



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse III - Paul Sabatier  
Discipline ou spécialité : *Mathématiques Appliquées*

---

Présentée et soutenue par *Siham LAYOUNI*  
Le 16 Décembre 2008

**Titre :** *Etude d'une méthode de volumes finis pour la résolution des équations de Maxwell en deux dimensions d'espace sur des maillages quelconques et couplage avec l'équation de Vlasov*

---

### JURY

*H. BARUCQ, Directrice de recherche à l'INRIA de Bordeaux*  
*A. BENDALI, Professeur à l'INSA*  
*S. Claim, Professeur à l'Université Paul Sabatier*  
*K. DOMELEVO, Maître de conférences à l'Université Paul Sabatier*  
*P. OMNES, Ingénieur de recherche au CEA de Saclay*  
*E. SONNENDRÜCKER, Professeur à l'Université Louis Pasteur*

---

**Ecole doctorale :** *Mathématiques Informatique Télécommunications*  
**Unité de recherche :** *Mathématiques pour l'Industrie et la Physique*  
**Directeur(s) de Thèse :** *K. DOMELEVO et P. OMNES*  
**Rapporteurs :** *P. CIARLET et E. SONNENDRÜCKER*



*À ma mère*

*À mon père*

# REMERCIEMENTS

Cette thèse est dédiée à toute personne qui, de près ou de loin, m'a soutenu pour l'aboutissement de ce travail.

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance à Pascal Omnes qui m'a proposé ce sujet de thèse et m'a accompagné tout au long de sa réalisation. Je lui remercie pour tout ce que j'ai appris avec lui et pour son soutien aussi bien scientifique que humain.

Je souhaite aussi exprimer ma gratitude à Komla Domelevo pour avoir supervisé cette thèse, pour son soutien, ses conseils et sa gentillesse.

Je remercie très vivement Patrick Ciarlet et Eric Sonnendrücker, qui malgré leurs occupations ont accepté la charge de rapporteurs.

Je remercie également Hélène Barucq, Abderrahmane Bendali et Stéphane Clain, qui m'ont fait l'honneur de leur participation au Jury.

Je tiens à remercier mes collègues du CEA de Saclay, pour leur accueil convivial. Je remercie Christian Vanwambeke, Delphine Jennequin, Jean-Christophe Bremenson et Jean-Luc Depalacio, pour leur aide à régler les soucis informatiques et leurs sympathie. J'ai beaucoup apprécié les discussions avec Philippe Roblin, que je félicite pour sa large culture et son humour. Je tiens à remercier aussi Frederiques Charles, Jacques Segré, Sarah Delcourte, Christian Gonella, Evelyne Macanda,..

Je suis particulièrement reconnaissante à Ibtissame et Mouchira Zaiter et Fatima Daim pour leurs conseils et soutien surtout pendant les moments difficiles..

Je souhaite, aussi remercier Mohamed Salah Elmaraoui pour son soutien et exprimer ma gratitude à Zouhair Ben Saiid qui, par sa pédagogie et ses encouragements, m'a aidé à développer mon goût pour les mathématiques.

Ma plus grande reconnaissance va à ma mère Chafia, pour tout son amour, ses sacrifices, et son soutien inestimable..

Un grand merci pour mon père Chabane et mon frère Aymen pour tout ce qu'ils m'ont apporté.

Je remercie mon fiancé Yamen pour ses encouragements et sa patience. J'ai une pensée également pour sa famille.

Enfin, une pensée spéciale à Sana, Sonia, Imen, Houda, Naiima, Ikram, Amira, Chiraz, Hela, Hayett, Hajer..



## Table des matières

Table des figures	9
Introduction	12
Chapitre 1. Maillages, géométrie et opérateurs discrets	18
1.1. Maillage primal	18
1.2. Maillage dual	19
1.3. Maillage diamant	20
1.4. Hypothèses géométriques sur les maillages	22
1.5. Propriétés géométriques	22
1.6. Produits scalaires et normes discrets	25
1.7. Divergences discrètes	27
1.8. Rotationnels discrets	27
Chapitre 2. Ecriture et étude du schéma pour les équations de Maxwell	31
2.1. Introduction	31
2.2. Discrétisation des lois de Faraday et d'Ampère	33
2.3. Discrétisation des conditions initiales	34
2.4. Discrétisation des conditions aux limites	35
2.5. Discrétisation de la densité de courant et de charge, et loi de Gauss discrète	38
2.6. Energie électromagnétique discrète	42
2.7. Stabilité	53
2.8. Comparaison avec le schéma de Yee	57
2.9. Convergence	62
2.10. Résultats numériques	111
Remarque	119
Chapitre 3. Couplage avec l'équation de Vlasov	121
3.1. Introduction	121
3.2. Couplage avec les équations de Maxwell	121
3.3. approximation particulière de l'équation de Vlasov	122
3.4. Initialisation des particules	123
3.5. Interpolation des champs aux positions des particules	126
3.6. Calcul des nouvelles vitesses et positions des particules	127
3.7. Calcul des densités de courant et de charge	128

3.8. Calcul des champs électromagnétiques	133
3.9. Résultats numériques	133
Conclusion et perspectives	143
Bibliographie	146



## Table des figures

0.0.1 Maillage cartésien avec les degrés de libertés	12
0.0.2 Maillage orthogonal avec les degrés de liberté	13
0.0.3 Maillages non conformes	14
0.0.4 Maillage primal (en bleu), maillage dual (en vert pointillé) et maillage diamant (en rose)	15
1.1.1 Maillages interdits :	18
1.1.2 Maillage primal	18
1.1.3 Choix des centres des mailles primales	19
1.2.1 Maillage dual (en traits pointillés verts)	20
1.3.1 Maillage diamant(trait roses)	20
1.3.2 Une maille diamant	21
1.5.1 Maille du bord	22
1.5.2 Mailles internes convexe et non convexe	23
2.9.1	83
2.9.2 Cas d'une maille diamant de la frontière	92
2.9.3 Cas d'une cellule diamant interieur non convexe	94
2.9.4 Cas d'une cellule diamant interieur convexe	95
2.10.1 Maillage de triangles	112
2.10.2 Convergence avec des maillages de triangles	112
2.10.3 Maillage déformé de quadrangles	112
2.10.4 Convergence avec des maillages déformés de quadrangles	113
2.10.5 Maillage de triangles aplatis	113
2.10.6 Convergence avec des maillages de triangles aplatis	113
2.10.7 Maillage homothétiquement raffiné	114
2.10.8 Convergence avec des maillages homothétiquement raffinés	114
2.10.9 Coupe du champ magnétique initial selon $y=0$	115
2.10.10 Maillage raffiné au centre ( $A = \frac{1}{8}, A_0 = \frac{1}{32}$ )	116

2.10.11 Norme $L^2$ de l'erreur des champs en fonction de $p$	116
2.10.12 Convergence en norme $L^2$ de $B$ et $\mathbf{E}$	117
2.10.13 Onde entrante avec sortie absorbante	117
3.9.1 Erreur $L^2$ relative du moment d'ordre 0 sur les maillages primal et dual	135
3.9.2 Erreur $L^2$ relative du moment d'ordre 0 sur le maillage diamant	136
3.9.3 Erreur $L^2$ du moment d'ordre 1 sur les maillages primal et dual divisée par $n_0 V_{th}$	136
3.9.4 Erreur $L^2$ du moment d'ordre 1 sur le maillage diamant divisée par $n_0 V_{th}$	136
3.9.5 Erreur $L^2$ relative du moment d'ordre 2 sur les maillages primal et dual	137
3.9.6 Erreur $L^2$ relative du moment d'ordre 2 sur le maillage diamant	137
3.9.7 Erreur $L^2$ de $B'_i$ (à gauche) et $B''_i$ (à droite)	137
3.9.8 Erreur $L^2$ de $\mathbf{B}_i^\circ$	138
3.9.9 Erreur $L^2$ de $E'_i$ (à gauche) et $E''_i$ (à droite)	138
3.9.10 Erreur $L^2$ de $\mathbf{E}_i^\circ$	138
3.9.11 $\ln \left( \ \mathbf{E}_x\ _{L^2([-1,1]^2)} \right)$ en fonction du nombre de périodes théoriques $\left( \frac{2\pi}{\omega_r} \right)$	140
3.9.12 Convergence du taux d'amortissement	141



## Introduction

Les équations de Maxwell instationnaires couplées avec l'équation de Vlasov modélisent l'interaction non-collisionnelle de particules chargées dans un champ électromagnétique. Ces phénomènes sont présents dans de nombreux dispositifs (tokamak [38], propulseur à plasmas [35, 36], interrupteur à plasma...) pour lesquels la simulation numérique est un outil indispensable pour leur conception et optimisation. De nombreuses méthodes numériques ont été proposées pour résoudre de façon approchée le système de Maxwell-Vlasov. Pour la discrétisation des champs électromagnétiques citons les différences finies, les éléments finis et les volumes finis. Pour la discrétisation de l'équation de Vlasov citons les méthodes particulières et les méthodes dites eulériennes.

Une des techniques numériques couramment utilisée pour approcher le système de Maxwell instationnaire est la méthode de différences finies FDTD (Finite Difference Time Domain), proposée dans sa formulation originale par Yee [64]. En deux dimensions d'espace et pour le mode transverse magnétique, les degrés de liberté de cette méthode sont les composantes tangentielles du champ électrique sur les arêtes du maillage et les valeurs du champ magnétique aux centre de cellules (figure 0.0.1).

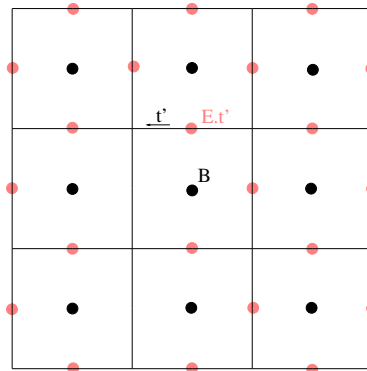


FIGURE 0.0.1. Maillage cartésien avec les degrés de liberté

L'inconvénient de cette méthode est sa restriction aux maillages cartésiens.

Or, pour mieux représenter les géométries des applications réelles tout en réduisant les coûts, il est important qu'une méthode numérique autorise une grande flexibilité sur les maillages utilisés (maillages non structurés, non orthogonaux...). Et pour mieux représenter les phénomènes très localisés qui peuvent se présenter, tout en réduisant aussi

le coût, il est important de pouvoir placer des mailles uniquement dans les régions où l'on en a besoin (maillages non conformes). Ceci incite donc à relaxer le plus grand nombre de contraintes possibles imposées aux maillages.

Ainsi, de nombreuses méthodes ont été proposées pour généraliser le schéma de Yee sur une plus large gamme de maillages, nous renvoyons à [24] pour une revue récente de ces généralisations.

Une des généralisations proposées est la méthode “covolume” ou aussi “control region”, introduite dans [26, 44, 27, 54] pour des maillages orthogonaux (maillages caractérisés par le fait que les arêtes primales sont orthogonales à leurs arêtes duales, ces dernières sont construites en joignant les points de contrôle du maillage primal ; sur la figure 0.0.2, le maillage primal est en trait continu et le maillage dual en pointillé. Les maillages de type Delaunay-Voronoi est un exemple de maillage orthogonal). Comme dans le schéma de Yee, les degrés de liberté de cette méthode sont les composantes tangentielle du champ électrique sur les arêtes primales et les valeurs du champ magnétique aux centre de mailles primales (voir figure 0.0.2).

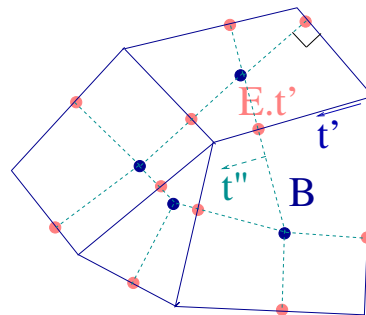


FIGURE 0.0.2. Maillage orthogonal avec les degrés de liberté

Le schéma est obtenu en intégrant l'équation de Faraday sur les mailles primales et la composante tangentielle primale de l'équation d'Ampère sur les arêtes duales.

Cette méthode a été analysée dans [54, 15], où les auteurs montrent que la méthode est convergente d'ordre un et que, dans le cas particulier de maillages cartésiens, la convergence est d'ordre deux.

De plus, cette méthode présente les avantages de conserver un équivalent discret de l'énergie électromagnétique, de conserver le flux du champ magnétique et de préserver la loi de Gauss discrète (ou condition de divergence pour le champ électrique). Ces deux dernières propriétés sont indispensables pour que les champs électromagnétiques obtenus aient un sens physique. Pour certaines méthodes où ces propriétés ne sont pas préservées, des techniques de correction [8, 43, 7, 42, 2, 48] doivent être appliquées, ce qui engendre évidemment des coûts de calcul supplémentaires.

Malgré tous les avantages de la méthode de “covolumes”, la condition d'orthogonalité des maillages reste une restriction importante, qui peut se révéler contraignante pour effectuer

des raffinement locaux du maillage.

D'autres méthodes, de type éléments finis, ont été proposées permettant d'utiliser des maillages non structurés et qui, avec une discrétisation convenable en temps, conserve une énergie électromagnétique discrète ; nous citons par exemple [53, 2, 3]. Cependant, l'utilisation des maillages non conformes (figure 0.0.3) nécessite l'introduction de multiplicateurs de Lagrange (voir [6, 10] pour le raffinement en espace et [18, 19, 40] pour le raffinement en espace-temps) ; de plus, la préservation de la condition de divergence n'est pas toujours évidente [52, 51, 39], ainsi une étape de correction peut être nécessaire [2].

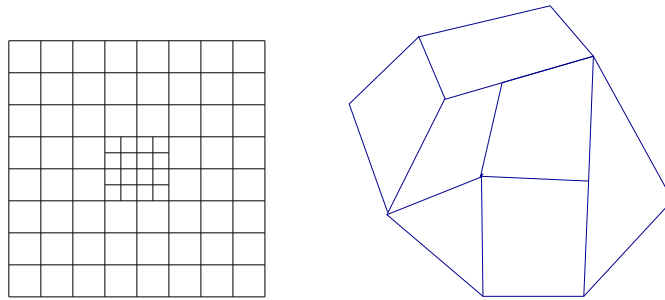


FIGURE 0.0.3. Maillages non conformes

Les méthodes de volumes finis utilisées ces dernières années [46, 16, 62, 50, 63] permettent une flexibilité des maillages et elles sont robustes en présence de gradients forts. Par contre, ces méthodes nécessitent un traitement particulier [48, 49, 47] pour conserver la loi de Gauss, ce qui allourdi le calcul ; elles sont aussi dissipatives, limitant ainsi leur utilisation pour longues simulations en temps.

Plus récemment, des méthodes de type volumes finis préservant l'énergie électromagnétique discrète ont été développées dans [59, 58] et qui permettent d'utiliser des maillages très généraux. Mais, pour obtenir la même précision que le schéma de Yee, dans le cas d'un maillage cartésien, on doit utiliser deux fois plus de mailles dans chaque direction d'espace (voir [58]).

Cette dernière approche a été généralisée dans [23, 12] en une méthode DGTD (Discontinuous Galerkin Time Domain), permettant une convergence d'ordre plus élevé, sous réserve que la solution exacte soit suffisamment régulière. De plus, la conservation de flux du champ magnétique est assurée dans un sens faible et rien n'est dit en ce qui concerne la conservation de la loi de Gauss en présence de densités de charge et de courant. Dans [17] on propose une autre approche de la méthode de Galerkin discontinu, elle consiste à utiliser des bases à divergences nulles et des projections dans l'espace des fonctions à divergences nulles. Evidemment cette méthode ne garantit la préservation de loi de Gauss que si la divergence de la densité de courant est nulle.

Une autre méthode de Galerkin discontinu a été proposée dans [25] qui doit s'accompagner par des corrections [37] dans le cas de présence des densités de charge et de courant,

entraînant un coût supplémentaire important.

Par ailleurs, une des méthodes récemment développés pour des problèmes elliptiques [21, 20], a permis une bonne approximation de ce type de problème sur des maillages presque quelconques (non structurés, très déformés, non conformes). Cette méthode, appelée méthode DDFV “discrete duality finite volume”, est basée sur l’utilisation de trois maillages (primal, dual et diamant illustrés par la figure 0.0.4) pour lesquels on définit des opérateurs discrets associés (gradient, divergence, rotationnel), vérifiant un équivalent discret de la formule de Green, de la décomposition de Hodge et assurant que la divergence d’un rotationnel est nul. Les mêmes schémas ont été introduits auparavant par F. Hermeline [28, 29, 30, 32] mais avec une approche différente.

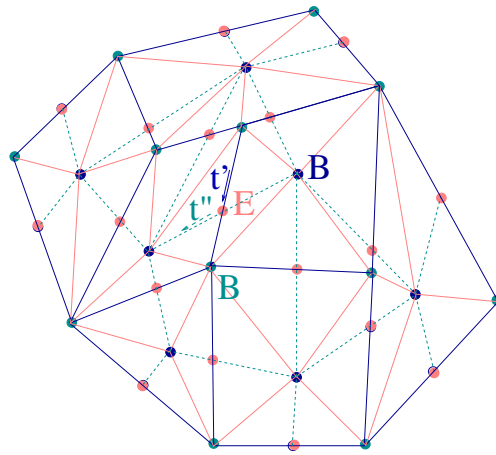


FIGURE 0.0.4. Maillage primal (en bleu), maillage dual (en vert pointillé) et maillage diamant (en rose)

Ainsi, l’idée de départ de cette thèse est d’étendre cette méthode aux équations de Maxwell, ce qui nous a permis de construire un nouveau schéma de volumes finis approchant ces équations sur des maillages quelconques en deux dimensions d’espace. Pour les équations de Maxwell en mode TE, les inconnues du schéma sont les valeurs du champ magnétique aux centres des mailles primales et duales et les deux composantes du champ électrique sur les arêtes primales et duales. On discrétise l’équation de Faraday sur le maillage primal et le maillage dual, en approchant ses valeurs moyennes sur chaque maille primale et duale. On discrétise l’équation d’Ampère sur chaque maille diamant en approchant les valeurs moyennes de ses composantes tangentielles sur les diagonales de chaque maille (arête primale et duale associées à la maille diamant).

Ce schéma représente une généralisation de la méthode “covolumes” à des maillages arbitraires, y compris les maillages non-orthogonaux, non-conformes et/ou avec des mailles non-convexes, et ceci grâce à un choix adéquat des degrés de liberté. De plus, on prouve dans ce travail que la méthode préserve toutes les propriétés avantageuses de la méthode de “covolume”.

Plus précisément, on montre que le schéma préserve l'équivalent discret de l'équation de conservation de flux du champ magnétique et, pour une discrétisation adéquate des densités de charge et de courant, la loi de Gauss discrète est aussi préservée. On montre aussi que, dans le cas de conditions aux limites de type conducteur parfait ou mur magnétique, le schéma conserve un équivalent discret de l'énergie électromagnétique et, dans le cas des conditions aux limites de type Silver-Muller, assure la décroissance de l'énergie. Finalement, la stabilité est obtenue sous une condition de type CFL, qui correspond, dans le cas d'un maillage cartésien, à la condition CFL du schéma de Yee.

Une large partie de cette thèse a été consacrée à l'étude de convergence du schéma, dans laquelle on montre que, si les champs électromagnétiques exacts sont réguliers ( $B \in \mathcal{C}^3([0, T], \mathcal{C}^2(\Omega))$  et  $\mathbf{E} \in (\mathcal{C}^3([0, T], \mathcal{C}^2(\Omega)))^2$ ), alors le schéma est d'ordre un en espace et deux en temps ; et dans le cas où les champs électromagnétiques exacts sont moins réguliers ( $B \in W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T))$  et  $\mathbf{E} \in (W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T)))^2$ , avec  $p > 1$  et  $q > 2$ ), le schéma est convergent à l'ordre  $1 - \frac{2}{q}$  en espace et  $2 - \frac{1}{p}$  en temps. De plus, si le maillage diamant est convexe, la convergence en espace est d'ordre un.

Ces résultats ont été validés par des simulations numériques sur différents types de maillages prouvant la robustesse de la méthode vis-à-vis de la complexité des maillages utilisés.

La dernière partie de ce travail est consacrée au couplage du système de Maxwell discret avec l'équation de Vlasov. Nous utilisons pour cette dernière une méthode particulière et nous mettons en évidence les difficultés du couplage liées à la particularité des maillages utilisés. Le problème a été traité en deux dimensions d'espace et trois composantes de vitesse. Pour le calcul de densité du courant conservant l'équation de conservation de charge, on a utilisé une méthode d'ordre zéro, où le calcul de la densité de charge se fait par la méthode NGP (Nearest Grid point). Ce choix est dû à la difficulté d'appliquer les méthodes d'ordre supérieur à des maillages autres que les grilles de rectangles.

La méthode couplée est validée à l'aide de quelques simulations numériques, illustrant la convergence des champs et de la fonction de distribution. Enfin, on simule le test classique de l'amortissement de Landau, pour lequel on obtient bien la décroissance de l'énergie portée par le champ électrique.





## CHAPITRE 1

### Maillages, géométrie et opérateurs discrets

Soit  $\Omega$  un polygone de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière  $\Gamma$ .

#### 1.1. Maillage primal

On génère sur  $\Omega$  un maillage composé de  $N'$  polygones  $C'_i$ ,  $i \in \{1 \cdots N'\}$ , tels que tout couple de polygones possède au plus une arête commune, ce qui exclut les maillages tels que ceux représentés sur la figure 1.1.1 (trois arêtes communes sur la figure gauche et deux arêtes communes sur celle de droite).

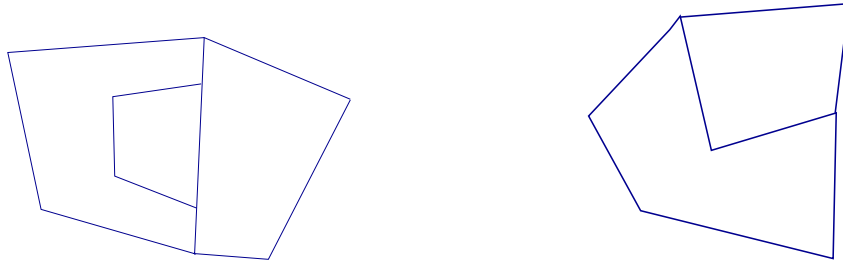


FIGURE 1.1.1. Maillages interdits :

Ce maillage constitue une partition de  $\Omega$  que l'on va appeler maillage primal. La figure 1.1.2 est exemple de maillage primal avec les notations que l'on va définir.

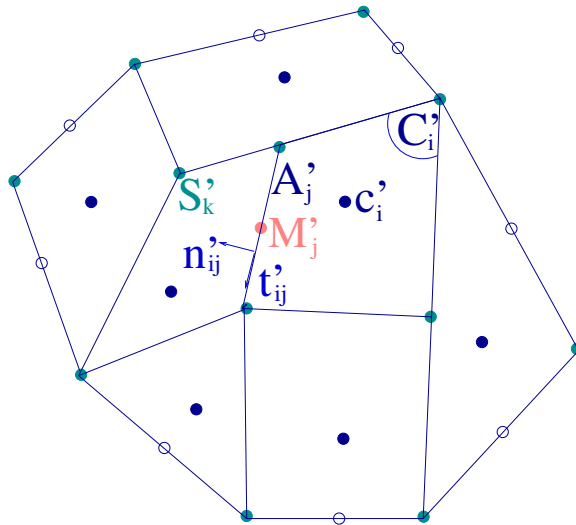


FIGURE 1.1.2. Maillage primal

On note  $N^\Gamma$  le nombre des sommets situés sur la frontière,  $N''$  le nombre total des sommets et on les note  $S'_i, i \in [1, N'']$ , tels que  $\{S'_i, i = 1 \cdots N^\Gamma\}$  sont ceux situés sur la frontière. On note  $N^\diamond$  le nombre total des arêtes du maillage et on les note  $A'_i, i \in [1, N^\diamond]$ , telles que  $\{A'_i, i = 1 \cdots N^\Gamma\}$  sont celles situées sur la frontière. Enfin, on note par  $M'_i, i \in [1, N^\diamond]$ , les milieux de ces arêtes .

Pour chaque cellule  $C'_i$ , on note  $d'_i$  son diamètre,  $N'_i$  le nombre de ses sommets  $S'_{ij}$ , avec  $j \in [1, N'_i]$ , correspondant aussi au nombre de ses arêtes  $A'_{ij}, j \in [1, N'_i]$ . Le vecteur unitaire normal à  $A'_{ij}$  sortant de  $C'_i$  est noté  $\mathbf{n}'_{ij}$ , la tangente associée est notée  $\mathbf{t}'_{ij}$ , de telle sorte que  $(\mathbf{n}'_{ij}, \mathbf{t}'_{ij})$  forme une base orthonormée orientée positivement.

À chaque cellule primaire  $C'_i$ , on associe un point  $c'_i$ , que l'on appelle centre de la cellule. Ce point peut être le barycentre ou n'importe quel autre point intérieur à la cellule.

**HYPOTHÈSE 1.** *Pour toute la suite, on suppose que le choix des centres se fait de telle sorte que, pour tout couple de cellules voisines  $C'_{i1}$  et  $C'_{i2}$ , de centre respectifs  $c'_{i1}$  et  $c'_{i2}$ , et d'arête commune  $A'_i$ , l'enveloppe convexe contenant  $A'_i$ ,  $c'_{i1}$  et  $c'_{i2}$  est incluse dans  $\Omega$ . Cette condition exclut le cas précisé sur la figure 1.1.3.*

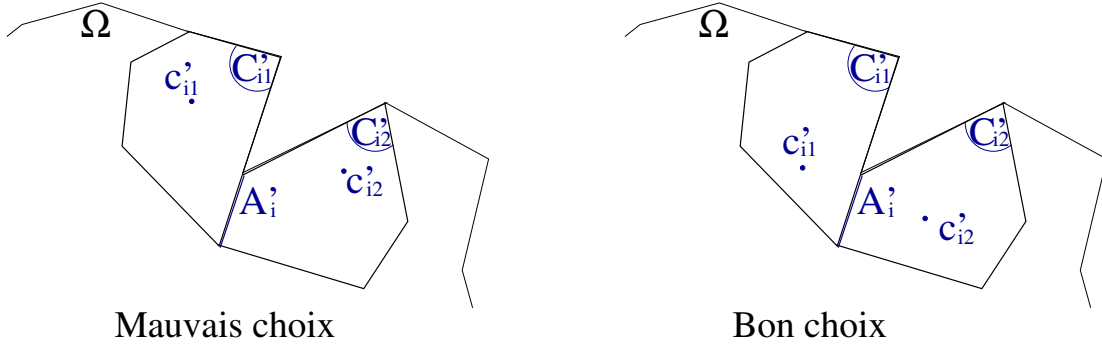


FIGURE 1.1.3. Choix des centres des mailles primales

Pour chaque arête  $A'_i, i \in [1, N^\diamond]$ , on note  $A''_i$  son arête duale construite de la façon suivante :

- Si  $A'_i$  est à l'intérieur du domaine,  $A''_i$  est l'arête joignant les centres des cellules primales partageant l'arête  $A'_i$ .
- Si  $A'_i \subset \Gamma$ , alors  $A''_i$  est l'arête joignant  $M'_i$ , milieu de l'arête  $A'_i$ , au centre de sa cellule primaire.

## 1.2. Maillage dual

L'ensemble des arêtes duales construit un maillage que l'on appelle maillage dual (figure 1.2.1) .

**REMARQUE 1.2.1.** *L'hypothèse 1 nous garantit que les mailles duales sont incluses dans  $\Omega$ .*

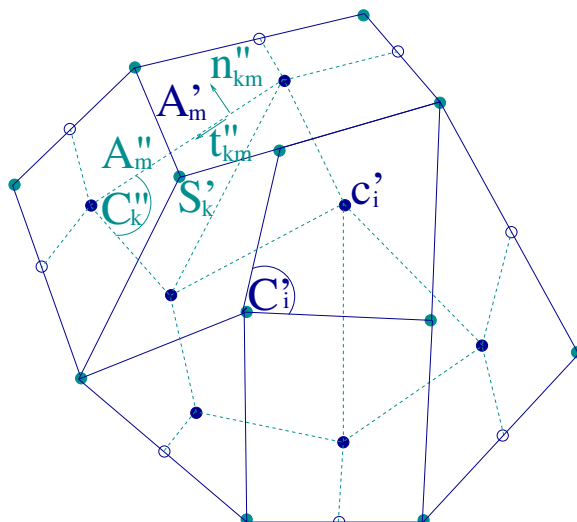


FIGURE 1.2.1. Maillage dual (en traits pointillés verts)

À chaque cellule duale, que l'on note  $C_i''$ , on associe un sommet primal  $S_i'$ ; on note  $d_i''$  le diamètre de la cellule.

Pour chaque sommet  $S_i'$ ,  $i \in [1, N'']$ , du maillage, on note  $N_i''$  le nombre d'arêtes primales ayant  $S_i'$  comme sommet. Ainsi, si le sommet n'est pas sur la frontière,  $N_i''$  correspond aussi au nombre d'arêtes de la cellule duale  $C_i''$ .

Le vecteur unitaire normal à  $A_{ij}''$  sortant de  $C_i''$  est noté  $\mathbf{n}_{ij}''$ ; la tangente associée est notée  $\mathbf{t}_{ij}''$ , de telle sorte que  $(\mathbf{n}_{ij}'', \mathbf{t}_{ij}'')$  forme une base orthonormée orientée positivement.

### 1.3. Maillage diamant

On construit ce maillage en joignant, pour chaque arête  $A_i'$ , ses sommets aux sommets de son arête duale  $A_i''$ , tel que représenté sur la figure 1.3.1.

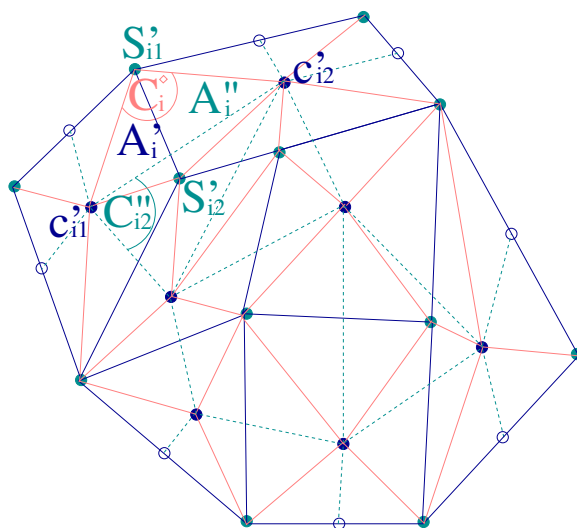


FIGURE 1.3.1. Maillage diamant (traits roses)

On note  $C_i^\diamond$  les mailles ainsi obtenues, que l'on appelle mailles diamants. On note par  $\mathbf{n}'_i$  le vecteur unitaire normal à  $A'_i$  et orienté de telle sorte que  $\overrightarrow{c'_{i1}c'_{i2}} \cdot \mathbf{n}'_i \geq 0$ . On note  $\mathbf{t}'_i$  la tangente associée, de telle sorte que  $(\mathbf{n}'_i, \mathbf{t}'_i)$  forme une base orthonormée orientée positivement. De même on note aussi  $\mathbf{n}''_i$  le vecteur unitaire normal à  $A''_i$  et orienté de telle sorte que  $\overrightarrow{S'_{i1}S'_{i2}} \cdot \mathbf{n}''_i \geq 0$ . On note  $\mathbf{t}''_i$  la tangente associée, de telle sorte que  $(\mathbf{n}''_i, \mathbf{t}''_i)$  forme une base orthonormée orientée positivement. On note  $\theta_i$  l'angle orienté entre  $\mathbf{t}'_i$  et  $\mathbf{t}''_i$ . La figure 1.3.2 illustre ces notations.

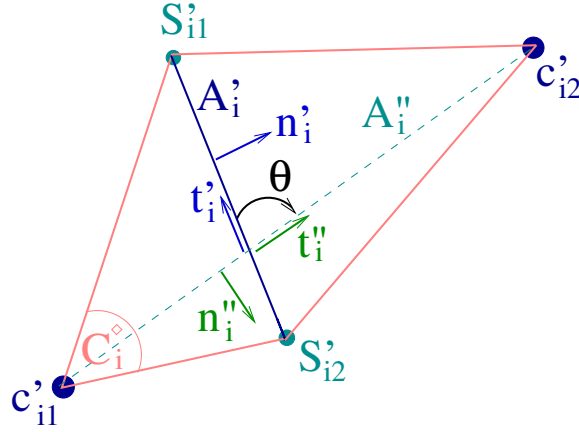


FIGURE 1.3.2. Une maille diamant

Pour tout segment  $A$ , on note par  $|A|$  sa longueur ; et pour tout polygone  $P$  on note par  $|P|$  sa surface.

Pour tout sommet  $S'_j$ ,  $j \in \{1 \cdots N^\Gamma\}$  (situé sur la frontière), on définit le vecteur  $\mathbf{n}_j^\Gamma$  par

$$(1.3.1) \quad \mathbf{n}_j^\Gamma := \frac{|A'_{i1(j)}| \mathbf{n}'_{i1(j)} + |A'_{i2(j)}| \mathbf{n}'_{i2(j)}}{|A'_{i1(j)}| + |A'_{i2(j)}|}$$

où  $A'_{i1(j)}$  et  $A'_{i2(j)}$  sont les deux arêtes situées sur la frontière, telles que  $S'_j$  est l'un de leurs sommets.

REMARQUE 1.3.1. Si  $S'_j$  n'est pas situé sur un coin, alors  $\mathbf{n}_j^\Gamma$  correspond tout simplement à la normale unitaire à  $C''_j \cap \Gamma$ , avec  $C''_j$  est la maille duale associée au sommet  $S'_j$ .

Enfin, on note par  $\mathbf{t}_j^\Gamma$ , le vecteur orthogonal à  $\mathbf{n}_j^\Gamma$  donné par

$$\mathbf{t}_j^\Gamma := \frac{|A'_{i1(j)}| \mathbf{t}'_{i1(j)} + |A'_{i2(j)}| \mathbf{t}'_{i2(j)}}{|A'_{i1(j)}| + |A'_{i2(j)}|}.$$

### 1.4. Hypothèses géométriques sur les maillages

On note  $h$  le plus grand diamètre des cellules primales :

$$h := \max_{i=1 \dots N'} d'_i.$$

REMARQUE 1.4.1. On peut remarquer que  $\forall i = 1 \dots N^\diamond$  on a

$$|A'_i| \leq h \quad \text{et} \quad |A''_i| \leq 2h.$$

HYPOTHÈSE 2. Il existe une constante  $\alpha_1 > 0$ , indépendante de maillage, telle que  $\forall i \in \{1 \dots N'\}$ ,

$$|A'_i| \geq \alpha_1 h.$$

HYPOTHÈSE 3. Il existe une constante  $\alpha_2 > 0$ , indépendante de maillage, telle que  $\forall i \in \{1 \dots N''\}$ ,

$$|A''_i| \geq \alpha_2 h.$$

HYPOTHÈSE 4. Il existe une constante  $\alpha_3 > 0$ , indépendante de maillage, telle que  $\forall i \in \{1 \dots N^\diamond\}$

$$|\sin \theta_i| \geq \alpha_3.$$

HYPOTHÈSE 5. Toutes les mailles primales et duales sont étoilées.

### 1.5. Propriétés géométriques

Nous présentons ici quelques propriétés géométriques qui nous seront utiles pour la suite.

PROPOSITION 1.5.1. L'aire d'une cellule diamant  $C^\diamond$  associée à l'arête primale  $A'$  et l'arête duale  $A''$ , faisant entre elles un angle  $\theta$ , est donné par la formule ci dessous :

$$(1.5.1) \quad |C^\diamond| = \frac{1}{2} |A'| |A''| |\sin \theta|.$$

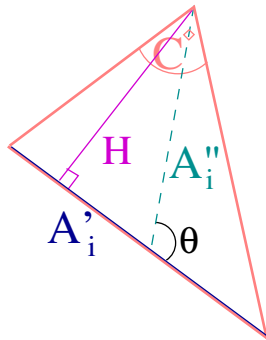


FIGURE 1.5.1. Maille du bord

DÉMONSTRATION. Dans le cas d'une maille du bord (figure 1.5.1),  $C^\circ$  est un triangle de coté  $A'$  et de hauteur  $H = |A''| |\sin \theta|$ , d'où

$$|C^\circ| = \frac{1}{2} |A'| H = \frac{1}{2} |A'| |A''| |\sin \theta|.$$

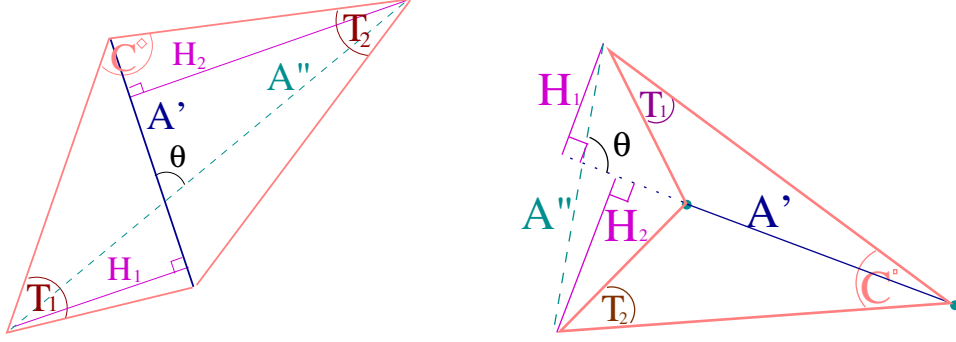


FIGURE 1.5.2. Mailles internes convexe et non convexe

Si  $C^\circ$  est une maille interne (figure 1.5.2), alors  $A'$  découpe l'arête  $A''$  en deux segments  $A''_1$  et  $A''_2$ . Elle découpe aussi la maille  $C^\circ$  en deux triangles  $T_1$  et  $T_2$ , tels que  $T_1$  est le triangle de coté  $A'$  et de hauteur  $H_1 = |A''_1| |\sin \theta|$  et  $T_2$  le triangle de coté  $A'$  et de hauteur  $H_2 = |A''_2| |\sin \theta|$ . Ainsi,

$$|C^\circ| = |T_1| + |T_2| = \frac{1}{2} |A'| |A''_1| |\sin \theta| + \frac{1}{2} |A'| |A''_2| |\sin \theta| = \frac{1}{2} |A'| |A''| |\sin \theta|.$$

□

COROLLAIRE 1.5.2. On a

$$|C_i^\circ| \leq h^2.$$

De plus, si les hypothèses 2, 3 et 4 sont vérifiées, alors il existe une constante  $\alpha > 0$ , indépendante de maillage, telle que  $\forall i \in \{1 \dots N^\circ\}$

$$|C_i^\circ| \geq \alpha h^2.$$

DÉMONSTRATION. La première inégalité est obtenue grâce à la proposition précédente et à la remarque 1.4.1.

Pour la deuxième inégalité, grâce à la proposition précédente et sous les hypothèses 2, 3 et 4 on a

$$|C^\circ| \geq \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 h^2;$$

d'où le résultat. □

PROPOSITION 1.5.3. Soient  $(\mathbf{n}', \mathbf{t}')$  et  $(\mathbf{n}'', \mathbf{t}'')$ , deux bases orthonormées de  $\mathbb{R}^2$  orientées positivement et soit  $\theta$  l'angle entre  $\mathbf{t}'$  et  $\mathbf{t}''$ .

Alors pour tout vecteur  $\mathbf{V}$  on a :

$$\|\mathbf{V}\|^2 \geq \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}')^2 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}'')^2}{1 + |\cos \theta|}$$

De plus, si  $\theta \neq 0 [\pi]$ , on a aussi

$$\|\mathbf{V}\|^2 \leq \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}')^2 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}'')^2}{1 - |\cos \theta|}.$$

DÉMONSTRATION. Deux cas se présentent :

Si  $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$  alors les deux inégalités sont évidentes.

Sinon, puisque  $\mathbf{t}'' = \cos \theta \mathbf{t}' - \sin \theta \mathbf{n}'$ , (voir figure 1.3.2) alors

$$\begin{aligned} & (1 + |\cos \theta|) \|\mathbf{V}\|^2 - [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}')^2 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}'')^2] = \\ & (1 + |\cos \theta|) [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}')^2 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}')^2] - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}')^2 - (\cos \theta \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}' - \sin \theta \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}')^2 = \\ & (1 + |\cos \theta| - \sin^2 \theta) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}')^2 + (|\cos \theta| - \cos^2 \theta) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}')^2 \\ & + 2 \sin \theta \cos \theta (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}') (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}') = \\ & (|\cos \theta| + \cos^2 \theta) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}')^2 + \frac{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{|\cos \theta| + \cos^2 \theta} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}')^2 \\ & + 2 \sin \theta \cos \theta (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}') (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}') = \\ & \left( \sqrt{|\cos \theta| + \cos^2 \theta} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}' + \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{|\cos \theta| + \cos^2 \theta}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}' \right)^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\|\mathbf{V}\|^2 \geq \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}')^2 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}'')^2}{1 + |\cos \theta|}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & (1 - |\cos \theta|) \|\mathbf{V}\|^2 - [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}')^2 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}'')^2] = \\ & (1 - |\cos \theta|) [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}')^2 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}')^2] - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}')^2 - (\cos \theta \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}' - \sin \theta \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}')^2 = \\ & (1 - |\cos \theta| - \sin^2 \theta) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}')^2 - (|\cos \theta| + \cos^2 \theta) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}')^2 \\ & + 2 \sin \theta \cos \theta (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}') (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}') = \\ & - (|\cos \theta| - \cos^2 \theta) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}')^2 - (|\cos \theta| + \cos^2 \theta) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}')^2 \\ & + 2 \sin \theta \cos \theta (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}') (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}') = \\ & - \left( \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{|\cos \theta| + \cos^2 \theta}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}' - \sqrt{|\cos \theta| + \cos^2 \theta} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}' \right)^2, \end{aligned}$$

et si  $\theta \neq 0 [\pi]$ , on a alors

$$\|\mathbf{V}\|^2 \leq \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}')^2 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}'')^2}{1 - |\cos \theta|}.$$

□



PROPOSITION 1.5.4. Soient  $(\mathbf{n}', \mathbf{t}')$  et  $(\mathbf{n}'', \mathbf{t}'')$ , deux bases orthonormées de  $\mathbb{R}^2$  orientées positivement et soit  $\theta$  l'angle entre  $\mathbf{t}'$  et  $\mathbf{t}''$ .

Alors, sous l'hypothèse 4 page 22, pour tout vecteur  $\mathbf{V}$  on a :

$$(1.5.2) \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}'}{\mathbf{t}'' \cdot \mathbf{n}'} \mathbf{t}'' + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}''}{\mathbf{t}' \cdot \mathbf{n}''} \mathbf{t}' = \frac{1}{\sin \theta} (-\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}' \mathbf{t}'' + \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}'' \mathbf{t}')$$

$$(1.5.3) \quad = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}'}{\mathbf{n}'' \cdot \mathbf{t}'} \mathbf{n}'' + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}''}{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{t}''} \mathbf{n}' = \frac{1}{\sin \theta} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}' \mathbf{n}'' - \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}'' \mathbf{n}').$$

DÉMONSTRATION. Sous l'hypothèse 4  $\{\mathbf{n}', \mathbf{n}''\}$  et  $\{\mathbf{t}', \mathbf{t}''\}$  sont deux bases de  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi pour vérifier la formule (1.5.2), il suffit de faire le produit scalaire de l'égalité par  $\mathbf{n}'$  et puis par  $\mathbf{n}''$ . De même, si on fait le produit scalaire de l'égalité (1.5.3) par  $\mathbf{t}'$  et puis  $\mathbf{t}''$ , on vérifie la formule (1.5.3).  $\square$

### 1.6. Produits scalaires et normes discrets

Dans le chapitre consacré à la discrétisation des équations de Maxwell en mode TE nous allons associer des inconnus scalaires de champ magnétique aux centres des mailles primales, au sommets du maillage (centres des mailles duales) et aux milieux des arêtes situées sur la frontière. Nous allons aussi associer des inconnus vecteurs de champ électrique aux arêtes du maillage (diagonales des mailles diamants) et aux sommets situés sur la frontière. Nous considérons donc dans cette partie des vecteurs de  $\mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N''} \times \mathbb{R}^{N^\Gamma}$  et des vecteurs de  $(\mathbb{R}^2)^{N^\diamond} \times (\mathbb{R}^2)^{N^\Gamma}$  et nous définissons des produits scalaires et des normes agissant sur ces vecteurs.

NOTATION 1.6.1. Pour tout  $U' \in \mathbb{R}^{N'}$ ,  $U'' \in \mathbb{R}^{N''}$ , et  $U^\Gamma \in \mathbb{R}^{N^\Gamma}$ , on note

$$U''' := (U', U'') := (U'_1, \dots, U'_{N'}, U''_1, \dots, U''_{N''})$$

et

$$U'''^\Gamma := (U''', U^\Gamma).$$

Pour tout  $U^\diamond \in \mathbb{R}^{N^\diamond}$  et  $U^\Gamma \in \mathbb{R}^{N^\Gamma}$ , on note

$$U^{\diamond\Gamma} := (U^\diamond, U^\Gamma).$$

DÉFINITION 1.6.2. Pour tout  $U''', V''' \in \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N''}$ , On définit leur produit scalaire primal-dual par :

$$(1.6.1) \quad \langle U''', V''' \rangle_{''' } := \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{N'} |C'_i| U'_i V'_i + \sum_{i=1}^{N''} |C''_i| U''_i V''_i \right).$$

On note par  $\|\cdot\|_{'''}$  la norme associée.

DÉFINITION 1.6.3. On définit aussi le produit scalaire diamant, pour tout  $\mathbf{U}^\diamond, \mathbf{V}^\diamond \in (\mathbb{R}^2)^{N^\diamond}$ , par :

$$(1.6.2) \quad \langle \mathbf{U}^\diamond, \mathbf{V}^\diamond \rangle_\diamond := \sum_{i=1}^{N^\diamond} |C_i^\diamond| \mathbf{U}_i^\diamond \cdot \mathbf{V}_i^\diamond.$$

On note par  $\|\cdot\|_\diamond$  la norme associée.

À partir de ces deux normes, on définit une troisième sur  $\mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N''} \times (\mathbb{R}^2)^{N^\diamond}$ , telle que pour tout  $U = (U', U'', \mathbf{U}^\diamond)$

$$(1.6.3) \quad \|U\| := \sqrt{\|U'''\|_{''' }^2 + \|\mathbf{U}^\diamond\|_\diamond^2}.$$

DÉFINITION 1.6.4. Enfin, on définit le produit scalaire discret des traces de  $U'''^\Gamma \in \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N''} \times \mathbb{R}^{N^\Gamma}$  et  $\mathbf{V}^{\diamond\Gamma} \cdot \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{N^\diamond} \times \mathbb{R}^{N^\Gamma}$  sur la frontière par :

$$\langle U'''^\Gamma, \mathbf{V}^{\diamond\Gamma} \cdot \mathbf{t} \rangle_\Gamma := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N^\Gamma} [|A'_i| U_i^\Gamma \mathbf{V}_i^\diamond \cdot \mathbf{t}'_i + |\partial C_i''' \cap \Gamma| U_i'' \mathbf{V}_i^\Gamma \cdot \mathbf{t}''_i].$$

PROPOSITION 1.6.5. Si l'hypothèse 4 page 22 est vérifiée, alors pour tout vecteur  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N^\diamond}$ , on a

$$\|\mathbf{V}\|_\diamond^2 \leq 2 \left( \frac{h}{\alpha_3} \right)^2 \sum_{i=1}^{N^\diamond} [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}'_i)^2 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}''_i)^2].$$

DÉMONSTRATION. Par définition, on a

$$\|\mathbf{V}\|_\diamond^2 = \sum_{i=1}^{N^\diamond} |C_i^\diamond| \|\mathbf{V}\|^2,$$

ainsi, en utilisant la deuxième inégalité de la proposition 1.5.3 page 23, on a

$$\|\mathbf{V}\|_\diamond^2 \leq \sum_{i=1}^{N^\diamond} |C_i^\diamond| \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}'_i)^2 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}''_i)^2}{1 - |\cos \theta_i|};$$

et puisque pour tout  $i \in [1 \cdots N^\diamond]$

$$\frac{1}{1 - |\cos \theta_i|} = \frac{(1 + |\cos \theta_i|)}{(\sin \theta_i)^2} \leq \frac{2}{(\sin \theta_i)^2},$$

alors

$$\|\mathbf{V}\|_\diamond^2 \leq \sum_{i=1}^{N^\diamond} 2 |C_i^\diamond| \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}'_i)^2 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}''_i)^2}{(\sin \theta_i)^2}.$$

De plus, d'après le corollaire 1.5.2 page 23 et sous l'hypothèse 4 page 22 on a

$$\frac{2 |C_i^\diamond|}{(\sin \theta_i)^2} \leq 2 \left( \frac{h}{\alpha_3} \right)^2;$$

d'où

$$\|\mathbf{V}\|_{\diamond}^2 \leq 2 \left( \frac{h}{\alpha_3} \right)^2 \sum_{i=1}^{N_{\diamond}} \left[ (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}_i')^2 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}_i'')^2 \right].$$

□

### 1.7. Divergences discrètes

DÉFINITION 1.7.1. *On appelle divergence primale que l'on note  $\nabla'$ , l'opérateur discret défini sur chaque maille primale  $C_i'$ ,  $i \in \{1 \dots N'\}$ , qui à tout  $\mathbf{f}^{\diamond} \in (\mathbb{R}^2)^{N_{\diamond}}$  associe :*

$$(1.7.1) \quad \nabla'_i \cdot \mathbf{f}^{\diamond} := \frac{1}{|C_i'|} \sum_{A_j' \subset \partial C_i'} |A_j'| \mathbf{f}_j^{\diamond} \cdot \mathbf{n}'_{ij}.$$

Il approche les valeurs moyennes de  $\nabla \cdot \mathbf{f}$  sur les mailles primales  $C_i'$  en utilisant les valeurs de  $\mathbf{f}$  aux arêtes de la maille :

$$\frac{1}{|C_i'|} \int_{C_i'} \nabla \cdot \mathbf{f} \approx (\nabla' \cdot \mathbf{f}^{\diamond})_i.$$

DÉFINITION 1.7.2. *De même, on appelle divergence duale, que l'on note  $\nabla''$ , l'opérateur discret défini sur chaque maille duale  $C_i''$ , associée au sommet  $S_i'$ ,  $i \in \{1 \dots N''\}$ , qui à tout  $\mathbf{f}^{\diamond\Gamma} \in (\mathbb{R}^2)^{N_{\diamond}} \times (\mathbb{R}^2)^{N_{\Gamma}}$  associe :*

$$(1.7.2) \quad \nabla''_i \cdot \mathbf{f}^{\diamond\Gamma} := \frac{1}{|C_i''|} \left( \sum_{A_j'' \subset \partial C_i''} |A_j''| \mathbf{f}_j^{\diamond} \cdot \mathbf{n}''_{ij} + |\partial C_i'' \cap \Gamma| \mathbf{f}_i^{\Gamma} \cdot \mathbf{n}_i^{\Gamma} \right),$$

où  $\mathbf{f}_i^{\Gamma}$  est la composante de  $\mathbf{f}^{\Gamma}$ , associée au sommet  $S_i'$ .

