



# THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *l'Université Toulouse III - Paul Sabatier*

Discipline ou spécialité : *systèmes automatiques*

---

Présentée et soutenue par *Céline CASENAVE*

Le 9 décembre 2009

**Titre :** *Représentation diffusive et inversion opératorielle pour l'analyse et la résolution de problèmes dynamiques non locaux*

---

## JURY

Pierre Bidan (Président) prof. d'Université, Université Paul Sabatier Toulouse III

Frédéric Bourquin (Rapporteur) ingénieur de Ponts et Chaussées, LCPC

Michel Lenczner (Rapporteur) prof. d'Université, FEMTO-ST/UTBM, Besançon

David Levadoux (Examineur) chercheur ONERA, Palaiseau

Gérard Montseny (Directeur de thèse) chargé de recherche LAAS-CNRS, Toulouse

Christophe Prieur (Examineur) chargé de recherche LAAS-CNRS, Toulouse

---

Ecole doctorale : *Systèmes*

Unité de recherche : *LAAS - CNRS*

Directeur de thèse : *Gérard Montseny*

Rapporteurs : *Frédéric Bourquin et Michel Lenczner*



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Gérard Montseny, aux côtés duquel j'ai passé trois années riches et agréables. Il a su m'initier au métier de chercheur, me guider dans mes recherches en me laissant une grande liberté, écouter et répondre à toutes mes questions avec patience et pédagogie. Sa large culture m'a ouverte à divers domaines scientifiques que j'ai pris plaisir à découvrir ; la facilité déconcertante avec laquelle il les aborde et passe de l'un à l'autre via des liens dont je n'aurais même pas soupçonné l'existence est une motivation supplémentaire qui me pousse à continuer.

Mes remerciements vont ensuite aux membres du groupe de recherche MRS au sein duquel j'ai évolué : j'y ai rencontré des personnes intéressantes et intéressées, particulièrement sympathiques que j'ai eu plaisir à côtoyer. La diversité des thématiques abordées dans ce groupe n'a jamais été un obstacle à la communication, chose que j'ai vraiment appréciée. Un grand merci à André Monin, le responsable du groupe, sur qui les doctorants peuvent toujours compter.

Je tiens à remercier Frédéric Bourquin et Michel Lenczner pour avoir accepté de rapporter ma thèse ainsi que pour les remarques qu'ils ont pu formuler. Je remercie également Messieurs Pierre Bidan, David Levadoux et Christophe Prieur pour avoir accepté de faire partie de mon jury, avec lequel j'ai apprécié de discuter.

Merci à Caroline, qui m'a suivie et soutenue depuis mon passage à Supaéro, et à Henri avec lequel j'ai aimé travailler. Je remercie également tous les enseignants-chercheurs que j'ai cotoyés lors de mon monitorat, en particulier Philippe, Carine, les "deux Bruno", et Patrick, qui m'ont aidé dans mon apprentissage de l'enseignement du supérieur.

Merci à ma famille : mes parents, ma sœur, mon frère, mes grand-parents, et tous mes amis qui ont suivi mon parcours.

J'adresse tout particulièrement ma reconnaissance à Katia pour ses encouragements et son soutien sincères : l'intérêt permanent qu'elle m'a porté tout au long de mon cursus et ses conseils extra-scientifiques avisés m'ont été particulièrement bénéfiques.

Mon dernier remerciement est pour Emmanuel, à qui je dois énormément, et sans qui je n'écrirais pas ces lignes aujourd'hui.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>I Inversion opératorielle sous représentation diffusive : théorie et mise en œuvre</b>	<b>7</b>
<b>1 Représentation Diffusive : l'essentiel</b>	<b>9</b>
1.1 Principe général	10
1.2 Cas particulier $\mu \in L^1_{loc}$ : théorème fondamental	13
1.3 Terminologie	17
1.4 Questions de topologie et d'algèbre : le cas général	17
1.4.1 Espaces $\mathcal{D}_{L^{\infty}_P}$ et $\mathcal{D}'_{L^{\infty}_P}$	17
1.4.2 Espaces $\Delta_{\gamma}$ et $\Delta'_{\gamma}$	18
1.4.3 Espaces $\Delta_{\gamma}$ et $\Delta'_{\gamma}$	24
1.5 En résumé	28
1.6 Extensions	29
1.6.1 Opérateurs non invariants dans le temps	29
1.6.2 Opérateurs $\gamma$ -diffusifs au sens large	29
1.6.3 Opérateurs matriciels	30
<b>2 Quelques éléments techniques</b>	<b>33</b>
2.1 Le $\gamma$ -symbole	33
2.1.1 Détermination analytique	33
2.1.2 Simplifications dans certains cas particuliers	36
2.1.3 Exemples	38
2.1.4 Cas où $H(\partial_t)$ n'est pas $\gamma$ -réalisable	38
2.2 Approximations numériques	41
2.2.1 Sur le choix de la discrétisation de $\xi$	41
2.2.2 1 <sup>ère</sup> méthode d'approximation via les fonctions d'interpolation	41
2.2.3 2 <sup>ème</sup> méthode : approximation optimale du $\gamma$ -symbole	42
2.2.4 Discrétisation temporelle	43
<b>3 Inversion de <math>\gamma</math>-symboles</b>	<b>45</b>
3.1 Problématique	45
3.2 L'algèbre $\Sigma_{\gamma}$	46
3.2.1 Construction-définition	46
3.2.2 Produit $\#$ dans $\Sigma_{\gamma}$	47
3.2.3 Propriétés de $\Sigma_{\gamma}$	48
3.2.4 Extension aux $\gamma$ -symboles matriciels	48
3.3 L'inversion dans $\Sigma_{\gamma}$	48
3.3.1 Inverse d'un $\gamma$ -symbole	48
3.3.2 Sur la continuité de l'opération d'inversion	49

3.4	Inversion numérique . . . . .	54
3.4.1	Etude mathématique . . . . .	54
3.4.2	Mise en œuvre . . . . .	58
3.4.3	Cas où $\mu$ est non inversible dans $\Sigma_\gamma$ . . . . .	63
3.4.4	Exemples . . . . .	65
3.5	Extension aux opérateurs matriciels . . . . .	71
<b>II Application à certains problèmes dynamiques non locaux</b>		<b>75</b>
<b>4</b>	<b>Quelques problèmes</b>	<b>77</b>
4.1	Analyse et simulation de systèmes dynamiques . . . . .	77
4.1.1	Transformation d'un modèle de flammes sphériques en vue de sa simulation . . . . .	77
4.1.2	Etude et simulation d'un modèle de paroi poreuse . . . . .	78
4.1.3	Schémas numériques pour une classe de modèles de propagation non locaux . . . . .	80
4.2	Réduction de modèles non linéaires . . . . .	81
4.3	Identification de modèles de Volterra non linéaires . . . . .	83
4.3.1	Motivations . . . . .	83
4.3.2	Paramétrisation de l'opérateur $H(\partial_t)$ via la représentation diffusive . . . . .	84
4.3.3	Les méthodes proposées . . . . .	85
4.3.4	Sur l'intérêt de l'inversion $\gamma$ -symbolique en identification . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Identification d'un opérateur <math>H(\partial_t)</math> via son <math>\gamma</math>-symbole</b>	<b>89</b>
5.1	Présentation de la méthode . . . . .	89
5.1.1	Principe . . . . .	89
5.1.2	Extensions . . . . .	91
5.1.3	Analyse de l'estimateur . . . . .	91
5.2	Du point de vue numérique . . . . .	94
5.3	Application numérique . . . . .	97
5.3.1	Validation de la méthode sur des exemples "test" . . . . .	97
5.3.2	Application à l'identification de l'opérateur d'impédance d'une paroi poreuse [18] . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Identification simultanée de l'opérateur dynamique et de la fonction non linéaire du modèle</b>	<b>107</b>
6.1	Principe . . . . .	107
6.2	Du point de vue numérique . . . . .	108
6.3	Application à un exemple académique . . . . .	110
<b>7</b>	<b>Identification par suppression du terme non linéaire</b>	<b>113</b>
7.1	Présentation de la méthode . . . . .	113
7.1.1	L'opérateur de différences $D_{x,\varepsilon}$ . . . . .	114
7.1.2	Transformation de l'équation via l'opérateur de différences $D$ . . . . .	116
7.1.3	Réduction au sous-ensemble $\Omega_{x,0}$ . . . . .	117
7.1.4	Cas où $g$ est variable d'une trajectoire à l'autre . . . . .	118
7.1.5	Application aux modèles de Volterra sous représentation diffusive . . . . .	118
7.2	Du point de vue numérique . . . . .	119
7.3	Application numérique . . . . .	121
7.3.1	Validation sur un exemple académique . . . . .	121
7.3.2	Application à un cas physique réaliste . . . . .	123
<b>Conclusion</b>		<b>129</b>

---

<b>III</b>	<b>Annexes</b>	<b>131</b>
<b>A</b>	<b>Notions sur les Opérateurs</b>	<b>133</b>
A.1	Opérateurs linéaires intégraux . . . . .	133
A.2	Notions générales . . . . .	134
<b>B</b>	<b>Expression analytique des coefficients <math>K^{qkr}</math> en inversion <math>\gamma</math>-symbolique numérique</b>	<b>137</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>139</b>





# Introduction

De nombreux modèles de la physique font intervenir, outre des opérateurs différentiels, des opérateurs dynamiques intégraux, de la forme :

$$u \mapsto \mathcal{H}u, (\mathcal{H}u)(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t, s)u(s) ds; \quad (1)$$

ces opérateurs sont fréquemment de nature convolutive, c'est-à-dire :  $\mathbf{h}(t, s) = h(t - s)$  et on note alors, de façon naturelle  $\mathcal{H} = H(\partial_t)$  où  $H$  est appelée fonction de transfert ou symbole. Par ailleurs, au sens des distributions et grâce au théorème des noyaux de Schwartz, les opérateurs différentiels (voire aux différences finies) sont également représentables par (1), ce qui confère à cette formulation une portée étendue.

De tels modèles sont souvent de la forme "explicite" (ou de Volterra) :

$$H(\partial_t)X = f(X, u), \quad (2)$$

où  $f$  est une fonction non linéaire,  $H(\partial_t)$  est un opérateur en général matriciel, défini par une matrice de transfert (ou symbole)  $H$  non nécessairement rationnelle. Sous hypothèses de régularité sur  $H$ , en pratique peu restrictives, les modèles (2) sont de type "pseudo-différentiel", du fait de certaines analogies de l'opérateur  $H(\partial_t)$  avec les opérateurs différentiels. Par leur richesse, les modèles pseudo-différentiels présentent de plus en plus d'intérêt pour les problèmes actuels dans divers domaines ; on peut par exemple citer [30, 43, 52, 53, 54] en physique, [29, 34, 39] en analyse mathématiques et simulation numérique, [1, 26, 38] pour les problèmes de contrôle, [7, 36] en ingénierie électrique, [61] en biologie, etc.

Les problèmes (d'analyse, de simulation, de contrôle, etc...) relatifs à de tels modèles posent en général de nombreuses difficultés, directement liées à la non localité dans le temps des opérateurs  $H(\partial_t)$ , les outils habituels de l'analyse des systèmes dynamiques étant pour la plupart dédiés au cas différentiel  $H(\partial_t) = \partial_t$ . L'expression de  $H(\partial_t)X$  sous forme d'un produit de convolution est en effet de manipulation délicate et l'approximation numérique par quadratures directe de l'intégrale est coûteuse, sinon irréalisable. Dans le cas linéaire, le passage au domaine fréquentiel reste, bien sûr, envisageable dans certains cas ; cependant, même dans le cas linéaire, l'approche fréquentielle classique n'est pas adaptée aux problèmes temps-réels (identification, poursuite, contrôle, etc).

L'approche dénommée "représentation diffusive" [48] s'inscrit dans cette problématique : elle permet la reformulation d'opérateurs dynamiques intégraux au moyen d'une réalisation d'état, basée sur le "symbole diffusif" (ou  $\gamma$ -symbole), objet mathématique de nature en général distributionnelle, associé à l'opérateur. Cette réalisation d'état est de dimension infinie, mais locale en temps, ce qui rend la manipulation des opérateurs ainsi réalisés beaucoup plus aisée, tant pour l'analyse que pour l'approximation numérique. L'inconvénient de la dimension infinie de la réalisation est en effet pallié par la nature diffusive de l'équation d'état, ce qui assure, notamment, la possibilité d'approximations numériques à la fois précises et peut coûteuses. On peut noter par ailleurs que le  $\gamma$ -symbole intervient de manière linéaire dans la réalisation de  $H(\partial_t)X$ , propriété dont on tirera partie en particulier pour les problèmes d'identification de modèles.

