  $\Delta x_{min}$  fixée à 1  $\mu\text{m}$ . Le niveau initial et le fond minimal de densité des particules chargées sont tous deux fixés à  $10^8 \text{ m}^{-3}$ . La cinétique se limite ici à l'ionisation par choc électronique. Son coefficient de réaction  $\alpha$  et la mobilité électronique  $\mu_e$  sont donnés par le code numérique BOLSIG pour un gaz composé de 80% de diazote et 20% de dioxygène. Les mobilités ioniques sont indépendantes du champ électrique et valent  $\mu_+ = \mu_- = 3,4617 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

**Tableau 5.1** Caractéristiques du dispositif fil-cylindre et paramètres de simulation

$r_a$ : 0,2 mm	$\varphi_g$ : 4 kV	$\mathbf{u}_0$ : 0 m.s <sup>-1</sup>	$n_{init}$ : $10^8 \text{ m}^{-3}$	$l_x$ : 400
$r_c$ : 1 mm	$R$ : 1 $\Omega$	$P_0$ : 1 bar	$n_{min}$ : $10^8 \text{ m}^{-3}$	$\Delta x_{min}$ : 1 $\mu\text{m}$
$L_{elec}$ : 1 m	$\gamma$ : $10^{-4}$	$T_g$ : 300 K		

#### Paramètres du modèle asymptotique

La validation du modèle asymptotique est faite par comparaison à une solution de référence, calculée à l'aide du modèle complet appliqué à l'ensemble de l'espace inter-électrodes et convergée en maillage. Par la suite, les simulations obtenues à l'aide du modèle asymptotique auront leur légende préfixée par (A.), tandis que le préfixe (C.) dénotera la solution de référence.

Le modèle asymptotique est ici mis en oeuvre pour simuler la décharge dans une petite zone autour de l'électrode intérieure. La taille de cette zone varie selon les simulations et est prise comme l'épaisseur de la couche d'ionisation, multipliée par un facteur  $k_\varepsilon$ . Rappelons que le ratio de cette épaisseur sur une longueur caractéristique du dispositif  $L$  est noté  $\varepsilon$  et est défini par :

$$\varepsilon = \frac{\varphi_g}{LE_i},$$

où  $E_i$  est l'intensité de champ nécessaire pour le déclenchement de l'ionisation du gaz. Pour l'air,  $E_i$  est pris égal à  $240 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}$  et  $L$  est pris égal à  $r_c = 1 \text{ mm}$ . Par conséquent, le paramètre  $\varepsilon$  vaut pour cette configuration  $\varepsilon = 0,167$ .

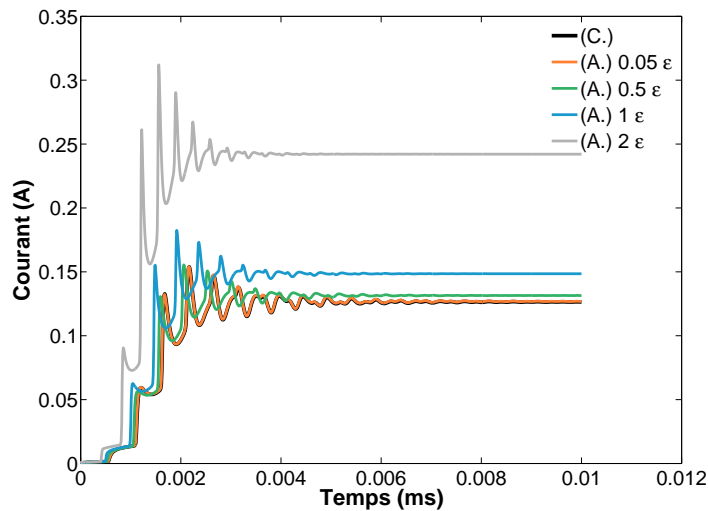
À un facteur  $k_\varepsilon$  donné, il est possible d'associer le rayon de l'électrode virtuelle  $r_\varepsilon$  correspondant. Ce rayon peut être exprimé comme un multiple du rayon de l'électrode intérieure  $r_a$ , c'est à dire  $r_\varepsilon = k_a r_a$ , et nous avons ainsi  $k_a r_a = k_\varepsilon L \varepsilon + r_a$ . Le tableau 5.2 donne les différentes valeurs de  $k_\varepsilon$  considérées dans cette section et indique le facteur  $k_a$  correspondant, ainsi que la valeur du rayon  $r_\varepsilon$ .

**Tableau 5.2** Facteur  $k_\varepsilon$  devant l'épaisseur de la couche d'ionisation, facteur  $k_a$  et rayon de l'électrode virtuelle correspondants

$k_\varepsilon$	2	1	0,5	0,05
$k_a$	2,67	1,83	1,42	1,04
$r_\varepsilon$ (mm)	0,534	0,366	0,284	0,208

### Courant électrique

Les courants de décharge obtenus pour ces différentes valeurs de  $k_\varepsilon$  et pour le modèle de référence sont représentés figure 5.5. Dans chacun des cas le courant est tout d'abord constitué de palier successifs, introduisant des oscillations d'amplitude croissante. Au bout d'un certain temps, le courant oscille autour de sa position d'équilibre et l'amplitude des oscillations décroît, jusqu'à converger vers un courant moyen.



**Figure 5.5** Fil-Cylindre : Courant électrique induit par la décharge en fonction du temps

Le modèle de référence prédit un courant stationnaire de  $126,5 \text{ mA m}^{-1}$ . Une résolution quasi-analytique des équations 1D stationnaires pour cette configuration fil-cylindre donne un courant électrique de  $120,6 \text{ mA m}^{-1}$  (voir annexe B), soit une différence d'environ 5% avec le modèle de référence. L'utilisation du modèle asymptotique amène à surestimer le courant de décharge et induit une erreur sur le courant de plus en plus importante avec l'augmentation

de  $k_\varepsilon$ . Pour  $k_\varepsilon = 2$ , le courant stationnaire prédit est de  $242,1 \text{ mA m}^{-1}$ , soit une erreur de 91% avec la solution de référence. Dans ce cas, le modèle asymptotique est cependant utilisé pour simuler le plasma sur presque la moitié de l'espace inter-électrode et les hypothèses de champ fort ne sont plus valides. En considérant des valeurs de  $k_\varepsilon$  plus faible, l'erreur décroît rapidement et la décharge est bien mieux approchée. Pour  $k_\varepsilon = 1$ , le courant obtenu est de  $148,5 \text{ mA m}^{-1}$ , soit une erreur de 17,5%. Cette erreur descend à 4% pour  $k_\varepsilon = 0.5$  et 0.5% pour  $k_\varepsilon = 0.05$ .

La fréquence des oscillations est directement liée au temps de dérive des ions positifs dans l'espace inter-électrodes. Les électrons initialement présents se multiplient à proximité de l'anode par le mécanisme d'avalanche électronique et laissent derrière eux les ions positifs, qui dérivent alors en direction de la cathode. En l'atteignant, ces ions contribuent au mécanisme d'émission secondaire et augmentent le nombre d'électrons présents dans le système. Ces électrons parcourent la distance inter-électrodes très rapidement et déclenchent une nouvelle vague d'ionisation près de l'anode. Les mêmes mécanismes se répètent alors jusqu'à ce que la décharge atteigne son état d'équilibre.

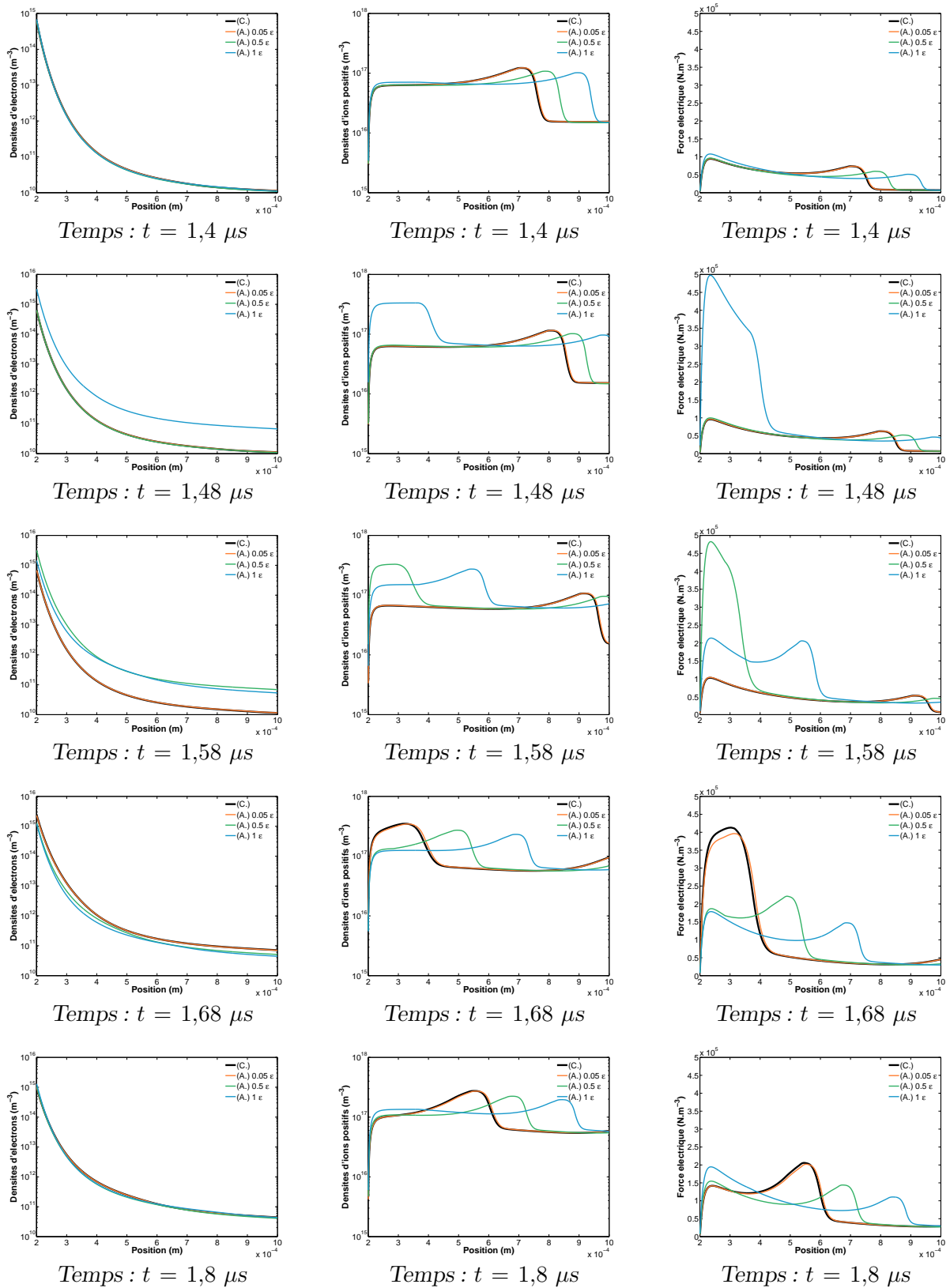
Du fait de l'hypothèse de quasi-stationnarité faite pour le modèle asymptotique, les espèces chargées réagissent instantanément aux changements provenant du reste du domaine. Lorsqu'une nouvelle vague d'électrons produite par émission secondaire arrive à la frontière raccordant les modèles, le niveau de densité des ions et des électrons s'adaptent immédiatement et la vague d'ions positifs induite par le flux d'électron est produite directement au niveau de la frontière de raccord. Le modèle asymptotique se comporte alors exactement comme une électrode virtuelle de rayon  $r_\varepsilon$  suivant une certaine loi d'émission secondaire pour les ions positifs. Il en résulte finalement une diminution de l'espace devant être parcouru par ces ions avant d'atteindre la cathode et donc une diminution de la fréquence des pulses de courant, dépendant directement de la valeur de  $r_\varepsilon$ .

### Étude d'une oscillation de courant

L'évolution de la densité des particules chargées et de la force électrique au cours d'une oscillation de courant est reproduite figure 5.6. Le cas  $k_\varepsilon = 2$  n'est pas représenté, car la solution est alors trop déphasée par rapport à la solution de référence. Les observations faites ci-après restent cependant applicables pour des temps différents que ceux représentés.

- Au temps  $t = 1,4 \mu\text{s}$ , la vague d'ions positifs provenant de l'anode n'a pas encore atteint la cathode. Les profils de la densité d'ions positifs et de la force électrique sont légèrement décalés par rapport à la solution de référence, mais présentent une distribution en espace similaire. Les électrons ont atteint un état d'équilibre temporaire et leur distribution dans l'espace est identique pour chacun des modèles.
- Au temps  $t = 1,48 \mu\text{s}$ , la vague d'ions positifs a atteint la cathode pour  $k_\varepsilon = 1$  uniquement. Du fait de l'émission secondaire et de la forte mobilité des électrons, le niveau de densité électronique a augmenté dans l'ensemble du système, déclenchant une nouvelle onde d'ionisation à proximité de l'anode. Comme expliqué dans le paragraphe précédent, l'hypothèse de quasi-stationnarité amène le modèle asymptotique à s'ajuster immédiatement au nouveau flux d'électrons et la nouvelle vague d'ions positifs est produite directement en  $x = r_\varepsilon$  au lieu de  $x = r_a$ .
- Au temps  $t = 1,58 \mu\text{s}$ , la vague d'ions positifs a également atteint la cathode pour  $k_\varepsilon = 0.5$  et a déclenché une nouvelle vague d'ionisation de la même manière que pour  $k_\varepsilon = 1$  au

### 5.3. Étude de l'influence du modèle asymptotique sur une configuration fil-cylindre



**Figure 5.6** Fil-Cylindre : Évolution de la densité des électrons (gauche), des ions positifs (centre) et de la force électrique (droite) au cours d'une oscillation de courant

temps précédent. Les profils obtenus pour ces deux cas sont similaires. Puisque le rayon  $r_\varepsilon$  décroît avec  $k_\varepsilon$ , la nouvelle vague d'ions positifs s'étend sur une zone moins importante pour  $k_\varepsilon = 0.5$  que pour  $k_\varepsilon = 1$ .

- Au temps  $t = 1,68 \mu\text{s}$ , la vague d'ions positifs du modèle de référence a atteint la cathode à son tour. Avant d'arriver à ce temps, une force maximale de  $5,3 \times 10^5 \text{ N.m}^{-3}$  a été atteinte pour la solution de référence, contre un maximum d'environ  $5 \times 10^5 \text{ N.m}^{-3}$  pour le modèle asymptotique avec  $k_\varepsilon$  égal à 0.5 ou 1.
- Au temps  $t = 1,8 \mu\text{s}$ , la vague d'ions positifs a progressée dans l'espace inter-électrodes. Les ions positifs et la force électrique ont alors des profils similaires les uns par rapport aux autres, avec un décalage un peu plus important qu'auparavant. Les électrons ont retrouvés un état d'équilibre temporaire, similaire pour tous les modèles.

La dynamique de la décharge est donc correctement reproduite par le modèle asymptotique, bien que légèrement accélérée. La force électrique est surestimée pendant une brève période de temps après que les ions ont atteint la cathode et déclenché une nouvelle onde d'ionisation, car elle est alors appliquée sur une plus grande part de l'espace inter-électrode. Cet écart disparaît cependant rapidement avec la progression des ions vers la cathode.

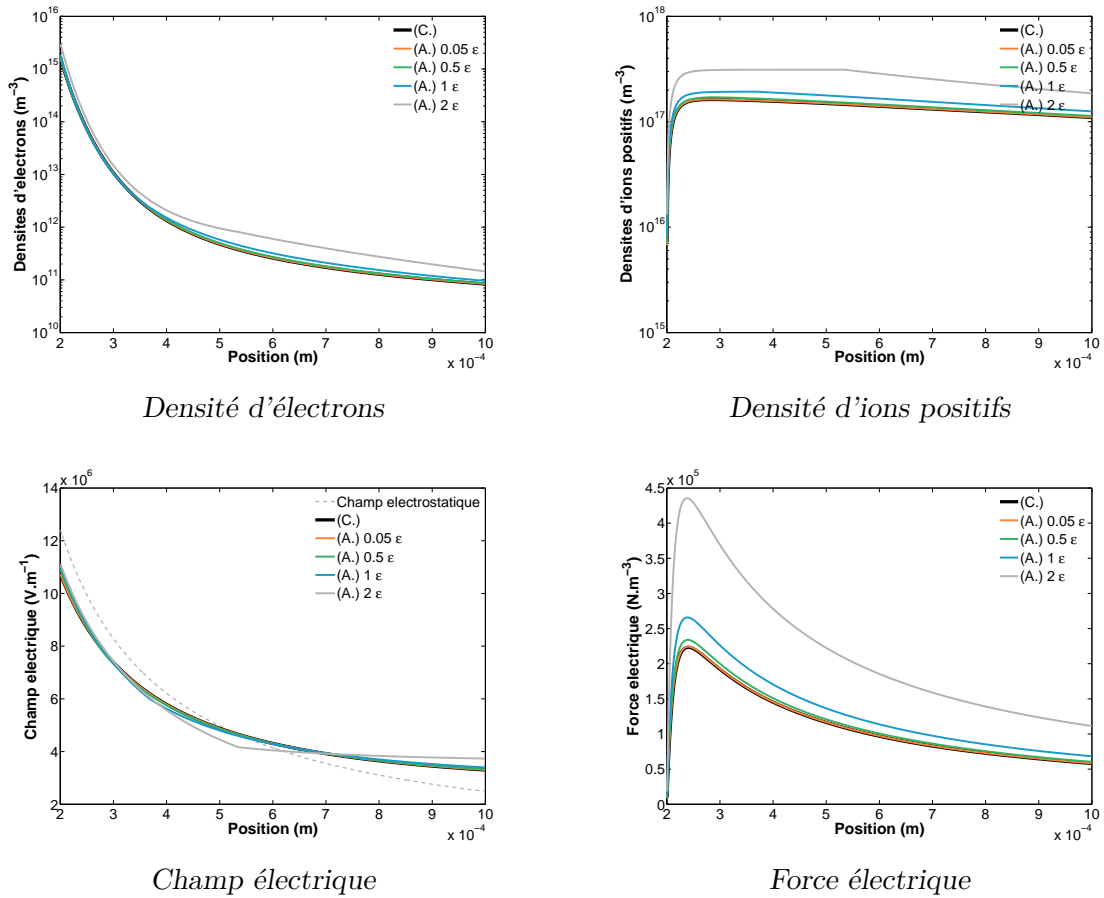
### État stationnaire de la décharge

Les profils de densités, ainsi que le champ et la force électriques au temps  $t = 10 \mu\text{s}$  sont représentés figure 5.7. À ce temps, la décharge a atteint un état stationnaire et l'influence de l'hypothèse supposant un champ électrostatique près de l'électrode est mise en évidence. Une erreur relativement importante est observée pour  $k_\varepsilon = 2$ . Le champ électrique n'est pas correctement approché, notamment autour de la frontière de raccord entre les domaines. Bien que la différence avec la solution de référence n'excède pas la 5% à proximité de l'anode, l'écart observé est beaucoup plus important sur les densités et la force. Ceci peut être expliqué par le caractère fortement non-linéaire de la décharge. Le champ électrique étant surestimé au niveau de l'anode, l'ionisation est plus intense et produit plus d'ions positifs et d'électrons. En rejoignant la cathode, ces ions positifs participent à l'émission secondaire et augmentent plus encore le niveau d'électrons dans le système, qui contribuent à leur tour au processus d'ionisation. Ainsi une erreur peu importante sur le champ électrique peut amener à une erreur importante sur les densités et sur la force électrique. Comme pour le courant de décharge, cette erreur décroît néanmoins très rapidement avec  $k_\varepsilon$ . L'erreur sur la force est à peu près la même que celle sur le courant, à savoir environ 17-18% pour  $k_\varepsilon = 1$ , 4-5% pour  $k_\varepsilon = 0.5$  et moins de 0,5% pour  $k_\varepsilon = 0.05$ .

### Comparaison des temps de calcul

Le ratio du temps de calcul obtenu avec le modèle asymptotique sur celui obtenu avec le modèle classique est reporté figure 5.8 pour différentes valeurs de  $k_\varepsilon$ . L'utilisation du modèle asymptotique permet une diminution du temps de calcul d'un facteur compris entre 2 et 3 pour  $k_\varepsilon$  compris entre 0.5 et 1. Une valeur de  $k_\varepsilon$  plus importante ne semble pas permettre une diminution supplémentaire du temps de calcul.

Le gain obtenu pour cette configuration est donc relativement faible. Ceci s'explique par l'allure du champ électrique généré par le dispositif. Celui-ci n'est pas particulièrement raide et décroît assez lentement en s'éloignant de l'anode. L'augmentation du gain en temps de calcul avec le paramètre  $k_\varepsilon$  est donc plus lente. L'intensité maximale du champ électrique est



**Figure 5.7** Fil-Cylindre : Densités des espèces chargées, champ et force électriques à l'état stationnaire ( $t = 10 \mu s$ )

également peu différente de l'intensité moyenne dans la zone inter-électrodes, ce qui limite assez fortement le gain maximal pouvant être obtenu à l'aide du modèle asymptotique. En s'éloignant de l'anode, très rapidement le champ électrique et la taille des mailles ne varient plus et aucun gain sur la condition CFL n'est obtenu.

### Bilan sur la configuration fil-cylindre

L'étude de la configuration fil-cylindre, où seule l'ionisation est considérée, a permis de mettre en évidence l'influence du modèle asymptotique sur le développement de la décharge et de valider son utilisation. La capacité du modèle a approcher correctement le développement et l'état stationnaire de la décharge a été démontré, de même que sa convergence vers la solution de référence lorsque  $k_\varepsilon$  tends vers 0. La diminution du temps de calcul obtenue pour cette configuration reste cependant assez faible et un gain beaucoup plus important est attendu lors de la simulation de dispositifs plus réalistes. La simulation d'une telle configuration est l'objet de la section suivante, où nous considérons un actionneur fil-fil.

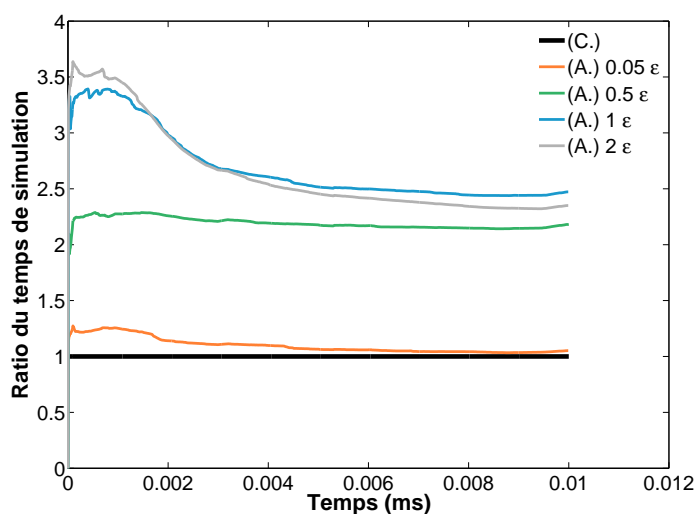


Figure 5.8 Fil-Cylindre : Ratio des temps de calcul du modèle asymptotique sur celui du modèle de référence

## 5.4 Application du modèle asymptotique à la simulation 1D d'une décharge fil-fil expérimentale

### Paramètres physiques et numériques

Les caractéristiques du dispositif fil-fil (figure 5.1) étudié dans cette section et les paramètres de simulation sont résumés dans le tableau 5.3. Ce dispositif est composé de deux fils parallèles d'une longueur  $L_{elec}$  de 20 cm et dont les centres sont séparés par une distance  $L$  de 1 cm. La première électrode, de rayon  $r_a$  égal à 0.1 mm, est reliée à un générateur délivrant une tension continue  $\varphi_g$  de 13 kV mis en parallèle avec une résistance  $R$  de 10 k $\Omega$ . La seconde électrode a un rayon  $r_c$  égal à 1 mm et est reliée à la masse. Son coefficient d'émission secondaire  $\gamma$  est fixé à  $10^{-4}$ . La décharge se développe en absence d'écoulement externe dans des conditions normales de température et de pression.

Cette configuration, déjà présentée dans le chapitre 3, a été étudiée expérimentalement et simulée numériquement par Bérard *et al.* [6]. La cinétique chimique utilisée pour leur simulation tient compte de l'ionisation, de l'attachement électronique et de la recombinaison des électrons et des ions négatifs. Dans cette section, les réactions de recombinaison ne sont pas considérées. Les coefficients de la cinétique chimique pour les autres réactions sont cependant pris égaux à ceux choisis par Bérard *et al.* lorsque c'est possible. La mobilité électronique est notamment calculée à partir de l'intensité du champ électrique  $|\mathbf{E}|$  par la formule donnée par Chen et Davidson [7], à savoir :

$$\mu_e = 1,2365 |\mathbf{E}|^{-0,2165} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

Les mobilités ioniques sont indépendantes du champ électrique et valent  $2.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$  pour les ions positifs et  $2.7 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$  pour les ions négatifs. Les coefficients de réaction  $\alpha$  et  $\eta$  pour l'ionisation et pour l'attachement électronique sont toujours calculés à l'aide du code BOLSIG.



Sauf mention contraire, la discrétisation de l'espace inter-électrodes est à nouveau constituée de 400 mailles obtenues à l'aide de la fonction de raffinement  $f_1$ , avec le paramètre  $K_m$  pris égal à 8 et une taille de maille minimale  $\Delta x_{min}$  fixée à 1  $\mu\text{m}$ . Le niveau initial et le fond minimal de densité des particules chargées sont tous deux fixés à  $10^9 \text{ m}^{-3}$  et l'épaisseur maximale du plasma  $S_{max}$  est fixée à 0.25 cm.

**Tableau 5.3** Caractéristiques du dispositif fil-fil et paramètres de la simulation

$r_a$ : 0,1 mm	$\varphi_g$ : 13 kV	$P_0$ : 1 bar	$l_x$ : 400
$r_c$ : 1 mm	$R$ : 10 k $\Omega$	$T_g$ : 300 K	$\Delta x_{min}$ : 1 $\mu\text{m}$
$L$ : 10 mm	$\gamma$ : $10^{-4}$	$n_{init}$ : $10^9 \text{ m}^{-3}$	$S_{max}$ : 0,25 cm
$L_{elec}$ : 20 cm	$\mathbf{u}_0$ : 0 m.s $^{-1}$	$n_{min}$ : $10^9 \text{ m}^{-3}$	

### Paramètres du modèle asymptotique

La solution de référence utilisée pour le modèle est la solution obtenue à l'aide du modèle complet pour le maillage décrit ci-dessus. Comme dans la section précédente, les simulations obtenues à l'aide du modèle asymptotique ont leur légende préfixée par (A.) et celles obtenues avec le modèle de référence ont leur légende préfixée par (C.).

La taille du domaine où est appliqué le modèle asymptotique est calculée comme précédemment. La distance inter-électrodes est prise comme longueur caractéristique du système et le paramètre  $\varepsilon$  vaut maintenant  $\varepsilon = 0,05417$ . Le modèle asymptotique est ici appliqué à la fois à l'anode et à la cathode. De manière analogue à la section précédente, nous associons à chaque valeur de  $k_\varepsilon$  un facteur  $k_a$  et un facteur  $k_c$  tels que :

$$r_{\varepsilon,a} = k_a r_a = k_\varepsilon L \varepsilon + r_a \quad \text{et} \quad r_{\varepsilon,c} = k_c r_c = k_\varepsilon L \varepsilon + r_c.$$

Le tableau 5.4 donne les différentes valeurs de  $k_\varepsilon$  étudiées dans cette section et indique le facteur  $k_a$  et  $k_c$  correspondant, ainsi que la valeur des rayons  $r_{\varepsilon,a}$  et  $r_{\varepsilon,c}$ .

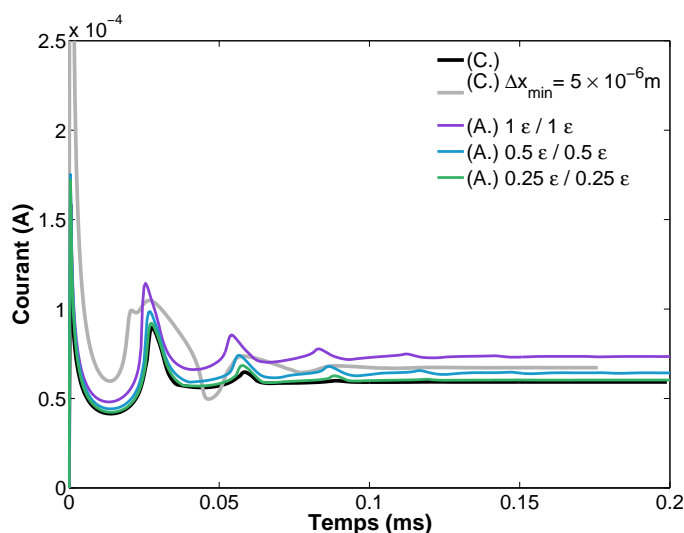
**Tableau 5.4** Facteur  $k_\varepsilon$  devant l'épaisseur de la couche d'ionisation, facteurs  $k_a$ ,  $k_c$  et rayons de l'électrode virtuelle correspondants

$k_\varepsilon$	1	0,5	0,25
$k_a$	6,42	3,71	2,35
$r_{\varepsilon,a}$ (mm)	0,642	0,371	0,235
$k_c$	1,54	1,27	1,135
$r_{\varepsilon,c}$ (mm)	1,54	1,27	1,135

### Courant électrique

L'évolution de la décharge électrique générée par ce dispositif fil-fil a été simulée à l'aide du modèle complet pour le maillage présenté précédemment et pour un maillage légèrement moins raffiné, ainsi qu'avec le modèle asymptotique pour les différentes valeurs de  $k_\varepsilon$  données ci-dessus. Le courant électrique en fonction du temps est représenté pour chacun des modèles figure 5.9. Notons en premier lieu que l'utilisation d'un maillage légèrement plus grossier

pour le modèle de référence donne un courant très différent lors du développement de la décharge. Le voisinage immédiat de l'anode est en fait décrit par un nombre insuffisant de mailles et les phénomènes dans cette zone ne sont pas correctement résolus. La production d'espèces chargées au déclenchement de la décharge est notamment fortement surestimée, ce qui provoque l'effondrement du champ électrique. Après un certain temps, les ions provoquant cet écrantage sont évacués à l'anode et la décharge tend vers un état stationnaire. Le courant obtenu reste cependant surestimé par rapport à la solution de référence.



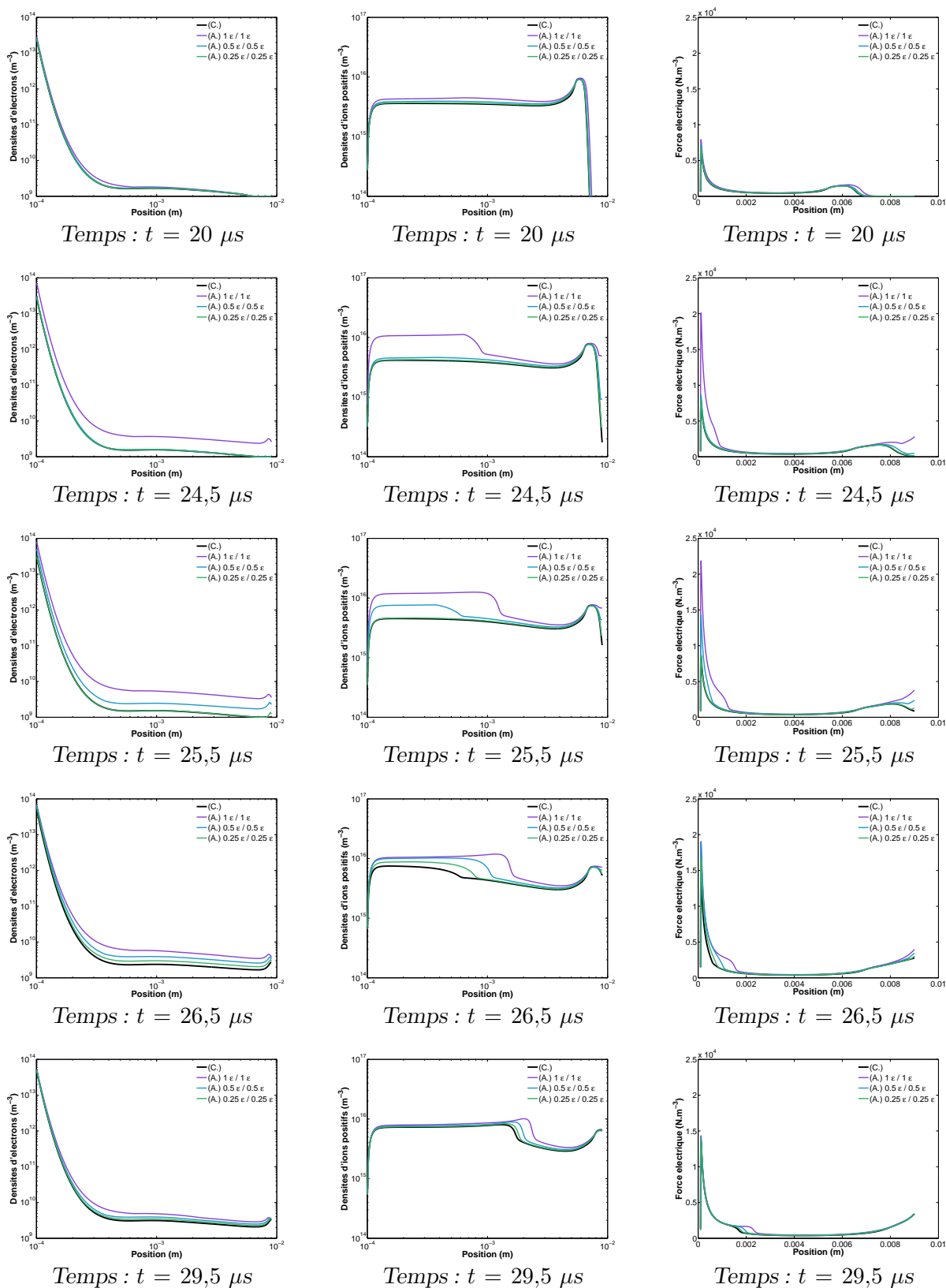
**Figure 5.9** Fil-Fil : Courant électrique induit par la décharge en fonction du temps

Pour les autres simulations, le courant présente plusieurs oscillations – signes de la mise en place de la décharge – qui s’amortissent avec le temps pour tendre vers un état stationnaire. La solution de référence donne un courant de  $59,35 \mu\text{A}$ . En comparaison, le modèle asymptotique prédit un courant de  $73,5 \mu\text{A}$  pour  $k_\varepsilon = 1$ ,  $64,3 \mu\text{A}$  pour  $k_\varepsilon = 0,5$  et  $60,3 \mu\text{A}$  pour  $k_\varepsilon = 0,25$ , soit une erreur respective de 24, 8,5 et 1,8% par rapport à la solution de référence. Comme pour le dispositif fil-cylindre, le modèle asymptotique augmente légèrement la fréquence des oscillations.