Cet opérateur approche aussi les valeurs moyennes de  $\nabla \cdot \mathbf{f}$  sur les mailles duales  $C_i''$ .

REMARQUE 1.7.3.  $\partial C_i'' \cap \Gamma$  est non vide uniquement pour les cellules duales situées sur la frontière.

NOTATION 1.7.4. *On note*

$$\nabla''' \cdot \mathbf{V}^{\diamond\Gamma} := (\nabla' \cdot \mathbf{V}^{\diamond}, \nabla'' \cdot \mathbf{V}^{\diamond\Gamma}).$$

### 1.8. Rotationnels discrets

On rappelle que pour toute application  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , le *rotationnel vecteur* de  $f$  est l'opérateur défini par :

$$\nabla \times f := \left( \frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T$$

et pour toute application  $\mathbf{f}$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , le *rotationnel scalaire* de  $\mathbf{f}$  est l'opérateur défini par :

$$\nabla \times \mathbf{f} := \left( \frac{\partial \mathbf{f}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{f}_x}{\partial y} \right).$$

PROPOSITION 1.8.1. *Soit  $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$  orientée positivement ; alors, pour toute application  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  on a :*

$$(1.8.1) \quad \nabla \times f \cdot \mathbf{n} = \nabla f \cdot \mathbf{t}.$$

DÉMONSTRATION.  $\nabla \times f \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{n}_x - \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{n}_y = \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{t}_y + \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{t}_x = \nabla f \cdot \mathbf{t}$ .  $\square$

DÉFINITION 1.8.2. *On appelle rotationnel primal , et on note  $\nabla' \times$ , l'opérateur discret défini sur chaque maille primale  $C'_i$ ,  $i \in \{1 \dots N'\}$  qui à tout  $\mathbf{f}^\diamond \in (\mathbb{R}^2)^{N^\diamond}$  associe :*

$$(1.8.2) \quad \nabla'_i \times \mathbf{f}^\diamond := \frac{1}{|C'_i|} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} |A'_j| \mathbf{f}_j^\diamond \cdot \mathbf{t}'_{ij}.$$

Ils approche les valeurs moyennes de  $\nabla \times \mathbf{f}$  sur les mailles primales  $C'_i$  en utilisant les valeurs de  $\mathbf{f}$  aux arêtes de la maille :

$$\frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} \nabla \times \mathbf{f} \approx (\nabla' \times \mathbf{f}^\diamond)_i.$$

DÉFINITION 1.8.3. *De même, on appelle rotationnel dual , noté  $\nabla'' \times$ , l'opérateur discret défini sur chaque maille duale  $C''_i$ , associée au sommet  $S'_i$ ,  $i \in \{1 \dots N''\}$ , et pour tout  $\mathbf{f}^{\diamond\Gamma} \in (\mathbb{R}^2)^{N^\diamond} \times (\mathbb{R}^2)^{N^\Gamma}$ , par :*

$$(1.8.3) \quad \nabla''_i \times \mathbf{f}^{\diamond\Gamma} := \frac{1}{|C''_i|} \left( \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} |A''_j| \mathbf{f}_j^\diamond \cdot \mathbf{t}''_{ij} + |\partial C''_i \cap \Gamma| \mathbf{f}_i^\Gamma \cdot \mathbf{t}_i^\Gamma \right).$$

où  $\mathbf{f}_i^\Gamma$  est la composante de  $\mathbf{f}^\Gamma$ , associée au sommet  $S'_i$ .

Cet opérateur approche les valeurs moyennes de  $\nabla \times \mathbf{f}$  sur les mailles duales  $C''_i$ .

DÉFINITION 1.8.4. *On appelle rotationnel diamant, et on note  $\nabla^\diamond \times$ , l'opérateur discret défini sur chaque maille diamant  $C^\diamond_i$ , associée à l'arête  $A'_i$ ,  $i = 1 \dots N^\diamond$ , qui à tout  $f'''^\Gamma \in \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N''} \times \mathbb{R}^{N^\Gamma}$  associe :*

$$(1.8.4) \quad \nabla^\diamond_i \times f'''^\Gamma := \begin{cases} \frac{-1}{2|C^\diamond_i|} \left( (f_i^\Gamma - f'_{j(i)}) |A'_i| \mathbf{t}'_i + (f''_{i2} - f''_{i1}) |A''_i| \mathbf{t}''_i \right) & \text{si } i \leq N^\Gamma \\ \frac{-1}{2|C^\diamond_i|} \left( (f'_{i2} - f'_{i1}) |A'_i| \mathbf{t}'_i + (f''_{i2} - f''_{i1}) |A''_i| \mathbf{t}''_i \right) & \text{si } N^\Gamma + 1 \leq i \leq N^\diamond \end{cases},$$

où,

- $f_i^\Gamma$  est la composante associée à l'arête  $A'_i$ , lorsque celle ci est située sur la frontière  $\Gamma$ .
- $f'_{j(i)}$  est la composante associée à la cellule primale  $C'_{j(i)}$  ayant  $A'_i$  comme arête lorsque celle ci est située sur la frontière  $\Gamma$ . On rappelle que pour  $i \leq N^\Gamma$ , l'arête  $A'_i$  est située sur la frontière et donc elle n'est arête que d'une seule maille primale.
- $f''_{i1}$  et  $f''_{i2}$  sont les composantes duales associées aux sommets  $S'_{i1}$  et  $S'_{i2}$  de l'arête  $A'_i$ .
- $f'_{i1}$  et  $f'_{i2}$  sont les composantes associées aux cellules primales  $C'_{i1}$  et  $C'_{i2}$  partageant l'arête  $A'_i$ , lorsque celle ci est une arête interne ( $N^\Gamma + 1 \leq i \leq N^\diamond$ ).

Ainsi le rotationnel diamant de  $f$  est une approximation de la valeur moyenne de  $\nabla \times f$  sur les cellules diamants  $C_i^\diamond$  en utilisant les valeurs de  $f$  aux sommets de la cellule. Quand  $C_i^\diamond$  est située sur la frontière, on utilise, en plus des valeurs aux sommets, la valeur de  $f$  au milieu  $A'_i$ .

$$\frac{1}{|C_i^\diamond|} \int_{C_i^\diamond} \nabla \times f \approx (\nabla^\diamond \times f''')_i.$$

DÉFINITION 1.8.5. On définit la composante normale de l'opérateur  $\nabla^\Gamma \times$ , pour tout  $f'''^\Gamma \in \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N''} \times \mathbb{R}^{N^\Gamma}$  et tout  $i = 1 \dots N^\Gamma$  par :

$$\nabla_i^\Gamma \times f'''^\Gamma \cdot \mathbf{n}_i^\Gamma := \frac{f_{i2}^\Gamma - f_{i1}^\Gamma}{|\partial C_i'' \cap \Gamma|},$$

où,  $f_{i1}^\Gamma$  et  $f_{i2}^\Gamma$  sont les composantes de  $f^\Gamma$  associée aux arêtes  $A'_{i1}$  et  $A'_{i2}$ , situées sur la frontière et ayant  $S'_i$  comme sommet commun, le vecteur  $\mathbf{n}_i^\Gamma$  étant définie par la formule (1.3.1).

NOTATION 1.8.6. On note par

$$\nabla^{\diamond\Gamma} \times U'''^\Gamma := \left( \nabla^\diamond \times U'''^\Gamma, \nabla^\Gamma \times U'''^\Gamma \right).$$

PROPOSITION 1.8.7. Ces produits scalaires et opérateurs discrets vérifient les propriétés suivantes, pour tout  $U'''^\Gamma \in \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N''} \times \mathbb{R}^{N^\Gamma}$  et  $\mathbf{V}^{\diamond\Gamma} \cdot \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{N^\diamond} \times \mathbb{R}^{N^\Gamma}$  :

$$(1.8.5) \quad \nabla' \cdot \nabla^\diamond \times U'''^\Gamma = 0,$$

$$(1.8.6) \quad \nabla'' \cdot \nabla^{\diamond\Gamma} \times U'''^\Gamma = 0,$$

$$(1.8.7) \quad \langle U'''^\Gamma, \nabla''' \times \mathbf{V}^{\diamond\Gamma} \rangle''' = \left\langle \nabla^\diamond \times U'''^\Gamma, \mathbf{V}^\diamond \right\rangle_\diamond + \left\langle U'''^\Gamma, \mathbf{V}^{\diamond\Gamma} \cdot \mathbf{t} \right\rangle_\Gamma.$$

DÉMONSTRATION. La preuve de ces propriétés ainsi que les détails de constructions des opérateurs discrets sont publiés dans [21, 20].  $\square$



## CHAPITRE 2

### Ecriture et étude du schéma pour les équations de Maxwell

#### 2.1. Introduction

D'après la théorie de Maxwell, les champs électrique  $\vec{\mathbf{E}}$  et magnétique  $\vec{\mathbf{B}}$  sont déterminés à partir des densités de charge  $\rho$  et de courant  $\vec{\mathbf{J}}$  par les quatre équations fondamentales

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} + \nabla \times \vec{\mathbf{E}} & = 0 & \text{Loi de Faraday} \\ \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} - c^2 \nabla \times \vec{\mathbf{B}} & = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\mathbf{J}} & \text{Loi d'Ampère} \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} & = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Loi de Gauss} \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} & = 0 & \text{Loi de conservation de flux de } \vec{\mathbf{B}} \end{cases}$$

où  $c = 3.10^8 \text{ ms}^{-1}$  est la vitesse de la lumière et  $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ Fm}^{-1}$  est la permittivité du vide.

Dans le cas où les champs ne dépendent pas de  $z$ , ce système se découple en deux sous systèmes :

**Système de Maxwell en mode transverse électrique (TE)**

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} & = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \nabla \times B & = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} & = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases}$$

**Système de Maxwell en mode transverse magnétique (TM)**

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times E & = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} - c^2 \nabla \times \mathbf{B} & = -\frac{1}{\epsilon_0} J \\ \nabla \cdot \mathbf{B} & = 0 \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} B &= \vec{\mathbf{B}}_z(x, y, t), & E &= \vec{\mathbf{E}}_z(x, y, t), & J &= \vec{\mathbf{J}}_z(x, y, t) \\ \mathbf{B} &= \left( \vec{\mathbf{B}}_x(x, y, t), \vec{\mathbf{B}}_y(x, y, t) \right) & \mathbf{E} &= \left( \vec{\mathbf{E}}_x(x, y, t), \vec{\mathbf{E}}_y(x, y, t) \right) & \mathbf{J} &= \left( \vec{\mathbf{J}}_x(x, y, t), \vec{\mathbf{J}}_y(x, y, t) \right) \end{aligned}$$

$$\nabla \times E = \begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial y} \\ -\frac{\partial E}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y}.$$

Dans la suite on va se placer dans ce cadre et on fera notre étude avec le mode transverse électrique donné par le système (2.1.2).

Soient  $T > 0$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  à frontière  $\Gamma$  lipschitzienne.

Pour résoudre le système (2.1.2) sur  $\Omega \times [0, T]$ , on suppose que les champs électromagnétiques sont connus à l'instant initial 0 et que  $\mathbf{E}$  vérifie la loi de Gauss. On suppose aussi que les conditions aux limites sont données par

$$(2.1.3) \quad a \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} + b B = \Upsilon,$$

où

- $a = 1, b = 0$  et  $\Upsilon = 0$ , dans le cas d'un conducteur parfait (conditions de bord métallique),
- $a = 0, b = 1$  et  $\Upsilon = 0$ , dans le cas d'un mur magnétique,
- $a = 1, b = -c$  et  $\Upsilon$  est une fonction donnée, dans le cas de conditions de bord de Silver-Muller (le cas  $\Upsilon = 0$  correspond alors à une condition limite absorbante de premier ordre).

Ainsi le système complet à résoudre s'écrit

$$(2.1.4) \quad \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0, T],$$

$$(2.1.5) \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \nabla \times B = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J} \quad \text{sur } \Omega \times [0, T],$$

$$(2.1.6) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{sur } \Omega \times [0, T],$$

$$a \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} + b B = \Upsilon \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T],$$

$$\mathbf{E}(\cdot, 0) = \mathbf{E}^0 \quad \text{sur } \Omega,$$

$$B(\cdot, 0) = B^0 \quad \text{sur } \Omega.$$

REMARQUE 2.1.1. *On suppose que la charge électromagnétique est conservée, c'est à dire que les densités de charge  $\rho$  et de courant  $J$ , qui interviennent dans les équations, (2.1.5) et (2.1.6) vérifient*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0, T].$$

*On peut alors facilement constater qu'en appliquant l'opérateur divergence à l'équation d'Ampère (2.1.5), et puisque la loi de Gauss (2.1.6) est vérifiée par le champ électrique initial, alors elle est vérifiée pour tout  $t \in [0, T]$ . Ainsi résoudre le problème continu revient à résoudre le système suivant*



$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} & = 0 & \text{sur } \Omega \times [0, T] \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \nabla \times B & = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J} & \text{sur } \Omega \times [0, T] \\ a \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} + b B & = \Upsilon & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \\ \mathbf{E}(\cdot, 0) & = \mathbf{E}^0 & \text{sur } \Omega \\ B(\cdot, 0) & = B^0 & \text{sur } \Omega \end{cases}.$$

## 2.2. Discrétisation des lois de Faraday et d'Ampère

Pour discrétiser le système, on utilise une méthode de volumes finis, appelée DDFV (discrete duality finite volume) qui consiste à utiliser les opérateurs discrets déjà définis dans le chapitre précédent.

Nous allons adopter les notations suivantes :

- $B'_i$  est une approximation du champ magnétique sur la maille primale  $C'_i$ ,  $i \in \{1 \dots N'\}$ .
- $B' := (B'_1, \dots, B'_{N'})$ .
- $B''_i$  est une approximation du champ magnétique sur la maille duale  $C''_i$ ,  $i \in \{1 \dots N''\}$ .
- $B'' := (B''_1, \dots, B''_{N''})$ .
- $B_i^\Gamma$  est une approximation du champ magnétique en  $M'_i$ ,  $i \in \{1 \dots N^\Gamma\}$ , milieux des arêtes  $A'_i$ , situées sur la frontière.
- $B''' := (B', B'')$ ,  $B'''^\Gamma := (B', B'', B^\Gamma)$
- $\mathbf{E}_i^\diamond$  et  $\mathbf{J}_i^\diamond$  sont des approximations du champ et de la densité du courant électrique sur la maille diamant  $C_i^\diamond$ ,  $i \in \{1 \dots N^\diamond\}$ .
- $\mathbf{E}^\diamond := (\mathbf{E}^\diamond_1, \dots, \mathbf{E}^\diamond_{N^\diamond})$  et  $\mathbf{J}^\diamond := (\mathbf{J}^\diamond_1, \dots, \mathbf{J}^\diamond_{N^\diamond})$ .
- $\mathbf{E}_i^\Gamma$  et  $\mathbf{J}_i^\Gamma$  sont des approximations du champ et de la densité du courant électrique sur  $\partial C''_i \cap \Gamma$  associés aux sommets  $S'_i$  situés sur la frontière ( $1 \leq i \leq N^\Gamma$ ).
- $\mathbf{E}^\Gamma := (\mathbf{E}^\Gamma_1, \dots, \mathbf{E}^\Gamma_{N^\Gamma})$  et  $\mathbf{J}^\Gamma := (\mathbf{J}^\Gamma_1, \dots, \mathbf{J}^\Gamma_{N^\Gamma})$ .
- $\mathbf{E}^{\diamond\Gamma} := (\mathbf{E}^\diamond, \mathbf{E}^\Gamma)$  et  $\mathbf{J}^{\diamond\Gamma} := (\mathbf{J}^\diamond, \mathbf{J}^\Gamma)$ .

On approche les valeurs moyennes de l'équation de Faraday (2.1.4) sur chacune des mailles primales et duales par :

$$\begin{cases} \frac{\partial B'_i}{\partial t} + \nabla'_i \times \mathbf{E}^\diamond & = 0, \quad i = 1 \dots N' \\ \frac{\partial B''_i}{\partial t} + \nabla''_i \times \mathbf{E}^{\diamond\Gamma} & = 0, \quad i = 1 \dots N'' \end{cases},$$

où  $\nabla'_i \times$  et  $\nabla''_i \times$  sont les rotationnels scalaires primal et dual définis par les formules (1.8.2) et (1.8.3).

On approche l'équation d'Ampère (2.1.5) sur chacune des mailles diamants :

$$\frac{\partial \mathbf{E}_i^\diamond}{\partial t} - c^2 \nabla_i^\diamond \times B''^\Gamma = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}_i^\diamond, \quad i = 1 \dots N^\diamond,$$

où  $\nabla_i^\diamond \times$  est le rotationnel vecteur diamant défini par la formule (1.8.4).

Enfin, soit  $\Delta t$  le pas de temps tel que  $\Delta t = \frac{T}{N}$ . On utilise le schéma saute mouton pour la discrétisation temporelle. Ainsi, les équations discrétisées en espace et en temps s'écrivent pour tout  $n \in \{0 \dots N-1\}$

$$(2.2.1) \quad \frac{B'^{n+1} - B'^n}{\Delta t} + \nabla' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} = 0,$$

$$(2.2.2) \quad \frac{B''^{n+1} - B''^n}{\Delta t} + \nabla'' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} = 0,$$

$$(2.2.3) \quad \frac{\mathbf{E}^{\diamond n+3/2} - \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla^\diamond \times B''^{\Gamma n+1} + \frac{\mathbf{J}^{\diamond n+1}}{\epsilon_0} = 0.$$

### 2.3. Discrétisation des conditions initiales

Pour le champ magnétique discret primal, on prend la valeur du champ au centre de la maille et à l'instant 0. Pour le champ discret dual, on prend la valeur du champ à l'instant 0 au sommet primal associé à la maille duale. Enfin, pour le champs discrets de la frontière, on prend la valeur du champ à l'instant 0 aux milieux des arêtes de la frontière :

$$(2.3.1) \quad \begin{cases} B_i'^0 = B(c'_i, 0) & i \in \{1 \dots N'\} \\ B_i''^0 = B(S'_i, 0) & i \in \{1 \dots N''\} \\ B_i^{\Gamma 0} = B(M'_i, 0) & i \in \{1 \dots N^\Gamma\} \end{cases} .$$

Pour le champ électrique initial  $\mathbf{E}_i^{\diamond 1/2}$ , on le définit par ses composantes tangentielles primale et duale de la façon suivante :  $\forall i = 1 \dots N^\diamond$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_i^{\diamond 1/2} \cdot \mathbf{t}'_i &= \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \left[ \mathbf{E}(X, 0) + \frac{\Delta t}{2} \partial_t \mathbf{E}(X, 0) \right] \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma \\ \mathbf{E}_i^{\diamond 1/2} \cdot \mathbf{t}''_i &= \frac{1}{|A''_i|} \int_{A''_i} \left[ \mathbf{E}(X, 0) + \frac{\Delta t}{2} \partial_t \mathbf{E}(X, 0) \right] \cdot \mathbf{t}''_i d\sigma \end{cases} ,$$

où  $d\sigma$  est l'élément de longueur. Or, on ne dispose pas directement de  $\partial_t \mathbf{E}(\cdot, 0)$ , mais le connaît grâce à l'équation d'Ampère (2.1.5), d'où

$$(2.3.2) \quad \begin{cases} \mathbf{E}_i^{\circ 1/2} \cdot \mathbf{t}'_i &= \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \left[ \mathbf{E}(X, 0) + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\mathbf{J}(X, 0)}{\epsilon_0} - c^2 (\nabla \times B(\cdot, 0))(X) \right) \right] \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma \\ \mathbf{E}_i^{\circ 1/2} \cdot \mathbf{t}''_i &= \frac{1}{|A''_i|} \int_{A''_i} \left[ \mathbf{E}(X, 0) + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\mathbf{J}(X, 0)}{\epsilon_0} - c^2 (\nabla \times B(\cdot, 0))(X) \right) \right] \cdot \mathbf{t}''_i d\sigma \end{cases}.$$

De même, on définit le champ électrique discret de la frontière  $\mathbf{E}_i^{\Gamma 1/2}$ ,  $i \in \{1 \dots N^\Gamma\}$ , par

$$(2.3.3) \quad \begin{cases} \mathbf{E}_i^{\Gamma 1/2} \cdot \mathbf{n}_i^\Gamma &= \frac{1}{|C''_i \cap \Gamma|} \int_{C''_i \cap \Gamma} \left[ \mathbf{E}(X, 0) + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\mathbf{J}(X, 0)}{\epsilon_0} - c^2 (\nabla \times B(\cdot, 0))(X) \right) \right] \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ \mathbf{E}_i^{\Gamma 1/2} \cdot \mathbf{t}_i^\Gamma &= \frac{1}{|C''_i \cap \Gamma|} \int_{C''_i \cap \Gamma} \left[ \mathbf{E}(X, 0) + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\mathbf{J}(X, 0)}{\epsilon_0} - c^2 (\nabla \times B(\cdot, 0))(X) \right) \right] \cdot \mathbf{t} d\sigma \end{cases}.$$

#### 2.4. Discrétisation des conditions aux limites

Ces conditions interviennent pour calculer  $B_i^\Gamma$  et  $\mathbf{E}_i^\Gamma \cdot \mathbf{t}_i^\Gamma$ ,  $i \in \{1 \dots N^\Gamma\}$ .

En effet, d'après l'équation d'Ampère discrète (2.2.3), pour calculer le champ électrique  $\mathbf{E}_i^{\circ n+1/2}$  associé aux cellules diamants  $C_i^\circ$  situées sur la frontière ( $1 \leq i \leq N^\Gamma$ ), on a besoin de calculer  $\nabla_i^\circ \times B^{\Gamma n}$  qui est donné, d'après (1.8.4), par

$$\nabla_i^\circ \times B^{\Gamma n} = -\frac{1}{2|C_i^\circ|} \left[ (B_i^{\Gamma n} - B_{j(i)}^{\Gamma n}) |A'_i| \mathbf{t}'_i + (B_{i2}^{\Gamma n} - B_{i1}^{\Gamma n}) |A''_i| \mathbf{t}''_i \right].$$

Or les équations de Faraday discrètes ne permettent de calculer que  $B_{j(i)}^{\Gamma n}$ ,  $B_{i1}^{\Gamma n}$  et  $B_{i2}^{\Gamma n}$ , d'où la nécessité des conditions aux limites pour calculer  $B_i^{\Gamma n}$ .

D'autre part, d'après l'équation de Faraday duale (2.2.2), pour calculer le champ magnétique duale  $B_i^{\Gamma n}$  associé aux sommets situés sur la frontière avec ( $1 \leq i \leq N^\Gamma$ ), on a besoin de calculer  $\nabla_i'' \times \mathbf{E}^{\Gamma n+1/2}$  et qui est donné, d'après (1.8.3), par

$$\nabla_i'' \times \mathbf{E}^{\Gamma n+1/2} = \frac{1}{|C_i''|} \left( \sum_{A''_j \subset \partial C_i''} |A''_j| \mathbf{E}_j^{\circ n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_{ij} + |\partial C_i'' \cap \Gamma| \mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i^\Gamma \right).$$

Or l'équation d'Ampère discrète ne permet de calculer que  $\mathbf{E}^{\circ n+1/2}$ . C'est ainsi que les conditions aux limites interviennent pour calculer  $\mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i^\Gamma$ .

On suppose alors que ces conditions sont données par

$$(2.4.1) \quad a \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} + b B = \Upsilon,$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes, non toutes les deux nulles, et  $\Upsilon$  une fonction donnée.

### 2.4.1. Détermination de $B^{\Gamma n}$ .

(1) Si  $a = 0$  et  $b \neq 0$ , (en particulier pour un mur magnétique), il suffit de prendre

$$B_i^{\Gamma n} = \frac{1}{b} \Upsilon_i^{\diamond n},$$

où

$$\Upsilon_i^{\diamond n} := \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \Upsilon(X, t^n) d\sigma.$$

(2) Si  $a \neq 0$ , la discrétisation de (2.4.1), sur les arêtes situées sur la frontière, est donnée par :

$$(2.4.2) \quad a \frac{\mathbf{E}_i^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_i + \mathbf{E}_i^{\diamond n-1/2} \cdot \mathbf{t}'_i}{2} + b B_i^{\Gamma n} = \Upsilon_i^{\diamond n}, \quad i \in \{1 \dots N^\Gamma\}$$

Or,  $\mathbf{E}_i^{\diamond n+1/2}$  est inconnue à cette itération, alors en utilisant l'équation d'Ampère discrète (2.2.3), on a

$$\mathbf{E}^{\diamond n+1/2} = \mathbf{E}^{\diamond n-1/2} + c^2 \Delta t \nabla^\diamond \times B'''^{\Gamma n} - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \mathbf{J}^{\diamond n},$$

ainsi  $\forall i \leq N^\Gamma$ , on a

$$a \mathbf{E}_i^{\diamond n-1/2} \cdot \mathbf{t}'_i + \frac{a c^2 \Delta t}{2} \nabla^\diamond_i \times B'''^{\Gamma n} \cdot \mathbf{t}'_i - \frac{a \Delta t}{2 \epsilon_0} \mathbf{J}^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}'_i + b B_i^{\Gamma n} = \Upsilon_i^{\diamond n},$$

et donc

$$(2.4.3) \quad \frac{a c^2 \Delta t}{2} \nabla^\diamond_i \times B'''^{\Gamma n} \cdot \mathbf{t}'_i + b B_i^{\Gamma n} = -a \mathbf{E}_i^{\diamond n-1/2} \cdot \mathbf{t}'_i + \frac{a \Delta t}{2 \epsilon_0} \mathbf{J}^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}'_i + \Upsilon_i^{\diamond n}.$$

Or, d'après définition du rotationnel diamant donnée par la formule (1.8.4), on a pour tout  $i \leq N^\Gamma$

$$\nabla^\diamond_i \times B'''^{\Gamma n} \cdot \mathbf{t}'_i = -\frac{1}{2|C_i^\diamond|} \left[ |A'_i| \left( B_i^{\Gamma n} - B'_{j(i)} \right) + |A''_i| \mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{t}'_i \left( B''_{i2} - B''_{i1} \right) \right];$$

ainsi, en remplaçant dans (2.4.3) on obtient pour tout  $i \leq N^\Gamma$

$$\begin{aligned} -\frac{a c^2 \Delta t}{4|C_i^\diamond|} \left[ |A'_i| \left( B_i^{\Gamma n} - B'_{j(i)} \right) + |A''_i| \mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{t}'_i \left( B''_{i2} - B''_{i1} \right) \right] + b B_i^{\Gamma n} = \\ -a \mathbf{E}_i^{\diamond n-1/2} \cdot \mathbf{t}'_i + \frac{a \Delta t}{2 \epsilon_0} \mathbf{J}^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}'_i + \Upsilon_i^{\diamond n}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \left( \frac{a c^2 \Delta t |A'_i|}{4|C_i^\diamond|} - b \right) B_i^{\Gamma n} = \frac{a c^2 \Delta t |A'_i|}{4|C_i^\diamond|} B'_{j(i)} - \frac{a c^2 \Delta t |A''_i| \mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{t}'_i}{4|C_i^\diamond|} \left( B''_{i2} - B''_{i1} \right) \\ + a \mathbf{E}_i^{\diamond n-1/2} \cdot \mathbf{t}'_i - \frac{a \Delta t}{2 \epsilon_0} \mathbf{J}^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}'_i - \Upsilon_i^{\diamond n}. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $b \neq \frac{a c^2 \Delta t |A'_i|}{4 |C_i^\circ|}$ , alors

$$(2.4.4) \quad \begin{aligned} B_i^{\Gamma n} &= \frac{a c^2 \Delta t}{(a c^2 \Delta t |A'_i| - 4b |C_i^\circ|)} \left[ |A'_i| B_{j(i)}^{\prime n} - |A''_i| \mathbf{t}_i'' \cdot \mathbf{t}'_i \left( B_{i2}^{\prime n} - B_{i1}^{\prime n} \right) \right] \\ &+ \frac{4 |C_i^\circ|}{(a c^2 \Delta t |A'_i| - 4b |C_i^\circ|)} \left[ a \mathbf{E}_i^{\circ n-1/2} \cdot \mathbf{t}'_i - \frac{a \Delta t}{2\epsilon_0} \mathbf{J}^{\circ n} \cdot \mathbf{t}'_i - \Upsilon_i^{\circ n} \right]. \end{aligned}$$

De là, on déduit que :

- Dans le cas particulier de la condition de Silver-Muller ( $a = 1, b = -c$ ), la condition aux limites discrète est donnée par

$$\begin{aligned} B_i^{\Gamma n} &= \frac{c^2 \Delta t}{(c^2 \Delta t |A'_i| + 4c |C_i^\circ|)} \left[ |A'_i| B_{j(i)}^{\prime n} - |A''_i| \mathbf{t}_i'' \cdot \mathbf{t}'_i \left( B_{i2}^{\prime n} - B_{i1}^{\prime n} \right) \right] \\ &+ \frac{4 |C_i^\circ|}{(c^2 \Delta t |A'_i| + 4c |C_i^\circ|)} \left[ \mathbf{E}_i^{\circ n-1/2} \cdot \mathbf{t}'_i - \frac{\Delta t}{2\epsilon_0} \mathbf{J}^{\circ n} \cdot \mathbf{t}'_i - \Upsilon_i^{\circ n} \right]. \end{aligned}$$

- Dans le cas d'un conducteur parfait ( $a = 1, b = 0$ , et  $\Upsilon = 0$ ) on a la condition aux limites discrète s'écrit

$$B_i^{\Gamma n} = B_{j(i)}^{\prime n} - \frac{|A''_i|}{|A'_i|} \mathbf{t}_i'' \cdot \mathbf{t}'_i \left( B_{i2}^{\prime n} - B_{i1}^{\prime n} \right) + \frac{4 |C_i^\circ|}{c^2 \Delta t |A'_i|} \left( \mathbf{E}_i^{\circ n-1/2} \cdot \mathbf{t}'_i - \frac{\Delta t}{2\epsilon_0} \mathbf{J}^{\circ n} \cdot \mathbf{t}'_i \right);$$

et puisque  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{t} = 0$  sur le bord, alors  $\mathbf{E}_i^{\circ n-1/2} \cdot \mathbf{t}'_i = 0$  et donc

$$B_i^{\Gamma n} = B_{j(i)}^{\prime n} - \frac{|A''_i|}{|A'_i|} \mathbf{t}_i'' \cdot \mathbf{t}'_i \left( B_{i2}^{\prime n} - B_{i1}^{\prime n} \right) + \frac{2 |C_i^\circ|}{c^2 \epsilon_0 |A'_i|} \mathbf{J}^{\circ n} \cdot \mathbf{t}'_i.$$

#### 2.4.2. Détermination de la composante tangentielle de $\mathbf{E}^{\Gamma n+1/2}$ .

(1) Si  $a \neq 0$  et  $b = 0$ , (en particulier pour un conducteur parfait), il suffit de prendre

$$(2.4.5) \quad \mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_i = \frac{1}{a} \Upsilon_i^{\prime n+1/2},$$

où

$$\Upsilon_i^{\prime n+1/2} := \frac{1}{|C_i'' \cap \Gamma|} \int_{C_i'' \cap \Gamma} \Upsilon(X, t^{n+1/2}) d\sigma.$$

(2) Si  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ , (en particulier pour des conditions de Silver-Muller) la discrétisation de (2.4.1), sur les sommets situés sur la frontière, est donnée par :

$$(2.4.6) \quad a \frac{\mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_i + \mathbf{E}_i^{\Gamma n-1/2} \cdot \mathbf{t}'_i}{2} + b B_i^{\prime n} = \Upsilon_i^{\prime n}, \quad i \in \{1 \dots N^\Gamma\}.$$

De là, on déduit que

$$\mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_i = -\mathbf{E}_i^{\Gamma n-1/2} \cdot \mathbf{t}'_i - 2 \frac{b}{a} B_i^{\prime n} + 2 \Upsilon_i^{\prime n}.$$

(3) Si  $a = 0$  et  $b \neq 0$  (en particulier pour un mur magnétique), alors

$$B_i''^n = \frac{1}{b} \Upsilon_i''^n, \forall i \in \{1 \cdots N^\Gamma\}.$$

D'autre part, en utilisant l'équation de Faraday duale (2.2.2) et la définition du rotationnel dual (1.8.3), on a

$$\frac{B_i''^{n+1} - B_i''^n}{\Delta t} + \frac{1}{|C_i''|} \left( \sum_{A_j'' \subset \partial C_i''} |A_j''| \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_{ij}'' + |\partial C_i'' \cap \Gamma| \mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i^\Gamma \right) = 0,$$

d'où, pour tout  $i \in \{1 \cdots N^\Gamma\}$ , on a

$$\frac{|C_i''|}{b \Delta t} (\Upsilon_i''^{n+1} - \Upsilon_i''^n) + \sum_{A_j'' \subset \partial C_i''} |A_j''| \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_{ij}'' + |\partial C_i'' \cap \Gamma| \mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i^\Gamma = 0;$$

donc

$$(2.4.7) \quad \mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i^\Gamma = \frac{-1}{|\partial C_i'' \cap \Gamma|} \sum_{A_j'' \subset \partial C_i''} |A_j''| \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_{ij}'' - \frac{|C_i''|}{b \Delta t} (\Upsilon_i''^{n+1} - \Upsilon_i''^n).$$

REMARQUE 2.4.1. Selon les cas, le choix de discrétiser (2.4.1) à l'instant  $t^n$  ou à l'instant  $t^{n+1/2}$  a été fait de façon à obtenir la conservation d'une énergie électromagnétique discrète, ce dont nous allons parler plus loin. Cette propriété sera utile pour assurer la stabilité du schéma.

## 2.5. Discrétisation de la densité de courant et de charge, et loi de Gauss discrète

Le schéma (2.5.1) :

$$(2.5.1) \quad \begin{cases} \frac{B^{m+1} - B^m}{\Delta t} + \nabla' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} & = 0 \\ \frac{B''^{m+1} - B''^m}{\Delta t} + \nabla'' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} & = 0 \\ \frac{\mathbf{E}^{\diamond n+3/2} - \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla^\diamond \times B''^{\Gamma n+1} & = -\frac{\mathbf{J}^{\diamond n+1}}{\epsilon_0} \end{cases},$$

avec les conditions initiales discrètes et les conditions aux limites discrètes, suffit à lui seul à déterminer les champs électromagnétiques discrets. Mais, on aimerait de plus que le champs  $\mathbf{E}^{\diamond \Gamma n-1/2}$  vérifie une version discrète de la loi de Gauss (2.1.6). Cette condition empêche d'obtenir des solutions non physiques. Soit alors les notations suivantes :

- $\rho'_i$  est une approximation de la densité de charge sur la maille primale  $C'_i$ ,  $i \in \{1 \cdots N'\}$ .
- $\rho' := (\rho'_1, \cdots, \rho'_{N'})$ .
- $\rho''_i$  est une approximation de la densité de charge sur la maille duale  $C''_i$ ,  $i \in \{1 \cdots N''\}$ .
- $\rho'' := (\rho''_1, \cdots, \rho''_{N''})$ .

- $\rho''' := (\rho', \rho'')$ .

On aimerait que le champ électrique discret  $\mathbf{E}^{\diamond\Gamma_{n+1/2}}$  et la densité de charge discrète  $\rho'''^{n+1/2}$  vérifient l'équation de Gauss discrète sur les mailles primales et duales :

$$(2.5.2) \quad \begin{cases} \nabla' \cdot \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} &= \frac{\rho'^{n+1/2}}{\epsilon_0} \\ \nabla'' \cdot \mathbf{E}^{\diamond\Gamma_{n+1/2}} &= \frac{\rho''^{n+1/2}}{\epsilon_0} \end{cases},$$

où  $\nabla' \cdot$  et  $\nabla'' \cdot$  sont les opérateurs divergences primale et duale définies par les formules (1.7.1) et (1.7.2).

PROPOSITION 2.5.1. *Si la discrétisation des densités de charge et de courant satisfait les équations de conservation de charge discrètes, c'est à dire, pour tout  $n \in \{1 \cdots N - 1\}$  :*

$$(2.5.3) \quad \begin{cases} \frac{\rho'^{n+1/2} - \rho'^{n-1/2}}{\Delta t} + \nabla' \cdot \mathbf{J}^{\diamond n} &= 0 \\ \frac{\rho''^{n+1/2} - \rho''^{n-1/2}}{\Delta t} + \nabla'' \cdot \mathbf{J}^{\diamond\Gamma_n} &= 0 \end{cases},$$

et si la loi de Gauss discrète (2.5.2) est vérifiée par le champ électrique discret initial :

$$\begin{cases} \nabla' \cdot \mathbf{E}^{\diamond 1/2} &= \frac{\rho'^{1/2}}{\epsilon_0} \\ \nabla'' \cdot \mathbf{E}^{\diamond\Gamma_{1/2}} &= \frac{\rho''^{1/2}}{\epsilon_0} \end{cases},$$

alors cette loi est vérifiée pour tout  $n \in \{0 \cdots N - 1\}$ .

DÉMONSTRATION. Pour montrer l'équation de Gauss discrète primale, on applique l'opérateur divergence discrète primale à l'équation d'Ampère discrète (2.2.3); ainsi, on a pour tout  $n \in \{1 \cdots N\}$

$$\frac{\nabla' \cdot \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} - \nabla' \cdot \mathbf{E}^{\diamond n-1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla' \cdot \nabla^\diamond \times B'''^{\Gamma_n} + \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}^{\diamond n}}{\epsilon_0} = 0;$$

or d'après la proposition 1.8.7 page 29 on a

$$\nabla' \cdot \nabla^\diamond \times B'''^{\Gamma_n} = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{\nabla' \cdot \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} - \nabla' \cdot \mathbf{E}^{\diamond n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}^{\diamond n}}{\epsilon_0},$$

et en utilisant l'équation de conservation de charge discrète (2.5.3), on a

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} - \nabla' \cdot \mathbf{E}^{\diamond n-1/2} = \frac{\rho'^{n+1/2} - \rho'^{n-1/2}}{\epsilon_0},$$

ainsi, et par récurrence, on obtient que pour tout  $n \in \{1 \cdots N\}$

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} - \nabla' \cdot \mathbf{E}^{\diamond 1/2} = \frac{\rho'^{n+1/2} - \rho'^{1/2}}{\epsilon_0},$$

et comme la loi de Gauss est satisfaite par les conditions initiales, alors,  $\forall n \in \{0 \cdots N\}$

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} = \frac{\rho'^{n+1/2}}{\epsilon_0}.$$

La démonstration de l'équation de Gauss discrète duale n'est pas immédiate. En effet, l'application de l'opérateur divergence duale  $\nabla''$ , associée aux mailles duales du bord, nécessite la définition de  $\mathbf{E}^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{n}_i^\Gamma$ , ce qui n'a pas été effectué lors de la discrétisation des conditions aux limites, car pour résoudre le problème, nous n'avons besoin que de la composante tangentielle de  $\mathbf{E}^{\Gamma n+1/2}$ . Ainsi, on suppose que le champs électrique est discrétisé aux sommets du bord tel que  $\mathbf{E}^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{n}_i^\Gamma$  vérifie

$$\frac{\mathbf{E}^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{n}_i^\Gamma - \mathbf{E}^{\Gamma n-1/2} \cdot \mathbf{n}_i^\Gamma}{\Delta t} - c^2 \nabla^\Gamma \times B'''^{\Gamma n} \cdot \mathbf{n}_i^\Gamma + \frac{\mathbf{J}^{\Gamma n} \cdot \mathbf{n}_i^\Gamma}{\epsilon_0} = 0.$$

D'autre part, d'après l'équation d'Ampère discrète (2.2.3), on a

$$\frac{\mathbf{E}^{\diamond n+1/2} - \mathbf{E}^{\diamond n-1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla^\diamond \times B'''^{\Gamma n} + \frac{\mathbf{J}^{\diamond n}}{\epsilon_0} = 0.$$

Et puisque

$$\begin{aligned} \nabla'' \cdot \left( \frac{\mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} - \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n-1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla^{\diamond \Gamma} \times B'''^{\Gamma n} + \frac{\mathbf{J}^{\diamond \Gamma n}}{\epsilon_0} \right) = \\ \frac{1}{|C_i''|} \sum_{A_j'' \subset \partial C_i''} |A_j''| \left( \frac{\mathbf{E}^{\diamond n+1/2} - \mathbf{E}^{\diamond n-1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla^\diamond \times B'''^{\Gamma n} + \frac{\mathbf{J}^{\diamond n}}{\epsilon_0} \right) \cdot \mathbf{n}_{ij}'' \\ + \frac{|\partial C_i'' \cap \Gamma|}{|C_i''|} \left( \frac{\mathbf{E}^{\Gamma n+1/2} - \mathbf{E}^{\Gamma n-1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla^\Gamma \times B'''^{\Gamma n} + \frac{\mathbf{J}^{\Gamma n}}{\epsilon_0} \right) \cdot \mathbf{n}_i^\Gamma, \end{aligned}$$

alors

$$\nabla'' \cdot \left( \frac{\mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} - \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n-1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla^{\diamond \Gamma} \times B'''^{\Gamma n} + \frac{\mathbf{J}^{\diamond \Gamma n}}{\epsilon_0} \right) = 0.$$

Et là, en procédant de manière similaire à la preuve de l'équation de Gauss primale, on prouve l'équation de Gauss duale.  $\square$

Lorsque les densités de charge  $\rho$  et de courant  $\mathbf{J}$ , sont des fonctions données, suffisamment régulières, nous allons indiquer une façon pour définir leurs valeurs discrètes  $\rho'''^{n+1/2}$  et  $\mathbf{J}_i^{\diamond \Gamma n}$  de telle sorte qu'ils vérifient l'équation de conservation de charge discrète (2.5.3).



DÉFINITION 2.5.2. *Pour tout  $n \in \{0 \cdots N-1\}$ , on définit la densité de charge discrète par :*

$$\begin{cases} \rho_i'^{n+1/2} & := \frac{1}{|C_i'|} \int_{C_i'} \rho(X, t^{n+1/2}) dX, i \in \{1 \cdots N'\} \\ \rho_i''^{n+1/2} & := \frac{1}{|C_i''|} \int_{C_i''} \rho(X, t^{n+1/2}) dX, i \in \{1 \cdots N''\} \end{cases}$$

et on définit la densité de courant discrète par :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_i^{\circ n} \cdot \mathbf{n}'_i & := \frac{1}{|A_i'|} \int_{A_i'} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \mathbf{J}(X, t) \cdot \mathbf{n}'_i dt d\sigma, i \in \{1 \cdots N^\circ\} \\ \mathbf{J}_i^{\circ n} \cdot \mathbf{n}''_i & := \frac{1}{|A_i''|} \int_{A_i''} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \mathbf{J}(X, t) \cdot \mathbf{n}''_i dt d\sigma, i \in \{1 \cdots N^\circ\} \\ \mathbf{J}_i^{\Gamma n} \cdot \mathbf{n}^\Gamma_i & := \frac{1}{|C_i'' \cap \Gamma|} \int_{C_i'' \cap \Gamma} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \mathbf{J}(X, t) \cdot \mathbf{n} dt d\sigma, i \in \{1 \cdots N^\Gamma\} \\ \mathbf{J}_i^{\Gamma n} \cdot \mathbf{t}^\Gamma_i & := \frac{1}{|C_i'' \cap \Gamma|} \int_{C_i'' \cap \Gamma} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \mathbf{J}(X, t) \cdot \mathbf{t} dt d\sigma, i \in \{1 \cdots N^\Gamma\} \end{cases},$$

où  $d\sigma$  est l'élément de longueur.

PROPOSITION 2.5.3. *Cette discrétisation satisfait l'équation de conservation de charge discrète (2.5.3).*

DÉMONSTRATION. En effet, vu la définition de la divergence discrète donnée par la formule (1.7.1), on a pour tout  $i \in \{1 \cdots N'\}$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_i'^{n+1/2} - \rho_i'^{n-1/2}}{\Delta t} + (\nabla' \cdot \mathbf{J}^{\circ n})_i = \\ & \frac{1}{\Delta t |C_i'|} \int_{C_i'} [\rho(X, t^{n+1/2}) - \rho(X, t^{n-1/2})] dX + \frac{1}{|C_i'|} \sum_{A_j' \subset \partial C_i'} |A_j'| \mathbf{J}_j^{\circ n} \cdot \mathbf{n}'_{ij} = \\ & \frac{1}{|C_i'|} \int_{C_i'} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \partial_t \rho(X, t) dt dX + \frac{1}{|C_i'|} \sum_{A_j' \subset \partial C_i'} \int_{A_j'} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \mathbf{J}(X, t) \cdot \mathbf{n}'_{ij} dt d\sigma; \end{aligned}$$

et comme  $\mathbf{n}'_{ij}$  est la normale à l'arête  $A_j'$  sortante de  $C_i'$ , alors en appliquant la formule de Green, on a

$$\frac{\rho_i'^{n+1/2} - \rho_i'^{n-1/2}}{\Delta t} + (\nabla' \cdot \mathbf{J}^{\circ n})_i = \frac{1}{|C_i'|} \int_{C_i'} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} [\partial_t \rho(X, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(X, t)] dt dX = 0.$$

En procédant de la même manière pour les quantité duales, on montre aussi que pour tout  $i \in \{1 \cdots N''\}$

$$\frac{\rho_i^{n+1/2} - \rho_i^{n-1/2}}{\Delta t} + (\nabla'' \cdot \mathbf{J}^{\diamond \Gamma n})_i = 0.$$

□

**COROLLAIRE 2.5.4.** *Avec la discrétisation des densités de charge et de courant données dans la définition 2.5.2, le champs électrique, solution du schéma (2.5.1) satisfait la loi de Gauss discrète (2.5.2).*

**DÉMONSTRATION.** Le résultat est immédiat grâce aux propositions 2.5.1 et 2.5.3. □

## 2.6. Energie électromagnétique discrète

**DÉFINITION 2.6.1.** *On définit l'énergie électromagnétique discrète  $\mathcal{E}^n$  à l'itération  $n$ , avec  $n \in \{0 \cdots N - 1\}$ , par :*

$$\mathcal{E}^n := \frac{\epsilon_0}{2} \left( \|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 + c^2 \langle B'''^n, B'''^{n+1} \rangle_{''' } \right).$$

**REMARQUE.** *Si la densité du courant  $J$  est nulle, et avec des condition de bord métalliques, on a aussi*

$$\mathcal{E}^n := \frac{\epsilon_0}{2} \left( \langle \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}, \mathbf{E}^{\diamond n-1/2} \rangle_{\diamond} + c^2 \|B'''^n\|_{''' }^2 \right).$$

En effet, en utilisant les équations de Faraday discrètes (2.2.1) et (2.2.2), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^n &= \frac{\epsilon_0}{2} \left( \|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 + c^2 \langle B'''^n, B'''^n - \Delta t \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \rangle_{''' } \right) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left( \|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 + c^2 \|B'''^n\|_{''' }^2 - \Delta t c^2 \langle B'''^n, \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \rangle_{''' } \right), \end{aligned}$$

et en utilisant l'équation d'Ampère discrète (2.2.3) on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^n &= \frac{\epsilon_0}{2} \left( \langle \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}, \mathbf{E}^{\diamond n-1/2} \rangle_{\diamond} + \Delta t c^2 \langle \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}, \nabla^{\diamond} \times B''^{\Gamma n} \rangle_{\diamond} \right) \\ &\quad + \frac{\epsilon_0}{2} \left( c^2 \|B'''^n\|_{''' }^2 - \Delta t c^2 \langle B'''^n, \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \rangle_{''' } \right). \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green discrète (1.8.7) et le fait que  $\mathbf{E}^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}^{\Gamma} = 0$  et  $\mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}' = 0$  sur  $\Gamma$ , on obtient

$$\mathcal{E}^n = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \langle \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}, \mathbf{E}^{\diamond n-1/2} \rangle_{\diamond} + c^2 \|B'''^n\|_{''' }^2 \right).$$

**PROPOSITION 2.6.2.** *On considère le système de Maxwell tel que la densité de courant  $J$  soit nulle et les conditions de bord sont données par*

$$a \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} + b B = 0,$$

avec  $a$  et  $b$  non tous les deux nuls.