Outre les aspects numériques, la représentation diffusive offre un cadre mathématique unifié et adapté à l'analyse des opérateurs intégraux. Ces derniers peuvent ainsi être manipulés de façon

simple et naturelle, les opérations algébriques sur les opérateurs de convolution étant associées à des opérations *ad-hoc* sur les  $\gamma$ -symboles. Ainsi, en particulier, le produit  $\#_\gamma$  de deux  $\gamma$ -symboles est l'image, dans l'espace des  $\gamma$ -symboles, du produit de composition de deux opérateurs.

Parmi les nombreux problèmes où cette théorie a permis des améliorations significatives, on peut citer par exemple l'étude des systèmes et signaux stochastiques, tels que les mouvements Browniens fractionnaires [11], la simulation d'opérateurs *d'impédance* sur une frontière circulaire pour l'équation des ondes 2D [40], la modélisation et simulation de phénomènes physiques tels que la propagation des ondes dans un matériau poreux [12, 17], l'analyse d'un modèle singulier d'évolution d'une flamme sphérique [3, 4], la modélisation et identification de comportements dynamiques complexes dans certains composants du génie électrique [55, 56], ou encore divers autres travaux en traitement du signal [24], identification [27, 35, 51], contrôle de systèmes dynamiques [1, 26], etc.

La structure d'algèbre topologique de l'ensemble  $\Delta'_\gamma$  des  $\gamma$ -symboles, décrite en détail dans [48], permet une grande souplesse dans le maniement et l'approximation d'opérateurs dynamiques pseudo-différentiels. Cependant, dans nombre de cas, l'inversion d'opérateurs dynamiques apparaît utile, sinon, parfois, incontournable. Or cette opération ne peut être définie dans  $\Delta'_\gamma$  et nécessite donc une extension adéquate de cette algèbre. C'est là que se situe la problématique théorique abordée dans cette thèse ; elle fait l'objet de la première partie. Dans la seconde partie, les résultats de la première partie sont utilisés pour le traitement de certains problèmes dynamiques relatifs à des modèles pseudo-différentiels, en particulier l'identification de modèles de Volterra non linéaires. Le contenu du mémoire est décrit ci-après.

La première partie de cette thèse, dédiée à la représentation diffusives en général et plus particulièrement à l'inversion opératoire, est constituée de 3 chapitres. Dans le chapitre 1 sont rappelés les principes fondamentaux, les résultats essentiels et les extensions utiles pour l'inversion  $\gamma$ -symbolique. Dans le chapitre 2, sont décrits quelques éléments techniques permettant l'utilisation pratique (en particulier numérique) de cette méthodologie, plus précisément pour la détermination analytique des  $\gamma$ -symboles et les approximations numériques des réalisations d'état.

Enfin, le chapitre 3, qui concentre l'essentiel des résultats théoriques originaux obtenus au cours de cette thèse, est consacré au problème de l'inversion d'opérateurs  $H(\partial_t)$  sous formulation  $\gamma$ -symbolique, opération essentielle pour nombre d'applications, comme par exemple l'identification de modèles. L'algèbre des  $\gamma$ -symboles considérée jusqu'à présent n'étant pas unitaire, une immersion dans une algèbre plus grande dans laquelle l'inversion est bien définie a été nécessaire. Dans ce cadre algébrique étendu, on a ensuite établi plusieurs résultats garantissant la résolubilité concrète du problème de l'inversion  $\gamma$ -symbolique, en fait mal posé au sens de Hadamard, mais régularisable, la continuité de l'opération d'inversion n'ayant en fait été obtenue que pour un mode de convergence affaibli, mais tout à fait adapté au numérique. Diverses méthodes d'inversion  $\gamma$ -symbolique numérique ont été proposées et testées avec succès sur quelques exemples non triviaux. L'extension aux opérateurs matriciels, essentiels en pratique, a également été abordée de manière formelle, les questions topologiques étant similaires à celles du cas scalaire.

Dans ce contexte théorique ainsi étendu, divers problèmes relatifs aux modèles pseudo-différentiels précédemment évoqués ont été abordés en seconde partie de cette thèse.

Dans le chapitre 4 sont résumés les principaux travaux effectués durant la thèse, dans les domaines de l'analyse et simulation de systèmes dynamiques, de la réduction de modèles non linéaires ou de l'identification de modèles de Volterra non linéaires. Ces travaux ont fait l'objet des publications [12, 13, 14, 15, 16, 17, 21]. Les travaux sur l'identification, plus conséquents, sont décrits en détail dans les chapitres 5, 6 et 7.

Le chapitre 5 traite de l'identification d'un opérateur convolutif  $H(\partial_t)$  via son  $\gamma$ -symbole. Grâce à la dépendance linéaire du modèle transformé par représentation diffusives par rapport au  $\gamma$ -symbole, celui-ci peut être identifié par simple projection orthogonale relativement à un produit scalaire adapté. Après validation sur des exemples "test", la méthode est appliquée dans une situation plus

---

significative, à savoir l'identification (à partir de données simulées) de l'opérateur d'impédance pour un modèle de paroi poreuse.

Dans le chapitre 6, on réalise l'identification simultanée de l'opérateur dynamique  $H(\partial_t)$  et de la fonction non linéaire  $f$  intervenant dans un modèle générique de la forme (2). Pour cela, à l'opérateur  $H(\partial_t)$  est d'une part substitué son  $\gamma$ -symbole via la transformation de représentation diffusive (comme présenté dans le chapitre 5), d'autre part la fonction  $f$  est paramétrisée au moyen d'une base de fonctions convenable. On obtient ainsi un problème équivalent dans lequel les paramètres à identifier apparaissent tous linéairement, permettant, là encore, l'identification par projection orthogonale. La méthode est validée sur des exemples test.

Dans le chapitre 7, on propose enfin une nouvelle méthode d'identification pour les modèles de Volterra scalaires, basée sur un "découplage" de l'identification de  $H(\partial_t)$  et de  $f$ . L'idée sous-jacente consiste à supprimer, au moyen d'une transformation convenable des trajectoires mesurées, le terme non linéaire  $f(X, u)$  sur un sous-ensemble discret de couples de temps  $(t, \tau)$  en lesquels le terme non linéaire prend des valeurs voisines (i.e.  $f(X(t), u(t)) \simeq f(X(\tau), u(\tau))$ ). Cette opération est réalisée au moyen d'une transformation opératorielle du modèle (2) spécifiquement introduite à cet effet.



Première partie

Inversion opératorielle sous  
représentation diffusive : théorie et  
mise en œuvre



# Chapitre 1

## Représentation Diffusive : l'essentiel

Les opérateurs linéaires intégraux, c'est à dire les opérateurs  $\mathcal{H}$  de la forme :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{h}(t, s)u(s)ds, \quad (1.1)$$

sont très fréquents dans les modèles de la physique. L'étude de tels opérateurs est donc primordiale et d'autant plus délicate que la classe d'opérateurs considérée est très vaste : elle englobe en particulier les opérateurs rationnels et, si le noyau  $\mathbf{h}$  est étendu aux distributions, les opérateurs différentiels. Tant pour l'analyse que pour la mise en œuvre numérique, il peut paraître judicieux d'en chercher une formulation plus intéressante que la formulation intégrale (1.1), qui par nature est de manipulation délicate. En effet la formulation (1.1) est *héréditaire* : la détermination de la valeur de  $\mathcal{H}u$  à un temps  $t$  fait intervenir tout le passé de  $u$ , ce qui, du point de vue numérique par exemple, n'est pas économique.

L'approche dénommée *représentation diffusive*, présentée dans [48], s'inscrit dans cette problématique : elle permet la formulation de  $\mathcal{H}$  au moyen de réalisations d'état, c'est-à-dire, dans le cas où l'opérateur  $\mathcal{H}$  est *causal* et  $u$  à support dans  $\mathbb{R}_+$  :

$$(\partial_t - A)X = Bu, \quad X(0) = 0, \quad (1.2)$$

$$\mathcal{H}u = CX, \quad (1.3)$$

avec  $B$  et  $C$  des opérateurs *locaux en temps*. Du fait de la localité des opérateurs et de l'équation, cette formulation n'est pas héréditaire : une intégration de "proche en proche" de (1.2) peut être réalisée, ne nécessitant aucunement la mémorisation du passé de  $u$ . La disparition de la nature héréditaire dans la formulation d'état (1.2,1.3) est en fait due à l'introduction de la variable intermédiaire  $X$  dans laquelle est "résumé" le passé de  $u$  d'une manière suffisante pour la synthèse de  $\mathcal{H}$ , définie par l'opérateur  $C$ . Au delà des opérateurs  $\mathcal{H}$  causaux, on pourra trouver dans [48] des formulations d'état généralisées de la forme :

$$\begin{cases} DX = Bu, \\ \mathcal{H}u = CX, \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $D$  est un opérateur local plus général que  $\partial_t - A$ , éventuellement non causal, voire spatial.

Via la représentation diffusive, on a accès à des réalisations d'état variées ce qui, sur le plan numérique notamment, permettra la simulation de systèmes complexes. Mais cette approche est bien plus qu'une méthode dédiée aux seules approximations numériques : c'est une méthodologie générale qui fournit un cadre mathématique unifié pour l'analyse, la manipulation et la réalisation concrète d'une grande classe d'opérateurs intégraux. Ainsi, un opérateur rationnel simple et un opérateur non convolutif très complexe sont selon cette approche appréhendés et traités de manière identique et relativement simple, le passage aux réalisations numériques utilisables étant possible à tout moment.

L'essentiel de la représentation diffusive (dans le cas causal) est présenté dans les paragraphes qui suivent.

## 1.1 Principe général

On considère un opérateur linéaire intégral causal  $\mathcal{H}$  de noyau  $\mathbf{h}$  (cf. (1.1)) et de "réponse impulsionnelle"  $h$  définie par  $h(t, s) := \mathbf{h}(t, t - s)$ , avec  $h(t, \cdot)$  supposée, dans un premier temps, localement intégrable pour tout  $t$ . L'opérateur  $\mathcal{H}$  étant causal, on a :  $h(t, s) = 0, \forall s < 0$ . Par simple réécriture de (1.1), on déduit :

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}u)(t) &= (h(t, \cdot) * u)(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} h(t, s)u(t - s)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t, s)u(t - s)1_{[0, +\infty[}(s)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t, s)\mathbf{u}(t, s)ds, \end{aligned} \tag{1.5}$$

où  $\mathbf{u}(t, s) = u(t - s)1_{[0, +\infty[}(s)$  est appelée *histoire* de  $u$  (à l'instant  $t$ ). Avec la notation  $\langle f, g \rangle := \int f(s)g(s) ds$ , on obtient alors la propriété fondamentale pour la suite :

$$\forall t, \quad (\mathcal{H}u)(t) = \langle h(t, \cdot), \mathbf{u}(t, \cdot) \rangle, \tag{1.6}$$

c'est-à-dire : le résultat de l'opérateur  $\mathcal{H}$  sur une fonction  $u$  s'exprime par le *produit* (au sens du crochet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) de la *réponse impulsionnelle* de  $\mathcal{H}$  et de l'*histoire* de  $u$ .