Pour une épaisseur plasma de 0.25 cm, le modèle stationnaire approché développé dans le chapitre 3 prédisait pour la même configuration un courant d’environ  $400 \mu\text{A m}^{-1}$ , soit aux alentours de  $80 \mu\text{A}$  une fois multiplié par la longueur des électrodes. Les résultats obtenus ici sont donc très proches, la différence provenant d’un choix différent pour le coefficient de mobilité électronique – auparavant calculée par le code BOLSIG – et du coefficient d’attachement électronique, qui ne dépendait que du champ électrostatique. Les mesures expérimentales effectuées par Bérard *et al.* donnaient quant à elle un courant d’environ  $700 \mu\text{A m}^{-1}$ , soit  $140 \mu\text{A}$ . Les courants simulés ici sont donc du bon ordre de grandeur, bien qu’entre deux et trois fois plus faible. À l’instar du modèle stationnaire, ces courants dépendent assez fortement du choix de  $S_{max}$  et un léger ajustement de ce paramètre permet de retrouver les valeurs de courant expérimentales.

### Étude d’une oscillation de courant

Comme le montre la figure 5.10, l’évolution de la décharge au cours du temps est à nouveau bien reproduite par le modèle asymptotique, avec un léger décalage dans le temps dû à l’hypothèse



**Figure 5.10** Fil-Fil : Évolution de la densité des électrons (gauche), des ions positifs (centre) et de la force électrique (droite) au cours d'une oscillation de courant

de stationnarité, comme dans le cas de la configuration fil-cylindre. Les observations faites pour ce dispositif dans la section précédente sont s'appliquent également à la configuration fil-fil.

### État stationnaire de la décharge

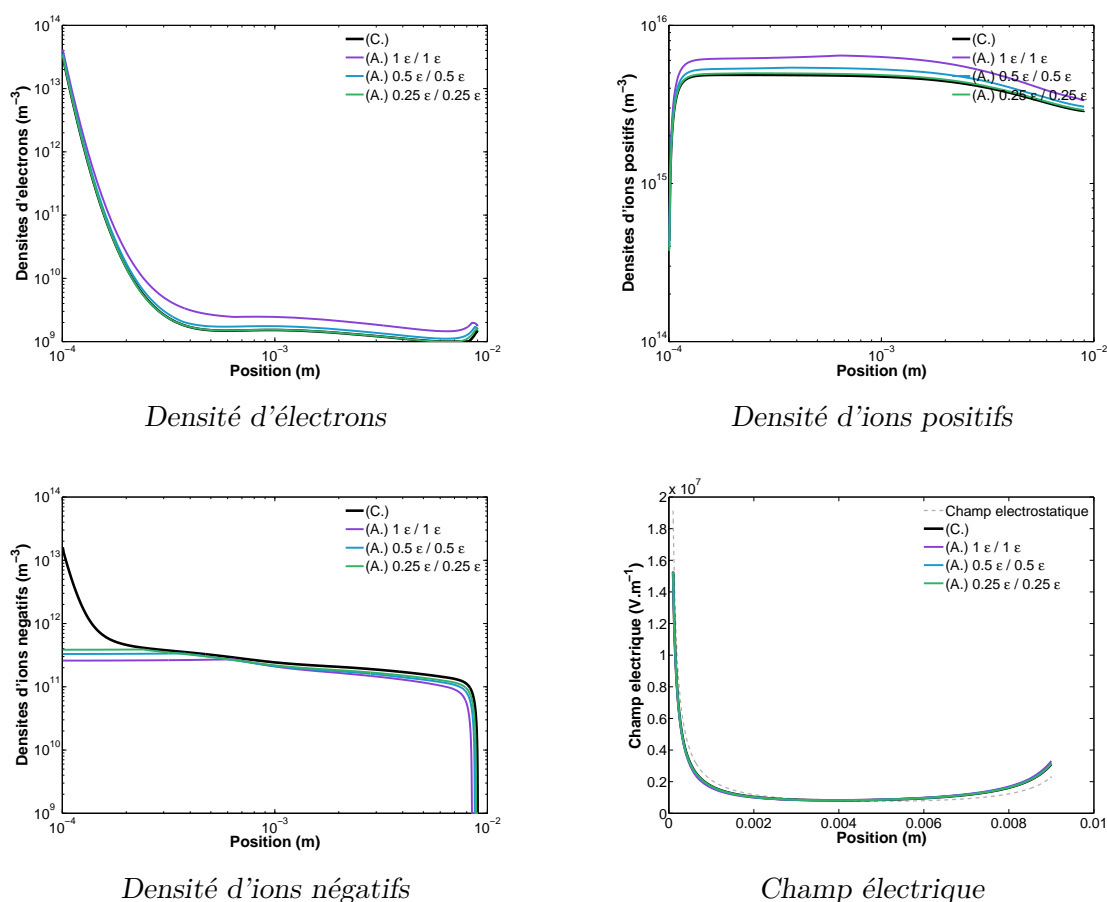
Comme pour la configuration fil-cylindre, l'évolution de la décharge au cours du temps est correctement reproduite par le modèle asymptotique. Au temps  $t = 0,2$  ms, les oscillations ont été presque complètement amorties et la décharge a atteint son état stationnaire. Les niveaux de densité des différentes espèces chargées et le champ électrique sont représentées figure 5.11. Les niveaux de densités et leur distribution spatiale sont globalement bien reproduits par le modèle asymptotique. Quelques différences notables, directement liées aux hypothèses faites lors de la construction du modèle, apparaissent néanmoins.

Puisque l'attachement électronique n'est pas pris en compte par celui-ci, il n'y a aucune production d'ions négatifs à proximité des électrodes. Leur niveau de densité est donc à peu près constant dans les zones décrites par le modèle asymptotique. Dans le cadre des décharges couronnes positives étudiées ici, la densité d'ions positifs est de plusieurs ordres de grandeurs supérieure à celle des ions négatifs. L'erreur induite par le modèle asymptotique sur la densité de ces derniers n'influe pas de manière significative sur le développement de la décharge ni sur la force électrique obtenue, qui est alors principalement engendrée par les ions positifs. La question du comportement du modèle dans le cadre de décharge couronnes négatives se pose alors. La force à proximité de l'électrode stressée serait alors engendrée par les ions négatifs et les négliger induirait une erreur importante. Le cas échéant, il serait intéressant de pouvoir conserver la réaction d'attachement dans le modèle.

Concernant la densité électronique, celle-ci est également légèrement surestimée à proximité de la cathode. Ceci est dû à la fois à une émission secondaire plus importante (engendrée entre autre par la présence d'un plus grand nombre d'ions positifs) et à l'absence d'attachement électronique, cette réaction contribuant normalement à faire disparaître une partie des électrons.

Pour cette configuration, la charge d'espace induite par la présence de particules chargées n'est pas suffisamment importante pour modifier significativement le champ électrostatique. Son intensité a cependant diminué à proximité de l'anode et augmenté à proximité de la cathode. Elle est passée de 19 à 15 MV m<sup>-1</sup> à la surface de l'anode et de 20,2 à 21,2 MV m<sup>-1</sup> à la surface de la cathode. Bien que la présence de particules chargées ne soit pas directement prise en compte par le modèle asymptotique pour le calcul du champ électrique, le comportement décrit ci-dessus est correctement reproduit par celui-ci. Le champ électrique à proximité de la cathode prédit par le modèle asymptotique est plus intense que celui prédit par le modèle classique au niveau de la cathode. Cette différence est faible (moins de 6% pour  $k_\varepsilon = 1$ ) et provient probablement du fait que le champ électrique varie relativement lentement dans cette région. L'erreur induite par l'approximation du champ électrique est donc plus importante.

Rappelons que l'objet de ces simulations est d'obtenir une estimation de la force exercée par la dérive des particules chargées dans le champ électrique. Celle-ci, représentée figure 5.12, laisse apparaître deux zones distinctes. De la surface de l'anode jusqu'à environ 1 mm de celle-ci, une force particulièrement intense est produite. Son intensité est supérieure à 2 kN et peut atteindre un maximum allant de 9 à 11,5 kN m<sup>-3</sup> selon le modèle utilisé. Dans le reste du domaine, la décharge exerce une force comprise entre 1 et 2 kN m<sup>-3</sup>. Bien que cette force soit plus faible, elle est exercée sur la majeure partie de l'espace inter-électrodes et est



**Figure 5.11** Fil-Fil : Densités des espèces chargées et champ électrique à l'état stationnaire ( $t = 0,2$  ms)

donc tout aussi importante que la force exercée à proximité de l'anode. L'erreur engendrée par l'utilisation du modèle asymptotique sur le calcul de la force est équivalente à celle observée pour le courant électrique, soit environ 23% pour  $k_\epsilon = 1$ , 8% pour  $k = 0,5$  et moins de 1,7% pour  $k_\epsilon = 0,25$ .

### Comparaison des temps de calcul

Contrairement à la configuration fil-cylindre, pour laquelle une faible diminution du temps de calcul avait été obtenue, la comparaison des temps de simulation est cette fois nettement en faveur du modèle asymptotique (figure 5.13). Ceci s'explique par la singularité du champ électrique à proximité des électrodes, et plus particulièrement au voisinage de l'anode. La forte diminution du champ électrique sur de très courtes distances autorise alors un gain important au niveau de la condition CFL pour des choix d'épaisseur d'ionisation relativement faible. Pour une valeur de  $k_\epsilon$  égale à 0.25, un gain d'un ordre de grandeur est obtenu (pour, rappelons-le, erreur de moins de 2%). Le choix d'une valeur plus élevée pour ce paramètre amène à une diminution plus importante du temps de calcul, autorisant jusqu'à plus d'un facteur 50 pour  $k_\epsilon = 1$ .

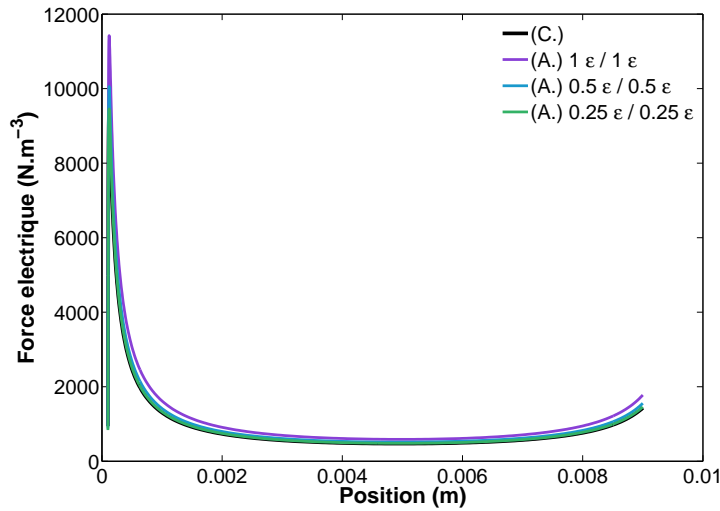


Figure 5.12 Fil-Fil : Force électrique à l'état stationnaire ( $t = 0,2$  ms)

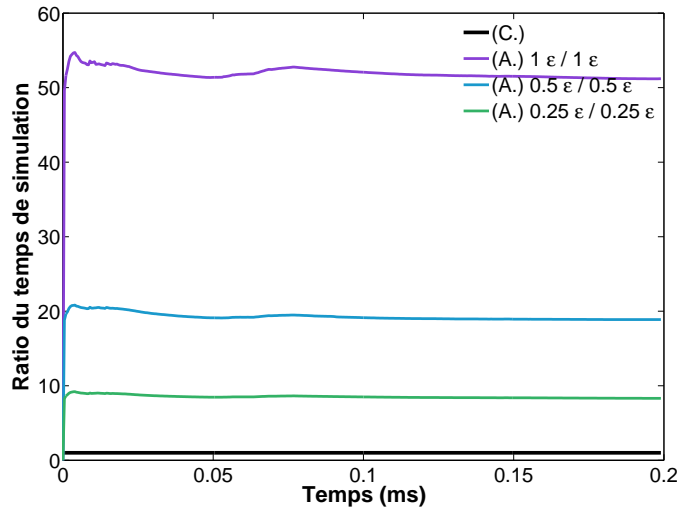


Figure 5.13 Fil-Fil : Ratio des temps de calcul du modèle asymptotique sur celui du modèle de référence

## 5.5 Synthèse

Cette première implémentation du modèle asymptotique en dimension 1 a permis de mettre en évidence l'influence du modèle asymptotique sur la simulation de décharges filaires positives. Malgré une tendance à surestimer l'efficacité de l'émission secondaire et des processus d'ionisation, le modèle rend correctement compte de l'évolution de ces décharges et prédit une force électrique en bon accord avec celle obtenue à l'aide d'un schéma aux volumes finis classique.

La diminution du temps de calcul apportée par l'utilisation du modèle asymptotique dépend fortement du champ électrostatique généré par le dispositif. En présence d'un champ assez singulier, le modèle a permis un gain sur le temps de simulation d'un facteur compris entre 10 et 50. Sur un processeur cadencé à 2,66 GHz, ceci permet de ramener des temps

de calcul de plusieurs jours à quelques heures seulement, ce au prix d'une erreur raisonnable et relativement prédictible.

Au vu de la diminution du temps de calcul apportée, le modèle asymptotique semble prometteur pour l'optimisation d'actionneur plasma basés sur des décharges couronnes. Son faible coût autorise un balayage rapide de paramètres – tel que les rayons des électrodes ou la résistance du circuit par exemple – et permet donc de dégager des tendances globales sur le comportement de la décharge. Son domaine de validité reste cependant limité aux décharges ne présentant pas de charge d'espace suffisamment importante pour écranter le champ électrique.

Le chapitre suivant présente ainsi plusieurs objectifs : la validation du modèle asymptotique appliqué à des simulations 2D d'une part et l'étude du couplage entre le modèle 2D et le modèle 1D radial d'autre part, ce modèle ayant été développé avec pour objectif la prise en compte des effets de charge d'espace à proximité des électrodes.





## Chapitre 6

# Implémentation et étude des modèles d'électrode virtuelle en dimension 2

### Sommaire

---

<b>6.1. Implémentation 2D des modèles d'électrodes virtuelles</b> .....	110
6.1.1. Description des dispositifs .....	110
6.1.2. Définition du domaine de calcul .....	110
6.1.3. Construction du maillage .....	111
6.1.4. Schémas de discrétisation .....	114
6.1.5. Conditions aux limites .....	120
6.1.6. Conditions de stabilité .....	121
<b>6.2. Étude des modèles d'électrodes virtuelles sur une configuration fil-cylindre</b> ...	122
6.2.1. Validation du modèle asymptotique .....	122
6.2.2. Validation du modèle radial .....	125
6.2.3. Comparaisons des temps de calcul .....	128
6.2.4. Bilan sur l'étude de la configuration fil-cylindre .....	129
<b>6.3. Étude des modèles d'électrodes virtuelles sur un premier actionneur</b>	
<b>fil-fil : dispositif de Bérard et al.</b> .....	132
6.3.1. Validation du modèle asymptotique .....	133
6.3.2. Validation du modèle radial .....	136
6.3.3. Comparaison des temps de calcul .....	143
6.3.4. Bilan sur la première configuration fil-fil .....	143
<b>6.4. Étude des modèles d'électrodes virtuelles sur un second actionneur fil-fil</b> .....	146
6.4.1. Courant électrique .....	147
6.4.2. État stationnaire de la décharge .....	150
6.4.3. Étude du régime de pulses périodiques .....	154
6.4.4. Comparaison des temps de calcul .....	154
6.4.5. Bilan sur la seconde configuration fil-fil .....	160
<b>6.5. Synthèse</b> .....	160

---

Les premiers résultats obtenus pour le modèle asymptotique en dimension 1 d'espace se sont montrés prometteurs et ont permis caractériser l'influence du modèle sur le développement du plasma. Le plus souvent, les décharges électriques n'évoluent cependant pas selon une unique

dimension : une description 2D est nécessaire pour s'affranchir du paramètre qu'est l'épaisseur plasma et ainsi pouvoir simuler plus finement leur développement.

L'objectif de ce chapitre est donc de vérifier la validité des modèles d'électrode virtuelle en dimension 2 d'espace et de quantifier leur apport en terme de diminution du temps de calcul. Après avoir décrit l'implémentation et le couplage des différents schémas de discrétisation, trois configurations sont étudiées. Les deux premières sont les configurations fil-fil et fil-cylindre déjà introduites dans le chapitre précédent. Leur étude a pour but de caractériser l'influence de chacune des hypothèses faites lors de la construction des modèles (charge d'espace négligée, champ électrique radial, etc). La dernière consiste en un second dispositif fil-fil, plus énergétique et présentant expérimentalement un régime de pulses périodiques. Son étude a quant à elle pour principal objectif la validation du modèle radial sur une configuration amenant à l'écrantage du champ électrique.

### 6.1 Implémentation 2D des modèles d'électrodes virtuelles

#### 6.1.1 Description des dispositifs

Les dispositifs étudiés dans ce chapitre sont les mêmes que ceux présentés dans le chapitre précédent (cf. figure 5.1). Ils sont tous deux constitués de deux électrodes de longueur  $L_{elec}$  reliées à un générateur délivrant une tension continue  $\varphi_g$  mis en série avec une résistance  $R$ . L'électrode stressée, de rayon  $r_a$  est ainsi portée à une tension effective  $\varphi_a$ , tandis que l'autre électrode, de rayon  $r_c$ , est reliée à la masse. Dans le cas d'une configuration fil-fil, les deux électrodes sont parallèles et leurs centres sont séparés par une distance  $L$ .

#### 6.1.2 Définition du domaine de calcul

Le domaine de calcul  $\Omega$  sur lequel l'évolution de la décharge est simulée est représenté figure 6.1 pour chacune des configurations étudiées. Dans le cas d'un dispositif fil-cylindre, le domaine  $\Omega$  est l'espace situé entre l'électrode intérieure et l'électrode extérieure. Du fait de l'invariance du système par rotation autour de l'axe des électrodes, la simulation sur l'ensemble du domaine est superflue. Nous choisissons par conséquent de simuler la décharge sur une partie réduite du domaine et nous définissons :

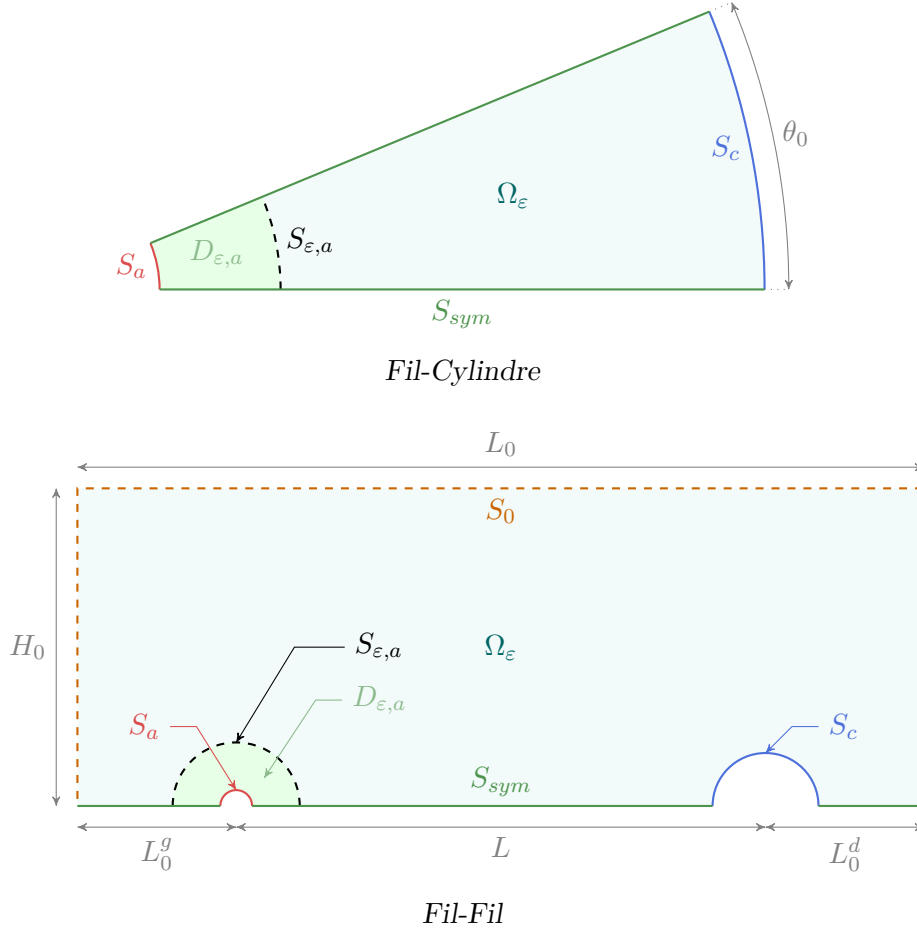
$$\Omega = \{x \in \Omega, 0 \leq \theta \leq \theta_0\},$$

où  $\theta$  est l'angle auquel se situe  $x$  en coordonnées polaire et où  $\theta_0$  est un paramètre compris entre 0 et  $2\pi$ .

Les dispositifs fil-fil constitués de deux électrodes plongées dans l'air possèdent quant à eux une invariance par rapport à l'axe des  $x$ . Pour limiter la taille du domaine à simuler, nous ne calculons l'évolution de la décharge que dans le demi-plan des  $y$  positifs, que nous bornons par une frontière  $S_0$ . La forme domaine est choisie rectangulaire de hauteur  $H_0$  et de longueur  $L_0$ . Le bord gauche du domaine se situe à une distance  $L_0^g$  du centre de l'anode et le bord droit se situe à une distance  $L_0^d$  du centre de la cathode.

Par la suite, la surface de l'anode et celle de la cathode sont respectivement notées  $S_a$  et  $S_c$ . L'ensemble des frontières de symétrie par rotation ou par inversion sont notées  $S_{sym}$  et, dans le cas d'un dispositif fil-fil, la frontière bornant la partie supérieure du domaine est notée  $S_0$ . Dans ce chapitre, les modèles d'électrode virtuelle sont uniquement utilisés pour décrire le

plasma dans un petit domaine situé au voisinage de l'anode, noté  $D_{\varepsilon,a}$ . Le reste du domaine, où le plasma est décrit à l'aide du modèle complet, est noté  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus D_{\varepsilon,a}$  et la frontière reliant les deux domaines est notée  $S_{\varepsilon,a}$ .



**Figure 6.1** Domaine de calcul pour la simulation 2D de décharges couronnées Fil-Cylindre et Fil-Fil

**Remarque.**

Afin de pouvoir prendre en compte la symétrie du dispositif lors de la résolution numérique des équations plasmas (pour le calcul du courant notamment), nous introduisons le facteur de symétrie  $L_{sym}$  valant 2 dans le cas d'un dispositif fil-fil et  $2\pi/\theta_0$  pour une configuration fil-cylindre. Le domaine où évolue la décharge est alors  $\Omega \times L_{elec} \times L_{sym}$ , où  $\Omega$  est le domaine de simulation.

### 6.1.3 Construction du maillage

#### Discrétisation du domaine $\Omega_\varepsilon$

La discrétisation du domaine  $\Omega_\varepsilon$  est faite à l'aide du mailleur TRIANGLE, développé par l'université de Carnegie Mellon [50, 51] permettant la construction de maillages 2D non-structurés composés d'éléments triangulaires. Cet outil permet entre autres de fixer une valeur

minimale pour les angles de chaque élément – valeur fixée ici à 28.5 degrés – ainsi que l'aire maximale  $A_{max}$  autorisée pour chacune des cellules.

Lors de la simulation de décharge électrique, le choix du maillage est tout aussi important que la méthode numérique ou que le modèle utilisés. En effet, ce maillage doit être suffisamment raffiné à proximité des électrodes pour pouvoir décrire correctement l'évolution du plasma. Le champ électrique est cependant de faible intensité dans la majeure partie de l'espace inter-électrodes et la cinétique chimique y est beaucoup moins active. Un maillage homogène est donc fortement pénalisant en matière de temps de calcul – surtout en présence de champ électrique singulier – et la construction d'un maillage adapté à la décharge est nécessaire. Pour cette raison, un critère de construction se basant sur l'intensité du champ électrostatique a été mis en place. Si cette intensité varie de plus d'un pourcentage  $\delta E_0$  entre deux éléments voisins, alors ceux-ci sont marqués comme devant être raffinés. Après avoir testé l'ensemble du maillage, des points de contrôles sont ajoutés au centre des trois faces de chaque cellule marquée et un nouveau maillage est généré. L'opération est ainsi répétée jusqu'à ce que le critère sur la variation du champ électrostatique soit satisfait par tous les éléments.

Pour résumer, nous disposons donc de deux critères pour la discrétisation du domaine  $\Omega_\varepsilon$ , qui sont l'aire maximale  $A_{max}$  d'une cellule et la variation de l'intensité du champ électrostatique autorisée entre deux cellules voisines  $\delta E_0$ . Deux exemples de maillages construits à l'aide de ces critères sont représentés figure 6.2. Pour le dispositif fil-fil, une variation  $\delta E_0$  de 6% est autorisée et aucune contrainte d'aire n'est imposée. Comme souhaité, le maillage est raffiné au voisinage des électrodes – en particulier autour de l'anode où le champ est singulier – et il est beaucoup plus lâche dans le reste du domaine. Pour le dispositif fil-cylindre, seule une aire maximale  $A_{max} = 50 \text{ pm}^2$  est imposée. Le maillage obtenu est donc homogène sur l'ensemble de l'espace inter-électrodes.

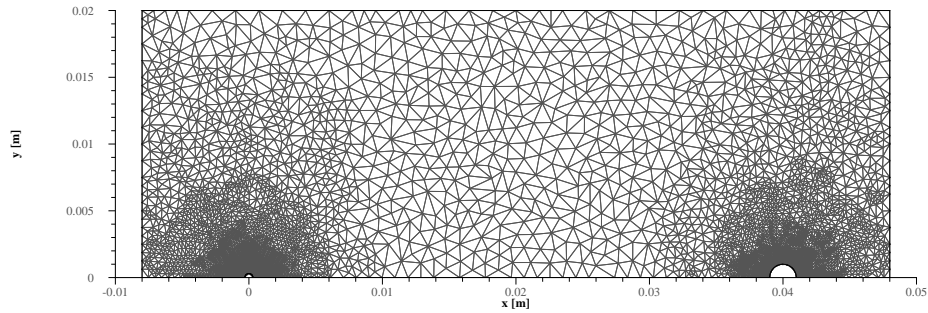
**Remarque.**

*Une fois le maillage généré, celui-ci est renuméroté, l'objectif étant de diminuer la largeur de bande de la matrice de Poisson en vue de la résolution du champ électrique. Cette renumérotation est faite par le biais d'un algorithme de type Cuthill-McKee inverse. Le lecteur intéressé par le détail de l'algorithme pourra se référer à [5].*

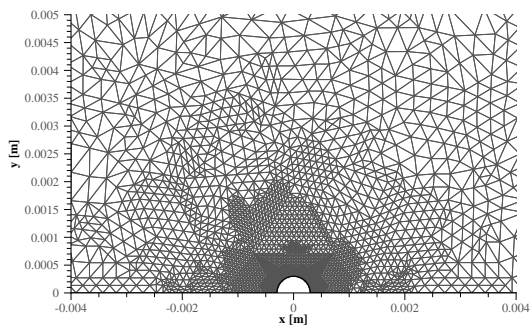
*En plus de cette renumérotation, diverses données sur le maillage sont assemblées. C'est en particulier le cas du maillage dual utilisé pour la reconstruction des flux numériques aux interfaces, comme nous le décrivons plus loin.*

**Discrétisation du domaine  $D_{\varepsilon,a}$**

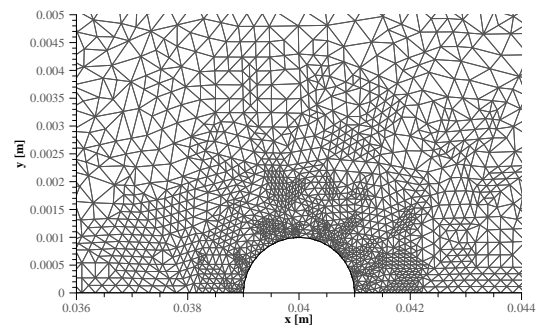
La discrétisation du domaine  $D_{\varepsilon,a}$  consiste quant à elle en un maillage structuré composé de quadrangles. Chaque noeud de la frontière  $S_{\varepsilon,a}$  est relié à l'électrode étudiée par le biais de  $l_r$  noeuds, distribués radialement par rapport au centre de ladite électrode. Notons que ces noeuds peuvent être soit espacés de manière régulière ou bien positionnés à l'aide des fonctions de raffinement  $f_1$  et  $f_2$  décrites dans la section 5.2.1 du chapitre 5 pour la construction du maillage en dimension 1. Pour un noeud de la frontière  $S_{\varepsilon,a}$  donné, celui-ci et l'ensemble des noeuds qui lui sont associés sont repérés à l'aide d'une numérotation locale allant de 1 à  $l_r + 1$ , le noeud à la surface de l'électrode étant indicé par 1 et celui de la frontière de raccord par  $l_r + 1$ .



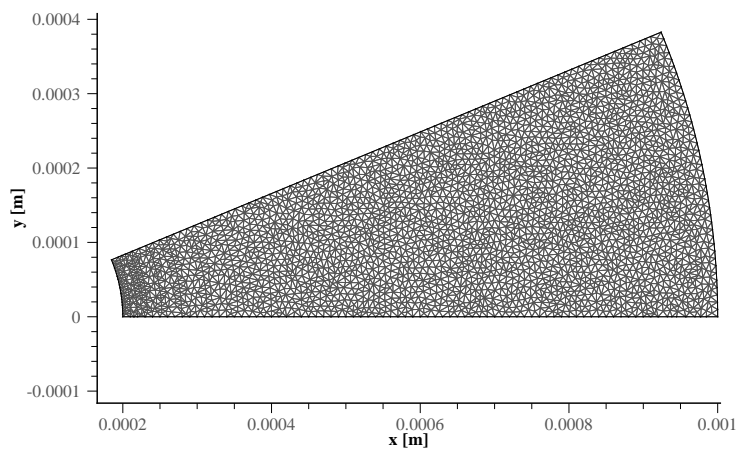
*Fil-Fil : maillage raffiné aux électrodes avec  $\delta E_0 = 6\%$*



*Fil-Fil : agrandissement de l'anode*



*Fil-Fil : agrandissement de la cathode*

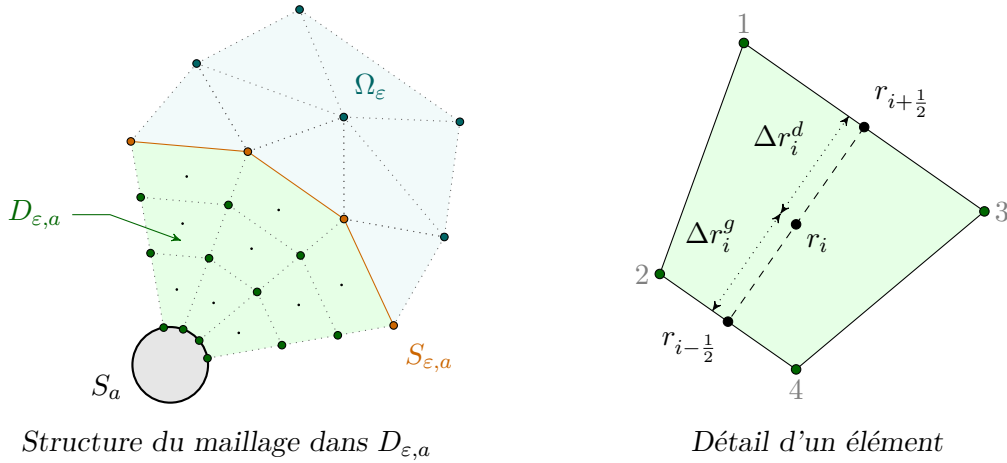


*Fil-Cylindre : maillage homogène*

**Figure 6.2** Exemples de maillages utilisés pour les simulations 2D : dispositif fil-fil (haut), détails à l'anode (gauche) et à la cathode (droite) et dispositif fil-cylindre (bas)

Une fois ces noeuds définis, les éléments du maillage sont construits en associant les noeuds voisins entre eux, de la manière représentée figure 6.3. À chaque face de la frontière  $S_{\varepsilon,a}$  est associé un ensemble de  $l_r$  éléments, le plus proche de l'électrode ayant l'indice local 1 et le plus proche de  $S_{\varepsilon,a}$  ayant l'indice  $l_r$ . De la même manière, les faces sont indicées de 1 à  $l_r + 1$ . Pour une cellule  $C_i$ , nous considérons trois points en particulier : le centre de gravité  $X_i$  de la cellule et les centres des faces de la cellule parallèles à la frontière de raccord, notés  $X_{i-\frac{1}{2}}$  et  $X_{i+\frac{1}{2}}$ . Chacun de ces points est repéré par sa distance au centre de l'électrode. Ces distances sont respectivement notées  $r_i$ ,  $r_{i-\frac{1}{2}}$  et  $r_{i+\frac{1}{2}}$ . Nous définissons alors :

$$\Delta r_i = \Delta r_i^g + \Delta r_i^d \quad \text{avec :} \quad \Delta r_i^g = r_i - r_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \Delta r_i^d = r_{i+\frac{1}{2}} - r_i.$$



**Figure 6.3** Discretisation du domaine  $D_{\varepsilon,a}$

Un exemple de maillage ainsi obtenu pour la discrétisation du domaine  $D_{\varepsilon,a}$  est représenté figure 6.4. La frontière  $S_{\varepsilon,a}$  apparaît distinctement en noir. Le maillage présenté ici a été obtenu à l'aide de la fonction de raffinement  $f_2$  qui permet d'obtenir un raffinement de maillage à proximité de l'électrode tout en conservant des mailles de taille similaire à celle du domaine  $\Omega_\varepsilon$  au niveau de la frontière  $S_{\varepsilon,a}$ .

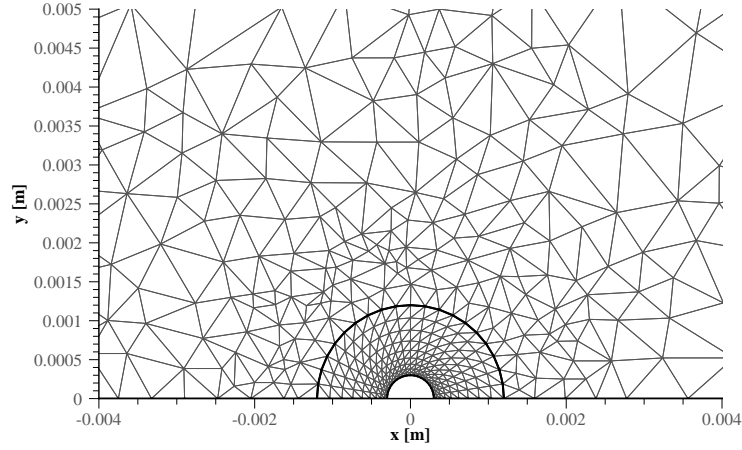
#### Remarque.

Pour des raisons liées à la représentation graphique des résultats, les données obtenues pour le domaine  $D_{\varepsilon,a}$  sont sauvegardées pour des éléments triangulaires. Chaque quadrangle est divisé en deux triangles – comme l'illustre la figure 6.4 – où les différentes variables décrivant le plasma ont pour valeurs celles du quadrangle correspondant.