Si  $ab < 0$ , en particulier pour les conditions de Silver-Muller, alors l'énergie électromagnétique discrète est décroissante :  $\forall n \in \{0 \cdots N - 1\}$

$$\mathcal{E}^n \leq \mathcal{E}^{n-1}.$$

Si  $b = 0$ , en particulier pour un conducteur parfait, ou  $a = 0$ , en particulier pour un mur magnétique, alors l'énergie électromagnétique discrète est conservée :  $\forall n \in \{0 \cdots N - 1\}$

$$\mathcal{E}^n = \mathcal{E}^{n-1} = \mathcal{E}^0.$$

DÉMONSTRATION. En utilisant les équations de Faraday discrètes (2.2.1) et (2.2.2), on a

$$\begin{aligned} \left\langle B'''^n, B'''^{n+1} \right\rangle_{\text{'''}} &= \left\langle B'''^n, B'''^n - \Delta t \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \right\rangle_{\text{'''}} \\ &= \left\| B'''^n \right\|_{\text{'''}}^2 - \Delta t \left\langle B'''^n, \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \right\rangle_{\text{'''}}; \end{aligned}$$

or d'après la formule de Green discrète (1.8.7), on a

$$\left\langle B'''^n, \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \right\rangle_{\text{'''}} = \left\langle \nabla^\diamond \times B'''^{\Gamma n}, \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\rangle_{\diamond} + \left\langle B'''^{\Gamma n}, \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}' \right\rangle_{\Gamma};$$

ainsi

$$\left\langle B'''^n, B'''^{n+1} \right\rangle_{\text{'''}} = \left\| B'''^n \right\|_{\text{'''}}^2 - \Delta t \left\langle \nabla^\diamond \times B'''^{\Gamma n}, \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\rangle_{\diamond} - \Delta t \left\langle B'''^{\Gamma n}, \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}' \right\rangle_{\Gamma}.$$

D'autre part, en appliquant l'équation d'Ampère discrète (2.2.3), on a

$$\left\| \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\|_{\diamond}^2 = \left\langle \mathbf{E}^{\diamond n-1/2} + \Delta t c^2 \nabla^\diamond \times B'''^{\Gamma n}, \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\rangle_{\diamond};$$

d'où, en remplaçant dans l'expression de l'énergie donnée dans la définition 2.6.1 page précédente, on obtient

$$\mathcal{E}^n = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \left\langle \mathbf{E}^{\diamond n-1/2}, \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\rangle_{\diamond} + c^2 \left\| B'''^n \right\|_{\text{'''}}^2 - \Delta t c^2 \left\langle B'''^{\Gamma n}, \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}' \right\rangle_{\Gamma} \right).$$

On utilise, encore une fois l'équation d'Ampère discrète (2.2.3), ce qui implique que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^n &= \frac{\epsilon_0}{2} \left\langle \mathbf{E}^{\diamond n-1/2}, \mathbf{E}^{\diamond n-1/2} + \Delta t c^2 \nabla^\diamond \times B'''^{\Gamma n} \right\rangle_{\diamond} \\ &\quad + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left( \left\| B'''^n \right\|_{\text{'''}}^2 - \Delta t \left\langle B'''^{\Gamma n}, \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}' \right\rangle_{\Gamma} \right) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left( \left\| \mathbf{E}^{\diamond n-1/2} \right\|_{\diamond}^2 + \Delta t c^2 \left\langle \mathbf{E}^{\diamond n-1/2}, \nabla^\diamond \times B'''^{\Gamma n} \right\rangle_{\diamond} \right) \\ &\quad + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left( \left\| B'''^n \right\|_{\text{'''}}^2 - \Delta t \left\langle B'''^{\Gamma n}, \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}' \right\rangle_{\Gamma} \right); \end{aligned}$$

or d'après la formule de Green discrète (1.8.7), on a

$$\left\langle \mathbf{E}^{\diamond n-1/2}, \nabla^{\diamond} \times B'''^{\Gamma n} \right\rangle_{\diamond} = \left\langle B'''^n, \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n-1/2} \right\rangle''' - \left\langle B'''^{\Gamma n}, \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n-1/2} \cdot \mathbf{t}' \right\rangle_{\Gamma},$$

et en utilisant les équations de Faraday discrètes (2.2.1) et (2.2.2), on obtient

$$\left\langle \mathbf{E}^{\diamond n-1/2}, \nabla^{\diamond} \times B'''^{\Gamma n} \right\rangle_{\diamond} = \frac{1}{\Delta t} \left\langle B'''^n, B'''^{n-1} \right\rangle''' - \frac{1}{\Delta t} \left\| B'''^n \right\|'''^2 - \left\langle B'''^{\Gamma n}, \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n-1/2} \cdot \mathbf{t}' \right\rangle_{\Gamma};$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^n &= \frac{\epsilon_0}{2} \left( \left\| \mathbf{E}^{\diamond n-1/2} \right\|_{\diamond}^2 + c^2 \left\langle B'''^n, B'''^{n-1} \right\rangle''' - \Delta t c^2 \left\langle B'''^{\Gamma n}, \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n-1/2} \cdot \mathbf{t}' \right\rangle_{\Gamma} \right) \\ &\quad - c^2 \frac{\epsilon_0}{2} \Delta t \left\langle B'''^{\Gamma n}, \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}' \right\rangle_{\Gamma} \\ &= \mathcal{E}^{n-1} - \frac{c^2 \epsilon_0 \Delta t}{2} \left\langle B'''^{\Gamma n}, \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n-1/2} \cdot \mathbf{t}' + \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}' \right\rangle_{\Gamma}. \end{aligned}$$

De plus, en remplaçant le produit scalaire discret des traces par sa valeur donnée dans la définition 1.6.4, on obtient

$$(2.6.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}^n &= \mathcal{E}^{n-1} - \frac{c^2 \epsilon_0 \Delta t}{4} \sum_{i=1}^{N^{\Gamma}} |A'_i| B_i^{\Gamma n} \left( \mathbf{E}_i^{\diamond n-1/2} + \mathbf{E}_i^{\diamond n+1/2} \right) \cdot \mathbf{t}'_i \\ &\quad - \frac{c^2 \epsilon_0 \Delta t}{4} \sum_{i=1}^{N^{\Gamma}} |\partial C''_i \cap \Gamma| B_i''^n \left( \mathbf{E}_i^{\Gamma n-1/2} + \mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \right) \cdot \mathbf{t}'_i. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque  $\Upsilon = 0$ , alors d'après les conditions aux limites discrètes, et pour tout  $i \in \{1 \cdots N^{\Gamma}\}$  :

★ Si  $a \neq 0$  et  $b = 0$ , on a  $\mathbf{E}_i^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_i = 0$  et  $\mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_i = 0$ , et donc (2.6.1) devient

$$\mathcal{E}^n = \mathcal{E}^{n-1}.$$

★ Si  $a = 0$  et  $b \neq 0$ , on a  $B'''^n = 0$  et  $B_i^{\Gamma n} = 0$ , et donc (2.6.1) devient aussi

$$\mathcal{E}^n = \mathcal{E}^{n-1}.$$

★ Si  $ab \neq 0$ , nous avons discrétisé les conditions aux limites par (2.4.2) page 36 et (2.4.6) page 37 :

$$(2.6.2) \quad \begin{cases} a \frac{\mathbf{E}_i^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_i + \mathbf{E}_i^{\diamond n-1/2} \cdot \mathbf{t}'_i}{2} + b B_i^{\Gamma n} = 0 \\ a \frac{\mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_i + \mathbf{E}_i^{\Gamma n-1/2} \cdot \mathbf{t}'_i}{2} + b B_i''^n = 0 \end{cases};$$

ainsi,

$$\mathcal{E}^n = \mathcal{E}^{n-1} + \frac{b}{a} \frac{c^2 \epsilon_0 \Delta t}{2} \left[ \sum_{i=1}^{N^\Gamma} |A'_i| (B_i^{\Gamma n})^2 + \sum_{i=1}^{N^\Gamma} |\partial C_i'' \cap \Gamma| (B_i''^n)^2 \right];$$

et donc, si on a en plus que  $ab < 0$ , alors

$$\mathcal{E}^n = \mathcal{E}^{n-1} - \left| \frac{b}{a} \right| \frac{c^2 \epsilon_0 \Delta t}{2} \left[ \sum_{i=1}^{N^\Gamma} |A'_i| (B_i^{\Gamma n})^2 + \sum_{i=1}^{N^\Gamma} |\partial C_i'' \cap \Gamma| (B_i''^n)^2 \right] \leq \mathcal{E}^{n-1}.$$

□

PROPOSITION 2.6.3. *Dans le cas d'un mur magnétique, l'énergie électromagnétique discrète est positive sous la condition CFL suivante :*

$$(2.6.3) \quad c \Delta t < \min \left\{ \begin{array}{l} \min_{i=1}^{N'} \max_{\beta'_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N'_i}} \min_{A'_j \subset \partial C'_i} \sqrt{\frac{2 |C'_i| |A'_j|^{2\beta'_{ij}-1} |A'_j| |\sin \theta_j|}{(1 + |\cos \theta_j|) \sum_{A'_k \subset \partial C'_i} |A'_k|^{2\beta'_{ik}}}}, \\ \min_{i=1+N^\Gamma}^{N''} \max_{\beta''_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N''_i}} \min_{A''_j \subset \partial C''_i} \sqrt{\frac{2 |C''_i| |A''_j|^{2\beta''_{ij}-1} |A''_j| |\sin \theta_j|}{(1 + |\cos \theta_j|) \sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}}}}, \end{array} \right.$$

où, pour tout  $i \in [1 \cdots N']$ ,  $\beta'_i = (\beta'_{i1}, \beta'_{i2}, \dots, \beta'_{iN'})$ , et tout  $i \in [1 + N^\Gamma \cdots N'']$ ,  $\beta''_i = (\beta''_{i1}, \beta''_{i2}, \dots, \beta''_{iN''})$ .

DÉMONSTRATION. En utilisant les équations de Faraday discrètes (2.2.1), (2.2.2) et la formule de l'énergie donnée dans la définition 2.6.1 page 42, on obtient

$$(2.6.4) \quad \frac{2}{\epsilon_0} \mathcal{E}^n = \|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_\diamond^2 + c^2 \|B'''^n\|_{''' }^2 - \Delta t c^2 \langle B'''^n, \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \rangle_{'''},$$

et en appliquant le fait que

$$\|U\|_{''' }^2 - \langle U, V \rangle_{''' } = \left\| U - \frac{V}{2} \right\|_{''' }^2 - \frac{\|V\|_{''' }^2}{4},$$

on a

$$(2.6.5) \quad \begin{aligned} \frac{2}{\epsilon_0} \mathcal{E}^n &= \|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_\diamond^2 + c^2 \left\| B'''^n - \frac{\Delta t}{2} \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} \right\|_{''' }^2 \\ &\quad - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \|\nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2}\|_{''' }^2. \end{aligned}$$

Par définition, on a

$$\|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 = \sum_{j=1}^{N^{\diamond}} |C_j^{\diamond}| \left\| \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \right\|^2,$$

et en appliquant la proposition 1.5.3, on a alors

$$(2.6.6) \quad \|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 \geq \sum_{j=1}^{N^{\diamond}} \frac{|C_j^{\diamond}|}{1 + |\cos \theta_j|} \left[ \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 + \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2 \right],$$

où  $\theta_j$  est l'angle entre  $\mathbf{t}'_j$  et  $\mathbf{t}''_j$ ; et puisque chaque arête primale interne est partagée par deux cellules primales et que chaque arête primale de la frontière est une arête d'une seule maille primale alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N^{\diamond}} \frac{|C_j^{\diamond}|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N'} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \frac{|C_j^{\diamond}|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{A'_j \subset \Gamma} \frac{|C_j^{\diamond}|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2, \end{aligned}$$

et puisque chaque arête située sur la frontière est incluse dans les frontières de deux cellules duales, alors

$$(2.6.7) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^{N^{\diamond}} \frac{|C_j^{\diamond}|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N'} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \frac{|C_j^{\diamond}|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N''} \sum_{A'_j \cap \partial C''_i \cap \Gamma \neq \emptyset} \frac{|C_j^{\diamond}|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2. \end{aligned}$$

Concernant les arêtes duales, il n'y a que des arêtes internes. Chacune de ces arêtes est partagée par deux mailles duales, ainsi

$$(2.6.8) \quad \sum_{j=1}^{N^{\diamond}} \frac{|C_j^{\diamond}|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N''} \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} \frac{|C_j^{\diamond}|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2.$$

D'où (2.6.6), (2.6.7) et (2.6.8) impliquent

$$\begin{aligned}
(2.6.9) \quad \|\mathbf{E}^{\circ n+1/2}\|_{\diamond}^2 &\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N'} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \frac{|C'_j|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\circ n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N''} \sum_{A'_j \cap \partial C''_i \cap \Gamma \neq \emptyset} \frac{|C'_j|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\circ n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N''} \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} \frac{|C''_j|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\circ n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la définition du rotationnel primal donnée par la formule (1.8.2) on a

$$\begin{aligned}
(\nabla'_i \times \mathbf{E}^{\circ n+1/2})^2 &= \frac{1}{|C'_i|^2} \left( \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} |A'_j| \mathbf{E}_j^{\circ n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_{ij} \right)^2 \\
&= \frac{1}{|C'_i|^2} \left( \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} |A'_j|^{\beta'_{ij}} |A'_j|^{1-\beta'_{ij}} \mathbf{E}_j^{\circ n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_{ij} \right)^2,
\end{aligned}$$

où  $\beta'_{ij} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , pour tout  $i \in \{1 \cdots N'\}$ , et tout  $ij \in \{1 \cdots N'_i\}$ .

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, on a pour tout  $\beta'_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N'_i}$ , avec  $i \in \{1 \cdots N'\}$

$$\begin{aligned}
(2.6.10) \quad (\nabla'_i \times \mathbf{E}^{\circ n+1/2})^2 &\leq \frac{1}{|C'_i|^2} \left[ \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} |A'_j|^{2\beta'_{ij}} \right] \left[ \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} |A'_j|^{2-2\beta'_{ij}} \left( \mathbf{E}_j^{\circ n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_{ij} \right)^2 \right] \\
&\leq \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \frac{|A'_j|^{2-2\beta'_{ij}}}{|C'_i|^2} \left[ \sum_{A'_k \subset \partial C'_i} |A'_k|^{2\beta'_{ik}} \right] \left( \mathbf{E}_j^{\circ n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_{ij} \right)^2.
\end{aligned}$$

De même, d'après la définition du rotationnel dual donnée par la formule (1.8.3), on a

$$\nabla''_i \times \mathbf{E}^{\circ \Gamma n+1/2} = \frac{1}{|C''_i|} \left( \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} |A''_j| \mathbf{E}_j^{\circ n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_{ij} + |\partial C''_i \cap \Gamma| \mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i^{\Gamma} \right),$$

et puisqu'il s'agit d'un mur magnétique ( $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $\Upsilon = 0$ ), alors, on a d'après (2.4.7), pour tout  $i \in \{1 \cdots N^{\Gamma}\}$

$$\mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i^{\Gamma} = \frac{-1}{|\partial C''_i \cap \Gamma|} \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} |A''_j| \mathbf{E}_j^{\circ n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_{ij};$$

d'où

$$(2.6.11) \quad \nabla_i'' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } i \leq N^\Gamma \\ \frac{1}{|C_i''|} \sum_{A_j'' \subset \partial C_i''} |A_j''| \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_{ij}'' & , \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, pour tout  $i \in \{N^\Gamma + 1 \cdots N''\}$ , et tout  $\beta_i'' \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N_i''}$ , on a

$$(2.6.12) \quad \begin{aligned} \nabla_i'' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} &= \frac{1}{|C_i''|} \sum_{A_j'' \subset \partial C_i''} |A_j''|^{\beta_{ij}''} |A_j''|^{1-\beta_{ij}''} \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_{ij}'' \\ &\leq \frac{1}{|C_i''|^2} \left[ \sum_{A_j'' \subset \partial C_i''} |A_j''|^{2\beta_{ij}''} \right] \left[ \sum_{A_j'' \subset \partial C_i''} |A_j''|^{2-2\beta_{ij}''} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_{ij}'' \right)^2 \right] \\ &\leq \sum_{A_j'' \subset \partial C_i''} \frac{|A_j''|^{2-2\beta_{ij}''}}{|C_i''|^2} \left[ \sum_{A_k'' \subset \partial C_i''} |A_k''|^{2\beta_{ik}''} \right] \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_{ij}'' \right)^2. \end{aligned}$$

Or, par définition de la norme primale-duale, on a

$$\|\nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2}\|_{''' }^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{N'} |C_i'| |\nabla_i' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}|^2 + \sum_{i=1}^{N''} |C_i''| |\nabla_i'' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2}|^2 \right),$$

ainsi, en utilisant les inégalités (2.6.10), (2.6.16) et (2.6.12) et puisque  $\mathbf{t}_{ij}' = \pm \mathbf{t}_j'$ , alors, pour tout  $\beta_i' \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N_i'}$ , avec  $i \in \{1 \cdots N'\}$ , et tout  $\beta_i'' \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N_i''}$ , avec  $i \in \{N^\Gamma + 1 \cdots N''\}$ , on a

$$(2.6.13) \quad \begin{aligned} &\|\nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2}\|_{''' }^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N'} \sum_{A_j' \subset \partial C_i'} \left( \sum_{A_k' \subset \partial C_i'} |A_k'|^{2\beta_{ik}'} \right) \frac{|A_j'|^{2-2\beta_{ij}'}}{|C_i'|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_j' \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=N^\Gamma+1}^{N''} \sum_{A_j'' \subset \partial C_i''} \frac{|A_j''|^{2-2\beta_{ij}''}}{|C_i''|} \left( \sum_{A_k'' \subset \partial C_i''} |A_k''|^{2\beta_{ik}''} \right) \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_j'' \right)^2. \end{aligned}$$



Ainsi, (2.6.9) et (2.6.13) impliquent que pour tout  $\beta'_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N'_i}$ , avec  $i \in \{1 \cdots N'\}$ , tout  $\beta''_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N''_i}$ , avec  $i \in \{N^\Gamma + 1 \cdots N''\}$ , on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\|_{\diamond}^2 - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \left\| \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\|_{''' }^2 \\
& \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N'} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \left[ \frac{|C'_j|}{1 + |\cos \theta_j|} - \frac{c^2 \Delta t^2 |A'_j|^{2-2\beta'_{ij}}}{4 |C'_i|} \sum_{A'_k \subset \partial C'_i} |A'_k|^{2\beta'_{ik}} \right] \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 \\
& \quad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N''} \sum_{A'_j \cap \partial C''_i \cap \Gamma \neq \emptyset} \frac{|C'_j|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N^\Gamma} \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} \frac{|C'_j|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1+N^\Gamma}^{N''} \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} \left[ \frac{|C'_j|}{1 + |\cos \theta_j|} - \frac{c^2 \Delta t^2 |A''_j|^{2-2\beta''_{ij}}}{4 |C''_i|} \left( \sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}} \right) \right] \\
& \quad \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2.
\end{aligned}$$

Or, sous la condition (2.6.3) page 45, on a  $\forall i \in [1 \cdots N']$ , il existe  $\beta'_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N'_i}$ , tel que,  $\forall A'_j \subset \partial C'_i$ ,

$$c^2 \Delta t^2 < \frac{2 |C'_i| |A'_j|^{2\beta'_{ij}-1} |A'_j| |\sin \theta_j|}{(1 + |\cos \theta_j|) \sum_{A'_k \subset \partial C'_i} |A'_k|^{2\beta'_{ik}}}$$

et  $\forall i \in [N^\Gamma + 1 \cdots N'']$ , il existe  $\beta''_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N''_i}$ , tel que,  $\forall A''_j \subset \partial C''_i$

$$c^2 \Delta t^2 < \frac{2 |C''_i| |A''_j|^{2\beta''_{ij}-1} |A''_j| |\sin \theta_j|}{(1 + |\cos \theta_j|) \sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}}},$$

et en utilisant la formule (1.5.1), ceci implique que  $\forall i \in [1 \cdots N']$ , il existe  $\beta'_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N'_i}$ , tel que,  $\forall A'_j \subset \partial C'_i$

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{4 |C'_i|} |A'_j|^{2-2\beta'_{ij}} \sum_{A'_k \subset \partial C'_i} |A'_k|^{2\beta'_{ik}} < \frac{|C'_j|}{(1 + |\cos \theta_j|)}$$

et  $\forall i \in [N^\Gamma + 1 \cdots N'']$ , il existe  $\beta''_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N''}$ , tel que,  $\forall A''_j \subset \partial C''_i$

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{4 |C''_i|} |A''_j|^{2-2\beta''_{ij}} \sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}} < \frac{|C''_j|}{(1 + |\cos \theta_j|)};$$

D'où

$$\|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_\diamond^2 - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \|\nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|'''^2 \geq 0.$$

Et donc, en reprenant l'inégalité (2.6.5), on obtient que pour tout  $n \in \{0 \cdots N-1\}$

$$\mathcal{E}^n \geq 0.$$

□

PROPOSITION 2.6.4. *Dans le cas d'un conducteur parfait, l'énergie électromagnétique discrète est positive sous la condition CFL suivante :*

$$(2.6.14) \quad c \Delta t < \min \left\{ \begin{array}{l} \min_{i=1}^{N'} \max_{\beta'_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N'_i}} \min_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \sqrt{\frac{2 |C'_i| |A'_j|^{2\beta'_{ij}-1} |A'_j| |\sin \theta_j|}{(1 + |\cos \theta_j|) \sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} |A'_k|^{2\beta'_{ik}}}} \\ \min_{i=1}^{N''} \max_{\beta''_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N''_i}} \min_{A''_j \subset \partial C''_i} \sqrt{\frac{2 |C''_i| |A''_j|^{2\beta''_{ij}-1} |A''_j| |\sin \theta_j|}{(1 + |\cos \theta_j|) \sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}}}} \end{array} \right. ,$$

où, pour tout  $i \in [1 \cdots N']$ ,  $\beta'_i = (\beta'_{i1}, \beta'_{i2}, \cdots, \beta'_{iN'})$ , et tout  $i \in [1 \cdots N'']$ ,

$\beta''_i = (\beta''_{i1}, \beta''_{i2}, \cdots, \beta''_{iN''})$ .

DÉMONSTRATION. D'après la définition du rotationnel primal donnée par la formule (1.8.2) et vu qu'il s'agit d'un conducteur parfait on a

$$\begin{aligned}
(\nabla'_i \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2})^2 &= \frac{1}{|C'_i|^2} \left( \sum_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} |A'_j| \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_{ij} \right)^2 \\
&= \frac{1}{|C'_i|^2} \left( \sum_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} |A'_j|^{\beta'_{ij}} |A'_j|^{1-\beta'_{ij}} \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_{ij} \right)^2,
\end{aligned}$$

où,  $\beta_{ij} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ . Ainsi, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète pour tout  $\beta'_{ij} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , on a

$$\begin{aligned}
(\nabla'_i \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2})^2 &\leq \frac{1}{|C'_i|^2} \left[ \sum_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} |A'_j|^{2\beta'_{ij}} \right] \left[ \sum_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} |A'_j|^{2-2\beta'_{ij}} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_{ij} \right)^2 \right] \\
(2.6.15) \quad &\leq \sum_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \left[ \sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \frac{|A'_k|^{2\beta'_{ik}}}{|C'_i|^2} \right] |A'_j|^{2-2\beta'_{ij}} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_{ij} \right)^2.
\end{aligned}$$

De même, d'après la définition du rotationnel dual donnée par la formule (1.8.3), et sous les conditions de bord métalliques, on a

$$\begin{aligned}
(\nabla''_i \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2})^2 &= \frac{1}{|C''_i|^2} \left( \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} |A''_j| \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_{ij} \right)^2 \\
&= \frac{1}{|C''_i|^2} \left( \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} |A''_j|^{\beta''_{ij}} |A''_j|^{1-\beta''_{ij}} \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_{ij} \right)^2.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète pour tout  $\beta''_{ij} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , on a

$$\begin{aligned}
(\nabla''_i \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2})^2 &\leq \frac{1}{|C''_i|^2} \left[ \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} |A''_j|^{2\beta''_{ij}} \right] \left[ \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} |A''_j|^{2-2\beta''_{ij}} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_{ij} \right)^2 \right] \\
(2.6.16) \quad &\leq \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} \left[ \sum_{A''_k \subset \partial C''_i} \frac{|A''_k|^{2\beta''_{ik}}}{|C''_i|^2} \right] |A''_j|^{2-2\beta''_{ij}} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_{ij} \right)^2.
\end{aligned}$$

Or par définition on a

$$\|\nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{''' }^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{N'} |C'_i| |\nabla'_i \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}|^2 + \sum_{i=1}^{N''} |C''_i| |\nabla''_i \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}|^2 \right),$$

alors, en utilisant les inégalités (2.6.15) et (2.6.16) et puisque  $\mathbf{t}'_{ij} = \pm \mathbf{t}'_j$ , on a

$$(2.6.17) \quad \begin{aligned} \|\nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{''' }^2 &\leq \sum_{i=1}^{N'} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \left( \sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \frac{|A'_k|^{2\beta'_{ik}}}{2|C'_i|} \right) |A'_j|^{2-2\beta'_{ij}} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{N''} \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} \left( \sum_{A''_k \subset \partial C''_i} \frac{|A''_k|^{2\beta''_{ik}}}{2|C''_i|} \right) |A''_j|^{2-2\beta''_{ij}} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après (2.6.9) et comme il s'agit d'un conducteur parfait

$$(2.6.18) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 &\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N'} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \frac{|C'_j|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N''} \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} \frac{|C''_j|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2; \end{aligned}$$

d'où

$$(2.6.19) \quad \begin{aligned} &\|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \|\nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{''' }^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N'} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \left[ \frac{|C'_j|}{1 + |\cos \theta_j|} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} |A'_j|^{2-2\beta'_{ij}} \sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \frac{|A'_k|^{2\beta'_{ik}}}{|C'_i|} \right] \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N''} \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} \left[ \frac{|C''_j|}{1 + |\cos \theta_j|} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} |A''_j|^{2-2\beta''_{ij}} \sum_{A''_k \subset \partial C''_i} \frac{|A''_k|^{2\beta''_{ik}}}{|C''_i|} \right] \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2. \end{aligned}$$

Or, sous la condition CFL donnée par (2.6.14), on a pour tout  $i \in [1 \cdots N']$ , il existe

$$\beta'_i \in \left[ 0, \frac{1}{2} \right]^{N'_i}, \text{ tel que, } \forall A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma$$

$$c^2 \Delta t^2 < \frac{2|C'_i| |A'_j|^{2\beta'_{ij}-1} |A''_j| |\sin \theta_j|}{(1 + |\cos \theta_j|) \sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} |A'_k|^{2\beta'_{ik}}}$$

et  $\forall i \in [1 \cdots N'']$ , il existe  $\beta''_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N''}$ , tel que,  $\forall A''_j \subset \partial C''_i$

$$c^2 \Delta t^2 < \frac{2 |C''_i| |A''_j|^{2\beta''_{ij}-1} |A''_j| |\sin \theta_j|}{(1 + |\cos \theta_j|) \sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}}},$$

et en utilisant la formule (1.5.1), ceci implique que  $\forall i \in [1 \cdots N']$ , il existe  $\beta'_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N'}$ , tel que,  $\forall A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma$

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{4 |C'_i|} |A'_j|^{2-2\beta'_{ij}} \sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} |A'_k|^{2\beta'_{ik}} < \frac{|C'_j|}{(1 + |\cos \theta_j|)}$$

et  $\forall i \in [1 \cdots N'']$ , il existe  $\beta''_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N''}$ , tel que,  $\forall A''_j \subset \partial C''_i$

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{4 |C''_i|} |A''_j|^{2-2\beta''_{ij}} \sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}} < \frac{|C''_j|}{(1 + |\cos \theta_j|)};$$

et donc

$$(2.6.20) \quad \|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \|\nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{'''}^2 \geq 0.$$

D'où en reprenant l'inégalité (2.6.5), on obtient que pour tout  $n \in \{0 \cdots N-1\}$

$$\mathcal{E}^n \geq 0.$$

□

## 2.7. Stabilité

PROPOSITION 2.7.1. *On suppose que l'hypothèse 4 est vérifiée.*

*Dans le cas d'un conducteur parfait le schéma est stable sous la condition CFL (2.6.14).*

DÉMONSTRATION. Sous la condition CFL (2.6.14), on a  $\forall i \in [1 \cdots N']$ , il existe  $\beta'_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , tel que  $\forall A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma$  on a

$$(2.7.1) \quad \frac{2 |C'_j|}{(1 + |\cos \theta_j|)} - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \left( \sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \frac{|A'_k|^{2\beta'_i}}{|C'_i|} \right) |A'_j|^{2-2\beta'_i} > 0$$

et  $\forall i \in [1 \cdots N'']$ , il existe  $\beta''_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  tel que  $\forall A''_j \subset \partial C''_i$  on a

$$(2.7.2) \quad \frac{2 |C''_j|}{(1 + |\cos \theta_j|)} - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \left( \sum_{A''_k \subset \partial C''_i} \frac{|A''_k|^{2\beta''_i}}{|C''_i|} \right) |A''_j|^{2-2\beta''_i} > 0.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , une constante indépendante de  $h$  ; et supposons que  $\Delta t$  est choisie de tel sorte que  $\forall i \in [1 \cdots N']$ , il existe  $\beta'_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  tel que  $\forall A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma$  on a

$$\frac{2 |C'_j|}{(1 + |\cos \theta_j|)} - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \left( \sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \frac{|A'_k|^{2\beta'_i}}{|C'_i|} \right) |A'_j|^{2-2\beta'_i} \geq \varepsilon h^2$$

et  $\forall i \in [1 \cdots N'']$ , il existe  $\beta''_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  tel que  $\forall A''_j \subset \partial C''_i$  on a

$$\frac{2 |C''_j|}{(1 + |\cos \theta_j|)} - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \left( \sum_{A''_k \subset \partial C''_i} \frac{|A''_k|^{2\beta''_i}}{|C''_i|} \right) |A''_j|^{2-2\beta''_i} \geq \varepsilon h^2.$$

En pratique, ceci ne rajoute pas de restriction supplémentaire par rapport aux inégalités (2.7.1) et (2.7.2), puisqu'on peut choisir  $\varepsilon$  aussi petit que l'on veut.

En remplaçant alors dans l'inégalité (2.6.19) on obtient que

$$(2.7.3) \quad \begin{aligned} & \|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \|\nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{'''}^2 \\ & \geq \frac{\varepsilon h^2}{4} \sum_{i=1}^{N'} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 + \frac{\varepsilon h^2}{4} \sum_{i=1}^{N''} \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2 \end{aligned}$$

et puisqu'il s'agit d'un conducteur parfait alors

$$(2.7.4) \quad \|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \|\nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{'''}^2 \geq \frac{\varepsilon h^2}{2} \sum_{i=1}^{N^{\diamond}} \left[ \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 + \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2 \right].$$

Or la proposition 2.6.4 et l'égalité (2.6.5) impliquent que

$$\|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \|\nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{'''}^2 \leq \frac{2}{\epsilon_0} \mathcal{E}^n$$

ainsi

$$(2.7.5) \quad \sum_{i=1}^{N^{\diamond}} \left[ \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 + \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2 \right] \leq \frac{4}{\varepsilon h^2 \epsilon_0} \mathcal{E}^n.$$

De plus, d'après la proposition 1.6.5 on a

$$(2.7.6) \quad \|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 \leq \left( \frac{2h}{\alpha_3} \right)^2 \sum_{i=1}^{N^{\diamond}} \left[ \left( \mathbf{E}_i^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_i \right)^2 + \left( \mathbf{E}_i^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_i \right)^2 \right].$$

D'où pour tout  $n \in \{0 \cdots N-1\}$

$$(2.7.7) \quad \|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 \leq \frac{16}{\varepsilon \epsilon_0 \alpha_3^2} \mathcal{E}^n.$$

Maintenant on va majorer aussi la norme du champ magnétique.

Grâce à l'égalité (2.6.5) et l'inégalité (2.6.20), on a

$$\left\| B'''n - \frac{\Delta t}{2} \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\|'''^2 \leq \frac{2}{\epsilon_0 c^2} \mathcal{E}^n,$$

c'est à dire

$$\left\| B'''n - \frac{\Delta t}{2} \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\|''' \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}^n}{\epsilon_0}}.$$

Et puisque

$$\left\| B'''n \right\|''' - \frac{\Delta t}{2} \left\| \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\|''' \leq \left\| B'''n - \frac{\Delta t}{2} \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\|''' ,$$

alors

$$\left\| B'''n \right\|''' \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}^n}{\epsilon_0}} + \frac{\Delta t}{2} \left\| \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\|''' .$$

Or d'après l'inégalité (2.6.20) on a

$$\left\| \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\|''' \leq \frac{2}{c \Delta t} \left\| \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\|_{\diamond}$$

et en utilisant l'inégalité (2.7.7) on obtient

$$\left\| \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\|''' \leq \frac{8}{c \Delta t \alpha_3} \sqrt{\frac{\mathcal{E}^n}{\epsilon \epsilon_0}},$$

d'où

$$(2.7.8) \quad \left\| B'''n \right\|''' \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\mathcal{E}^n}{\epsilon_0}} \left( \sqrt{2} + \frac{4}{\alpha_3 \sqrt{\epsilon}} \right).$$

Enfin, par définition de la norme donnée par la formule 1.6.3 page 26 on a

$$\left\| \left( B'''n, \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right) \right\|^2 := \left\| B'''n \right\|'''^2 + \left\| \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right\|_{\diamond}^2;$$

alors en utilisant les inégalités (2.7.7) et (2.7.8) on a

$$\left\| \left( B'''n, \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right) \right\|^2 \leq \frac{2}{\epsilon_0 c^2} \left[ \frac{8c^2}{\epsilon \alpha_3^2} + \left( 1 + \frac{2\sqrt{2}}{\alpha_3 \sqrt{\epsilon}} \right)^2 \right] \mathcal{E}^n$$

et grâce à la proposition 2.6.2, on a donc

$$(2.7.9) \quad \left\| \left( B'''n, \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right) \right\|^2 \leq \frac{2}{\epsilon_0 c^2} \left[ \frac{8c^2}{\epsilon \alpha_3^2} + \left( 1 + \frac{2\sqrt{2}}{\alpha_3 \sqrt{\epsilon}} \right)^2 \right] \mathcal{E}^0.$$

Or, d'après (2.6.4)

$$\frac{2}{\epsilon_0} \mathcal{E}^0 = \left\| \mathbf{E}^{\diamond 1/2} \right\|_{\diamond}^2 + c^2 \left\| B'''0 \right\|'''^2 - \Delta t c^2 \left\langle B'''0, \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond 1/2} \right\rangle'''$$

ainsi

$$\frac{2}{\epsilon_0} \mathcal{E}^0 \leq \left\| \mathbf{E}^{\diamond 1/2} \right\|_{\diamond}^2 + c^2 \left\| B'''0 \right\|'''^2 + \Delta t c^2 \left\| B'''0 \right\|''' \left\| \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond 1/2} \right\|''' ;$$

et en utilisant l'inégalité (2.6.20) on a

$$\begin{aligned} \frac{2}{\epsilon_0} \mathcal{E}^0 &\leq \|\mathbf{E}^{\diamond 1/2}\|_{\diamond}^2 + c^2 \|B'''^0\|_{'''}^2 + 2c \|B'''^0\|_{'''} \|\mathbf{E}^{\diamond 1/2}\|_{\diamond} \\ &\leq \left( \|\mathbf{E}^{\diamond 1/2}\|_{\diamond} + c \|B'''^0\|_{'''} \right)^2 \\ &\leq c^2 \left\| \left( B'''^0, \mathbf{E}^{\diamond 1/2} \right) \right\|^2. \end{aligned}$$

En reprenant l'inégalité (2.7.9) on obtient pour tout  $n \in \{0 \dots N-1\}$  que

$$(2.7.10) \quad \left\| \left( B'''^n, \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \right) \right\|^2 \leq \left[ \frac{8c^2}{\epsilon \alpha_3^2} + \left( 1 + \frac{2\sqrt{2}}{\alpha_3 \sqrt{\epsilon}} \right)^2 \right] \left\| \left( B'''^0, \mathbf{E}^{\diamond 1/2} \right) \right\|^2,$$

d'où la stabilité.  $\square$

PROPOSITION 2.7.2. *On suppose que l'hypothèse 4 est vérifiée.*

*Dans le cas d'un mur magnétique le schéma est stable sous la condition CFL (2.6.3).*

DÉMONSTRATION. En procédant de manière analogue pour prouver l'inégalité (2.7.3), on a

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \|\nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{'''}^2 \\ &\geq \frac{\epsilon h^2}{4} \sum_{i=1}^{N'} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N''} \sum_{A'_j \cap \partial C''_i \cap \Gamma \neq \emptyset} \frac{|C_j^{\diamond}|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N^\Gamma} \sum_{A'_j \subset \partial C''_i} \frac{|C_j^{\diamond}|}{1 + |\cos \theta_j|} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 + \frac{\epsilon h^2}{4} \sum_{i=1+N^\Gamma}^{N''} \sum_{A'_j \subset \partial C''_i} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2. \end{aligned}$$

Or, sous l'hypothèse 4, et d'après le corollaire 1.5.2, et en imposant en plus que  $\epsilon \leq \alpha$ , (où  $\alpha$  est la constante du corollaire 1.5.2), on a

$$\frac{|C_j^{\diamond}|}{1 + |\cos \theta_j|} \geq \frac{\alpha h^2}{1 + |\cos \theta_j|} \geq \frac{\epsilon h^2}{2},$$

alors

$$(2.7.11) \quad \begin{aligned} &\|\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{\diamond}^2 - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \|\nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}\|_{'''}^2 \\ &\geq \frac{\epsilon h^2}{4} \sum_{i=1}^{N'} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 + \frac{\epsilon h^2}{8} \sum_{i=1}^{N''} \sum_{A'_j \cap \partial C''_i \cap \Gamma \neq \emptyset} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 \\ &\quad + \frac{\epsilon h^2}{4} \sum_{i=1}^{N''} \sum_{A'_j \subset \partial C''_i} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2. \end{aligned}$$

Et comme,



$$(2.7.12) \sum_{i=1}^{N'} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 = 2 \sum_{i=1}^{N^\diamond} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 - \sum_{A'_j \subset \Gamma} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2,$$

$$(2.7.13) \sum_{i=1}^{N''} \sum_{A''_j \subset \partial C''_i} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2 = 2 \sum_{i=1}^{N^\diamond} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2,$$

et

$$(2.7.14) \sum_{i=1}^{N''} \sum_{A'_j \cap \partial C''_i \cap \Gamma \neq \emptyset} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 = 2 \sum_{A'_j \subset \Gamma} \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2,$$

alors, en remplaçant (2.7.12), (2.7.12) et (2.7.14) dans (2.7.11) et en simplifiant, on obtient

$$\| \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \|_\diamond^2 - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \| \nabla''' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \|_{''' }^2 \geq \frac{\varepsilon h^2}{2} \sum_{i=1}^{N^\diamond} \left[ \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_j \right)^2 + \left( \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_j \right)^2 \right].$$

De là, en continuant de manière analogue à la démonstration de la proposition 2.7.1, à partir de l'inégalité (2.7.4), on prouve la stabilité du schéma.  $\square$

## 2.8. Comparaison avec le schéma de Yee

Dans le cas particulier d'un maillage cartésien, le système (2.5.1) se découple en deux sous systèmes indépendants : l'un représentant le schéma de Yee appliqué au maillage primal, l'autre le schéma de Yee appliqué au maillage dual.

En effet, si on remplace les opérateurs discrets par leurs définitions dans le système (2.5.1), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{B_i'^{n+1} - B_i'^n}{\Delta t} + \frac{1}{|C_i'|} \sum_{A'_j \subset \partial C_i'} |A'_j| \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}'_{ij} = 0, i \in \{1 \dots N'\} \\ \frac{B_i''^{n+1} - B_i''^n}{\Delta t} + \frac{1}{|C_i''|} \sum_{A''_j \subset \partial C_i''} |A''_j| \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}''_{ij} \\ + \frac{|\partial C_i'' \cap \Gamma|}{|C_i''|} \mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i^\Gamma = 0, i \in \{1 \dots N''\} \\ \frac{\mathbf{E}_i^{\diamond n+3/2} - \mathbf{E}_i^{\diamond n+1/2}}{\Delta t} + \frac{c^2 |A_i''| (B_{i2}''^{n+1} - B_{i1}''^{n+1}) \mathbf{t}_i''}{2 |C_i^\diamond|} \\ + \frac{c^2 |A_i'| (B_i^{\Gamma n+1} 1_{i \leq N^\Gamma} + B_{i2}'^{n+1} 1_{N^\Gamma < i \leq N^\diamond} - B_{i1}'^{n+1}) \mathbf{t}_i'}{2 |C_i^\diamond|} = -\frac{\mathbf{J}^{\diamond n+1}}{\epsilon_0}, i \in \{1 \dots N^\diamond\} \end{array} \right. ;$$

et, puisqu'il s'agit d'un maillage cartésien alors,  $\mathbf{t}'_i \cdot \mathbf{t}''_i = 0$ ; ainsi en faisant le produit scalaire de la troisième équation, une fois avec  $\mathbf{t}'_i$  et une fois avec  $\mathbf{t}''_i$ , et en remplaçant  $|C_i^\diamond|$  par sa valeur donnée par la formule (1.5.1), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{B_i'^{n+1} - B_i'^n}{\Delta t} + \frac{1}{|C_i'|} \sum_{A_j' \subset \partial C_i'} |A_j'| \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_{ij}' = 0, i \in \{1 \dots N'\} \\ \frac{B_i''^{m+1} - B_i''^m}{\Delta t} + \frac{1}{|C_i''|} \sum_{A_j'' \subset \partial C_i''} |A_j''| \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_{ij}'' \\ + \frac{|\partial C_i'' \cap \Gamma|}{|C_i''|} \mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i^\Gamma = 0, i \in \{1 \dots N''\} \\ \frac{\mathbf{E}^{\diamond n+3/2} \cdot \mathbf{t}_i' - \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i'}{\Delta t} + \frac{c^2 (B_i^{\Gamma n+1} - B_{i1}^{\prime n+1})}{|A_i''|} = -\frac{\mathbf{J}^{\diamond n+1} \cdot \mathbf{t}_i'}{\epsilon_0}, i \in \{1 \dots N^\Gamma\} \\ \frac{\mathbf{E}^{\diamond n+3/2} \cdot \mathbf{t}_i' - \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i'}{\Delta t} + \frac{c^2 (B_{i2}^{\prime n+1} - B_{i1}^{\prime n+1})}{|A_i''|} = -\frac{\mathbf{J}^{\diamond n+1} \cdot \mathbf{t}_i'}{\epsilon_0}, i \in \{N^\Gamma + 1 \dots N^\diamond\} \\ \frac{\mathbf{E}^{\diamond n+3/2} \cdot \mathbf{t}_i'' - \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i''}{\Delta t} + \frac{c^2 (B_{i2}''^{n+1} - B_{i1}''^{n+1})}{|A_i'|} = -\frac{\mathbf{J}^{\diamond n+1} \cdot \mathbf{t}_i''}{\epsilon_0}, i \in \{1 \dots N^\diamond\} \end{array} \right. .$$

Ainsi, on peut remarquer que ce système se découple en deux sous système, le premier correspond au schéma de Yee appliqué au maillage primal et donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{B_i'^{n+1} - B_i'^n}{\Delta t} + \frac{1}{|C_i'|} \sum_{A_j' \subset \partial C_i'} |A_j'| \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_{ij}' = 0, i \in \{1 \dots N'\} \\ \frac{\mathbf{E}^{\diamond n+3/2} \cdot \mathbf{t}_i' - \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i'}{\Delta t} + \frac{c^2 (B_i^{\Gamma n+1} - B_{i1}^{\prime n+1})}{|A_i''|} = -\frac{\mathbf{J}^{\diamond n+1} \cdot \mathbf{t}_i'}{\epsilon_0}, i \in \{1 \dots N^\Gamma\} \\ \frac{\mathbf{E}^{\diamond n+3/2} \cdot \mathbf{t}_i' - \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i'}{\Delta t} + \frac{c^2 (B_{i2}^{\prime n+1} - B_{i1}^{\prime n+1})}{|A_i''|} = -\frac{\mathbf{J}^{\diamond n+1} \cdot \mathbf{t}_i'}{\epsilon_0}, i \in \{N^\Gamma + 1 \dots N^\diamond\} \end{array} \right. ;$$

le second correspond au schéma de Yee appliqué au maillage dual et donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{B_i''^{m+1} - B_i''^m}{\Delta t} + \frac{1}{|C_i''|} \sum_{A_j'' \subset \partial C_i''} |A_j''| \mathbf{E}_j^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_{ij}'' \\ + \frac{|\partial C_i'' \cap \Gamma|}{|C_i''|} \mathbf{E}_i^{\Gamma n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i^\Gamma = 0, i \in \{1 \dots N''\} \\ \frac{\mathbf{E}^{\diamond n+3/2} \cdot \mathbf{t}_i'' - \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} \cdot \mathbf{t}_i''}{\Delta t} + \frac{c^2 (B_{i2}''^{n+1} - B_{i1}''^{n+1})}{|A_i'|} = -\frac{\mathbf{J}^{\diamond n+1} \cdot \mathbf{t}_i''}{\epsilon_0}, i \in \{1 \dots N^\diamond\} \end{array} \right. .$$

PROPOSITION 2.8.1. *Dans le cas d'un maillage cartésien et avec des conditions aux limites d'un conducteur parfait, la condition CFL du schéma, est donnée par*

$$c \Delta t \leq \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

*Elle correspond exactement à la condition CFL du schéma de Yee.*

DÉMONSTRATION. On rappelle que dans le cas d'un maillage cartésien  $|C'_i| = h^2$ ,  $A'_j = h$  et  $\theta_j = \frac{\pi}{2}$ . Ainsi, en remplaçant ces quantités dans (2.6.14), la condition CFL s'écrit

$$c \Delta t < \min \left\{ \begin{array}{l} \min_{i=1}^{N'} \max_{\beta'_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N'_i}} \min_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \sqrt{\frac{2 h^{2\beta'_{ij}+1} |A'_j|}{\sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} h^{2\beta'_{ik}}} \\ \min_{i=1}^{N''} \max_{\beta''_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N''_i}} \min_{A''_j \subset \partial C''_i} \sqrt{\frac{2 |C''_i| |A''_j|^{2\beta''_{ij}-1} h}{\sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}}}} \end{array} \right.$$

Soit  $i \in \{1 \cdots N'\}$ , et  $\beta'_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N'_i}$ .

Pour tout  $j$  tel que  $A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma$ , l'arête  $A'_j$  est interne alors la longueur de son arête duale  $A''_j$  est  $h$ . D'où

$$\begin{aligned} \min_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \sqrt{\frac{2 h^{2\beta'_{ij}+1} |A'_j|}{\sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} h^{2\beta'_{ik}}}} &= \min_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \sqrt{\frac{2 h^{2\beta'_{ij}+1} h}{\sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} h^{2\beta'_{ik}}}} \\ &= \min_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} h \sqrt{\frac{2}{1 + \sum_{\substack{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma \\ k \neq j}} h^{2(\beta'_{ik} - \beta'_{ij})}}}. \end{aligned}$$

• Si  $C'_i$  est située sur un coin du domaine, elle admet deux arêtes internes  $A'_{i1}$  et  $A'_{i2}$ , ainsi

$$\min_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \sqrt{\frac{2 h^{2\beta'_{ij}+1} |A'_j|}{\sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} h^{2\beta'_{ik}}}} = h \min \left\{ \sqrt{\frac{2}{1 + h^{2(\beta'_{i1} - \beta'_{i2})}}}, \sqrt{\frac{2}{1 + h^{2(\beta'_{i2} - \beta'_{i1})}}} \right\},$$

ce qui implique

$$\max_{\beta'_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N'_i}} \min_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \sqrt{\frac{2 h^{2\beta'_{ij}+1} |A'_j|}{\sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} h^{2\beta'_{ik}}}} = h \max_{\beta'_{i1}, \beta'_{i2} \in [0, \frac{1}{2}]} \min \left\{ \sqrt{\frac{2}{1 + h^{2(\beta'_{i1} - \beta'_{i2})}}}, \sqrt{\frac{2}{1 + h^{2(\beta'_{i2} - \beta'_{i1})}}} \right\} = h$$

- Si  $C'_i$  est située sur la frontière, mais pas dans un coin, elle admet trois arêtes internes, et le maximum est atteint pour  $\beta'_{ik} = \beta'_{ij}$ , ainsi

$$\max_{\beta'_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N'_i}} \min_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \sqrt{\frac{2 h^{2\beta'_{ij}+1} |A''_j|}{\sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} h^{2\beta'_{ik}}}} = h \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

- Si  $C'_i$  est interne, elle admet quatre arêtes internes et le maximum est atteint pour  $\beta'_{ik} = \beta'_{ij}$ , ainsi,

$$\max_{\beta'_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N'_i}} \min_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \sqrt{\frac{2 h^{2\beta'_{ij}+1} |A''_j|}{\sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} h^{2\beta'_{ik}}}} = \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

D'où,

$$(2.8.1) \quad \min_{i=1}^{N'} \max_{\beta'_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N'_i}} \min_{A'_j \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} \sqrt{\frac{2 h^{2\beta'_{ij}+1} |A''_j|}{\sum_{A'_k \subset \partial C'_i \setminus \Gamma} h^{2\beta'_{ik}}}} = \min \left( h, \sqrt{\frac{2}{3}} h, \frac{h}{\sqrt{2}} \right) \\ = \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

D'autre part, soit  $i \in \{1 \cdots N''\}$ , et  $\beta''_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^{N''_i}$ .