On notera d'une part que le produit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est indépendant de  $t$  (au sens où le domaine parcouru par  $s$  l'est), d'autre part qu'à chaque  $t$  (fixé),  $h(t, \cdot)$  et  $\mathbf{u}(t, \cdot)$  sont des fonctions d'une variable temps  $s \in \mathbb{R}$ . Ces deux propriétés vont permettre d'une part l'utilisation de transformations simples et riches en propriétés intéressantes, d'autre part de définir un cadre topologique clair basé sur des espaces fonctionnels en dualité par le produit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

On considère une transformation linéaire inversible  $\mathcal{A}$  (indépendante de  $t$ ) telle que, de manière pour l'instant *formelle*, on ait :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle h(t, \cdot), \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\mathbf{u}(t, \cdot) \rangle. \tag{1.7}$$

En transposant  $\mathcal{A}^{-1}$  sur  $h(t, \cdot)$  via son adjoint formel, on a :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle (\mathcal{A}^{-1})^*h(t, \cdot), \mathcal{A}\mathbf{u}(t, \cdot) \rangle, \tag{1.8}$$

soit encore :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle \tag{1.9}$$

avec  $\psi(t, \cdot) = (\mathcal{A}\mathbf{u}(t, \cdot))$  et  $\mu(t, \cdot) = (\mathcal{A}^*)^{-1}h(t, \cdot)$ . On a ainsi accès à de nouvelles formulations de l'opérateur  $u \mapsto \mathcal{H}u$  qui toutes ont l'avantage de "séparer ce qui se rapporte à  $\mathcal{H}$  de ce qui se rapporte à  $u$ ", et dont certaines pourraient être intéressantes. En particulier, le cas où  $\psi$  serait solution d'une équation différentielle de "résolution aisée", du type :

$$\partial_t \psi = f(\psi, u) \tag{1.10}$$

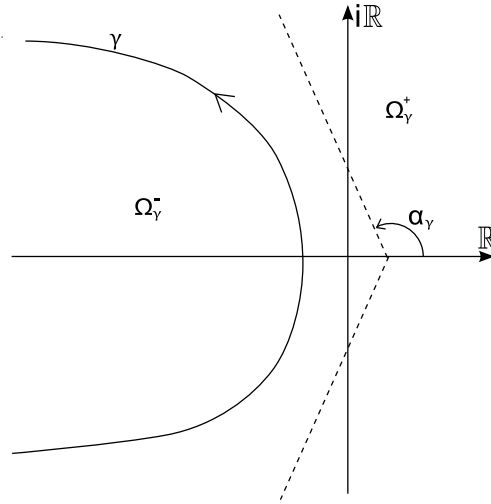
pourrait présenter de gros avantages sur le plan numérique.

Considérons à présent l'opérateur linéaire  $(\partial_t - pI)$ . On peut montrer que cet opérateur admet un inverse dans l'algèbre  $\mathcal{L}_+(L^2(\mathbb{R}))$  des opérateurs linéaires continus et causaux dans  $L^2(\mathbb{R})$  si  $\text{Re}(p) < 0$ . On introduit alors la définition abstraite (dont la justification apparaîtra plus loin) :

**Définition 1** On appelle *opérateur de représentation diffusive*, et on note  $\mathfrak{Rd}$ , la fonction opératoirelle :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Rd} : \quad \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{L}_+(L^2(\mathbb{R})) \\ p &\longmapsto \mathfrak{Rd}_p = (\partial_t - pI)^{-1} \end{aligned} \tag{1.11}$$



FIG. 1.1 – Exemple de contour  $\gamma$ .

On note  $\Psi(t, \cdot)$  la *représentation diffusive* de  $u$ , c'est à dire  $\Psi(t, p) = \mathfrak{A}d_p u(t)$ . Il découle de la définition précédente que  $\Psi$  est l'unique solution de la famille d'équations différentielles dans  $L^2(\mathbb{R}_t)$  :

$$\partial_t \Psi(t, p) = p \Psi(t, p) + u(t). \quad (1.12)$$

La fonction  $\Psi$  étant solution d'une équation différentielle, elle pourra, dans le cas où  $u$  est à support dans  $[t_0, +\infty[$ , être obtenue (éventuellement numériquement) par intégration de cette équation à partir d'une condition initiale  $\Psi(t_0, p) = 0$ .

On cherche à présente à définir un opérateur  $\mathcal{A}$  adapté, c'est-à-dire par exemple tel que :

$$(\mathcal{A}u(t, \cdot))(\xi) = (\partial_t - \gamma(\xi)I)^{-1}u(t), \quad \gamma(\xi) \in \mathbb{R}^- + i\mathbb{R} = \mathbb{C}^-, \quad (1.13)$$

où  $\gamma$  est une fonction convenable de  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Pour cela, on considère un contour encore noté  $\gamma \subset \mathbb{C}^-$  défini par un arc simple fermé (éventuellement à l'infini) qui sépare  $\mathbb{C}$  en deux sous-espaces connexes disjoints notés  $\Omega_\gamma^+$  et  $\Omega_\gamma^-$ . Pour des raisons techniques qui apparaîtront plus loin, on suppose en outre vérifiées les hypothèses suivantes (voir figure 1.1) :

$$\exists \alpha_\gamma \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[, \exists a \in \mathbb{R} \text{ tels que :}$$

$$\bullet e^{i[-\alpha_\gamma, \alpha_\gamma]}\mathbb{R}_+ + a \subset \Omega_\gamma^+, \quad (1.14)$$

$$\bullet \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R} \subset \Omega_\gamma^+, \quad (1.15)$$

$$\bullet \gamma \cap i\mathbb{R} \text{ de mesure nulle.} \quad (1.16)$$

On suppose enfin que l'arc  $\gamma$  est paramétré au moyen d'une fonction encore notée  $\gamma : \xi \in J_\gamma \subset \mathbb{R} \mapsto \gamma(\xi) \in \mathbb{C}^-$ , et qu'il existe  $b, c > 0$  tels que

$$b \leq |\gamma'(\xi)| \leq c \quad \xi\text{-pp.} \quad (1.17)$$

De ce qui précède, on déduit aisément que  $\mathfrak{A}d_{\gamma(\xi)}u(t)$  est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi)\psi(t, \xi) + u(t), \quad \xi \in J_\gamma, \psi(0, \xi) = 0. \quad (1.18)$$

**Remarque 2** Du fait de la condition sectorielle (1.14) imposée au contour  $\gamma$ , cette équation est de nature diffusive [64]. Grâce à cette propriété, des approximations relativement peu coûteuses de

l'équation d'état (1.18) pourront être construites. En pratique, on utilisera une discrétisation en  $\xi$  de  $\gamma$  d'autant moins fine que le contour s'éloignera de l'axe imaginaire pur : quelques dizaines de points de discrétisation en  $\xi$  sont alors en général suffisants.

D'après la formule de Duhamel pour (1.18) et en notant  $\mathcal{L}$  la transformation de Laplace<sup>1</sup> :

$$\mathfrak{Rd}_{\gamma(\xi)}u(t) = \int_{t_0}^t e^{\gamma(\xi)(t-s)}u(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma(\xi)(t-s)}u(s)1_{\mathbb{R}_+}(t-s)ds \quad \xi\text{-pp}, \quad (1.20)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Rd}_{\gamma(\xi)}u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s}u(t-s)1_{\mathbb{R}_+}(s)ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s}\mathbf{u}(t,s)ds = (\mathcal{L}\mathbf{u}(t,\cdot))(-\gamma(\xi)) \quad \xi\text{-pp}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

**Définition 3** On note  $\mathcal{L}_\gamma$  l'opérateur défini par :

$$(\mathcal{L}_\gamma g)(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s}g(s)ds = (\mathcal{L}g)(-\gamma(\xi)) \quad (1.22)$$

On alors :

$$\mathfrak{Rd}_{\gamma(\xi)}u(t) = (\mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}(t,\cdot))(\xi) \quad \xi\text{-pp}, \quad (1.23)$$

d'où, toujours formellement :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu(t,\cdot), \psi(t,\cdot) \rangle_\xi, \quad (1.24)$$

avec  $\psi(t,\xi) = (\mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}(t,\cdot))(\xi)$  et  $\mu(t,\xi) = ((\mathcal{L}_\gamma^*)^{-1}h(t,\cdot))(\xi)$ .

**Proposition 4** L'adjoint  $\mathcal{L}_\gamma^*$  de l'opérateur  $\mathcal{L}_\gamma$  est formellement défini par :

$$(\mathcal{L}_\gamma^* f)(s) = \begin{cases} \int_{J_\gamma} e^{\gamma(\xi)s}f(\xi)d\xi & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s \leq 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

**Preuve.** Par définition, on a :

$$\langle \mathcal{L}_\gamma^* f, g \rangle_s = \langle f, \mathcal{L}_\gamma g \rangle_\xi. \quad (1.26)$$

Donc, sous réserve d'applicabilité du théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_\gamma^* f, g \rangle_s &= \int_{J_\gamma} f(\xi) \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s}g(s)ds d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)1_{\mathbb{R}_+}(s) \int_{J_\gamma} e^{\gamma(\xi)s}f(\xi)d\xi ds \\ &= \langle 1_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \int_{J_\gamma} e^{\gamma(\xi)\cdot}f(\xi)d\xi, g \rangle_s. \end{aligned} \quad (1.27)$$

■

<sup>1</sup>on considère ici la transformée de Laplace standard :

$$\mathcal{L}u = \int_0^\infty e^{-pt}u(t)dt. \quad (1.19)$$

**Remarque 5** On a  $(\mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot))(s) = h(t, s)$ . Or, par définition de  $\mathcal{L}_\gamma^*$ ,  $\text{supp}(\mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot)) \subset ]0, +\infty[$ . Donc les opérateurs considérés sont nécessairement causaux.

De manière formelle on a donc bien :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_\xi \quad (1.28)$$

avec  $\psi(t, \xi) = (\mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}(t, \cdot))(\xi)$  et  $(\mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot))(s) = h(t, s)$ .

Au-delà du cadre formel, cette égalité n'est cependant légitime que sous certaines hypothèses. En effet, on a :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, s) \mathbf{u}(t, s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot))(s) \mathbf{u}(t, s) ds \quad (1.29)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\mathbb{R}_+}(s) \int_{J_\gamma} e^{\gamma(\xi)s} \mu(t, \xi) d\xi \mathbf{u}(t, s) ds, \quad (1.30)$$

expression égale à :

$$\int_{J_\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s} \mathbf{u}(t, s) ds \mu(t, \xi) d\xi = \int_{J_\gamma} (\mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}(t, \cdot))(\xi) \mu(t, \xi) d\xi = \int_{J_\gamma} \psi(t, \xi) \mu(t, \xi) d\xi \quad (1.31)$$

si et seulement si le théorème de Fubini est applicable. Ce point, essentiel pour l'applicabilité de la méthode, fait l'objet des paragraphes suivants qui permettent de donner un sens rigoureux aux développements précédents. On notera que les hypothèses requises imposent certaines restrictions significatives qui devront être soigneusement prises en compte en pratique, faute de quoi des résultats absurdes seraient à craindre.

## 1.2 Cas particulier $\mu \in L_{loc}^1$ : théorème fondamental

On se place sous les hypothèses (1.14), (1.15), (1.16) et (1.17).

Soit  $H(t, \cdot) := \mathcal{L}h(t, \cdot)$  le symbole-Laplace (ou tout simplement symbole) d'un opérateur intégral causal  $\mathcal{H}$  de réponse impulsionnelle  $h$  telle que  $h(t, \cdot)$  soit localement intégrable pour tout  $t$ . Soit  $\gamma$  un contour vérifiant les hypothèses mentionnées ci-dessus. On a alors le résultat :

**Théorème 6** Si pour tout  $t$  :

► (i)  $H(t, \cdot)$  est holomorphe dans  $\Omega_\gamma^+$ , avec pour singularités sur  $\gamma$  au plus un nombre fini de points de branchement notés  $p_k$ , tels que, en notant  $c_r^k$  le cercle de centre  $p_k$  et de rayon  $r$  :

$$\forall k, \forall t, \forall s > 0, \int_{c_r^k} e^{ps} H(t, p) dp \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \quad (1.32)$$

► (ii) la trace de  $H(t, \cdot)$  sur  $\gamma$  est localement Lebesgue-intégrable,

► (iii) il existe une suite  $\rho_n$  telle que  $\rho_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $H(t, \rho_n e^{i\theta}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  uniformément par rapport à  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ,

alors  $\forall u$  à support minoré par  $t_0$ ,  $(\mathcal{H}u)(t)$  s'exprime par :

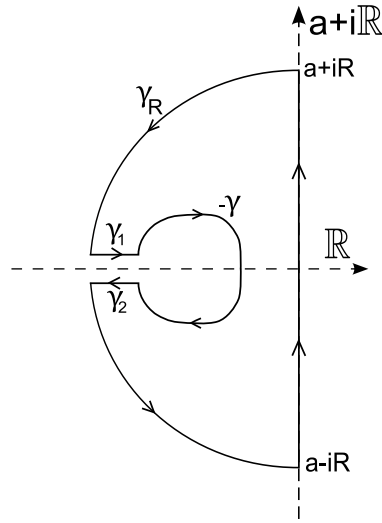
$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{J_\gamma} \mu(t, \xi) \psi(t, \xi) d\xi = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_\xi, \quad (1.33)$$

où

$$\mu(t, \cdot) \text{ solution de } \mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot) = h(t, \cdot), \quad (1.34)$$

et

$$\psi(t, \xi) \text{ solution de } \begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), & \forall \xi \in \mathbb{R} \\ \psi(t_0, \cdot) = 0. \end{cases} \quad (1.35)$$

FIG. 1.2 – contour  $\Gamma$ 

**Preuve.** Par simplicité, on considère seulement le cas  $\gamma$  borné; le cas non borné se traite de manière identique aux adaptations techniques près. Sans perdre de généralités, on suppose que  $t_0 = 0$ . On a,  $\forall t > 0, \forall s > 0$  :

$$h(t, s) = (\mathcal{L}^{-1}H(t, \cdot))(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{ps} H(t, p) dp = \frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} e^{ps} H(t, p) dp, \quad (1.36)$$

avec  $a \in \mathbb{R}_+^*$  dans le domaine de convergence de l'intégrale.