#### 6.1.4 Schémas de discrétisation

Les équations plasmas décrivant le domaine  $\Omega_\varepsilon$  sont résolues à l'aide du code COPAIER développé en parallèle à l'ONERA pour la simulation de décharges électriques induites par des actionneurs plasmas. Ce solveur met en oeuvre une méthode de splitting pour le couplage des différents phénomènes régissant le plasma. Ainsi, chaque itération consiste en la résolution du transport des espèces et de la cinétique chimique, couplés à l'équation de Poisson et à l'évolution du potentiel appliqué  $\varphi_a$ .

Dans ce chapitre, une discrétisation des équations précise au premier ordre en temps est utilisée. Le couplage entre les différents schémas de discrétisation lors d'une itération en temps



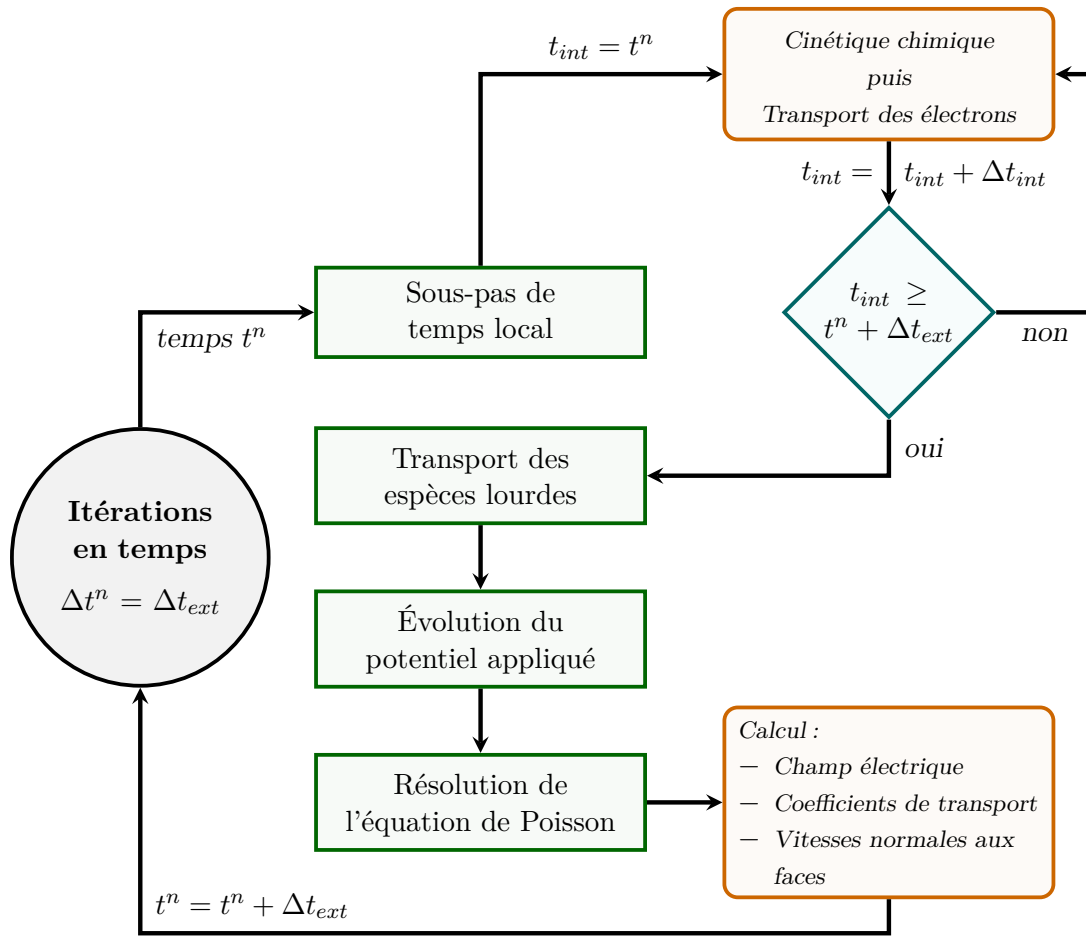
**Figure 6.4** Exemples de maillage obtenu pour la discrétisation du domaine  $D_{\epsilon,a}$  (dispositif fil-fil)

est alors effectué tel que représenté schématiquement sur la figure 6.5. Nous distinguons ici deux pas de temps d'intégration : le pas  $\Delta t_{int}$  imposé par les phénomènes rapides du plasma, à savoir le transport des électrons et la cinétique chimique, et le pas de temps  $\Delta t_{ext}$  imposé par les phénomènes plus lent, c'est-à-dire le transport des espèces lourdes (i.e. autre que les électrons), ainsi que l'évolution du potentiel appliqué  $\varphi_a$  et du champ électrique. Le pas de temps  $\Delta t_{int}$  est généralement de deux ordres de grandeurs inférieur au pas  $\Delta t_{ext}$ . Afin de diminuer le temps de calcul, le pas de temps d'intégration global est pris égal à  $\Delta t_{ext}$  et une méthode de sous pas de temps local est utilisée pour les phénomènes rapides. Cette méthode suppose que les densités d'ions et le champ électrique ne varient pas au cours d'un pas de temps  $\Delta t_{ext}$  du point de vue des électrons, ceux-ci étant beaucoup plus mobiles que les ions du fait de leur faible masse. Le transport des électrons et la cinétique chimique sont ainsi intégrés sur un temps  $\Delta t_{ext}$  par sous pas de temps  $\Delta t_{int}$ , indépendamment des autres variables. Le transport des espèces lourdes est alors effectué sur le pas de temps  $\Delta t_{ext}$ , suivi de l'évolution du potentiel appliqué et de la résolution de l'équation de Poisson, qui permet alors de mettre à jour le champ électrique et les coefficients de transport, ainsi que de calculer les vitesses des particules aux interfaces entre les éléments.

Concernant le domaine  $D_{\epsilon,a}$ , celui-ci est décrit par un des modèles d'électrode virtuelle et nécessite ou non une résolution numérique selon le modèle utilisé. Le modèle asymptotique admet une solution quasi-analytique ne dépendant que de l'intégrale du coefficient d'ionisation  $\alpha$ . Les valeurs de cette intégrale sont interpolées à partir de tables précalculées et la solution du modèle peut donc être calculée en tout point de  $D_{\epsilon,a}$  pour un coût très faible. À l'inverse, le modèle radial nécessite une résolution numérique et un schéma de discrétisation adapté doit être mis en place. Dans l'optique de valider le concept du modèle et d'étudier son influence sur le développement de la décharge, une méthode d'intégration explicite a été dans un premier temps mise en oeuvre.

### Équation de Poisson

La méthode d'intégration de l'équation de Poisson dans  $\Omega_\epsilon$  consiste en une méthode de type éléments finis  $\mathbb{P}_1$  calculant le potentiel aux noeuds du maillage. Une telle méthode s'est avérée plus précise et plus performante qu'une méthode aux volumes finis. En effet, cette dernière



**Figure 6.5** Couplage des différents schémas de discrétisation lors d'une itération en temps présente des défauts de précision dans le cas de maillages non-structurés et la convergence en maillage n'est atteinte que pour un très grand nombre de mailles.

Le couplage de la méthode avec le domaine  $D_{\varepsilon,a}$  dépend du modèle d'électrode virtuelle considéré. Le modèle asymptotique définit analytiquement une condition aux limites de type Robin sur la frontière  $S_{\varepsilon,a}$ . Cette condition est directement intégrée à la formulation variationnelle du problème sur  $\Omega_{\varepsilon}$ , au même titre que les conditions aux limites de Dirichlet pour la cathode et de Neumann pour les frontières  $S_0$  et  $S_{sym}$ . Afin de traiter l'ensemble de ces conditions de manière unique, une méthode de pénalisation est mise en oeuvre et nous définissons donc :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\chi_a}{\delta} \varphi = \frac{\chi_a}{\delta} \varphi_{elec}$$

où  $\delta$  est le coefficient de pénalisation strictement positif,  $\varphi_{elec}$  est le potentiel de l'électrode considérée, valant  $\varphi_a$  pour l'anode et 0 pour la cathode. La variable  $\chi_a$  vaut ici :

$$\chi_a = \begin{cases} \frac{1}{r_{\varepsilon} \ln(r_{elec}/r_{\varepsilon})} & [CL \text{ Asymptotique}] \\ 1 & [CL \text{ Dirichlet et Neumann}] \end{cases}$$



où  $r_{elec}$  et  $r_\varepsilon$  sont respectivement le rayon de l'électrode considérée et celui de l'électrode virtuelle. Cette formulation permet donc de prendre en compte les conditions aux limites de type Neumann pour  $\delta$  tendant vers l'infini, celle de type Dirichlet pour  $\delta$  tendant vers 0 et de type asymptotique pour  $\delta = 1$ .

Lorsque le domaine  $D_{\varepsilon,a}$  est décrit à l'aide du modèle radial, la discrétisation de l'équation de Poisson est faite de manière à être consistante sur l'ensemble du domaine  $\Omega$ . La méthode numérique mise en oeuvre a été décrite en détails dans la section 4.3.3 du chapitre 4. Pour rappel, la formulation variationnelle du problème est écrite sur  $\Omega$  et la solution est ensuite décomposée sur un ensemble de fonctions de bases continues sur tout le domaine. Le caractère radial de la solution dans  $D_{\varepsilon,a}$  est alors réintroduit par le biais d'une méthode de condensation de masse et la résolution du problème dans ce domaine équivaut finalement à la résolution de  $n_f^s$  problèmes indépendants, où  $n_f^s$  est le nombre de noeuds appartenant à la frontière  $S_{\varepsilon,a}$ .

Concernant le champ électrique, celui-ci est supposé constant par cellule et est reconstruit pour un élément donné à partir des valeurs du potentiel en chacun de ses noeuds et du gradient des fonctions de bases correspondantes.

### Équations de transport

Le transport des particules au sein du plasma est régi par un ensemble d'équations de conservation pour les densités de chaque espèce prise en compte. En omettant les termes sources issus la cinétique chimique, ces équations s'écrivent dans le domaine  $\Omega_\varepsilon$  sous la forme :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0,$$

où

$$n = (n_e, n_+, n_-) \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = (\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-).$$

L'intégration des ces équations dans  $\Omega_\varepsilon$  repose sur une formulation aux volumes finis qui nécessite au préalable l'introduction de quelques notations. Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de  $\Omega_\varepsilon$ . Pour tout élément  $K_i$  de  $\mathcal{T}_h$  d'aire  $|K_i|$ , nous posons :

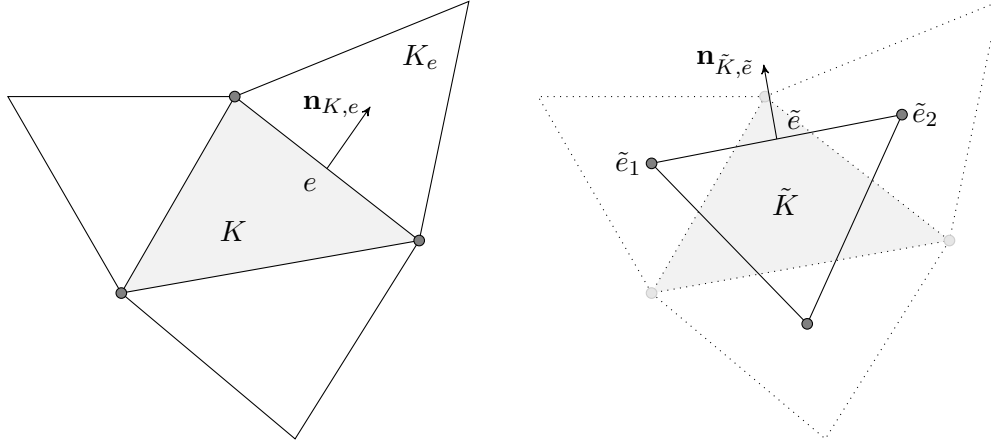
$$t^{n+1} = t_n + \Delta t^n \quad \text{et} \quad n_i^n = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} n(t^n, x) dv,$$

où le temps initial  $t_0$  est donné et où  $\Delta t^n$  est le pas de temps d'intégration permettant de passer de l'instant  $t^n$  à l'instant  $t^{n+1}$ . Le contour d'un élément  $K_i$  est noté  $\partial K_i$  et nous appelons  $e$  un de ses côtés. L'élément voisin de  $K_i$  auquel appartient  $e$  est noté  $K_e$  et le vecteur normal unitaire sortant – i.e. dirigé de  $K_i$  vers  $K_e$  – le long de  $e$  est noté  $\mathbf{n}_{K_i,e}$  (cf. figure 6.6). Par la suite, nous supposons que la vitesse des particules sur chacune des faces est calculée en amont de l'étape de transport et nous notons  $u_{K_i,e} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{K_i,e}$  la vitesse normale sortante sur la face  $e$  de l'élément  $K_i$  de  $\mathcal{T}_h$ .

Pour chaque élément  $K_i$  de  $\mathcal{T}_h$ , le schéma du premier ordre en temps s'écrit sous la forme :

$$n_i^{n+1} = n_i^n - \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{e \in \partial K_i} \Gamma_{K,e} |e|,$$

où  $|e|$  est la longueur de la face  $e$  et où  $\Gamma_{K,e}$  est le flux numérique correspondant à la direction du vecteur  $\mathbf{n}_{K_i,e}$ . Afin d'assurer une précision au second ordre en espace, nous utilisons



**Figure 6.6** Élément  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$  (gauche) et maille duale associée  $\tilde{K}$  pour la reconstruction des gradients

une méthode de reconstruction de pente pour les densités permettant d'obtenir leurs valeurs interpolées sur le bord des cellules du maillage. Une méthode classique de limitation de pente est utilisée pour éviter l'apparition d'extrema artificiels et pour conserver la positivité des densités.

Détaillons à présent le calcul des densités sur le bord  $e$  de la cellule  $K_i$ . Les gradients de densités sont reconstruits en utilisant une technique de maillage dual, déjà appliquée par Dufour [20]. À chaque élément  $K_i$  du maillage  $\mathcal{T}_h$ , nous associons un élément dual  $\tilde{K}_i$ , incluant le centre de gravité de  $K_i$  et dont les sommets sont les centres de gravité des éléments voisins de  $K_i$  (cf. figure 6.6). En utilisant une formule de Green, l'intégrale du gradient de densité sur la maille duale  $\tilde{K}_i$  s'écrit :

$$\int_{\tilde{K}_i} \nabla n \, dx = \int_{\partial \tilde{K}_i} n \times \mathbf{n}_{\tilde{K}} \, ds.$$

En supposant alors que  $\nabla n$  est constant sur  $\tilde{K}_i$  et en utilisant une formule d'interpolation linéaire sur le bord de  $\tilde{K}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\tilde{K}| \nabla n_i &= \sum_{\tilde{e} \in \partial \tilde{K}} \left( \int_0^1 (1 - \lambda) n(\tilde{e}_1) + \lambda n(\tilde{e}_2) \, d\lambda \right) |\tilde{e}| \mathbf{n}_{\tilde{K},\tilde{e}} \\ &= \sum_{\tilde{e} \in \partial \tilde{K}} \frac{1}{2} (n(\tilde{e}_1) + n(\tilde{e}_2)) |\tilde{e}| \mathbf{n}_{\tilde{K},\tilde{e}}, \end{aligned}$$

où  $\tilde{e}_1$  et  $\tilde{e}_2$  sont les extrémités de la face  $\tilde{e}$ . Le limiteur de pente utilisé consiste à remplacer dans chaque cellule  $K_i$  la valeur de  $\nabla n_i$  par sa valeur limitée  $\tilde{\nabla} n_i$ , obtenue de la manière suivante :

$$\tilde{\nabla} n_i = \min \left( 1, \frac{n_{max} - n_i}{\max_{x \in \partial K} |\nabla n_i \cdot (x - x_i)|}, \frac{n_{min} - n_i}{\min_{x \in \partial K} |\nabla n_i \cdot (x - x_i)|} \right) \cdot \nabla n_i,$$

où  $x_i$  est le centre de gravité de  $K_i$  et où  $n_{min}$  et  $n_{max}$  sont respectivement les valeurs minimales et maximales de densités dans  $K_i$  et dans ses éléments voisins. Connaissant une valeur approchée du gradient, il est maintenant possible de calculer la valeur interpolée de  $n$  sur

chacune des faces, en supposant cette valeur constante. Notons  $x_e$  le point milieu de la face  $e$  du bord  $\partial K$ . Nous définissons alors :

$$n_{K,e} = n_i + \tilde{\nabla} n_i \cdot (x_e - x_i).$$

Les flux numériques  $\Gamma_{K,e}$  sont alors définis à partir des valeurs de densités reconstruites et de la vitesse normale des particules, déjà calculée.

Lorsque celui-ci est mis en oeuvre, les équations de transport du modèle radial sont résolues à l'aide de la méthode numérique déjà mise en oeuvre dans le chapitre 5 pour le problème 1D. Pour chaque face appartenant à la frontière  $S_{\varepsilon,a}$ , ces équations 1D sont résolues dans  $D_{\varepsilon,a}$  avec cette fois la distance au centre de l'électrode  $r$  pour variable d'intégration. Le domaine de résolution est alors l'espace séparant la surface de l'électrode et le centre de la face de  $S_{\varepsilon,a}$  considérée. Le pas d'espace d'un élément de  $D_{\varepsilon,a}$  est défini comme la distance entre les centres respectifs des deux faces parallèles à la surface de l'électrode (cf. figure 6.3).

### Évolution du potentiel appliqué

L'évolution du potentiel appliqué est régi par l'équation suivante :

$$-R\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_a}{\partial t} \int_{S_a} \frac{\partial w}{\partial r} r dr d\theta = \varphi_a - \varphi_g + R \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \nabla w dv$$

où, pour rappel,  $w$  est la composante géométrique du champ électrostatique approché. Cette équation est discrétisée de manière explicite au premier ordre en temps. Le calcul de l'intégrale portant sur le courant  $\mathbf{j}$  utilise les approximations faites précédemment et suppose les densités de particules et le champ électrique constants par cellule. Nous avons ainsi :

$$\varphi_a^{n+1} = \varphi_a^n + \frac{\Delta t^n}{C_s} \left( \varphi_a^n - \varphi_g + R \sum_{K_i} \mathbf{j}_i^n \cdot \nabla w_i |K_i| L_{elec} L_{sym} \right),$$

où  $K_i$  est un élément du maillage du domaine  $\Omega$  (triangle ou quadrangle) et où  $|K_i|$  est son aire. La constante  $C_s$  est quant à elle définie par :

$$C_s = -R\varepsilon_0 \int_{S_a} \frac{\partial w}{\partial r} r dr d\theta.$$

### Cinétique chimique

L'évolution des densités des particules dans le plasma est régie par le système suivant :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \omega,$$

où  $\omega = (\omega_e, \omega_+, \omega_-)$ . Son intégration numérique est faite de manière explicite et est précise à l'ordre 1 en temps. Ainsi, nous avons :

$$n^{n+1} = n^n + \Delta t^n \omega^n.$$

### 6.1.5 Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées au problème étudié ont été présentées dans la section 2.3 du chapitre 2. À celles-ci s'ajoutent un ensemble de conditions portant sur la frontière  $S_{\varepsilon,a}$  qui relie le domaine  $\Omega_\varepsilon$ , où le plasma est décrit à l'aide du modèle complet, et le domaine  $D_{\varepsilon,a}$ , décrit par un des modèles d'électrodes virtuelles. L'ensemble de ces conditions est détaillé ci-dessous :

- Les conditions liées à la résolution de l'équation de Poisson comprennent à la fois des conditions de type Dirichlet à la surface des électrodes et de type Neumann pour les frontières de symétrie ou celles bornant le domaine de calcul. Nous avons ainsi :

$$\varphi = \varphi_a \quad \text{sur } S_a, \quad \varphi = 0 \quad \text{sur } S_c, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } S_0 \cup S_{sym}.$$

Lorsqu'un modèle d'électrode virtuelle est utilisé, la condition limite imposée sur la frontière  $S_{\varepsilon,a}$  est une condition de Dirichlet pour le modèle d'électrode virtuelle (domaine  $D_{\varepsilon,a}$ ) et de Robin pour le modèle complet (domaine  $\Omega_\varepsilon$ ). Si le modèle d'électrode virtuelle employé est le modèle asymptotique, cette dernière condition est définie analytiquement par :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{1}{r_\varepsilon \ln(r_a/r_\varepsilon)} \varphi = \frac{1}{r_\varepsilon \ln(r_a/r_\varepsilon)} \varphi_a.$$

Lorsque le modèle radial est utilisé, cette condition se retrouve dans les matrices de masse et de rigidité sous la forme d'une contribution du domaine  $D_{\varepsilon,a}$  au noeud de la frontière  $S_{\varepsilon,a}$  (cf. section 4.3.3 du chapitre 4). Le terme ajouté à la matrice de rigidité est initialisé en début de calcul et n'évolue pas avec le temps. À l'inverse, la contribution de la condition limite à la matrice de masse dépend de la charge d'espace et doit donc être recalculée à chaque itération.

- Les conditions associées aux équations de transport sont des conditions de type sortie libre pour la plupart des frontières du domaine  $\Omega$ . Ce type de condition n'impose aucune contrainte sur les flux sortant (i.e. dirigés vers l'extérieur du domaine de calcul) mais impose une valeur nulle pour les flux entrants (pas de production de particules provenant de l'extérieur du domaine). Ainsi, pour chaque face  $e$  appartenant à l'une des frontières de  $\Omega$ , nous avons :

$$\Gamma_{K,e} = 0 \quad \text{si } u_{K,e} < 0, \quad \text{pour } e \in \partial\Omega$$

où  $\Gamma_{K,e}$  est le flux numérique des densités de particules et où  $u_{K,e}$  est la vitesse normale à la face  $e$  de l'élément  $K$ . Deux exceptions apparaissent cependant. La première concerne la prise en compte de l'émission secondaire à la surface de la cathode. Ce phénomène est à l'origine d'une production d'électrons proportionnelle au flux d'ions positifs impactant la cathode. Pour chaque face  $e$  appartenant à la frontière  $S_c$ , nous avons donc :

$$(\Gamma_{K,e})_e = -\gamma \max(0, (\Gamma_{K,e})_+) \quad \text{pour } e \in S_c,$$

où  $(\Gamma_{K,e})_e$  et  $(\Gamma_{K,e})_+$  sont respectivement le flux d'électrons et le flux d'ions positifs de la face  $e$  du triangle  $K$  et où  $\gamma$  est le coefficient d'émission secondaire. La seconde exception concerne les frontières de symétrie sur lesquelles nous imposons un flux nul (autant de particules entrent dans le domaine qu'il n'en sort). Ainsi, pour chaque face  $e$  appartenant à la frontière  $S_{sym}$ , nous avons :

$$\Gamma_{K,e} = 0 \quad \text{pour } e \in S_{sym}.$$

Le long de la frontière  $S_{\varepsilon,a}$ , il y a simplement échange des flux entre les domaines  $D_{\varepsilon,a}$  et  $\Omega_\varepsilon$ . Pour une face  $e$  appartenant à cette frontière, notons  $K_0$  l'élément voisin de  $e$  appartenant au domaine  $\Omega_\varepsilon$  et  $K_1$  celui appartenant au domaine  $D_{\varepsilon,a}$ . Une condition limite sur le flux est alors imposée pour le modèle d'électrode virtuelle ou pour le modèle complet, selon si le signe de la vitesse des particules normale à la face  $e$  est positif ou négatif. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} (\Gamma_{K_1,e})_k &= -(\Gamma_{K_0,e})_k & \text{si } u_{K_0,e} > 0 \\ (\Gamma_{K_0,e})_k &= -(\Gamma_{K_1,e})_k & \text{si } u_{K_0,e} < 0 \end{aligned}$$

où  $(\Gamma_{K_0,e})_k$  et  $(\Gamma_{K_1,e})_k$  sont respectivement le flux de l'espèce  $k$  sur la face  $e$  provenant des domaines  $\Omega_\varepsilon$  et  $D_{\varepsilon,a}$ .

### 6.1.6 Conditions de stabilité

Comme pour le cas de la dimension 1, plusieurs conditions sur le pas de temps doivent être imposées afin d'assurer la stabilité des schémas numériques décrits précédemment. Les contraintes imposées par l'évolution du champ électrique, par l'évolution du potentiel appliqué et par la cinétique chimique, respectivement notées  $\Delta t_{rel}^n$ ,  $\Delta t_{pot}$  et  $\Delta t_{cin}^n$ , restent les mêmes qu'en dimension 1. Pour le domaine  $\Omega_\varepsilon$ , ainsi que pour le domaine  $D_{\varepsilon,a}$  lorsque le modèle radial est mis en oeuvre, ces pas de temps sont donnés par :

$$\begin{aligned} \Delta t_{rel}^n &= \frac{\varepsilon_0}{q_e \sum_k \mu_k^n n_k^n} \\ \Delta t_{pot} &= -R\varepsilon_0 \int_{S_a} \frac{\partial w}{\partial r} r dr d\theta \\ \Delta t_{cin}^n &= \min_i \left( \min_k \left( \frac{(n_k)_i^n}{|(\omega_k)_i^n|} \right) \right) \end{aligned}$$

La condition imposée par le transport des particules diffère selon le modèle considéré. Pour le modèle radial, il s'agit d'une condition similaire à celle obtenue en dimension 1. Nous avons donc :

$$\Delta t_{conv}^n = \min_i \left( \frac{\Delta r_i}{(\mathbf{u}_e)_i^n} \right).$$

La condition sur le pas de temps imposée par le transport des particules dans  $\Omega_\varepsilon$  est quant à elle donnée par :

$$\Delta t_{conv}^n = \frac{1}{3} \min_i \left( \frac{|K_i|}{|e_{max,i}|} \frac{1}{|(\mathbf{u}_e)_i|} \right),$$

où  $|e_{max,i}|$  est la longueur de la face la plus grande du triangle  $K_i$  et où  $(\mathbf{u}_e)_i$  est la vitesse des électrons au centre de la cellule  $K_i$ .

Ceci clôt la présentation de l'implémentation des différents modèles. La méthode numérique mise en oeuvre est donc finalement précise au premier ordre en temps et au second ordre en espace pour le transport des particules et au premier ordre pour la résolution de l'équation de Poisson.

## 6.2 Étude des modèles d'électrodes virtuelles sur une configuration fil-cylindre

Les simulations présentées dans cette section portent sur la configuration fil-cylindre déjà étudiée section 5.3 du chapitre 5 en dimension 1. Ses caractéristiques, rappelées dans le tableau 6.1, sont les suivantes. L'électrode intérieure, de rayon  $r_a$  égal à 0,2 mm, est reliée à un générateur délivrant une tension continue  $\varphi_g$  de 4 kV relié à une résistance de 1  $\Omega$ . L'électrode extérieure a quant à elle un rayon  $r_c$  de 1 mm et est reliée à la masse. Ces deux électrodes ont une longueur d'un mètre et le coefficient d'émission secondaire de la cathode  $\gamma$  est fixé à  $10^{-4}$ . La décharge se développe en l'absence d'écoulement externe dans des conditions normales de température et de pression.

Pour l'ensemble des simulations présentées ci-après, le niveau initial et le fond minimal de densité de particules chargées sont tous deux fixés à  $10^8 \text{ m}^{-3}$ . La cinétique se limite ici à l'ionisation par choc électronique. Son coefficient de réaction  $\alpha$  et la mobilité électronique  $\mu_e$  sont donnés par le code numérique BOLSIG. Les mobilités ioniques sont indépendantes du champ électrique et valent  $\mu_+ = \mu_- = 3,4617 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

**Tableau 6.1** Caractéristiques du dispositif fil-cylindre

$r_a : 0,2 \text{ mm}$	$\varphi_g : 4 \text{ kV}$	$\mathbf{u}_0 : 0 \text{ m.s}^{-1}$	$n_{init} : 10^8 \text{ m}^{-3}$
$r_c : 1 \text{ mm}$	$R : 1 \Omega$	$P_0 : 1 \text{ bar}$	$n_{min} : 10^8 \text{ m}^{-3}$
$L_{elec} : 1 \text{ m}$	$\gamma : 10^{-4}$	$T_g : 300 \text{ K}$	

### 6.2.1 Validation du modèle asymptotique

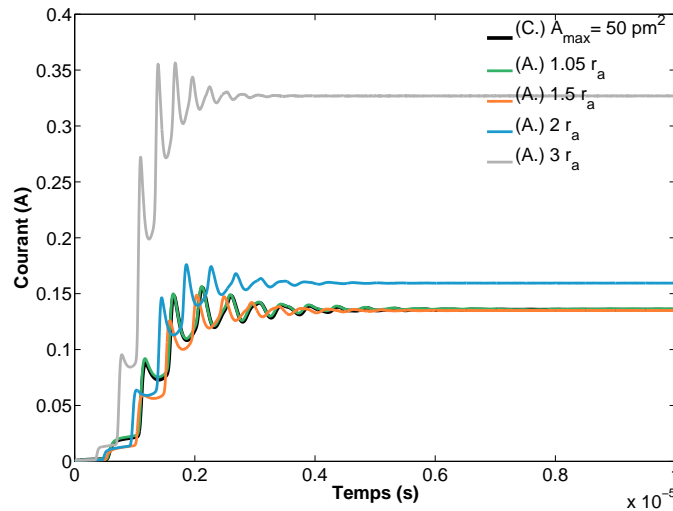
L'étude du modèle asymptotique en dimension 1 a fait l'objet du chapitre précédent et a permis de décrire le comportement du modèle et de caractériser l'erreur introduite par sa mise en oeuvre. Le but de cette section est de vérifier sur ce cas-test simple que les observations faites restent valables en dimension 2 d'espace. Pour ce faire, les résultats obtenus avec ce modèle sont comparés avec une solution de référence obtenue à l'aide du modèle complet utilisé pour décrire l'ensemble du domaine de simulation  $\Omega$ .

Le modèle asymptotique est ici mis en oeuvre pour simuler la décharge dans une certaine zone entourant l'électrode intérieure. La taille de cette zone dépend des simulations et nous définissons le rayon de l'électrode virtuelle  $r_\varepsilon$  comme un certain multiple  $k_a$  du rayon  $r_a$  de l'anode, c'est-à-dire  $r_\varepsilon = k_a r_a$ . Le domaine décrit par le modèle asymptotique correspond donc à l'ensemble des points situés à une distance  $r$  comprise entre  $r_a$  et  $r_\varepsilon$  par rapport au centre de l'anode.

Comme précédemment, les simulations obtenues à l'aide du modèle asymptotique ont leur légende préfixée par (A.), tandis que le préfixe (C.) dénote une solution donnée par le modèle de référence. Le domaine de simulation comprend l'ensemble des points dont l'angle  $\theta$  est compris entre 0 et  $\theta_0 = \pi/8$  et la discrétisation du domaine  $\Omega_\varepsilon$  est faite comme décrit dans la section 6.1.3 en imposant une aire maximale des cellules de  $A_{max} = 50 \text{ pm}^2$ . Le domaine  $D_{\varepsilon,a}$  est quant à lui discrétisé radialement sur 20 mailles à l'aide de la fonction de raffinement  $f_1$  avec un paramètre  $K_m$  valant 5 (voir section 5.2.1 du chapitre 5 pour le détail de la fonction).

### Courant électrique

Le courant de décharge calculé à l'aide du modèle de référence, ainsi qu'avec le modèle asymptotique pour différentes valeurs de  $k_a$  sont reproduits figure 6.7. Comme en dimension 1 d'espace, le courant se présente sous la forme d'oscillations dont la fréquence dépend du temps de dérive des ions positifs dans l'espace inter-électrodes. L'amplitude de ces oscillations est tout d'abord assez importante du fait de la mise en place de la décharge, puis diminue jusqu'à ce que le courant se stabilise autour d'une valeur moyenne. Le modèle de référence prédit ici un courant stationnaire de l'ordre de  $135,7 \text{ mA m}^{-1}$ , soit une erreur d'environ 12,5% par rapport à la solution quasi-analytique, qui pour rappel prédit un courant de  $120,6 \text{ mA m}^{-1}$  (cf. annexe B). La solution de référence n'est en fait pas convergée en maillage : en prenant une aire maximale des cellules de  $A_{max} = 10 \text{ pm}^2$  au lieu de  $50 \text{ pm}^2$ , le modèle de référence prédit un courant stationnaire d'environ  $129,2 \text{ mA m}^{-1}$  (non illustré ici).



**Figure 6.7** Fil-Cylindre (asymptotique) : Courant électrique induit par la décharge en fonction du temps

L'erreur induite par l'utilisation du modèle asymptotique est similaire à celle observée pour les simulations 1D. Comme présenté dans la section 5.3 du chapitre 5, l'hypothèse de stationnarité diminue la distance que ions positifs doivent parcourir avant d'atteindre la cathode et provoque ainsi une légère augmentation de la fréquence des oscillations. Du fait des hypothèses faites sur le champ électrique, le modèle tend également à surestimer l'intensité du courant obtenu, ceci de manière de plus en plus prononcée lorsque la valeur du paramètre  $k_a$  augmente. Les courants de décharge prédits à l'état stationnaire pour chacune des simulations sont reportés dans le tableau 6.2, de même que les erreurs relatives correspondantes par rapport à la solution du modèle complet (calculée pour le maillage de référence ou pour un maillage plus fin). L'erreur relative observée en fonction de  $k_a$  est similaire à celle observée en dimension 1 et reste acceptable jusqu'à des valeurs de  $k_a$  proche de 2. Au-delà, l'erreur augmente de manière importante et approche les 140% pour  $k_a = 3$ . Le modèle asymptotique est alors utilisé pour décrire la moitié de l'espace inter-électrodes et les hypothèses de champs forts ne sont plus valides.

Notons que pour  $k_a = 1,5$ , le courant prédit par le modèle asymptotique est globalement plus faible que celui prédit par le modèle complet avec le maillage de référence. Dans ce cas,

la décharge dans  $D_{\varepsilon,a}$  est en fait mieux décrite par le modèle asymptotique et l'évolution du courant au cours du temps se rapproche du courant donné par le modèle complet pour un maillage plus fin.