- Si  $C''_i$  est une cellule duale située dans un coin du domaine, alors elle admet deux arêtes duales de longueur  $\frac{h}{2}$  et sa surface est  $\frac{h^2}{4}$ , ainsi

$$\sqrt{\frac{2 |C''_i| |A''_j|^{2\beta''_{ij}-1} h}{\sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}}}} = \sqrt{\frac{2 \frac{h^2}{4} \left(\frac{h}{2}\right)^{2\beta''_{ij}-1} h}{\sum_{A''_k \subset \partial C''_i} \left(\frac{h}{2}\right)^{2\beta''_{ik}}}} = h \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{h}{2}\right)^{2(\beta''_{ik}-\beta''_{ij})}}}$$

et donc

$$(2.8.2) \quad \max_{\beta''_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N''_i}} \min_{A''_j \subset \partial C''_i} \sqrt{\frac{2 |C''_i| |A''_j|^{2\beta''_{ij}-1} h}{\sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}}}} = \max_{\beta''_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N''_i}} \min_{\substack{A''_j \subset \partial C''_i \\ k \neq j}} h \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{h}{2}\right)^{2(\beta''_{ik}-\beta''_{ij})}}} \\ = \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

- Si  $C''_i$  est une cellule duale interne alors elle admet quatre arêtes duales de longueur  $h$  et sa surface est  $h^2$ ; ainsi

$$\begin{aligned}
(2.8.3) \quad & \max_{\beta''_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N''_i}} \min_{A''_j \subset \partial C''_i} \sqrt{\frac{2 |C''_i| |A''_j|^{2\beta''_{ij}-1} h}{\sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}}}} = \max_{\beta''_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N''_i}} \min_{A''_j \subset \partial C''_i} \sqrt{\frac{2h^2 h^{2\beta''_{ij}-1} h}{\sum_{A''_k \subset \partial C''_i} h^{2\beta''_{ik}}}} \\
& = \max_{\beta''_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N''_i}} \min_{A''_j \subset \partial C''_i} h \sqrt{\frac{2}{\sum_{A''_k \subset \partial C''_i} h^{2(\beta''_{ik}-\beta''_{ij})}}} \\
& = \frac{h}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

• Sinon, elle admet trois arêtes duales, une de longueur  $h$  et deux de longueur  $\frac{h}{2}$  et sa surface est  $\frac{h^2}{2}$ , ainsi et pour  $\beta'_{ik} = \beta'_{ij}$ , on a

$$\begin{aligned}
\min_{A''_j \subset \partial C''_i} \sqrt{\frac{2 |C''_i| |A''_j|^{2\beta''_{ij}-1} h}{\sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}}}} &= \min \left\{ \sqrt{\frac{2 \frac{h^2}{2} h^{2\beta''_{ij}-1} h}{h^{2\beta''_{ij}} + 2 \left(\frac{h}{2}\right)^{2\beta''_{ij}}}}, \sqrt{\frac{2 \frac{h^2}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^{2\beta''_{ij}-1} h}{h^{2\beta''_{ij}} + 2 \left(\frac{h}{2}\right)^{2\beta''_{ij}}}} \right\} \\
&= h \min \left\{ \sqrt{\frac{1}{1 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2\beta''_{ij}}}}, \sqrt{\frac{1}{2^{2\beta''_{ij}-1} + 1}} \right\} \\
&= h \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + 2^{1-2\beta''_{ij}}}}, \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 + 2^{2\beta''_{ij}-1}}}} \right\} \\
&= \frac{h}{\sqrt{1 + \max \{2^{1-2\beta''_{ij}}, 2^{2\beta''_{ij}-1}\}}},
\end{aligned}$$

or pour tout  $\beta''_{ij} \in [0, \frac{1}{2}]$  on a  $1 - 2\beta''_{ij} \geq 0$  d'ou  $2^{1-2\beta''_{ij}} \geq 2^{2\beta''_{ij}-1}$  et donc

$$\min_{A''_j \subset \partial C''_i} \sqrt{\frac{2 |C''_i| |A''_j|^{2\beta''_{ij}-1} h}{\sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}}}} = \frac{h}{\sqrt{1 + 2^{1-2\beta''_{ij}}}},$$

d'où,

$$(2.8.4) \quad \max_{\beta''_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N''_i}} \min_{A''_j \subset \partial C''_i} \sqrt{\frac{2 |C''_i| |A''_j|^{2\beta''_{ij}-1} h}{\sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}}}} \geq \max_{\beta''_{ij} \in [0, \frac{1}{2}]} \frac{h}{\sqrt{1 + 2^{1-2\beta''_{ij}}}} \geq h.$$

À partir des conditions obtenues pour ces trois cas, données par (2.8.2), (2.8.3) et (2.8.4), on déduit que

$$(2.8.5) \quad \min_{i=1}^{N''} \max_{\beta''_i \in [0, \frac{1}{2}]^{N''_i}} \min_{A''_j \subset \partial C''_i} \sqrt{\frac{2 |C''_i| |A''_j|^{2\beta''_{ij}-1} h}{\sum_{A''_k \subset \partial C''_i} |A''_k|^{2\beta''_{ik}}}} = \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

Et de (2.8.1) et (2.8.5), on déduit que la condition CFL du schéma est donnée par

$$c \Delta t \leq \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

□

## 2.9. Convergence

Pour établir la convergence du schéma, nous allons procéder de façon classique, en combinant les propriétés de stabilité et de consistance du schéma. La stabilité ayant été prouvée au paragraphe 2.7, il ne nous reste qu'à montrer la consistance du schéma. Pour cela, nous définissons tout d'abord deux projections discrètes de la solution exacte du problème continu sur les cellules des différents maillages. La première de ces deux projections vérifie l'équation de Faraday discrète, tandis que la seconde vérifie l'équation d'Ampère discrète. Nous définissons ensuite une troisième projection de la solution exacte en combinant les deux premières. Cette troisième projection ne vérifie ni l'équation de Faraday discrète, ni l'équation d'Ampère discrète, mais permet de faire apparaître des erreurs de troncature qui sont d'un ordre plus élevé que celles que l'on aurait obtenues avec la première ou la deuxième projection.

### 2.9.1. Projections de la solution exacte :

DÉFINITION 2.9.1. *On définit une première projection du champs électromagnétique comme suit :*

- On projette le champ magnétique exact sur le maillage primal en prenant la valeur moyenne, sur chaque cellule primale, du champ exact à l'instant  $t^n$  :

$$(2.9.1) \quad \left( \Pi_1'^n B \right)_i := \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} B(X, t^n) dX, \quad i \in \{1 \cdots N'\}, \quad n \in \{0 \cdots N\}.$$

- De même on définit la projection  $\Pi_1''^n$  du champ magnétique exact sur le maillage dual, en prenant les valeurs moyennes sur les mailles duales du champ à l'instant  $t^n$  :

$$(2.9.2) \quad \left( \Pi_1''^n B \right)_i := \frac{1}{|C_i''|} \int_{C_i''} B(X, t^n) dX, \quad i \in \{1 \cdots N''\}, \quad n \in \{0 \cdots N\}.$$

- Pour le champ électrique, on définit sa projection sur le maillage diamant  $\Pi_1^{\diamond n+1/2}$  :  
Puisque toute cellule diamant  $C_i^\diamond$  est associée à une arête  $A_i'$  et sa duale  $A_i''$  ; on définit ainsi la composante tangentielle suivant  $A_i'$  de la projection en prenant la valeur moyenne, sur  $A_i'$  et sur le pas de temps  $[t^{n-1/2}, t^{n+1/2}]$ , de la composante tangentielle correspondante du champ électrique.

De même, on définit aussi la composante tangentielle suivant  $A_i''$  de la projection :

$$(2.9.3) \quad \left( \Pi_1^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} \right)_i \cdot \mathbf{t}_i' := \frac{1}{|A_i'|} \int_{A_i'} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t}_i' dt d\sigma,$$

$$(2.9.4) \quad \left( \Pi_1^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} \right)_i \cdot \mathbf{t}_i'' := \frac{1}{|A_i''|} \int_{A_i''} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t}_i'' dt d\sigma,$$

avec  $i \in \{1 \cdots N^\diamond\}$  et  $n \in \{0 \cdots N-1\}$ .

- Enfin, on définit, la composante tangentielle de la projection du champ électrique sur les parties des frontières des cellules duales incluses dans le bord par

$$\left( \Pi_1^{\Gamma n+1/2} \mathbf{E} \right)_i \cdot \mathbf{t}_i^\Gamma := \frac{1}{|\partial C_i'' \cap \Gamma|} \int_{\partial C_i'' \cap \Gamma} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t} dt d\sigma.$$

où  $i \in \{1 \cdots N^\Gamma\}$  et  $n \in \{0 \cdots N-1\}$ .

PROPOSITION 2.9.2. *Cette projection vérifie exactement l'équation de Faraday discrète : pour tout  $n \in \{0 \cdots N-1\}$*

$$(2.9.5) \quad \frac{\Pi_1'^{n+1} B - \Pi_1'^n B}{\Delta t} + \nabla' \times \Pi_1^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} = 0$$

$$(2.9.6) \quad \frac{\Pi_1''^{n+1} B - \Pi_1''^n B}{\Delta t} + \nabla'' \times \Pi_1^{\diamond \Gamma n+1/2} \mathbf{E} = 0$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\Pi_1'^{n+1} B - \Pi_1'^n B}{\Delta t} + \nabla' \times \Pi_1^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} \right)_i = \\
& \frac{1}{\Delta t |C'_i|} \int_{C'_i} B(X, t^{n+1}) - B(X, t^n) dX + \frac{1}{|C'_i|} \sum_{j=1}^{N'_i} |A'_j| \frac{1}{|A'_j|} \int_{A'_j} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t}'_i dt d\sigma = \\
& \frac{1}{\Delta t |C'_i|} \left( \int_{C'_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t B(X, t) dt dX + \int_{\partial C'_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t}'_i dt d\sigma \right) = \\
& \frac{1}{\Delta t |C'_i|} \int_{C'_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} [\partial_t B + \nabla \times \mathbf{E}(X, t)] dt dX = 0,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que cette projection vérifie exactement l'équation de Faraday discrète sur le maillage primal. De la même manière, on prouve qu'elle vérifie aussi l'équation de Faraday discrète duale.  $\square$

DÉFINITION 2.9.3. *On définit une deuxième projection de la solution exacte du système de Maxwell comme suit :*

- On projette le champ magnétique sur une cellule primale  $C'_i$  à l'instant  $t^n$ , en prenant la valeur moyenne, sur le pas de temps  $[t^{n-1/2}, t^{n+1/2}]$ , du champ exact au centre  $c'_i$  de la cellule :

$$(2.9.7) \quad \left( \Pi_2'^n B \right)_i := \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} B(c'_i, t) dt, \quad i \in \{1 \dots N'\}, \quad n \in \{1 \dots N\}$$

- De même pour la projection sur une cellule duale, en prenant la valeur moyenne sur le pas de temps  $[t^{n-1/2}, t^{n+1/2}]$  du champ exact au sommet primal  $S'_i$  associé à la cellule duale  $C''_i$  :

$$(2.9.8) \quad \left( \Pi_2''^n B \right)_i := \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} B(S'_i, t) dt, \quad i \in \{1 \dots N''\}, \quad n \in \{1 \dots N\}.$$

- Enfin, on définit la projection du champ magnétique aux milieux des arêtes situées sur la frontière par

$$\left( \Pi_2^{\Gamma n} B \right)_i := \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} B(M'_i, t) dt, \quad i \in \{1 \dots N^\Gamma\}, \quad n \in \{1 \dots N\}.$$



où  $M'_i$  est le milieu de l'arête  $A'_i$  située sur la frontière ( $1 \leq i \leq N^\Gamma$ ).

– Pour le champ électrique, on le projette sur le maillage diamant à l'instant  $t^{n+1/2}$  : Pour chaque cellule diamant  $C_i^\diamond$ , associée à l'arête  $A'_i$  et sa duale  $A''_i$ , on définit cette projection, noté  $\Pi_2^{\diamond n+1/2}$ , par ses composantes normales à  $A'_i$  et  $A''_i$ , en prenant la valeur moyenne sur l'arête de la composante normale correspondante du champ électrique à l'instant  $t^{n+1/2}$  :

$$(2.9.9) \quad \left( \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} \right)_i \cdot \mathbf{n}'_i := \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \mathbf{E}(X, t^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n}'_i d\sigma,$$

$$(2.9.10) \quad \left( \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} \right)_i \cdot \mathbf{n}''_i := \frac{1}{|A''_i|} \int_{A''_i} \mathbf{E}(X, t^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n}''_i d\sigma,$$

avec  $i \in \{1 \cdots N^\diamond\}$  et  $n \in \{0 \cdots N-1\}$ .

PROPOSITION 2.9.4. *Cette projection vérifie exactement l'équation d'Ampère discrète : pour tout  $n \in \{1 \cdots N-1\}$*

$$(2.9.11) \quad \frac{\Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} - \Pi_2^{\diamond n-1/2} \mathbf{E}}{\Delta t} - c^2 \nabla^\diamond \times \Pi_2^{\Gamma n} B + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}^{\diamond n} = 0.$$

DÉMONSTRATION. Compte tenu de la définition du rotationnel diamant donnée dans la formule (1.8.4) et du fait que  $\mathbf{t}'_i \cdot \mathbf{n}'_i = 0$ , on a

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\Delta t} \left( \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} - \Pi_2^{\diamond n-1/2} \mathbf{E} \right) - c^2 \nabla^\diamond \times \Pi_2^{\Gamma n} B + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}^{\diamond n} \right)_i \cdot \mathbf{n}'_i = \\ & \frac{1}{\Delta t |A'_i|} \int_{A'_i} \left( \mathbf{E}(X, t^{n+1/2}) - \mathbf{E}(X, t^{n-1/2}) \right) \cdot \mathbf{n}'_i d\sigma \\ & + \frac{c^2 |A''_i|}{2 |C_i^\diamond|} \left( \left( \Pi_2^{\Gamma n} B \right)_{i2} - \left( \Pi_2^{\Gamma n} B \right)_{i1} \right) \mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{n}'_i + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{n}'_i = \\ & \frac{1}{\Delta t |A'_i|} \int_{A'_i} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \partial_t \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{n}'_i dt d\sigma + \frac{c^2 |A''_i|}{2 \Delta t |C_i^\diamond|} \mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{n}'_i \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} B(S'_{i2}, t) - B(S'_{i1}, t) dt \\ & + \frac{1}{\epsilon_0 \Delta t |A'_i|} \int_{A'_i} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \mathbf{J}(X, t) \cdot \mathbf{n}'_i dt d\sigma \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} B(S'_{i2}, t) - B(S'_{i1}, t) &= \int_{A'_i} \nabla B(X, t) \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma \operatorname{sign}(\overrightarrow{S'_{i1}S'_{i2}} \cdot \mathbf{t}'_i) \\ &= \operatorname{sign}(\mathbf{n}''_i \cdot \mathbf{t}'_i) \int_{A'_i} \nabla B(X, t) \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma \end{aligned}$$

où  $\operatorname{sign}(a)$  signifie signe de  $a$ ; ainsi, en utilisant la propriété (1.8.1) et le fait que

$\mathbf{n}''_i \cdot \mathbf{t}'_i = -\mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{n}'_i$  on a :

$$B(S'_{i2}, t) - B(S'_{i1}, t) = -\operatorname{sign}(\mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{n}'_i) \int_{A'_i} \nabla \times B(X, t) \cdot \mathbf{n}'_i d\sigma;$$

alors, et en remplaçant la surface de la cellule diamant par sa valeur donnée par la formule (1.5.1) et en simplifiant, on obtient

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{\Delta t} \left( \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} - \Pi_2^{\diamond n-1/2} \mathbf{E} \right) - c^2 \nabla^\diamond \times \Pi_2''' B + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}^{\diamond n} \right)_i \cdot \mathbf{n}'_i = \\ &\frac{1}{\Delta t |A'_i|} \int_{A'_i} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \partial_t \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{n}'_i dt d\sigma \\ &- \frac{c^2 \operatorname{sign}(\mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{n}'_i) \mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{n}'_i}{\Delta t |A'_i| |\sin \theta_i|} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \int_{A'_i} \nabla \times B(X, t) \cdot \mathbf{n}'_i d\sigma dt \\ &+ \frac{1}{\epsilon_0 \Delta t |A'_i|} \int_{A'_i} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \mathbf{J}(X, t) \cdot \mathbf{n}'_i dt d\sigma \end{aligned}$$

et puisque

$$\operatorname{sign}(\mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{n}'_i) \mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{n}'_i = |\mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{n}'_i| = \left| \cos \left( \theta_i + \frac{\Pi}{2} \right) \right| = |\sin \theta_i|$$

alors en remplaçant dans l'égalité précédente et en simplifiant on obtient

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{\Delta t} \left( \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} - \Pi_2^{\diamond n-1/2} \mathbf{E} \right) - c^2 \nabla^\diamond \times \Pi_2''' B + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}^{\diamond n} \right)_i \cdot \mathbf{n}'_i = \\ &\frac{1}{\Delta t |A'_i|} \int_{A'_i} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \left( \partial_t \mathbf{E}(X, t) - c^2 \nabla \times B(X, t) + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}(X, t) \right) \cdot \mathbf{n}'_i dt d\sigma = 0. \end{aligned}$$

En procédant de manière similaire, on montre aussi que

$$\left( \frac{\Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} - \Pi_2^{\diamond n-1/2} \mathbf{E}}{\Delta t} - c^2 \nabla^\diamond \times \Pi_2''' B + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}^{\diamond n} \right)_i \cdot \mathbf{n}''_i = 0.$$

Et en utilisant l'égalité (1.5.2) on obtient le résultat.  $\square$

DÉFINITION 2.9.5. *Enfin on définit une troisième projection de la solution exacte : pour tout  $n \in \{1 \cdots N\}$*

$$\begin{aligned}
(\Pi'^n B)_i &:= (\Pi_2'^n B)_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} B(c'_i, t) dt, \quad 1 \leq i \leq N', \\
(\Pi''^n B)_i &:= (\Pi_2''^n B)_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} B(S'_i, t) dt, \quad 1 \leq i \leq N'', \\
(\Pi^\Gamma B)_i &:= (\Pi_2^\Gamma B)_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} B(M'_i, t) dt, \quad 1 \leq i \leq N^\Gamma \\
(\Pi^{\diamond n-1/2} \mathbf{E})_i \cdot \mathbf{t}'_i &:= (\Pi_1^{\diamond n-1/2} \mathbf{E})_i \cdot \mathbf{t}'_i \\
&= \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t}'_i dt d\sigma, \quad 1 \leq i \leq N^\diamond \\
(\Pi^{\diamond n-1/2} \mathbf{E})_i \cdot \mathbf{t}''_i &:= (\Pi_1^{\diamond n-1/2} \mathbf{E})_i \cdot \mathbf{t}''_i \\
&= \frac{1}{|A''_i|} \int_{A''_i} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t}''_i dt d\sigma, \quad 1 \leq i \leq N^\diamond \\
(\Pi^{\Gamma n+1/2} \mathbf{E})_i \cdot \mathbf{t}^\Gamma_i &:= (\Pi_1^{\Gamma n+1/2} \mathbf{E})_i \cdot \mathbf{t}^\Gamma_i \\
&= \frac{1}{|\partial C''_i \cap \Gamma|} \int_{\partial C''_i \cap \Gamma} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t} dt d\sigma, \quad 1 \leq i \leq N^\Gamma
\end{aligned}$$

### 2.9.2. Erreur de troncature et erreur numérique :

DÉFINITION 2.9.6. *On définit l'erreur numérique du schéma à l'itération  $n$ , avec  $n \in \{1 \cdots N\}$  notée  $er^n$ , par :*

$$er^n := (er'^n, er''^n, \mathbf{er}^{\diamond n-1/2}) \in \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N''} \times (\mathbb{R}^2)^{N^\diamond}$$

avec,

$$(2.9.12) \quad \begin{cases} er'^n & := \Pi'^n B - B'^n \\ er''^n & := \Pi''^n B - B''^n \\ \mathbf{er}^{\diamond n-1/2} & := \Pi^{\diamond n-1/2} \mathbf{E} - \mathbf{E}^{\diamond n-1/2} \end{cases}$$

On définit aussi, pour tout  $i \in [1 \cdots N^\Gamma]$ ,

$$\begin{cases} er_i^\Gamma & := \Pi^\Gamma B - B^{\Gamma n} \\ \mathbf{er}_i^\Gamma & := \Pi^{\Gamma n-1/2} \mathbf{E} - \mathbf{E}^{\Gamma n-1/2} \end{cases}$$

DÉFINITION 2.9.7. On définit l'erreur de troncature,  $r^n$ , avec  $n \in \{1..N - 1\}$ , par

$$r^n := (r'^n, r''^n, \mathbf{r}^{\diamond n}) \in \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N''} \times (\mathbb{R}^2)^{N^\diamond}$$

avec

$$(2.9.13) \quad \begin{cases} r'^n & := \frac{\Pi'^{n+1}B - \Pi'^nB}{\Delta t} + \nabla' \times \Pi^{\diamond n+1/2}\mathbf{E} \\ r''^n & := \frac{\Pi''^{n+1}B - \Pi''^nB}{\Delta t} + \nabla'' \times \Pi^{\diamond \Gamma n+1/2}\mathbf{E} \\ \mathbf{r}^{\diamond n} & := \frac{\Pi^{\diamond n+1/2}\mathbf{E} - \Pi^{\diamond n-1/2}\mathbf{E}}{\Delta t} - c^2 \nabla^\diamond \times \Pi'''^{\Gamma n}B + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}^{\diamond n} \end{cases}$$

REMARQUE 2.9.8. Vu la définition 2.9.5 et grâce aux propositions 2.9.2 et 2.9.4, on peut facilement constater que  $\forall n \in \{1 \dots N - 1\}$  :

$$(2.9.14) \quad \begin{cases} r'^n & = \frac{(\Pi_2'^{n+1}B - \Pi_1'^{n+1}B) - (\Pi_2'^nB - \Pi_1'^nB)}{\Delta t} \\ r''^n & = \frac{(\Pi_2''^{n+1}B - \Pi_1''^{n+1}B) - (\Pi_2''^nB - \Pi_1''^nB)}{\Delta t} \\ \mathbf{r}^{\diamond n} & = \frac{(\Pi_1^{\diamond n+1/2}\mathbf{E} - \Pi_2^{\diamond n+1/2}\mathbf{E}) - (\Pi_1^{\diamond n-1/2}\mathbf{E} - \Pi_2^{\diamond n-1/2}\mathbf{E})}{\Delta t} \end{cases}$$

NOTATION 2.9.9. On note  $\mathcal{M}$  l'opérateur qui associe à la solution, à l'itération  $n$ , du système de Maxwell sans second membre, sa solution à l'itération  $n + 1$ .

LEMME 2.9.10. Si l'hypothèse 4 page 22 est vérifiée, et sous la condition CFL, il existe une constante  $K$ , telle que l'erreur numérique, à l'itération finale  $N$  vérifie

$$\|er^N\| \leq K \left( \|er^1\| + \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \|r^n\| \right).$$

DÉMONSTRATION.  $\forall n \in \{1 \dots N - 1\}$  on a

$$\begin{cases} \frac{B'^{n+1} - B'^n}{\Delta t} + \nabla' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} & = 0 \\ \frac{B''^{n+1} - B''^n}{\Delta t} + \nabla'' \times \mathbf{E}^{\diamond \Gamma n+1/2} & = 0 \\ \frac{\mathbf{E}^{\diamond n+1/2} - \mathbf{E}^{\diamond n-1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla^\diamond \times B'''^{\Gamma n} + \frac{\mathbf{J}^{\diamond n}}{\epsilon_0} & = 0 \end{cases}$$

En faisant la différence avec le système (2.9.13) et en utilisant la définition 2.9.6 page 67 on a :

$$\begin{cases} \frac{er^{m+1} - er^m}{\Delta t} + \nabla' \times \mathbf{er}^{\diamond n+1/2} & = r^m \\ \frac{er'^{m+1} - er'^m}{\Delta t} + \nabla'' \times \mathbf{er}^{\diamond \Gamma n+1/2} & = r'^m . \\ \frac{\mathbf{er}^{\diamond n+1/2} - \mathbf{er}^{\diamond n-1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla^\diamond \times er''' \Gamma n & = \mathbf{r}^{\diamond n} \end{cases}$$

Ainsi,  $er^n$  est une solution du système de Maxwell discret avec comme second membre  $r^n$ , et on peut écrire :

$$er^{n+1} = \mathcal{M} er^n + \Delta t r^n,$$

et, par récurrence,

$$er^N = \mathcal{M}^{N-1} er^1 + \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \mathcal{M}^{N-1-n} r^n.$$

Or, d'après la proposition (2.7.1) page 53, sous l'hypothèse 4 page 22 et la condition CFL (2.6.14) page 50, le schéma est stable, et il existe une constante positive  $K$  telle que pour tout  $n \in \{1 \cdots N-1\}$

$$\begin{cases} \|\mathcal{M}^{N-1-n} r^n\| & \leq K \|r^n\| \\ \|\mathcal{M}^{N-1} er^1\| & \leq K \|er^1\| \end{cases},$$

avec  $K = \sqrt{\frac{8c^2}{\varepsilon \alpha_3^2} + \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{\alpha_3 \sqrt{\varepsilon}}\right)^2}$  (voir l'inégalité 2.7.10 page 56).

D'où

$$\|er^N\| \leq K \left( \|er^1\| + \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \|r^n\| \right).$$

□

### 2.9.3. Estimations d'erreur pour des fonctions régulières. :

Pour étudier l'erreur numérique, on commencera par étudier l'erreur de troncature, puis l'erreur numérique initiale et grâce au lemme 2.9.10 et à la stabilité on déduira la convergence.

On rappelle que  $\mathcal{C}^n(0, T, \mathcal{C}^m(\Omega))$  est l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[0, T]$ , telle que pour tout  $k \leq n$ ,  $f^{(k)}$  est à valeurs dans  $\mathcal{C}^m(\Omega)$ .

PROPOSITION 2.9.11. Soit  $(\mathbf{E}, B) \in \mathcal{C}^3(0, T, \mathcal{C}^2(\Omega))$  une solution du système de Maxwell, alors l'erreur de troncature du schéma est d'ordre un en espace et deux en temps :

$$\|r^n\| = O(h) + O(\Delta t^2), \quad \forall n \in \{1 \cdots N-1\}.$$

DÉMONSTRATION. Dans le système (2.9.14), pour tout  $i = 1 \cdots N'$  et tout  $n \in \{1 \cdots N - 1\}$  on a :

$$r_i'^n := \frac{\left(\Pi_2'^{n+1}B - \Pi_2'^nB\right)_i - \left(\Pi_1'^{n+1}B - \Pi_1'^nB\right)_i}{\Delta t}.$$

Or d'après la définition, donnée par la formule (2.9.7) page 64,  $\forall n \in \{1 \cdots N - 1\}$

$$\begin{aligned} \left(\Pi_2'^{n+1}B - \Pi_2'^nB\right)_i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n+1/2}}^{t^{n+3/2}} B(c'_i, t) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} B(c'_i, t) dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} B(c'_i, t + \Delta t) - B(c'_i, t) dt \end{aligned}$$

et puisque

$$B(c'_i, t + \Delta t) = B\left(c'_i, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2} \partial_t B\left(c'_i, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t^2}{8} \partial_t^2 B\left(c'_i, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + O(\Delta t^3)$$

et

$$B(c'_i, t) = B\left(c'_i, t + \frac{\Delta t}{2}\right) - \frac{\Delta t}{2} \partial_t B\left(c'_i, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t^2}{8} \partial_t^2 B\left(c'_i, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + O(\Delta t^3)$$

alors

$$(2.9.15) \quad B(c'_i, t + \Delta t) - B(c'_i, t) = \Delta t \partial_t B\left(c'_i, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + O(\Delta t^3)$$

et donc

$$\begin{aligned} \left(\Pi_2'^{n+1}B - \Pi_2'^nB\right)_i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \Delta t \partial_t B\left(c'_i, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + O(\Delta t^3) dt \\ &= B(c'_i, t^{n+1}) + B(c'_i, t^n) + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

et en appliquant la formule (2.9.15) au point  $t^n$  on obtient

$$\left(\Pi_2'^{n+1}B - \Pi_2'^nB\right)_i = \Delta t \partial_t B\left(c'_i, t^{n+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta t^3).$$

D'autre part, d'après la définition, donnée par la formule (2.9.1), on a

$$\left(\Pi_1'^{n+1}B - \Pi_1'^nB\right)_i = \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} B(X, t^{n+1}) dX - \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} B(X, t^n) dX$$

et en appliquant la formule (2.9.15) au point  $t^n$  on a

$$\begin{aligned}
\left(\Pi_1'^{n+1}B - \Pi_1'^nB\right)_i &= \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} \Delta t \partial_t B \left(X, t^{n+\frac{1}{2}}\right) dX + O(\Delta t^3) \\
&= \Delta t \left( \partial_t B \left(c'_i, t^{n+\frac{1}{2}}\right) + \nabla \partial_t B \left(c'_i, t^{n+\frac{1}{2}}\right) \cdot \int_{C'_i} \frac{\overrightarrow{c'_i X}}{|C'_i|} dX \right) \\
&\quad + \Delta t O(h^2) + O(\Delta t^3)
\end{aligned}$$

et si on note  $G'_i$  le centre de gravité de  $C'_i$  alors

$$\begin{aligned}
\left(\Pi_1'^{n+1}B - \Pi_1'^nB\right)_i &= \Delta t \left( \partial_t B \left(c'_i, t^{n+\frac{1}{2}}\right) + \nabla \partial_t B \left(c'_i, t^{n+\frac{1}{2}}\right) \cdot \overrightarrow{c'_i G'_i} \right) \\
&\quad + \Delta t O(h^2) + O(\Delta t^3).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
r_i'^n &= \nabla \partial_t B \left(c'_i, t^{n+\frac{1}{2}}\right) \cdot \overrightarrow{G'_i c'_i} + O(h^2) + O(\Delta t^2) \\
&= O(h) + O(\Delta t^2).
\end{aligned}$$

En procédant de la même manière pour les quantités duales, on obtient aussi

$$\begin{aligned}
r_i''^n &= \nabla \partial_t B \left(S'_i, t^{n+\frac{1}{2}}\right) \cdot \overrightarrow{G''_i S'_i} + O(h^2) + O(\Delta t^2). \\
&= O(h) + O(\Delta t^2).
\end{aligned}$$

**Remarque :** Si on choisit les centres de gravité des mailles primales comme centres  $c'_i$ , on obtient de l'ordre 2 en espace pour l'erreur de troncature primale. En revanche, les sommets primaux associés aux mailles duales ne correspondent pas forcément leurs centres de gravité duaux, et donc on a de l'ordre 1 en espace. Ainsi,

$$(2.9.16) \quad \left\| r'''^n \right\|_{''' }^2 = O(\Delta t^2) + O(h).$$

Enfin, pour calculer l'erreur de troncature diamant  $r^{\diamond n}$ , on rappelle que

$$(2.9.17) \quad \mathbf{r}^{\diamond n} := \frac{\left(\Pi_1^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} - \Pi_1^{\diamond n-1/2} \mathbf{E}\right) - \left(\Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} - \Pi_2^{\diamond n-1/2} \mathbf{E}\right)}{\Delta t}.$$

D'après la définition donnée par la formule (2.9.3)

$$\begin{aligned}
\left(\Pi_1^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} - \Pi_1^{\diamond n-1/2} \mathbf{E}\right)_i \cdot \mathbf{t}'_i &= \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t}'_i dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t}'_i dt d\sigma \\
&= \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\mathbf{E}(X, t + \Delta t) - \mathbf{E}(X, t)) \cdot \mathbf{t}'_i dt d\sigma
\end{aligned}$$

et par analogie avec la formule (2.9.15) on a

$$\begin{aligned}
\left(\Pi_1^{\circ n+1/2}\mathbf{E} - \Pi_1^{\circ n-1/2}\mathbf{E}\right)_i \cdot \mathbf{t}'_i &= \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \Delta t \partial_t \mathbf{E} \left(X, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \mathbf{t}'_i dt d\sigma + O(\Delta t^3) \\
&= \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \left(\mathbf{E} \left(X, t^{n+\frac{1}{2}}\right) - \mathbf{E} \left(X, t^{n-\frac{1}{2}}\right)\right) \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma + O(\Delta t^3) \\
&= \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \Delta t \partial_t \mathbf{E} (X, t^n) \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma + O(\Delta t^3).
\end{aligned}$$

Soit  $M'_i$  le milieu de  $A'_i$ , ainsi,

$$\begin{aligned}
\left(\Pi_1^{\circ n+1/2}\mathbf{E} - \Pi_1^{\circ n-1/2}\mathbf{E}\right)_i \cdot \mathbf{t}'_i &= \frac{\Delta t}{|A'_i|} \int_{A'_i} \left(\partial_t \mathbf{E} (M'_i, t^n) + \overrightarrow{M'_i X} \cdot \nabla \partial_t \mathbf{E} (M'_i, t^n)\right) \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma \\
&+ \Delta t O(h^2) + O(\Delta t^3) \\
&= \Delta t \partial_t \mathbf{E} (M'_i, t^n) \cdot \mathbf{t}'_i + \Delta t O(h^2) + O(\Delta t^3).
\end{aligned}$$

De même, et en notant  $M''_i$  le milieu de  $A''_i$  on a aussi

$$\begin{aligned}
\left(\Pi_1^{\circ n+1/2}\mathbf{E} - \Pi_1^{\circ n-1/2}\mathbf{E}\right)_i \cdot \mathbf{t}''_i &= \Delta t \partial_t \mathbf{E} (M''_i, t^n) \cdot \mathbf{t}''_i + \Delta t O(h^2) + O(\Delta t^3) \\
&= \Delta t \left(\partial_t \mathbf{E} (M'_i, t^n) \cdot \mathbf{t}''_i + \overrightarrow{M'_i M''_i} \cdot \nabla (\partial_t \mathbf{E} (M'_i, t^n) \cdot \mathbf{t}''_i)\right) \\
&+ \Delta t O(h^2) + O(\Delta t^3) \\
&= \Delta t \partial_t \mathbf{E} (M'_i, t^n) \cdot \mathbf{t}''_i + \Delta t O(h) + O(\Delta t^3).
\end{aligned}$$

D'où

$$(2.9.18) \quad \left(\Pi_1^{\circ n+1/2}\mathbf{E} - \Pi_1^{\circ n-1/2}\mathbf{E}\right)_i = \Delta t \partial_t \mathbf{E} (M'_i, t^n) + \Delta t \mathbf{O}(h) + \mathbf{O}(\Delta t^3).$$

D'autre part, d'après la formule (2.9.9) page 65

$$\left(\Pi_2^{\circ n+1/2}\mathbf{E} - \Pi_2^{\circ n-1/2}\mathbf{E}\right)_i \cdot \mathbf{n}'_i = \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \left(\mathbf{E} (X, t^{n+1/2}) - \mathbf{E} (X, t^{n-1/2})\right) \cdot \mathbf{n}'_i d\sigma$$

et par analogie avec la formule (2.9.15), on a

$$\begin{aligned}
\left(\Pi_2^{\circ n+1/2}\mathbf{E} - \Pi_2^{\circ n-1/2}\mathbf{E}\right)_i \cdot \mathbf{n}'_i &= \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \Delta t \partial_t \mathbf{E} (X, t^n) \cdot \mathbf{n}'_i d\sigma + O(\Delta t^3) \\
&= \frac{\Delta t}{|A'_i|} \int_{A'_i} \left(\partial_t \mathbf{E} (M'_i, t^n) + \overrightarrow{M'_i X} \cdot \nabla \partial_t \mathbf{E} (M'_i, t^n)\right) \cdot \mathbf{n}'_i \\
&+ O(h) d\sigma + O(\Delta t^3) \\
&= \Delta t \partial_t \mathbf{E} (M'_i, t^n) \cdot \mathbf{n}'_i + \Delta t O(h) + O(\Delta t^3).
\end{aligned}$$



De la même manière, on obtient aussi

$$\begin{aligned}
\left(\Pi_2^{\diamond n+3/2}\mathbf{E} - \Pi_2^{\diamond n+1/2}\mathbf{E}\right)_i \cdot \mathbf{n}_i'' &= \Delta t \partial_t \mathbf{E}(M_i'', t^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_i'' + \Delta t O(h) + O(\Delta t^3) \\
&= \Delta t \partial_t \mathbf{E}(M_i', t^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_i'' \\
&+ \Delta t \overrightarrow{M_i' M_i''} \cdot \nabla (\partial_t \mathbf{E}(M_i', t^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_i'') \\
&+ \Delta t O(h^2) + O(\Delta t^3) \\
&= \Delta t \partial_t \mathbf{E}(M_i', t^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_i'' + \Delta t O(h) + O(\Delta t^3).
\end{aligned}$$

Et donc

$$(2.9.19) \quad \left(\Pi_2^{\diamond n+1/2}\mathbf{E} - \Pi_2^{\diamond n-1/2}\mathbf{E}\right)_i = \Delta t \partial_t \mathbf{E}(M_i', t^n) + \Delta t \mathbf{O}(h) + \mathbf{O}(\Delta t^3).$$

D'où d'après les équations (2.9.17), (2.9.18) et (2.9.19) on a

$$\mathbf{r}_i^{\diamond n} = \mathbf{O}(h) + \mathbf{O}(\Delta t^2)$$

et

$$(2.9.20) \quad \|\mathbf{r}^{\diamond n}\|_{\diamond} = O(h) + O(\Delta t^2)$$

Enfin, les équations (2.9.16) et (2.9.20) impliquent que pour tout  $n \in \{1 \dots N-1\}$  on a :

$$(2.9.21) \quad \|r^n\| = O(h) + O(\Delta t^2)$$

□

**PROPOSITION 2.9.12.** *Soit  $(\mathbf{E}, B) \in \mathcal{C}^3(0, T, \mathcal{C}^2(\Omega))$  une solution du système de Maxwell, alors l'erreur numérique primale et duale à la première itération est d'ordre un en espace et deux en temps :*

$$\begin{aligned}
er_i'^1 &= O(\Delta t^2) + O(h). \\
er_i''^1 &= O(\Delta t^2) + O(h).
\end{aligned}$$

**DÉMONSTRATION.** On a

$$er_i'^1 = \left(\Pi_2'^1 B\right)_i - B_i'^1 = \left(\Pi_2'^1 B\right)_i - \left(\Pi_1'^1 B\right)_i + \left(\Pi_1'^1 B\right)_i - B_i'^1.$$

En utilisant le système de Maxwell discret (2.5.1) et la proposition 2.9.2, on obtient

$$er_i'^1 = \left(\Pi_2'^1 B\right)_i - \left(\Pi_1'^1 B\right)_i + \left(\Pi_1'^0 B\right)_i - B_i'^0 - \Delta t \nabla_i' \times \left(\Pi_1^{\diamond 1/2} \mathbf{E} - \mathbf{E}^{\diamond 1/2}\right).$$

Or

$$\begin{aligned}
\left(\Pi_2^1 B - \Pi_1^1 B\right)_i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{1/2}}^{t^{3/2}} B(c'_i, t) dt - \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} B(X, \Delta t) dX \\
&= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{1/2}}^{t^{3/2}} [B(c'_i, \Delta t) + (t - \Delta t) \partial_t B(c'_i, \Delta t) + O(\Delta t^2)] dt \\
&\quad - \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} [B(c'_i, \Delta t) + O(h)] dX \\
&= O(h) + O(\Delta t^2).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\left(\Pi_1^0 B\right)_i - B_i^0 &= \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} B(X, 0) dX - B(c'_i, 0) \\
&= \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} [B(c'_i, 0) + O(h)] dX - B(c'_i, 0) = O(h).
\end{aligned}$$

Enfin, d'après la définition du rotationnel primal donnée par la formule (1.8.2), on a

$$\begin{aligned}
&\nabla'_i \times \left(\Pi_1^{\circ 1/2} \mathbf{E} - \mathbf{E}^{1/2}\right) \\
&= \frac{1}{|C'_i|} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} |A'_j| \left(\Pi_1^{\circ 1/2} \mathbf{E} - \mathbf{E}^{\circ 1/2}\right)_j \cdot \mathbf{t}'_{ij} \\
&= \frac{1}{|C'_i|} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \int_{A'_j} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t}'_{ij} dt - \mathbf{E}(X, 0) \cdot \mathbf{t}'_{ij} - \frac{\Delta t}{2} \partial_t \mathbf{E}(X, 0) \cdot \mathbf{t}'_{ij} \right] d\sigma \\
&= \frac{1}{|C'_i|} \int_{\partial C'_i} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathbf{E}(X, t) dt - \mathbf{E}(X, 0) - \frac{\Delta t}{2} \partial_t \mathbf{E}(X, 0) \right] \cdot \mathbf{t}'_{ij} d\sigma \\
&= \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \nabla \times \mathbf{E}(X, t) dt - \nabla \times \mathbf{E}(X, 0) - \frac{\Delta t}{2} \partial_t \nabla \times \mathbf{E}(X, 0) \right] dX \\
&= \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \nabla \times \mathbf{E}(X, 0) + O(\Delta t) dt - \nabla \times \mathbf{E}(X, 0) - \frac{\Delta t}{2} \partial_t \nabla \times \mathbf{E}(X, 0) \right] dX \\
&= O(\Delta t).
\end{aligned}$$

D'où  $\forall i \in \{1..N'\}$

$$(2.9.22) \quad er_i^{.1} = O(\Delta t^2) + O(h).$$

En procédant, de la même manière pour les quantités duales, on obtient aussi que pour tout  $i \in \{1..N''\}$

$$(2.9.23) \quad er_i^{''1} = O(\Delta t^2) + O(h).$$

□

PROPOSITION 2.9.13. *Soit  $(\mathbf{E}, B) \in \mathcal{C}^3(0, T, \mathcal{C}^2(\Omega))$  une solution du système de Maxwell, alors l'erreur numérique diamant à la première itération est d'ordre un en espace et deux en temps :*

$$\mathbf{er}_i^{\diamond 1/2} = \mathbf{O}(\Delta t^2).$$

DÉMONSTRATION. D'après les définitions donnée dans les formules (2.9.12), (2.5.1) et (2.9.3) on a

$$\begin{aligned} & \mathbf{er}_i^{\diamond 1/2} \cdot \mathbf{t}'_i \\ &= \left( \Pi_1^{\diamond 1/2} \mathbf{E} - \mathbf{E}^{\diamond 1/2} \right) \cdot \mathbf{t}'_i \\ &= \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_j} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathbf{E}(X, t) dt - \mathbf{E}(X, 0) - \frac{\Delta t}{2} \partial_t \mathbf{E}(X, 0) \right] \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma \\ &= \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_j} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathbf{E}(X, 0) + t \partial_t \mathbf{E}(X, 0) + \mathbf{O}(\Delta t^2) dt - \mathbf{E}(X, 0) - \frac{\Delta t}{2} \partial_t \mathbf{E}(X, 0) \right] \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma \\ &= \mathbf{O}(\Delta t^2). \end{aligned}$$

En procédant de la même façon, on a aussi

$$\mathbf{er}_i^{\diamond 1/2} \cdot \mathbf{t}''_i = \mathbf{O}(\Delta t^2).$$

D'où le résultat. □

THÉORÈME 2.9.14. *On suppose que les hypothèses 2 page 22, 3 page 22 et 4 page 22 sont satisfaites et que le pas de temps vérifie la condition CFL (2.6.14).*

*Si les champs électromagnétiques exacts du système de Maxwell sont tels que*

*$B \in \mathcal{C}^3(0, T, \mathcal{C}^2(\Omega))$  et  $\mathbf{E} \in (\mathcal{C}^3(0, T, \mathcal{C}^2(\Omega)))^2$ ; alors le schéma est convergent à l'ordre un en espace et deux en temps.*

DÉMONSTRATION. D'après l'inégalité 2.9.10 on a :

$$\|er^N\| \leq K \left( \|er^1\| + \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \|r^n\| \right),$$

où  $K$  est une constante ; et en utilisant les propositions 2.9.11, 2.9.13 et 2.9.12 on obtient :

$$\begin{aligned} \|er^N\| &= O(\Delta t^2) + O(h) + \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} (O(h) + O(\Delta t^2)) \\ &= O(\Delta t^2) + O(h). \end{aligned}$$

□

#### 2.9.4. Estimation d'erreur pour des fonctions non régulières.

##### 2.9.4.1. Notations et rappels

. Soient  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  à frontière Lipschitzienne,  $p$  un réel  $\geq 1$  et  $m \in \mathbb{N}^*$  ; on rappelle les notations suivantes :

- $L^p(D)$  est l'espace des fonctions  $f$  mesurables sur  $D$  telles que la mesure sur  $D$  de  $f^p$  est finie.
- $W^{m,p}(D)$  est l'espace de Sobolev défini par :

$$W^{m,p}(D) := \{f \in L^p(D), \partial^\alpha f \in L^p(D), \forall |\alpha| \leq m\}$$

Pour  $p < \infty$ , cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{m,p,D} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_D |\partial^\alpha f|^p \right)^{1/p},$$

et de la semi norme

$$|f|_{m,p,D} := \left( \sum_{|\alpha|=m} \int_D |\partial^\alpha f|^p \right)^{1/p}.$$

- $L^p(D, H)$ ,  $p < \infty$ , est l'espace des fonctions  $f$  mesurables de  $D$  vers l'espace de Hilbert  $H$  et vérifiant

$$\int_D \|f(x)\|_H^p dx < \infty.$$

- $W^{m,p}(D, H)$  est l'espace défini par

$$W^{m,p}(D, H) := \{f \in L^p(D, H), \partial^\alpha f \in L^p(D, H), \forall |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(D,H)} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_D \|\partial^\alpha f\|_H^p \right)^{1/p}.$$

Pour  $0 < \alpha < 1$ , on rappelle aussi

- $C^{0,\alpha}(\bar{D})$  est l'espace de Hölder d'indice  $\alpha$ , défini par

$$C^{0,\alpha}(\bar{D}) := \left\{ f \in C(D); \sup_{\substack{X,Y \in D \\ X \neq Y}} \frac{\|f(X) - f(Y)\|}{\|X - Y\|^\alpha} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\bar{D})} := \sup_{X \in D} \|f(X)\| + \sup_{\substack{X,Y \in D \\ X \neq Y}} \frac{\|f(X) - f(Y)\|}{\|X - Y\|^\alpha}.$$

- $C^{m,\alpha}(\bar{D})$  est l'espace défini par :

$$C^{m,\alpha}(\bar{D}) := \{f \in C^m(D); \partial^j f \in C^{0,\alpha}(\bar{D}) \forall j, |j| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\bar{D})} := \|f\|_{m,\infty,D} + \max_{|\beta|=m} \sup_{\substack{X,Y \in D \\ X \neq Y}} \frac{\|\partial^\beta f(X) - \partial^\beta f(Y)\|}{\|X - Y\|^\alpha},$$

où

$$\|f\|_{m,\infty,D} := \max_{|\beta| \leq m} \sup_{X \in D} \|\partial^\beta f(X)\|.$$

- Pour deux espaces vectoriels normés  $A$  et  $B$ , la notation  $A \hookrightarrow B$  indique que  $A$  est inclus dans  $B$  avec une injection continue.

On rappelle ci dessous quelques résultats que l'on va utiliser dans la suite et que l'on peut trouver par exemple dans [1, 14, 9]

#### THÉORÈME 2.9.15. Injections de Sobolev :

Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  à frontière Lipschitzienne,  $m \in \mathbb{N}$ , et  $p \in [1, \infty]$ . Alors on a les inclusions suivantes :

$$\begin{cases} W^{m,p}(D) \hookrightarrow C^{0,m-n/p}(\bar{D}) & \text{si } \frac{n}{p} < m < \frac{n}{p} + 1 \\ W^{m,p}(D) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{D}) & \text{si } m = \frac{n}{p} + 1 \text{ et } 0 < \alpha < 1 \\ W^{m,p}(D) \hookrightarrow C^{0,1}(\bar{D}) & \text{si } m > \frac{n}{p} + 1 \end{cases}$$

Voir par exemple [14] section 3.1 ou [9] section IX.3

#### THÉORÈME 2.9.16. Bramble Hilbert :

Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  à frontière Lipschitzienne. Soit  $f$  une forme linéaire continue sur  $W^{k+1,p}(D)$ , avec  $k$  entier positif et  $p \in [0, \infty]$ .

Si  $f$  s'annule pour tous les polynômes de degré au plus  $k$ , alors il existe une constante  $c_D$  telle que

$$\forall u \in W^{k+1,p}(D), |f(u)| \leq c_D \|f\|_{k+1,p,D}^* |u|_{k+1,p,D}$$

avec  $\|\cdot\|_{k+1,p,D}^*$  est la norme sur l'espace dual de  $W^{k+1,p}(D)$ .

Voir le théorème 4.1.3 dans [14].