Le contour  $\gamma$  étant fermé, il existe  $R > 0$  à partir duquel on peut définir un contour  $\Gamma$  comme indiqué en figure 1.2.

On a :

$$\Gamma = (a + i[-R, R]) + \gamma_R + \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma, \quad (1.37)$$

avec  $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} / |z| = R, \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$  et  $\gamma_1 = -\gamma_2$ . Or, d'après l'hypothèse (i) :

$$\int_{\Gamma} e^{ps} H(t, p) dp = 0, \quad (1.38)$$

d'où :

$$\int_{a-iR}^{a+iR} e^{ps} H(t, p) dp + \int_{\gamma_R} e^{ps} H(t, p) dp - \int_{\gamma} e^{ps} H(t, p) dp = 0. \quad (1.39)$$

D'après le lemme de Jordan, et du fait des hypothèses (i) et (iii), on peut alors montrer que :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} e^{ps} H(t, p) dp = 0, \quad (1.40)$$

d'où :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} e^{ps} H(t, p) dp = \int_{\gamma} e^{ps} H(t, p) dp \quad \forall s > 0. \quad (1.41)$$

On a donc,  $\forall t > 0, \forall s > 0$  :

$$h(t, s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{ps} H(t, p) dp = \frac{1}{2i\pi} \int_{J_{\gamma}} e^{\gamma(\xi)s} H(t, \gamma(\xi)) \gamma'(\xi) d\xi, \quad (1.42)$$

où l'intégrale sur  $J_\gamma$  s'entend au sens de Lebesgue du fait de l'hypothèse (ii). En posant  $\mu(t, \xi) = \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} H(t, \gamma(\xi))$  on a alors :

$$\forall t > 0, h(t, s) = \begin{cases} \int_{J_\gamma} e^{\gamma(\xi)s} \mu(t, \xi) d\xi & \forall s > 0 \\ 0 & \forall s \leq 0, \end{cases} \quad (1.43)$$

soit encore :

$$h(t, s) = (\mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot))(s). \quad (1.44)$$

On a ainsi, pour toute  $u$  causale et régulière, et  $\forall t > 0, \forall \tau > 0, :$

$$(h(\tau, \cdot) * u)(t) = \int_0^t h(\tau, s) u(t-s) ds = \int_0^t \int_{J_\gamma} e^{\gamma(\xi)s} \mu(\tau, \xi) d\xi u(t-s) ds. \quad (1.45)$$

Or, par hypothèse,  $h(\tau, \cdot)$  est supposée Lebesgue-intégrable. Donc, pour toute  $u$  causale et régulière,  $(h(\tau, \cdot) * u)(t) < +\infty$  pour tout  $t > 0$  et on peut alors appliquer le théorème de Fubini sur l'espace  $L^1(0, t) \otimes L^1(\mathbb{R}_\xi)$ , d'où :

$$\begin{aligned} (h(\tau, \cdot) * u)(t) &= \int_{J_\gamma} \mu(\tau, \xi) \int_0^t e^{\gamma(\xi)s} u(t-s) ds d\xi \\ &= \int_{J_\gamma} \mu(\tau, \xi) \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s} \mathbf{u}(t, s) ds d\xi \\ &= \int_{J_\gamma} \mu(\tau, \xi) \psi(t, \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (1.46)$$

où  $\psi(t, \xi) = (\mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}(t, \cdot))(\xi)$  est solution de

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t) \\ \psi(t_0, \cdot) = 0. \end{cases} \quad (1.47)$$

■

**Remarque 7** ► Par définition, la transformée de Laplace d'une fonction  $f$  n'est définie que sur le demi plan ouvert  $\{s \in \mathbb{C} / \text{Re}(s) > \sigma_0(f)\}$  où  $\sigma_0(f) = \inf\{\sigma > 0 / \exists M_\sigma > 0 \text{ tq } |f(t)| \leq M_\sigma e^{\sigma t}, \forall t \in \mathbb{R}\}$ . Or, si  $f$  est à support dans  $\mathbb{R}_+$  on peut montrer que  $\mathcal{L}f$  se prolonge analytiquement dans un domaine  $\Sigma \supset \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$ . C'est donc en ce sens que  $H(t, \cdot)$  peut être holomorphe dans  $\Omega_\gamma^+$ .

► Avec ce théorème, on obtient une réalisation d'état utilisable de l'opérateur considéré. Cette réalisation d'état est de dimension infinie puisque à chaque  $\xi \in \mathbb{R}$  correspond une équation différentielle en  $\psi(\cdot, \xi)$ . On verra cependant que cela ne pose pas de problème, notamment sur le plan numérique où des approximations de dimensions finies raisonnables pourront être construites.

► On a montré (cf. preuve) que sous les hypothèses du théorème,

$$\mu(t, \xi) = \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} H(t, \gamma(\xi)) \quad (1.48)$$

est solution de l'équation :

$$h(t, s) = (\mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot))(s). \quad (1.49)$$

Cependant cette équation admet plusieurs solutions : le  $\mu$  de la réalisation d'état (1.47) de l'opérateur  $\mathcal{H}$  n'est donc pas unique. Dans la suite, on définira des classes d'équivalence de  $\mu$  correspondant à un même opérateur.

**Remarque 8** On peut montrer que  $H(t, \partial_t)u$  est aussi égal à l'intégrale de contour :

$$H(t, \partial_t)u(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} H(t, p) \Psi_u(t, p) dp, \quad (1.50)$$

avec  $\Psi_u(t, p) = \int_0^{+\infty} e^{ps} \mathbf{u}(t, s) ds = \mathcal{L}\mathbf{u}(-p)$ . En effet :

$$H(t, \partial_t)u(t) = \int_{J_{\gamma}} \mu(\tau, \xi) \psi(t, \xi) d\xi = \int_{J_{\gamma}} \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} H(t, \gamma(\xi)) \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s} \mathbf{u}(t, s) ds d\xi \quad (1.51)$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{J_{\gamma}} H(t, p) \int_0^{+\infty} e^{ps} \mathbf{u}(t, s) ds d\xi. \quad (1.52)$$

C'est à cette intégrale de contour que l'on donnera un sens dans des cas plus généraux où la trace sur  $\gamma$  de  $H(t, p)$  n'est plus localement intégrable.

**Remarque 9** L'hypothèse (iii) du théorème 6 permet de ramener l'intégrale sur  $a + i\mathbb{R}$  de l'inversion de Laplace, à une intégrale sur le contour  $\gamma$ . On peut cependant montrer que cette hypothèse n'est pas nécessaire. En effet, en considérant dès le départ la quantité  $H(t, \partial_t)u(t)$ , définie à l'aide d'une intégrale de convolution, on a :

$$\begin{aligned} H(t, \partial_t)u &= H(t, \partial_t)u^t \text{ où } u^t(s) = \mathbf{1}_{]-\infty, t]}(s)u(s) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}(H(t, \partial_t)u^t) = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}(h(t, \cdot) * u^t) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}h(t, \cdot) \times \mathcal{L}u^t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}(H(t, \cdot) \times \mathcal{L}u^t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} H(t, p) e^{pt} \mathcal{L}u^t(p) dp, \forall b \geq 0, \end{aligned}$$

cette dernière intégrale ayant du sens (en particulier) lorsque  $H(t, p)e^{pt}\mathcal{L}u^t(p)$  admet une limite finie en  $b \pm i\infty$ . De même que dans la démonstration, on peut considérer le contour  $\Gamma$ , sur lequel l'intégrale est nulle, et on montre alors que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} H(t, p) e^{pt} \mathcal{L}u^t(p) dp = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} H(t, p) e^{pt} \mathcal{L}u^t(p) dp \quad (1.53)$$

sous l'hypothèse (suffisante là encore) que  $H(t, p)e^{pt}\mathcal{L}u^t(p) \xrightarrow[p \rightarrow 0]{} 0$  dans  $\mathbb{C}^-$ . L'hypothèse de décroissance à l'infini du produit de  $H(t, p)$  par  $e^{pt}\mathcal{L}u^t(p)$ , moins restrictive que celle de décroissance à l'infini de  $H(t, p)$ , suffit donc à obtenir le résultat du théorème 6. L'intérêt de l'hypothèse (iii) est donc autre : ne dépendant que de  $\mathcal{H}$ , elle permet de découpler ce qui se rapporte à  $\mathcal{H}$  de ce qui se rapporte à  $u$ . Grâce à cela, on pourra entre autres construire des espaces en dualité, et considérer des éléments  $\mu$  caractéristiques d'un opérateur pour l'ensemble des entrées de l'espace considéré.

**Exemple 10** Les opérateurs de symbole  $H$  de la forme :

$$H(p) = \frac{1}{p^{\alpha}}, \alpha \in [0, 1[, \quad (1.54)$$

vérifient les hypothèses du théorème 6 (NB : l'arc  $\gamma$  est dans ce cas nécessairement non borné du fait que la fonction  $\frac{1}{p^{\alpha}}$  nécessite une coupure entre 0 et l'infini). En effet, on a en particulier :

$$\int_{C_r} \frac{1}{p^{\alpha}} dp = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{\alpha} e^{i\alpha\theta}} r i e^{i\theta} d\theta = r^{1-\alpha} \int_0^{2\pi} i e^{i(1-\alpha)\theta} d\theta < c^t e r^{1-\alpha} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0. \quad (1.55)$$

### 1.3 Terminologie

– un opérateur  $\mathcal{H}$  tel que, pour tout  $u$  causale, on ait, pour  $\psi = \mathfrak{Rd}_\gamma u$ :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle h(t, \cdot), \mathbf{u}(t, \cdot) \rangle_s = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_\xi, \quad (1.56)$$

sera dit  $\gamma$ -réalisable ou réalisable sur  $\gamma$ ,

- la fonction  $\psi = \mathcal{L}_\gamma \mathbf{u} = \mathfrak{Rd}_\gamma u$   $\xi$ -pp sera appelée  $\gamma$ -représentation de  $u$ ,
- toute solution  $\mu$  de l'équation  $h = \mathcal{L}_\gamma^* \mu$  sera appelée  $\gamma$ -symbole de  $H(t, \partial_t)$ , la solution particulière donnée par (1.48) étant dénommée  $\gamma$ -symbole canonique,
- l'expression  $\langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_\xi$  sera appelée  $\gamma$ -synthèse ou  $\gamma$ -réalisation de  $\mathcal{H}u$ ,
- enfin, un opérateur  $\mathcal{H}$  sera dit *diffusif (au sens strict)* s'il admet un  $\gamma$ -symbole avec  $\gamma$  vérifiant (1.14), (1.15) et (1.16).

### 1.4 Questions de topologie et d'algèbre : le cas général

Le théorème précédent permet d'obtenir une réalisation diffusive de  $\mathcal{H}$  via son  $\gamma$ -symbole, et ce pour de nombreux opérateurs intégraux. Cependant les hypothèses de ce théorème s'avèrent dans bien des cas trop restrictives. En effet la première hypothèse sur  $H(t, \cdot)$  interdit par exemple l'utilisation du théorème pour l'opérateur d'intégration  $\partial_t^{-1}$  pourtant essentiel en pratique. Ce théorème exclut également tous les opérateurs dont le symbole-Laplace  $H$  a des pôles sur le contour  $\gamma$ . Or, de tels opérateurs admettent une réalisation diffusive, à condition d'admettre des  $\gamma$ -symboles de nature plus générale (de type *distributionnel*), ce qu'interdit précisément l'hypothèse (ii) du théorème 6. Des raisons d'ordre numérique suggèrent également de "passer aux distributions". En effet, la complétude de l'espace des  $\gamma$ -symboles, propriété indispensable notamment pour une gestion correcte des approximations, ne peut avoir lieu que pour un espace de distributions. En outre, les approximations du  $\gamma$ -symbole conduisant à des réalisations de dimension finie sont nécessairement de la forme  $\sum a_k \delta_{\xi_k}$  (où  $\delta_{\xi_k}$  est la distribution de Dirac en  $\xi_k$ ). Enfin, tout problème d'optimisation portant sur le  $\gamma$ -symbole nécessite la fermeture de l'espace des  $\mu$ . Toutes ces raisons imposent d'étendre le résultat précédent à une classe plus large d'opérateurs à  $\gamma$ -symboles généralisés.