**Tableau 6.2** Intensité du courant de décharge à l'état stationnaire et erreur relative correspondante par rapport à la solution de référence pour le maillage par défaut et le maillage raffiné

	<b>I [mA.m<sup>-1</sup>]</b>	<b>Erreur/(C.) [%]</b>	<b>Erreur/(C<sub>f</sub>) [%]</b>
(C.) $A_{max} = 50 \text{ pm}^2$	135,7	–	5
(C <sub>f</sub> ) $A_{max} = 10 \text{ pm}^2$	129,2	4,8	–
(A.) $k_a = 1,05$	136,3	0,44	5,5
(A.) $k_a = 1,5$	135	0,5	4,5
(A.) $k_a = 2$	159,4	17,5	23,4
(A.) $k_a = 3$	326,9	140,8	153

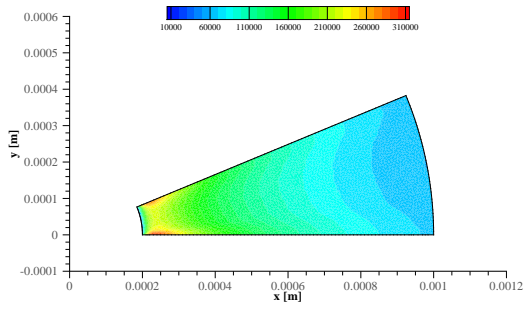
### État stationnaire de la décharge

La distribution de la force électrique stationnaire à l'intérieur du domaine  $\Omega$  est représentée figure 6.8 pour différentes simulations. Le caractère radial de la décharge n'est pas correctement reproduit par le modèle de référence et un raffinement de maillage est nécessaire pour atténuer les effets de bords, observés principalement à proximité de l'anode. Ceci est dû à une accumulation de charges positives le long des frontières de symétrie, où les flux sont supposés nuls par définition. Le potentiel est correctement résolu, cette accumulation semble donc provoquée par un phénomène de diffusion numérique qui introduit artificiellement une composante angulaire au système normalement radial. Les espèces ne pouvant pas sortir du domaine, celle-ci s'accumulent autour des frontières de symétrie. Un raffinement de maillage permet d'atténuer ces effets, néanmoins, l'utilisation d'une condition limite mieux adaptée pour les frontières de type symétrie semble nécessaire. Le modèle asymptotique étant monodimensionnel par construction, il n'est pas sujet à ce phénomène et rend correctement compte du caractère radial de la solution. La distribution de la force se rapproche alors de celle obtenue avec le modèle complet lorsque le maillage est raffiné.

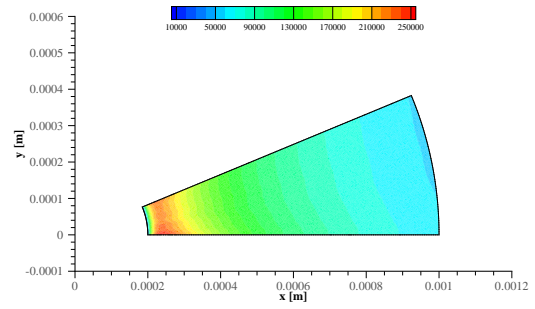
Bien que des représentations 2D des résultats permettent d'étudier la distribution des différentes variables dans le domaine de calcul, elles ne permettent pas d'effectuer facilement leur comparaison d'un point de vue quantitatif. Une coupe dans le plan des résultats est présentée figure 6.9. Celle-ci est effectuée sur l'ensemble des points situés à un angle proche de  $\theta_0/2$  par rapport à l'axe des  $x$ . Notons tout d'abord que malgré les effets de bords induits par le modèle complet, sa solution est correctement représentée loin des frontières de symétrie du domaine. Les niveaux de densités, le champ électrique et la force sont tous très proches de ceux obtenus en raffinant le maillage.

Les résultats obtenus à l'aide du modèle asymptotique sont également en bon accord avec la solution de référence. Le champ électrique est correctement approché par le modèle pour  $k_a = 1,5$ , néanmoins, une différence notable apparaît pour  $k_a = 2$ . Les hypothèses faites sur le champ électrique ne sont alors plus valables et celui-ci est légèrement surestimé à

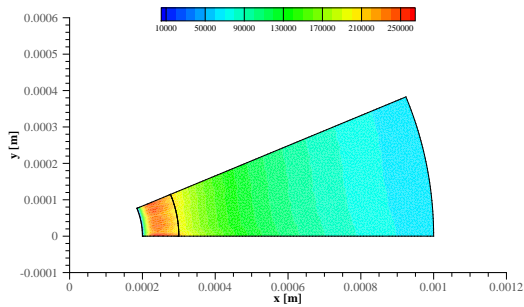




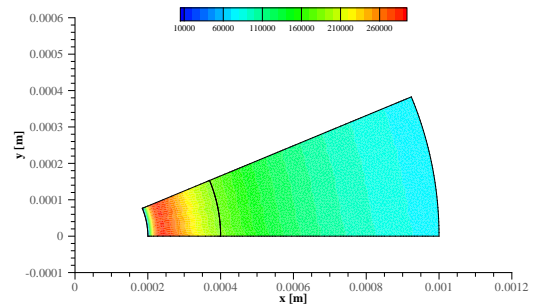
Modèle complet - maillage de référence



Modèle complet - maillage raffiné



Modèle asymptotique -  $k_a = 1,5$



Modèle asymptotique -  $k_a = 2$

**Figure 6.8** Fil-Cylindre (asymptotique) : Distribution dans le domaine  $\Omega$  de la force électrique à l'état stationnaire pour différentes simulations

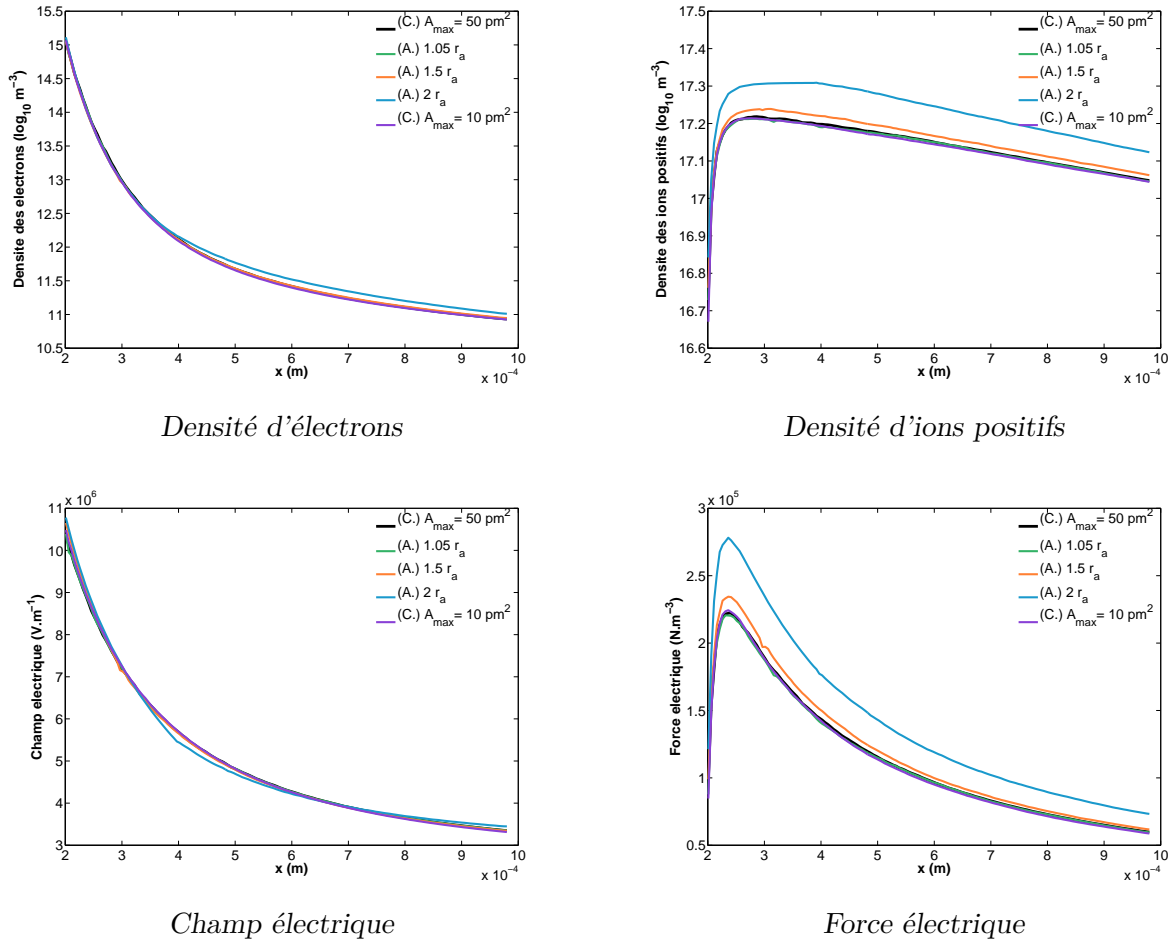
proximité de l'anode. L'efficacité des processus d'ionisation dépendant exponentiellement du champ électrique, le nombre d'ions positifs dans le système augmente. La force électrique est donc plus intense et diffère de la solution de référence d'environ 25%. De manière générale, l'écart observé sur la force est du même ordre que celui observé sur le courant de décharge.

### 6.2.2 Validation du modèle radial

Afin d'obtenir des premières informations sur le comportement du modèle radial, celui-ci a également été mis en oeuvre sur cette même configuration fil-cylindre. Outre la validation de l'implémentation numérique du modèle, ce cas-test simple vise à mettre évidence l'influence du modèle sur le comportement de la décharge par rapport à une résolution numérique classique, notamment du point de vue du maillage. En effet, contrairement au modèle asymptotique, le modèle radial ne donne pas de solution analytique et le maillage doit donc être suffisamment raffiné à proximité des électrodes pour capter correctement la dynamique de la décharge.

Pour pouvoir comparer l'influence qu'a le maillage sur l'évolution de la décharge simulée à l'aide du modèle radial (dénnoté par (R.)) ou du modèle complet (dénnoté par (C.)), les résultats de plusieurs simulations sont présentés dans cette section. Les paramètres de construction du maillage pour chacune de ces simulations (résumés dans le tableau 6.3) sont les suivants :

- Le modèle complet est utilisé pour simuler la décharge sur trois maillages différents. Les deux premiers maillages sont des maillages homogènes générés avec le mailleur TRIANGLE en imposant une aire de maille maximale de  $50 \text{ pm}^2$  pour le maillage le plus grossier et de  $10 \text{ pm}^2$  pour le maillage le plus fin. Le troisième maillage a pour but la comparaison



**Figure 6.9** Fil-Cylindre (asymptotique) : Comparaison des profils de densités (haut), du champ électrique (bas gauche) et de la force induite par la décharge (bas droite)

des résultats du modèle classique à ceux du modèle radial pour un maillage équivalent. Il est donc pris identique à celui utilisé pour la résolution du problème lorsque le modèle radial est mis en oeuvre, chaque quadrangle du domaine  $D_{\varepsilon,a}$  étant divisé en deux pour se ramener à des éléments triangulaires. La taille du domaine  $D_{\varepsilon,a}$  est fixée à trois fois le rayon de l'anode et chaque point de la frontière  $S_{\varepsilon,a}$  est relié à un point appartenant à la surface l'anode par  $l_r = 75$  noeuds radiaux, distribués de façon régulière. Le reste de l'espace inter-électrodes  $\Omega_\varepsilon$  est discrétisé de façon homogène en imposant une aire de maille inférieure à  $50 \text{ pm}^2$ .

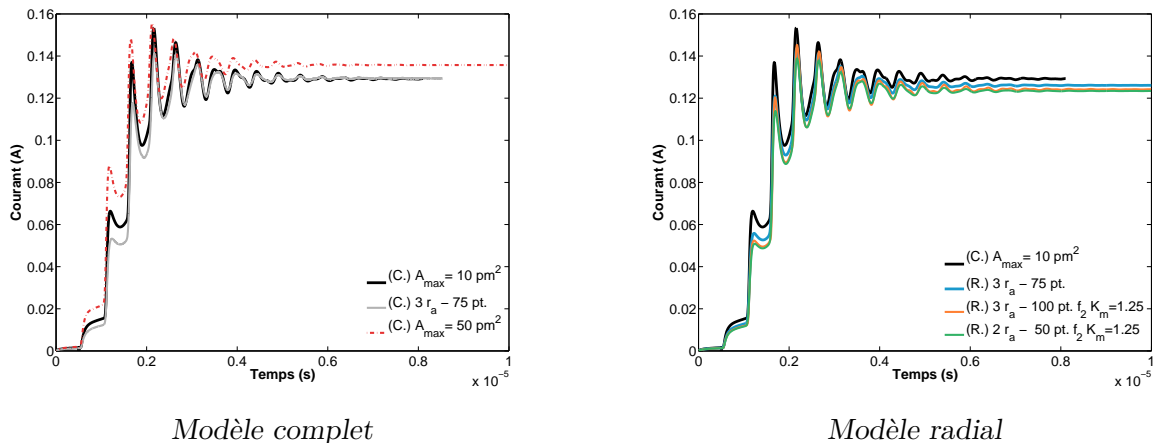
- Le modèle radial est quant à lui mis en oeuvre pour différentes valeurs du paramètre  $k_a$  et pour différents degrés de raffinement dont les caractéristiques sont données dans le tableau 6.3. En résumé, l'évolution de la décharge a été simulée à l'aide de ce modèle sur trois maillages différents. Le premier est le maillage décrit ci-dessus pour le modèle complet, destiné à une comparaison directe entre les modèles. L'électrode virtuelle a donc un rayon égal à trois fois celui de l'anode et le maillage radial est homogène. Le second maillage consiste en un raffinement du maillage précédent. Le domaine  $D_{\varepsilon,a}$  est discrétisé avec plus de points et est raffiné à proximité de l'anode. La taille des mailles dans le domaine  $\Omega_\varepsilon$  est également plus fine. Pour finir, la dernière simulation porte sur une électrode virtuelle de rayon plus petit ( $k_a = 2$ ) avec un maillage raffiné près de l'anode.

**Tableau 6.3** Fil-cylindre (radial) : caractéristiques du maillage pour chacune des simulations

N°	Modèles	Caractéristiques du maillage	
		Domaine $\Omega_\varepsilon$	Domaine $D_{\varepsilon,a}$
1.	Complet	$A_{max} = 50 \text{ pm}^2$	×
2.		$A_{max} = 10 \text{ pm}^2$	×
3.		$A_{max} = 50 \text{ pm}^2$	$r_\varepsilon = 3 r_a - 75 \text{ noeuds}$
4.		$A_{max} = 50 \text{ pm}^2$	$r_\varepsilon = 3 r_a - 75 \text{ noeuds}$
5.		$A_{max} = 10 \text{ pm}^2$	$r_\varepsilon = 3 r_a - 100 \text{ noeuds}$ ( $f_2, K_m = 1,25$ )
6.		$A_{max} = 50 \text{ pm}^2$	$r_\varepsilon = 2 r_a - 50 \text{ noeuds}$ ( $f_2, K_m = 1,25$ )

### Courant électrique

Les courants électriques en fonction du temps obtenus pour les différentes simulations présentées ci-dessus sont représentés figure 6.10. Le modèle complet comme le modèle radial prédisent tous deux une évolution similaire du courant de décharge. L'erreur relative moyenne entre deux simulations est au maximum de l'ordre de 20% entre le cas 1 et le cas 6. Le modèle radial semble moins sensible au maillage que le modèle complet. En effet, pour  $k_a = 3$ , un raffinement de maillage dans le domaine  $D_{\varepsilon,a}$ , mais aussi dans le domaine  $\Omega_\varepsilon$ , ne change pas significativement les résultats obtenus. À maillage équivalent, le modèle radial et le modèle complet donnent un courant de décharge similaire, qui se stabilise cependant autour d'une valeur moyenne légèrement différente, à savoir 129,4 mA pour le modèle complet et 126,1 mA pour le modèle radial. Ce dernier donne donc un courant très proche du courant de 120,6 mA calculé quasi-analytiquement (voir annexe B) et de celui de 126,5 mA obtenu en dimension 1 pour la même configuration.



**Figure 6.10** Fil-Cylindre (radial) : Courant électrique induit par la décharge en fonction du temps

### État stationnaire de la décharge

La distribution de la force induite par la décharge sur l'ensemble de l'espace inter-électrode  $\Omega$  est représenté figure 6.11. Comme présenté lors de l'étude portant sur le modèle asymptotique, le modèle complet est sujet à un phénomène d'accumulation de particules le long des frontières de symétrie, en particulier à proximité de l'anode. Ce phénomène s'atténue cependant en raffinant le maillage.

En comparant la force calculée avec ou sans modèle d'électrode virtuelle sur un maillage identique, nous remarquons que le modèle complet n'approche pas correctement la décharge. Une forte accumulation de charges positives se produit sur la frontière sud du domaine et la force est très surestimée dans cette zone tandis qu'elle est sous estimée dans le reste du domaine. Le courant de décharge et le champ électrique étant correctement approchés, le nombre de particules total dans l'ensemble du domaine est *a priori* correct : la cinétique chimique semble donc correctement reproduite. Cette accumulation de charge provient donc probablement de la partie convective, mal résolue à cause d'un manque de raffinement dans la zone de champ intense. En effet, la taille des mailles à proximité de l'anode pour ce maillage est d'environ  $32 \mu\text{m}$ , contre  $13,3$  et  $8,7 \mu\text{m}$  pour les maillages homogènes plus ou moins raffiné de  $\Omega$  (cas 1 et 2).

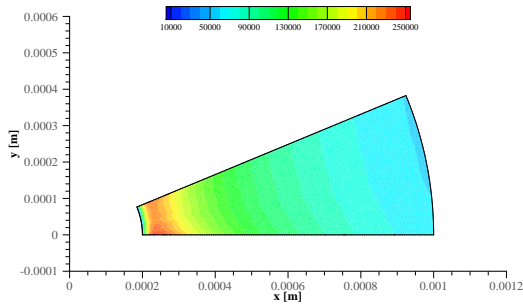
À l'inverse, le modèle radial se comporte correctement sur ce même maillage. Le caractère monodimensionnel de ce modèle ne permet pas de diffusion numérique en direction des frontières de symétrie et aucune accumulation de charge ne se produit dans le domaine  $\Omega$ . Un raffinement du maillage à proximité de l'anode et dans le domaine  $\Omega_\varepsilon$  ne change ni la distribution de la force, ni le niveau maximale atteint.

Une coupe dans le plan des profils de densité, de l'intensité du champ électrique et de la force est représentée figure 6.12. Celle-ci montre un bon accord entre les résultats des différentes simulations tant au niveau des densités d'espèces chargées que du champ électrique ou de la force. Seuls les résultats de la simulation numéro 3 sont très différents pour les raisons expliquées ci-dessus. Bien que le champ électrique soit correctement reproduit, le niveau d'ions positifs et par conséquent la force électrique sont bien inférieurs à ceux obtenus pour les autres simulations.

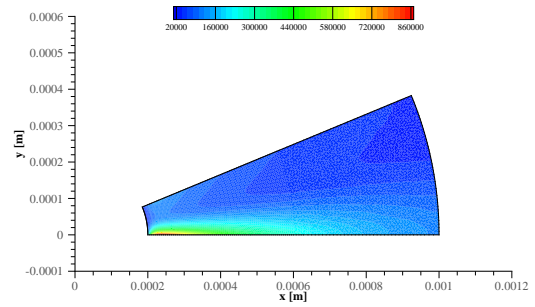
### 6.2.3 Comparaisons des temps de calcul

Le ratio du temps de simulations de chacun des modèles sur celui du modèle complet pour le maillage de référence (i.e. maillage homogène avec  $A_{max} = 50 \text{ pm}^2$ ) sont représentés figure 6.13. Comme décrit dans le cas de la dimension 1, la faible décroissance du champ électrique, et donc de la vitesse des particules chargées, lorsque l'on s'éloigne de l'anode ne permet pas d'obtenir une amélioration significative de la condition CFL par l'utilisation d'une méthode d'électrode virtuelle. Ainsi, le gain obtenu pour le modèle asymptotique est d'un facteur compris entre 2 et 3.

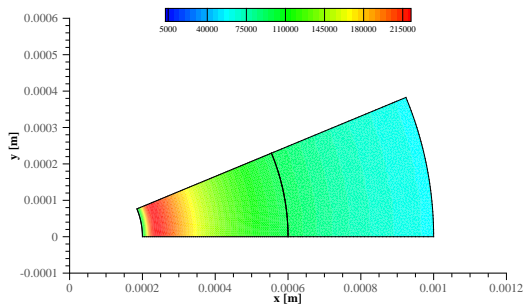
Le modèle radial nécessite quant à lui une intégration numérique des équations de transport qui est faite ici de manière explicite. Son évolution en temps est donc soumis à une condition sur le pas de temps de type CFL. Le schéma étant 1D, celle-ci est cependant moins contraignante que celle imposée par la résolution numérique des équations 2D et un gain sur le temps de calcul est encore observé. À maillage équivalent ce gain est de l'ordre d'un facteur 6. Pour ce maillage, le modèle complet ne reproduit cependant pas correctement la décharge, à l'inverse



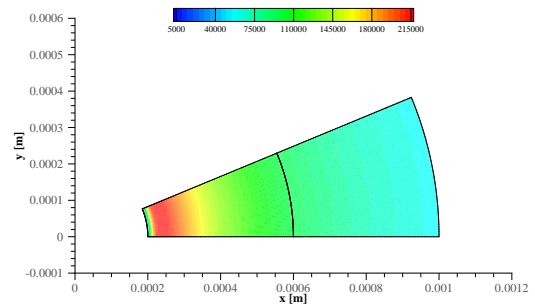
Modèle complet : maillage raffiné (Cas 2)



Modèle complet : maillage identique à celui utilisé pour le modèle radial (Cas 3)



Modèle radial :  $k_a = 3$ ,  
maillage homogène (Cas 4)



Modèle radial :  $k_a = 3$ , maillage fin  
et raffiné près de l'électrode (Cas 5)

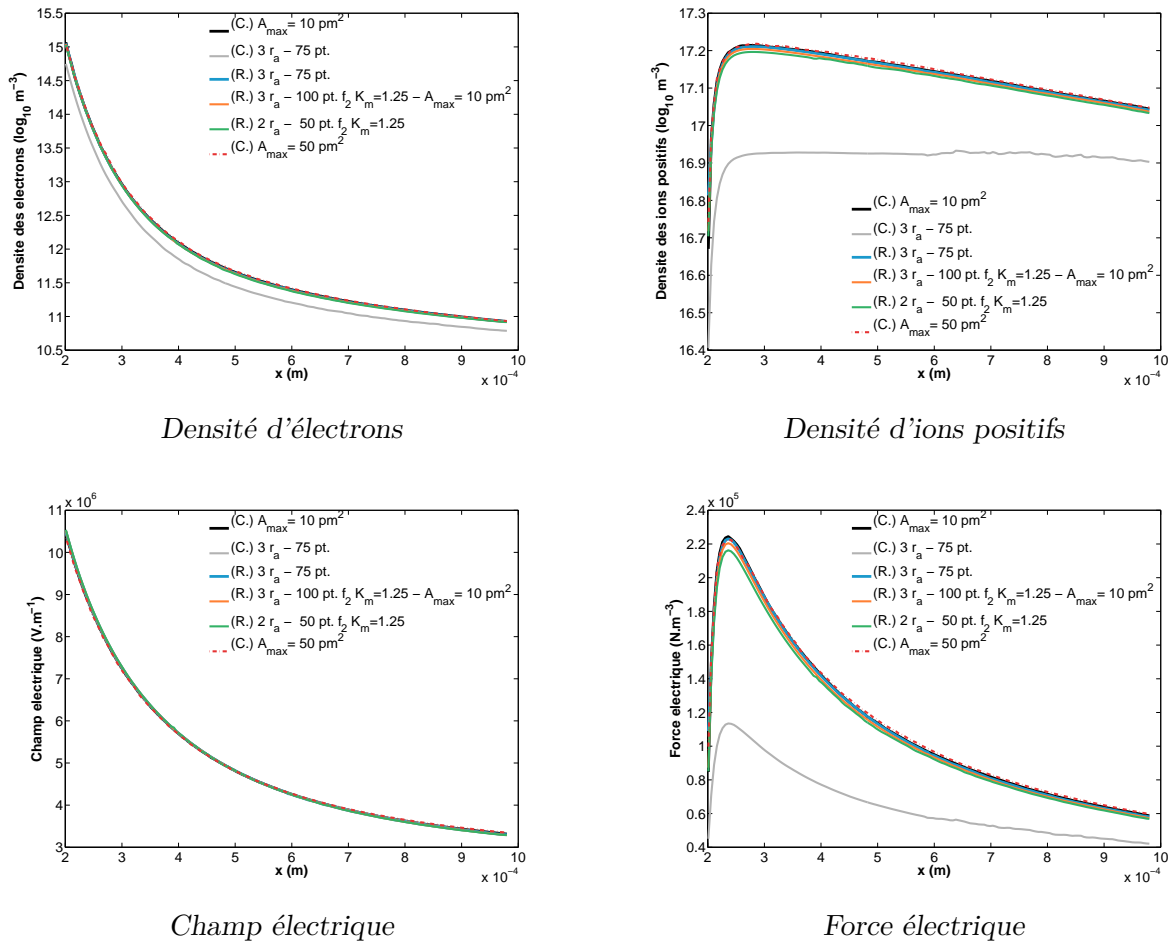
**Figure 6.11** Fil-Cylindre (radial) : Distribution dans le domaine  $\Omega$  de la force électrique à l'état stationnaire pour les différentes simulations

du modèle radial. À résultats à peu près équivalents, le gain est d'un facteur 3 à 30, selon la finesse du maillage.

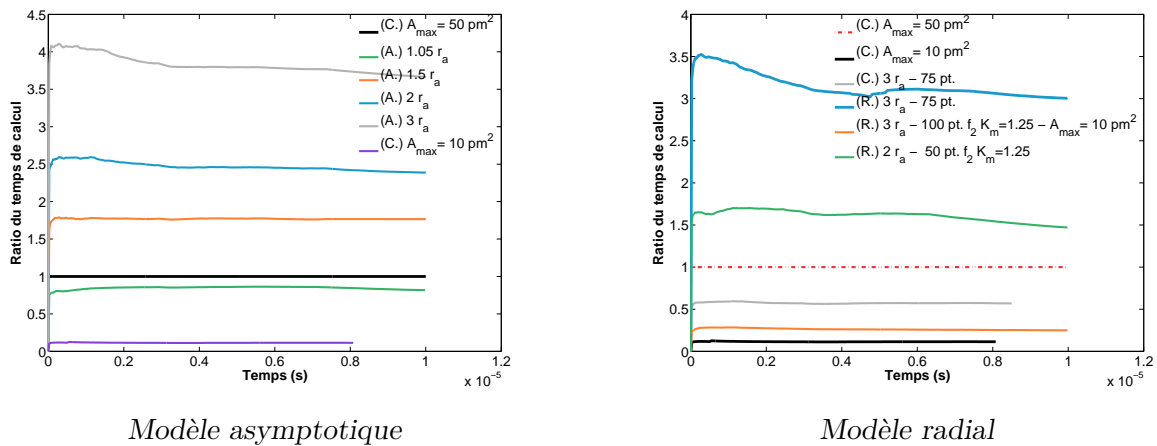
Notons qu'ici le gain apporté par l'utilisation d'un modèle d'électrode virtuelle est de nature différente selon le type de modèle utilisé. Le modèle asymptotique donnant une solution quasi-analytique, il n'est soumis à aucune contrainte de pas de temps et un gain en temps de calcul important peut donc être obtenu sur des configurations présentant un champ électrique plus singulier, comme l'ont montré les premiers tests 1D. À l'inverse, nous avons vu ci-dessus que le gain apporté par le modèle radial est dû à une contrainte CFL 1D moins contraignante que la CFL 2D. Le gain apporté par le modèle ne dépend donc pas principalement de l'épaisseur de l'électrode virtuelle choisie et seule la mise en oeuvre d'une méthode d'intégration implicite 1D permettrait une amélioration significative des contraintes sur le pas de temps.

#### 6.2.4 Bilan sur l'étude de la configuration fil-cylindre

Cette première étude sur un dispositif fil-cylindre a permis de valider l'implémentation des modèles d'électrode virtuelle en dimension 2 d'espace et de mettre en évidence l'influence des modèles sur le comportement de la décharge. En accord avec les observations faites en dimension 1, nous avons vu que le modèle asymptotique surestime le courant de décharge et la force électrique. Son utilisation entraîne également une augmentation de la fréquence des oscillations du fait de l'hypothèse de stationnarité, celle-ci diminuant la distance inter-électrodes



**Figure 6.12** Fil-Cylindre (radial) : Comparaison des profils de densités (haut), du champ électrique (bas gauche) et de la force induite par la décharge (bas droite)



**Figure 6.13** Fil-Cylindre : Comparaisons des temps de simulations de chacun des modèles devant être parcourue par les particules. Pour des valeurs du paramètre  $k_a$  raisonnables, cette erreur reste cependant faible et l'évolution de la décharge est correctement approchée par le modèle.

À maillage équivalent, le modèle radial s'est quant à lui montré plus précis que le modèle de référence. La résolution classique des équations plasmas 2D est ici sujette à un phénomène de dérive et d'accumulation de charge le long des frontières de symétries qui s'atténue lorsque le maillage est raffiné. Le modèle radial étant monodimensionnel, il ne présente pas ce problème et permet de rendre correctement compte de l'évolution de la décharge pour des maillages plus lâches que ceux utilisés pour le modèle complet.

Si le choix d'un modèle d'électrode virtuelle dirigé radialement est bien adapté pour la simulation de décharges fil-cylindre, ce n'est cependant pas le cas pour des actionneurs plasmas de type fil-fil. Les décharges qu'ils génèrent se développent de manière bidimensionnelle et il est donc nécessaire d'estimer l'erreur induite en négligeant les interactions angulaires à proximité d'une électrode. La cinétique chimique prise en compte, qui se limite pour l'instant aux réactions d'ionisation par choc électronique, doit également être enrichie. Ces deux points sont l'objet de la section suivante, dans laquelle un premier actionneur de type fil-fil aux dimensions réalistes est étudié.

### 6.3 Étude des modèles d'électrodes virtuelles sur un premier actionneur fil-fil : dispositif de Bérard et al.

Le dispositif étudié dans cette section est tiré des travaux de Bérard *et al.* [6] et a déjà été simulé numériquement en dimension 1 d'espace dans la section 5.4 du chapitre 5. Ses caractéristiques sont résumées dans le tableau 6.4. Le dispositif est composé de deux électrodes filaires parallèles d'une longueur de 20 cm et dont les centres sont séparées par une distance  $L$  de 1 cm. La première électrode a un rayon  $r_a$  de 0,1 mm et est reliée à générateur parfait délivrant une tension continue  $\varphi_g$  de 13 kV et mis en série avec une résistance  $R$  de 10 k $\Omega$ . La seconde électrode a quant à elle un rayon  $r_c$  de 1 mm et est mise à la masse. Son coefficient d'émission secondaire  $\gamma$  est fixé à  $10^{-4}$ . La décharge est ici simulée en l'absence d'écoulement externe dans des conditions normales de températures et de pression.

La cinétique chimique tient à présent compte des réactions d'ionisation, d'attachement électronique et de recombinaison. Les coefficients de réactions correspondant ainsi que les coefficients de transport pour ce dispositif ont déjà été décrits dans le chapitre précédent et sont rappelés dans l'annexe A. Pour l'ensemble des simulations présentées ci-après, le niveau initial et le fond minimal de densité de particules chargées sont tous deux fixés à  $10^9 \text{ m}^{-3}$ . En reprenant les notations introduites dans la section 6.1.2, la décharge est simulée sur un domaine d'une hauteur  $H_0$  de 8 mm, débutant à une distance  $L_0^g$  de 4 mm en amont de l'anode et finissant à une distance  $L_0^d$  de 4 mm en aval de la cathode.

**Tableau 6.4** Caractéristiques du dispositif fil-fil

$r_a$ : 0,1 mm	$\varphi_g$ : 13 kV	$\mathbf{u}_0$ : 0 m.s $^{-1}$	$n_{init}$ : $10^9 \text{ m}^{-3}$
$r_c$ : 1 mm	$R$ : 10 k $\Omega$	$P_0$ : 1 bar	$n_{min}$ : $10^9 \text{ m}^{-3}$
$L$ : 10 mm	$\gamma$ : $10^{-4}$	$T_g$ : 300 K	$H_0$ : 8 mm
$L_{elec}$ : 20 cm	$L_0^g$ : 4 mm	$L_0^d$ : 4 mm	

Afin de comparer les solutions données par les différents modèles, l'ensemble des maillages utilisés ici sont construit de façon similaire, qu'un modèle d'électrode virtuelle soit ou non mis en oeuvre. Le domaine de simulation  $\Omega$  est séparé en deux sous domaines. Le domaine  $D_{\varepsilon,a}$  englobe l'anode et est constitué de l'ensemble des points situés à une distance inférieure à  $k_a$  fois le rayon de l'anode. Ce domaine est discrétisé en un ensemble de quadrangles de la façon décrite dans la section 6.1.3 (chaque point de la frontière est reliée radialement à l'électrode par  $l_r$  points, distribués de manière homogènes ou à l'aide d'une fonction de raffinement). Lorsque le modèle complet est utilisé pour décrire le domaine  $D_{\varepsilon,a}$ , nous nous ramenons à un maillage triangulaire en divisant chaque quadrangle en deux. Le domaine  $\Omega_\varepsilon$ , qui constitue quant à lui le reste du domaine de simulation, est résolu à l'aide du modèle complet. Son maillage est construit ici en imposant une variation maximale du champ électrostatique  $\delta E_0$  entre deux cellules voisines.

Comme précédemment, les simulations réalisées à l'aide des modèles d'électrodes virtuelles radial ou asymptotique auront leur légende préfixée respectivement par (R.) et (A.), tandis que celles réalisées à l'aide du modèle complet uniquement auront leur légende préfixée par (C.).



### 6.3.1 Validation du modèle asymptotique

Les paramètres du maillage pour chacune des simulations présentées dans cette section sont résumés dans le tableau 6.5. La convergence de la solution donnée par le modèle asymptotique vers celle du modèle complet ayant déjà été montrée précédemment, nous nous intéressons ici à la validité de ce modèle d'électrode virtuelle pour un domaine  $D_{\varepsilon,a}$  de taille  $r_\varepsilon = 4r_a$ . Lorsque seul le modèle complet est mis en oeuvre, ce domaine est discrétisé plus ou moins finement (10 ou 30 noeud radiaux), ce afin d'observer l'influence du maillage sur le comportement de la décharge. Le modèle asymptotique étant indépendant du maillage, une discrétisation de  $D_{\varepsilon,a}$  constituée de 15 noeuds radiaux est choisie. Afin de mesurer l'influence du maillage loin de l'anode, une seconde simulation est effectuée à l'aide de ce modèle, où  $\delta E_0$  – paramètre de discrétisation du domaine  $\Omega_\varepsilon$  – est choisi égal à 15% au lieu de 10% pour les autres simulations.