**THÉORÈME 2.9.17.** Soient  $D$  et  $\hat{D}$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$  affine-équivalents ; c'est à dire qu'il existe une bijection affine  $\Phi$  qui transforme  $\hat{D}$  en  $D$ . Soit  $M$  la matrice associée à  $\Phi$ , alors

$$\|M\| \leq \frac{d}{\hat{\rho}} \text{ et } \|M^{-1}\| \leq \frac{\hat{d}}{\rho},$$

où  $d$  et  $\hat{d}$  sont les diamètres de  $D$  et  $\hat{D}$  ;  $\rho$  et  $\hat{\rho}$  sont respectivement les rayons des boules inscrites dans  $D$  et  $\hat{D}$ .

De plus, pour tout  $f \in W^{m,p}(D)$ , avec  $m \in \mathbb{N}$  et  $p \in [1, \infty]$ , on a  $\hat{f} = f \circ \Phi \in W^{m,p}(\hat{D})$  et il existe une constante  $c_{n,m}$  telle que

$$\begin{cases} \left| \hat{f} \right|_{W^{m,p}(\hat{D})} & \leq c_{n,m} \|M\|^m |\det(M)|^{-1/p} |f|_{W^{m,p}(D)} \\ \left| f \right|_{W^{m,p}(D)} & \leq c_{n,m} \|M^{-1}\|^m |\det(M)|^{1/p} \left| \hat{f} \right|_{W^{m,p}(\hat{D})} \end{cases}.$$

(Voir théorèmes 3.1.2 et 3.1.3 dans [14]).

**REMARQUE 2.9.18.** Le déterminant de la matrice  $M$  vérifie :

$$(2.9.24) \quad |\det(M)| = \frac{|D|}{|\hat{D}|}.$$

Enfin, on rappelle que le triangle de référence, que l'on note  $\hat{T}$ , est le triangle ayant comme sommets  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(1,0)$  ; sa surface est  $|\hat{T}| = \frac{1}{2}$ .

#### 2.9.4.2. Estimations d'erreurs pour le schéma (2.5.1)

. On suppose que  $B \in W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0,T))$  et  $\mathbf{E} \in (W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0,T)))^2$ , avec  $p > 1$  et  $q > 2$ .

On rappelle que  $W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0,T))$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_{W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0,T))}$  définie par

$$\|f\|_{W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0,T))} := \left( \int_{\Omega} \|f(X, \cdot)\|_{W^{3,p}(0,T)}^q dX + \int_{\Omega} \|\partial_X f(X, \cdot)\|_{W^{3,p}(0,T)}^q dX \right)^{1/q}$$

où

$$\|f(X, \cdot)\|_{W^{3,p}(0,T)} := \left( \sum_{|\beta| \leq 3} \int_0^T \left| \partial_t^\beta f(X, t) \right|^p dt \right)^{1/p}.$$

REMARQUE 2.9.19. *Pour tout  $X \in \Omega$ , les fonctions  $B(X, \cdot)$  et  $\mathbf{E}(X, \cdot)$  existent et appartiennent à  $W^{3,p}(0, T)$ .*

*En effet, d'après le théorème d'injections de Sobolev 2.9.15 et puisque  $q > 2$  on a*

$$W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T)) \hookrightarrow C^{0,1-2/q}(\Omega, W^{3,p}(0, T))$$

*en particulier,*

$$(2.9.25) \quad W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T)) \subset C(\Omega, W^{3,p}(0, T))$$

d'où le résultat.

REMARQUE 2.9.20. *Pour tout  $t \in [0, T]$ , on a*

$$B(\cdot, t) \in W^{1,q}(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\cdot, t) \in (W^{1,q}(\Omega))^2,$$

En effet, on a  $B \in W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T))$ , et comme  $p > 1$ , alors  $W^{3,p}(0, T) \hookrightarrow C^{0,1}([0, T])$ .

Donc, il existe une constante  $K$  telle que pour tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |B(X, t)|^q dX &\leq \int_{\Omega} \|B(X, \cdot)\|_{C^{0,1}([0, T])}^q dX \\ &\leq K \int_{\Omega} \|B(X, \cdot)\|_{W^{3,p}(0, T)}^q dX \\ &\leq K \|B\|_{W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T))}^q \end{aligned}$$

D'où, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $B(\cdot, t) \in L^q(\Omega)$ .

D'autre part, puisque  $\partial_x B$  et  $\partial_y B \in L^q(\Omega, W^{3,p}(0, T))$ , alors pour presque tout  $X$  dans  $\Omega$ ,  $\partial_x B(X, \cdot)$  et  $\partial_y B(X, \cdot) \in W^{3,p}(0, T)$ ; et puisque  $p > 1$  et grâce au théorème des injections de Sobolev, il existe une constante  $K$  telle que pour presque tout  $X \in \Omega$

$$(2.9.26) \quad \begin{cases} \|\partial_x B(X, \cdot)\|_{C^{0,1}([0, T])} \leq K \|\partial_x B(X, \cdot)\|_{W^{3,p}(0, T)} \\ \|\partial_y B(X, \cdot)\|_{C^{0,1}([0, T])} \leq K \|\partial_y B(X, \cdot)\|_{W^{3,p}(0, T)} \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [|\partial_x B(X, t)|^q + |\partial_y B(X, t)|^q] dX &\leq \\ \int_{\Omega} [\|\partial_x B(X, \cdot)\|_{C([0, T])}^q + \|\partial_y B(X, \cdot)\|_{C([0, T])}^q] dX &\leq \\ K' \int_{\Omega} [\|\partial_x B(X, \cdot)\|_{W^{3,p}(0, T)}^q + \|\partial_y B(X, \cdot)\|_{W^{3,p}(0, T)}^q] dX &\leq \\ K' \|B(X, \cdot)\|_{W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T))}^q & \cdot \end{aligned}$$

D'où, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $B(\cdot, t) \in W^{1,q}(\Omega)$ .

En procédant de la même manière on montre aussi que  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{E}(\cdot, t) \in (W^{1,q}(\Omega))^2$ .

*AFFIRMATION. Les projections des champs  $B$  et  $\mathbf{E}$  que l'on a déjà définies dans le cas régulier dans les définitions 2.9.1 page 62 et 2.9.3 page 64 ont toujours un sens.*

DÉMONSTRATION. On a  $\mathbf{E} \in (W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T)))^2$ , or d'après (2.9.25) on a

$$W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T)) \subset C(\Omega, W^{3,p}(0, T)),$$

ainsi

$$\mathbf{E} \in (C(\Omega, W^{3,p}(0, T)))^2 \subset (C(\Omega, L^1(0, T)))^2,$$

d'où  $\forall i \in \{1 \cdots N_i^\diamond\}$  on a

$$\mathbf{E} \in (L^1(A'_i, L^1(0, T)))^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{E} \in (L^1(A''_i, L^1(0, T)))^2.$$

Ainsi la projection  $\Pi_1^\diamond \mathbf{E}$ , donnée par les formules (2.9.3) page 63 et (2.9.4) page 63, a bien un sens.

D'autre part, d'après la remarque 2.9.20

$$\forall t \in [0, T] \quad \text{on a} \quad B(\cdot, t) \in W^{1,q}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$$

et donc les projections primale  $\Pi_1'^n B$ , donnée par la formule (2.9.1) page 62, et duale  $\Pi_1''^n B$ , donnée par la formule (2.9.2) page 63, sont bien définies pour tout  $n \in \{0 \cdots N\}$ .

D'après la remarque 2.9.20 page précédente, on a aussi  $\mathbf{E}(\cdot, t) \in (W^{1,q}(\Omega))^2$ , pour tout  $t \in [0, T]$ ; et puisque  $W^{1,q}(\Omega) \subset C(\Omega)$  alors  $\mathbf{E}(\cdot, t^{n+1/2}) \in (C(\Omega))^2$ , pour tout  $n \in \{0 \cdots N-1\}$ ; d'où  $\Pi_2^\diamond \mathbf{E}$ , définie par les formules (2.9.9) et (2.9.10) page 65, a bien un sens.

Enfin, grâce à la remarque 2.9.19 page précédente, on a

$$\forall i \in \{1 \cdots N'\}, B(c'_i, \cdot) \in W^{3,p}(0, T) \subset L^1(0, T) \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1 \cdots N''\}, B(S'_i, \cdot) \in L^1(0, T).$$

Ainsi, les projections primale  $\Pi_2'^n B$ , donnée par la formule (2.9.7) page 64, et duale  $\Pi_2''^n B$ , donnée par la formule (2.9.8) page 64, sont bien définies pour tout  $n \in \{1 \cdots N-1\}$ .

□

Maintenant pour faire les estimations d'erreurs, on va commencer par démontrer quelques lemmes.



LEMME 2.9.21. Soit  $p > 1$  et  $F$  l'application

$$F : W^{2,p} (]T_1, T_2]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g \mapsto \frac{1}{\Delta t} \int_{T_1}^{T_2} g(t) dt - g\left(T_1 + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

où  $\Delta t = T_2 - T_1$ , alors, il existe une constante  $c_p$  telle que pour tout  $g \in W^{2,p} (]T_1, T_2])$ ,

$$|F(g)| \leq c_p \Delta t^{2-1/p} |g|_{W^{2,p}(]T_1, T_2])}$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord on peut remarquer que  $F$  est bien définie. En effet, puisque  $p > 1$ , alors d'après le théorème des injections de sobolev 2.9.15 on a

$$W^{2,p} (]T_1, T_2]) \hookrightarrow C^{0,1} ([T_1, T_2]) \subset C ([T_1, T_2]),$$

ainsi  $\int_{T_1}^{T_2} g(t) dt$  et  $g\left(T_1 + \frac{\Delta t}{2}\right)$  ont bien un sens.

Maintenant pour démontrer le lemme, on a

$$\begin{aligned} F(g) &= \frac{1}{\Delta t} \int_{T_1}^{T_2} g(t) dt - g\left(T_1 + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^1 g(T_1 + \hat{t}\Delta t) \Delta t d\hat{t} - g\left(T_1 + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ &= \int_0^1 \hat{g}(\hat{t}) d\hat{t} - \hat{g}\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

avec  $\hat{g}(\hat{t}) = g(T_1 + \hat{t}\Delta t)$

Or

$$\int_0^1 |\hat{g}(\hat{t})|^p d\hat{t} = \int_0^1 |g(T_1 + \hat{t}\Delta t)|^p d\hat{t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{T_1}^{T_2} |g(t)|^p dt = \frac{1}{\Delta t} \|g\|_{L^p(]T_1, T_2])}^p$$

de plus,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\partial_{\hat{t}} \hat{g}(\hat{t})|^p d\hat{t} &= \int_0^1 |\partial_{\hat{t}} (g(T_1 + \hat{t}\Delta t))|^p d\hat{t} = \int_0^1 |\Delta t g'(T_1 + \hat{t}\Delta t)|^p d\hat{t} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{T_1}^{T_2} |\Delta t g'(t)|^p dt = \Delta t^{p-1} |g|_{W^{1,p}(]T_1, T_2])}^p \end{aligned}$$

enfin,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\partial_t^2 \hat{g}(t)|^p dt &= \int_0^1 |\partial_t^2 (g(T_1 + t\Delta t))|^p dt = \int_0^1 |\Delta t^2 g''(T_1 + t\Delta t)|^p dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{T_1}^{T_2} |\Delta t^2 g''(t)|^p dt = \Delta t^{2p-1} |g|_{W^{2,p}([T_1, T_2])}^p. \end{aligned}$$

D'où,  $\hat{g} \in W^{2,p}([0, 1])$  et

$$(2.9.27) \quad |\hat{g}|_{W^{2,p}([0,1])} = \Delta t^{2-1/p} |g|_{W^{2,p}([T_1, T_2])}$$

Soit

$$\begin{aligned} \psi : W^{2,p}([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 f(t) dt - f\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

on a alors

$$F(g) = \psi(\hat{g}).$$

Or, pour tout  $f \in W^{2,p}([0, 1])$

$$|\psi(f)| \leq \int_0^1 |f(t)| dt + \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 2 \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

et d'après le théorème 2.9.15 et puisque  $p > 1$ , on a  $W^{2,p}([0, 1]) \hookrightarrow C^{0,1}[0, 1]$ ; ce qui implique qu'il existe une constante  $c_p$  telle que pour tout  $f \in W^{2,p}([0, 1])$  on a :

$$\|f\|_{C^{0,1}[0,1]} \leq c_p \|f\|_{W^{2,p}([0,1])},$$

ainsi

$$\sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \leq c_p \|f\|_{W^{2,p}([0,1])}$$

et donc

$$|\psi(f)| \leq 2c_p \|f\|_{W^{2,p}([0,1])}.$$

Et comme  $\psi$  est une forme linéaire, alors elle est continue sur  $W^{2,p}([0, 1])$ . De plus,  $\psi$  s'annule sur l'ensemble des polynômes de degré  $\leq 1$ , alors, en appliquant le théorème de Bramble Hilbert 2.9.16, il existe une constante  $K$  telle que, pour tout  $f \in W^{2,p}([0, 1])$ ,

$$\begin{aligned} |\psi(f)| &\leq K \|\psi\|_{W^{2,p}([0,1])}^* |f|_{W^{2,p}([0,1])} \\ &\leq K_p |f|_{W^{2,p}([0,1])} \end{aligned}$$

où  $K_p$  est une constante dépendant de  $p$ . Ainsi, on a en particulier

$$|\psi(\hat{g})| \leq K_p |\hat{g}|_{W^{2,p}([0,1])}$$

et en utilisant la formule (2.9.27) et le fait que  $F(g) = \psi(\hat{g})$ , on a alors

$$|F(g)| \leq K_p \Delta t^{2-1/p} |g|_{W^{2,p}([T_1, T_2])}.$$

□

LEMME 2.9.22. Soient  $D$  un polygone ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , étoilé par rapport à  $Y \in D$ ,  $q$  un nombre  $> 2$  et  $F$  l'application

$$\begin{aligned} F : W^{1,q}(D) &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \frac{1}{|D|} \int_D g(X) dX - g(Y) \end{aligned}$$

alors, il existe une constante positive  $c_q$  telle que, pour tout  $g \in W^{1,q}(D)$ ,

$$|F(g)| \leq c_q d |D|^{-1/q} |g|_{W^{1,q}(D)}$$

où  $d$  est le diamètre de  $D$ .

DÉMONSTRATION. On considère une triangulation de  $D$  composé de  $N_T$  triangles  $T_i$ , telle que chacun de ces triangles admet  $Y$  comme sommet et une des arêtes de  $D$  comme base.

Pour tout  $i = 1 \cdots N_T$ , on note  $\Phi_i$  une bijection affine, de matrice  $M_i$ , qui transforme le triangle de référence  $\hat{T}$  en  $T_i$ ; on note  $\hat{Y}_i$  le sommet de  $\hat{T}$  ayant  $Y$  comme image par  $\Phi_i$ . Voir figure 2.9.1.

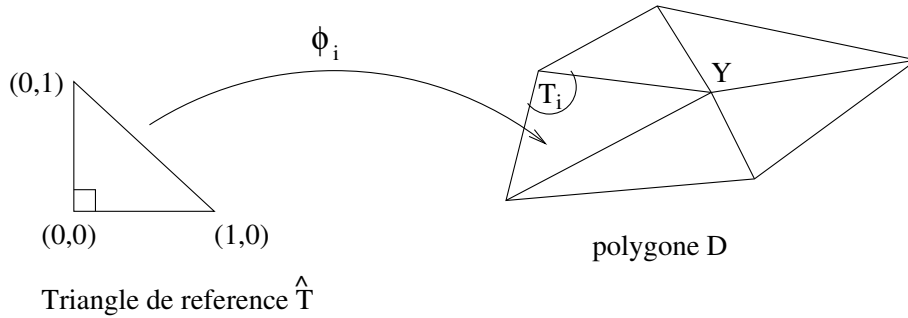


FIGURE 2.9.1.

D'autre part, puisque  $q > 2$ , alors d'après le théorème des injections de Sobolev 2.9.15, on a  $\forall f \in W^{1,q}(\hat{T})$ ,  $f$  est continue. Ainsi, on peut définir la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \hat{F} : W^{1,q}(\hat{T}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \frac{1}{|\hat{T}|} \int_{\hat{T}} f(\hat{X}) d\hat{X} - f(\hat{Y}_i). \end{aligned}$$

De même, on définit aussi pour tout  $i = 1 \cdots N_T$ ,

$$\begin{aligned} F_i : W^{1,q}(T_i) &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \frac{1}{|T_i|} \int_{T_i} g(X) dX - g(Y). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} F(g) &= \frac{1}{|D|} \int_D g(X) dX - g(Y) \\ &= \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^{N_T} \left( \int_{T_i} g(X) dX - |T_i| g(Y) \right) \\ &= \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^{N_T} |T_i| F_i(g) \end{aligned}$$

et donc,

$$(2.9.28) \quad |F(g)| \leq \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^{N_T} |T_i| |F_i(g)|.$$

Or pour tout  $i = 1 \cdots N_T$

$$\begin{aligned} F_i(g) &= \frac{1}{|T_i|} \int_{T_i} g(X) dX - g(Y) \\ &= \frac{1}{|T_i|} \int_{\hat{T}} g \circ \Phi_i(\hat{X}) |\det(M_i)| d\hat{X} - g \circ \Phi_i(\hat{Y}) \end{aligned}$$

et si on note

$$\hat{g}_i := g \circ \Phi_i$$

et puisque

$$|\det(M_i)| = \frac{|T_i|}{|\hat{T}|}$$

alors

$$F_i(g) = \frac{1}{|\hat{T}|} \int_{\hat{T}} \hat{g}_i(\hat{X}) d\hat{X} - \hat{g}_i(\hat{Y}) = \hat{F}(\hat{g}_i).$$

D'autre part,  $\hat{F}$  est une forme linéaire continue sur  $W^{1,q}(\hat{T})$ . En effet, d'après le théorème 2.9.15,  $W^{1,q}(\hat{T})$  s'injecte continuellement dans  $C^{0,1-2/q}(\hat{T})$ , pour  $q > 2$ , et donc il existe une constante  $c_q$  telle que, pour tout  $f \in W^{1,q}(\hat{T})$ ,

$$\sup_{\hat{X} \in \hat{T}} |f(\hat{X})| \leq \|f\|_{C^{0,1-2/q}(\hat{T})} \leq c_q \|f\|_{W^{1,q}(\hat{T})}$$

et puisque,

$$|\hat{F}(f)| \leq \frac{1}{|\hat{T}|} \int_{\hat{T}} |f(\hat{X})| d\hat{X} + |f(\hat{Y})| \leq 2 \sup_{\hat{X} \in \hat{T}} |f(\hat{X})|$$

on en déduit que

$$\left| \hat{F}(f) \right| \leq 2 c_q \|f\|_{W^{1,q}(\hat{T})},$$

d'où  $\hat{F}$  est continue et

$$\left\| \hat{F} \right\|_{W^{1,q}(\hat{T})}^* \leq 2 c_q.$$

De plus,  $\hat{F}$  est nulle sur l'ensemble des polynômes de degré 0, alors, en appliquant le théorème de Bramble Hilbert 2.9.16, il existe une constante  $c_1$ , telle que, pour tout

$f \in W^{1,q}(\hat{T})$  on a :

$$\left| \hat{F}(f) \right| \leq c_1 \left\| \hat{F} \right\|_{W^{1,q}(\hat{T})}^* |f|_{W^{1,q}(\hat{T})} \leq c_1 2 c_q |f|_{W^{1,q}(\hat{T})} \leq K_q |f|_{W^{1,q}(\hat{T})},$$

où  $K_q$  est une constante qui dépend de  $q$ .

D'après le théorème 2.9.17 et puisque  $g \in W^{1,q}(D) \subset W^{1,q}(T_i)$ , et  $\hat{g}_i := g \circ \Phi_i$ , on a  $\hat{g}_i \in W^{1,q}(\hat{T})$  et donc

$$|F_i(g)| = \left| \hat{F}(\hat{g}_i) \right| \leq K_q |\hat{g}_i|_{W^{1,q}(\hat{T})}.$$

De plus, d'après le même théorème, il existe une constante  $c_2$  positive telle que

$$\begin{aligned} |\hat{g}_i|_{W^{1,q}(\hat{T})} &\leq c_2 \|M_i\| |\det(M_i)|^{-1/q} |g|_{W^{1,q}(T_i)} \\ &\leq c_2 \|M_i\| (2|T_i|)^{-1/q} |g|_{W^{1,q}(T_i)} \end{aligned}$$

ce qui nous ramène à

$$|F_i(g)| \leq k_q \|M_i\| |T_i|^{-1/q} |g|_{W^{1,q}(T_i)}.$$

Or d'après le théorème 2.9.17,

$$\|M_i\| \leq \frac{d_i}{\hat{\rho}},$$

avec  $d_i$  le diamètre de  $T_i$  et  $\hat{\rho}$  le rayon du cercle inscrit dans  $\hat{T}$ .

D'où

$$|F_i(g)| \leq c_q d_i |T_i|^{-1/q} |g|_{W^{1,q}(T_i)},$$

où  $c_q$  est une constante positive dépendant de  $q$ .

En reprenant l'inégalité (2.9.28), on a

$$|F(g)| \leq \frac{c_q}{|D|} \sum_{i=1}^{N_T} d_i |T_i|^{1-1/q} |g|_{W^{1,q}(T_i)} \leq \frac{c_q d}{|D|} \sum_{i=1}^{N_T} |T_i|^{1-1/q} |g|_{W^{1,q}(T_i)}$$

où  $d$  est le diamètre de  $D$ .

Enfin, en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} |F(g)| &\leq \frac{c_q d}{|D|} \left( \sum_{i=1}^{N_T} (|T_i|^{1-1/q})^{\frac{q}{q-1}} \right)^{1-1/q} \left( \sum_{i=1}^{N_T} |g|_{W^{1,q}(T_i)}^q \right)^{1/q} \\ &\leq c_q d |D|^{-1/q} |g|_{W^{1,q}(D)}. \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 2.9.23. *Soit  $B \in W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T))$ , avec  $p > 1$  et  $q > 2$ . Si l'hypothèse 5 page 22 est vérifiée, alors il existe une constante positive  $K_{T,p,q,\Omega}$  telle que  $\forall n = 1 \cdots N-1$  on a*

$$\|r^{''''n}\|_{''''} \leq K_{T,p,q,\Omega} \left( \Delta t^{2-\frac{1}{p}} \|\partial_t^3 B\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p([0,T]))} + h |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right).$$

DÉMONSTRATION. D'après la remarque 2.9.8 et les définitions 2.9.1 et 2.9.3, on a pour tout  $i = 1 \cdots N'$

$$\begin{aligned} \Delta t r_i'^n &= \left( \Pi_2'^{n+1} B - \Pi_1'^{n+1} B \right) - \left( \Pi_2'^n B - \Pi_1'^n B \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n+1/2}}^{t^{n+3/2}} B(c'_i, t) dt - \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} B(X, t^{n+1}) dX \\ &\quad - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} B(c'_i, t) dt + \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} B(X, t^n) dX \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} [B(c'_i, t + \Delta t) - B(c'_i, t)] dt - \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} [B(X, t^{n+1}) - B(X, t^n)] dX \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} [B(c'_i, t + \Delta t) - B(c'_i, t)] dt - [B(c'_i, t^{n+1}) - B(c'_i, t^n)] \\ &\quad - \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} [B(X, t^{n+1}) - B(X, t^n)] dX + [B(c'_i, t^{n+1}) - B(c'_i, t^n)]. \end{aligned}$$

Soient  $f_{in}$  et  $g_{in}$  les fonctions définies par :

$$\begin{aligned} f_{in} : [t^{n-1/2}, t^{n+1/2}] &\mapsto \mathbb{R} \\ t &\mapsto B(c'_i, t + \Delta t) - B(c'_i, t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_{in} : C'_i &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto B(X, t^{n+1}) - B(X, t^n). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Delta t r'_i{}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} f_{in}(t) dt - f_{in}(t^n) - \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} g_{in}(X) dX + g_{in}(c'_i).$$

et alors

$$\left| \Delta t r'_i{}^n \right| \leq \left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} f_{in}(t) dt - f_{in}(t^n) \right| + \left| \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} g_{in}(X) dX - g_{in}(c'_i) \right|.$$

D'après la remarque 2.9.19, on a  $\forall i = 1 \dots N'$ ,  $B(c'_i, \cdot) \in W^{3,p}(0, T)$ , ce qui implique que

$$\forall i = 1 \dots N', \forall n = 1 \dots N - 1, \text{ on a } f_{in} \in W^{3,p}(t^{n-1/2}, t^{n+1/2});$$

en particulier,  $f_{in} \in W^{2,p}(t^{n-1/2}, t^{n+1/2})$ ; ainsi, en appliquant le lemme 2.9.21, il existe une constante  $c_p$  telle que

$$\left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} f_i(t) dt - f_i(t^n) \right| \leq c_p \Delta t^{2-1/p} |f_i|_{W^{2,p}([t^{n-1/2}, t^{n+1/2}])}.$$

D'autre part, d'après la remarque 2.9.20, on a  $\forall t \in [0, T]$ ,  $B(\cdot, t) \in W^{1,q}(\Omega)$ , ce qui implique que

$$\forall i = 1 \dots N', \forall n = 1 \dots N - 1 \text{ on a } g_{in} \in W^{1,q}(C'_i).$$

En appliquant le lemme 2.9.22, il existe une constante  $k_q$  telle que

$$\left| \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} g_{in}(X) dX - g_{in}(c'_i) \right| \leq k_q d'_i |C'_i|^{-1/q} |g_{in}|_{W^{1,q}(C'_i)},$$

où  $d'_i$  est le diamètre de  $C'_i$  et alors

$$\left| \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} g_{in}(X) dX - g_{in}(c'_i) \right| \leq c_q h |C'_i|^{-1/q} |g_{in}|_{W^{1,q}(C'_i)},$$

où  $c_q$  est une constante. Ainsi

$$(2.9.29) \quad \left| \Delta t r'_i{}^n \right| \leq c_p \Delta t^{2-1/p} |f_{in}|_{W^{2,p}([t^{n-1/2}, t^{n+1/2}])} + c_q h |C'_i|^{-1/q} |g_{in}|_{W^{1,q}(C'_i)}.$$

Or on a

$$\begin{aligned}
|f_{in}|_{W^{2,p}([t^{n-1/2}, t^{n+1/2}])}^p &= \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} |\partial_t^2 f_{in}(t)|^p dt \\
&= \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} |\partial_t^2 B(c'_i, t + \Delta t) - \partial_t^2 B(c'_i, t)|^p dt \\
&= \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \left| \int_t^{t+\Delta t} \partial_t^3 B(c'_i, \xi) d\xi \right|^p dt;
\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
|f_{in}|_{W^{2,p}([t^{n-1/2}, t^{n+1/2}])}^p &\leq \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \left| \Delta t^{1-1/p} \left( \int_t^{t+\Delta t} |\partial_t^3 B(c'_i, \xi)|^p d\xi \right)^{1/p} \right|^p dt \\
&\leq \Delta t^{p-1} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \int_t^{t+\Delta t} |\partial_t^3 B(c'_i, \xi)|^p d\xi dt
\end{aligned}$$

et donc

$$(2.9.30) \quad |f_{in}|_{W^{2,p}([t^{n-1/2}, t^{n+1/2}])}^p \leq \Delta t^p \|\partial_t^3 B(c'_i, \cdot)\|_{L^p([t^{n-1/2}, t^{n+3/2}])}^p.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
|g_{in}|_{W^{1,q}(C'_i)}^q &= \int_{C'_i} [|\partial_x g_{in}(\xi)|^q + |\partial_y g_{in}(\xi)|^q] d\xi \\
&= \int_{C'_i} [|\partial_x B(\xi, t^{n+1}) - \partial_x B(\xi, t^n)|^q + |\partial_y B(\xi, t^{n+1}) - \partial_y B(\xi, t^n)|^q] dX,
\end{aligned}$$

or d'après l'inégalité (2.9.26), pour presque tout  $\xi \in \Omega$ ,  $\partial_x B(\xi, \cdot)$  et  $\partial_y B(\xi, \cdot) \in W^{2,p}(0, T)$  et

$$\|\partial_x B(\xi, \cdot)\|_{C^{0,1}([0, T])} \leq c_{p,T} \|\partial_x B(\xi, \cdot)\|_{W^{2,p}(0, T)},$$

ce qui implique que  $\forall n = 0 \dots N-1$ , et pour presque tout  $\xi$  on a :

$$\frac{|\partial_x B(\xi, t^{n+1}) - \partial_x B(\xi, t^n)|}{\Delta t} \leq c_{p,T} \|\partial_x B(\xi, \cdot)\|_{W^{2,p}(0, T)}.$$

De même, on obtient aussi

$$\frac{|\partial_y B(\xi, t^{n+1}) - \partial_y B(\xi, t^n)|}{\Delta t} \leq c_{p,T} \|\partial_y B(\xi, \cdot)\|_{W^{2,p}(0, T)}.$$



Ainsi,

$$|g_{in}|_{W^{1,q}(C'_i)}^q \leq (c_{p,T}\Delta t)^q \int_{C'_i} \left[ \|\partial_x B(\xi, \cdot)\|_{W^{2,p}(0,T)}^q + \|\partial_y B(\xi, \cdot)\|_{W^{2,p}(0,T)}^q \right] dX$$

et donc

$$(2.9.31) \quad |g_{in}|_{W^{1,q}(C'_i)} \leq c_{p,T} \Delta t |B|_{W^{1,q}(C'_i, W^{2,p}(0,T))}.$$

Enfin, en remplaçant (2.9.30) et (2.9.31) dans (2.9.29) et en simplifiant par  $\Delta t$ , on obtient

$$|r'_i{}^n| \leq c_{T,p,q} \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^3 B(c'_i, \cdot)\|_{L^p([t^{n-1/2}, t^{n+3/2}])} + h |C'_i|^{-1/q} |B|_{W^{1,q}(C'_i, W^{2,p}(0,T))} \right).$$

En procédant de manière analogue pour l'erreur de troncature duale, on obtient aussi

$$|r''_i{}^n| \leq K_{T,p,q} \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^3 B(c''_i, \cdot)\|_{L^p([t^{n-1/2}, t^{n+3/2}])} + h |C''_i|^{-1/q} |B|_{W^{1,q}(C''_i, W^{2,p}(0,T))} \right).$$

On a

$$\|r''''^n\|''''^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{N'} |C'_i| |r'_i{}^n|^2 + \sum_{i=1}^{N''} |C''_i| |r''_i{}^n|^2 \right);$$

or

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N'} |C'_i| |r'_i{}^n|^2 &\leq 2 c_{T,p,q}^2 \sum_{i=1}^{N'} |C'_i| \Delta t^{4-\frac{2}{p}} |\partial_t^3 B(c'_i, \cdot)|_{L^p([t^{n-1/2}, t^{n+3/2}])}^2 \\ &\quad + 2 c_{T,p,q}^2 \sum_{i=1}^{N'} h^2 |C'_i|^{1-\frac{2}{q}} |B|_{W^{1,q}(C'_i, W^{2,p}(0,T))}^2 \end{aligned}$$

et puisque  $q > 2$ , alors en appliquant l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N'} h^2 |C'_i|^{1-2/q} |B|_{W^{1,q}(C'_i, W^{2,p}(0,T))}^2 &\leq h^2 \left( \sum_{i=1}^{N'} |C'_i| \right)^{1-\frac{2}{q}} \left( \sum_{i=1}^{N'} |B|_{W^{1,q}(C'_i, W^{2,p}(0,T))}^q \right)^{\frac{2}{q}} \\ &= h^2 |\Omega|^{1-\frac{1}{q}} |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))}^2. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N'} |C'_i| |\partial_t^3 B(c'_i, \cdot)|_{L^p([t^{n-1/2}, t^{n+3/2}])}^2 &\leq |\Omega| \max_i |\partial_t^3 B(c'_i, \cdot)|_{L^p([0,T])}^2 \\ &\leq |\Omega| \|\partial_t^3 B\|_{C^{0,1-\frac{2}{q}}(\Omega, L^p([0,T]))}^2 \\ &\leq k |\Omega| \|\partial_t^3 B\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p([0,T]))}^2; \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N'} |C'_i| \left| r'_i \right|^2 &\leq 2c_{T,p,q}^2 \left( k |\Omega| \Delta t^{4-\frac{2}{p}} \left\| \partial_t^3 B \right\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p([0,T])})}^2 + h^2 |\Omega|^{1-\frac{1}{q}} |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))}^2 \right) \\ &\leq c_{T,p,q,\Omega}^2 \left( \Delta t^{4-\frac{2}{p}} \left\| \partial_t^3 B \right\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p([0,T])})}^2 + h^2 |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))}^2 \right) \\ &\leq c_{T,p,q,\Omega}^2 \left( \Delta t^{2-\frac{1}{p}} \left\| \partial_t^3 B \right\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p([0,T])})} + h |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right)^2. \end{aligned}$$

De même, on montre aussi qu'il existe une constante  $k_{T,p,q,\Omega}$

$$\sum_{i=1}^{N''} |C''_i| \left| r''_i \right|^2 \leq k_{T,p,q,\Omega}^2 \left( \Delta t^{2-\frac{1}{p}} \left\| \partial_t^3 B \right\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p([0,T])})} + h |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right)^2.$$

D'où il existe une constante  $K_{T,p,q,\Omega}$  telle que

$$\|r''''_i\|_{''''} \leq K_{T,p,q,\Omega} \left( \Delta t^{2-\frac{1}{p}} \left\| \partial_t^3 B \right\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p([0,T])})} + h |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right).$$

□

LEMME 2.9.24. Soient deux réels  $p$  et  $q$  vérifiant  $q > p > 1$ . Soient  $f \in L^q(D_1, L^p(D_2))$  et

$$\begin{aligned} g : D_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ Y &\mapsto \int_{D_1} f(X, Y) dX \end{aligned}$$

alors  $g \in L^p(D_2)$  et

$$\|g\|_{L^p(D_2)} \leq |D_1|^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(D_1, L^p(D_2))}.$$

DÉMONSTRATION. On a

$$\int_{D_2} |g(Y)|^p dY = \int_{D_2} \left| \int_{D_1} f(X, Y) dX \right|^p dY \leq \int_{D_2} \left( \int_{D_1} |f(X, Y)| dX \right)^p dY$$

et comme  $p > 1$ , alors en appliquant l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{D_1} |f(X, Y)| dX \leq |D_1|^{1-\frac{1}{p}} \left( \int_{D_1} |f(X, Y)|^p dX \right)^{\frac{1}{p}}$$

et alors

$$\int_{D_2} |g(Y)|^p dY \leq |D_1|^{p-1} \int_{D_2} \int_{D_1} |f(X, Y)|^p dX dY.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de Fubini, on a d'après l'inégalité de Hölder et puisque  $q > p$

$$\begin{aligned} \int_{D_1} \int_{D_2} |f(X, Y)|^p dY dX &\leq |D_1|^{1-\frac{p}{q}} \left( \int_{D_1} \left( \int_{D_2} |f(X, Y)|^p dY \right)^{\frac{q}{p}} dX \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= |D_1|^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_{L^q(D_1, L^p(D_2))}^p; \end{aligned}$$

et comme  $f \in L^q(D_1, L^p(D_2))$  alors

$$\int_{D_1} \int_{D_2} |f(X, Y)|^p dY dX < \infty.$$

Ainsi, le théorème de Fubini implique que

$$\begin{aligned} \int_{D_2} \int_{D_1} |f(X, Y)|^p dX dY &= \int_{D_1} \int_{D_2} |f(X, Y)|^p dY dX \\ &\leq |D_1|^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_{L^q(D_1, L^p(D_2))}^p, \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{D_2} |g(Y)|^p dY \leq |D_1|^{p-\frac{p}{q}} \|f\|_{L^q(D_1, L^p(D_2))}^p.$$

Doù  $g \in L^p(D_2)$  et

$$\|g\|_{L^p(D_2)} \leq |D_1|^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(D_1, L^p(D_2))}.$$

□

LEMME 2.9.25. Soit  $C_i^\diamond, i \in \{1 \cdots N^\diamond\}$ , une cellule diamant associée à l'arête primale  $A_i'$  et sa duale  $A_i''$ . Soit

$$\begin{aligned} F : W^{1,q}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \frac{1}{|A_i'|} \int_{A_i'} f(X) d\sigma - \frac{1}{|A_i''|} \int_{A_i''} f(X) d\sigma \end{aligned}$$

avec  $q > 2$ . Alors il existe une constante  $K_q$  telle que pour tout  $f \in W^{1,q}(\Omega)$ ,

$$|F(f)| \leq K_q h |P_i^\diamond|^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(P_i^\diamond)}$$

où  $P_i^\diamond$  est l'enveloppe convexe de  $C_i^\diamond$  tel que représenté sur la figure 2.9.3.

DÉMONSTRATION. :

On note  $\hat{A} := [0, 1] \times \{0\}$ .

**Premier cas :** Si  $C_i^\diamond$  est une maille du bord (Figure 2.9.2)

Dans ce cas  $C_i^\diamond$  est un triangle et  $A_i'$  est l'un de ses cotés. Soit alors  $\Phi_i$  la bijection affine qui transforme le triangle de référence  $\hat{T}$  en  $C_i^\diamond$ , telle que  $\Phi_i((0, 0)) = S'_{i1}$  et  $\Phi_i((0, 1)) = S'_{i2}$ .

Ainsi,  $\Phi_i(\hat{A}) = A_i'$  et pour tout  $\hat{X} = (\hat{x}, 0) \in \hat{A}$ , on a  $\Phi_i(\hat{X}) = S'_{i1} + \hat{x} \overrightarrow{S'_{i1}S'_{i2}}$ .

Soit  $\Phi_i''$  une bijection affine telle que  $\Phi_i''((0, 0)) = c'_{i1}$  et  $\Phi_i''((0, 1)) = c'_{i2}$ .

Ainsi,  $\Phi_i''(\hat{A}) = A_i''$  et pour tout  $\hat{X} = (\hat{x}, 0) \in \hat{A}$ , on a  $\Phi_i''(\hat{X}) = c'_{i1} + \hat{x} \overrightarrow{c'_{i1}c'_{i2}}$ .

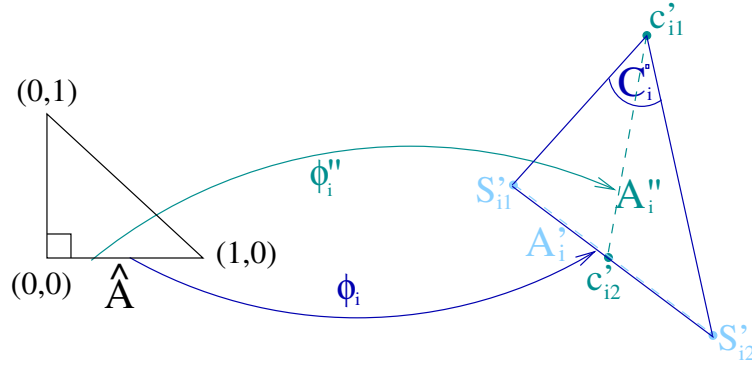


FIGURE 2.9.2. Cas d'une maille diamant de la frontière

Pour tout  $f \in W^{1,q}(C_i^\circ)$  on a

$$\begin{aligned} F(f) &= \frac{1}{|A_i'|} \int_{A_i'} f(X) \, d\sigma - \frac{1}{|A_i''|} \int_{A_i''} f(X) \, d\sigma \\ &= \frac{1}{|A_i'|} \int_0^1 f \circ \Phi_i((\hat{x}, 0)) \left\| \overrightarrow{S'_{i1} S'_{i2}} \right\| \, d\hat{x} - \frac{1}{|A_i''|} \int_0^1 f \circ \Phi_i''((\hat{x}, 0)) \left\| \overrightarrow{c'_{i1} c'_{i2}} \right\| \, d\hat{x} \end{aligned}$$

et comme  $\left\| \overrightarrow{S'_{i1} S'_{i2}} \right\| = |A_i'|$  et  $\left\| \overrightarrow{c'_{i1} c'_{i2}} \right\| = |A_i''|$  alors

$$\begin{aligned} F(f) &= \int_0^1 [f \circ \Phi_i((\hat{x}, 0)) - f \circ \Phi_i''((\hat{x}, 0))] \, d\hat{x} \\ &= \int_0^1 [f \circ \Phi_i((\hat{x}, 0)) - f \circ \Phi_i \circ \Phi_i^{-1} \circ \Phi_i''((\hat{x}, 0))] \, d\hat{x}. \end{aligned}$$

Soient

$$\hat{f}_i = f \circ \Phi_i$$

et

$$\begin{aligned} \hat{F} : W^{1,q}(\hat{T}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \int_0^1 [g((\hat{x}, 0)) - g \circ \Phi_i^{-1} \circ \Phi_i''((\hat{x}, 0))] \, d\hat{x}; \end{aligned}$$

alors  $F$  s'écrit

$$\begin{aligned} F(f) &= \int_0^1 [\hat{f}_i((\hat{x}, 0)) - \hat{f}_i \circ \Phi_i^{-1} \circ \Phi_i''((\hat{x}, 0))] \, d\hat{x} \\ &= \hat{F}(\hat{f}_i). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \left| \hat{F}(g) \right| &\leq \int_0^1 [|g((\hat{x}, 0))| + |g \circ \Phi_i^{-1} \circ \Phi_i''((\hat{x}, 0))|] d\hat{x} \\ &\leq \sup_{\hat{X} \in \hat{A}} |g(\hat{X})| + \sup_{\hat{X} \in \hat{A}} |g \circ \Phi_i^{-1} \circ \Phi_i''(\hat{X})| \end{aligned}$$

et comme pour tout  $\hat{X} \in \hat{A}$  on a  $\Phi_i^{-1} \circ \Phi_i''(\hat{X}) \in \hat{A}$ , alors

$$\left| \hat{F}(g) \right| \leq 2 \sup_{\hat{X} \in \hat{A}} |g(\hat{X})| \leq 2 \sup_{\hat{X} \in \hat{T}} |g(\hat{X})|$$

et puisque pour  $q > 2$ , on a  $W^{1,q}(\hat{T}) \hookrightarrow C^{0,1-2/q}(\hat{T})$ , alors il existe une constante  $c_q$  telle que,  $\forall g \in W^{1,q}(\hat{T})$

$$\left| \hat{F}(g) \right| \leq c_q \|g\|_{W^{1,q}(\hat{T})};$$

et comme  $\hat{F}$  est une forme linéaire, alors elle est continue sur  $W^{1,q}(\hat{T})$  et

$$\left\| \hat{F} \right\|_{W^{1,q}(\hat{T})}^* \leq c_q \|g\|_{W^{1,q}(\hat{T})}.$$

De plus  $\hat{F}$  s'annule sur l'espace des polynômes de degrés 0 ; alors en appliquant le théorème de Bramble Hilbert 2.9.16, il existe une constante  $K$ , telle que, pour tout  $g \in W^{1,q}(\hat{T})$

$$\left| \hat{F}(g) \right| \leq K \left\| \hat{F} \right\|_{W^{1,q}(\hat{T})}^* |g|_{W^{1,q}(\hat{T})} \leq K c_q |g|_{W^{1,q}(\hat{T})}.$$

On a  $\hat{f}_i = f \circ \Phi_i$  avec  $f \in W^{1,q}(C_i^\circ)$ , alors d'après le théorème 2.9.17,  $\hat{f}_i \in W^{1,q}(\hat{T})$  et il existe une constante  $k$  telle que

$$\left| \hat{f}_i \right|_{W^{1,q}(\hat{T})} \leq k \|M_i\| |\det(M_i)|^{-1/q} |f|_{W^{1,q}(C_i^\circ)}$$

où  $M_i$  est la matrice associée à  $\Phi_i$ ; et en plus,  $|\det(M_i)| = 2|C_i^\circ|$  et  $\|M_i\| \leq \frac{d_i}{\hat{\rho}}$ , avec  $d_i$  est le diamètre de  $C_i^\circ$  et  $\hat{\rho}$  le rayon du cercle inscrit dans  $\hat{T}$ .

Ainsi, il existe une constante  $k_q$  telle que

$$\left| \hat{F}(\hat{f}_i) \right| \leq k_q d_i |C_i^\circ|^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(C_i^\circ)}.$$

D'où

$$|F(f)| \leq k_q d_i |C_i^\circ|^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(C_i^\circ)};$$

et puisque  $C_i^\diamond$  est inclus dans une cellule primale alors

$$|F(f)| \leq k_q h |C_i^\diamond|^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(C_i^\diamond)}.$$

**Deuxieme cas :** *Si la cellule diamant  $C_i^\diamond$  est interne non convexe* (Figure 2.9.3)

Dans ce cas l'enveloppe convexe de  $C_i^\diamond$  est un triangle, que l'on note  $T_i^\diamond$ , de coté  $A_i'$  et de sommet opposé l'un des sommets de  $A_i'$ .

On rappelle que l'hypothèse 1 page 19 nous garantit que  $T_i^\diamond \subset \Omega$ .

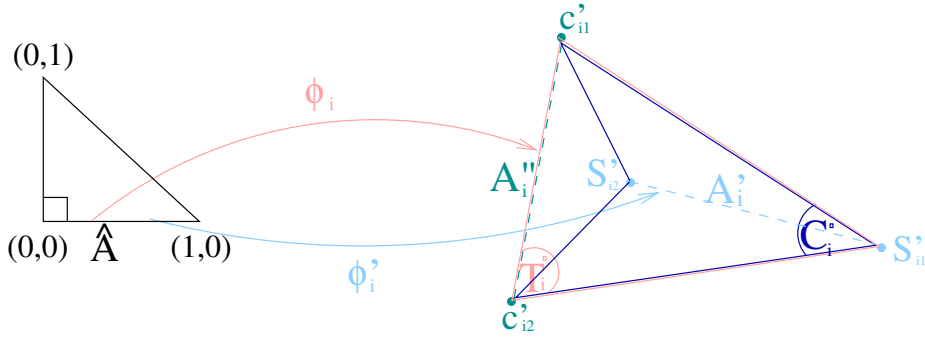


FIGURE 2.9.3. Cas d'une cellule diamant interieur non convexe

Soit alors  $\Phi_i$  la bijection affine qui transforme le triangle de référence  $\hat{T}$  en  $T_i^\diamond$ , telle que  $\Phi_i((0,0)) = c'_{i1}$  et  $\Phi_i((0,1)) = c'_{i2}$ . Ainsi,  $\Phi_i(\hat{A}) = A_i''$ .

Soit  $\Phi'_i$  une bijection affine qui transforme l'arête  $\hat{A}$  en  $A_i'$

En procédant de manière similaire au cas précédent, on obtient

$$|F(f)| \leq k_q d_i |T_i^\diamond|^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(T_i^\diamond)},$$

où  $d_i$  est le diamètre de  $T_i^\diamond$  et  $k_q$  est une constante qui dépend de  $q$ .

Et comme  $d_i \leq \max(A_i'', d'_{i1}, d'_{i2})$ , où  $d'_{i1}$  et  $d'_{i2}$  sont les diamètres des deux cellules primales dont  $A_i'$  est une arête, et vu la remarque 1.4.1 page 22, on a alors

$$|F(f)| \leq 2 k_q h |T_i^\diamond|^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(T_i^\diamond)}.$$

**Troisieme cas :** *Si la cellule diamant  $C_i^\diamond$  est interne convexe* (Figure 2.9.4)

L'arête  $A_i'$  découpe l'arête primale  $A_i''$  en deux segments que l'on note  $A''_{i1}$  et  $A''_{i2}$ .  $A_i'$  découpe aussi la cellule diamant  $C_i^\diamond$  en deux triangles que l'on note  $T_{i1}$  et  $T_{i2}$  tels que  $A''_{i1} \subset T_{i1}$  et  $A''_{i2} \subset T_{i2}$ .

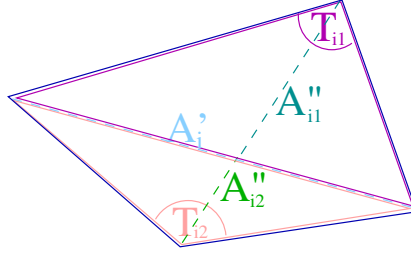


FIGURE 2.9.4. Cas d'une cellule diamant interieur convexe

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
F(f) &= \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} f(X) d\sigma - \frac{1}{|A''_i|} \int_{A''_i} f(X) d\sigma \\
&= \frac{|A''_{i1}|}{|A''_i| |A'_i|} \int_{A'_i} f(X) d\sigma + \frac{|A''_{i2}|}{|A''_i| |A'_i|} \int_{A'_i} f(X) d\sigma \\
&\quad - \frac{1}{|A''_i|} \int_{A''_{i1}} f(X) d\sigma - \frac{1}{|A''_i|} \int_{A''_{i2}} f(X) d\sigma \\
&= \frac{|A''_{i1}|}{|A''_i|} \left[ \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} f(X) d\sigma - \frac{1}{|A''_{i1}|} \int_{A''_{i1}} f(X) d\sigma \right] \\
&\quad + \frac{|A''_{i2}|}{|A''_i|} \left[ \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} f(X) d\sigma - \frac{1}{|A''_{i2}|} \int_{A''_{i2}} f(X) d\sigma \right].
\end{aligned}$$

Or en appliquant le premier cas au triangle  $T_{i1}$  et au triangle  $T_{i2}$ , on a

$$\left| \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} f(X) d\sigma - \frac{1}{|A''_{i1}|} \int_{A''_{i1}} f(X) d\sigma \right| \leq k_q d_{i1} |T_{i1}|^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(T_{i1})}$$

et

$$\left| \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} f(X) d\sigma - \frac{1}{|A''_{i2}|} \int_{A''_{i2}} f(X) d\sigma \right| \leq k_q d_{i2} |T_{i2}|^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(T_{i2})},$$

où  $k_q$  est une constante qui dépend de  $q$ ;  $d_{i1}$  et  $d_{i2}$  sont les diamètres respectifs des triangles  $T_{i1}$  et  $T_{i2}$ .