Pour cela, on introduit l'espace  $\Delta'_\gamma$ , dual topologique d'un espace  $\Delta_\gamma$  construit de manière "optimale" et tel que,  $\forall \mu(t, \cdot) \in \Delta'_\gamma, \forall \psi(t, \cdot) \in \Delta_\gamma$ , on ait :

$$\langle h, \mathbf{u} \rangle = \langle \mu, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}, \quad (1.57)$$

avec  $h = \mathcal{L}_\gamma^* \mu$  et  $\psi = \mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}$ . Il faut pour cela entre autres garantir l'applicabilité du théorème de Fubini dans le cadre de la dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$ . L'espace  $\Delta'_\gamma$  doit également être suffisamment grand pour englober les  $\gamma$ -symboles de certains opérateurs essentiels. Enfin, on le choisira de telle manière que le produit  $\sharp_\gamma$  défini par :

$$\left. \begin{array}{l} \mu \text{ } \gamma\text{-symbole de } H(t, \partial_t) \\ \nu \text{ } \gamma\text{-symbole de } K(t, \partial_t) \end{array} \right\} \implies \mu \sharp_\gamma \nu \text{ } \gamma\text{-symbole de } H(t, \partial_t) \circ K(t, \partial_t) \quad (1.58)$$

soit interne et continu<sup>2</sup> dans  $\Delta'_\gamma$  : ainsi la composition de deux opérateurs ( $\gamma$ -réalisables), opération essentielle en analyse de problèmes dynamiques, pourra être utilisée sans réserve. On s'assurera de plus que  $\forall \mathbf{u}$  "raisonnable"  $\psi = \mathcal{L}_\gamma \mathbf{u} \in \Delta_\gamma$  : la classe d'entrées  $u$  admissibles doit en effet être suffisamment grande pour satisfaire aux besoins pratiques.

#### 1.4.1 Espaces $\mathcal{D}_{L^\infty}$ et $\mathcal{D}'_{L^\infty}$

On considère l'espace  $L^\infty_P(\mathbb{R})$ , espace de Lebesgue défini par la norme :

$$\|\varphi\|_{L^\infty_P} = \sup_{x \in \mathbb{R}} P(\xi) |\varphi(\xi)|, \text{ où } P(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2}, \quad (1.59)$$

<sup>2</sup>Il s'agira ici de la continuité séquentielle.

et l'espace :

$$\mathcal{D}_{L_P^\infty}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}, \partial_\xi^n \varphi \in L_P^\infty(\mathbb{R})\}, \quad (1.60)$$

de Fréchet pour la topologie définie par la famille dénombrable de normes<sup>3</sup> :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\varphi\|_n = \|\partial_\xi^n \varphi\|_{L_P^\infty}. \quad (1.61)$$

**Remarque 11** *Du fait de la présence du poids  $P$ , les fonctions de  $\mathcal{D}_{L_P^\infty}(\mathbb{R})$  sont décroissantes à l'infini, ainsi que leurs dérivées de tout ordre.*

L'espace  $\mathcal{D}'_{L_P^\infty}(\mathbb{R})$ , dual topologique de  $\mathcal{D}_{L_P^\infty}(\mathbb{R})$ , vérifie  $\mathcal{D}'_{L_P^\infty} \subset \mathcal{D}'$  :

**Proposition 12** ► *Si  $\mu$  est une mesure,*

$$\mu \in \mathcal{D}'_{L_P^\infty}(\mathbb{R}) \iff \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|\xi|} |\mu(\xi)| \, d\xi < +\infty, \quad (1.62)$$

► *Si  $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ,*

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \text{ tels que } \frac{1}{\xi} \mu_{\mathbb{R} \setminus ]a, b[} \in L^1 \implies \mu \in \mathcal{D}'_{L_P^\infty}(\mathbb{R}). \quad (1.63)$$

**Remarque 13** *Notons également que pour tout  $\mu \in \mathcal{D}'_{L_P^\infty}(\mathbb{R})$ ,  $\mu(\xi) \longrightarrow 0$  quand  $|\xi| \longrightarrow \infty$ .*

### 1.4.2 Espaces $\Delta_\gamma$ et $\Delta'_\gamma$

Dans ce paragraphe, on considère une fonction  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  régulière, non bornée de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  (c'est à dire  $J_\gamma = \mathbb{R}$ ) et vérifiant la condition sectorielle (1.14). On suppose de plus, sans perte de généralité, qu'il existe  $\xi_0$  et  $\lambda > 0$  tels que :

$$\begin{aligned} & \bullet \operatorname{Re} \gamma(\xi) \leq -\lambda |\xi| \quad \forall |\xi| \geq \xi_0, \\ & \bullet \forall n > 0, \partial_\xi^n \gamma \text{ bornée,} \end{aligned} \quad (1.64)$$

et qu'il existe  $a, b > 0$  tels que

$$a \leq |\gamma'(\xi)| \leq b \quad \xi\text{-pp.} \quad (1.65)$$

On cherche un espace que l'on notera  $\Delta_\gamma$  tel que  $\forall \mathbf{u}$  "raisonnable",  $\psi = \mathcal{L}_\gamma \mathbf{u} \in \Delta_\gamma$ . Pour cela, on considère l'espace  $L_d^\infty(\mathbb{R}_s) \ni \mathbf{u}$  des fonctions de  $L^\infty(\mathbb{R}_s)$  à support majoré.

**Proposition 14**

$$\forall \mathbf{u} \in L_d^\infty(\mathbb{R}_s), \psi := \mathcal{L}_\gamma \mathbf{u} \in \mathcal{D}_{L_P^\infty}(\mathbb{R}). \quad (1.66)$$

**Preuve.** Puisque  $\mathbf{u}$  est dans  $L^\infty$  et est à support dans un segment  $] -\infty, T]$ , on a :

$$|\psi(\xi)| = |(\mathcal{L}_\gamma \mathbf{u})(\xi)| = \left| \int_0^T e^{\gamma(\xi)t} \mathbf{u}(t) \, dt \right| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{u}(t)| \int_0^T e^{\operatorname{Re}(\gamma(\xi))t} \, dt = k \frac{e^{\operatorname{Re}(\gamma(\xi))T} - 1}{\operatorname{Re}(\gamma(\xi))}; \quad (1.67)$$

des hypothèses sur la fonction  $\gamma$ , on déduit alors par simple analyse qu'il existe  $k' \in \mathbb{R}$  tel que :

$$k \frac{e^{\operatorname{Re}(\gamma(\xi))T} - 1}{\operatorname{Re}(\gamma(\xi))} \leq \frac{k'}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (1.68)$$

L'extension à  $\psi^{(k)}$  se fait ensuite par récurrence. ■

**Définition 15**  $\Delta_\gamma$  est le complété de  $\mathcal{L}_\gamma(L_d^\infty(\mathbb{R}_s))$  dans  $\mathcal{D}_{L_P^\infty}(\mathbb{R})$

**Proposition 16**  $\Delta_\gamma$  est un sous-espace strict de  $\mathcal{D}'_{L_P^\infty}$ .

**Preuve.** Pour toute fonction  $\mathbf{u} \in L_d^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\operatorname{supp} \mathbf{u} \subset \mathbb{R}^-$ , trivialement :  $\psi = \mathcal{L}_\gamma \mathbf{u} = 0$ .

■

<sup>3</sup>grâce au poids  $P$ , les constantes sont exclues.



**Classe d'entrées  $u$  associée à  $\Delta_\gamma$** 

Il est difficile de caractériser entièrement l'ensemble des entrées  $u$  qui sont associées à  $\Delta_\gamma$ , cet ensemble étant, du fait que  $\mathcal{L}_\gamma$  est un opérateur régularisant, au delà des distributions. On peut montrer que pour toute  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$ ,  $\mathbf{u}(t, \cdot)|_{[0,t]} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$  et, par les propriétés de la transformée de Laplace :

$$\psi := \mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}(t, \cdot) \in \Delta_\gamma \text{ et ce pour tout } \gamma. \quad (1.69)$$

L'espace  $\Delta_\gamma$  permet donc de considérer une classe d'entrées  $u$  suffisamment large pour les besoins pratiques.

**Définition 17** *L'espace  $\Delta'_\gamma$  est le dual topologique de  $\Delta_\gamma$ .*

Du fait que  $\Delta_\gamma$  est un sous espace strict de  $\mathcal{D}_{L_p^\infty}$ ,  $\Delta'_\gamma$  est un espace quotient ; plus précisément on a :

**Proposition 18**

$$\Delta'_\gamma = \mathcal{D}'_{L_p^\infty} / \ker \mathcal{L}_\gamma^*. \quad (1.70)$$

Pour un opérateur  $\mathcal{H}$  donné, il n'y a donc pas unicité du  $\gamma$ -symbole : il lui est associé une classe d'équivalence de  $\gamma$ -symboles liés par la relation d'équivalence :

$$\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{D}'_{L_p^\infty}, \mu_1 \stackrel{\gamma}{\sim} \mu_2 \iff \mathcal{L}_\gamma^*(\mu_1) = \mathcal{L}_\gamma^*(\mu_2) \iff \mu_1 - \mu_2 \in \ker \mathcal{L}_\gamma^*. \quad (1.71)$$

La classe d'équivalence de 0 de  $\Delta'_\gamma$ , que l'on notera  $0_{\Delta'_\gamma}$  est donc donnée par :

$$0_{\Delta'_\gamma} := \mathcal{D}'_{L_p^\infty} \cap \ker \mathcal{L}_\gamma^*. \quad (1.72)$$

**Remarque 19** *On a  $\Delta'_\gamma \subset \mathcal{D}'$  : les éléments des classes de  $\Delta'_\gamma$  quittent donc bien le cadre des fonctions.*

Sur  $\Delta'_\gamma$  sont définies deux topologies naturelles, respectivement \*-faible et forte (par défaut, la topologie considérée sur  $\Delta'_\gamma$  sera la topologie \*-faible), auxquelles sont associés les modes de convergence du même nom, définis par :

$$\begin{aligned} \text{convergence } * \text{-faible : } \mu_n \xrightarrow{*} 0 &\iff \forall \psi \in \Delta_\gamma, \langle \mu_n, \psi \rangle \rightarrow 0, \\ \text{convergence forte : } \mu_n \rightarrow 0 &\iff \langle \mu_n, \psi \rangle \rightarrow 0 \text{ uniformément sur tout borné de } \Delta_\gamma. \end{aligned}$$

**Remarque 20** *Si ces topologies sont très différentes, il est en revanche difficile de construire concrètement une suite  $\mu_n$  convergeant faiblement mais non fortement, ces deux modes de convergence étant en pratique très proches. Ceci est dû au fait qu'en général, les topologies faibles peuvent ne pas satisfaire au premier axiome de dénombrabilité, en conséquence de quoi de telles topologies ne peuvent plus être définies à partir de la seule notion de suite convergente<sup>4</sup> [32]. La notion de continuité basée sur la convergence des suites est alors distincte de la continuité définie à partir des ouverts ; elle est dénommée continuité séquentielle. Dans ce travail, on s'intéresse exclusivement à la continuité séquentielle, car plus simple et suffisante pour les applications considérées (en particulier l'approximation numérique, où les suites jouent un rôle central).*

<sup>4</sup>Notons que dans certains cas, les convergences faible et forte peuvent même être équivalentes (les topologies étant, bien sûr, différentes).