**Tableau 6.5** Fil-Fil (asymptotique) : caractéristiques du maillage pour chacune des simulations

N°	Modèles	Caractéristiques du maillage	
		Domaine $\Omega_\varepsilon$	Domaine $D_{\varepsilon,a}$
1.	Complet	$\delta E_0 = 10\%$	$r_\varepsilon = 4r_a - 10$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )
2.		$\delta E_0 = 10\%$	$r_\varepsilon = 4r_a - 30$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )
3.	Asymptotique	$\delta E_0 = 10\%$	$r_\varepsilon = 4r_a - 15$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )
4.		$\delta E_0 = 15\%$	$r_\varepsilon = 4r_a - 15$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )

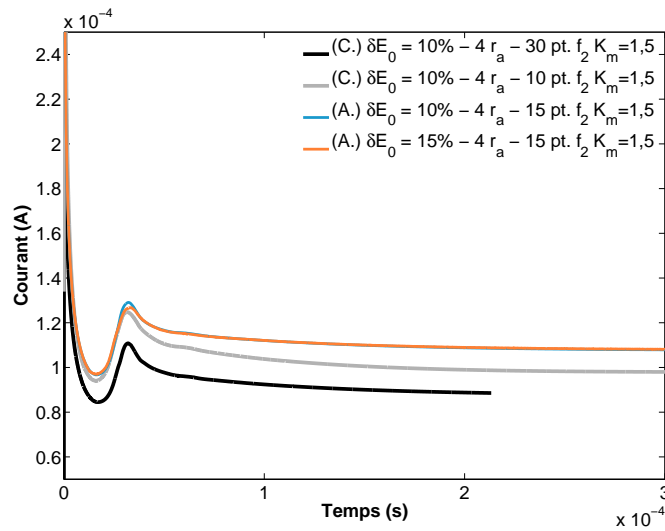
#### Courant électrique

Le courant électrique en fonction du temps pour chacune des simulations présentées ci-dessus est représenté figure 6.14. Ce courant présente dans chacun des cas une première oscillation – représentant la mise en place de la décharge – et se stabilise pour ensuite tendre vers un état stationnaire. Plusieurs remarques peuvent être faites. En premier lieu, notons que le courant de décharge prédit par le modèle complet dépend assez fortement du maillage choisis pour le domaine  $D_{\varepsilon,a}$ . La différence observée sur le courant entre les simulations 1 et 2 est de l'ordre de 15%. À l'inverse, la discrétisation du domaine  $\Omega_\varepsilon$  n'influe que très peu sur le comportement de la décharge, comme le montre les simulations effectuées à l'aide du modèle asymptotique.

En accord avec les observations faites pour d'autres configurations, le modèle asymptotique tend à surestimer le courant de décharge. Celui-ci prédit ici un courant stationnaire de l'ordre de  $108,5 \mu\text{A}$  contre  $88,5 \mu\text{A}$  pour le modèle complet avec le maillage le plus raffiné, soit une erreur relative d'environ 22%. Bien que cette erreur soit assez importante comparativement à celle observée en dimension un (environ 10% pour une valeur de  $k_a$  proche de 4), elle reste raisonnable et relativement prédictible. Pour le même dispositif, Bérard *et al.* [6] ont mesuré expérimentalement un courant de l'ordre de  $650 \mu\text{A.m}^{-1}$ , soit environ  $108 \mu\text{A}$  lorsque l'on multiplie ce courant par la longueur des électrodes. Les résultats obtenus sont donc en bon accord avec l'expérience.

#### État stationnaire de la décharge

La distribution dans le domaine  $\Omega$  des ions positifs et de la force électrique à l'état stationnaire est représentée figure 6.15 pour les deux modèles (maillages les plus fins). De manière



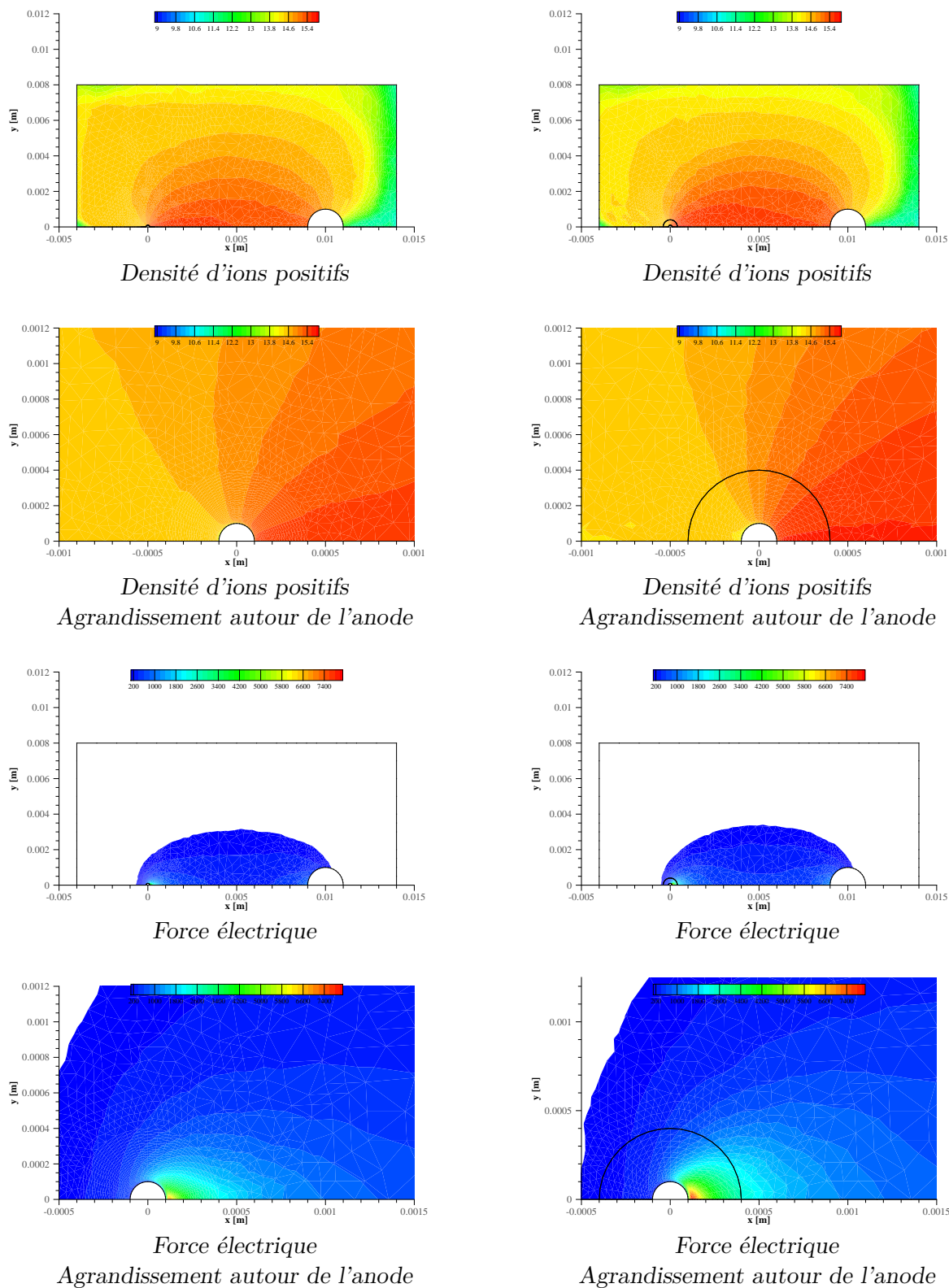
**Figure 6.14** Fil-Fil (asymptotique) : Courant électrique induit par la décharge en fonction du temps

globale, le modèle asymptotique reproduit relativement bien le comportement du modèle complet, bien que surestimant légèrement le niveau de densité des ions positifs et donc la force. La distributions des ions données par le modèle complet est bien principalement radiale au voisinage de l'anode et est donc correctement reproduite par notre modèle. Bien que légèrement plus "aplatie" pour le modèle complet, la force est composée d'une zone de forte intensité située à proximité de l'anode et en particulier près de l'axe inter-électrodes où le champ électrique est le plus intense. Elle décroît ensuite rapidement dans l'espace inter-électrodes et augmente à nouveau à proximité de la cathode, où le champ électrique redevient plus intense. Le domaine sur lequel la force est appliquée est similaire pour les deux modèles (les valeurs inférieures à  $100 \text{ N.m}^{-3}$  sont masquées sur les graphiques).

#### Remarque.

*La légère discontinuité observée pour le modèle asymptotique autour de frontière  $S_{\varepsilon,a}$  raccordant les différents domaines est uniquement liée à la représentation graphique des données. En effet, pour des raisons propres à l'affichage, chaque quadrangle du domaine  $D_{\varepsilon,a}$  est ici sauvegardé comme deux triangles où les variables prennent pour valeurs celle au centre du quadrangle. L'interpolation effectuée par le logiciel graphique TECPLOT produit alors ce décalage à la frontière.*

Une coupe dans le plan portant sur les points à proximité de l'axe inter-électrodes est représenté figure 6.16 pour chacune des variables. Comme dit précédemment, les niveaux de densités sont correctement approchés par le modèle asymptotique, à l'exception des ions négatifs qui sont sous-estimés à proximité de l'anode du fait des hypothèses faites lors de la construction du modèle (l'attachement est négligé dans cette région). Le champ électrique est particulièrement bien reproduit par le modèle asymptotique, ce malgré le fait que la charge d'espace soit négligée à proximité de l'anode. Concernant la force électrique, son profil est bien capté par le modèle asymptotique mais elle est surestimée d'à peu près 20-30% par rapport à celle calculée à l'aide du modèle complet pour le maillage le plus raffiné, ce notamment au niveau de l'anode là où la force est la plus intense. Ainsi, l'intensité maximale de la force donnée par le modèle asymptotique est de l'ordre de  $5,5 \text{ kN.m}^{-3}$  contre environ  $4,2 \text{ kN.m}^{-3}$  pour le



**Figure 6.15** Fil-Fil (asymptotique) : Distribution de la densité d'ions positifs (en  $\log_{10}$ ) et de la force électrique dans le domaine  $\Omega$  à l'état stationnaire. Modèle complet à gauche (cas 2) et modèle asymptotique à droite (cas 3).

modèle complet. Pour le même dispositif, les simulations effectuées par Bérard *et al.* [6] prédisent une force au profil identique mais dont l'intensité maximale est de l'ordre de  $10 \text{ kN.m}^{-3}$  et dont le niveau moyen est d'environ  $1 \text{ kN.m}^{-3}$  dans l'espace inter-électrodes (contre environ  $500 \text{ N.m}^{-3}$  ici). Les résultats obtenus ici sont donc assez différent de ceux obtenus par Bérard *et al.*, qui se rapprochent plus des résultats que nous avons obtenus en dimension 1 d'espace. Un tel écart est difficile à expliquer et peut avoir plusieurs origines. Notons tout d'abord que la coupe dans le plan est ici faite à une distance  $0,1 \text{ mm}$  de l'axe inter-électrodes. Puisque la force décroît rapidement lorsque l'on s'en éloigne, il est normal d'observer des niveaux plus faibles. La force maximale dans le domaine  $\Omega$  est de l'ordre de  $6 \text{ kN.m}^{-3}$  pour le modèle complet et de  $8 \text{ kN.m}^{-3}$  pour le modèle asymptotique. Malgré cela, l'écart reste tout de même important et peut éventuellement provenir d'un défaut de maillage à proximité de l'anode qui amènerait à une sous-estimer l'efficacité de la cinétique chimique.

### 6.3.2 Validation du modèle radial

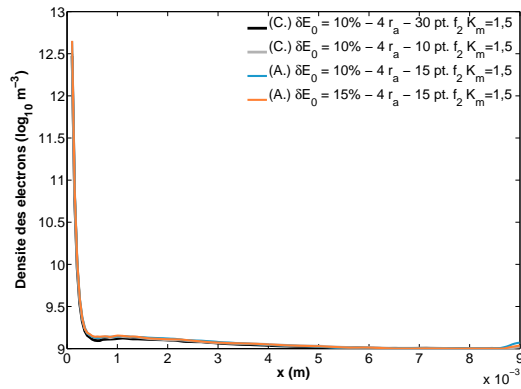
Les paramètres du maillage pour chacune des simulations faites pour la validation du modèle radial sont résumés dans le tableau 6.6. Nous cherchons ici à étudier trois points en particulier, à savoir l'influence du maillage sur la solution du modèle radial, sa capacité à approcher la solution du modèle classique et son comportement selon le choix du paramètre  $k_a$ , notamment pour des valeurs importantes. Pour l'étude des deux premiers points, nous choisissons une valeur du paramètre  $k_a$  égale à 4. La solution donnée par le modèle radial est alors comparée pour différents degrés de raffinement du domaine  $D_{\varepsilon,a}$  à la solution obtenue à l'aide du modèle complet pour des maillages similaires. Pour le dernier point, nous choisissons de comparer le comportement obtenu pour des domaines  $D_{\varepsilon,a}$  de taille égale à 2, 4 et 10 fois le rayon de l'anode.

**Tableau 6.6** Fil-Fil (asymptotique) : caractéristiques du maillage pour chacune des simulations

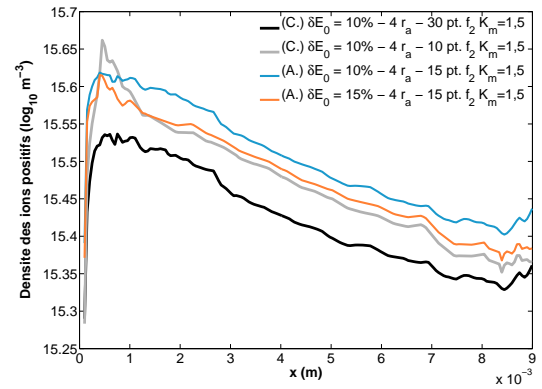
N°	Modèles	Caractéristiques du maillage	
		Domaine $\Omega_\varepsilon$	Domaine $D_{\varepsilon,a}$
1.	Complet	$\delta E_0 = 10\%$	$r_\varepsilon = 4 r_a - 10$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )
2.		$\delta E_0 = 10\%$	$r_\varepsilon = 4 r_a - 30$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )
3.	Radial	$\delta E_0 = 10\%$	$r_\varepsilon = 4 r_a - 10$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )
4.		$\delta E_0 = 15\%$	$r_\varepsilon = 4 r_a - 15$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )
5.		$\delta E_0 = 10\%$	$r_\varepsilon = 4 r_a - 30$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )
6.		$\delta E_0 = 10\%$	$r_\varepsilon = 2 r_a - 15$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )
7.		$\delta E_0 = 10\%$	$r_\varepsilon = 10 r_a - 30$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )
8.		$\delta E_0 = 10\%$	$r_\varepsilon = 10 r_a - 100$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )

### Courant électrique

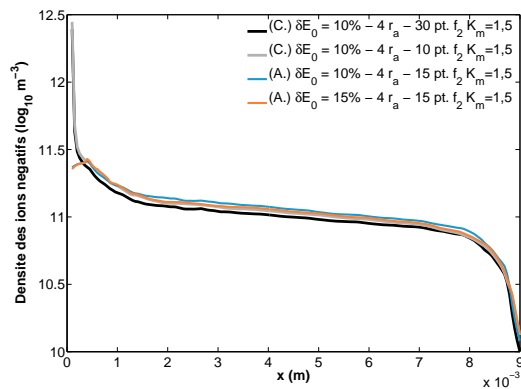
Le courant de décharge en fonction du temps est représenté figure 6.17 pour chacune des simulations décrites ci-dessus. À l'inverse du modèle complet, le modèle radial ne capte pas correctement la dynamique de la décharge pour le maillage de  $D_{\varepsilon,a}$  le plus grossier (10 noeuds). Une accumulation de charge se produit à proximité de l'anode quand la décharge s'initie et



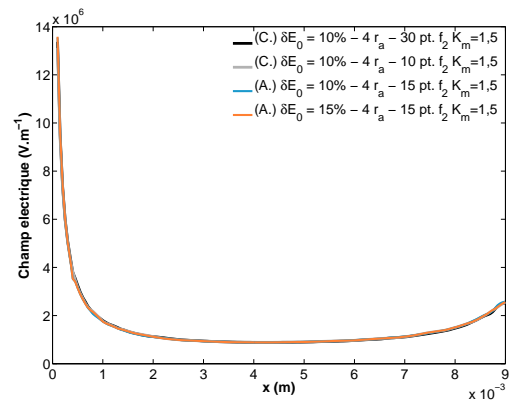
Densité d'électrons



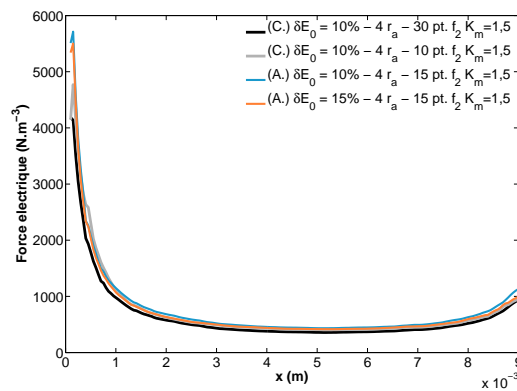
Densité d'ions positifs



Densité d'ions négatifs



Champ électrique

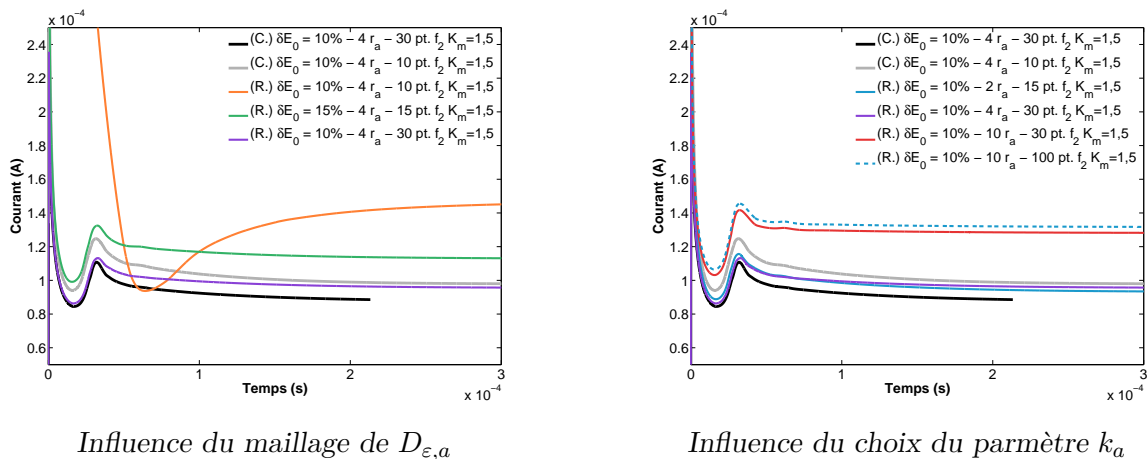


Force électrique

**Figure 6.16** Fil-Fil (asymptotique) : Comparaison des profils de densités, du champ électrique et de la force induite par la décharge à proximité de l'axe inter-électrodes

la charge d'espace est alors suffisamment importante pour provoquer l'écrantage du champ électrique. Par la suite, les espèces sont lentement évacuées et la décharge se stabilise vers un état stationnaire, à l'instar des autres simulations. Le courant obtenu est cependant bien plus important que celui prédit par le modèle complet. Cette différence de comportement par rapport au modèle de référence peut s'expliquer par le fait que le maillage de  $D_{\varepsilon,a}$  utilisé par le modèle radial est légèrement moins raffiné que celui utilisé par le modèle complet. En effet, bien que construit de manière similaire, le maillage de ce domaine est ramené à un maillage triangulaire en divisant chaque quadrangle en deux. Il en résulte un ensemble de mailles plus fines permettant de mieux capter la dynamique de la décharge. En raffinant légèrement le maillage dans le domaine  $D_{\varepsilon,a}$  pour le modèle radial (15 noeuds), cet écrantage disparaît et le courant se rapproche de ceux obtenus pour les autres simulations. Pour le maillage le plus raffiné (30 noeuds), les deux modèles prédisent un courant similaire aux premiers temps de la décharge mais se stabilisant autour de valeurs différentes à l'état stationnaire. Ainsi le modèle radial donne un courant de  $96 \mu\text{A}$  contre un courant de  $88,6 \mu\text{A}$  pour le modèle complet, soit une erreur d'environ 8%.

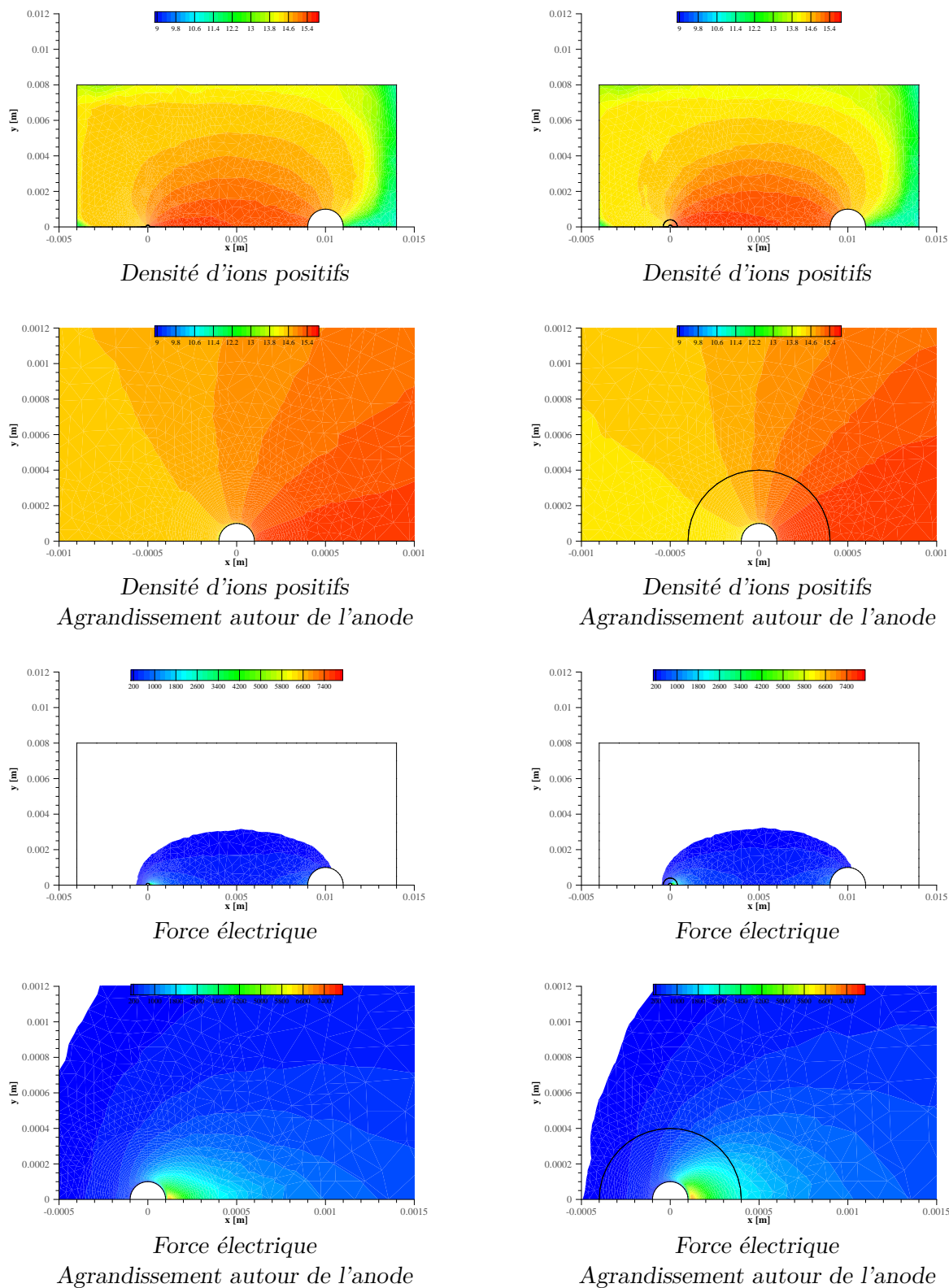
L'influence du choix de l'épaisseur de l'électrode virtuelle est également illustré sur cette figure. En choisissant une taille d'électrode virtuelle deux fois plus petite ( $k_a = 2$ ), dont le maillage est constitué de 15 de noeuds sur chaque rayon, nous obtenons un courant de décharge similaire à celui obtenu pour la simulation 5 et donc très proche de celui donné par le modèle complet pour le maillage le plus fin. Le courant n'étant qu'un indicateur du comportement moyen de la décharge, il convient d'étudier les résultats plus en détails afin d'en estimer la qualité par rapport à ceux obtenus pour  $k_a = 4$ . En choisissant une électrode virtuelle dont le rayon est 10 fois celui de l'anode, le courant de décharge est très surestimé et ne varie pas beaucoup en raffinant le maillage. Le domaine  $D_{\varepsilon,a}$  est en fait trop grand et l'hypothèse qui suppose la solution radiale n'est plus valide. Remarquons cependant que l'erreur observée est alors d'environ 50%, ce qui reste relativement raisonnable compte tenu de la valeur de  $k_a$  choisie.



**Figure 6.17** Fil-Fil (radial) : Courant électrique induit par la décharge en fonction du temps

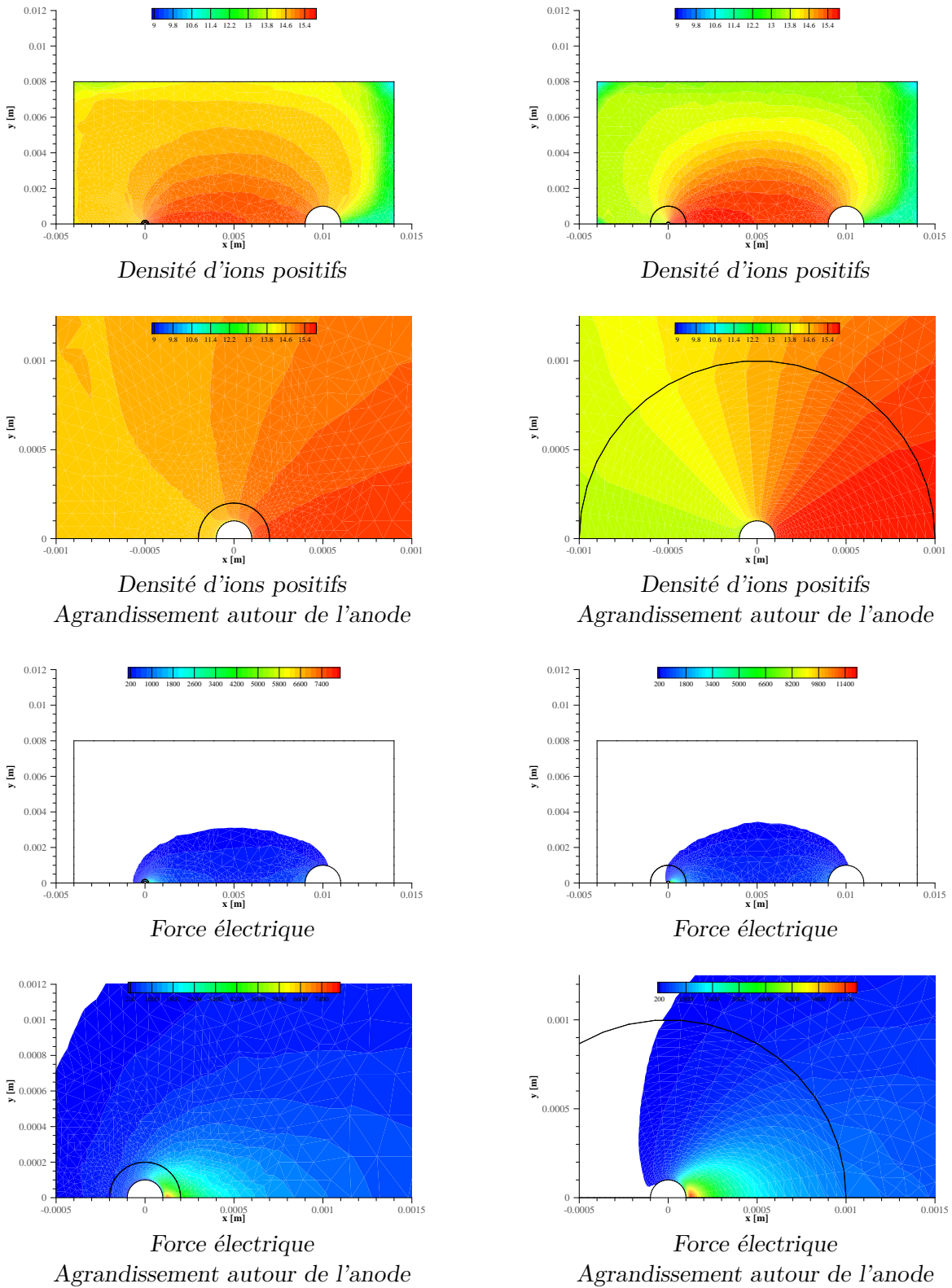
### État stationnaire de la décharge

La distribution dans le domaine  $\Omega$  des ions positifs et de la force électrique à l'état stationnaire est représentée figure 6.18 pour les simulations 2 et 5 et figure 6.19 pour les simulations 6



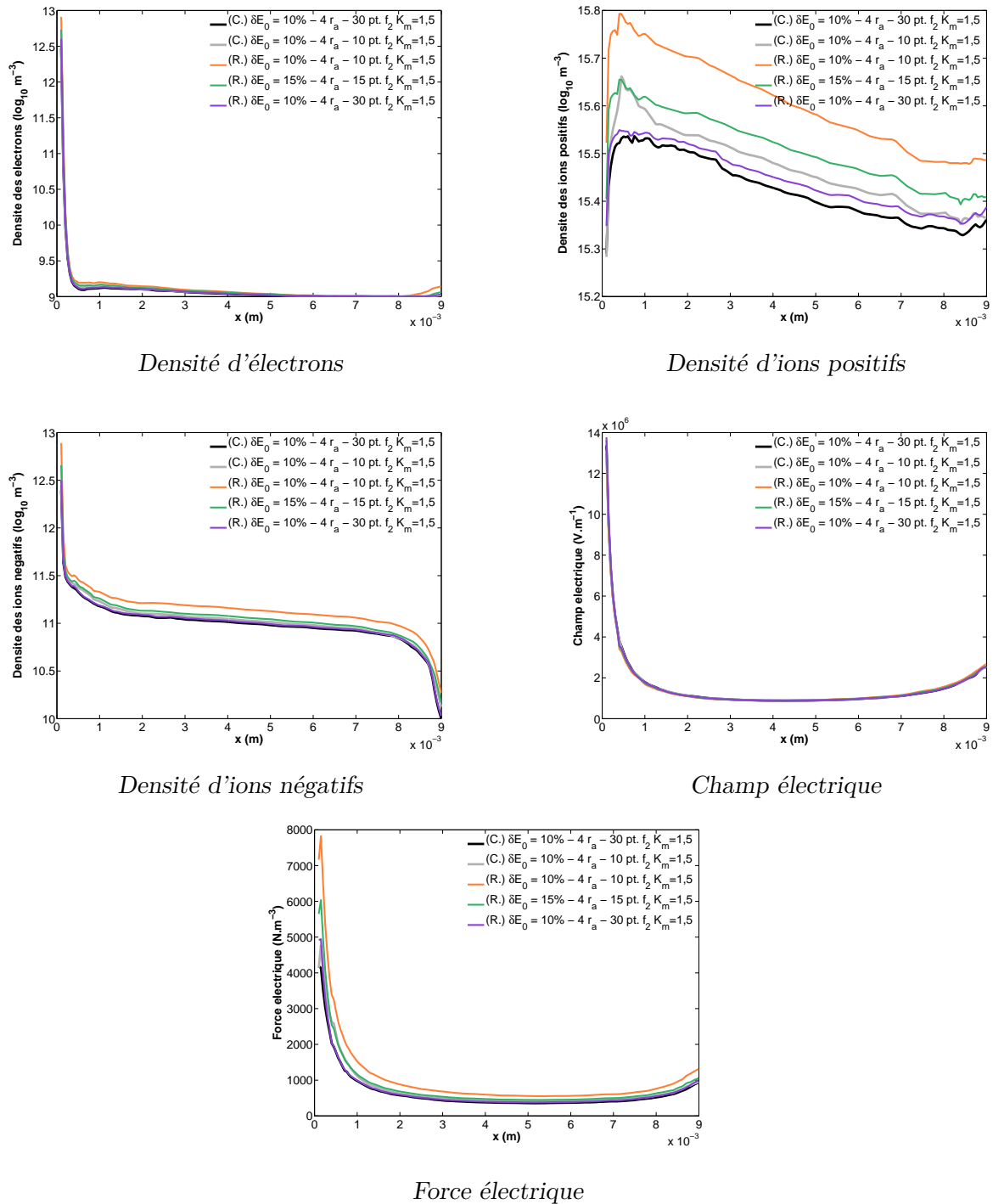
**Figure 6.18** Fil-Fil (radial) : Distribution de la densité d'ions positifs (en  $\log_{10}$ ) et de la force électrique dans le domaine  $\Omega$  à l'état stationnaire. Modèle complet à gauche (cas 2) et modèle radial à droite (cas 5).



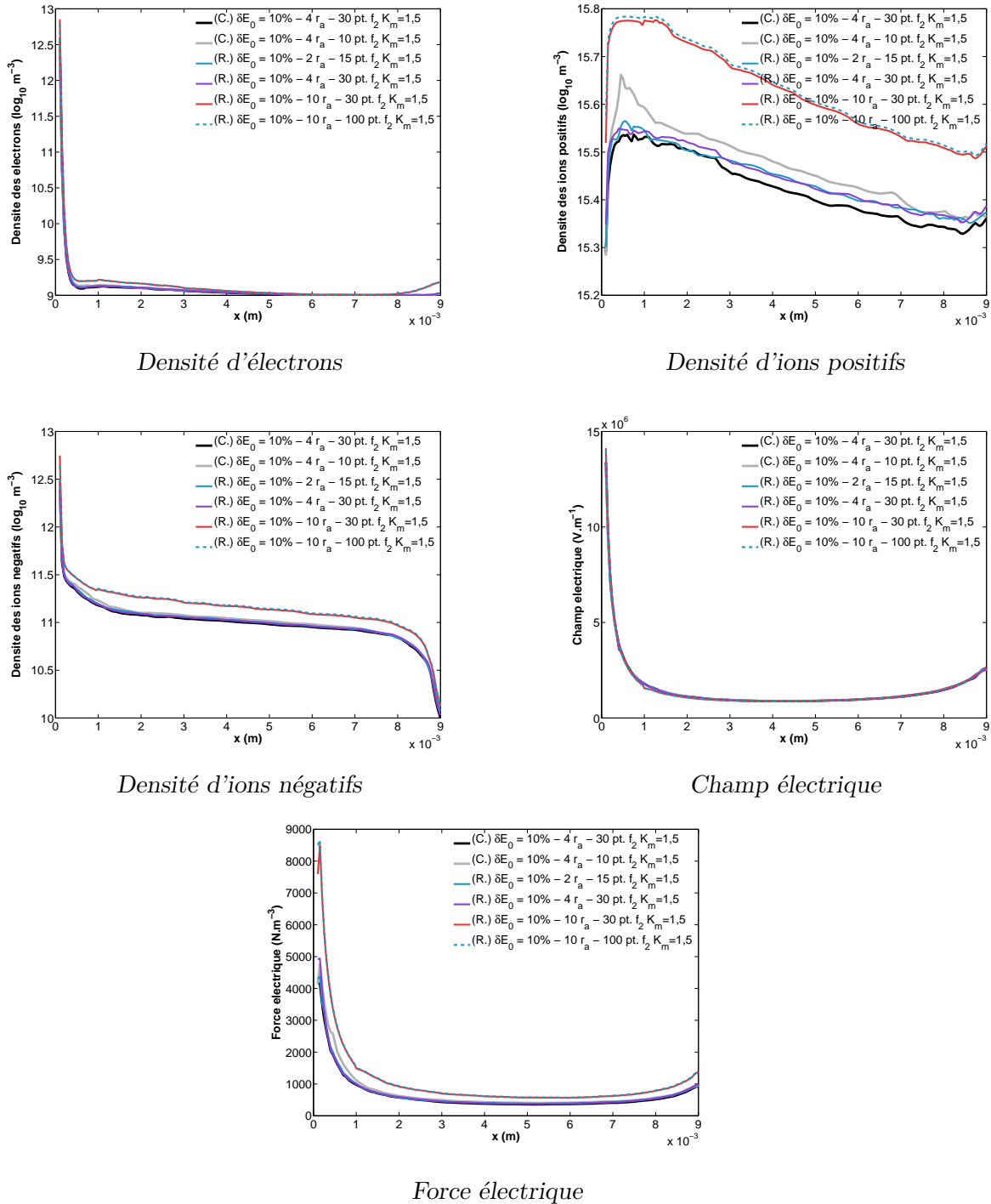


**Figure 6.19** Fil-Fil (radial) : Distribution de la densité d'ions positifs (en  $\log_{10}$ ) et de la force électrique dans le domaine  $\Omega$  à l'état stationnaire. Modèle radial cas 6 (gauche) et cas 7 (droite).