D'où

$$\begin{aligned} |F(f)| &\leq \frac{|A''_{i1}|}{|A''_i|} k_q d_{i1} |T_{i1}|^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(T_{i1})} + \frac{|A''_{i2}|}{|A''_i|} k_q d_{i2} |T_{i2}|^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(T_{i2})} \\ &\leq \frac{|A''_{i1}|}{|A''_i|} k_q d_i |T_{i1}|^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(T_{i1})} + \frac{|A''_{i2}|}{|A''_i|} k_q d_i |T_{i2}|^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(T_{i2})} \end{aligned}$$

où  $d_i$  est le diamètre de  $C_i^\diamond$ .

Et puisque  $|T_{i1}| = \frac{|\sin \theta_i|}{2} |A'_i| |A''_{i1}|$  et  $|T_{i2}| = \frac{|\sin \theta_i|}{2} |A'_i| |A''_{i2}|$ , alors

$$|F(f)| \leq \frac{2^{\frac{1}{q}} k_q d_i}{|A''_i| (|\sin \theta_i| |A'_i|)^{\frac{1}{q}}} \left( |A''_{i1}|^{1-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(T_{i1})} + |A''_{i2}|^{1-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(T_{i2})} \right).$$

En utilisant l'inégalité de Hölder discrète et puisque  $|A''_{i1}| + |A''_{i2}| = |A''_i|$  et  $|T_{i1}| + |T_{i2}| = |C_i^\diamond|$ , on a

$$\begin{aligned} |F(f)| &\leq \frac{2^{\frac{1}{q}} k_q d_i}{|A''_i| (|\sin \theta_i| |A'_i|)^{\frac{1}{q}}} |A''_i|^{1-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(C_i^\diamond)} \\ &\leq k_q d_i \left( \frac{|\sin \theta_i| |A'_i| |A''_i|}{2} \right)^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(C_i^\diamond)}; \end{aligned}$$

et en utilisant la formule (1.5.1) on obtient

$$|F(f)| \leq k_q d_i |C_i^\diamond|^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(C_i^\diamond)}.$$

Et comme  $d_i \leq \max(|A'_i|, |A''_i|) \leq h$ , on a donc

$$|F(f)| \leq k_q h |C_i^\diamond|^{-\frac{1}{q}} |f|_{W^{1,q}(C_i^\diamond)}.$$

□

PROPOSITION 2.9.26. *Soit  $\mathbf{E} \in (W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T)))^2$ , avec  $q > p > 1$  et  $q > 2$ . Alors, sous les hypothèses 2, 3 et 4 page 22, il existe une constante positive  $k_{q,T,\Omega,p}$  telle que  $\forall n = 1 \cdots N - 1$  :*

$$\|\mathbf{r}^{\diamond n}\|_\diamond \leq k_{q,T,\Omega,p} \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0, T))} + h^{1-\frac{2}{q}} |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0, T))} \right).$$



De plus, si toutes les mailles diamants sont convexes, alors

$$\|\mathbf{r}^{\diamond n}\|_{\diamond} \leq k_{q,T,\Omega,p} \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} + h |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right).$$

DÉMONSTRATION. Par définition, pour tout  $n \in \{1 \cdots N-1\}$

$$\|\mathbf{r}^{\diamond n}\|_{\diamond}^2 = \sum_{i=1}^{N^{\diamond}} |C_i^{\diamond}| \|\mathbf{r}_i^{\diamond n}\|^2.$$

En utilisant la relation (1.5.3) on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}^{\diamond n}\|_{\diamond}^2 &= \sum_{i=1}^{N^{\diamond}} |C_i^{\diamond}| \left( \left| \frac{\mathbf{r}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}'_i}{\mathbf{n}''_i \cdot \mathbf{t}'_i} \right|^2 + \left| \frac{\mathbf{r}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}''_i}{\mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{t}''_i} \right|^2 + 2 \frac{\mathbf{r}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}'_i}{\mathbf{n}''_i \cdot \mathbf{t}'_i} \frac{\mathbf{r}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}''_i}{\mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{t}''_i} \mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{n}''_i \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N^{\diamond}} |C_i^{\diamond}| \left( \left| \frac{\mathbf{r}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}'_i}{\mathbf{n}''_i \cdot \mathbf{t}'_i} \right| + \left| \frac{\mathbf{r}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}''_i}{\mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{t}''_i} \right| \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{N^{\diamond}} \frac{|C_i^{\diamond}|}{\sin(\theta_i)^2} (|\mathbf{r}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}'_i| + |\mathbf{r}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}''_i|)^2 \end{aligned}$$

et sous l'hypothèse 4 page 22, il existe une constante  $k$  telle que

$$(2.9.32) \quad \|\mathbf{r}^{\diamond n}\|_{\diamond}^2 \leq k \sum_{i=1}^{N^{\diamond}} |C_i^{\diamond}| (|\mathbf{r}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}'_i| + |\mathbf{r}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}''_i|)^2.$$

D'après la remarque 2.9.8

$$\Delta t \mathbf{r}^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}'_i = \left( \Pi_1^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} - \Pi_1^{\diamond n-1/2} \mathbf{E} - \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} + \Pi_2^{\diamond n-1/2} \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{t}'_i;$$

d'autre part, d'après la formule (1.5.2) on a

$$\begin{aligned} \left( \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} \right)_i \cdot \mathbf{t}'_i &= \left( \frac{\left( \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} \right)_i \cdot \mathbf{n}'_i}{\mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{n}'_i} \mathbf{t}''_i + \frac{\left( \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} \right)_i \cdot \mathbf{n}''_i}{\mathbf{t}'_i \cdot \mathbf{n}''_i} \mathbf{t}'_i \right) \cdot \mathbf{t}'_i \\ &= \frac{\left( \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} \right)_i \cdot \mathbf{n}'_i}{\mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{n}'_i} \mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{t}'_i + \frac{\left( \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} \right)_i \cdot \mathbf{n}''_i}{\mathbf{t}'_i \cdot \mathbf{n}''_i} \\ &= \frac{\cos(\theta_i)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_i\right)} \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}'_i + \frac{\left( \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} \right)_i \cdot \mathbf{n}''_i}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right)} \\ (2.9.33) \quad &= -\cot(\theta_i) \left( \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} \right)_i \cdot \mathbf{n}'_i + \frac{1}{\sin(\theta_i)} \left( \Pi_2^{\diamond n+1/2} \mathbf{E} \right)_i \cdot \mathbf{n}''_i; \end{aligned}$$

ainsi, en reprenant les définitions données par les formules (2.9.3), (2.9.9) et (2.9.10), on a

$$\begin{aligned}
\Delta t \mathbf{r}_i^{\otimes n} \cdot \mathbf{t}'_i &= \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t}'_i dt d\sigma - \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t}'_i dt d\sigma \\
&+ \frac{\cot(\theta_i)}{|A'_i|} \int_{A'_i} [\mathbf{E}(X, t^{n+1/2}) - \mathbf{E}(X, t^{n-1/2})] \cdot \mathbf{n}'_i d\sigma \\
&- \frac{1}{\sin(\theta_i) |A''_i|} \int_{A''_i} [\mathbf{E}(X, t^{n+1/2}) - \mathbf{E}(X, t^{n-1/2})] \cdot \mathbf{n}''_i d\sigma \\
&= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} [\mathbf{E}(X, t + \Delta t) - \mathbf{E}(X, t)] \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma dt \\
&- \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} [\mathbf{E}(X, t^{n+1/2}) - \mathbf{E}(X, t^{n-1/2})] \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma \\
&+ \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} [\mathbf{E}(X, t^{n+1/2}) - \mathbf{E}(X, t^{n-1/2})] \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma \\
&+ \frac{\cot(\theta_i)}{|A'_i|} \int_{A'_i} [\mathbf{E}(X, t^{n+1/2}) - \mathbf{E}(X, t^{n-1/2})] \cdot \mathbf{n}'_i d\sigma \\
&- \frac{1}{\sin(\theta_i) |A''_i|} \int_{A''_i} [\mathbf{E}(X, t^{n+1/2}) - \mathbf{E}(X, t^{n-1/2})] \cdot \mathbf{n}''_i d\sigma.
\end{aligned}$$

Soient  $f_i$  et  $g_n$  les fonctions définies par :

$$\begin{aligned}
f_i : [0, T - \Delta t] &\mapsto \mathbb{R} \\
t &\mapsto \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} [\mathbf{E}(X, t + \Delta t) - \mathbf{E}(X, t)] \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma \\
\mathbf{g}_n : \Omega &\mapsto \mathbb{R}^2 \\
X &\mapsto \mathbf{E}(X, t^{n+1/2}) - \mathbf{E}(X, t^{n-1/2})
\end{aligned}$$

alors l'erreur de troncature diamant s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Delta t \mathbf{r}_i^{\otimes n} \cdot \mathbf{t}'_i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} f_i(t) dt - f_i(t^{n-1/2}) + \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma \\
&+ \frac{\cot(\theta_i)}{|A'_i|} \int_{A'_i} \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{n}'_i dX - \frac{1}{\sin(\theta_i) |A''_i|} \int_{A''_i} \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{n}''_i d\sigma
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \Delta t \mathbf{r}_i^{\otimes n} \cdot \mathbf{t}'_i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} f_i(t) dt - f_i(t^{n-1/2}) - \frac{1}{\sin(\theta_i) |A_i''|} \int_{A_i''} \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{n}_i'' d\sigma \\ &+ \frac{1}{\sin(\theta_i) |A_i'|} \int_{A_i'} [\sin(\theta_i) \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{t}'_i + \cos(\theta_i) \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{n}_i'] d\sigma \end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned} \sin(\theta_i) \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{t}'_i + \cos(\theta_i) \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{n}_i' &= \mathbf{t}'_i \cdot \mathbf{n}_i'' \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{t}'_i + \mathbf{n}_i' \cdot \mathbf{n}_i'' \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{n}_i' \\ (2.9.34) \qquad \qquad \qquad &= (\mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{t}'_i \mathbf{t}'_i + \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{n}_i' \mathbf{n}_i') \cdot \mathbf{n}_i'' \\ &= \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{n}_i'', \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} \Delta t \mathbf{r}_i^{\otimes n} \cdot \mathbf{t}'_i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} f_i(t) dt - f_i(t^{n-1/2}) + \frac{1}{\sin(\theta_i) |A_i'|} \int_{A_i'} \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{n}_i'' d\sigma \\ &- \frac{1}{\sin(\theta_i) |A_i''|} \int_{A_i''} \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{n}_i'' d\sigma \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} |\Delta t \mathbf{r}_i^{\otimes n} \cdot \mathbf{t}'_i| &\leq \left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} f_i(t) dt - f_i(t^{n-1/2}) \right| \\ (2.9.35) \qquad \qquad \qquad &+ \frac{1}{|\sin(\theta_i)|} \left| \frac{1}{|A_i'|} \int_{A_i'} \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{n}_i'' d\sigma - \frac{1}{|A_i''|} \int_{A_i''} \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{n}_i'' d\sigma \right|. \end{aligned}$$

On commence par majorer la première quantité du membre du droite de cette inégalité.

Soit  $\psi_i$  la fonction définie par

$$\begin{aligned} \psi_i : [0, T] &\mapsto \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{|A_i'|} \int_{A_i'} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma \end{aligned}$$

c'est à dire, pour tout  $t \in [0, T - \Delta t]$ ,  $f_i(t) = \psi_i(t + \Delta t) - \psi_i(t)$ .

Puisque  $\mathbf{E} \in (W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T)))^2$  et  $q > 1$  alors  $\mathbf{E}$  est continue sur  $\bar{\Omega}$ , ainsi

$$\forall i, \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i \in L^q(A_i', W^{3,p}(0, T))$$

et donc

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i, \partial_t \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i, \partial_t^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i \text{ et } \partial_t^3 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i \in L^q(A'_i, L^p(0, T)).$$

Comme  $q > p > 1$  alors le lemme 2.9.24 implique que les fonctions

$$\psi_i, \partial_t \psi_i, \partial_t^2 \psi_i \text{ et } \partial_t^3 \psi_i \in L^p(0, T),$$

ainsi  $\psi_i \in W^{3,p}(0, T)$  ; en particulier

$$f_i \in W^{2,p}([t^{n-1}, t^n]), \forall i = 0..N'.$$

En appliquant le lemme 2.9.21, il existe une constante  $c_p$  telle que  $\forall n \in \{1 \dots N\}$ ,

$$(2.9.36) \quad \left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} f_i(t) dt - f_i(t^{n-1/2}) \right| \leq c_p \Delta t^{2-1/p} |f_i|_{W^{2,p}([t^{n-1}, t^n])}.$$

or

$$\begin{aligned} |f_i|_{W^{2,p}([t^{n-1}, t^n])}^p &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\partial_t^2 \psi_i(t + \Delta t) - \partial_t^2 \psi_i(t)|^p dt \\ &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left| \int_t^{t+\Delta t} \partial_t^3 \psi_i(\xi) d\xi \right|^p dt \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} |f_i|_{W^{2,p}([t^{n-1}, t^n])}^p &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left| \Delta t^{1-1/p} \left( \int_t^{t+\Delta t} |\partial_t^3 \psi_i(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} \right|^p dt \\ &\leq \Delta t^{p-1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_t^{t+\Delta t} |\partial_t^3 \psi_i(\xi)|^p d\xi dt \\ &\leq \Delta t^p \left\| \partial_t^3 \psi_i \right\|_{L^p([0, T])}^p \end{aligned}$$

et comme  $\partial_t^3 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i \in L^q(A'_i, L^p(0, T))$  avec  $q > p > 1$  alors le lemme 2.9.24 implique que

$$\left\| \partial_t^3 \psi_i \right\|_{L^p([0, T])} \leq |A'_i|^{-\frac{1}{q}} \left\| \partial_t^3 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i \right\|_{L^q(A'_i, L^p([0, T]))}$$

et donc

$$\begin{aligned}
|f_i|_{W^{1,p}([t^{n-1}, t^n])} &\leq \Delta t |A'_i|^{-\frac{1}{q}} \|\partial_t^3 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i\|_{L^q(A'_i, L^p([0, T])}) \\
&\leq \Delta t |A'_i|^{-\frac{1}{q}} \left( \int_{A'_i} \|\partial_t^3 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i(X, \cdot)\|_{L^p([0, T])}^q dX \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \Delta t \sup_{X \in A'_i} \|\partial_t^3 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i(X, \cdot)\|_{L^p([0, T])}
\end{aligned}$$

et comme  $\partial_t^3 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i \in W^{1,q}(\Omega, L^p(0, T)) \hookrightarrow C^{0,1-2/q}(\Omega, L^p(0, T))$  alors il existe une constante  $k_q$  telle que

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} \|\partial_t^3 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i(X, \cdot)\|_{L^p([0, T])} \leq k_q \|\partial_t^3 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0, T))}$$

d'où

$$|f_i|_{W^{1,p}([t^{n-1}, t^n])} \leq k_q \Delta t \|\partial_t^3 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0, T))}$$

et en remplaçant dans l'inégalité (2.9.36)

$$(2.9.37) \quad \left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} f_i(t) dt - f_i(t^{n+1/2}) \right| \leq c_{q,p} \Delta t^{3-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0, T))}.$$

Maintenant, on va majorer la deuxième quantité du membre du droite de l'inégalité (2.9.35).

D'après la remarque 2.9.20,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{E}(\cdot, t) \in (W^{1,q}(\Omega))^2$ ; ainsi,

$$\forall n = 1 \cdots N-1, \forall i = 1 \cdots N^\circ, \mathbf{E}(\cdot, t^{n-1/2}) \cdot \mathbf{n}''_i \text{ et } \mathbf{E}(\cdot, t^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n}''_i \in W^{1,q}(\Omega),$$

et donc  $\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{n}''_i \in W^{1,q}(\Omega)$ . En utilisant le lemme 2.9.25 page 91, il existe une constante  $c_q$  telle que,

$$\frac{|F(\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{n}''_i)|}{|\sin(\theta_i)|} \leq \frac{K_q h}{|\sin(\theta_i)|} |P_i^\circ|^{-\frac{1}{q}} |\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{n}''_i|_{W^{1,q}(P_i^\circ)},$$

où  $F$  est la fonction définie dans le lemme 2.9.25 et  $P_i^\circ$  l'enveloppe convexe de  $C_i^\circ$ . Et puisque  $|P_i^\circ| \geq |C_i^\circ|$ ; et sous l'hypothèse 4 page 22 on a alors

$$\frac{|F(\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{n}''_i)|}{|\sin(\theta_i)|} \leq \frac{K_q h}{\alpha} |C_i^\circ|^{-\frac{1}{q}} |\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{n}''_i|_{W^{1,q}(P_i^\circ)}$$

Or

$$\begin{aligned} |\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{n}_i''|_{W^{1,q}(P_i^\circ)}^q &= \int_{P_i^\circ} \|\nabla \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{n}_i''(X)\|^q dX \\ &= \int_{P_i^\circ} \|\nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i''(X, t^{n+1/2}) - \nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i''(X, t^{n-1/2})\|^q dX \end{aligned}$$

et d'après la remarque 2.9.19, pour tout  $X$  dans  $\Omega$ , on a  $\mathbf{E}(X, \cdot) \cdot \mathbf{n}_i'' \in W^{2,p}(0, T)$ ; or pour  $p > 1$  on a  $W^{2,p}(0, T) \hookrightarrow C^{0,1}[0, T]$ , alors il existe une constante  $c_T$  telle que pour tout  $X$  dans  $\Omega$ ,

$$\|\nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i''(X, t^{n+1/2}) - \nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i''(X, t^{n-1/2})\| \leq c_T \Delta t \|\nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i''(X, \cdot)\|_{W^{2,p}(0,T)}$$

ainsi

$$\begin{aligned} |\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{n}_i''|_{W^{1,q}(P_i^\circ)}^q &\leq (c_T \Delta t)^q \int_{P_i^\circ} \|\nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i''(X, \cdot)\|_{W^{2,p}(0,T)}^q dX \\ &\leq (c_T \Delta t)^q |\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i''|_{W^{1,q}(P_i^\circ, W^{2,p}(0,T))}^q \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\frac{|F(\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{n}_i'')|}{|\sin(\theta_i)|} \leq c_{q,T} h |C_i^\circ|^{-\frac{1}{q}} \Delta t |\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i''|_{W^{1,q}(P_i^\circ, W^{2,p}(0,T))}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|\sin(\theta_i)|} \left| \frac{1}{|A_i'|} \int_{A_i'} \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{n}_i'' dX - \frac{1}{|A_i''|} \int_{A_i''} \mathbf{g}_n(X) \cdot \mathbf{n}_i'' dX \right| \\ &\leq c_{q,T} h |C_i^\circ|^{-\frac{1}{q}} \Delta t |\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i''|_{W^{1,q}(P_i^\circ, W^{2,p}(0,T))}, \end{aligned}$$

où  $c_{q,T}$  est une constante dépendant de  $q$  et  $T$ .

D'après les inégalités (2.9.35), (2.9.37) et l'inégalité ci dessus on obtient que  $\forall n \in \{1 \cdots N-1\}$

$$\begin{aligned} |\Delta t \mathbf{r}_i^{\circ n} \cdot \mathbf{t}_i'| &\leq k_{q,p} \Delta t^{3-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_i'\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} + c_{q,T} h |C_i^\circ|^{-\frac{1}{q}} \Delta t |\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i''|_{W^{1,q}(P_i^\circ, W^{2,p}(0,T))} \\ &\leq k_{q,p} \Delta t^{3-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} + c_{q,T} h |C_i^\circ|^{-\frac{1}{q}} \Delta t |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(P_i^\circ, W^{2,p}(0,T))} \end{aligned}$$

En procédant de manière analogue, on obtient aussi que  $\forall n \in \{1 \cdots N - 1\}$

$$|\Delta t \mathbf{r}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{t}_i''| \leq k_{q,p} \Delta t^{3-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} + c_{q,T} h |C_i^\diamond|^{-\frac{1}{q}} \Delta t |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(P_i^\diamond, W^{2,p}(0,T))}.$$

En remplaçant dans l'inégalité (2.9.32) on en déduit qu'il existe une constante  $k_{q,T,p}$  tel que  $\forall n \in \{1 \cdots N - 1\}$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}^{\diamond n}\|_\diamond^2 &\leq k_{q,T,p} \sum_{i=1}^{N^\diamond} |C_i^\diamond| \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} + h |C_i^\diamond|^{-\frac{1}{q}} |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(P_i^\diamond, W^{2,p}(0,T))} \right)^2 \\ &\leq 2 k_{q,T,p} \sum_{i=1}^{N^\diamond} |C_i^\diamond| \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} \right)^2 \\ &\quad + 2 k_{q,T,p} \sum_{i=1}^{N^\diamond} |C_i^\diamond| \left( h |C_i^\diamond|^{-\frac{1}{q}} |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(P_i^\diamond, W^{2,p}(0,T))} \right)^2 \\ &\leq 2 k_{q,T,p} |\Omega| \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} \right)^2 \\ &\quad + 2 k_{q,T,p} h^2 \sum_{i=1}^{N^\diamond} |C_i^\diamond|^{1-\frac{2}{q}} |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(P_i^\diamond, W^{2,p}(0,T))}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, dans les cas où toutes les mailles diamants sont convexes, on a  $\forall i \in \{1 \cdots N^\diamond\}$ ,  $P_i^\diamond = C_i^\diamond$ ; et puisque  $q > 2$ , l'inégalité de Hölder discrète donne

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N^\diamond} |C_i^\diamond|^{1-\frac{2}{q}} |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(C_i^\diamond, W^{2,p}(0,T))}^2 &\leq \left( \sum_{i=1}^{N^\diamond} |C_i^\diamond| \right)^{1-\frac{2}{q}} \left( \sum_{i=1}^{N^\diamond} |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(C_i^\diamond, W^{2,p}(0,T))}^q \right)^{\frac{2}{q}} \\ &\leq |\Omega|^{1-\frac{2}{q}} |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))}^2 \end{aligned}$$

et alors, il existe une constante  $k_{q,T,\Omega,p}$  telle que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}^{\diamond n}\|_\diamond^2 &\leq k_{q,T,\Omega,p}^2 \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} \right)^2 + h^2 |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))}^2 \\ &\leq k_{q,T,\Omega,p}^2 \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} + h |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right)^2; \end{aligned}$$

donc

$$\|\mathbf{r}^{\diamond n}\|_\diamond \leq k_{q,T,\Omega,p} \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} + h |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right).$$

Sinon, c'est à dire, dans le cas où il y a des mailles diamants non convexes, on a grâce au corollaire 1.5.2 et sous les hypothèses 2, 3 et 4 que  $|C_i^\diamond|^{-\frac{2}{q}} \leq h^{-\frac{2}{q}}$ , ce qui implique que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N^\diamond} |C_i^\diamond|^{1-\frac{2}{q}} |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(P_i^\diamond, W^{2,p}(0,T))}^2 &\leq h^{-\frac{4}{q}} \sum_{i=1}^{N^\diamond} |C_i^\diamond| |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(P_i^\diamond, W^{2,p}(0,T))}^2 \\ &\leq h^{-\frac{4}{q}} |\Omega| |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))}^2 \end{aligned}$$

ainsi, il existe une constante  $k_{q,T,\Omega,p}$  telle que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}^{\diamond n}\|_\diamond^2 &\leq k_{q,T,\Omega,p}^2 \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} \right)^2 + h^{2-\frac{4}{q}} |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))}^2 \\ &\leq k_{q,T,\Omega,p}^2 \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} + h^{1-\frac{2}{q}} |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right)^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\|\mathbf{r}^{\diamond n}\|_\diamond \leq k_{q,T,\Omega,p} \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} + h^{1-\frac{2}{q}} |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right).$$

□

PROPOSITION 2.9.27. Soient  $B \in W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0,T))$ ,  $\mathbf{E} \in (W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0,T)))^2$ , avec  $q > p > 1$  et  $q > 2$ . Si l'hypothèse 5 page 22 est vérifiée, alors il existe une constante  $K_{q,p,\Omega}$ , telle que l'erreur numérique à la première itération vérifie :

$$\begin{aligned} \left\| er'''^1 \right\|''' &\leq K_{q,\Omega,p} \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^2 B\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} + h |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right. \\ &\quad \left. + \Delta t^3 \|\partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E}\|_{L^q(\Omega, W^{1,p}(0,T))} \right). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{aligned} er'_i{}^1 &= \left( \Pi_2^1 B \right)_i - B_i^1 \\ &= \left( \Pi_2^1 B \right)_i - \left( \Pi_1^1 B \right)_i + \left( \Pi_1^1 B \right)_i - B_i^1 \end{aligned}$$

en utilisant le système de Maxwell discret (2.5.1) et la proposition 2.9.2

$$er'_i{}^1 = \left( \Pi_2^1 B \right)_i - \left( \Pi_1^1 B \right)_i + \left( \Pi_1^0 B \right)_i - B_i^0 - \Delta t \nabla'_i \times \left( \Pi_1^{\diamond 1/2} \mathbf{E} - \mathbf{E}^{\diamond 1/2} \right)$$



et donc

$$(2.9.38) \quad \begin{aligned} |er'_i{}^{1}| &\leq \left| \left( \Pi_2'^1 B \right)_i - \left( \Pi_1'^1 B \right)_i \right| + \left| \left( \Pi_1'^0 B \right)_i - B_i'^0 \right| \\ &\quad + \Delta t \left| \nabla'_i \times \left( \Pi_1^{\diamond 1/2} \mathbf{E} - \mathbf{E}^{\diamond 1/2} \right) \right|. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \left( \Pi_2'^1 B \right)_i - \left( \Pi_1'^1 B \right)_i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{1/2}}^{t^{3/2}} B(c'_i, t) dt - \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} B(X, t^1) dX \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{1/2}}^{t^{3/2}} B(c'_i, t) dt - B(c'_i, t^1) + B(c'_i, t^1) \\ &\quad - \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} B(X, t^1) dX \end{aligned}$$

or en appliquant le lemme 2.9.21, il existe une constante  $c_p$  telle que  $\forall i \in \{1 \cdots N'\}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{1/2}}^{t^{3/2}} B(c'_i, t) dt - B(c'_i, t^1) \right| &\leq c_p \Delta t^{2-1/p} |B(c'_i, \cdot)|_{W^{2,p}([t^{1/2}, t^{3/2}])} \\ &\leq c_p \Delta t^{2-1/p} \sup_{X \in \Omega} |\partial_t^2 B(X, \cdot)|_{L^p([t^{1/2}, t^{3/2}])} \\ &\leq c_p \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^2 B\|_{C^{0,1-2/q}(\Omega, L^p([t^{1/2}, t^{3/2}]))} \end{aligned}$$

et puisque  $\partial_t^2 B \in W^{1,q}(\Omega, L^p(0, T)) \hookrightarrow C^{0,1-2/q}(\Omega, L^p(0, T))$  alors il existe une constante  $c_{q,p}$  telle que

$$\left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{1/2}}^{t^{3/2}} B(c'_i, t) dt - B(c'_i, t^1) \right| \leq c_{q,p} \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^2 B\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0, T))}.$$

D'autre part, en appliquant le lemme 2.9.22, il existe une constante  $c_q$  telle que

$$\begin{aligned} \left| B(c'_i, t^1) - \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} B(X, t^1) dX \right| &\leq c_q d'_i |C'_i|^{-1/q} |B(\cdot, t^1)|_{W^{1,q}(C'_i)} \\ &\leq c_q d'_i |C'_i|^{-1/q} |B|_{W^{1,q}(C'_i, W^{2,p}(0, T))} \\ &\leq c_q h |C'_i|^{-1/q} |B|_{W^{1,q}(C'_i, W^{2,p}(0, T))}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$(2.9.39) \quad \left| \left( \Pi_2^{\prime 1} B \right)_i - \left( \Pi_1^{\prime 1} B \right)_i \right| \leq c_{q,p} \Delta t^{2-1/p} \left\| \partial_t^2 B \right\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} \\ + c_q h |C'_i|^{-1/q} |B|_{W^{1,q}(C'_i, W^{2,p}(0,T))}.$$

Pour majorer la deuxième quantité de l'inégalité (2.9.38),

$$\left( \Pi_1^{\prime 0} B \right)_i - B_i^{\prime 0} = \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} B(X, 0) dX - B(c'_i, 0),$$

on applique le lemme 2.9.22 ; il existe une constante  $c_q$  telle que

$$\left| \left( \Pi_1^{\prime 0} B \right)_i - B_i^{\prime 0} \right| \leq c_q d'_i |C'_i|^{-1/q} |B(\cdot, 0)|_{W^{1,q}(C'_i)} \\ \leq c_q d'_i |C'_i|^{-1/q} |B|_{W^{1,q}(C'_i, W^{2,p}(0,T))}$$

d'où

$$(2.9.40) \quad \left| \left( \Pi_1^{\prime 0} B \right)_i - B_i^{\prime 0} \right| \leq c_q h |C'_i|^{-1/q} |B|_{W^{1,q}(C'_i, W^{2,p}(0,T))}.$$

Enfin, pour la troisième quantité de l'inégalité (2.9.38),

$$\begin{aligned} \nabla'_i \times \left( \Pi_1^{\diamond 1/2} \mathbf{E} - \mathbf{E}^{1/2} \right) &= \\ \frac{1}{|C'_i|} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} |A'_j| \left( \Pi_1^{\diamond 1/2} \mathbf{E} - \mathbf{E}^{\diamond 1/2} \right)_j \cdot \mathbf{t}'_{ij} &= \\ \frac{1}{|C'_i|} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \int_{A'_j} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t}'_{ij} dt - \mathbf{E}(X, 0) \cdot \mathbf{t}'_{ij} - \frac{\Delta t}{2} \partial_t \mathbf{E}(X, 0) \cdot \mathbf{t}'_{ij} \right] d\sigma &= \\ \frac{1}{|C'_i|} \int_{\partial C'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} [\mathbf{E}(X, t) - \mathbf{E}(X, 0) - t \partial_t \mathbf{E}(X, 0)] dt \cdot \mathbf{t}' d\sigma &= \\ \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} [\nabla \times \mathbf{E}(X, t) - \nabla \times \mathbf{E}(X, 0) - t \nabla \times \partial_t \mathbf{E}(X, 0)] dt dX &= \\ \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \left[ \int_0^t \partial_t \nabla \times \mathbf{E}(X, s) ds - t \partial_t \nabla \times \mathbf{E}(X, 0) \right] dt dX &= \\ \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_0^t [\partial_t \nabla \times \mathbf{E}(X, s) - \partial_t \nabla \times \mathbf{E}(X, 0)] ds dt dX &= \\ \frac{1}{|C'_i|} \int_{C'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_0^t \int_0^s \partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E}(X, \xi) d\xi ds dt dX & \end{aligned}$$

et comme pour presque tout  $X \in \overline{\Omega}$   $\partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E}(X, \cdot) \in W^{1,p}(0, T) \hookrightarrow C^{0,1-1/p}(0, T)$ , alors il existe une constante  $k_p$  telle que

$$\begin{aligned} \left| \nabla'_i \times \left( \Pi_1^{\circ 1/2} \mathbf{E} - \mathbf{E}^{1/2} \right) \right| &\leq \frac{k_p}{|C'_i|} \int_{C'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_0^t \int_0^s \left\| \partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E}(X, \cdot) \right\|_{W^{1,p}(0,T)} d\xi ds dt dX \\ &\leq k_p \frac{\Delta t^2}{|C'_i|} \int_{C'_i} \left\| \partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E}(X, \cdot) \right\|_{W^{1,p}(0,T)} dX \end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder

$$(2.9.41) \quad \left| \nabla'_i \times \left( \Pi_1^{\circ 1/2} \mathbf{E} - \mathbf{E}^{1/2} \right) \right| \leq k_p \frac{\Delta t^2}{|C'_i|^{1/q}} \left\| \partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E} \right\|_{L^q(C'_i, W^{1,p}(0,T))}.$$

Ainsi, d'après les inégalités (2.9.38), (2.9.39), (2.9.40) et (2.9.41) on a

$$\begin{aligned} \left| er'_i{}^1 \right| &\leq c_{p,q} \Delta t^{2-1/p} \left\| \partial_t^2 B \right\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} + k_q h |C'_i|^{-1/q} |B|_{W^{1,q}(C'_i, W^{2,p}(0,T))} \\ &\quad + k_p \Delta t^3 |C'_i|^{-1/q} \left\| \partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E} \right\|_{L^q(C'_i, W^{1,p}(0,T))} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N'} |C'_i| \left| er'_i{}^1 \right|^2 &\leq c_{p,q} \left( \Delta t^{4-2/p} \sum_{i=1}^{N'} |C'_i| \left\| \partial_t^2 B \right\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))}^2 \right. \\ &\quad \left. + h^2 \sum_{i=1}^{N'} |C'_i|^{1-2/q} |B|_{W^{1,q}(C'_i, W^{2,p}(0,T))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \Delta t^6 \sum_{i=1}^{N'} |C'_i|^{1-2/q} \left\| \partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E} \right\|_{L^q(C'_i, W^{1,p}(0,T))}^2 \right) \end{aligned}$$

et puisque  $q > 2$ , en appliquant l'inégalité de Hölder pour la deuxième et la troisième somme du membre de droite, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N'} |C'_i| \left| er'_i{}^1 \right|^2 &\leq c_{p,q} \left( \Delta t^{4-2/p} |\Omega| \left\| \partial_t^2 B \right\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))}^2 + h^2 |\Omega|^{1-2/q} |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \Delta t^6 |\Omega|^{1-2/q} \left\| \partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E} \right\|_{L^q(\Omega, W^{1,p}(0,T))}^2 \right). \end{aligned}$$

En procédant de la même manière pour les quantités duales, il existe une constante  $k_{p,q}$  telle que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N''} |C''_i| \left| er''_i{}^1 \right|^2 &\leq k_{p,q} \left( \Delta t^{4-2/p} |\Omega| \left\| \partial_t^2 B \right\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))}^2 + h^2 |\Omega|^{1-2/q} |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \Delta t^6 |\Omega|^{1-2/q} \left\| \partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E} \right\|_{L^q(\Omega, W^{1,p}(0,T))}^2 \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left\| er''' \right\|''^2 &\leq \frac{k_{p,q} + c_{p,q}}{2} \left( \Delta t^{4-2/p} |\Omega| \left\| \partial_t^2 B \right\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))}^2 + h^2 |\Omega|^{1-2/q} |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))}^2 \right. \\
&\quad \left. + \Delta t^6 |\Omega|^{1-2/q} \left\| \partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E} \right\|_{L^q(\Omega, W^{1,p}(0,T))}^2 \right) \\
&\leq \frac{k_{p,q} + c_{p,q}}{2} \left( \Delta t^{2-1/p} \sqrt{|\Omega|} \left\| \partial_t^2 B \right\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} + h |\Omega|^{\frac{1}{2}-1/q} |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right. \\
&\quad \left. + \Delta t^3 |\Omega|^{\frac{1}{2}-2} \left\| \partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E} \right\|_{L^q(\Omega, W^{1,p}(0,T))} \right)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante  $K_{q,p,\Omega}$ , telle que

$$\begin{aligned}
\left\| er''' \right\|'' &\leq K_{q,\Omega,p} \left( \Delta t^{2-1/p} \left\| \partial_t^2 B \right\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} + h |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right. \\
&\quad \left. + \Delta t^3 \left\| \partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E} \right\|_{L^q(\Omega, W^{1,p}(0,T))} \right).
\end{aligned}$$

□

PROPOSITION 2.9.28. *Soient  $B \in W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T))$ ,  $\mathbf{E} \in (W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T)))^2$ , avec  $q > p > 1$  et  $q > 2$ . Alors il existe une constante  $K_{q,p,\Omega}$ , telle que l'erreur numérique diamant est telle que :*

$$\left\| \mathbf{er}^{\diamond 1/2} \right\|_{\diamond} \leq k_{q,p,\Omega} \Delta t^2 \left\| \partial_t^2 \mathbf{E} \right\|_{(W^{1,q}(\Omega, W^{1,p}(0,T)))^2}.$$

DÉMONSTRATION. Par définition de l'erreur numérique diamant on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{er}_i^{\diamond 1/2} \cdot \mathbf{t}'_i &= \\
\left( \Pi_1^{\diamond 1/2} \mathbf{E} - \mathbf{E}^{\diamond 1/2} \right)_i \cdot \mathbf{t}'_i &= \\
\frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathbf{E}(X, t) \cdot \mathbf{t}'_i dt - \mathbf{E}(X, 0) \cdot \mathbf{t}'_i - \frac{\Delta t}{2} \partial_t \mathbf{E}(X, 0) \cdot \mathbf{t}'_i \right] d\sigma &= \\
\frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} [\mathbf{E}(X, t) - \mathbf{E}(X, 0) - t \partial_t \mathbf{E}(X, 0)] dt \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma &= \\
\frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \left[ \int_0^t \partial_t \mathbf{E}(X, s) ds - t \partial_t \mathbf{E}(X, 0) \right] dt \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma &= \\
\frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_0^t [\partial_t \mathbf{E}(X, s) - \partial_t \mathbf{E}(X, 0)] ds dt \cdot \mathbf{t}'_i d\sigma &= \\
\frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_0^t \int_0^s \partial_t^2 \mathbf{E}(X, \xi) \cdot \mathbf{t}'_i d\xi ds dt d\sigma &=
\end{aligned}$$

ainsi

$$\left| \mathbf{er}_i^{\diamond 1/2} \cdot \mathbf{t}'_i \right| \leq \frac{1}{|A'_i|} \int_{A'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_0^t \int_0^s |\partial_t^2 \mathbf{E}(X, \xi) \cdot \mathbf{t}'_i| \, d\xi \, ds \, dt \, d\sigma$$

et comme  $\forall X \in \Omega \, \partial_t^2 \mathbf{E}(X, \cdot) \in W^{1,p}([0, T]) \hookrightarrow C^{0,1-1/p}([0, T])$ , alors il existe une constante  $k_p$  telle que

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{er}_i^{\diamond 1/2} \cdot \mathbf{t}'_i \right| &\leq \frac{k_p}{|A'_i|} \int_{A'_i} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_0^t \int_0^s \left\| \partial_t^2 \mathbf{E}(X, \cdot) \cdot \mathbf{t}'_i \right\|_{W^{1,p}(0,T)} \, d\xi \, ds \, dt \, d\sigma \\ &\leq \frac{k_p \Delta t^2}{|A'_i|} \int_{A'_i} \left\| \partial_t^2 \mathbf{E}(X, \cdot) \cdot \mathbf{t}'_i \right\|_{W^{1,p}(0,T)} \, d\sigma \end{aligned}$$

et comme  $\partial_t^2 \mathbf{E} \in W^{1,q}(\Omega, W^{1,p}(0, T)) \hookrightarrow C^{0,1-1/q}(\bar{\Omega}, W^{1,p}(0, T))$ , alors il existe une constante  $k_q$  telle que

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{er}_i^{\diamond 1/2} \cdot \mathbf{t}'_i \right| &\leq \frac{k_q k_p \Delta t^2}{|A'_i|} \int_{A'_i} \left\| \partial_t^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i \right\|_{W^{1,q}(\Omega, W^{1,p}(0,T))} \, d\sigma \\ &\leq k_{qp} \Delta t^2 \left\| \partial_t^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}'_i \right\|_{W^{1,q}(\Omega, W^{1,p}(0,T))}. \end{aligned}$$

En procédant de la même manière, on montre aussi

$$\left| \mathbf{er}_i^{\diamond 1/2} \cdot \mathbf{t}''_i \right| \leq k_{qp} \Delta t^2 \left\| \partial_t^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}''_i \right\|_{W^{1,q}(\Omega, W^{1,p}(0,T))}.$$

ainsi

$$\left\| \mathbf{er}_i^{\diamond 1/2} \right\| \leq k_{qp} \Delta t^2 \left\| \partial_t^2 \mathbf{E} \right\|_{W^{1,q}(\Omega, W^{1,p}(0,T))}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{er}^{\diamond 1/2} \right\| &= \sum_{i=1}^{N^\diamond} |C_i^\diamond| \left\| \mathbf{er}_i^{\diamond 1/2} \right\|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{N^\diamond} |C_i^\diamond| k_{qp} \Delta t^2 \left\| \partial_t^2 \mathbf{E} \right\|_{W^{1,q}(\Omega, W^{1,p}(0,T))} \\ &\leq |\Omega| k_{qp} \Delta t^2 \left\| \partial_t^2 \mathbf{E} \right\|_{W^{1,q}(\Omega, W^{1,p}(0,T))}. \end{aligned}$$

□

**THÉORÈME 2.9.29.** *On suppose que les hypothèses 2, 3, 4 et 5 page 22 sont satisfaites et que le pas de temps vérifie la condition CFL (2.6.14).*

*Si les champs électromagnétiques exacts sont tels que  $B \in W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T))$  et  $\mathbf{E} \in (W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T)))^2$ , avec  $p > 1$  et  $q > 2$ , alors le schéma est convergent à l'ordre*

$2 - \frac{1}{p}$  en temps et à l'ordre  $1 - \frac{2}{q}$  en espace.

De plus, si toutes les cellules diamants sont convexes, alors la convergence en espace est d'ordre 1.

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 2.9.10 on a :

$$\|er^N\| \leq K \left( \|er^1\| + \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \|r^n\| \right).$$

Par définition

$$\|er^1\| = \sqrt{\|er'''^1\|_{\diamond}^2 + \|\mathbf{er}^{\diamond 1/2}\|_{\diamond}^2} \leq \|er'''^1\|_{\diamond} + \|\mathbf{er}^{\diamond 1/2}\|_{\diamond}$$

et en utilisant les propositions 2.9.27 page 104 et 2.9.28 page 108 on obtient

$$\begin{aligned} \|er^1\| &\leq c_{q,p,\Omega} \left( \Delta t^{2-1/p} \|\partial_t^2 B\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} + h |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right. \\ &\quad \left. + \Delta t^3 \|\partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E}\|_{L^q(\Omega, W^{1,p}(0,T))} + \Delta t^2 \|\partial_t^2 \mathbf{E}\|_{(W^{1,q}(\Omega, W^{1,p}(0,T)))^2} \right). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\|r^n\| = \sqrt{\|r'''^n\|_{\diamond}^2 + \|\mathbf{r}^{\diamond n}\|_{\diamond}^2} \leq \|r'''^n\|_{\diamond} + \|\mathbf{r}^{\diamond n}\|_{\diamond}$$

et en utilisant les propositions 2.9.23 page 86 et 2.9.26 page 96 on a

$$\begin{aligned} \|r^n\| &\leq c_{T,q,p,\Omega} \left( \Delta t^{2-\frac{1}{p}} \left( \|\partial_t^3 B\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(]0,T[))} + \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} \right) \right. \\ &\quad \left. + h |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} + h^{1-\frac{2}{q}} |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right). \end{aligned}$$

Si, de plus, toutes les mailles diamants sont convexes, on a

$$\begin{aligned} \|r^n\| &\leq c_{T,q,p,\Omega} \left( \Delta t^{2-\frac{1}{p}} \left( \|\partial_t^3 B\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(]0,T[))} + \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} \right) \right. \\ &\quad \left. + h |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} + h |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right). \end{aligned}$$

D'où il existe une constante  $K_{T,q,p,\Omega}$  telle que

$$\begin{aligned} \|er^N\| &\leq K_{T,q,p,\Omega} \left( \Delta t^{2-\frac{1}{p}} \left( \|\partial_t^2 B\|_{W^{1,q}(\Omega, W^{1,p}(]0,T[))} + \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} \right) \right. \\ &\quad \left. + \Delta t^3 \|\partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E}\|_{L^q(\Omega, W^{1,p}(0,T))} + \Delta t^2 \|\partial_t^2 \mathbf{E}\|_{(W^{1,q}(\Omega, W^{1,p}(0,T)))^2} \right. \\ &\quad \left. + h |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} + h^{1-\frac{2}{q}} |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right). \end{aligned}$$

Et si toutes les mailles diamants sont convexes on a

$$\begin{aligned} \|er^N\| &\leq K_{T,q,p,\Omega} \left( \Delta t^{2-\frac{1}{p}} \left( \|\partial_t^2 B\|_{W^{1,q}(\Omega, W^{1,p}([0,T])} + \|\partial_t^3 \mathbf{E}\|_{W^{1,q}(\Omega, L^p(0,T))} \right) \right. \\ &\quad + \Delta t^3 \|\partial_t^2 \nabla \times \mathbf{E}\|_{L^q(\Omega, W^{1,p}(0,T))} + \Delta t^2 \|\partial_t^2 \mathbf{E}\|_{(W^{1,q}(\Omega, W^{1,p}(0,T)))^2} \\ &\quad \left. + h \left( |B|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} + |\mathbf{E}|_{W^{1,q}(\Omega, W^{2,p}(0,T))} \right) \right), \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

## 2.10. Résultats numériques

REMARQUE 2.10.1. *Pour tous les tests numériques, on a choisi les centres de gravité des mailles primales comme centres  $c'_i$ .*

### 2.10.1. Etude de convergence avec des champs réguliers

. Soit  $\Omega = [-1, 1]^2$ . Dans le cas où les densités de charge  $\rho$  et du courant  $J$  sont nulles et avec des conditions de bord métalliques, une solution exacte du système de Maxwell en mode TE est donnée par :

$$\begin{cases} B &= \cos(\pi m x) \cos(\pi m y) \cos(\omega t) \\ \mathbf{E}_x &= -\frac{c}{\sqrt{2}} \cos(\pi m x) \sin(\pi m y) \sin(\omega t), \\ \mathbf{E}_y &= \frac{c}{\sqrt{2}} \sin(\pi m x) \cos(\pi m y) \sin(\omega t) \end{cases}$$

où,  $m$  est un entier quelconque vérifiant  $\omega = \pi\sqrt{2} m c$ .

On note par  $P$  la période  $\left(P = \frac{2\pi}{\omega}\right)$ , par  $e(B)$  l'erreur relative en norme  $L^2$  sur la dixième période du champ magnétique et donnée par :

$$(2.10.1) \quad e(B) := \sqrt{\frac{\sum_{9P \leq n \Delta t \leq 10P} \|er'''n\|_{'''}^2}{\sum_{9P \leq n \Delta t \leq 10P} \|\Pi'''n B\|_{'''}^2}};$$

de même, on note par  $e(\mathbf{E})$  l'erreur relative en norme  $L^2$  sur la dixième période du champ électrique et donnée par :

$$(2.10.2) \quad e(\mathbf{E}) := \sqrt{\frac{\sum_{9P \leq (n-1/2) \Delta t \leq 10P} \|\mathbf{er}^{\diamond n-1/2}\|_{\diamond}^2}{\sum_{9P \leq (n-1/2) \Delta t \leq 10P} \|\Pi^{\diamond n-1/2} \mathbf{E}\|_{\diamond}^2}}.$$

Pour  $m = n = 1$ , on a étudié, sur différents types de maillages, l'évolution de  $e(B)$  et  $e(\mathbf{E})$  en fonction du pas d'espace  $h$ .

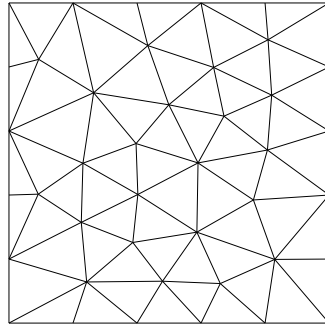


FIGURE 2.10.1. Maillage de triangles

Pour une famille de maillages de triangles, comme celui représenté sur la figure 2.10.1, on trace sur la figure 2.10.2 la courbe, en échelle logarithmique, de l'erreur relative sur la dixième période du champ magnétique (à gauche) et du champ électrique (à droite) en fonction du pas d'espace.

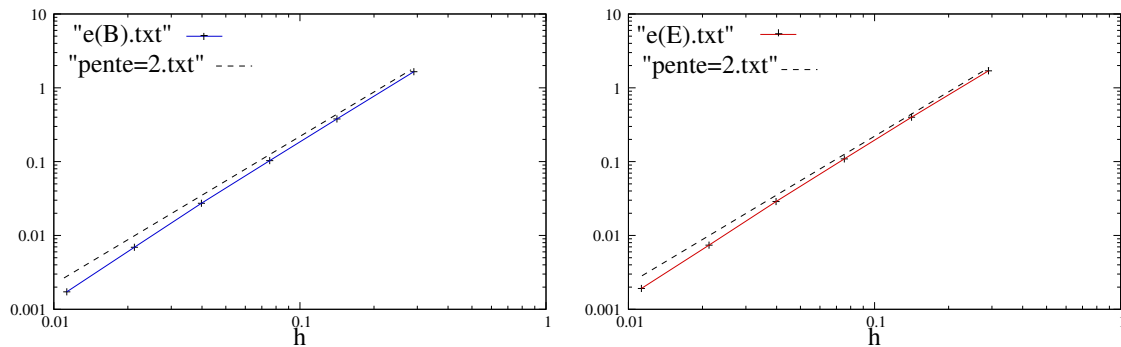


FIGURE 2.10.2. Convergence avec des maillages de triangles

De même, on trace sur la figure 2.10.4, les courbes d'erreur obtenues, en échelle logarithmique, pour une famille de maillages de quadrangles, comme celui de la figure 2.10.3.