### Classe d'opérateurs associée à $\Delta'_\gamma$

**Proposition 21** [48] Soit  $\mu \in \Delta'_\gamma$ . L'opérateur  $u \mapsto \langle \mu, \mathfrak{Rd}_\gamma u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$  est l'opérateur de réponse impulsionnelle :

$$h(t, s) = \langle \mu(t, \cdot), e^{\gamma(\cdot)s} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot), \quad (1.73)$$

et de symbole-Laplace défini par :

$$\forall p \in \Omega_\gamma^+, H(t, p) = \langle \mu(t, \cdot), \frac{1}{p - \gamma(\cdot)} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \mathcal{L} \mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot). \quad (1.74)$$

$H$  vérifie les propriétés :

- $H(t, \cdot)$  holomorphe dans  $\Omega_\gamma^+$ ,
  - $H(t, p) \rightarrow 0$  quand  $|p| \rightarrow +\infty$  dans  $\Omega_\gamma^+$ .
- (1.75)

**Remarque 22** Comme d'habitude, en dehors de  $\Omega_\gamma^+$ ,  $H(t, p)$  est défini par prolongement analytique.

On constate que les conditions d'analyticité et de décroissance à l'infini de  $H(t, \cdot)$  dans  $\Omega_\gamma^+$  sont à présent nécessaires alors qu'elles étaient suffisantes dans le cadre particulier du paragraphe 1.2. Ces conditions sont particulièrement importantes car "quasiment caractéristiques" des opérateurs  $\gamma$ -réalisables. Il n'y a en fait pas isomorphisme entre  $\Delta'_\gamma$  et l'espace des opérateurs linéaires intégraux de symboles-Laplace analytiques dans  $\Omega_\gamma^+$  et décroissants à l'infini ; cependant les opérateurs de ce type non  $\gamma$ -réalisables sont "pathologiques". En pratique, un opérateur linéaire intégral vérifiant les deux conditions précédemment énoncées sera donc  $\gamma$ -réalisable.

Dans le cadre du paragraphe 1.2, on a vu (cf remarque 8) que le produit  $\langle \mu, \mathfrak{Rd}_\gamma u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$  était égal à l'intégrale de contour  $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma H(p) \Psi_u(t, p) dp$ . Lorsque  $H$  n'est pas localement intégrable sur  $\gamma$ , cette intégrale n'est pas définie au sens de Lebesgue. On peut cependant considérer un contour  $\tilde{\gamma}$  voisin de  $\gamma$ , sur lequel l'intégrale est bien définie, d'où :

**Proposition 23** Soit  $\mu \in \Delta'_\gamma$  et  $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+)$ . Alors, pour tout  $\tilde{\gamma}$ , arc simple fermé dans  $\Omega_\gamma^+$  tel que  $\gamma \subset \Omega_{\tilde{\gamma}}^-$  :

$$\langle \mu, \mathfrak{Rd}_\gamma u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}} H(p) \Psi_u(t, p) dp = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\gamma}'(\xi) H(\tilde{\gamma}(\xi)) \Psi_u(t, \tilde{\gamma}(\xi)) d\xi, \quad (1.76)$$

où  $H(p) = \mathcal{L} \mathcal{L}_\gamma^* \mu$  et  $\Psi_u(t, \cdot)$  est le prolongement analytique de  $\mathcal{L} \mathbf{u}(t, \cdot)(-p)$  dans  $\mathbb{C}$ .

Pour tout  $\tilde{\gamma}$  arc simple fermé dans  $\Omega_\gamma^+$  tel que  $\gamma \subset \Omega_{\tilde{\gamma}}^-$ , l'intégrale  $\frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}} H(p) \Psi_u(t, p) dp$  prend donc la même valeur, que l'on notera également, par extension,  $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma^* H(p) \Psi_u(t, p) dp$ . En ce sens on a, de même que dans le cadre du paragraphe 1.2 :

$$\langle \mu, \mathfrak{Rd}_\gamma u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma^* H(p) \Psi_u(t, p) dp. \quad (1.77)$$

**Remarque 24** Attention cependant, car la relation (1.76) n'est pas vraie pour tout  $\langle \mu, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$  avec  $\psi \in \Delta_\gamma$ . En effet, les fonctions  $\psi$  étant de classe  $C^\infty$ , elles ne sont pas nécessairement la trace sur  $\gamma$  d'une fonction analytique au voisinage de  $\gamma$ . Il peut donc arriver que  $H$  et  $\Psi(t, \cdot)$  n'aient pas pour domaine d'analyticité commun la bande définie par  $\Omega_\gamma^+ \cap \Omega_{\tilde{\gamma}}^-$ .

**$\gamma$ -symboles canoniques**

Comme dans le paragraphe (1.2), on distingue, dans chaque classe d'équivalence de  $\gamma$ -symboles, un représentant particulier appelé  $\gamma$ -symbole canonique.

**Proposition 25** Soit  $\mu \in \Delta'_\gamma$  et  $\mu_c \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$  défini par

$$\mu_c = \frac{\gamma'}{2i\pi} (\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \mu)|_{\gamma^+}, \quad (1.78)$$

où  $(\cdot)|_{\gamma^+}$  est la trace à droite sur  $\gamma$  au sens des distributions. Alors :

$$\mathcal{L}_\gamma^* \mu = \mathcal{L}_\gamma^* \mu_c. \quad (1.79)$$

**Preuve.** Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto e^{ps}$  est holomorphe sur tout  $\mathbb{C}$ ; on a donc :

$$\forall s > 0, \mathcal{L}_\gamma^* \mu(s) = \langle \mu, e^{\gamma(\cdot)s} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{\gamma}'_n(\xi)}{2i\pi} \mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \mu(\tilde{\gamma}_n(\xi)) e^{\tilde{\gamma}_n(\xi)s} d\xi, \quad (1.80)$$

avec  $\tilde{\gamma}_n$  une suite de contours fermés de  $\Omega_\gamma^+$  tels que  $\gamma \subset \Omega_{\tilde{\gamma}_n}^-$  pour tout  $n$ , vérifiant  $\tilde{\gamma}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma$  dans  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

On pose  $\mu_n := \frac{\tilde{\gamma}'_n}{2i\pi} \mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \mu(\tilde{\gamma}_n)$ . Comme  $\mu_n \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$  (propositions 12 et 21) et,  $\forall s > 0$ ,  $e^{\tilde{\gamma}_n s} \in \mathcal{D}_{L^\infty}$ , on a alors,  $\forall s > 0$  :

$$\mathcal{L}_\gamma^* \mu(s) = \lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \langle \mu_n, e^{\tilde{\gamma}_n s} \rangle_{\mathcal{D}'_{L^\infty}, \mathcal{D}_{L^\infty}} = \lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \left( \langle \mu_n, e^{\gamma s} \rangle - \langle \mu_n, e^{\gamma s} - e^{\tilde{\gamma}_n s} \rangle \right). \quad (1.81)$$

Or, par définition :

$$\lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \langle \mu_n, e^{\gamma s} \rangle = \langle \frac{\gamma'}{2i\pi} \mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \mu|_{\gamma^+}, e^{\gamma s} \rangle \quad (1.82)$$

et, comme  $\{\mu_n\}_n$  est borné dans  $\mathcal{D}'_{L^\infty}$  et  $e^{\gamma(\xi)s} - e^{\tilde{\gamma}_n(\xi)s} \rightarrow 0$  dans  $\Delta_\gamma$  :

$$\lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \langle \mu_n, e^{\gamma s} - e^{\tilde{\gamma}_n s} \rangle = 0. \quad (1.83)$$

On a donc :

$$\mathcal{L}_\gamma^* \mu = \langle \frac{\gamma'}{2i\pi} \mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \mu|_{\gamma^+}, e^{\gamma s} \rangle_{\mathcal{D}'_{L^\infty}, \mathcal{D}_{L^\infty}} = \mathcal{L}_\gamma^* \mu_c. \quad (1.84)$$

■

**Remarque 26** On peut noter indifféremment  $H|_{\gamma^+}$  ou  $\lim_{\mathcal{D}'} H(\tilde{\gamma}_n)$  avec  $\tilde{\gamma}_n$  suite d'arcs simples contenus dans  $\Omega_\gamma^+$  tels que  $\tilde{\gamma}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma$  dans  $C^\infty$

**Définition 27** Le  $\gamma$ -symbole :

$$\mu_c := \frac{\gamma'}{2i\pi} (\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \mu)|_{\gamma^+}. \quad (1.85)$$

est appelé  $\gamma$ -symbole canonique associé à  $\mu \in \Delta'_\gamma$ .

L'opérateur  $\mathcal{L}_\gamma^{*\dagger} \mathcal{L}_\gamma^*$ , de  $\Delta'_\gamma$  dans  $\mathcal{D}'_{L^\infty}$ , défini par :

$$\mathcal{L}_\gamma^{*\dagger} \mathcal{L}_\gamma^* : \mu \mapsto \frac{\gamma'}{2i\pi} (\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \mu)|_{\gamma^+}, \quad (1.86)$$

associe donc à  $\mu \in \Delta'_\gamma$  son représentant canonique  $\mu_c$ . On pose :

**Définition 28** L'ensemble des  $\gamma$ -symboles canoniques, noté  $\Delta'_{\gamma,c}$ , est défini par :

$$\Delta'_{\gamma,c} = \mathcal{L}_{\gamma}^{*\dagger} \mathcal{L}_{\gamma}^*(\mathcal{D}'_{L_p^\infty}). \quad (1.87)$$

On a alors les deux caractérisations suivantes.

**Proposition 29**  $\Delta'_{\gamma,c}$  est l'ensemble des solutions dans  $\mathcal{D}'_{L_p^\infty}(\mathbb{R})$  de l'équation :

$$\mu = \mathcal{L}_{\gamma}^{*\dagger} \mathcal{L}_{\gamma}^*(\mu). \quad (1.88)$$

**Preuve.** Soit  $\mu \in \Delta'_{\gamma}$  et  $\mu_c = \mathcal{L}_{\gamma}^{*\dagger} \mathcal{L}_{\gamma}^*(\mu)$ . Alors  $\mu \sim \mu_c$ , d'où  $\mathcal{L}_{\gamma}^{*\dagger} \mathcal{L}_{\gamma}^*(\mu) = \mathcal{L}_{\gamma}^{*\dagger} \mathcal{L}_{\gamma}^*(\mu_c)$ . ■

**Théorème 30**

$$\mu \in \Delta'_{\gamma,c} \iff \begin{cases} \mu \in \mathcal{D}'_{L_p^\infty}(\mathbb{R}) \\ \mu = \frac{\gamma'}{2i\pi} H_{|\gamma^+} \text{ avec } H \text{ holomorphe dans } \Omega_{\gamma}^+. \end{cases} \quad (1.89)$$

**Preuve.**  $\implies$  Soit  $\mu \in \Delta'_{\gamma,c} \subset \mathcal{D}'_{L_p^\infty}$ . Alors,  $\mu = \frac{\gamma'}{2i\pi} (\mathcal{L}\mathcal{L}_{\gamma}^*\mu)_{|\gamma^+}$ . Or d'après la proposition 21,  $\mathcal{L}\mathcal{L}_{\gamma}^*\mu$  est holomorphe dans  $\Omega_{\gamma}^+$ .

$\impliedby$  Soit  $\mu \in \mathcal{D}'_{L_p^\infty}(\mathbb{R})$  tel que  $\mu = \frac{\gamma'}{2i\pi} H_{|\gamma^+}$  avec  $H$  holomorphe sur  $\Omega_{\gamma}^+$ . On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathcal{L}_{\gamma}^*\mu &= \mathcal{L}\mathcal{L}_{\gamma}^* \left( \frac{\gamma'}{2i\pi} H_{|\gamma^+} \right) = \left\langle \frac{\gamma'}{2i\pi} H_{|\gamma^+}, \frac{1}{p-\gamma} \right\rangle_{\Delta'_{\gamma}, \Delta_{\gamma}} \\ &= \lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \int \frac{\tilde{\gamma}'_n}{2i\pi} \frac{H(\tilde{\gamma}_n)}{p - \tilde{\gamma}_n} d\xi = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{H(z)}{p-z} dz. \end{aligned} \quad (1.90)$$

D'après la formule de Cauchy [37], on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{H(z)}{p-z} dz = H(p) \mathbf{1}_{\Omega_{\tilde{\gamma}_n}^+}(p), \quad (1.91)$$

d'où :

$$\mathcal{L}\mathcal{L}_{\gamma}^*\mu = H(p) \mathbf{1}_{\Omega_{\gamma}^+}(p) \implies \mu = \mathcal{L}_{\gamma}^{*\dagger} \mathcal{L}_{\gamma}^*(\mu). \quad (1.92)$$

■

Chaque élément  $\mu_c \in \Delta'_{\gamma,c}$  caractérise la classe d'équivalence  $\mu$  de  $\Delta'_{\gamma}$  définie par :

$$\mu := \left\{ \mu_c + \nu, \text{ où } \nu \in 0_{\Delta'_{\gamma}} \right\}. \quad (1.93)$$

La classe  $0_{\Delta'_{\gamma}}$  joue donc un rôle important ; on montre que ses éléments peuvent être caractérisés de la manière suivante :

**Proposition 31**  $\forall \mu \in \mathcal{D}'_{L_p^\infty}(\mathbb{R})$ ,

$$\mu \in 0_{\Delta'_{\gamma}} \iff \mu = \frac{\gamma'}{2i\pi} H_{|\gamma^-} \text{ avec } H \text{ holomorphe sur } \Omega_{\gamma}^-, \quad (1.94)$$

où  $H_{|\gamma^-}$  est la trace à gauche de  $H$  sur  $\gamma$  (au sens des distributions).