**Figure 6.20** Fil-Fil (radial) : Comparaison des profils de densités (en  $\log_{10}$ ), du champ électrique et de la force induite par la décharge à proximité de l'axe inter-électrodes (Simulations 1 à 5)



**Figure 6.21** Fil-Fil (radial) : Comparaison des profils de densités (en  $\log_{10}$ ), du champ électrique et de la force induite par la décharge à proximité de l'axe inter-électrodes (Simulations 1,2 et 5 à 8)

et 7. Les résultats obtenus à l'aide du modèle radial pour des valeurs raisonnables du paramètre  $k_a$  sont en bon accord avec ceux donnés par le modèle complet. La distribution en volume des densités d'espèces chargées et de la force électrique est bien reproduite. L'intensité maximale atteinte par la force est de l'ordre de  $6,6 \text{ kN.m}^{-3}$  et porte sur un très petit volume à proximité de l'anode. Pour une valeur de  $k_a$  égale à 10, l'influence du modèle apparaît clairement et la décharge n'est plus correctement approchée. Le niveaux de densité des ions positifs est surestimé dans l'espace inter-électrodes et leur distribution apparaît plus concentrée en volume. Bien que la force électrique soit très surestimée, notons que sa distribution dans l'espace reste relativement similaire à celle observée pour les autres simulations, ce également à proximité de l'anode.

Les profils des différentes variables décrivant la décharge entre les deux électrodes sont représentées figures 6.20 et 6.21. À condition que le maillage soit suffisamment raffiné près de l'anode et que la taille du domaine  $D_{\varepsilon,a}$  reste raisonnablement petite, le modèle radial reproduit correctement la solution de référence, aussi bien qualitativement que quantitativement. Pour une valeur de  $k_a$  égale à 10, le profil des différentes variables reste bien reproduit mais les niveaux de densités des espèces chargées et l'intensité de la force sont globalement surestimés. Un écart d'environ 70% est notamment observé au niveau de la densité d'ions positifs et donc également au niveau de la force électrique.

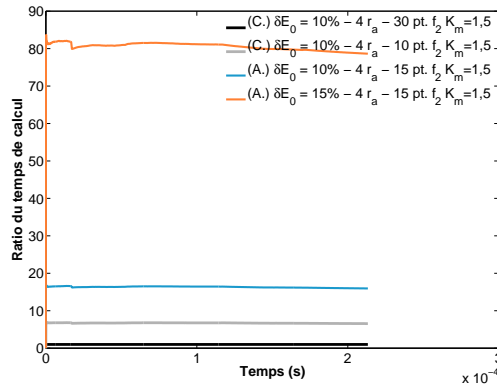
### 6.3.3 Comparaison des temps de calcul

Les temps de calcul obtenus pour chacune des simulations sont comparés figure 6.22 à celui obtenu avec le modèle complet pour le maillage le plus raffiné. Le champ électrique généré par ce dispositif fil-fil est très singulier à proximité de l'anode et décroît très rapidement au fur-et-à-mesure que l'on s'éloigne de l'anode. En s'affranchissant des contraintes CFL très restrictives au voisinage de cette électrode, le modèle asymptotique permet ici de réduire la complexité d'un facteur 16 environ pour  $k_a = 4$ . Ceci est en accord avec l'estimation théorique du gain sur le temps de calcul effectué dans la section 3.3.2 du chapitre 3 qui prédisait un gain de l'ordre de  $k_a^2$ . Le choix d'un maillage plus grossier pour la discrétisation du domaine  $\Omega_\varepsilon$  (donc loin de l'électrode stressée) diminue encore le temps de calcul d'un facteur 5 et donne donc finalement un gain d'un facteur 80 par rapport au modèle complet le plus raffiné. Notons que ce gain obtenu sur le maillage du domaine  $\Omega_\varepsilon$  n'est cependant pas propre aux modèles d'électrode virtuelle.

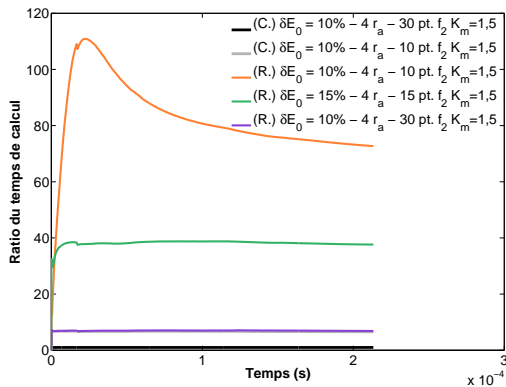
Le gain apporté par l'utilisation du modèle radial dépend du maillage choisi pour la discrétisation du domaine  $D_{\varepsilon,a}$ . Lorsque la dynamique de la décharge est correctement résolue et à maillages équivalents, le modèle diminue la complexité d'environ un facteur 7, ce du fait d'une contrainte CFL moins restrictive en dimension 1 qu'en dimension 2. Ne disposant pas de point de comparaison d'autres valeurs du paramètre  $k_a$ , il est difficile d'estimer l'influence de ce paramètre sur le gain en temps de calcul, celui-ci dépendant du choix du maillage pour le domaine  $D_{\varepsilon,a}$ . En effet pour  $k_a$  égal à 10, le gain obtenu varie d'un facteur 6 pour le maillage le plus raffiné jusqu'à un facteur 25 pour un maillage plus grossier.

### 6.3.4 Bilan sur la première configuration fil-fil

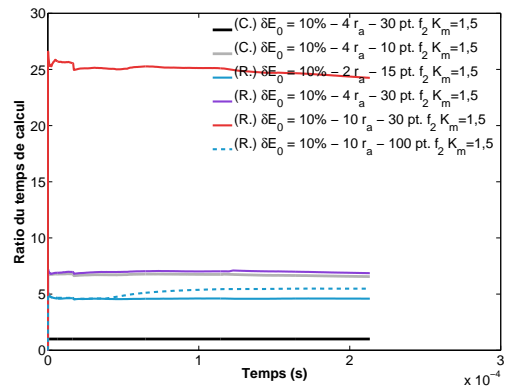
L'étude des modèles d'électrode virtuelle sur cette première configuration fil-fil a montré leur capacité à simuler correctement une décharge induite par un actionneur aux dimensions réalistes. Bien que la géométrie étudiée soit maintenant bidimensionnelle, l'hypothèse supposant le champ électrique radial reste valable dans un voisinage relativement grand autour



Modèle asymptotique



Modèle radial  
(Simulations 1 à 5)



Modèle radial  
(Simulations 1, 2 et 5 à 8)

**Figure 6.22** Fil-Fil : Comparaison des temps de simulations obtenus pour chacun des modèles

des électrodes et n'introduit pas d'erreur significative pour des valeurs du paramètre  $k_a$  raisonnables. Les réactions d'attachement électronique et de recombinaison ont également été ajoutée au modèle de cinétique chimique et semblent bien prises en compte par le modèle radial, mais également par le modèle asymptotique. Malgré le fait que ces réactions soient négligées à proximité de l'anode pour ce dernier, la dynamique de la décharge reste correctement reproduite. Le mécanisme d'ionisation est donc bien prépondérant dans cette région.

En vue de la diminution du temps de calcul, le modèle asymptotique reste ici le modèle le plus intéressant. En effet, celui-ci autorise une diminution de la complexité de plus d'un ordre de grandeur et permet d'obtenir un gain plus important encore au prix d'une erreur accrue. À l'inverse, le modèle radial est beaucoup plus précis, mais n'autorise qu'un gain de l'ordre d'un facteur 7 ne pouvant pas aisément être augmenté sans une discrétisation implicite des équations de transport 1D. La mise en oeuvre d'un tel schéma permettrait de retrouver des gains similaires à ceux observés pour le modèle asymptotique.

Les modèles d'électrode virtuelle sont donc bien adaptés pour la simulation de décharges électriques où la charge d'espace reste suffisamment faible pour ne pas provoquer l'écrantage du champ électrique. Bien que cela couvre une partie importante des applications visées, certaines décharges présentent un régime de courant pulsé et périodique où l'écrantage du champ électrique joue un rôle essentiel. Si ce phénomène n'est par construction pas pris en

compte par le modèle asymptotique, le modèle radial a été développé principalement dans cette optique. En présence d'une forte charge d'espace à proximité de l'anode, la validité de l'hypothèse faite sur la direction du champ électrique reste cependant à vérifier. Pour ce faire, un second dispositif fil-fil est maintenant étudié.

## 6.4 Étude des modèles d'électrodes virtuelles sur un second actionneur fil-fil

Dans cette dernière section, nous considérons un dispositif fil-fil dont les paramètres sont résumés dans le tableau 6.7. Celui-ci est constitué de deux électrodes parallèles séparées par une distance  $L$  de 4 cm et dont la longueur  $L_{elec}$  est de 16 cm. L'anode, de rayon  $r_a$  égal à 0,3 mm, est reliée à un générateur délivrant une tension continue de 40 kV et mis en série avec une résistance  $R$  de 1 k $\Omega$ . La seconde électrode a quant à elle un rayon  $r_c$  de 1 mm et est mise à la masse. Son coefficient d'émission secondaire  $\gamma$  est fixé à  $10^{-4}$ . La décharge est ici simulée en l'absence d'écoulement externe dans des conditions normales de température et de pression.

Comme précédemment, la cinétique chimique tient compte des réactions d'ionisation, d'attachement électronique et de recombinaison dont les coefficients sont rappelés dans l'annexe A. Pour l'ensemble des simulations présentées ci-après, le niveau initial et le fond minimal de densité de particules chargées sont tous deux fixés à  $10^9 \text{ m}^{-3}$ . En reprenant les notations introduites dans la section 6.1.2, la décharge est simulée sur un domaine d'une hauteur  $H_0$  de 2 cm, débutant à une distance  $L_0^g$  de 8 mm en amont de l'anode et finissant à une distance  $L_0^d$  de 8 mm en aval de la cathode.

**Tableau 6.7** Caractéristiques du second dispositif fil-fil

$r_a$ : 0,3 mm	$\varphi_g$ : 40 kV	$\mathbf{u}_0$ : 0 m.s $^{-1}$	$n_{init}$ : $10^9 \text{ m}^{-3}$
$r_c$ : 1 mm	$R$ : 1 k $\Omega$	$P_0$ : 1 bar	$n_{min}$ : $10^9 \text{ m}^{-3}$
$L$ : 4 cm	$\gamma$ : $10^{-4}$	$T_g$ : 300 K	$H_0$ : 2 cm
$L_{elec}$ : 16 cm	$L_0^g$ : 8 mm	$L_0^d$ : 8 mm	

Cette configuration est proche de celle étudiée expérimentalement par Moreau *et al.* dans [38]. Dans leurs travaux, le rayon de l'anode est légèrement plus grand (0,35 mm) et les électrodes sont incrustées dans un matériau diélectrique. À partir d'une certaine tension, ils observent pour cette configuration une transition de la décharge d'un régime continu vers un régime pulsé représentatif de la présence de streamers. Ce dernier régime étant celui que nous cherchons à étudier ici, une tension appliquée élevée de 40 kV a été choisie.

L'ensemble des simulations effectuées sur ce dispositif sont reportées dans le tableau 6.8. Comme dans la section précédente, nous distinguons deux types de simulations : celles effectuées uniquement à l'aide du modèle de référence et celles pour lesquelles un modèle d'électrode virtuelle – radial ou asymptotique – est mis en oeuvre pour la description de l'anode. Pour les simulations de la première sorte (modèle complet), l'ensemble du domaine de simulation est discrétisé en limitant à  $\delta E_0$  la variation du champ électrostatique entre deux cellules voisines. Dans cette section, la décharge est simulée pour des valeurs progressivement décroissante de ce paramètre (20, 10, 6 et 3%), permettant ainsi d'obtenir un maillage de plus en plus raffiné dans les zones de fortes variations du champ électrique.

Concernant les modèles d'électrode virtuelle, ceux-ci sont mis en oeuvre pour un rayon  $r_\varepsilon$  valant 1,5 ou 4 fois le rayon de l'anode. Pour le modèle radial, le paramètre  $k_a$  vaut 4 et deux discrétisations du domaine  $D_{\varepsilon,a}$  – plus ou moins fines – sont étudiées.

**Tableau 6.8** Fil-Fil 2 : caractéristiques du maillage pour chacune des simulations

N°	Modèles	Caractéristiques du maillage	
		Domaine $\Omega_\varepsilon$	Domaine $D_{\varepsilon,a}$
1.	Complet	$\delta E_0 = 20\%$	×
2.		$\delta E_0 = 10\%$	×
3.		$\delta E_0 = 6\%$	×
4.		$\delta E_0 = 3\%$	×
5.	Asymptotique	$\delta E_0 = 10\%$	$r_\varepsilon = 1,5 r_a - 20$ noeuds ( $f_2, K_m = 3$ )
6.		$\delta E_0 = 15\%$	$r_\varepsilon = 4 r_a - 10$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )
7.	Radial	$\delta E_0 = 15\%$	$r_\varepsilon = 4 r_a - 10$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )
8.		$\delta E_0 = 10\%$	$r_\varepsilon = 4 r_a - 50$ noeuds ( $f_2, K_m = 1,5$ )

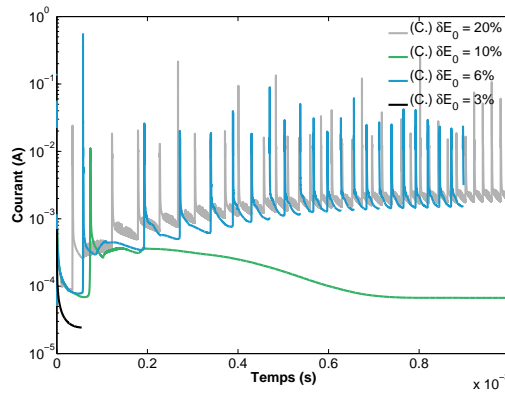
### 6.4.1 Courant électrique

Le courant de décharge en fonction du temps est représenté figure 6.23 pour chacune des simulations présentées ci-dessus. Notons que les résultats dépendent beaucoup des paramètres de simulation et notamment du maillage. Pour le maillage le plus grossier ( $\delta E_0 = 20\%$ ), le modèle de référence prédit une décharge transitant rapidement vers un régime de pulses périodiques. Le courant entre deux pics d'intensité est alors très bruité. En raffinant le maillage ( $\delta E_0 = 10\%$ ), la décharge se développe dans un premier temps de manière similaire. Cependant, après un unique pic de forte intensité, le courant décroît lentement et tend vers un régime stationnaire. Le choix d'un maillage plus fin encore ( $\delta E_0 = 6\%$ ) permet de retrouver le régime pulsé obtenu en premier lieu. Le courant n'est cependant plus bruité entre deux pics et présente un aspect beaucoup plus régulier. Bien que ce régime paraisse *a priori* physique, il ne constitue pas la solution convergée du modèle. En effet, le choix d'un maillage particulièrement fin ( $\delta E_0 = 3\%$ ) donne finalement un régime complètement différent de ceux précédemment observés. Le courant initial est alors de près d'un ordre de grandeur inférieur à ceux obtenus pour des maillages plus grossier. Ceci s'explique par la différence de comportement aux premiers instants du développement de la décharge. Contrairement aux précédentes simulations, le nombre de particules créées initialement n'induit pas une charge d'espace suffisamment importante pour provoquer l'écrantage du champ électrique. Les espèces produites à l'anode sont donc évacuées dans l'espace inter-électrodes et la décharge se développe de manière similaire à celle observée pour le précédent dispositif fil-fil (voir figure 6.24). À un tel degré de raffinement, les temps de calcul sont complètement prohibitifs et la décharge n'a pas pu être simulée sur des temps plus longs. Par analogie avec les résultats obtenus dans les section précédentes, il semblerait cependant que le régime stationnaire soit la solution correcte du modèle. Pour les autres valeurs du paramètre  $\delta E_0$ , une charge d'espace importante se crée autour de l'anode lors du déclenchement de la décharge et provoque l'effondrement du champ électrique. Le nuage d'ions positifs ainsi produit dérive lentement dans l'espace inter-électrodes et, après un premier pic de courant, la décharge transite ou non vers un régime pulsé.

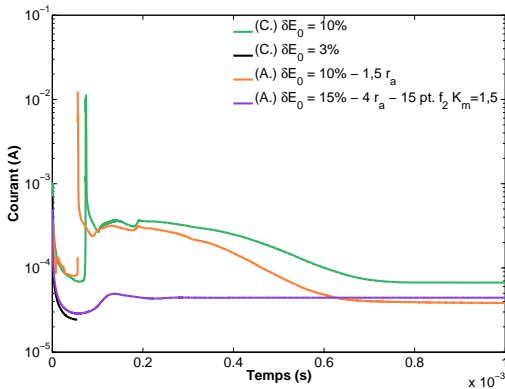
Selon les paramètres de simulations choisis, les modèles d'électrodes virtuelles fournissent des résultats très similaires à ceux obtenus avec le modèle de référence. Pour une valeur du paramètre  $k_a$  égale à 1,5, le modèle asymptotique prédit une évolution du courant de décharge analogue à celle observée pour la simulation 2 (modèle complet avec  $\delta E_0 = 10\%$ ) : après un pic de courant initial, la décharge converge vers un état stationnaire. La valeur vers laquelle

le courant se stabilise est cependant bien inférieure à celle donnée par le modèle complet. Il est intéressant de noter que bien que le modèle asymptotique ne puisse pas prendre en compte l'écrantage du champ électrique s'il a lieu dans  $D_{\varepsilon,a}$ , il semble réagir correctement si celui-ci a lieu à l'extérieur de ce domaine. Pour une valeur du paramètre  $k_a$  égale à 4, aucune charge d'espace importante ne se crée au déclenchement de la décharge et le courant évolue de manière similaire à la simulation 4 (modèle complet avec  $\delta E_0 = 3\%$ ).

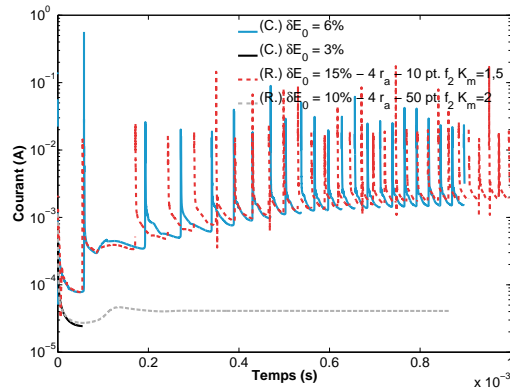
Le courant calculé à l'aide du modèle radial suit quant à lui deux régimes selon la finesse du maillage choisi. Pour le maillage le plus grossier (simulation 7), nous retrouvons le régime de pulse observés pour les simulations 1 et 3 (modèle complet avec  $\delta E_0$  valant 20 ou 6 %). Les pics de courant se répètent à une fréquence légèrement supérieure à celle obtenue pour la simulation 3 et le courant entre deux de ces pics n'est plus bruité. En raffinant le maillage dans le domaine  $D_{\varepsilon,a}$ , le modèle radial donne alors une solution similaire à celle obtenue pour la simulation 4. Il n'y a plus d'écrantage du champ électrique aux premiers temps de la décharge et le courant atteint rapidement son état stationnaire.



Modèle de référence  
(simulations 1 à 4)



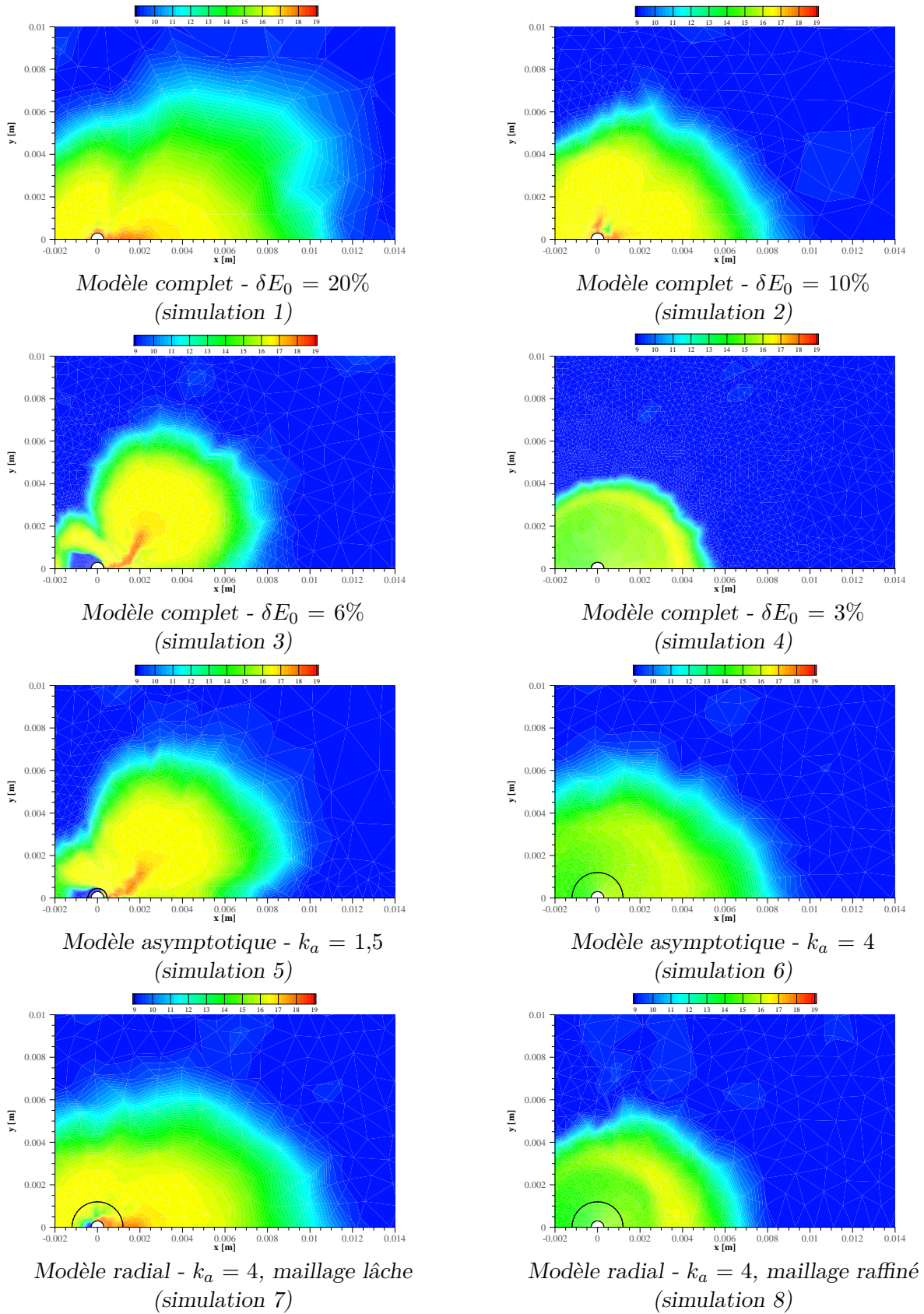
Modèle asymptotique  
(simulations 2, 4, 5 et 6)



Modèle radial  
(simulations 3, 4, 7 et 8)

Figure 6.23 Fil-Fil 2 : Courant électrique en fonction du temps



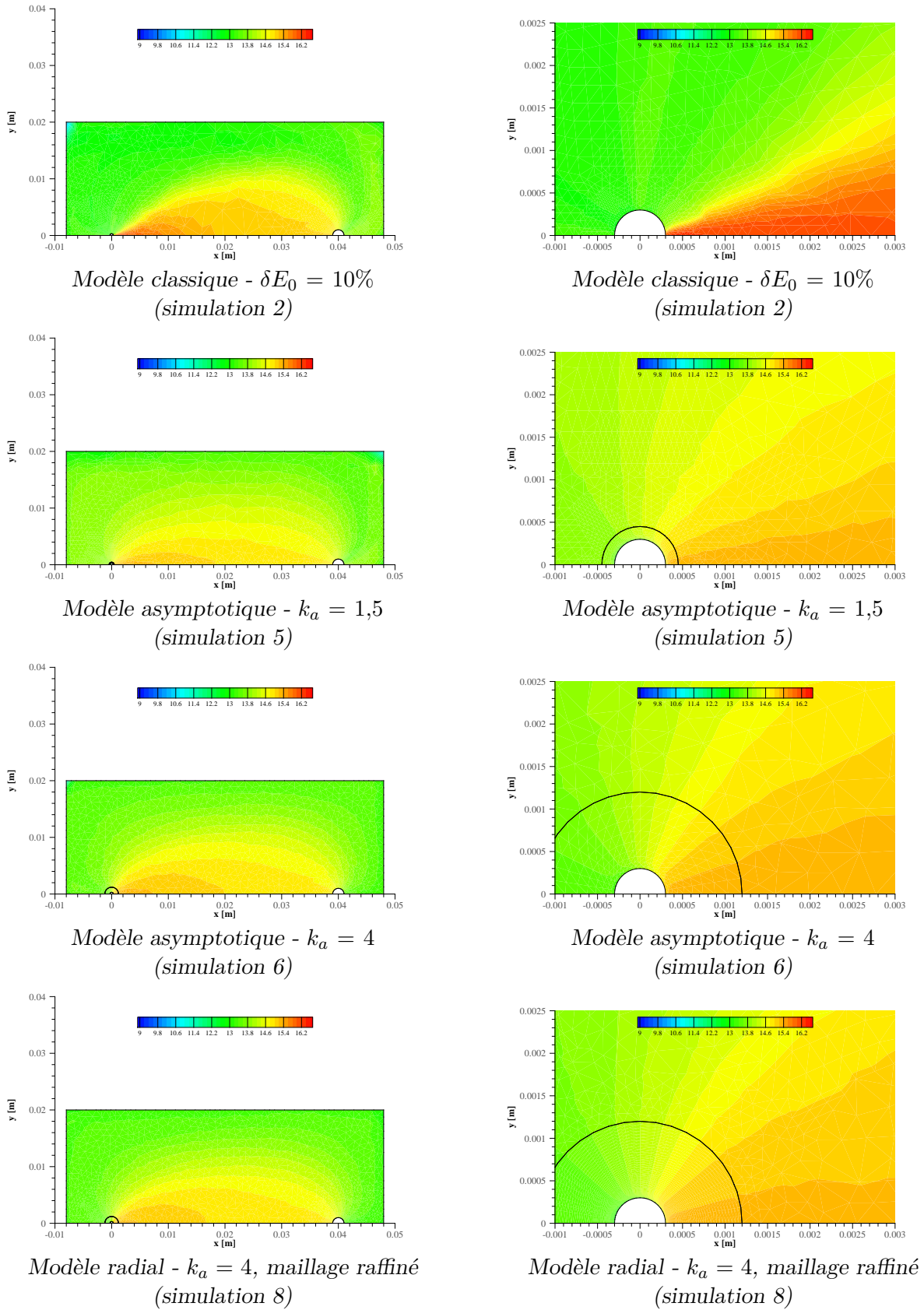


**Figure 6.24** Fil-Fil 2 : Densité d'ions positifs (en  $\log_{10}$ ) lors de l'initiation de la décharge (temps  $t = 5 \mu\text{s}$ )

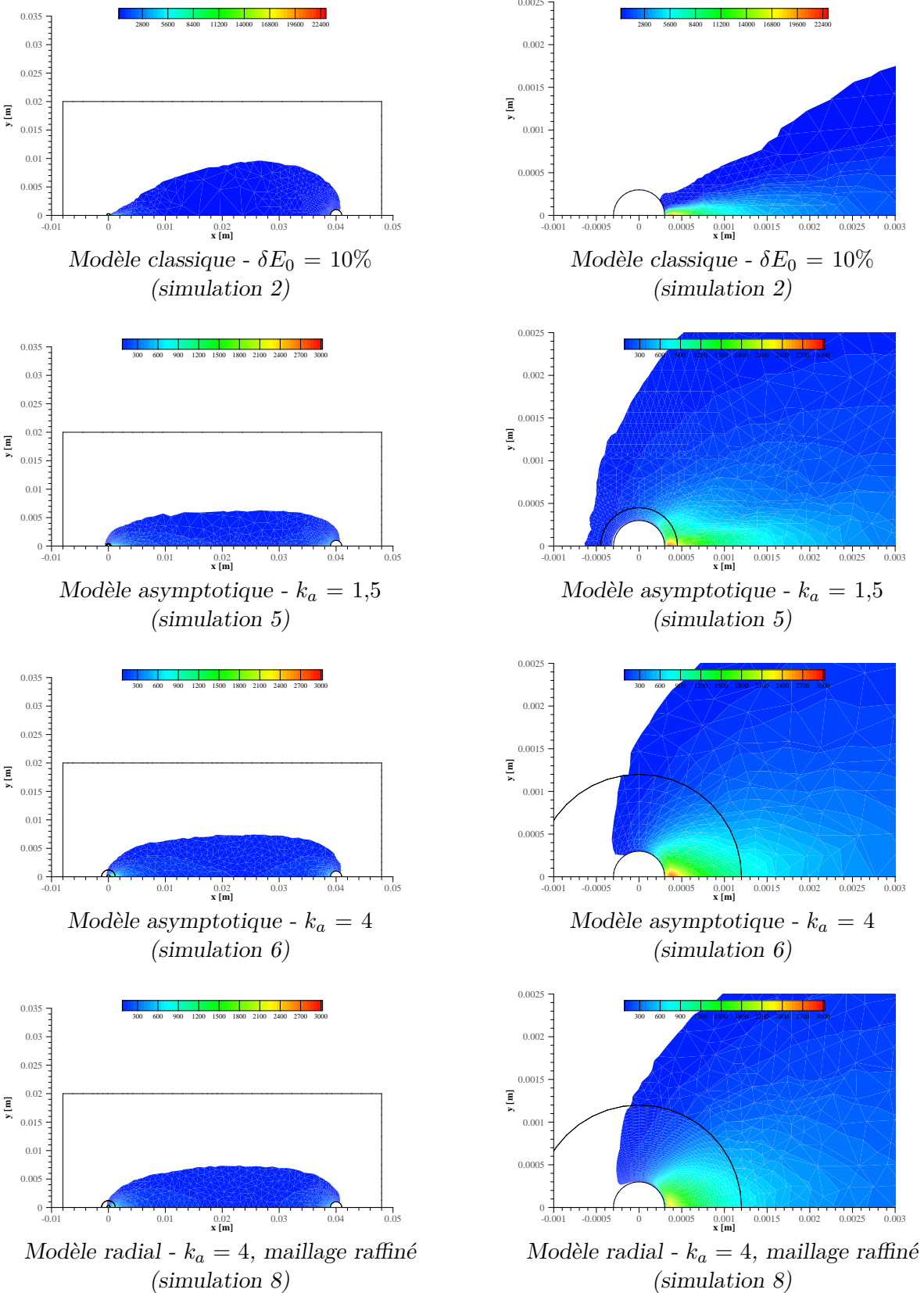
### 6.4.2 État stationnaire de la décharge

Parmi les simulations effectuées sur cette configuration, quatre convergent vers un état stationnaire qu'il est intéressant de comparer. Les figures 6.25 et 6.26 représentent la répartition de la densité d'ions positifs et la force électrique dans le domaine au temps  $t = 850 \mu\text{s}$ , ce pour chacune de ces simulations (cas 2, 5, 6 et 8). Les résultats obtenus à l'aide des différents modèles d'électrodes virtuelles sont tous en bon accord les uns avec les autres, tant au niveau de la densité des espèces chargées et de la force qu'au niveau de la répartition dans le domaine  $\Omega$  (les zones où l'intensité de la force est inférieure à  $50 \text{ N.m}^{-3}$  sont masquées). Le comportement des modèles est le même que celui observé pour la précédente configuration fil-fil : le modèle asymptotique surestime un peu la densité d'ions positifs ainsi que la force et les hypothèses faites sur la direction du champ électrique modifie légèrement la distribution de la force à proximité de l'anode.

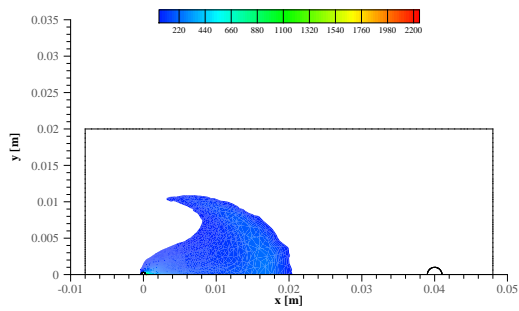
Les résultats obtenus à l'aide du modèle complet sont quant à eux en fort contraste avec ceux présentés ci-dessus. La densité d'ions positifs dans le domaine est d'un ordre de grandeur supérieure, de même que la force électrique. Ceci laisse penser que le maillage choisi est en fait trop lâche pour reproduire correctement la dynamique de la décharge à proximité de l'anode. Le modèle asymptotique admettant une solution quasi-analytique, il n'est pas sujet à ce problème, de même que le maillage radial qui utilise ici un maillage très raffiné dans  $D_{\varepsilon,a}$ . La validité de cette interprétation des résultats se vérifie en comparant les solutions des modèles d'électrodes virtuelles avec celle donnée par le modèle de référence pour le maillage le plus raffiné. La force électrique au temps  $t = 54 \mu\text{s}$  est représentée figure 6.27 pour les simulations 4, 6 et 8. Cette figure montre que tant la répartition de la force que son intensité sont bien reproduits par les modèles d'électrodes virtuelles. La force est un peu plus diffuse du fait de la différence de raffinement dans l'espace inter-électrodes.