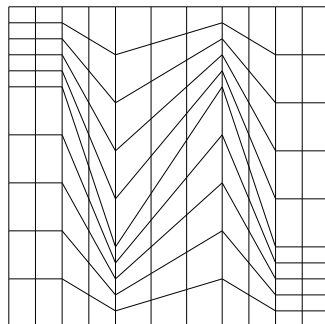


FIGURE 2.10.3. Maillage déformé de quadrangles

Ces résultats montrent que l'on a pratiquement de l'ordre deux global pour ces deux familles de maillages, ceci malgré le fait que certaines mailles diamants correspondants aux maillages de quadrangles sont non convexes.



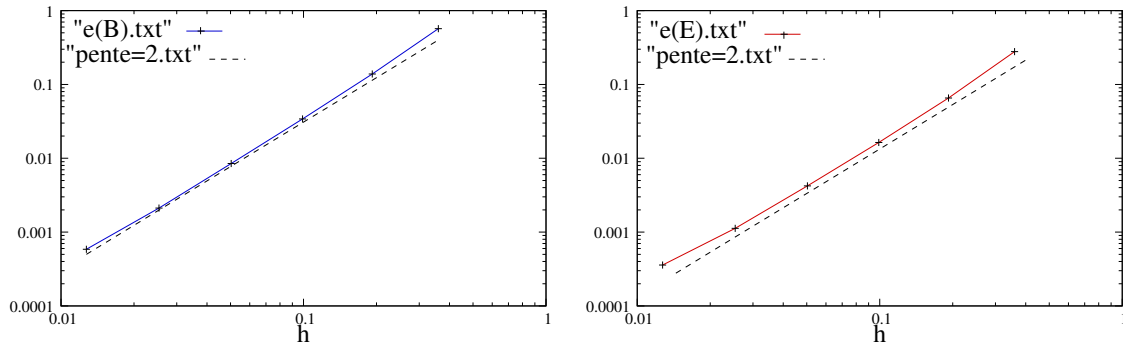


FIGURE 2.10.4. Convergence avec des maillages déformés de quadrangles

Pour des maillages très aplatis, comme celui de la figure 2.10.5, on trace sur la figure 2.10.6, les courbes d'erreurs obtenues, en échelle logarithmique.

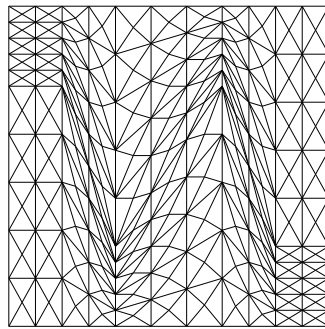


FIGURE 2.10.5. Maillage de triangles aplatis

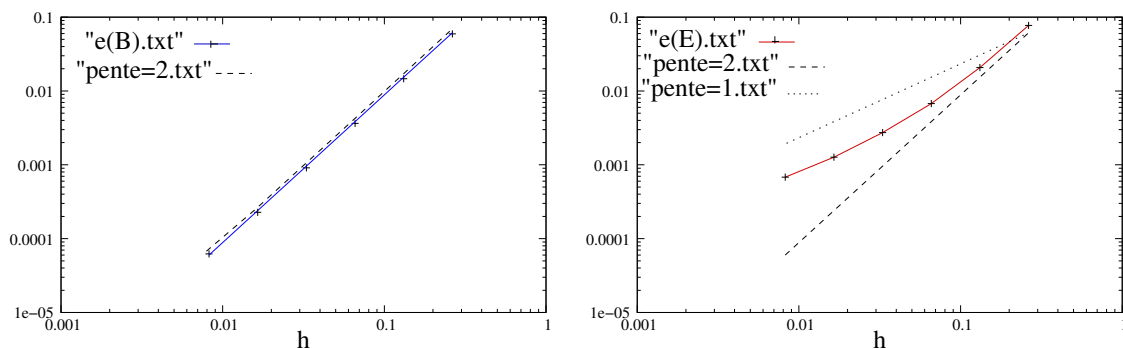


FIGURE 2.10.6. Convergence avec des maillages de triangles aplatis

Pour ce type de maillages, on observe une convergence globale d'ordre deux pour le champ magnétique et d'ordre un pour le champ électrique.

Enfin, on étudie la convergence sur une famille de maillages que l'on appelle *maillages homothétiquement raffinés* comme celui représenté à droite de la figure 2.10.7. Ces maillages sont construits à partir d'un maillage grossier (maillage gauche de la figure 2.10.7) que l'on raffine, à chaque fois, en divisant chaque triangle en quatre en joignant les milieux de ses

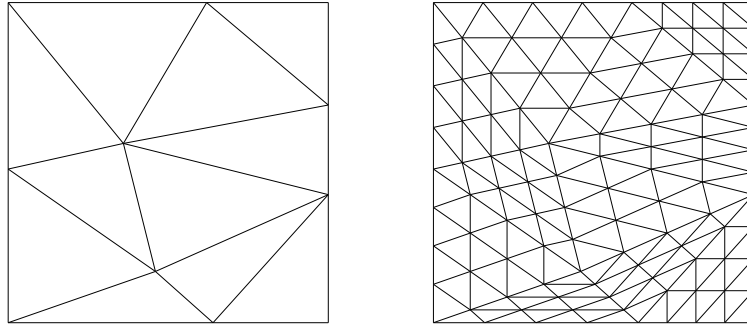


FIGURE 2.10.7. Maillage homothétiquement raffiné

arêtes. Sur la figure 2.10.8, on trace alors les erreurs obtenues, en échelle logarithmique, en utilisant ce type de maillages.

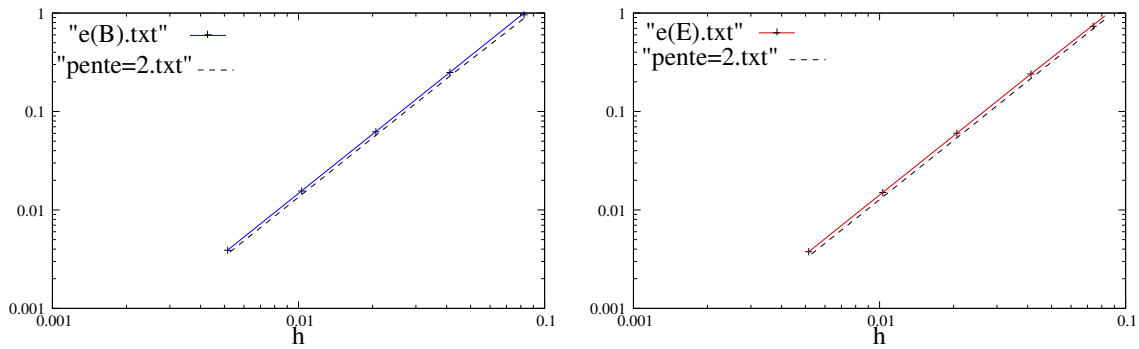


FIGURE 2.10.8. Convergence avec des maillages homothétiquement raffinés

Ainsi, on observe que la convergence globale est exactement d'ordre deux. En effet, cette famille de maillages est caractérisée par le fait que les sommets primaux correspondent aux centres de gravité des mailles duales et les cellules diamants sont des parallélogrammes (tout au moins en dehors des interfaces entre les cellules du maillage grossier), d'où la superconvergence.

### 2.10.2. Etude de convergence avec des champs variant très rapidement et sur des maillages non conformes

. On se place dans le domaine  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , on choisit une densité de charge  $\rho$  nulle et une densité du courant  $J$  donnée par

$$\begin{cases} J_x = \frac{2c\epsilon_0 r_0^2}{(r_0^2 - r^2)^2} \left( \omega + 4c^2 \frac{2r^6 + 4r_0^2 r^4 - 7r_0^4 r^2 + 2r_0^6}{\omega(r_0^2 - r^2)^4} \right) \exp\left[\frac{-r^2}{r_0^2 - r^2}\right] \chi(r) y \cos(\omega t) \\ J_y = -\frac{2c\epsilon_0 r_0^2}{(r_0^2 - r^2)^2} \left( \omega + 4c^2 \frac{2r^6 + 4r_0^2 r^4 - 7r_0^4 r^2 + 2r_0^6}{\omega(r_0^2 - r^2)^4} \right) \exp\left[\frac{-r^2}{r_0^2 - r^2}\right] \chi(r) x \cos(\omega t) \end{cases}$$

où  $\omega = c\pi\sqrt{2}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $r_0 = 0.25$  et  $\chi$  est la fonction définie par

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r < r_0 \\ 0 & \text{si } r \geq r_0 \end{cases}.$$

On suppose que les conditions de bord sont métalliques et que les conditions initiales sont données par :

$$\begin{cases} B(0) = \cos(\pi m x) \cos(\pi m y) + \frac{4 c r_0^2 (r_0^4 - r^2 r_0^2 - r^4)}{\omega (r_0^2 - r^2)^4} \chi(r) \exp\left[\frac{-r^2}{r_0^2 - r^2}\right], \\ \mathbf{E}(0) = 0 \end{cases},$$

où  $m = 1$ . Dans ces conditions, la solution exacte du système de Maxwell est donnée

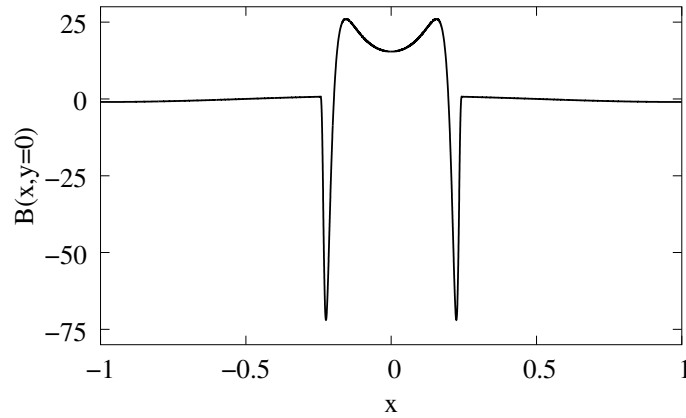


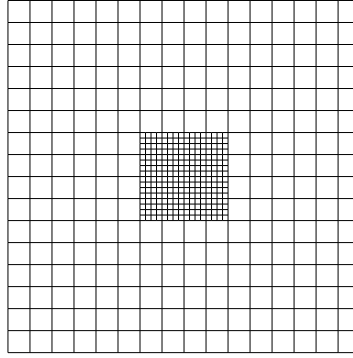
FIGURE 2.10.9. Coupe du champ magnétique initial selon  $y=0$

par :

$$\begin{cases} B = \left[ \cos(\pi m x) \cos(\pi m y) + \frac{4 c r_0^2 (r_0^4 - r^2 r_0^2 - r^4)}{\omega (r_0^2 - r^2)^4} \chi(r) \exp\left[\frac{-r^2}{r_0^2 - r^2}\right] \right] \cos(\omega t) \\ \mathbf{E}_x = - \left[ \frac{c}{\sqrt{2}} \cos(\pi m x) \sin(\pi m y) + \frac{2 c r_0^2}{(r_0^2 - r^2)^2} \chi(r) \exp\left[\frac{-r^2}{r_0^2 - r^2}\right] y \right] \sin(\omega t) \\ \mathbf{E}_y = \left[ \frac{c}{\sqrt{2}} \sin(\pi m x) \cos(\pi m y) + \frac{2 c r_0^2}{(r_0^2 - r^2)^2} \chi(r) \exp\left[\frac{-r^2}{r_0^2 - r^2}\right] x \right] \sin(\omega t) \end{cases}.$$

Ces fonctions présentent un pic important sur le sous domaine  $\Omega_0 = [-0.25, 0.25] \times [-0.25, 0.25]$ . La figure 2.10.9 est une coupe selon  $y = 0$  de la courbe du champ magnétique initial.

Ainsi, on a intérêt à utiliser des maillages raffinés au centre tel que par exemple celui représenté sur la figure 2.10.10, où  $A$  denote la longueur des arêtes situées dans  $\Omega \setminus \Omega_0$  et  $A_0$  la longueur des arêtes situées dans  $\Omega_0$ .

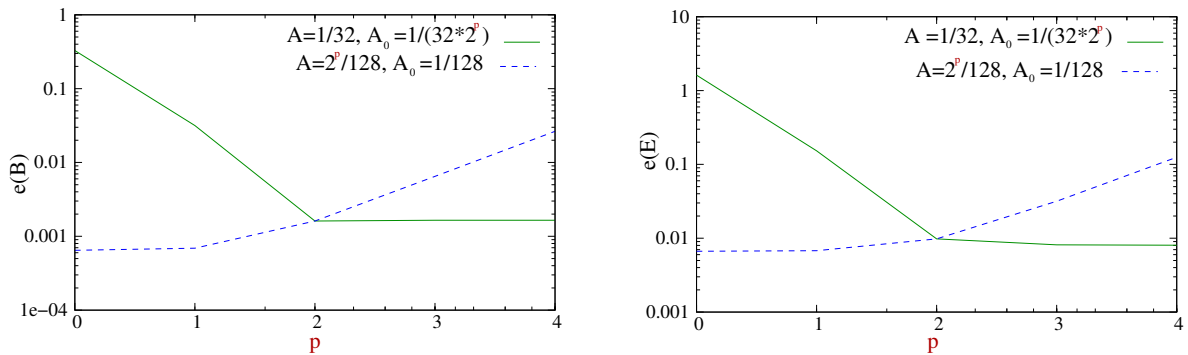
FIGURE 2.10.10. Maillage raffiné au centre ( $A = \frac{1}{8}$ ,  $A_0 = \frac{1}{32}$ )

Pour déterminer le meilleur rapport de raffinement à utiliser, on procède de la façon suivante :

On se donne un maillage uniforme de  $\Omega$  tel que la longueur de ses arêtes soit  $A = A_0 = \frac{1}{128}$  ; on fixe le maillage de  $\Omega_0$ , c'est à dire que l'on fixe  $A_0$ , et on représente sur les courbes en pointillé de la figure 2.10.11 l'évolution de  $e(B)$  (à gauche) et de  $e(\mathbf{E})$  (à droite) au fur et à mesure que l'on déraffine le maillage de  $\Omega \setminus \Omega_0$  : on fait varier  $A = \frac{2^p}{128}$  avec  $p \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

On rappelle que les définitions de  $e(B)$  et  $e(\mathbf{E})$  sont donnés par les formules (2.10.1) et (2.10.2).

D'autre part, on se donne un maillage uniforme de  $\Omega$  tel que la longueur de ses arêtes soit  $A = A_0 = \frac{1}{32}$  ; on fixe le maillage de  $\Omega \setminus \Omega_0$ , c'est à dire que l'on fixe  $A$ , et on représente sur les courbes en traits continus de la figure 2.10.11 l'évolution de  $e(B)$  (à gauche) et de  $e(\mathbf{E})$  (à droite) au fur et à mesure que l'on raffine le maillage de  $\Omega_0$  : on fait varier  $A_0 = \frac{1}{32 \times 2^p}$  avec  $p \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

FIGURE 2.10.11. Norme  $L^2$  de l'erreur des champs en fonction de  $p$ 

En observant la figure 2.10.11 on constate que le meilleur rapport de raffinement pour ce type de maillage est quatre.

Ainsi, on a choisi de faire l'étude de convergence pour ce type de maillage avec ce rapport de raffinement.

La figure 2.10.12 représente alors l'évolution de  $e(B)$  (à gauche) et de  $e(\mathbf{E})$  (à droite) au fur et à mesure que  $A$  et  $A_0$  tendent vers 0 tout en gardant bien sûr ( $A/A_0 = 4$ ).

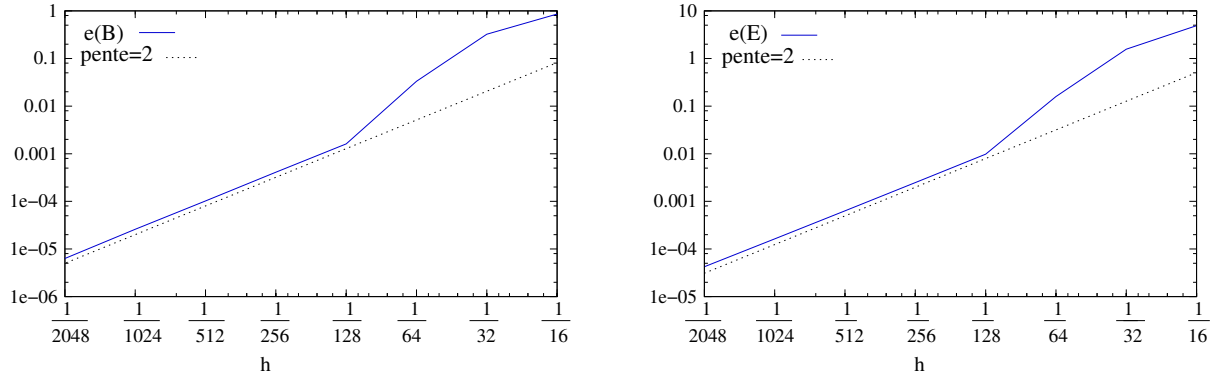


FIGURE 2.10.12. Convergence en norme  $L^2$  de  $B$  et  $\mathbf{E}$

On constate alors une convergence globale d'ordre 2.

### 2.10.3. Etude des réflexions parasites

. On se place dans le domaine  $\Omega = [-1, 1]^2$ . On choisit des densités de charge et de courant nuls, ainsi que les champs initiaux. Les conditions de bord sont données par

$$a \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} + b B = \Upsilon,$$

avec

$$\begin{cases} a = 1, b = 0 \text{ et } \Upsilon = 0 & , \text{ sur } [-1, 1] \times \{-1, 1\} \\ a = 1, b = -c \text{ et } \Upsilon = 2 \sin(\omega t + \frac{\omega}{c}) & , \text{ sur } \{-1\} \times [-1, 1] \\ a = 1, b = -c \text{ et } \Upsilon = 0 & , \text{ sur } \{1\} \times [-1, 1] \end{cases}.$$

Ces conditions décrivent, tel que cela est schématisé sur la figure 2.10.13, une onde entrante à gauche du domaine et une sortie absorbante à droite, avec des conditions de bord métalliques en haut et en bas.

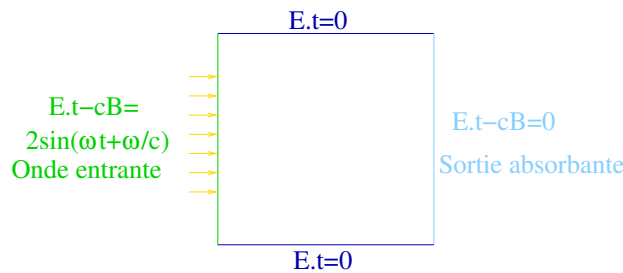


FIGURE 2.10.13. Onde entrante avec sortie absorbante

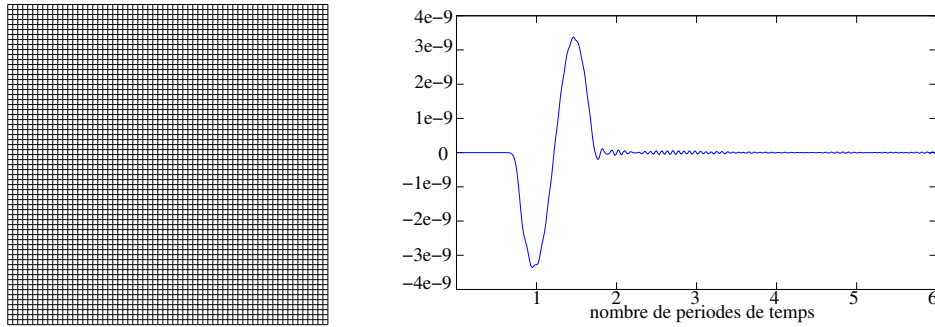
Dans ces conditions, la solution exacte du système de Maxwell en mode TE est donnée par

$$\begin{cases} B &= \frac{1}{c} \sin\left(\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right) \\ \mathbf{E}_x &= 0 \\ \mathbf{E}_y &= \sin\left(\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right) \end{cases},$$

où  $\omega = c\pi\sqrt{2}$ .

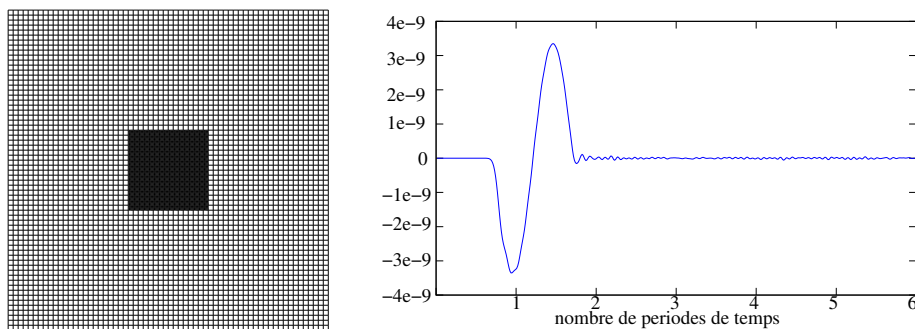
Pour apercevoir les reflexions parasites, on laisse passer l'onde uniquement pendant une période, c'est à dire que sur  $\{-1\} \times [-1, 1]$ , on prend plutôt  $\Upsilon = 2 \sin\left(\omega t + \frac{\omega}{c}\right) \mathbf{1}_{t \leq P}$ , avec  $P = \frac{2\pi}{\omega}$  est la période. Ainsi, on observe la propagation de l'onde au cours du temps avec des maillages conformes et non-conformes.

Pour un maillage cartésien, on présente sur la figure 2.10.3, le champ magnétique en un sommet du maillage en fonction du temps.



Champ magnétique en un sommet du maillage conforme

On raffine le maillage au centre et on refait le même test et on représente sur la figure 2.10.3, le champ magnétique au même sommet du maillage que celui de la figure 2.10.3, en fonction du temps.



Champ magnétique en un sommet du maillage non conforme

Ce test a été fait avec des maillages avec différents rapports de raffinement et le champ a été calculé en différents points, et on a obtenu des résultats similaires.

De là, on peut déduire que la non-conformité du maillage n'amplifie pas les reflexions parasites.

### Remarque

Dans ce chapitre, on a proposé et analysé un nouveau schéma de volumes finis pour approcher le système de Maxwell sur des maillages quelconques en deux dimensions d'espace, et on a montré qu'il vérifie plusieurs propriétés avantageuses.

Cette étude a été faite avec le système de Maxwell en mode TE, et évidemment, elle est aussi valide pour le système en mode TM en le discrétisant de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{B}^{\diamond n+1} - \mathbf{B}^{\diamond n}}{\Delta t} + \nabla^{\diamond} \times E^{\Gamma n+1/2} = 0 \\ \frac{E'^{n+3/2} - E'^{n+1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla' \times \mathbf{B}^{\diamond n+1} = -\frac{J'^{n+1}}{\epsilon_0} \\ \frac{E''^{n+3/2} - E''^{n+1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla'' \times \mathbf{B}^{\diamond \Gamma n+1} = -\frac{J''^{n+1}}{\epsilon_0} \end{array} \right. ,$$

où,  $\mathbf{B}^{\diamond n}$  et  $\mathbf{B}^{\Gamma n}$  sont des approximations à l'instant  $t^n$  de  $(\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y)$  sur le maillage diamant et sur les parties des frontières des mailles duales situées sur le bord ;  $E'^{n+1/2}$ ,  $E''^{n+1/2}$  et  $E^{\Gamma n+1/2}$  sont des approximations à l'instant  $t^{n+1/2}$  de la composante  $\mathbf{E}_z$  du champ électrique sur les maillages primal et dual et les milieux des arêtes situées sur la frontière ; enfin,  $J'^{n+1}$  et  $J''^{n+1}$  sont des approximations, à l'instant  $t^{n+1}$ , de  $\mathbf{J}_z$  sur les maillages primal et dual.

De plus, l'équivalent discret de la loi de conservation du flux du champ magnétique devient un résultat immédiat (à condition qu'elle soit vérifiée par les conditions initiales), grâce aux propriétés (1.8.5) et (1.8.6) vérifiées par les opérateurs discrets.





## CHAPITRE 3

### Couplage avec l'équation de Vlasov

#### 3.1. Introduction

L'équation de Vlasov décrit la dynamique de particules chargées, placées dans un champ électromagnétique, en négligeant l'effet des collisions binaires sur leurs trajectoires. On considère une seule espèce de particules, de masse  $m$  et de charge élémentaire  $q$  ; ainsi, l'équation de Vlasov, non collisionnelle, non relativiste, s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{V}} f = 0,$$

où,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  sont les champs magnétique et électrique ;  $t$  est la variable temporelle ;  $\mathbf{X} = (x, y, z)$  est la position ;  $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_x, \mathbf{V}_y, \mathbf{V}_z)$  est la vitesse et  $f = f(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t)$  est la fonction de distribution des particules, et c'est l'inconnue de l'équation. Cette fonction représente la densité de particules, qui à l'instant  $t$  et au point  $\mathbf{X}$ , ont une vitesse  $\mathbf{V}$  ; en d'autre termes, le nombre de particules qui se trouvent, à l'instant  $t$ , dans le volume  $[\mathbf{X}, \mathbf{X} + d\mathbf{X}] \times [\mathbf{V}, \mathbf{V} + d\mathbf{V}]$  est

$$dN = f(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) d\mathbf{X} d\mathbf{V}.$$

Ainsi, à partir de cette fonction, on définit les densités de charge et de courant par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{X}, t) &= q \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) d\mathbf{V} \\ \mathbf{J}(\mathbf{X}, t) &= q \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{V} f(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) d\mathbf{V} \end{cases}.$$

#### 3.2. Couplage avec les équations de Maxwell

Pour résoudre l'équation de Vlasov, il est nécessaire de fournir les champs magnétique et électrique, qui sont calculés grâce au système de Maxwell (2.1.1). Et pour résoudre ce système, il est nécessaire de connaître la densité de courant, qui est calculée à partir de la fonction de distribution, solution de l'équation de Vlasov.

Lors du couplage avec notre méthode de volumes finis résolvant le système de Maxwell, on suppose que les champs ne dépendent pas de  $z$ , ce qui permet de découpler le système de Maxwell en deux sous systèmes, l'un en mode TM et l'autre en mode TE, tel que cela a été précisé dans le chapitre précédent. On rappelle que le système en mode TE discret

s'écrit

$$(3.2.1) \quad \begin{cases} \frac{B^{n+1} - B^n}{\Delta t} + \nabla' \times \mathbf{E}^{\diamond n+1/2} & = 0 \\ \frac{B''^{n+1} - B''^n}{\Delta t} + \nabla'' \times \mathbf{E}^{\Gamma n+1/2} & = 0 \\ \frac{\mathbf{E}^{\diamond n+3/2} - \mathbf{E}^{\diamond n+1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla^\diamond \times B''^{\Gamma n+1} & = -\frac{\mathbf{J}^{\diamond n+1}}{\epsilon_0} \end{cases},$$

où,  $B^n$ ,  $B''^n$  et  $B^{\Gamma n}$  sont des approximations à l'instant  $t^n$  de la composante  $\mathbf{B}_z$  du champ magnétique sur les maillages primal et dual et les milieux des arêtes situées sur la frontière;  $\mathbf{E}^{\diamond n+1/2}$  et  $\mathbf{E}^{\Gamma n+1/2}$  sont des approximations à l'instant  $t^{n+1/2}$  de  $(\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y)$  sur le maillage diamant et sur les parties des frontières des mailles duales situées sur le bord;  $\mathbf{J}^{\diamond n+1}$  est une approximation, à l'instant  $t^{n+1}$ , de  $(\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_y)$  sur le maillage diamant.

Le système de Maxwell en mode TM discret s'écrit

$$(3.2.2) \quad \begin{cases} \frac{\mathbf{B}^{\diamond n+1} - \mathbf{B}^{\diamond n}}{\Delta t} + \nabla^\diamond \times E''^{\Gamma n+1/2} = & 0 \\ \frac{E'^{n+3/2} - E'^{n+1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla' \times \mathbf{B}^{\diamond n+1} & = -\frac{J'^{n+1}}{\epsilon_0}, \\ \frac{E''^{n+3/2} - E''^{n+1/2}}{\Delta t} - c^2 \nabla'' \times \mathbf{B}^{\Gamma n+1} & = -\frac{J''^{n+1}}{\epsilon_0} \end{cases},$$

où,  $\mathbf{B}^{\diamond n}$  et  $\mathbf{B}^{\Gamma n}$  sont des approximations à l'instant  $t^n$  de  $(\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y)$  sur le maillage diamant et sur les parties des frontières des mailles duales situées sur le bord;  $E'^{n+1/2}$ ,  $E''^{n+1/2}$  et  $E^{\Gamma n+1/2}$  sont des approximations à l'instant  $t^{n+1/2}$  de la composante  $\mathbf{E}_z$  du champ électrique sur les maillages primal et dual et les milieux des arêtes situées sur la frontière; enfin,  $J'^{n+1}$  et  $J''^{n+1}$  sont des approximations, à l'instant  $t^{n+1}$ , de  $\mathbf{J}_z$  sur les maillages primal et dual.

$\mathbf{J}^{\diamond n+1}$ ,  $J'^{n+1}$  et  $J''^{n+1}$  sont des données pour les systèmes de Maxwell et on les détermine à partir de la fonction de distribution. Ceci sera l'objet d'un paragraphe ci-dessous.

### 3.3. approximation particulière de l'équation de Vlasov

Pour résoudre numériquement l'équation de Vlasov, on a choisi la méthode PIC (Particle In Cell). Bien qu'elle ne soit pas très précise, en raison du bruit numérique, cette méthode permet d'obtenir des résultats physiquement représentatifs pour un coût numérique modéré. La méthode PIC consiste à approcher la densité de particules à l'aide d'un nombre fini  $\aleph$  de macro-particules de poids numériques  $w_k$ , de positions  $\mathbf{X}_k(t)$  et de vitesses  $\mathbf{V}_k(t)$ , où  $k \in \{1 \cdots \aleph\}$ . Pour cela, on remplace, à chaque instant  $t$ , la fonction de distribution

par une combinaison linéaire de fonctions de Dirac dans l'espace des phases. On obtient, alors, l'approximation de la fonction de distribution, que l'on note  $f_N$

$$f_N(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) = \sum_{k=1}^N w_k \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k(t)) \delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}_k(t)).$$

Les densités de charge et de courant sont alors approchées par

$$\begin{cases} \rho_N(\mathbf{X}, t) &= q \int_{\mathbb{R}^3} f_N(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) d\mathbf{V} = q \sum_{k=1}^N w_k \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k(t)) \\ \mathbf{J}_N(\mathbf{X}, t) &= q \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{V} f_N(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) d\mathbf{V} = q \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{V}_k(t) \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k(t)) \end{cases},$$

où,  $\mathbf{X}_k$  et  $\mathbf{V}_k$  sont les caractéristiques de l'équation de Vlasov, dont l'évolution est régie par

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{V}_k(t)}{dt} &= \frac{q}{m} (\mathbf{E}(\mathbf{X}_k(t), t) + \mathbf{V}_k(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{X}_k(t), t)) \\ \frac{d\mathbf{X}_k(t)}{dt} &= \mathbf{V}_k(t) \end{cases}.$$

La résolution numérique de l'équation de Vlasov-Maxwell par la méthode PIC se fait selon les étapes suivantes :

- On commence par l'initialisation des particules.
- Ensuite à chaque pas de temps on fait les opérations suivantes :
  - (1) Interpolation des champs aux positions des particules.
  - (2) Calcul des nouvelles vitesses et positions des particules.
  - (3) Calcul de la densité de courant générée.
  - (4) Calcul des champs électromagnétiques.

Ces étapes seront traitées en détail dans les sections qui suivent.

### 3.4. Initialisation des particules

Etant donnée une distribution initiale  $f^0 = f(\mathbf{X}, \mathbf{V}, 0)$  de particules, on doit définir les positions et vitesses initiales des  $N$  macro-particules et leurs poids numériques. Pour cela, plusieurs méthodes se présentent :

- (1) Méthode déterministe : Elle consiste à mailler l'espace des phases, à placer les particules aux barycentres des mailles, et à associer à chacune un poids  $w_k$  correspondant à l'intégrale de  $f^0$  sur la maille correspondante. Cette initialisation nécessite un grand nombre de particules pour une approximation peu représentative (voir [4]).

- (2) Tirage aléatoire des particules suivant leur loi avec des poids numériques identiques : cette méthode est plus acceptable, mais le bruit numérique est aussi important.
- (3) Quiet-Start : Cette méthode est meilleure que les deux précédentes et c'est celle que l'on adopte. On va expliquer le principe de la méthode sur deux exemples de fonctions de distribution, que l'on va utiliser plus loin pour les simulations numériques.

**3.4.1. Premier exemple.** On se donne une distribution initiale de particules réparties de façon uniforme sur un domaine  $D := [-1, 1]^2$  selon une maxwellienne (ou Gaussienne) en vitesse. Cette distribution s'écrit pour tout  $\mathbf{X} \in D$  et tout  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$

$$(3.4.1) \quad f^0(\mathbf{X}, \mathbf{V}) = \frac{n_0}{\pi \sqrt{\pi} V_{th}^3} \exp\left(-\frac{|\mathbf{V}|^2}{V_{th}^2}\right),$$

avec,  $|\mathbf{V}|^2 = \mathbf{V}_x^2 + \mathbf{V}_y^2 + \mathbf{V}_z^2$  et  $V_{th}$  est la vitesse thermique.

On calcule les coordonnées initiales des particules par une méthode Quasi-Monte Carlo. On rappelle que contrairement aux méthodes Monte Carlo, où l'échantillonnage se fait de manière aléatoire, les méthodes Quasi-Monte Carlo utilisent des suites à faible discrèpence qui permettent de faire un échantillonnage uniforme non régulier, ce qui réduit le bruit numérique. Pour plus de détails sur les suites à faible discrèpence on peut consulter [60].

REMARQUE. *La discrèpence mesure l'écart des points avec les points de l'échantillonnage régulier.*

Une des variantes des méthodes Quasi-Monte Carlo, utilise les séquences de Hammersley, qui permettent de définir un échantillonnage du cube unité  $[0, 1]^d$ , où un point  $M_k$  de l'échantillonnage est donné par

$$M_k := \left( \frac{k}{N}, R_{p_1}(k), R_{p_2}(k), \dots, R_{p_{d-1}}(k) \right),$$

avec  $p_1, p_2, \dots, p_{d-1}$  des nombres premiers distincts les uns des autres et  $R_p$  est la fonction de p-inversion, ou fonction radicale inverse définie de la manière suivante :

Pour tout entier  $k$  qui s'écrit  $c_0 c_1 \dots c_M$  dans la base  $p$  (c'est à dire  $k = \sum_{i=0}^M c_i p^i$ ), la p-inversion de  $k$  est donnée par

$$R_p(k) := \sum_{i=0}^M c_i p^{-i-1}.$$

Pour plus de détails on peut consulter [7, 4].

Ainsi, pour notre cas, on détermine la position  $\mathbf{X}_k$  de chaque particule de la manière suivante :

$$(3.4.2) \quad \begin{cases} x_k &= -1 + 2 R_{p1}(k) \\ y_k &= -1 + 2 R_{p2}(k) \end{cases},$$

où,  $p1$  et  $p2$  sont des nombres premiers distincts.

Pour calculer les vitesses initiales, on commence par calculer la fonction de répartition de vitesse, associée à cette distribution, définie, pour tout  $v \in \mathbb{R}_+$ , par

$$F(v) = \frac{\int_{|\mathbf{V}| \leq v} \int_{[-1,1]^2} f^0(\mathbf{X}, \mathbf{V}) d\mathbf{X} d\mathbf{V}}{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{[-1,1]^2} f^0(\mathbf{X}, \mathbf{V}) d\mathbf{X} d\mathbf{V}}.$$

Et en faisant le calcul, on obtient

$$F(v) = -\frac{2v}{\sqrt{\pi}V_{th}} \exp\left(-\frac{v^2}{V_{th}^2}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{v}{V_{th}}\right).$$

Cette fonction nous sert pour calculer les modules des vitesses des macro-particules, de la manière suivante :

Pour tout  $k \in \{1 \cdots \aleph\}$ ,

$$|\mathbf{V}_k| = F^{-1}\left(\frac{k - 1/2}{\aleph}\right).$$

Pour le calcul numérique de l'inverse de la fonction, on peut utiliser la méthode de Newton en prenant  $V_{th}$  pour la valeur initiale de la boucle afin de garantir sa convergence.

Ainsi, ayant calculé  $|\mathbf{V}_k|$ , on définit les trois composantes de la vitesse de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{kx} &= |\mathbf{V}_k| \sin(\pi R_{p3}(k)) \cos(2\pi R_{p4}(k)) \\ \mathbf{V}_{ky} &= |\mathbf{V}_k| \sin(\pi R_{p3}(k)) \sin(2\pi R_{p4}(k)) , \\ \mathbf{V}_{kz} &= |\mathbf{V}_k| \cos(\pi R_{p3}(k)) \end{cases}$$

où  $p3$  et  $p4$  sont des nombres premiers distincts et différents de  $p1$  et  $p2$  intervenant dans le système (3.4.2).

**3.4.2. Deuxième exemple.** Pour tout  $\mathbf{X} \in D$  et tout  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$ , on se donne la distribution initiale

$$(3.4.3) \quad f^0(\mathbf{X}, \mathbf{V}) = \frac{n_0}{\pi \sqrt{\pi} V_{th}^3} \exp\left(-\frac{|\mathbf{V}|^2}{V_{th}^2}\right) (1 + \alpha \cos(\pi x)),$$

où  $\alpha$  est une constante.

Le calcul des vitesses initiales et des composantes  $y_k$  des positions initiales, se fait exactement de la même façon que l'exemple précédent.

Pour le calcul de la composante  $x_k$  des positions initiales, on utilise la fonction de répartition de position donnée pour tout  $\xi \in [-1, 1]$ , par

$$F_x(\xi) = \frac{\int_{-1}^{\xi} \int_{[-1,1]} \int_{\mathbb{R}^3} f^0(\mathbf{X}, \mathbf{V}) d\mathbf{V} dy dx}{\int_{[-1,1]^2} \int_{\mathbb{R}^3} f^0(\mathbf{X}, \mathbf{V}) d\mathbf{V} dy dx}.$$

Et en faisant le calcul, on obtient

$$F_x(\xi) = \frac{1}{2} \left( \xi + 1 + \frac{\alpha}{\pi} \sin(\pi\xi) \right).$$

Ainsi, on définit

$$x_k = F_x^{-1}(R_{p1}(k)).$$

Là aussi, on peut utiliser la méthode de Newton pour l'inversion, en prenant zéro pour la valeur initiale de la boucle afin de garantir sa convergence.

### 3.5. Interpolation des champs aux positions des particules

On note  $\mathbf{E}_k^{n+1/2} = (\mathbf{E}_{kx}^{n+1/2}, \mathbf{E}_{ky}^{n+1/2}, \mathbf{E}_{kz}^{n+1/2})$  l'interpolé du champ électrique en  $\mathbf{X}_k^{n+1/2}$ , où  $\mathbf{X}_k^{n+1/2} = (x_k^{n+1/2}, y_k^{n+1/2})$  est la position discrète de la particule  $k$  à l'instant  $t^{n+1/2}$ . On note aussi  $\mathbf{B}_k^{n+1/2} = (\mathbf{B}_{kx}^{n+1/2}, \mathbf{B}_{ky}^{n+1/2}, \mathbf{B}_{kz}^{n+1/2})$  l'interpolé du champ magnétique en  $\mathbf{X}_k^{n+1/2}$ .

Ces interpolés sont calculés à partir des champs électromagnétiques discrets, solutions des systèmes (3.2.1) et (3.2.2), de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \mathbf{E}_{kx}^{n+1/2}, \mathbf{E}_{ky}^{n+1/2} \right) := \mathbf{E}_{l(k)}^{\diamond n+1/2} \\ \mathbf{E}_{kz}^{n+1/2} := \frac{1}{2} \left( E'_{i(k)}{}^{n+1/2} + E''_{j(k)}{}^{n+1/2} \right) \\ \left( \mathbf{B}_{kx}^{n+1/2}, \mathbf{B}_{ky}^{n+1/2} \right) := \frac{1}{2} \left( \mathbf{B}_{l(k)}^{\diamond n} + \mathbf{B}_{l(k)}^{\diamond n+1} \right) \\ \mathbf{B}_{kz}^{n+1/2} := \frac{1}{4} \left( B'_{i(k)}{}^n + B''_{j(k)}{}^n + B'_{i(k)}{}^{n+1} + B''_{j(k)}{}^{n+1} \right) \end{array} \right. ,$$

où,  $i(k)$ ,  $j(k)$  et  $l(k)$ , sont les indices des mailles primale, duale et diamant, tels que  $\mathbf{X}_k^{n+1/2} \in C'_{i(k)} \cap C''_{j(k)} \cap C^\circ_{l(k)}$ .

### 3.6. Calcul des nouvelles vitesses et positions des particules

Etant donnés les champs électromagnétiques  $\mathbf{E}_k^{n+1/2}$  et  $\mathbf{B}_k^{n+1/2}$ , on calcule les nouvelles vitesses et positions des particules en résolvant les équations de mouvement discrètes données par :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{V}_k^{n+1} - \mathbf{V}_k^n}{\Delta t} = \frac{q}{m} \left( \mathbf{E}_k^{n+1/2} + \frac{\mathbf{V}_k^{n+1} + \mathbf{V}_k^n}{2} \times \mathbf{B}_k^{n+1/2} \right) \\ \frac{\mathbf{X}_k^{n+3/2} - \mathbf{X}_k^{n+1/2}}{\Delta t} = \mathbf{V}_k^{n+1} \end{cases}.$$

En faisant quelques étapes de calculs élémentaires, ce système s'écrit aussi

$$\begin{cases} M \mathbf{V}_k^{n+1} = 4q \Delta t \mathbf{E}_k^{n+1/2} + 8m \mathbf{V}_k^n - M \mathbf{V}_k^n \\ \mathbf{X}_k^{n+3/2} = \mathbf{X}_k^{n+1/2} + \Delta t \mathbf{V}_k^{n+1} \end{cases},$$

où  $M$  est la matrice donnée par

$$M := \begin{pmatrix} \alpha & -\lambda & \delta \\ \lambda & \alpha & -\beta \\ -\delta & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{cases} \alpha := 4m \\ \beta := 2q \Delta t \mathbf{B}_{kx}^{n+1/2} \\ \delta := 2q \Delta t \mathbf{B}_{ky}^{n+1/2} \\ \lambda := 2q \Delta t \mathbf{B}_{kz}^{n+1/2} \end{cases}.$$

Cette matrice est inversible, puisque  $m$  est non nul (c'est la masse d'une particule) et le calcul de son inverse donne

$$M^{-1} = \frac{1}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + \lambda^2)} \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & \alpha\lambda + \beta\delta & -\alpha\delta + \beta\lambda \\ -\alpha\lambda + \beta\delta & \alpha^2 + \delta^2 & \alpha\beta + \delta\lambda \\ \alpha\delta + \beta\lambda & -\alpha\beta + \delta\lambda & \alpha^2 + \lambda^2 \end{pmatrix},$$

ce qui nous permet de calculer explicitement les nouvelles vitesses et positions par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_k^{n+1} = M^{-1} \left( 4q \Delta t \mathbf{E}_k^{n+1/2} + 8m \mathbf{V}_k^n \right) - \mathbf{V}_k^n \\ \mathbf{X}_k^{n+3/2} = \mathbf{X}_k^{n+1/2} + \Delta t \mathbf{V}_k^{n+1} \end{cases}.$$

### 3.7. Calcul des densités de courant et de charge

Vu la proposition 2.5.1, pour que le champ électromagnétique discret, solution de système de Maxwell, conserve la loi de Gauss discrète (2.5.2), on va calculer des densités de courant et de charge de telle sorte qu'elles vérifient les équations de conservation de charge discrètes (2.5.3).

Pour la densité de charge discrète, on peut utiliser les fonctions de forme. Il est bien connu que plus on augmente l'ordre de ces fonctions, plus on réduit le bruit numérique. Par contre, il n'est pas évident de généraliser ces techniques sur des maillages quelconques, sauf celle d'ordre 0, appelée méthode NGP (Nearest Grid Point), d'où le choix de cette méthode. Ainsi, pour tout  $n \in \{0 \cdots N - 1\}$ , on définit alors les densités de charge discrètes de la manière suivante :

- Pour toute cellule primale  $C'_i$ ,  $i \in \{1 \cdots N'\}$ , on définit la densité de charge primale associée par

$$\rho_i'^{n+1/2} = \frac{q}{|C'_i|} \sum_{k=1}^{\aleph} w_k S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}),$$

où  $S'_i$  est la fonction définie par

$$(3.7.1) \quad S'_i(\mathbf{X}) := \begin{cases} 1 & , \text{ si } \mathbf{X} \in C'_i \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}.$$

- De même, on définit pour toute cellule duale  $C''_i$ ,  $i \in \{1 \cdots N''\}$ , la densité de charge duale associée par

$$\rho_i''^{n+1/2} = \frac{q}{|C''_i|} \sum_{k=1}^{\aleph} w_k S''_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}),$$

où  $S''_i$  est la fonction définie par

$$(3.7.2) \quad S''_i(\mathbf{X}) := \begin{cases} 1 & , \text{ si } \mathbf{X} \in C''_i \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}.$$

La densité de courant discrète est définie de la manière suivante :

- Pour toute maille diamant  $C_i^\diamond$ , associée à l'arête primale  $A_i'$  et sa duale  $A_i''$ , avec  $i \in \{1 \cdots N^\diamond\}$ , on définit la densité de courant diamant associée  $\mathbf{J}_i^{\diamond n}$  (discrétisant  $(\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_y)$ )



sur  $C_i^\diamond$ ) par

$$(3.7.3) \quad \begin{cases} \mathbf{J}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{n}'_i &= \frac{q}{\Delta t |A'_i|} \sum_{k=1}^{\aleph} w_k \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_i) S_{A'_i}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) \\ \mathbf{J}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{n}''_i &= \frac{q}{\Delta t |A''_i|} \sum_{k=1}^{\aleph} w_k \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}''_i) S_{A''_i}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) \end{cases},$$

où,  $\mathbf{V}_{kxy}^n := (\mathbf{V}_{kx}^n, \mathbf{V}_{ky}^n)$ ; *signe* est la fonction qui associe à chaque réel son signe;  $S_{A'_i}$

et  $S_{A''_i}$  sont les fonctions définies par

$$S_{A'_i}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \begin{cases} 1 & , \text{ si } [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \cap A'_i \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}, \quad S_{A''_i}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \begin{cases} 1 & , \text{ si } [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \cap A''_i \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}.$$

Autrement dit, les particules qui participent à la composante normale primale du courant sont celles qui traversent l'arête primale entre l'instant  $t^{n-1/2}$  et  $t^{n+1/2}$  et de même pour la composante normale duale.

REMARQUE 3.7.1. *On rappelle qu'on calcule  $\mathbf{J}_i^{\diamond n}$  à partir de ses composantes normales primale et duale par la formule suivante*

$$\mathbf{J}_i^{\diamond n} = \frac{\mathbf{J}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{n}'_i}{\mathbf{t}''_i \cdot \mathbf{n}'_i} \mathbf{t}''_i + \frac{\mathbf{J}_i^{\diamond n} \cdot \mathbf{n}''_i}{\mathbf{t}'_i \cdot \mathbf{n}''_i} \mathbf{t}'_i.$$

– Pour toute maille duale  $C''_i$  située sur le bord ( $1 \leq i \leq N^\Gamma$ ), on définit la composante normale du courant  $\mathbf{J}_i^{\Gamma n}$ , associée à  $C''_i \cap \Gamma$ , par

$$\mathbf{J}_i^{\Gamma n} \cdot \mathbf{n}_i^\Gamma = \frac{q}{\Delta t |C''_i \cap \Gamma|} \sum_{k=1}^{\aleph} w_k \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}_i^\Gamma) S_{C''_i \cap \Gamma}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}),$$

avec

$$S_{C''_i \cap \Gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \begin{cases} 1 & , \text{ si } [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \cap C''_i \cap \Gamma \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}.$$

PROPOSITION 3.7.2. *Cette discrétisation satisfait l'équation de conservation de charge discrète (2.5.3).*

DÉMONSTRATION. Soit  $i \in \{1 \cdots N'\}$  et  $n \in \{1 \cdots N - 1\}$ .

Par définition des densités de charge discrète, on a

$$\frac{\rho_i^{n+1/2} - \rho_i^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{q}{\Delta t |C''_i|} \sum_{k=1}^{\aleph} w_k \left[ S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) - S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}) \right];$$

et par définition de la densité de courant discrète et de l'opérateur divergence primale, on a

$$\begin{aligned}
\nabla'_i \cdot \mathbf{J}^{\circ n} &= \frac{1}{|C'_i|} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} |A'_j| \mathbf{J}_j^{\circ n} \cdot \mathbf{n}'_{ij} \\
&= \frac{1}{|C'_i|} \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \frac{q}{\Delta t} \sum_{k=1}^{\aleph} w_k \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) \\
&= \frac{q}{\Delta t |C'_i|} \sum_{k=1}^{\aleph} w_k \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2});
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\rho'_i{}^{n+1/2} - \rho'_i{}^{n-1/2}}{\Delta t} + \nabla'_i \cdot \mathbf{J}^{\circ n} &= \frac{q}{\Delta t |C'_i|} \sum_{k=1}^{\aleph} w_k \left[ S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) - S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}) \right. \\
(3.7.4) \quad &\left. + \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) \right].
\end{aligned}$$

Soit  $k \in \{1 \cdots \aleph\}$ , on rappelle que

$$\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2} = \mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2} + \Delta t \mathbf{V}_{kxy}^n,$$

ainsi, la particule se déplace en ligne droite entre  $\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}$  et  $\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}$ .