**Preuve.**  $\mu \in 0_{\Delta'_{\gamma}} \iff \forall p \in \Omega_{\gamma}^+$ ,  $H(p) = \left\langle \mu, \frac{1}{p-\gamma} \right\rangle_{\Delta'_{\gamma}, \Delta_{\gamma}} = 0 = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{H(z)}{p-z} dz$  pour tout contour  $\tilde{\gamma} \prec \gamma$ . D'après les propriétés des intégrales de Cauchy, cette condition est vérifiée si et seulement si  $H$  est analytique dans  $\Omega_{\tilde{\gamma}}^-$ , et donc dans  $\bigcup_{\tilde{\gamma} \prec \gamma} \Omega_{\tilde{\gamma}}^- = \Omega_{\gamma}^-$ . ■

**Le produit  $\sharp_\gamma$  dans  $\Delta'_\gamma$** 

La composition d'opérateurs étant une opération essentielle, on considère l'opération qui lui est associée dans l'espace des  $\gamma$ -symboles et que l'on note  $\sharp_\gamma$  (ou plus simplement  $\sharp$ ). Cette opération sur les  $\gamma$ -symboles est un produit défini comme suit :

**Définition 32** Soient  $\mu, \nu \in \Delta'_\gamma$ . La classe de  $\gamma$ -symboles notée  $\mu \sharp_\gamma \nu$  est définie par :

$$\mathcal{L}_\gamma^*(\mu \sharp_\gamma \nu) = (\mathcal{L}_\gamma^* \mu) * (\mathcal{L}_\gamma^* \nu). \quad (1.95)$$

Le produit  $\sharp_\gamma$  est commutatif dans  $\Delta'_\gamma$ . En outre, il découle du théorème de Titchmarsh [62], que :

**Proposition 33** Le produit  $\sharp$  n'a pas de diviseurs de 0 :

$$\mu \neq 0, \nu \neq 0 \implies \mu \sharp \nu \neq 0. \quad (1.96)$$

D'après la proposition 21, l'opérateur  $\mathcal{L}_\gamma^*$  associée à un  $\gamma$ -symbole  $\mu$  de  $\Delta'_\gamma$  la réponse impulsionnelle de l'opérateur réalisé par  $\mu$ . L'équation (1.95) qui définit le produit  $\sharp_\gamma$  est donc une égalité entre réponses impulsionnelles dont l'équivalent en domaine fréquentiel s'obtient par application de la transformation de Laplace. On obtient :

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*(\mu \sharp_\gamma \nu)](p) &= [\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*(\mu)](p) \cdot [\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*(\nu)](p) \\ &= H(p) \cdot K(p), \end{aligned} \quad (1.97)$$

où  $H$  (respectivement  $K$ ) est le symbole-Laplace de l'opérateur réalisé par  $\mu$  (respectivement par  $\nu$ ). Le  $\gamma$ -symbole  $\mu \sharp_\gamma \nu$  permet donc de réaliser l'opérateur de symbole-Laplace  $H(p) \cdot K(p)$  c'est à dire l'opérateur  $H(\partial_t) \circ K(\partial_t)$  :

$$\left. \begin{array}{l} \mu \text{ } \gamma\text{-symbole de } H(\partial_t) \\ \nu \text{ } \gamma\text{-symbole de } K(\partial_t) \end{array} \right\} \implies \mu \sharp_\gamma \nu \text{ } \gamma\text{-symbole de } H(\partial_t) \circ K(\partial_t). \quad (1.98)$$

On déduit aisément de ce qui précède :

**Théorème 34** Le  $\gamma$ -symbole canonique de la classe d'équivalence  $\mu \sharp_\gamma \nu$  est défini par :

$$(\mu \sharp_\gamma \nu)_c = \frac{\gamma'}{2i\pi} (\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \mu \times \mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \nu)_{|\gamma^+}. \quad (1.99)$$

Dans le cas où le produit  $\mu_c \cdot \nu_c$  est bien défini, on a en outre :

$$(\mu \sharp_\gamma \nu)_c = \frac{2i\pi}{\gamma'} \mu_c \cdot \nu_c. \quad (1.100)$$

**Remarque 35** On a notamment la formulation suivante sous forme de réalisations d'état :

$$\langle \mu \sharp_\gamma \nu, \mathfrak{Rd}_\gamma(\cdot) \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \langle \mu, \mathfrak{Rd}_\gamma \langle \nu, \mathfrak{Rd}_\gamma(\cdot) \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}, \quad (1.101)$$

d'où :

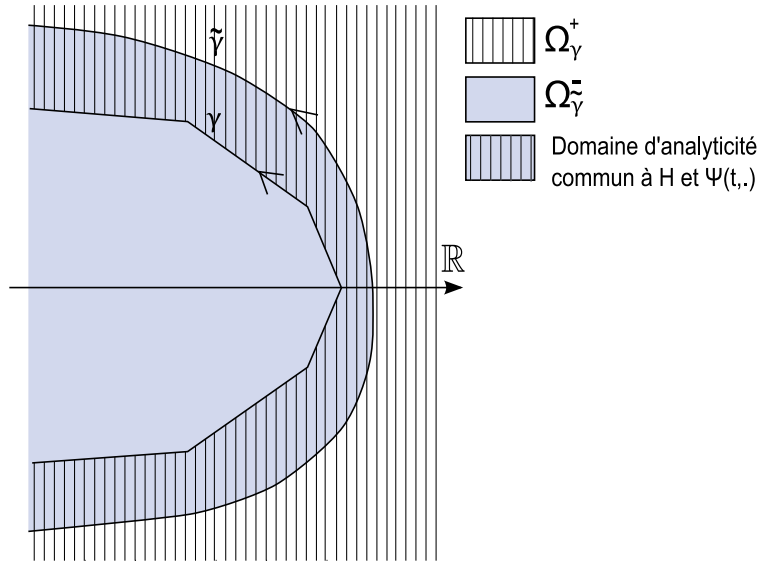
$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \psi = \gamma(\xi) \psi + u \\ y = \langle \mu \sharp_\gamma \nu, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} \end{array} \right\} \xLeftrightarrow{E/S} \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \psi_1 = \gamma(\xi) \psi_1 + u \\ \partial_t \psi_2 = \gamma(\eta) \psi_2 + \langle \nu, \psi_1 \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} \\ y = \langle \mu, \psi_2 \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} \end{array} \right. \quad (1.102)$$

**Sur la continuité du produit  $\sharp_\gamma$  dans  $\Delta'_\gamma$** 

On montre que :

**Proposition 36** Le produit  $\sharp_\gamma$  est interne dans  $\Delta'_\gamma$  et séparément séquentiellement continu pour la topologie faible  $\sigma(\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma)$ , c'est à dire :

$$\left( \langle \nu_n, \psi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \psi \in \Delta_\gamma \right) \implies \left( \langle \mu \sharp_\gamma \nu_n, \psi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \psi \in \Delta_\gamma \right). \quad (1.103)$$

FIG. 1.3 – Domaines d'analyticité de  $H$  et de  $\Psi$ .

### 1.4.3 Espaces $\Delta_\gamma$ et $\Delta'_\gamma$

La continuité (séquentielle) séparée du produit  $\sharp_\gamma$  dans  $\Delta'_\gamma$  n'est parfois pas suffisante. D'autres raisons ont incité à construire un espace de  $\gamma$ -symboles  $\Delta'_\gamma$  mieux adapté que  $\Delta'_\gamma$ . En effet, les espaces  $\Delta_\gamma$  ne sont définis que pour des contours  $\gamma$  réguliers, alors qu'en pratique les contours non réguliers sont souvent utiles sinon nécessaires.

En un sens, l'espace  $\Delta_\gamma$  est trop gros parce qu'il contient des fonctions  $\psi$  de régularité  $C^\infty$  mais non nécessairement analytiques (l'espace  $\mathcal{D}_{L^\infty}$  n'imposant pas l'analyticité). Or on a vu précédemment que pour tout  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ ,  $\mathfrak{R}d_\gamma u$  est pour tout  $t$  analytique dans tout  $\mathbb{C}$ . On peut donc espérer pouvoir restreindre encore l'ensemble des fonctions test  $\psi$  et donc augmenter celui des  $\gamma$ -symboles sans pour autant trop appauvrir la classe d'entrées  $u$  autorisées.

On a également vu que si  $\Psi_u(t, \cdot)$  n'est pas holomorphe dans tout  $\Omega_\gamma^+$ , la quantité  $\langle \mu, \psi_u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$  ne peut être en général définie comme la limite, lorsque  $\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma$ , de la suite *stationnaire* d'intégrales sur  $\tilde{\gamma}_n \in \Omega_\gamma^+$  :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_n} H(t, p) \Psi_u(t, p) dp, \quad (1.104)$$

puisque  $H$  et  $\Psi(t, \cdot)$  n'ont alors pas nécessairement de domaine d'analyticité commun suffisant. Une telle formulation généralisait pourtant parfaitement la relation (1.50) établie dans le cas où  $\mu \in L^1_{loc}$  : il serait donc intéressant qu'elle soit valide pour tout produit entre  $\mu$  et  $\psi$ . L'idée est donc de définir des espaces  $\Delta_\gamma$  et  $\Delta'_\gamma$  en dualité tels que :

$$\begin{aligned} \bullet \forall \mu \in \Delta'_\gamma, \quad H_\mu(t, \cdot) \text{ holomorphe dans } \Omega_\gamma^+, \\ \bullet \forall \psi \in \Delta_\gamma, \quad \Psi_u(t, \cdot) \text{ holomorphe dans } \Omega_\gamma^-, \end{aligned} \quad (1.105)$$

avec  $\tilde{\gamma} \subset \Omega_\gamma^+$  (voir figure 1.3). Ainsi, l'intégrale

$$\int_{\tilde{\gamma}} H_\mu(t, p) \Psi_u(t, p) dp \quad (1.106)$$

sera définie sur tout contour  $\tilde{\gamma}$  inclus dans le domaine d'analyticité commun à  $H_\mu(t, \cdot)$  et à  $\Psi_u(t, \cdot)$  (voir figure 1.3) et prendra la même valeur quel que soit un tel contour  $\tilde{\gamma}$ . Par "adhérence", on pourra alors donner un sens parfaitement défini à l'intégrale  $\int_\gamma H_\mu(t, p) \Psi_u(t, p) dp$ . On aura plus

précisément, par le théorème de Cauchy :

$$\int_\gamma H_\mu(t, p) \Psi_u(t, p) dp := \int_{\tilde{\gamma}} H_\mu(t, p) \Psi_u(t, p) dp \quad (1.107)$$

pour tout  $\tilde{\gamma}$  dans le domaine d'analyticité commun à  $H_\mu(t, \cdot)$  et à  $\Psi_u(t, \cdot)$ .

Dans la suite, on considère des contours  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  vérifiant les hypothèses du paragraphe précédent avec pour  $\gamma$  un affaiblissement des hypothèses de régularité à  $\gamma \in W_{loc}^{1, \infty}(\mathbb{R})$  : le contour  $\gamma$  pourra ainsi être non régulier et par exemple présenter des points anguleux.

On définit pour cela la relation notée  $\succ$  entre deux contours (voir figure 1.3 pour un exemple de contours  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  tels que  $\tilde{\gamma} \succ \gamma$ ) :

$$\tilde{\gamma} \succ \gamma \iff \begin{cases} \tilde{\gamma} \subset \Omega_\gamma^+ \\ \exists A > 0, \exists \eta_0 > 0, \forall |\eta| \geq \eta_0, \min_\xi |\tilde{\gamma}(\eta) - \gamma(\xi)| \geq A |\tilde{\gamma}(\eta)|, \end{cases} \quad (1.108)$$

Dans un premier temps, on construit l'espace de base  $\Delta_\gamma$ . Cette construction peut se résumer de la manière suivante :

- on a, pour tout  $\tilde{\gamma} \subset \Omega_\gamma^+ : \forall \tilde{\psi} \in \mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}}$ , il existe  $\Psi$  holomorphe dans  $\Omega_{\tilde{\gamma}}^-$  telle que  $\tilde{\psi} = \Psi \circ \tilde{\gamma}$ ,
- on considère l'ensemble des  $\Psi$  holomorphes dans  $\Omega_{\tilde{\gamma}}^-$  pour lesquelles il existe  $\tilde{\psi} \in \mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}}$  tel que  $\tilde{\psi} = \Psi \circ \tilde{\gamma}$ ,
- on définit alors les éléments de  $\Delta_\gamma$  comme la trace sur  $\gamma$  de ces fonctions  $\Psi$ .