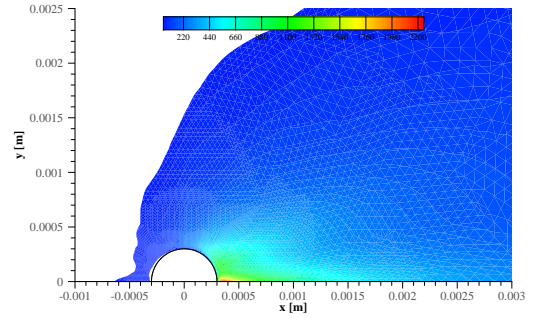
**Figure 6.25** Fil-Fil 2 : Densité d'ions positifs (en  $\log_{10}$ ) au temps  $t = 850 \mu s$  (cas 2, 5, 6 et 8)



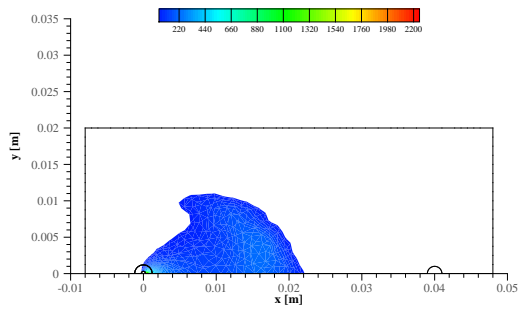
**Figure 6.26** Fil-Fil 2 : Intensité de la force électrique au temps  $t = 850 \mu s$  (cas 2, 5, 6 et 8)



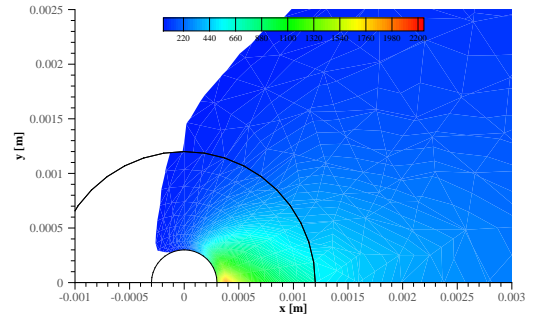
Modèle classique -  $\delta E_0 = 3\%$   
(simulation 4)



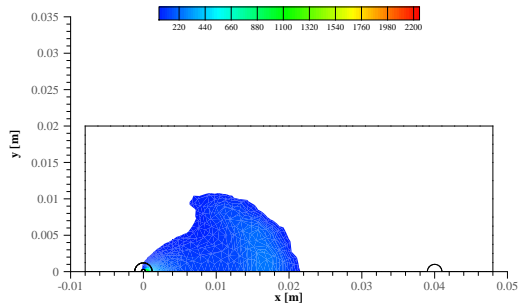
Modèle classique -  $\delta E_0 = 3\%$   
(simulation 4)



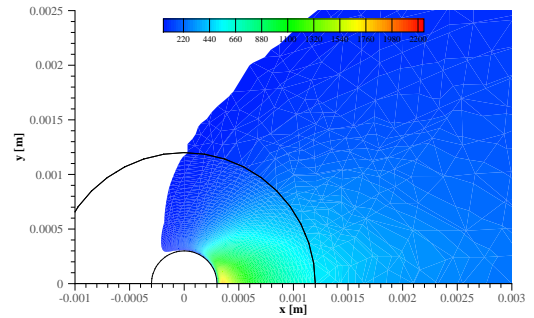
Modèle asymptotique -  $k_a = 4$   
(simulation 6)



Modèle asymptotique -  $k_a = 4$   
(simulation 6)



Modèle radial -  $k_a = 4$ , maillage raffiné  
(simulation 8)



Modèle radial -  $k_a = 4$ , maillage raffiné  
(simulation 8)

**Figure 6.27** Fil-Fil 2 : Intensité de la force électrique au temps  $t = 54 \mu s$  (cas 4, 6 et 8)

### 6.4.3 Étude du régime de pulses périodiques

Bien que le régime de pulses soit ici d'origine numérique, son étude peut apporter de nombreuses informations quant au comportement du modèle radial en présence d'écrantage du champ électrique. Les résultats présentés dans ce paragraphe portent sur le pulse de courant localisé entre les temps  $t = 720 \mu s$  et  $t = 0.800 \mu s$  et comparent les solutions obtenues à l'aide du modèle radial (cas 7) ou du modèle complet pour  $\delta E_0$  égal à 6% (cas 3). La densité d'ions positifs et l'intensité du champ électrique à proximité de l'anode et de la cathode sont représentées figure 6.28 et 6.30 pour le modèle complet et figure 6.29 et 6.31 pour le modèle radial. Pour les deux modèles le mécanisme amenant à la création du pulse de courant est similaire et se déroule comme suit :

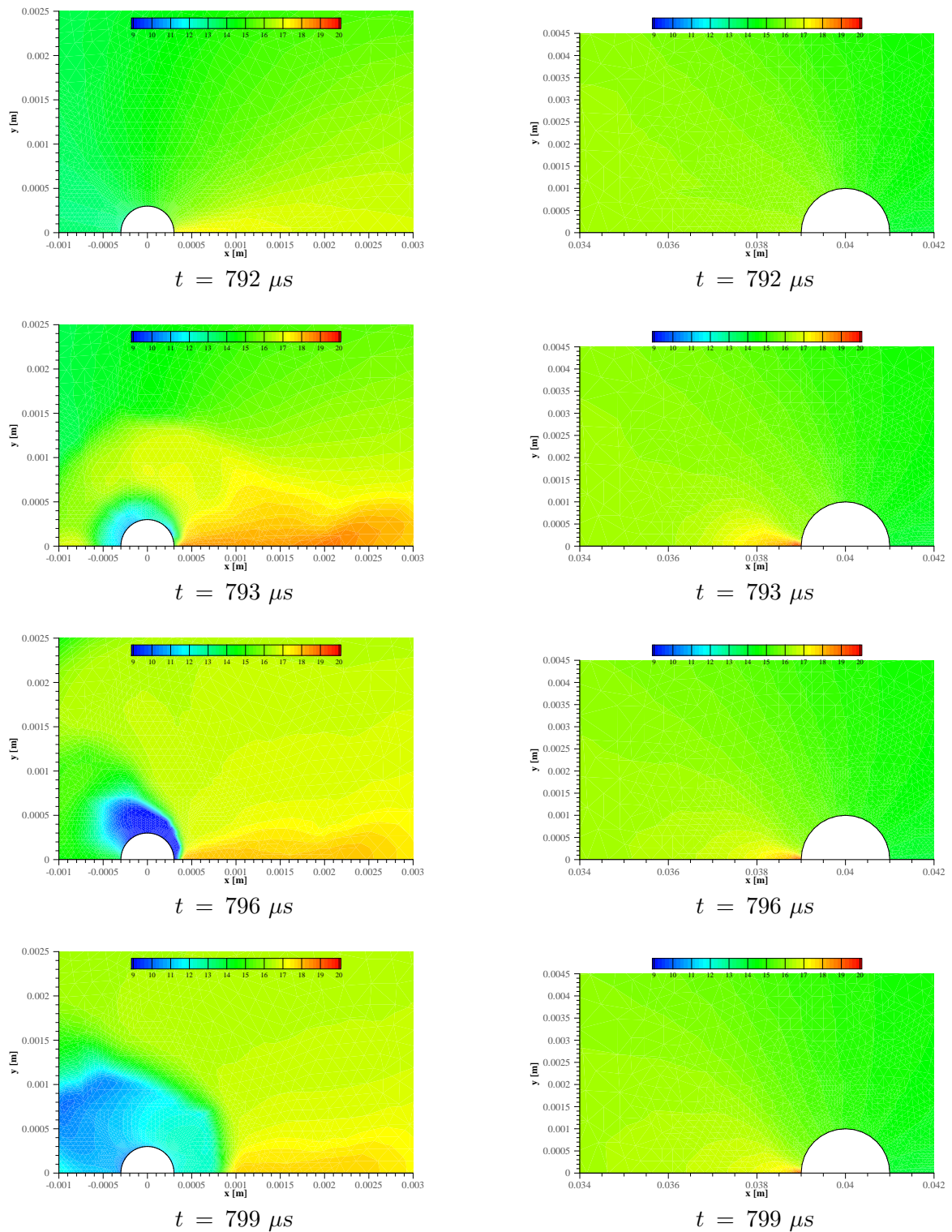
- Au premier temps représenté ( $t = 792/793 \mu s$ ), un champ électrique de forte intensité s'est développé autour de chacune des électrodes. Dans les temps qui précèdent, une charge d'espace grandissante s'est formée à proximité de l'anode, augmentant la valeur du potentiel dans cette région. En se propageant dans l'espace inter-électrodes, ce nuage de charges provoque une chute du potentiel sur une distance de plus en plus courte. L'intensité du champ électrique à la cathode a ainsi progressivement augmenté jusqu'à devenir beaucoup plus importante que celle imposée par le champ électrostatique.
- À l'instant suivant ( $t = 793/794 \mu s$ ), un nombre important de particules sont apparues à proximité des deux électrodes, induisant une charge d'espace suffisante pour provoquer un écrantage partiel du champ. Aux instants précédents, de nombreux ions positifs et électrons sont créés à la cathode du fait de la forte intensité du champ électrique. Les ions positifs produits par ionisation rejoignent rapidement la cathode et contribuent à la production d'électrons par le mécanisme d'émission secondaire. Les électrons ainsi créés augmentent l'efficacité des processus d'ionisations à la cathode, mais aussi à l'anode. Au bout d'un certain temps la charge d'espace à proximité de la cathode est suffisante pour écranter le champ. Un nuage d'électrons de forte densité est évacué vers l'anode, où il contribue aux processus d'ionisation. Une charge d'espace capable d'écranter le champ s'y forme alors.
- Au temps  $t = 796 \mu s$ , l'écrantage du champ est maintenant presque total et les espèces commencent à être évacuées lentement.
- Au bout d'un certain temps ( $t = 799 \mu s$ ), la densité de particule a suffisamment diminuer pour permettre au champ électrique de se reconstruire. Les espèces restantes s'évacuent plus rapidement et l'ionisation des particules peut à nouveau avoir lieu. Dans les temps suivant, la charge d'espace va se reconstituer jusqu'à ce qu'un nouveau cycle se déclenche de manière identique.

Bien que ce cycle soit correctement reproduit par le modèle radial, une différence apparaît toutefois. Le nuage d'ions positifs à la cathode est créé non pas au niveau de l'axe inter-électrodes mais à une hauteur comprise entre 0,5 et 1 mm. Cet écart par rapport au modèle complet peut s'expliquer par la différence du degré de raffinement du maillage dans le domaine  $\Omega_\varepsilon$ , plus important pour le modèle complet.

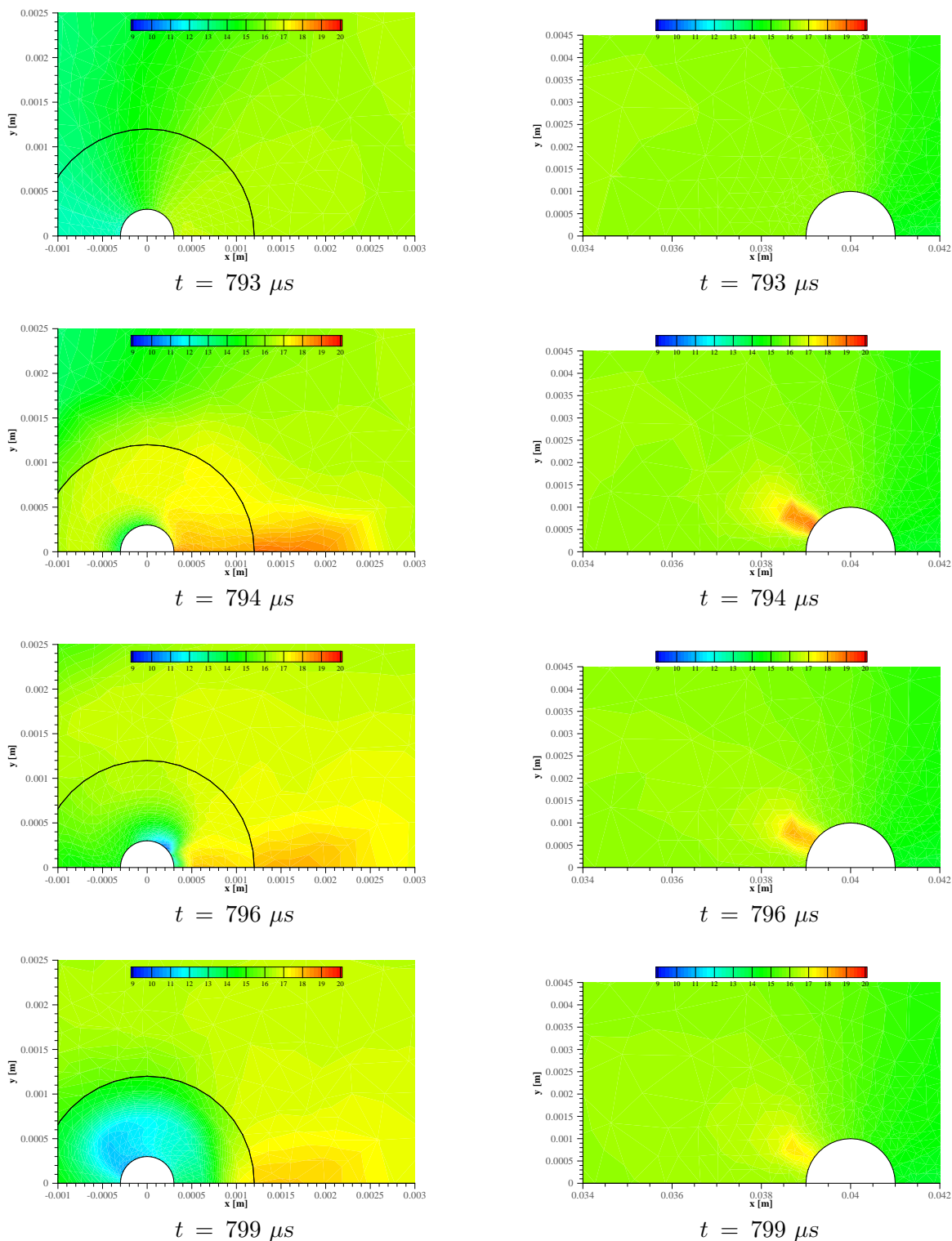
### 6.4.4 Comparaison des temps de calcul

Une comparaison du ratio des différents temps de calcul obtenus sur celui du modèle référence est représenté figure 6.32. Cette comparaison met tout d'abord en évidence le coût important qu'a le raffinement de maillage lorsque seul le modèle complet est mis en oeuvre.



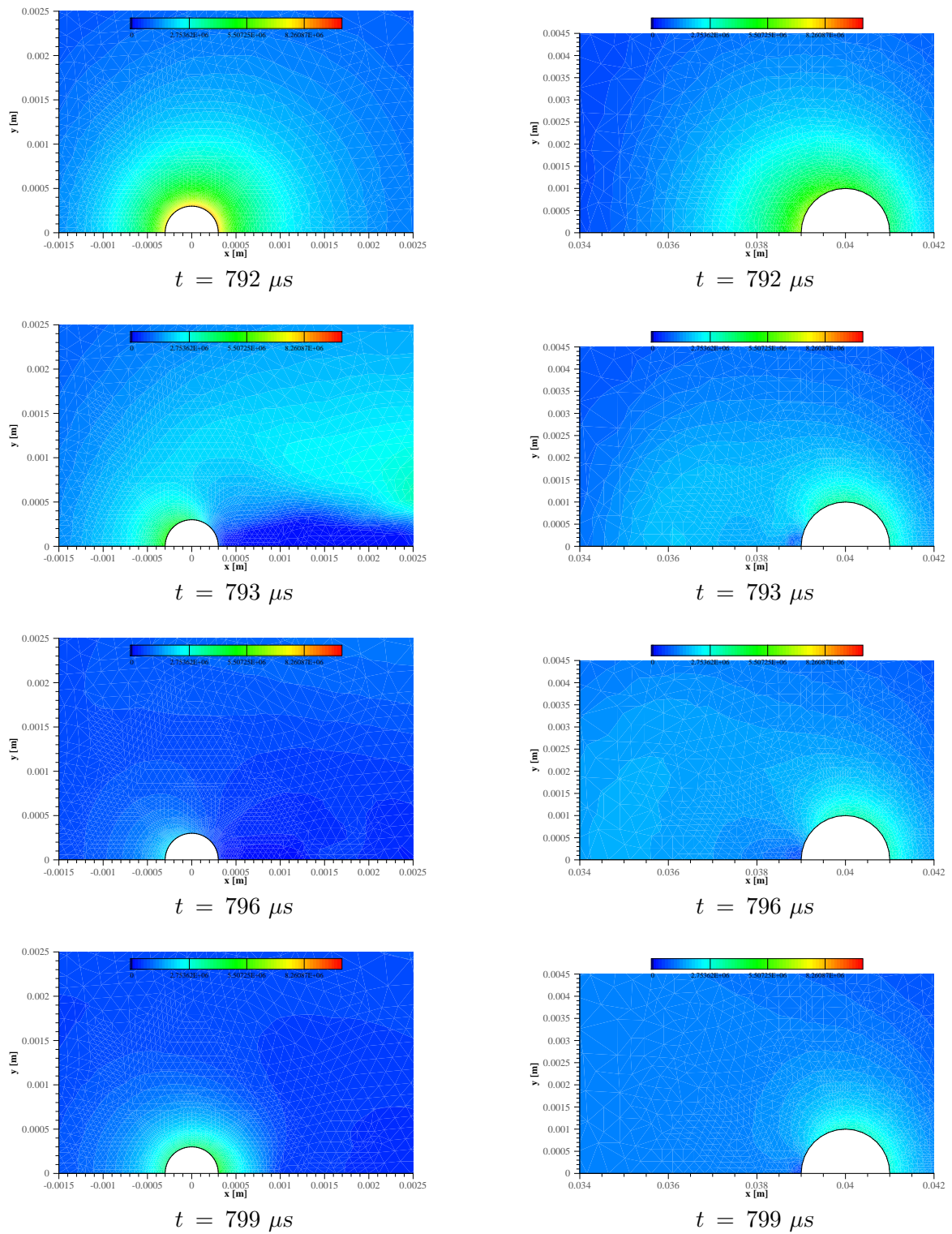


**Figure 6.28** Fil-Fil 2 (référence, cas 3) : Densité d'ions positifs (en  $\log_{10}$ ) à proximité de l'anode (gauche) et de la cathode (droite) durant un pulse de courant

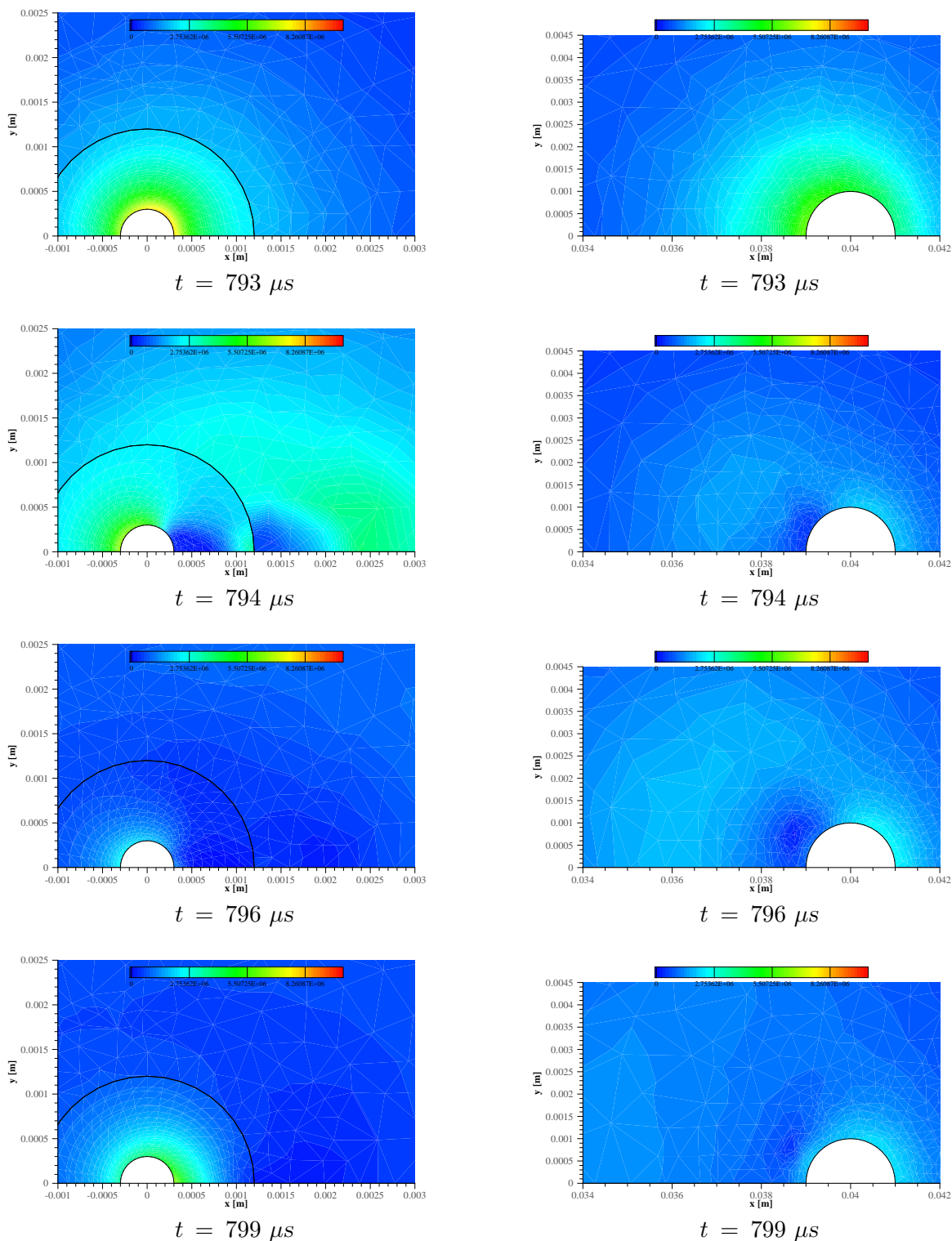


**Figure 6.29** Fil-Fil 2 (radial, cas 7) : Densité d'ions positifs (en  $\log_{10}$ ) à proximité de l'anode (gauche) et de la cathode (droite) durant un pulse de courant





**Figure 6.30** Fil-Fil 2 (référence, cas 3) : Intensité du champ électrique à proximité de l'anode (gauche) et de la cathode (droite) durant un pulse de courant

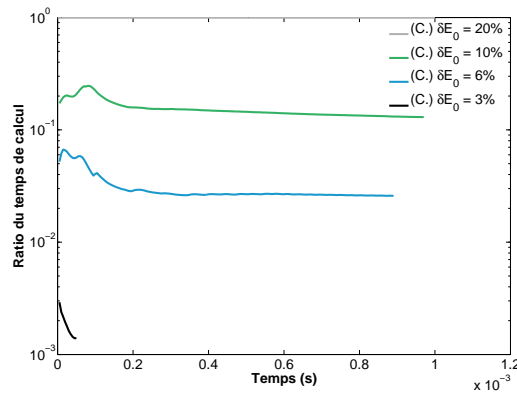


**Figure 6.31** Fil-Fil 2 (radial, cas 7) : Intensité du champ électrique à proximité de l'anode (gauche) et de la cathode (droite) durant un pulse de courant

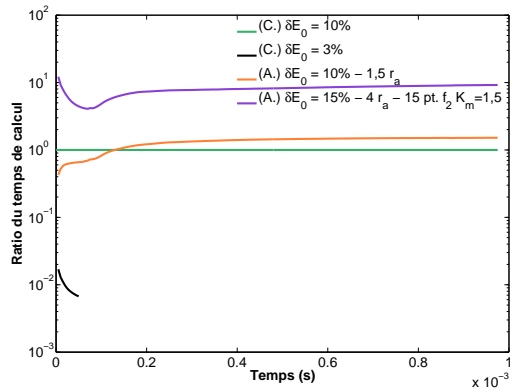
Chacune des étapes de raffinement du maillage effectuée ici augmente la complexité de presque un ordre de grandeur. Lorsque le maillage est finalement assez fin pour capter correctement la dynamique de la décharge, le temps de calcul est plus de 700 fois supérieur au maillage initialement testé.

Puisque le régime stationnaire, et non le régime de pulses, semble être la solution du modèle, le modèle asymptotique est capable de capter correctement la décharge à un coût bien moindre que le modèle de référence. Son utilisation permet ici de diminuer la complexité d'environ trois ordres de grandeur. Bien que ce gain soit en partie dû à l'utilisation d'un maillage beaucoup plus lâche pour discrétiser le domaine loin des électrodes, le gain apporté le modèle lui même reste particulièrement important.

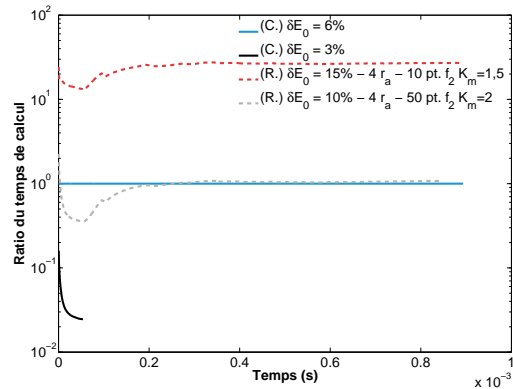
À l'instar du modèle complet, le modèle radial nécessite un maillage suffisamment fin pour capter correctement la dynamique du plasma : le gain obtenu est donc moins important que pour le modèle asymptotique. Ce gain sur le temps de calcul reste toutefois non négligeable puisque proche d'un facteur 10 pour des résultats équivalents.



Modèle de référence  
(simulations 1 à 4)



Modèle asymptotique  
(simulations 2, 4, 5 et 6)



Modèle radial  
(simulations 3, 4, 7 et 8)

**Figure 6.32** Fil-Fil 2 : Comparaison des temps de simulations obtenus pour chacun des modèles

### 6.4.5 Bilan sur la seconde configuration fil-fil

L'étude de cet dernier dispositif fil-fil a permis d'apporter de nombreuses informations quant-au comportement non seulement des modèles d'électrodes virtuelles, mais aussi du modèle de référence. En premier lieu, les résultats donnés par ce dernier présentent une très forte dépendance par rapport au maillage considéré. Au fur et à mesure du raffinement du maillage, le modèle prédit tout d'abord l'apparition d'un régime de pulses périodiques dont l'allure est similaire à ceux déjà observés expérimentalement [38] et numériquement [34] pour une configuration proche de celle étudiée ici. En choisissant un maillage suffisamment fin, l'écrantage initial du champ électrique ne se produit néanmoins plus et il est raisonnable de supposer qu'un régime stationnaire est la solution convergée du modèle.

En accord avec les observations faites dans les sections précédentes, le comportement de la décharge est principalement dépendant de sa dynamique à proximité de l'électrode stressée et l'intérêt d'une modélisation adaptée pour cette région est donc évident. Le modèle asymptotique permet en particulier la description correcte des décharges tendant vers un régime stationnaire tout en diminuant le temps de calcul de plus de deux ordres de grandeur. Outre sa meilleure précision, le principal intérêt du modèle radial réside dans sa capacité à correctement rendre compte d'éventuels régimes de pulses, comme cela a été montré. Bien que le gain en temps de calcul soit plus faible du fait du schéma de discrétisation choisi, il reste cependant proche d'un ordre de grandeur.

## 6.5 Synthèse

L'étude des modèles d'électrode virtuelle menée tout au long de ce chapitre a permis de valider leur utilisation pour la simulation de décharges couronnes positives en dimension 2 d'espace et a mis en évidence l'influence de chacune des hypothèses faites sur les résultats obtenus. De manière générale, le comportement de la décharge et la distribution de la force dans le domaine sont bien reproduits par ces modèles, ce pour un temps de calcul bien inférieur à celui demandé par une résolution classique des équations plasma.

De l'ensemble des configuration étudiées ressort une principale observation : un manque de raffinement dans le voisinage de l'électrode stressée induit une erreur importante sur le calcul du courant et la force. Le raffinement de ces zones de champ singulier ayant un coût souvent prohibitif en terme de temps de calcul, leur traitement par un modèle adapté est donc particulièrement justifié et permet d'obtenir une description correcte de la décharge tout en conservant un temps de calcul raisonnable.

# Conclusion et perspectives

---

Les décharges couronne sont le siège de phénomènes fortement non-linéaires et multi-échelles, à la fois en temps et en espace. Ceci les classe parmi les systèmes les plus complexes à modéliser et à étudier mathématiquement. D'un point de vue numérique, cette complexité se traduit par une convergence en maillage difficile et des temps de calcul souvent prohibitifs. Les travaux menés au cours de cette thèse avaient pour objectif le développement d'un outil numérique permettant la simulation de telles décharges de manière précise tout en conservant des temps de calcul raisonnables. Pour atteindre un tel objectif, la démarche adoptée a consisté en la création de modèles spécifiques – appelés ici modèles d'électrode virtuelle – pour le traitement des zones proches des électrodes, où le champ électrique singulier impose les plus fortes contraintes numériques. Loin des électrodes la décharge reste décrite par un modèle fluide "classique" et les échanges entre les deux modèles se font par un ensemble de conditions aux limites imposées le long des frontières reliant les différents domaines.

Afin de construire de tels modèles, la singularité de champ électrique induite par un fil ou par une pointe a tout d'abord été étudiée. Une analyse asymptotique de l'équation de Poisson a montré que la charge d'espace n'avait que très peu d'influence sur le champ électrique à proximité de l'électrode et qu'elle pouvait par conséquent être négligée dans un petit domaine englobant la singularité, dont le rayon est noté  $\varepsilon$ . La validité d'une telle hypothèse a été vérifiée par le biais d'une estimation *a priori* montrant la décroissance de la norme  $H^1$  de l'erreur en  $o(\varepsilon \ln(\varepsilon/a))$  pour un fil et en  $o(\varepsilon)$  pour une pointe. Cette étude a également permis de vérifier de manière théorique que, au voisinage d'un fil, la composante radiale du champ électrique prévaut de beaucoup sur sa composante angulaire, qui peut alors être négligée.

Ces résultats ayant été établis, un premier modèle approché, appelé modèle asymptotique, a été proposé pour la simulation de décharge filaires. À proximité de l'électrode, celui-ci néglige l'effet de la charge d'espace, suppose le champ radial et considère l'ionisation comme la réaction prépondérante. En considérant en plus les équations de transport sous leur forme stationnaire, le modèle 1D finalement obtenu donne une description quasi-analytique de la décharge au voisinage de la singularité de champ électrique. D'un point de vue numérique, ce modèle

s'est montré capable de reproduire correctement la dynamique des décharges électriques en l'absence d'écrantage du champ électrique, ce malgré les nombreuses hypothèses faites lors de sa construction. N'étant soumis à aucune contrainte de pas de temps ni de maillage, son utilisation permet une diminution du temps de calcul de plus d'un ordre de grandeur au prix d'une erreur raisonnable. En augmentant la zone d'influence du modèle, l'approximation faite sur le champ perd cependant de sa validité et l'erreur croît rapidement. Réintroduire l'influence de la charge d'espace sur le champ électrique tout en conservant une formulation stationnaire pour les équations de transport constituerait une évolution très intéressante pour ce modèle. Ceci permettrait d'en améliorer la qualité sans perdre le caractère quasi-analytique de la solution. Nous avons néanmoins vu dans ce manuscrit qu'un tel modèle ne conserve pas le courant de décharge et un travail sur ce point doit donc tout d'abord être effectué.

Les résultats encourageants obtenus avec le modèle asymptotique nous ont par la suite amenés à mettre en oeuvre un second modèle approché, appelé modèle radial. Afin de pouvoir rendre compte de l'écrantage du champ électrique, celui-ci tient compte de l'influence de la charge d'espace sur le champ électrique à proximité de l'électrode. Il est également instationnaire, considère l'ensemble de la cinétique chimique et ne conserve finalement que l'hypothèse sur la direction du champ électrique. À l'inverse du modèle asymptotique, ce modèle n'admet pas de solution analytique et nécessite donc une résolution numérique. Afin d'obtenir une preuve de principe sur la validité de ce modèle, le choix du schéma de discrétisation pour les équations de transport s'est porté dans ce manuscrit sur une méthode d'intégration explicite. Les résultats obtenus à l'aide de ce modèle se sont montrés très proches de ceux donnés par une résolution du modèle de plasma "classique" par une méthode de type volumes finis. Plus précis que le modèle asymptotique, ce modèle est néanmoins dépendant du maillage et est également sujet à des contraintes de stabilité sur le pas de temps du fait du schéma de discrétisation choisi. Malgré tout, le gain en terme de temps de calcul reste proche d'un ordre de grandeur à maillage équivalent, ce du fait de la condition CFL moins contraignante en dimension 1 qu'en dimension 2. Dans l'optique d'une réduction du temps de calcul, le choix d'un schéma de discrétisation explicite est ici assez limitant : le gain en temps de calcul n'augmente que très peu lorsque la zone d'influence du modèle radial est agrandie et le raffinement du maillage à proximité de la singularité de champ reste coûteux. La mise en oeuvre d'un schéma de discrétisation implicite pour les équations de transport 1D est donc nécessaire afin d'atteindre la convergence en maillage tout en conservant des temps de calcul raisonnables. Bien que la mise en oeuvre d'un tel schéma soit relativement simple en dimension 1, il convient d'étudier avec soin son couplage avec le modèle 2D, ainsi que son influence sur le comportement de la décharge (diffusion numérique, précision des résultats, etc.).

De manière générale, l'ensemble des résultats obtenus valide le principe de la méthode d'électrode virtuelle présentée dans cette thèse. Les tests numériques réalisés ont démontré qu'une modélisation adéquate des zones de champ singulier autorise sans difficulté un gain de plus d'un ordre de grandeur sur le temps de calcul nécessaire à la simulation de décharges couronnes. Confrontés à un champ électrique très singulier, ces modèles d'électrode virtuelle se sont avérés plus efficaces encore. Là où une résolution explicite "classique" ne permet pas d'obtenir de résultats sur des temps longs du fait de forts problèmes de convergence en maillage, les modèles développés dans ce manuscrit se sont montrés capables de décrire correctement l'évolution de la décharge, et ce pour un coût en temps de calcul réduit de un jusqu'à plus de deux ordres de grandeur selon le modèle mis en oeuvre. Outre cette diminution du temps de calcul, ces modèles autorisent également un raffinement de maillage local aux zones de champ fort très simple à implémenter. Ils permettent ainsi de conserver un maillage plus lâche dans le reste du domaine et donc de ne pas augmenter inutilement la complexité du calcul.

---

De manière plus spécifique, chacun des modèles développés au cours de cette thèse possède des forces et des faiblesses qui lui sont propres. Du fait des hypothèses faites lors de sa construction, le domaine de validité du modèle asymptotique se limite aux décharges ne présentant pas d'écrantage du champ électrique. Son principal avantage réside dans la forme quasi-analytique de sa solution qui, comme cela a été rappelé plus haut, rend ce modèle indépendant du pas de temps et du maillage. Si l'on dispose de connaissances *a priori* sur le comportement attendu de la décharge, ce modèle peut alors être très intéressant pour, par exemple, effectuer une étude paramétrique simple et rapide du dispositif. Le modèle radial constitue quant à lui un modèle intermédiaire entre le modèle asymptotique et le modèle plasma "classique" et sa mise en oeuvre est plus indiquée pour la simulation de décharge présentant un écrantage du champ électrique, celui-ci ayant montré sa capacité à reproduire un tel phénomène.