*Premier cas* :  $\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}$  et  $\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2} \in C'_i$

Si la maille est convexe, cela veut dire que la particule est restée à l'intérieur de la maille entre les instants  $t^{n-1/2}$  et  $t^{n+1/2}$ ; et puisque la particule se déplace suivant une droite sur un pas de temps, alors elle n'a traversé aucune des arêtes de la maille  $C'_i$ , ce qui implique que,  $\forall A'_j \subset \partial C'_i$ , on a  $S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) = 0$  et donc

$$\sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) = 0.$$

De plus, on a  $S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) = S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}) = 1$  et donc

$$S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) - S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}) = 0 = - \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}).$$

Si la maille est non convexe, la particule n'est pas forcément restée à l'intérieur de la maille entre les instants  $t^{n-1/2}$  et  $t^{n+1/2}$ , et dans ce cas, la particule traverse autant d'arêtes pour

sortir que d'arêtes pour rentrer, et donc on a toujours

$$- \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) = 0 = S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) - S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}).$$

*Deuxième cas* :  $\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2} \in C'_i$  et  $\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2} \notin C'_i$

Si la maille est convexe, cela veut dire que la particule était dans la maille  $C'_i$  à l'instant  $t^{n-1/2}$  et qu'elle l'a quitté entre  $t^{n-1/2}$  et  $t^{n+1/2}$ ; et puisque la particule se déplace en ligne droite sur un pas de temps, alors elle n'a traversé qu'une seule arête de la maille  $C'_i$  dans le sens de la normale sortante, ce qui implique que

$$\sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) = 1.$$

De plus, on a  $S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}) = 1$  et  $S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) = 0$  et donc

$$S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) - S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}) = -1 = - \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}).$$

Dans le cas non convexe, le résultat reste toujours valide, puisque même si la particule a effectué plusieurs entrées et sorties on a forcément

$$\text{nombre de sorties} = \text{nombre d'entrees} + 1$$

et donc

$$- \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) = -1 = S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) - S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}).$$

*Troisième cas* :  $\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2} \notin C'_i$  et  $\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2} \in C'_i$

Dans le cas convexe ceci veut dire que la particule était à l'extérieur de la maille  $C'_i$  à l'instant  $t^{n-1/2}$ , elle rentre dans la maille et elle n'est pas encore sortie à l'instant  $t^{n+1/2}$ .

Dans ce cas aussi, la particule n'a traversé qu'une seule arête de la maille  $C'_i$  dans le sens opposé à la normale sortante, ce qui implique que

$$\sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) = -1.$$

De plus, on a  $S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}) = 0$  et  $S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) = 1$  et donc

$$S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) - S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}) = 1 = - \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}).$$

Dans le cas non convexe, le résultat reste toujours valide, puisque même si la particule a effectué plusieurs entrées et sorties on a forcément

$$\text{nombre de sorties} = \text{nombre d'entrees} - 1.$$

*Quatrième cas* :  $\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2} \notin C'_i$  et  $\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2} \notin C'_i$ , tout en traversant  $C'_i$  entre  $t^{n-1/2}$  et  $t^{n+1/2}$

Dans ce cas, on a

$$\text{nombre de sorties} = \text{nombre d'entrees}$$

ce qui implique que

$$\sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) = 1 - 1 = 0.$$

De plus, on a  $S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}) = 0$  et  $S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) = 0$  et donc

$$S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) - S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}) = 0 = - \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}).$$

*Cinquième cas* :  $\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2} \notin C'_i$  et  $\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2} \notin C'_i$ , sans traverser  $C'_i$  entre  $t^{n-1/2}$  et  $t^{n+1/2}$

Evidemment, la particule ne traverse aucune des arêtes de la maille  $C'_i$ , et donc

$$\sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) = 0.$$

De plus, on a  $S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}) = 0$  et  $S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) = 0$  et donc

$$S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) - S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}) = 0 = - \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}).$$

Ainsi on a prouvé que quel que soit les positions de la particule aux instants  $t^{n-1/2}$  et  $t^{n+1/2}$ , on a

$$S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) - S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}) + \sum_{A'_j \subset \partial C'_i} \text{signe}(\mathbf{V}_{kxy}^n \cdot \mathbf{n}'_{ij}) S_{A'_j}(\mathbf{X}_{kxy}^{n-1/2}, \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) = 0,$$

d'où en remplaçant dans (3.7.4), on obtient

$$\frac{\rho'_i{}^{n+1/2} - \rho'_i{}^{n-1/2}}{\Delta t} + \nabla'_i \cdot \mathbf{J}^{\circ n} = 0.$$

En procédant de manière similaire, on montre aussi l'équation de conservation de charge discrète duale :

$$\frac{\rho''_i{}^{n+1/2} - \rho''_i{}^{n-1/2}}{\Delta t} + \nabla''_i \cdot \mathbf{J}^{\circ \Gamma n} = 0, \quad i \in \{1 \dots N''\} \quad \text{et} \quad n \in \{1 \dots N - 1\}.$$

□

Enfin, on calcule les valeurs discrètes de la composante  $\mathbf{J}_z$  de la densité de courant de la manière suivante :

– Pour toute maille primale  $C'_i$ , on définit la densité de courant primale associée  $J_i'^n$  par

$$(3.7.5) \quad J_i'^n = \frac{q}{|C'_i|} \sum_{k=1}^{\aleph} w_k \mathbf{V}_{kz}^n S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}).$$

– Pour toute maille duale  $C''_i$ , on définit la densité de courant duale associée  $J_i''^n$  par

$$(3.7.6) \quad J_i''^n = \frac{q}{|C''_i|} \sum_{k=1}^{\aleph} w_k \mathbf{V}_{kz}^n S''_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}),$$

où  $S'_i$  et  $S''_i$  sont les fonctions définies par (3.7.1) et (3.7.2).

### 3.8. Calcul des champs électromagnétiques

Les champs magnétiques et électriques discrets sont calculés en résolvant les systèmes de Maxwell discrets (3.2.1) et (3.2.2), en prenant comme termes sources les densités de courant discrètes calculées à l'étape précédente (formules (3.7.3), (3.7.5) et (3.7.6)).

## 3.9. Résultats numériques

### 3.9.1. Convergence

. On se donne une distribution initiale  $f^0$  d'électrons sur un fond neutralisant d'ions, telle que pour tout  $\mathbf{X} \in [-1, 1]^2$  et tout  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$ , on a

$$f^0(\mathbf{X}, \mathbf{V}) = \frac{n_0}{\pi \sqrt{\pi} V_{th}^3} \exp\left(-\frac{|\mathbf{V}|^2}{V_{th}^2}\right),$$

avec  $|\mathbf{V}|^2 = \mathbf{V}_x^2 + \mathbf{V}_y^2 + \mathbf{V}_z^2$  et  $V_{th}$  est la vitesse thermique. Pour les conditions de bord, on choisit des conditions de type conducteur parfait pour les champs et des conditions périodiques pour les particules. Pour les conditions initiales, on choisit des champs électromagnétiques nuls.

Dans ce cas, la solution exacte de système de Maxwell-Vlasov est donnée par

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{X}, t) & = 0 \\ \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) & = 0 \\ f(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) & = \frac{n_0}{\pi\sqrt{\pi}V_{th}^3} \exp\left(-\frac{|\mathbf{V}|^2}{V_{th}^2}\right) \end{cases}.$$

On rappelle qu'en utilisant la méthode PIC pour la résolution du système de Maxwell-Vlasov, on ne calcule pas explicitement la fonction de distribution. Ainsi, une façon de vérifier la convergence de la distribution est de vérifier la convergence de ses trois premiers moments donnés par

$$\begin{cases} \mathcal{M}_0(f) & := \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) d\mathbf{V} \\ \mathcal{M}_1(f) & := \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) \mathbf{V} d\mathbf{V} \\ \mathcal{M}_2(f) & := \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) |\mathbf{V} - \mathcal{M}_1(f)|^2 d\mathbf{V} \end{cases}.$$

Pour notre exemple, on peut vérifier

$$(3.9.1) \quad \begin{cases} \mathcal{M}_0(f) & := n_0 \\ \mathcal{M}_1(f) & := \mathbf{0} \\ \mathcal{M}_2(f) & := \frac{3}{2} n_0 V_{th}^2 \end{cases}.$$

Sur le plan discret, on calcule chacun de ces trois moments sur les trois maillages de la manière suivante :

– Pour chaque maille primale  $C'_i$  et tout  $n \in \{0 \dots N-1\}$

$$\begin{cases} \mathcal{M}'_{0i}{}^{n+1/2} & := \sum_{k=1}^{\aleph} w_k S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) \\ \mathcal{M}'_{1i}{}^{n+1/2} & := \sum_{k=1}^{\aleph} w_k \mathbf{V}_k^n S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) \\ \mathcal{M}'_{2i}{}^{n+1/2} & := \sum_{k=1}^{\aleph} w_k |\mathbf{V}_k^n|^2 S'_i(\mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2}) \end{cases}.$$

– De même, pour chaque maille duale  $C_i''$  et tout  $n \in \{0 \cdots N - 1\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_{0i}''^{n+1/2} := \sum_{k=1}^{\aleph} w_k S_i'' \left( \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2} \right) \\ \mathcal{M}_{1i}''^{n+1/2} := \sum_{k=1}^{\aleph} w_k \mathbf{V}_k^n S_i'' \left( \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2} \right) \\ \mathcal{M}_{2i}''^{n+1/2} := \sum_{k=1}^{\aleph} w_k |\mathbf{V}_k^n|^2 S_i'' \left( \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2} \right) \end{array} \right. .$$

– Enfin, pour chaque maille diamant  $C_i^\diamond$  et tout  $n \in \{0 \cdots N - 1\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_{0i}^{\diamond n+1/2} := \sum_{k=1}^{\aleph} w_k S_i^\diamond \left( \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2} \right) \\ \mathcal{M}_{1i}^{\diamond n+1/2} := \sum_{k=1}^{\aleph} w_k \mathbf{V}_k^n S_i^\diamond \left( \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2} \right) \\ \mathcal{M}_{2i}^{\diamond n+1/2} := \sum_{k=1}^{\aleph} w_k |\mathbf{V}_k^n|^2 S_i^\diamond \left( \mathbf{X}_{kxy}^{n+1/2} \right) \end{array} \right. .$$

Ainsi, on représente sur la figure 3.9.1, en échelle Log, les normes  $L^2$  relatives des erreurs de  $\mathcal{M}_{0i}'^{n+1/2}$  (à gauche) et  $\mathcal{M}_{0i}''^{n+1/2}$  (à droite), comparés à leurs valeurs exactes données dans (3.9.1). On précise qu'il sagit, ici et dans la suite, des normes  $L^2$  discrètes définies dans les définitions 1.6.2 page 25 et 1.6.3 page 26.

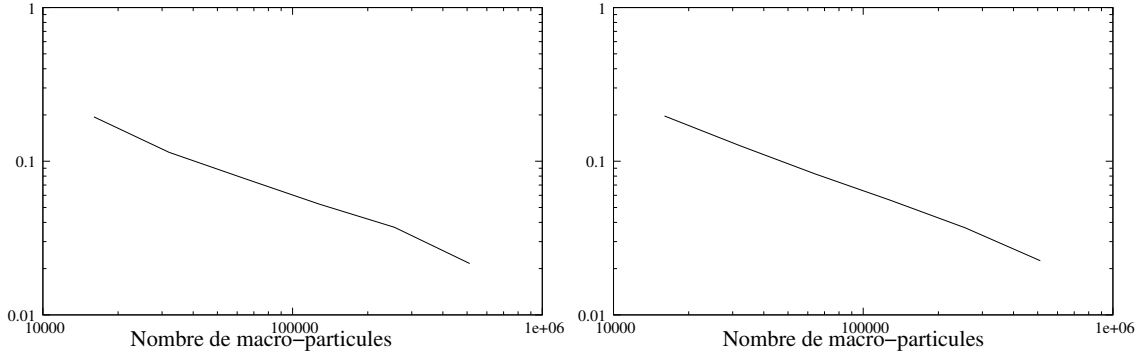
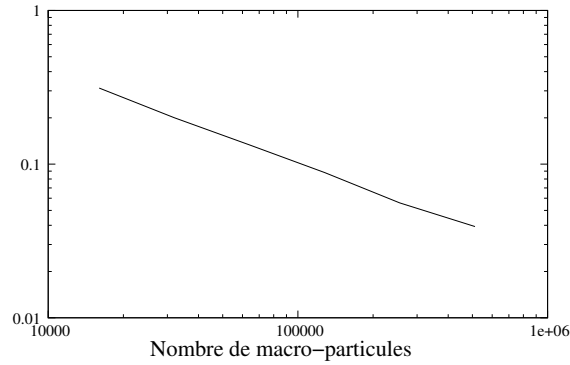
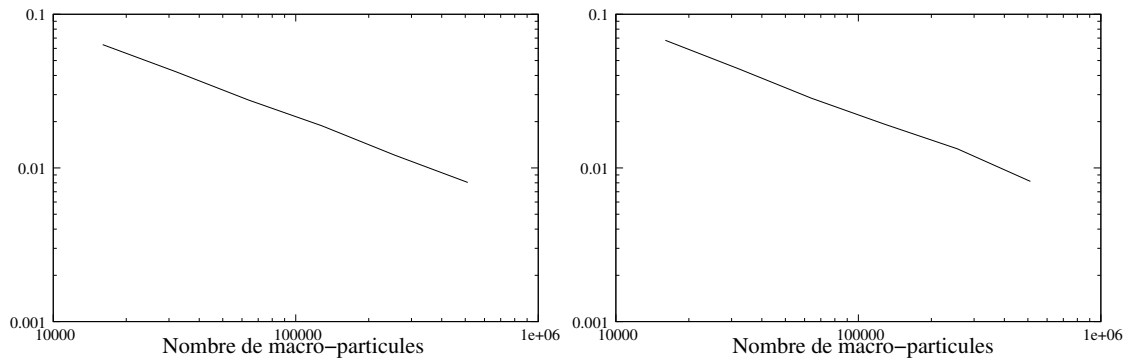


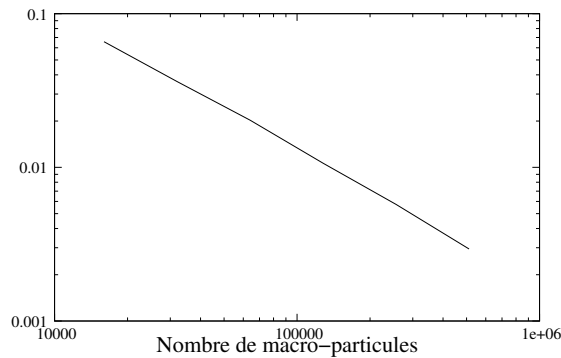
FIGURE 3.9.1. Erreur  $L^2$  relative du moment d'ordre 0 sur les maillages primal et dual

Sur la figure 3.9.2 on présente, en échelle Log, la norme  $L^2$  relative de l'erreur de  $\mathcal{M}_{0i}^{\diamond n+1/2}$  comparé à la même valeur exacte.

Pour le moment d'ordre 1, et puisque sa valeur exacte est nulle, on trace sur la figure 3.9.3, en échelle Log, les normes  $L^2$  des erreurs de  $\mathcal{M}_{1i}'^{n+1/2}$  (à gauche) et  $\mathcal{M}_{1i}''^{n+1/2}$  (à droite), divisées par la vitesse thermique  $n_0 V_{th}$ , et sur la figure 3.9.4, la norme  $L^2$  de l'erreur de

FIGURE 3.9.2. Erreur  $L^2$  relative du moment d'ordre 0 sur le maillage diamantFIGURE 3.9.3. Erreur  $L^2$  du moment d'ordre 1 sur les maillages primal et dual divisée par  $n_0 V_{th}$ 

$\mathcal{M}_{1i}^{\circ n+1/2}$  divisée aussi par  $n_0 V_{th}$ , aussi en échelle Log.

FIGURE 3.9.4. Erreur  $L^2$  du moment d'ordre 1 sur le maillage diamant divisée par  $n_0 V_{th}$ 

La figure 3.9.5 illustre les normes  $L^2$  relatives des erreurs de  $\mathcal{M}'_{2i}{}^{n+1/2}$  (à gauche) et  $\mathcal{M}''_{2i}{}^{n+1/2}$  (à droite), comparés à leurs valeur exacte donnée dans (3.9.1), tracées en échelle Log, et on représente sur la figure 3.9.6 (en échelle Log), la norme  $L^2$  relatives de l'erreur  $\mathcal{M}_{2i}^{\circ n+1/2}$  comparé à la même valeur exacte.

Pour le champ magnétique discret, on présente sur la figure 3.9.7, en échelle Log, les normes  $L^2$  des erreurs de la troisième composante du champs magnétique discrète, calculé



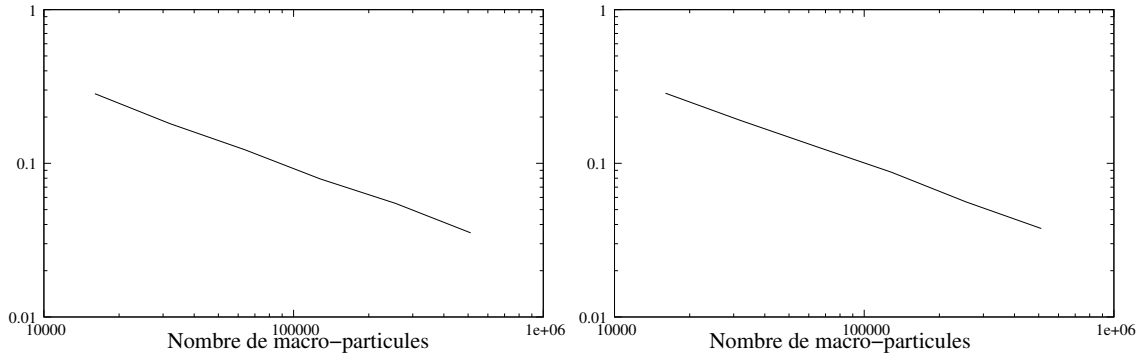


FIGURE 3.9.5. Erreur  $L^2$  relative du moment d'ordre 2 sur les maillages primal et dual

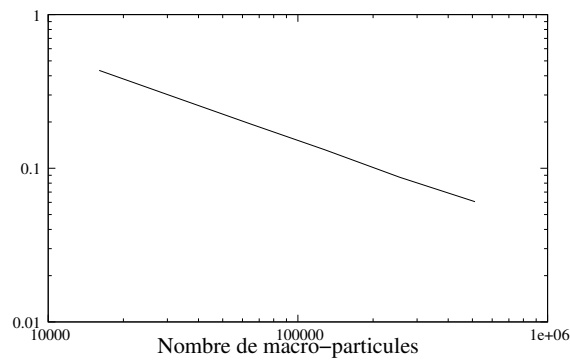


FIGURE 3.9.6. Erreur  $L^2$  relative du moment d'ordre 2 sur le maillage diamant sur le maillage primal (à gauche) et sur le maillage dual (à droite) et on trace sur la

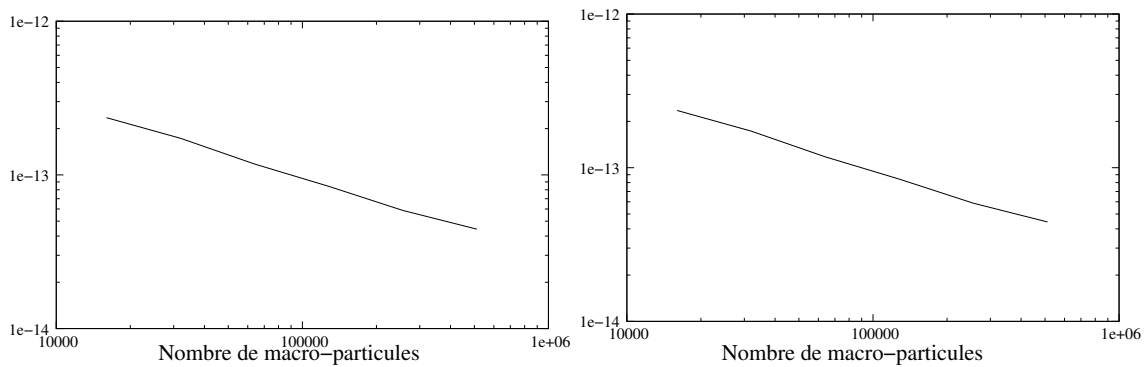
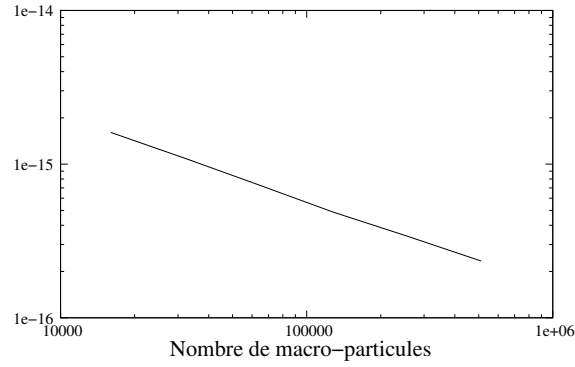
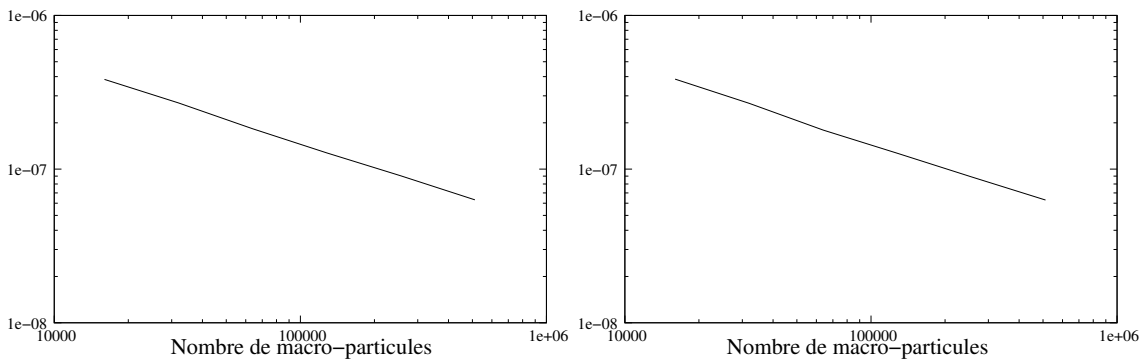


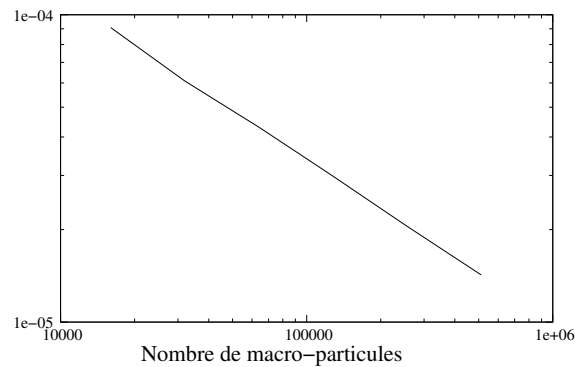
FIGURE 3.9.7. Erreur  $L^2$  de  $B'_i$  (à gauche) et  $B''_i$  (à droite)

figure 3.9.8, en échelle Log, la norme  $L^2$  de l'erreur des deux premières composantes du champ magnétique, calculés sur le maillage diamant.

De même, on représente sur la figure 3.9.9, en échelle Log, les normes  $L^2$  des erreurs de la troisième composante du champs électrique discrète, calculé sur le maillage primal (à gauche) et sur le maillage dual (à droite). Enfin, la figure 3.9.10, tracée en échelle Log, illustre la norme  $L^2$  de l'erreur des deux premières composantes du champ électrique,

FIGURE 3.9.8. Erreur  $L^2$  de  $\mathbf{B}_i^\diamond$ FIGURE 3.9.9. Erreur  $L^2$  de  $E_i'$  (à gauche) et  $E_i''$  (à droite)

calculées sur le maillage diamant. Ces résultats sont obtenus au bout de 400 itérations

FIGURE 3.9.10. Erreur  $L^2$  de  $\mathbf{E}_i^\diamond$ 

avec  $\Delta t = 10^{-10}$ ,  $n_0 = 10^6$  et  $V_{th} = 1.74 \times 10^6$ .

### 3.9.2. Amortissement Landau

. On considère une distribution initiale d'électrons donnée pour tout  $\mathbf{X}(x, y) \in [-1, 1]^2$

et tout  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$ , par

$$f^0(\mathbf{X}, \mathbf{V}) = \frac{n_0}{\pi \sqrt{\pi} V_{th}^3} \exp\left(-\frac{|\mathbf{V}|^2}{V_{th}^2}\right) (1 + \alpha \cos(kx)),$$

avec  $\alpha$  une constante à choisir,  $k = \pi$  (Dans le cas général  $k := \frac{2\pi}{L_x}$ , où  $L_x$  est la longueur de l'intervalle en  $x$ ),  $V_{th}$  la vitesse thermique valant ici

$$V_{th} = \sqrt{\frac{2 k_b T_e}{m_e}},$$

où  $k_b := 1.3806503 \times 10^{-23}$  est la constante de Boltzmann,  $m_e := 9,1094 \times 10^{-31}$  est la masse d'un électron et  $T_e$  est la température électronique. Cette fonction décrit une maxwellienne en vitesse dont la densité n'est pas constante mais perturbée par une fonction harmonique d'amplitude  $\alpha$  et de nombre d'onde  $k$ . Ce genre de distribution apparaît, par exemple, quand on perturbe par un laser un plasma en position d'équilibre.

On se donne d'autre part, un champ magnétique initial nul et un champ électrique initial tel que

$$\begin{cases} \mathbf{E}_x^0(x) &= K \sin(kx) \\ \mathbf{E}_y^0(x) &= 0 \\ \mathbf{E}_z^0(x) &= 0 \end{cases},$$

où  $K$  est une constante à choisir de telle sorte que la loi de Gauss soit vérifiée à l'instant initial, ce qui implique que

$$K := \frac{\alpha q_e n_0}{k \epsilon_0}.$$

Dans ces conditions, la norme  $L^2$  du champ électrique décroît au cours du temps de la manière suivante

$$\|\mathbf{E}_x\|_{L^2([-1,1]^2)}(t) = \sqrt{2} |K| \exp(\omega_i t) |\cos(\omega_r t)|,$$

où la fréquence  $\omega_r$  et le taux d'amortissement  $\omega_i$  sont reliés à la pulsation électronique

$\omega_e := \sqrt{\frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0 m_e}}$  et à la longueur de Debye  $\lambda_e := \frac{V_{th}}{\sqrt{2} \omega_e}$  par des formules qui sont données,

selon plusieurs références [41, 34, 13, 7], et dans le cas où  $k \lambda_e \ll 1$  par

$$\begin{cases} \omega_r &= \omega_e \sqrt{1 + 3(k \lambda_e)^2} \\ \omega_i &= -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_e}{(k \lambda_e)^3} \exp\left(-\frac{1}{2(k \lambda_e)^2} - \frac{3}{2}\right). \end{cases}$$

Dans un travail plus récent [45], des formules plus précises ont été démontrées :

$$(3.9.2) \quad \begin{cases} \omega_r &= \omega_e \left( 1 + \frac{3}{2} (k \lambda_e)^2 + \frac{15}{8} (k \lambda_e)^4 + \frac{147}{16} (k \lambda_e)^6 \right) \\ \omega_i &= -\omega_e \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left( \frac{1}{(k \lambda_e)^3} - 6 k \lambda_e \right) \exp \left( -\frac{1}{2 (k \lambda_e)^2} - \frac{3}{2} - 3 (k \lambda_e)^2 - 12 (k \lambda_e)^4 \right) \end{cases}.$$

REMARQUE 3.9.1. *Si l'amplitude  $\alpha$  de la perturbation n'est pas très petite par rapport à 1, des phénomènes d'amortissement non linéaire apparaissent et les formules, déjà citées, ne sont plus valides.*

On a simulé ce cas test avec  $\alpha = 0.02$  et  $n_0 = 10^{14}$ . Le choix de la température  $T_e$  se fait de tel sorte que  $k \lambda_e \ll 1$  et  $V_{th} \ll c$  (pour que les particules ne soient pas relativistes), ce qui implique que  $T_e \ll \min \left( \frac{q^2 n_0}{2 k^2 k_b \epsilon_0}, \frac{m c^2}{2} k_b \right)$ . Ainsi, on a choisi  $T_e = 2 \times 10^8$ , ce qui implique une vitesse thermique  $V_{th} \simeq 7.786 \times 10^7$ . Avec ces données, la pulsation et le taux d'amortissement calculés à partir des formules (3.9.2) valent :

$$\begin{cases} \omega_r &\simeq 6.57 \times 10^8 \\ \omega_i &\simeq -8.61 \times 10^6 \end{cases}.$$

Sur la figure 3.9.11, on représente  $\ln \left( \|\mathbf{E}_x\|_{L^2([-1,1]^2)} \right)$  en fonction du nombre de périodes théoriques en temps  $\left( \frac{2\pi}{\omega_r} \right)$  pour une simulation faite sur un maillage de  $64 \times 32$  mailles et avec 4000 particules par maille.

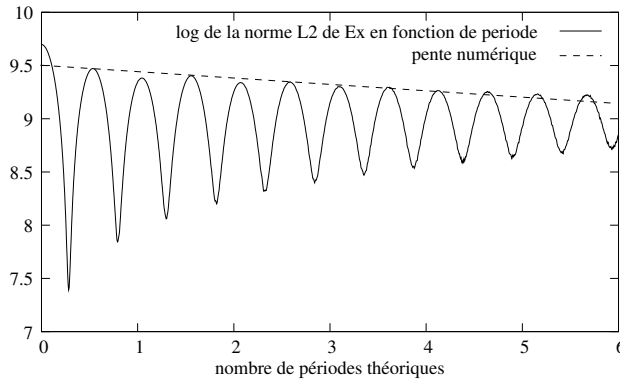


FIGURE 3.9.11.  $\ln \left( \|\mathbf{E}_x\|_{L^2([-1,1]^2)} \right)$  en fonction du nombre de périodes théoriques  $\left( \frac{2\pi}{\omega_r} \right)$

On a étudié le taux d'amortissement et la pulsation numérique calculés à partir du deuxième et quatrième sommets en fonction du nombre de particules par maille et on obtient les résultats suivants

Nombre de particules par maille	Taux d'amortissement $\omega_i$	Pulsation $\omega_r$
500	$7.3014636 \times 10^6$	$6.411413579 \times 10^8$
1000	$5.332574 \times 10^5$	$6.477510626 \times 10^8$
2000	$-4.3784385 \times 10^6$	$6.477510626 \times 10^8$
4000	$-6.9425131 \times 10^6$	$6.411413579 \times 10^8$
8000	$-8.2490293 \times 10^6$	$6.477510626 \times 10^8$

La figure (3.9.12) trace le taux d'amortissement numérique en fonction du nombre de particules par maille ainsi que la droite correspondant au taux d'amortissement théorique ( $y = -8.61 \times 10^6$ ).

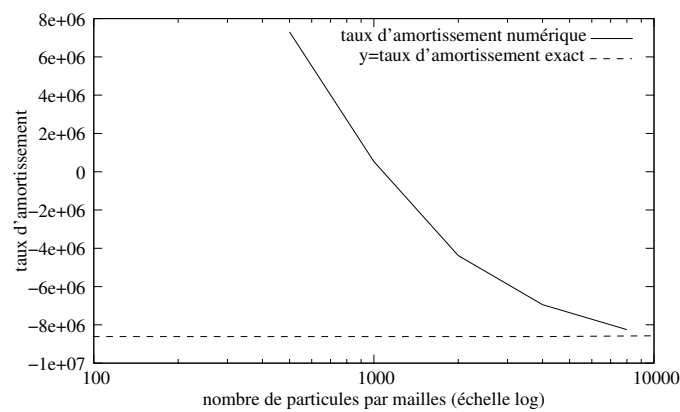


FIGURE 3.9.12. Convergence du taux d'amortissement

À partir de ces résultats on peut constater qu'autant que le calcul de la pulsation est précis dès 500 particules par maille, le calcul d'un taux d'amortissement proche du taux théorique nécessite plus que 4000 particules par maille.



## Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons développé une méthode de volumes finis qui généralise la méthode de covolumes (nommée aussi "control region") à des maillages presque quelconques tout en préservant ses avantages.

En effet, l'orthogonalité du maillage n'est plus obligatoire, ce qui autorise, en particulier, la non conformité de maillage permettant ainsi de placer des mailles juste là où on en a besoin ; de plus, cette méthode autorise les maillages non convexes et même les maillages avec des éléments très aplatis.

L'étude du schéma montre que celui ci preserve toujours la loi de Gauss, et ce, de façon locale ; que l'énergie électromagnétique discrète est conservée ou décroissante, selon le type de conditions aux limites utilisées, et qu'elle est positive sous condition CFL. Ces propriétés permettent en particulier de prouver la stabilité du schéma sous une condition CFL qui dépend des propriétés du maillage. Cette condition est optimale pour un maillage orthogonal ; dans le cas d'un maillage cartésien, elle correspond exactement à celle du schéma de Yee.

L'étude de convergence montre que dans le cas où les champs électromagnétiques sont réguliers la convergence est d'ordre un en espace. Pour  $(B, \mathbf{E}) \in (W^{1,q}(\Omega, W^{3,p}(0, T)))^3$ , avec  $p > 1$  et  $q > 2$ , la convergence est d'ordre  $1 - \frac{2}{q}$  en espace. Si, de plus, toutes les mailles diamants sont convexes la convergence est d'ordre 1 en espace.

Cette étude a été établie en utilisant le schéma saute-mouton d'ordre deux pour la discrétisation temporelle ; il serait intéressant d'étudier aussi le comportement de cette méthode avec un schéma d'ordre plus élevé en temps.

Il reste également à étudier ce schéma avec des conditions aux limites d'ordres plus élevés. Pour profiter au mieux de cette méthode de volumes finis sur des maillages raffinés localement, il est important de pouvoir faire du raffinement espace-temps, pour cela, on pourra s'inspirer des travaux [18, 19].

Enfin, l'extension de cette méthode en trois dimensions n'est pas directe et l'étude est à refaire en entier. Dans [55], on trouve une extension réussie de ce type de méthode pour le problème de Laplace en 3D.

D'autre part, nous avons couplé ce schéma avec une méthode particulière pour résoudre le système de Maxwell-Vlasov en utilisant une méthode d'ordre zéro pour le calcul de la densité de charge et de courant. La méthode utilisée conserve les équations de charge

discrètes, ce qui nous permet de conserver la loi de Gauss. Lors de la simulation de l'amortissement Landau, nous obtenons bien la décroissance de l'énergie portée par le champ électrique, avec une précision qui dépend du nombre de particules par maille.

Pour réduire les coûts de la méthode couplée, il est important d'établir des méthodes d'ordres élevés pour le calcul des densités de charge et de courant, et qui s'adaptent pour des maillages quelconques tout en conservant les équations de charge.





## Bibliographie

- [1] Robert A. Adams “Sobolev spaces” 1975
- [2] F. Assous, P. Degond, E. Heintze, P.A. Raviart, J. Segré, “On a finite element method for solving the three-dimensional Maxwell equations, Journal of computational physics” 109 (1993) pp. 222-237.
- [3] F. Assous, P. Degond, J. Segré, Numerical approximation of the Maxwell equations in inhomogeneous media by a P1 conforming finite element method, J. Comput. Phys. 128 (1996) 363–380.
- [4] R. Barthelmé. Le problème de conservation de la charge dans le couplage des équations de Vlasov et de Maxwell. Thèses de doctorat, Université Louis Pasteur, 2005.
- [5] R. Barthelmé, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).
- [6] F. Ben Belgacem, A. Buffa, Y. Maday, The mortar finite element method for 3D Maxwell equations : first results, SIAM J. Numer. Anal. 39 (2001) 880– 901.
- [7] C. K. Birdsall et A. B. Langdon. Plasma physics via computer simulations (1991)
- [8] J. P. Boris, Relativistic plasma simulations-Optimization of hybrid code, Proc 4th conf. Num. Sim. of Plasmas (NRL Washington, Washington DC, 1970)pp. 3-67.
- [9] H. Brezis. “Analyse fonctionnelle théorie et applications”
- [10] A. Buffa, Y. Maday, F. Rapetti, A sliding mesh-mortar method for a two dimensional eddy currents model of electric engines, Math. Model. Numer. Anal. 35 (2001) 191–228.
- [11] O. Buneman et W.B. Pardo, “Relativistic Plasmas” (Benjamin, New York, 1968).
- [12] N. Canouet, L. Fezoui, S. Piperno, Discontinuous Galerkin time-domain solution of Maxwell’s equations on locally-refined non-conforming Cartesian grids, COMPEL 24 (2005) 1381–1401.
- [13] F. F. Chen, “Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion” 2<sup>nd</sup> ed. (Plenum, New York, 1984), p. 270.
- [14] Philippe G. Ciarlet” The finite element method for the elliptic problems” 1978.
- [15] E.T. Chung, B. Engquist, Convergence analysis of fully discrete finite volume methods for Maxwell’s equations in nonhomogeneous media, SIAM J. Numer. Anal. 43 (1) (1998) 303–317.

- [16] J.-P. Cioni, L. Fezoui and H. Steve, A parallel time-domain Maxwell solver using upwind schemes and triangular meshes, *IMPACT Comput. Sci. Eng.*, 5, pp. 215–247, 1993.
- [17] B. Cockburn, F. Li and C.-W. Shu, Locally divergence-free discontinuous Galerkin methods for the Maxwell equations, *J. Comput. Phys.* 194, PP. 588–610, 2004.
- [18] F. Collino, T. Fouquet, P. Joly, A conservative space–time mesh refinement method for the 1D wave equation. Part I : construction, *Numer. Math.* 95 (2003) 197–221.
- [19] F. Collino, T. Fouquet, P. Joly, A conservative space–time mesh refinement method for the 1D wave equation. Part II : analysis, *Numer. Math.* 95 (2003) 223–251.
- [20] S. Delcourte, K. Domelevo and P. Omnes. “A discrete duality finite volume approach to Hodge decomposition and div-curl problems on almost arbitrary two-dimensional meshes”. *SIAM journal on numerical analysis.* 45(3),pp. 1142-1174, 2007.
- [21] K. Domelevo. et P. Omnes. A Finite Volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids. *ASAIM :M2AN.* Vol.39, N 6, pp. 1203-1249, 2005.
- [22] M. Fedoruk, C.-D. Munz, P. Omnes, R. Schneider “A Maxwell-Lorentz solver for self-consistent particle-field simulations on unstructured grids” *Wissenschaftliche Berichte FZKA 6115.*
- [23] L. Fezoui, S. Lanteri, S. Lohrengel et S. Piperno. “ Convergence and Stability of a Discontinuous Galerkin Time-Domain method for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes”. *M2AN.* Vol.39, N 6, pp. 1149-1176, 2005.
- [24] S.C. Hagness, A. Taflove, S.D. Gedney, Finite-difference time-domain methods, in : P.G. Ciarlet (Ed.), *Handbook of Numerical Analysis*, vol. 13, Elsevier North Holland, 2005.
- [25] J.S. Hesthaven, T. Warburton, Nodal high-order methods on unstructured grids. I. Time-domain solution of Maxwell’s equations, *J. Comput. Phys.* 181 (2002) 186–221.
- [26] F. Hermeline, Deux schémas d’approximation des équations de Vlasov–Maxwell bi-dimensionnelles sur des maillages de Voronoi et Delaunay, Technical report : note CEA/2591 (in French), 1989.
- [27] F. Hermeline. “Two coupled Particle finite volume methods using Delaunay-Voronoi meshes for the approximation of Vlasov-Poisson and Vlasov-Maxwell equations”. *J. Comput. Phys.*, 106, pp.1-18, 1993
- [28] F. Hermeline, Une méthode de volumes finis pour les équations elliptiques du second ordre, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1* 326 (1998) 1433–1436.
- [29] F. Hermeline, A finite volume method for the approximation of diffusion operators on distorted meshes, *J. Comput. Phys.*, 160, pp. 481–499. 2000.

- [30] F. Hermeline, “Approximation of diffusion operators with discontinuous tensor coefficients on distorted meshes”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192, pp. 1939–1959. 2003
- [31] F. Hermeline. “A finite volume method for solving Maxwell equations in inhomogeneous media on arbitrary meshes”. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 339, pp. 893-898. 2004.
- [32] F. Hermeline, Approximation of 2-D and 3-D diffusion operators with variable full tensor coefficients on arbitrary meshes, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 192 (2007) 2497–5326.
- [33] F. Hermeline, S. Layouni et P. Omnes. A finite volume method for the approximation of Maxwell’s equations in two space dimensions on arbitrary meshes. *Journal of Computational Physics* 227 (2008) pp. 9365–9388.
- [34] S. Ichimaru, “Basic principles of Plasma Physics” (Benjamin, Reading, MA, 1973), p. 71.
- [35] Ilin A. V., Chang Diaz F. R., Squire J. P. and Carter M. D. “Monte Carlo Particle Dynamics in a Variable Specific Impulse Magnetoplasma Rocket”, Novosibirsk, Russia, American Nuclear Society, *Transactions of fusion technology*, 35 (1999) 330-334.
- [36] A. V. Ilin, F. R. Chang Diaz, J. P. Squire, et al. “Particle Simulations of Plasma Heating in VASIMR” *AIAA* 3753 (2000).
- [37] G.B. Jacobs, J.S. Hesthaven, High-order nodal discontinuous Galerkin particle-in-cell method on unstructured grids, *J. Comput. Phys.* 214 (2006) 96– 121.
- [38] Jaeger E.F., Batchelor D.B, Weitzner H. and Healton J.H. “ICRF Wave Propagation And Absorption in Tokamak and Mirror Magnetic Fields - A Full-wave Calculation”, *Computer Physics Com.*, 40 (1986) 33-64.
- [39] B. Jiang, J. Wu and L.A. Povinelli, The origin of spurious modes in computational electromagnetics, *J. Comput. Phys.* 125, pp. 104–123, 1996.
- [40] P. Joly, J. Rodriguez, An error analysis of conservative space–time mesh refinement methods for the one-dimensional wave equation, *SIAM J. Numer. Anal.* 43 (2005) 825–859.
- [41] N. A. Krall A. W. Trivelpiece, “Principles of plasma physics” (McGraw-Hill, New York,1973), pp.385 and 390.
- [42] A. B. Langdon. On enforcing Gauss’s law in electromagnetic particle-in-cell codes, *Computer physics communications* 70 (1992) pp. 447-450.
- [43] B. Marder, A method for incorporating Gauss’ law into electromagnetic PIC codes. *J. Comput. Phys.* 68 (1987)pp 48-55.
- [44] B. J. McCartin, J.F. Dicello, Three dimensional finite difference frequency domain scattering computation using the control region approximation, *IEEE Trans. Magnetics* 25 (4) (1989) 3092–3094.

- [45] C. J. McKinstrie, R. E. Giacone, and E. A. Startsev, “Accurate formulas for the Landau damping rates of electrostatic waves” *Phys. Plasmas* 6, 463 (1999).
- [46] A. H. Mohammadian, V. Shankar and W. Hall, Computations of electromagnetic scattering and radiation using a time-domain finite volume discretization procedure, *Comput. Phys. Comm.*, 68, pp. 175–196, 1991.
- [47] C.-D. Munz, P. Omnes and R. Schneider, A three-dimensional finite-volume solver for the Maxwell equations with divergence cleaning on unstructured meshes, *Comput. Phys. Comm.*, 130, pp. 83–117, 2000.
- [48] C. D Munz, R. Schneider, E. Sonnendrücker, U. Voss, “Maxwell’s equations when the charge conservation is not satisfied”, *C.R Acad. Sci. PARIS*, t. 328 Série I (1999) pp. 431-436.
- [49] C.-D. Munz, R. Schneider, U. Voss, A finite-volume method for the Maxwell equations in the time domain, *SIAM J. Sci. Comput.* 22 (2000) 449–47.
- [50] C.-D. Munz, R. Schneider and U. Voss, A finite-volume method for the Maxwell equations in the time domain, *SIAM J. Sci. Comput.* 22, pp. 449–475, 2000.
- [51] G. Mur, The fallacy of edge elements, *IEEE Trans. Magnetics* 34, pp. 3244–3247, 1998.
- [52] G. Mur, Compatibility relations and the finite-element formulation of electromagnetic field problems, *IEEE Trans. Magnetics* 30, pp. 2972–2975, 1994.
- [53] J.-C. Nedelec, A new family of mixed elements in  $\mathbb{R}^3$ , *Numer. Math.* 50 (1986) 57–81.
- [54] R. A. Nicolaides and D.-Q. Wang. “Convergence analysis of a covolume scheme for Maxwell equations in three dimensions”. *Math. comput.* 65. pp. 947-963. 1998.
- [55] C. Pierre, Modélisation et simulation de l’activité électrique de coeur dans le thorax, analyse numérique et méthodes de volumes finis, Thèse de doctorat, Université de Nantes, France. 2005
- [56] S. Piperno.  $L^2$  stability of the upwind first order finite volume scheme for the Maxwell equation in two and three dimensions on arbitrary unstructured meshes. *RAIRO modél. math. Anal. Numér.*, 34(1) :139-158, 2000.
- [57] S. Piperno and L. Fezoui. A centered Discontinuous Galerkin Finite Volume scheme for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes. Technical report RR-4733 INRIA (2003).
- [58] S. Piperno, M. Remaki, L. Fezoui, A non-diffusive finite volume scheme for the 3D Maxwell equations on unstructured meshes, *SIAM J. Numer. Anal.* 39 (2002) 2089–2108.
- [59] M. Remaki, A new finite volume scheme for solving Maxwell’s system, *COMPEL* 19 (2000) 913–931.

- [60] E. Thiemard, “Sur le calcul et la majoration de la discr ence   l’origine” Thèse de doctorat,  cole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2000.
- [61] J. Villasenor et O. Buneman. “Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solvers”. *Computer phys. com.* 69,306-316. 1992.
- [62] U. Voss, C.-D. Munz and R. Schneider, A finite volume method for the instationary Maxwell equations, *Z. Angew. Math. Mech.* 76, Suppl. 1, pp.579–580, 1996.
- [63] Z. J. Wang, A.J. Przekwas and Yen Liu, A FV-TD electromagnetic solver using adaptive Cartesian grids, *Comput. Phys. Comm.*, 148, pp. 17–29, 2002.
- [64] K. S. Yee. “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell equations in isotropic media” *IEEE Trans. Antennas and propag.* 14. pp. 302-307. 1966

## RÉSUMÉ

Nous développons et étudions une méthode de volumes finis pour résoudre le système de Maxwell instationnaire bidimensionnel sur des maillages presque quelconques (non-conformes, non-convexes, aplatis..). Nous commençons par la construction du schéma, qui est basé sur l'utilisation des opérateurs discrets de la méthode DDFV et sur un choix pertinent pour la discrétisation des conditions initiales et des conditions aux limites. Ensuite, nous prouvons que ce schéma préserve localement la condition de divergence, que l'énergie électromagnétique discrète est conservée ou décroissante (selon les conditions aux limites) et qu'elle est positive sous condition CFL. Nous montrons aussi la stabilité du schéma sous condition CFL et sa convergence dans les cas de champs réguliers et non réguliers. Ces résultats sont ensuite validés, numériquement avec quelques cas tests sur différents types de maillages. Nous vérifions aussi que l'utilisation des maillages non conformes n'amplifie pas les réflexions parasites. Enfin nous couplons ce schéma avec une méthode PIC pour résoudre le système de Maxwell-Vlasov. Nous calculons la densité de courant avec une généralisation de la méthode de Buneman à des maillages quelconques et nous montrons la conservation des équations de charge discrètes, ce qui permet de conserver la loi de Gauss. Le problème couplé est validé numériquement et la simulation de l'amortissement Landau confirme la décroissance de l'énergie, portée par le champ électrique, avec une précision dépendant du nombre de particules par maille.

**Mots clés :** Équations de Maxwell, volumes finis, DDFV, loi de Gauss, schéma de Yee, maillage dual, maillages non-conformes, conservation d'énergie, condition CFL de stabilité, convergence, équation de Vlasov, PIC, conservation de charge, amortissement Landau.

## ABSTRACT

We develop and study a finite volume method to solve the bidimensional nonstationary Maxwell equations on arbitrary (non-conforming, non-convex, flat...) meshes. We start by the construction of the scheme, which is based on the use of the DDFV discrete operators and a pertinent choice to discretize initial and boundary conditions. Then, we prove that the scheme locally preserves the divergence condition, that a discrete electromagnetic energy is conserved or decreasing (depending on boundary conditions) and that it is positive under a CFL condition. We also show the stability of the scheme under a CFL condition and its convergence for regular and non-regular fields. Then, these results are numerically validated with some tests using different types of meshes. We verify, also, that the use of non-conforming meshes doesn't amplify parasitic reflections. Finally, we coupled the scheme with a PIC method to solve the Maxwell-Vlasov system. We calculate the current density using a generalization of Buneman's method to arbitrary meshes and we prove that discrete charge equations, and thus Gauss' law, are conserved. The coupled problem is numerically validated and the simulation of Landau damping confirms the electric energy decrease with a precision depending on the number of particles per cell.

**keywords :** Maxwell equations, finite volume, DDFV, Gauss' law, Yee's scheme, dual mesh, non-conforming meshes, energy conservation, CFL stability condition, convergence, Vlasov equation, PIC, charge conservation, Landau damping.