Les capacités d'évolution de chacun des modèles diffèrent assez fortement. Immédiate dans le cas du modèle radial, la complexification du modèle de cinétique chimique semble difficile dans le cas du modèle asymptotique. En effet, l'ajout des réactions liées aux métastables  $O_2^*$  ne permettrait *a priori* pas de conserver une solution quasi-analytique. De même, la prise en compte du phénomène de diffusion lors du transport des espèces semble difficile pour ce modèle et là encore le modèle radial présente une plus grande capacité d'adaptation. Bien que celui-ci soit également 1D, l'ajout d'une étape de transport transverse est tout à fait envisageable et ne présente *a priori* pas de grande difficulté. Les échanges de densités le long de la frontière de raccord se faisant dans la direction radiale, une telle étape ne modifierait pas le couplage entre les modèles et permettrait de prendre en compte la composante angulaire de la vitesse, que celle-ci provienne de la diffusion, de la vitesse de l'écoulement ou bien de la direction du champ électrique. Outre l'enrichissement du modèle et le gain en précision apporté, ceci permettrait de traiter les géométries de type pointe, qui, contrairement aux électrodes filaires, induisent un champ électrique fortement non radial. Ce type d'électrode présente une singularité de champ à l'intérieur même du domaine de calcul qui rend la simulation de la décharge particulièrement difficile. La mise en oeuvre d'un modèle d'électrode virtuelle pour cette configuration serait donc particulièrement intéressante du point de vue de la réduction du temps de calcul.

En résumé, le modèle asymptotique constitue donc un modèle rapide (pas de contraintes de pas de temps), simple à implémenter (solution quasi-analytique) et à utiliser (pas de contraintes de maillage). Celui-ci est particulièrement intéressant pour étudier l'influence des différents paramètres du dispositif (rayon des électrodes, tension appliquée, etc.) sur la décharge. Son domaine de validité est cependant assez restreint et sa capacité à évoluer reste relativement limitée. Lorsqu'une précision plus grande est recherchée, la mise en oeuvre du modèle radial est plus indiquée. Sa capacité à évoluer est également plus grande, comme nous l'avons décrit plus haut. Les phénomènes pour l'instant négligés (diffusion, etc.) peuvent être réintroduits un à un, le tout en recherchant une implémentation permettant de conserver un gain en temps de calcul important.

Notons pour finir que la capacité du modèle radial à reproduire un régime de pulses n'a que partiellement été prouvée. Les pulses périodiques obtenus étant d'origine numérique, ceux-ci disparaissent lorsque le maillage est suffisamment raffiné et la comparaison entre les différents modèles est donc difficile. Les premiers résultats obtenus pour ces régimes de pulses numériques montrent cependant que le modèle radial et le modèle de référence se comportent de manière similaire lorsque l'écrantage du champ électrique se produit. Afin de pouvoir effectuer une comparaison plus approfondie, il serait intéressant de trouver une configuration admettant un régime de pulses comme solution convergée. L'existence ou non d'une telle solution n'est néanmoins pas évidente et un enrichissement du modèle (ajout de réactions au modèle

de cinétique chimique, prise en compte du diélectrique, etc.) est à considérer.



# Annexes



## Annexe A

# Valeurs des coefficients de la cinétique chimique

---

### Coefficients de transport et de réaction

Les coefficients nécessaires à la résolution des équations de transport des espèces chargées et de la cinétique chimique sont décrits dans cette section. Rappelons tout d'abord le système de réaction le plus complexe considéré dans ce manuscrit. Celui-ci tient compte des réactions d'ionisation et d'attachement des électrons avec les particules neutres, ainsi que des réactions de recombinaison ions-ions et électrons-ions. Les termes sources liés à la cinétique chimique s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\omega_e &= \alpha n_e |\mathbf{u}_e| - \eta n_e |\mathbf{u}_e| - \beta n_e n_+, \\ \omega_+ &= \alpha n_e |\mathbf{u}_e| - \beta n_e n_+ - \beta n_- n_+, \\ \omega_- &= \eta n_e |\mathbf{u}_e| - \beta n_- n_+, \end{aligned}$$

où  $n_k$  et  $\mathbf{u}_k$  désignent respectivement la densité et la vitesse de l'espèce  $k$  et où  $\alpha$  est le coefficient d'ionisation ( $\text{m}^{-1}$ ),  $\eta$  est le coefficient d'attachement ( $\text{m}^{-1}$ ) et  $\beta$  est le coefficient de recombinaison ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ).

Un certain nombre de coefficient sont choisis indépendants du champ électrique. C'est le cas du coefficient de recombinaison, dont la valeur est prise égale à celle utilisée par Morrow et Lowke [40]. Nous avons donc :

$$\beta = 2 \times 10^{-13} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Les mobilités électroniques sont également supposées constantes et leur valeur est fixée à :

$$\mu_+ = \mu_- = 3.4617 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}.$$

Le reste des coefficients de réaction et de transport concerne les électrons et ceux-ci sont déterminé à l'aide du code numérique BOLSIG pour un mélange composé à 80% de  $N_2$  et à 20%

de  $O_2$ . Ce code permet d'obtenir les coefficients électroniques en fonction du champ électrique réduit  $E/N$ , où  $E$  est l'intensité du champ électrique et où  $N$  est la densité totale du gaz ( $N \simeq 2,7 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$  pour l'air à pression atmosphérique). L'ensemble des coefficients donnés par BOLSIG sont reportés dans le tableau A.I. Celui-ci donne dans l'ordre : le champ réduit  $E/P$  en  $\text{V cm}^{-1} \text{ torr}^{-1}$ , le champ réduit  $E/N$  en Td, la mobilité électronique en  $\text{torr cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ , le coefficient de diffusion en  $\text{torr cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , l'énergie électronique en eV, le coefficient d'ionisation total  $\alpha/P$ , le coefficient d'attachement  $\eta/P$ , le coefficient d'ionisation  $\alpha_{N_2}/P$  de  $N_2$  et le coefficient d'ionisation  $\alpha_{O_2}$  de  $O_2$  en  $\text{cm}^{-1} \text{ torr}^{-1}$ . L'ionisation des électrons est la somme de celle de tous les ions positifs et  $\alpha = \alpha_{N_2} + \alpha_{O_2}$ .

**Tableau A.I** Coefficients de transport, d'ionisation et d'attachement en fonction du champ électrique réduit pour un gaz composé de 80% de  $N_2$  et 20% d' $O_2$

$E/P : \text{V cm}^{-1} \text{ torr}^{-1}$		$\mu_e : \text{torr cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$				$\alpha, \eta, \alpha_{O_2}, \alpha_{N_2} : \text{cm}^{-1} \text{ torr}^{-1}$		
$E/N : \text{Td}$		$D_e : \text{torr cm}^2 \text{ s}^{-1}$		Énergie : eV				
$E/P$	$E/N$	$\mu_e$	$D_e$	Énergie	$\alpha/P$	$\eta/P$	$\alpha_{N_2}/P$	$\alpha_{O_2}/P$
0.3220E+02	0.1000E+03	0.3617E+06	0.7882E+06	0.2605E+01	0.4366E-02	0.9848E-02	0.1364E-02	0.3002E-02
0.6440E+02	0.2000E+03	0.3109E+06	0.1190E+07	0.5195E+01	0.1324E+00	0.1318E-01	0.7991E-01	0.5253E-01
0.9660E+02	0.3000E+03	0.2832E+06	0.1413E+07	0.6879E+01	0.5037E+00	0.1074E-01	0.3454E+00	0.1583E+00
0.1288E+03	0.4000E+03	0.2635E+06	0.1582E+07	0.8335E+01	0.1074E+01	0.8624E-02	0.7728E+00	0.3014E+00
0.1610E+03	0.5000E+03	0.2483E+06	0.1732E+07	0.9729E+01	0.1760E+01	0.7114E-02	0.1297E+01	0.4636E+00
0.1932E+03	0.6000E+03	0.2361E+06	0.1869E+07	0.1109E+02	0.2517E+01	0.5983E-02	0.1880E+01	0.6366E+00
0.2254E+03	0.7000E+03	0.2264E+06	0.1996E+07	0.1240E+02	0.3270E+01	0.5128E-02	0.2465E+01	0.8056E+00
0.2576E+03	0.8000E+03	0.2178E+06	0.2121E+07	0.1373E+02	0.4039E+01	0.4469E-02	0.3063E+01	0.9762E+00
0.2898E+03	0.9000E+03	0.2110E+06	0.2236E+07	0.1500E+02	0.4732E+01	0.3936E-02	0.3604E+01	0.1128E+01
0.3220E+03	0.1000E+04	0.2046E+06	0.2358E+07	0.1635E+02	0.5466E+01	0.3518E-02	0.4177E+01	0.1289E+01
0.3542E+03	0.1100E+04	0.1989E+06	0.2476E+07	0.1770E+02	0.6159E+01	0.3171E-02	0.4719E+01	0.1440E+01
0.3864E+03	0.1200E+04	0.1942E+06	0.2590E+07	0.1902E+02	0.6783E+01	0.2877E-02	0.5208E+01	0.1575E+01
0.4186E+03	0.1300E+04	0.1899E+06	0.2705E+07	0.2037E+02	0.7392E+01	0.2630E-02	0.5686E+01	0.1706E+01
0.4508E+03	0.1400E+04	0.1860E+06	0.2821E+07	0.2174E+02	0.7964E+01	0.2418E-02	0.6135E+01	0.1829E+01
0.4830E+03	0.1500E+04	0.1825E+06	0.2937E+07	0.2312E+02	0.8501E+01	0.2234E-02	0.6557E+01	0.1944E+01
0.5152E+03	0.1600E+04	0.1795E+06	0.3052E+07	0.2450E+02	0.8982E+01	0.2072E-02	0.6937E+01	0.2045E+01
0.5474E+03	0.1700E+04	0.1766E+06	0.3170E+07	0.2591E+02	0.9451E+01	0.1929E-02	0.7307E+01	0.2144E+01
0.5796E+03	0.1800E+04	0.1739E+06	0.3292E+07	0.2738E+02	0.9904E+01	0.1803E-02	0.7665E+01	0.2238E+01
0.6118E+03	0.1900E+04	0.1713E+06	0.3420E+07	0.2890E+02	0.1035E+02	0.1686E-02	0.8020E+01	0.2331E+01
0.6440E+03	0.2000E+04	0.1691E+06	0.3545E+07	0.3040E+02	0.1073E+02	0.1582E-02	0.8322E+01	0.2407E+01

**Remarque.**

*La table des coefficients présentée ici ne comporte qu'une partie des valeurs utilisées pour les simulations,. Celle-ci contient en fait les coefficients de transport et de réaction pour 200 valeurs du champ électrique réduit.*

**Coefficients pour l'étude du dispositif de Bérard et al.**

Un des dispositifs étudiés dans ce manuscrit est la configuration fil-fil sur laquelle ont portés les travaux de Bérard *et al.* [6] en matière de simulations numériques. Afin de pouvoir comparer nos résultats avec leur simulations, des coefficients de transport et de réaction identiques sont

choisis lorsque cela est possible. La mobilité électronique est notamment calculée à partir de l'intensité du champ électrique  $|\mathbf{E}|$  par la formule donnée par Chen et Davidson [7], à savoir :

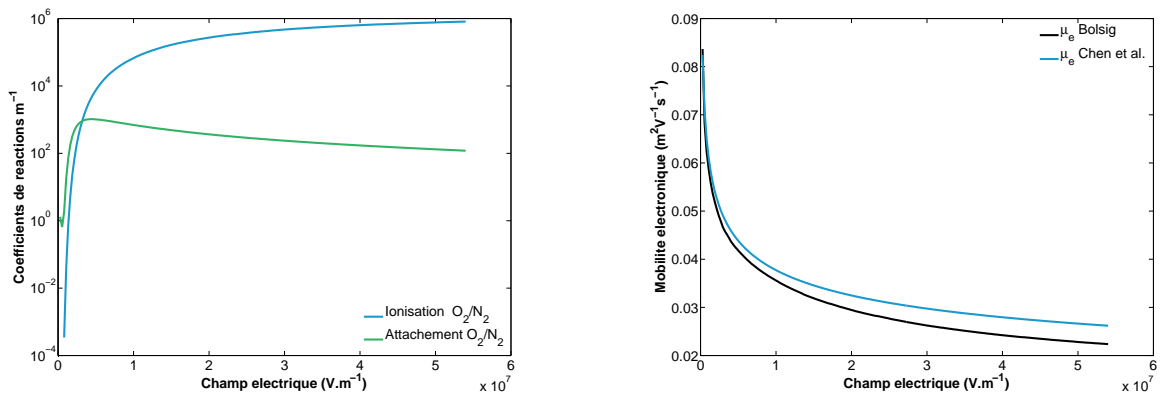
$$\mu_e = 1,2365 |\mathbf{E}|^{-0,2165} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

Les mobilités ioniques sont indépendantes du champ électrique et valent  $2.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$  pour les ions positifs et  $2.7 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$  pour les ions négatifs. Les coefficients de réaction  $\alpha$  et  $\eta$  pour l'ionisation et pour l'attachement électronique sont toujours calculés à l'aide du code BOLSIG.

## Tracé des différents coefficients de transport et de réactions utilisés

Les coefficients d'ionisation et d'attachement fournis par le code BOLSIG sont représentés figure A.I. L'importance du coefficient d'ionisation par rapport au coefficient d'attachement lorsque le champ est suffisamment intense apparaît ici clairement. Pour un champ dont l'intensité avoisine les  $3,2 \text{ kV m}^{-1}$ , les deux coefficients sont du même ordre de grandeur. Lorsque le champ devient plus intense le coefficient d'attachement décroît légèrement, tandis que le coefficient d'ionisation continue à augmenter très rapidement. En présence d'un champ électrique faible, c'est à l'inverse le coefficient d'attachement qui est prépondérant. Celui-ci décroît alors beaucoup plus que le coefficient d'ionisation, qui très rapidement n'a plus d'influence.

Les mobilités électroniques calculées à l'aide de BOLSIG où de la formule utilisée par Chen et Davidson sont représentés sur la même figure. Les valeurs restent très proches l'une de l'autre et évoluent de manière similaire par rapport à l'intensité du champ : la mobilité est importante en présence de champ de faible intensité et diminue lorsque le champ électrique devient plus intense. La différences entre la mobilité minimale et maximale reste cependant inférieure à un ordre de grandeur.



Coefficients d'ionisation et d'attachement

Mobilité électronique

**Figure A.I** Coefficient d'ionisation, d'attachement et mobilités électronique obtenus par le code BOLSIG où par la formule de Chen et Davidson



## Annexe B

# Solution quasi-analytique d'une décharge fil-cylindre stationnaire

---

Les dispositifs composés de deux cylindres coaxiaux font partie des cas test les plus simples à étudier. En considérant une cinétique chimique limitée aux réactions d'ionisation par choc électronique, il est possible d'obtenir une description quasi-analytique de la décharge à l'état stationnaire. Pour ce faire, il convient de résoudre les équations de dérive-réaction stationnaire pour un plasma composé de deux espèces, à savoir les électrons et les ions, respectivement repérés par les indices  $e$  et  $+$ . Le dispositif étudié ici est donc constitué de deux cylindres coaxiaux. L'électrode intérieure, de rayon  $a$ , est portée à une tension  $\varphi_0$ , tandis que l'électrode extérieure, de rayon  $b$  est mise à la masse. L'émission secondaire, de coefficient  $\gamma$ , permet de générer un flux d'électrons à la cathode permettant l'entretien de la décharge.

### Modélisation du plasma

Le problème étant unidimensionnel, celui-ci est décrit selon la coordonnée polaire  $r$  (distance au centre des électrodes). Les équations de transport-réaction s'écrivent donc sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\Gamma_e}{dr} = -\alpha\Gamma_e, \\ \frac{d\Gamma_+}{dr} = -\alpha\Gamma_e, \end{cases}$$

où  $\Gamma_k$  est le flux de densité de l'espèce  $k$  défini par  $\Gamma_k = \text{signe}(z_k) r n_k \mu_k \mathbf{E}$ , avec  $z_k$  la charge de l'espèce  $k$ ,  $n_k$  son nombre de densité,  $\mu_k$  sa mobilité et  $\mathbf{E}$  le champ électrique. Le coefficient d'ionisation  $\alpha$  dépend ici du champ électrique réduit  $|\mathbf{E}|/n$ , où  $n$  est la densité de l'air. Ces équations sont couplées à l'équation de Poisson suivante pour le champ électrique :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\mathbf{E}) = \frac{q_e}{\varepsilon_0} (n_+ - n_e),$$

## Annexe B. Solution quasi-analytique d'une décharge fil-cylindre stationnaire

---

où  $q_e$  est la charge élémentaire et  $\varepsilon_0$  est la permittivité du milieu. À cet ensemble d'équations sont associées les conditions aux limites suivantes :

$$\Gamma_+(a) = 0, \quad \Gamma_e(b) = -\gamma \Gamma_+(b) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mathbf{E} dr = \varphi_0.$$

En sommant les équations de transport multipliées par la charge élémentaire  $q_e$  et par le nombre de charge  $z_k$ , nous avons alors :

$$\frac{d}{dr} (j_e + j_+) = 0,$$

où  $j_k$  est le flux de courant de l'espèce  $k$  défini par  $j_k = q_e z_k n_k \mu_k \mathbf{E}$ . Le courant total de la décharge  $I$  (exprimé en  $A.m^{-1}$ ) est donc constant et nous avons :

$$r(n_e \mu_e + n_+ \mu_+) \mathbf{E} = \frac{I}{2\pi q_e}.$$

Introduisons à présent  $\beta$ , la variable réduite de  $n_e$  définie par :

$$\beta = \frac{n_e \mu_e}{n_e \mu_e + n_+ \mu_+}.$$

Cette variable satisfait l'équation de transport-réaction suivante :

$$\frac{d\beta}{dr} = -\alpha \beta,$$

à laquelle est associée les conditions aux limites  $\beta(a) = 1$  et  $\beta(b) = \gamma/(1 + \gamma)$ . Cette équation est du premier ordre possède une condition limite en trop et est donc surdéterminée. En réalité le système mathématique est mal posé du point de vue de l'unicité, la solution nulle satisfaisant toujours le système.

En introduisant la variable  $\beta$  dans l'équation de Poisson, celle-ci peut être écrite de la façon suivante :

$$\frac{d}{dr} (r \mathbf{E})^2 = \frac{I}{\varepsilon_0 \pi} r \left( \frac{1 - \beta}{\mu_+} - \frac{\beta}{\mu_e} \right).$$

Le champ électrique est donc donné par :

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{r} \sqrt{A + C \int_a^r f(s) ds}, \quad \text{avec} \quad f(r) = r \left( \frac{1 - \beta}{\mu_+} - \frac{\beta}{\mu_e} \right).$$

Les constantes  $A$  et  $C$  sont des paramètres à déterminer pour satisfaire  $\int_a^b \varphi_0 dr$  et  $\beta(a) = 1$ . Après normalisation, le champ électrique peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{E} = \frac{\varphi_0}{r} \left( \frac{\sqrt{1 + C \int_a^r f(s) ds}}{\int_a^b \frac{1}{r} \sqrt{1 + C \int_a^r f(s) ds} dr} \right).$$

La variable  $\beta$  est quant-à-elle donnée par :

$$\beta = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \exp \left( \int_r^b \alpha(|\mathbf{E}|) ds \right)$$



et doit vérifier  $\beta(a) = 1$ . L'obtention du coefficient  $C$  détermine donc entièrement la solution du système. Le problème est fortement non-linéaire et l'existence d'une solution n'est pas garantie. Le courant de décharge est également déterminé à partir de la constante  $C$  de la façon suivante :

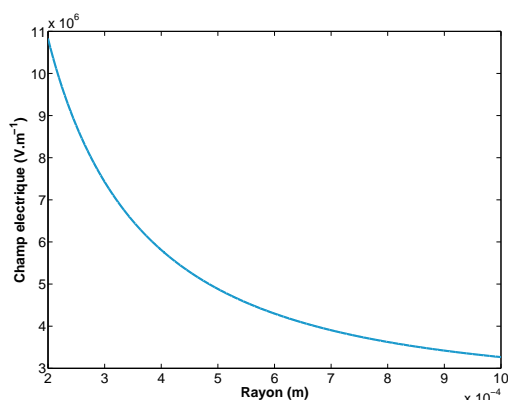
$$I = C \varepsilon_0 \pi \left( \frac{\varphi_0}{\int_a^b \frac{1}{r} \sqrt{1 + C \int_a^r f(s) ds} dr} \right)^2.$$

## Méthode d'intégration

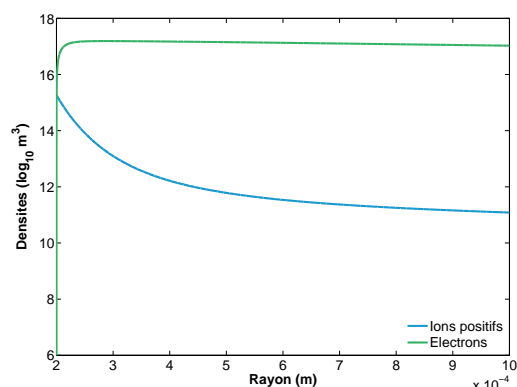
La constante  $C$  est déterminée de façon numérique à l'aide d'une pseudo méthode de dichotomie portant sur la fonction  $J = \beta(a) - 1$ . L'initialisation est faite avec  $C = 0$  qui permet de calculer le champ électrique (électrostatique pour cette valeur de  $C$ ). On calcule alors la fonction  $f$ , puis les valeurs  $J_{min}$  et  $J_{max}$  à partir de bornes  $C_{min}$  et  $C_{max}$ . On commence alors le processus de dichotomie. la difficulté réside dans l'estimation de ces bornes de l'intervalle sur la constante  $C$  qui permet de démarrer la dichotomie.

## Résultats numériques

Considérons une électrode intérieure de rayon  $a = 0,2$  mm portée à une tension  $\varphi_0 = 4$  kV et une électrode extérieure de rayon  $b = 1$  mm mise à la masse. Le coefficient d'émission secondaire est fixé à  $\gamma = 10^{-4}$  et l'espace inter-électrodes est discrétisé par 16 000 points. La mobilité électronique et le coefficient d'ionisation sont calculés à partir du code BOLSIG et la mobilité ionique est fixée à  $\mu_+ = 3,4617 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Le courant de décharge  $I$  donné par la solution quasi-analytique est alors de  $120,6 \text{ mA.m}^{-1}$ . Le champ électrique et les densités d'espèces chargées calculés sont représentés figure B.I.



Champ électrique



Densités des espèces chargées

**Figure B.I** Champ électrique et densités d'espèces chargées données par la solution quasi-analytique pour une configuration fil-cylindre



# Bibliographie

---

- [1] Abramowitz, M and Stegun, I A (1964) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover : New York
- [2] Akishev, Yu S, Kochetov, I V, Loboiko, A I and Napartovich, A P (2006) 'Numerical simulations of Trichel pulses in a negative corona in air', *Plasma Physics Reports*, 28(12), 1049-1059
- [3] Boeuf, J P and Pitchford, L C (2005) 'Electrohydrodynamic force and aerodynamic flow acceleration in surface dielectric barrier discharge', *J. Appl. Phys.*, 97, 103307.1-103307.10
- [4] Brézis, H (1999) *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson
- [5] Burkardt, J (2005) *Reverse Cuthill McKee Ordering*, [http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/f\\_src/rm/rm.html](http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/f_src/rm/rm.html)
- [6] Bérard, P, Lacoste, D A and Laux, C O (2007) 'Measurements and simulations of the ionic wind produced by a DC Corona Discharge in Air, Helium and Argon', dans *38th AIAA Plasmodynamics and Lasers Conference in conjunction with the 16th Int. Conf. on MHD Energy Conversion*
- [7] Chen, J and Davidson, J H (2002) 'Electron Density and Energy Distributions in the Positive DC Corona : Interpretation for Corona-Enhanced Chemical Reactions', *Plasma Chemistry and Plasm Processing*, 22(2), 199-224
- [8] Choe, H-H, Yoon, N S and D-I, Choi (2001) 'A new unconditionally stable algorithm for steady-state fluid simulation of high density plasma discharge', *Journal of Computational Physics*, 170, 550-561
- [9] Colella, P, Dorr, M R and Wake, D D (1999) 'A conservative Finite difference method for the numerical solution of plasma fluid equations', *Journal of Computational Physics*, 149, 168-193
- [10] Colver, G M and El-Khabiry, S (1997) 'Drag reduction by a DC corona discharge along an electrically conductive flat plate for small Reynolds number flow', *Physics of Fluids*, 9, 587-599
- [11] Colver, G M. and El-Khabiry, S (1999) 'Modeling of DC corona discharge along an electrically conductive flat plate with gas flow', *IEEE Transactions on industry applications*, 35, 387-394
- [12] CPAT, (2005) *BOLSIG+*, <http://www.laplace.univ-tlse.fr/BOLSIG-Resolution-de-l-equation-de>
- [13] CPAT, and Software, Kinema (1997) *BOLSIG*, <http://www.siglo-kinema.com/bolsig.htm>
- [14] Crispel, P, Degond, P and Vignal, M-H (2007) 'An asymptotic preserving scheme for the two-fluid Euler-Poisson model in the quasineutral limit', *Journal of Computational Physics*, 223, 208-234
- [15] Dautray, R and Lions, J-L (1988) *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques - Spectre des opérateurs*, Masson
- [16] Degond, P and Lucquin-Desreux, B (2007) 'Mathematical models of electrical discharges in air at atmospheric pressure : a derivation from asymptotic analysis', *Int. J. Computing Science and Mathematics*, 1(1), 58-97

- [17] Degond, P, Quinio, G and Rogier, F (2005) 'Asymptotic analysis of simple ionisation kinetics of air flows at atmospheric pressure', *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 38, 1371-82
- [18] Delcroix, J-L and Bers, A (1994) *Physique des plasmas*, InterÉditions/CNRS Éditions
- [19] Drallos, P J, Nagorny, V P and Williamson Jr, W (1995) 'A kinetic study of the local field approximation in simulations of AC plasma display panels', *Plasma Sources Science and Technology*, 4, 576-590
- [20] Dufour, G (2005) *Modélisation multi-fluide Eulérienne pour les écoulements diphasiques à inclusions dispersées*, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, France
- [21] Durbin, P A (1986) 'Asymptotic analysis of corona discharge from thin electrodes', *NASA Tech. Report*, TP-2645
- [22] Durbin, P A and Turyn, L (1987) 'Analysis of the positive DC corona between coaxial cylinders', *J. Phys. D :Appl. Phys.*, 20, 1490-1495
- [23] Elias, P-Q (2007) *Effet de plasmas sur une onde de choc dans un écoulement supersonique à Mach 3*, Thèse de l'École Centrale Paris
- [24] Forte, M, Jolibois, J, Pons, J, Moreau, E, Touchard, G and Cazalens, M (2007) 'Optimization of a dielectric barrier discharge actuator by stationary and non-stationary measurements of the induced flow velocity, application to airflow control', *Experiments in fluids*, 43(6), 917-928
- [25] Giovangigli, V (1999) *Multicomponent Flow Modeling*, Birkhäuser, Basel
- [26] Hagelaar, G J M (2000) *Modeling of microdischarges for display technology*, Thèse de l'Université Technique d'Eindhoven, Pays-Bas
- [27] Hagelaar, G J. and L.C., Pitchford (2005) 'Solving the Boltzmann equation to obtain electron transport coefficients and rate coefficients for fluid models', *Plasma Sources Science and Technology*, 14, 722-733
- [28] Jewell-Larsen, N E, Ran, H, Zhang, Y, Schwiebert, M, Honer, K A and Mamishev, A V (2009) 'Electrohydrodynamic (EHD) Cooled Laptop', dans *25th IEEE SEMI-THERM Symposium*
- [29] Kossyi, A, Kostinsky, A Yu, Matveyev, A A and Silakov, V P (1992) 'Kinetic scheme of the non-equilibrium discharge in nitrogen-oxygen mixtures', *Plasma Sources Sci. Technol.*, 1, 207-20
- [30] Lagmich, Y (2007) *Diagnostic et modélisation d'une décharge à barrière diélectrique pour le contrôle d'écoulement*, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, France
- [31] Li, S Z and Uhm, H S (2004) 'Investigation of electrical breakdown characteristics in the electrodes of cylindrical geometry', *Phys. of Plasmas*, 11, n.6, 3088-3095
- [32] Lowke, J J (1992) 'Theory of electrical breakdown in air – the role of metastable oxygen molecules', *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 25, 202-210
- [33] Massines, F. (2004) *Plasmas Froids : Génération, caractérisation et technologies*, Publications de l'Université de Saint-Étienne
- [34] Matéo-Vélez, J-C (2006) *Modélisation et simulation numérique de la génération de plasma dans les décharges couronnes et de son interaction avec l'aérodynamique*, Thèse de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France
- [35] Matéo-Vélez, J-C, Degond, P, Rogier, F, Séraudie, A and Thivet, F (2008) 'Modelling wire-to-wire corona discharge action on aerodynamics and comparison to experiment', *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 41, 035205.1-035205.11

- 
- [36] Moreau, E (2007) 'Airflow control by non-thermal plasma actuators', *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 40, 605-636
- [37] Moreau, E, Artana, G and Touchard, G (2004) 'Surface corona discharge along an insulating flat plate in air applied to electrohydrodynamically airflow control : electrical properties', dans *Electrostatics 2003*, 285-290, Bristol-Philadelphia
- [38] Moreau, E, Léger, L and Touchard, G (2006) 'Effect of a DC surface-corona discharge on a flat plate boundary layer for air flow velocity up to 25 m/s', *Journal of Electrostatics*, 64, 215-225
- [39] Morrow, R (1997) 'The theory of positive glow corona', *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 30, 3099-3114
- [40] Morrow, R and Lowke, J J (1997) 'Streamer propagation in air', *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 30, 614-627
- [41] Quinio, G (2005) *Modélisation numérique de la génération d'un plasma d'air dans un écoulement aérodynamique*, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, France
- [42] Raizer, Yu.P. (1991) *Gas discharge physics*, 2nd ed. Springer Berlin Germany
- [43] Robinson, M (1961) 'Movement of air in the electric wind of the corona discharge', *AIEE Transaction*, 80, 143-150
- [44] Rogier, F, Roussel, J-F and Volpert, D (2006) 'Approximations filaires pour les équations de Poisson et de Maxwell harmoniques', *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1343, 633-636
- [45] Roth, J R, Sin, H, Madhan, R C M and Wilkinson, S P (2003) 'Flow re-attachment and acceleration by paraelectric and peristaltic electrohydrodynamic (EHD) effects', dans *AIAA 2003-531*
- [46] Sato, N (1980) 'Discharge current induced by the motion of charged particles', *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 13, 1507-1517
- [47] Scharfetter, D L and Gummel, H K (1969) 'Large signal analysis of a silicon Read diode oscillator', *IEEE Transactions on Electron Devices*, 16, 64-77
- [48] Seimandi, P, Dufour, G and Rogier, F (2009) 'An asymptotic model for steady wire-to-wire corona discharges', *Mathematical and Computer Modelling*, 50, 574-583
- [49] Seimandi, P, Dufour, G and Rogier, F (2010) 'A two scale model of air corona discharges', *Procedia Computer Science*, 1(1), 627-635
- [50] Shewchuk, J R (1996) 'Triangle : Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator', dans *Applied Computational Geometry : Towards Geometric Engineering*, edited by Ming C. Lin and Dinesh Manocha, 203-222, Springer-Verlag
- [51] Shewchuk, J R (2005) *Triangle*, <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>
- [52] Sosa, R, Moreau, E, Touchard, G and Artana, G (2004) 'Stall control at high angle of attack with periodically excited EHD actuators', dans *AIAA 2004-2738*, Portland, Oregon
- [53] Unfer, T (2008) *Méthode asynchrone pour la modélisation d'actuateurs plasma destinés au contrôle d'écoulement*, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, France
- [54] Unfer, T, Boeuf, J-P, Rogier, F and Thivet, F (2007) 'An asynchronous scheme with local time stepping for multi-scale transport problems : Applications to gas discharges', *Journal of Computational Physics*, 227, 898-918



Auteur : Pierre SEIMANDI

Directeur de thèse : Pierre DEGOND

Codirecteurs de thèse : Guillaume DUFOUR et François ROGIER

Thèse soutenue le mercredi 1er décembre 2010 à l'université Toulouse III, Paul Sabatier

## **Modélisation mathématique et numérique de décharges couronnes pour le contrôle d'écoulements**

---

L'interaction entre une décharge couronne et un écoulement aérodynamique est un problème très difficile à simuler numériquement car fortement non-linéaire et multi-échelles, à la fois en temps et en espace. La présence d'une singularité de champ électrique induit en particulier une convergence en maillage lente et impose des contraintes sur le pas de temps localement très restrictives qui rendent les temps de calcul souvent prohibitifs. Cette thèse propose une méthode permettant une réduction significative du temps nécessaire à la simulation de ces décharges.

Grâce à une analyse asymptotique dans un petit voisinage autour des électrodes, l'intégration numérique des équations plasma est remplacée par la résolution d'un problème approché, où seuls les principaux phénomènes de la dynamique de la décharge sont pris en compte. Dans cette zone, nous supposons en particulier que la décharge évolue principalement selon les lignes du champ électrostatique et qu'elle peut ainsi être décrite de manière monodimensionnelle. Dans le reste du domaine, la décharge est décrite à l'aide du modèle usuel associé à des conditions aux limites fictives provenant du modèle approché.

Deux modèles sont présentés suivant ce principe. Le premier admet, sous certaines hypothèses, une solution quasi-analytique tandis que l'autre, plus précis, nécessite une résolution numérique. Une étude numérique poussée est ensuite effectuée sur des dispositifs aux dimensions réalistes. Celle-ci permet de valider l'utilisation de ces modèles et met en évidence, pour chacun des modèles, une diminution du temps de calcul d'un ordre de grandeur tout en conservant une précision similaire au modèle de référence.

**Mots-clés :** décharges couronnes, méthode multi-modèles, conditions aux limites fictives, simulation numérique, contrôle d'écoulements, actionneurs plasma

## **Mathematical and numerical modelling of corona discharges for airflow control**

---

The interaction between a corona discharge and an airflow is a highly non-linear and multi-scale problem, in both time and space, and thus is very challenging to simulate numerically. In particular, the presence of a singular electric field leads to a slow mesh convergence and locally imposes very restrictive time step constraints that often leads to impracticable computational times. This thesis proposes a method that significantly reduces the time required to simulate such discharges.

Using an asymptotic analysis in the vicinity of the electrodes, the numerical integration of the plasma equations is replaced by solving an approximate problem, where only the main phenomena of the dynamics of the discharge are taken into account. In this area, we assume in particular that the discharge development mainly follows the lines of the electrostatic field and can thus be described using a one-dimensional model. In the rest of the domain, the discharge is described using the reference model coupled with fictitious boundary conditions defined by the approximate model.

Following this principle, two models are presented. The first one admits, under certain assumptions, a quasi-analytical solution while the other, more accurate, requires to be solved numerically. An extensive numerical study is then performed on experimental setups. The results validate the use of these models and show a decrease of the computation time by an order of magnitude while keeping an accuracy similar to the reference model.

**Keywords :** corona discharges, multi-models method, fictitious boundary conditions, numerical simulation, flow control, plasma actuators