On considère donc dans un premier temps l'espace  $\mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}}$  avec  $\tilde{\gamma} \subset \Omega_\gamma^+$ . Pour tout élément  $\tilde{\psi} \in \mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}}$ , on considère la fonction  $\Psi$  obtenue par prolongement analytique dans  $\Omega_{\tilde{\gamma}}^-$  via l'application  $\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}}$  ci-après, définie techniquement au moyen d'une intégrale de Cauchy [48] :

$$\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}} : \tilde{\psi} \in \mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}} \mapsto \Psi \text{ fonction analytique dans } \Omega_{\tilde{\gamma}}^- \text{ dont } \tilde{\psi} \text{ est la trace sur } \tilde{\gamma}, \quad (1.109)$$

et dont l'inverse est la fonction trace (à gauche) sur  $\tilde{\gamma}$  :

$$\tilde{\psi} = \Psi|_{\tilde{\gamma}}. \quad (1.110)$$

La fonction  $\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\psi})$  étant analytique sur tout  $\Omega_{\tilde{\gamma}}^-$ , on peut considérer sa trace sur  $\gamma \subset \Omega_{\tilde{\gamma}}^-$  ; on définit alors l'application  $\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma}$  :

$$\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma} : \tilde{\psi} \in \mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}} \mapsto \psi = (\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\psi})) \circ \gamma \text{ (trace sur } \gamma \text{ de } \Psi). \quad (1.111)$$

L'espace  $\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma}(\mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}})$  est muni de la topologie finale, (qui par définition rend  $\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma}$  continue) ; c'est donc un espace de Fréchet isométrique à  $\mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}}$ .

On définit alors :

**Définition 37** *L'espace  $\Delta_\gamma$  est défini par :*

$$\Delta_\gamma = \bigcup_n \mathcal{I}_{\tilde{\gamma}_n, \gamma}(\mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}_n}), \quad (1.112)$$

où  $\tilde{\gamma}_n$  est une suite décroissante (au sens de la relation  $\succ$ ) d'arcs réguliers telle que  $\tilde{\gamma}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$  dans  $W_{loc}^{1, \infty}(\mathbb{R})$ .

En outre,  $\Delta_\gamma$  est muni de la topologie de limite inductive définie par la convergence :

$$\psi_n \longrightarrow 0 \text{ dans } \Delta_\gamma \iff \exists n, \tilde{\psi}_n \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}_n}. \quad (1.113)$$

**Définition 38**  *$\Delta'_\gamma$  est le dual topologique de  $\Delta_\gamma$ .*

**Remarque 39** ► Lorsque  $\gamma$  est régulière, on a  $\Delta_\gamma \subset \mathbf{\Delta}_\gamma$  : en effet les éléments de  $\Delta_\gamma$  sont la trace sur  $\gamma$  de fonctions analytiques sur  $\Omega_{\tilde{\gamma}}^-$  avec  $\tilde{\gamma} \succ \gamma$ , alors que les fonctions dont les éléments de  $\mathbf{\Delta}_\gamma$  sont la trace sur  $\gamma$  ne sont analytiques que sur  $\Omega_\gamma^- \subset \Omega_{\tilde{\gamma}}^-$ .  
On a en revanche :  $\Delta'_\gamma \supset \mathbf{\Delta}'_\gamma$ .

► Les éléments des classes de  $\Delta'_\gamma$  **quittent le cadre des distributions.**

On peut montrer que la proposition 21 reste vraie dans la dualité  $\langle \Delta'_\gamma, \Delta_\gamma \rangle$ ; la réponse impulsionnelle  $h$  et le symbole-Laplace  $H$  de l'opérateur  $\langle \mu, \mathfrak{R}d_\gamma u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$  sont donc toujours donnés par :

$$h(s) = \langle \mu, e^{\gamma(\cdot)s} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \mathcal{L}_\gamma^* \mu \text{ et } H(p) = \langle \mu, \frac{1}{p - \gamma(\cdot)} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \mathcal{L} \mathcal{L}_\gamma^* \mu, \quad (1.114)$$

avec  $H$  holomorphe dans  $\Omega_\gamma^+$  et  $H(p) \rightarrow 0$  quand  $p \rightarrow \infty$  dans  $\Omega_\gamma^+$ .

**Remarque 40** Par extension continue, l'espace  $\Delta'_\gamma$  s'organise à nouveau en classes d'équivalence : deux  $\gamma$ -symboles  $\mu_1, \mu_2$  tels que  $\mathcal{L}_\gamma^* \mu_1 = \mathcal{L}_\gamma^* \mu_2$  représentent le même opérateur.

De la définition des espaces  $\Delta'_\gamma$  et  $\Delta_\gamma$ , on déduit :

$\forall \mu \in \Delta'_\gamma, \forall \psi \in \Delta_\gamma, \exists \tilde{\gamma}_0 \succ \gamma$  tel que  $\forall \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_0 \succ \tilde{\gamma} \succ \gamma$  :

$$\begin{aligned} \langle \mu, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} &= \langle \mu, \psi \rangle_{(\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma}(\mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}}))', \mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma}(\mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}})} \\ &= \langle \mu, \mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma}(\tilde{\psi}) \rangle_{(\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma}(\mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}}))', \mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma}(\mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}})} \text{ avec } \tilde{\psi} = \mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma}^{-1}(\psi) \in \mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}} \\ &= \langle \tilde{\mu}, \tilde{\psi} \rangle_{\mathbf{\Delta}'_{\tilde{\gamma}}, \mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}}} \text{ avec } \tilde{\mu} = (\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma})^*(\mu) \in \mathbf{\Delta}'_{\tilde{\gamma}} \end{aligned} \quad (1.115)$$

Or, on peut montrer que :

$$\tilde{\mu} = (\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma})^*(\mu) = \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} H(\tilde{\gamma}) \text{ avec } H = \mathcal{L} \mathcal{L}_\gamma^* \mu = \mathcal{L} \mathcal{L}_\gamma^* \tilde{\mu}. \quad (1.116)$$

Comme  $H$  est holomorphe sur  $\Omega_\gamma^+$ ,  $\tilde{\mu}$  est une fonction et  $\langle \tilde{\mu}, \tilde{\psi} \rangle_{\mathbf{\Delta}'_{\tilde{\gamma}}, \mathbf{\Delta}_{\tilde{\gamma}}}$  désigne alors l'intégrale (au sens de Lebesgue)  $\int \tilde{\mu}(\xi) \tilde{\psi}(\xi) d\xi$ . On a donc :

$$\langle \mu, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \int \tilde{\mu}(\xi) \tilde{\psi}(\xi) d\xi = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}} H(p) \Psi(p) dp, \quad (1.117)$$

avec  $H = \mathcal{L} \mathcal{L}_\gamma^* \mu = \mathcal{L} \mathcal{L}_{\tilde{\gamma}}^* \tilde{\mu}$  et  $\Psi = \mathcal{I}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\psi})$ ,  $\tilde{\gamma}$  étant dans le domaine d'analyticité commun à  $H(p)$  et à  $\Psi(p)$ . Par continuité on peut alors définir l'intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma^* H(p) \Psi(p) dp := \langle \mu, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}. \quad (1.118)$$

**Remarque 41** Avec (1.116), on montre que  $(\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma})^*$  est l'opérateur qui à un élément de  $\Delta'_\gamma$  associe son représentant canonique dans  $\mathbf{\Delta}'_{\tilde{\gamma}}$ .



**$\gamma$ -symboles canoniques**

La définition du  $\gamma$ -symbole canonique d'un élément de  $\Delta'_\gamma$  est nécessairement plus souple que celle dans  $\Delta'_\gamma$  du fait ;

- d'une part que l'on sort du cadre des distributions : rigoureusement, la limite (c'est à dire la trace à droite) doit désormais être prise au sens des ultra-distributions et non des distributions.
- et d'autre part que le contour  $\gamma$  considéré n'est pas forcément régulier. A noter que lorsque la fonction  $\gamma$  n'est pas régulière, le produit de  $\gamma'$  par une distribution n'est en général pas défini. La formule (1.85) ne peut donc être appliquée telle quelle dans ce cas là.

Dans  $\Delta'_\gamma$ , on a la définition générale :

**Définition 42** *Pour tout  $\mu \in \Delta'_\gamma$ , le  $\gamma$ -symbole canonique  $\mu_c$  est défini par :*

$$\mu_c := \lim_{\tilde{\gamma}_n \xrightarrow{\gamma} \gamma} \frac{\tilde{\gamma}'_n}{2i\pi} [\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \mu](\tilde{\gamma}_n), \quad (1.119)$$

avec  $\tilde{\gamma}_n$  suite d'arcs simples contenus dans  $\Omega_\gamma^+$  tels que  $\tilde{\gamma}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma$  dans  $W_{loc}^{1,\infty}$  (la limite<sup>5</sup> étant à prendre au sens de  $\Delta'_\gamma$ ).

**Remarque 43** *Dans le cas où  $\gamma$  est régulière, la formule (1.119) se réécrit sous la forme :*

$$\mu_c := \frac{\gamma'}{2i\pi} (\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \mu)|_{\gamma^+}, \quad (1.120)$$

où  $(\cdot)|_{\gamma^+}$  est la trace à droite sur  $\gamma$  au sens des ultra-distributions.

Dans la suite, on note  $\Delta'_{\gamma,c}$  l'ensemble des  $\gamma$ -symboles canoniques de  $\Delta'_\gamma$ .

**Le produit  $\sharp_\gamma$  dans  $\Delta'_\gamma$** 

La définition 32 du produit  $\sharp_\gamma$  ainsi que les relations (1.97), (1.98), (1.101) et (1.102) établies dans  $\Delta'_\gamma$  s'étendent naturellement à  $\Delta'_\gamma$ .

On peut montrer que le produit  $\sharp_\gamma$  ainsi défini est interne dans  $\Delta'_\gamma$ . Or, par définition :

$$\forall \mu, \nu \in \Delta'_\gamma, \mathcal{L}_\gamma^*(\mu \sharp_\gamma \nu) = (\mathcal{L}_\gamma^* \mu) * (\mathcal{L}_\gamma^* \nu); \quad (1.121)$$

par conséquent  $(\Delta'_\gamma, \sharp_\gamma)$  est une algèbre isomorphe à  $(\mathcal{L}_\gamma^*(\Delta'_\gamma), *)$ , algèbre de convolution des réponses impulsionnelles d'opérateurs  $\gamma$ -diffusifs. On notera en revanche que  $(\Delta'_\gamma, \sharp_\gamma)$  n'est pas unitaire puisque l'opérateur identité n'est pas  $\gamma$ -diffusif : cette remarque prendra toute son importance lors du problème de l'inversion  $\gamma$ -symbolique comme on pourra le voir dans le chapitre suivant.

**Théorème 44** *Le représentant canonique de la classe d'équivalence  $\mu \sharp_\gamma \nu$  est donné par :*

$$(\mu \sharp_\gamma \nu)_c = \lim_{\tilde{\gamma}_n \xrightarrow{\gamma} \gamma} \frac{\tilde{\gamma}'_n}{2i\pi} (\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \mu \cdot \mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \nu)(\tilde{\gamma}_n). \quad (1.122)$$

On peut également exprimer le produit  $\sharp_\gamma$  dans  $\Delta'_\gamma$  au moyen des fonctions test. On a ainsi :

**Théorème 45** *Soient  $\mu, \nu \in \Delta'_\gamma$ . Pour tout  $\psi \in \Delta_\gamma$  :*

$$\langle \mu \sharp_\gamma \nu, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \langle \frac{2i\pi}{\tilde{\gamma}} \tilde{\mu} \tilde{\nu}, \tilde{\psi} \rangle_{\mathcal{D}'_{L_p^\infty}, \mathcal{D}_{L_p^\infty}} \quad \forall \tilde{\gamma} \succ \gamma, \quad (1.123)$$

avec  $\tilde{\mu} = (\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma})^*(\mu)$ ,  $\tilde{\nu} = (\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma})^*(\nu)$  et  $\tilde{\psi} = \mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma}^{-1}(\psi)$ .

<sup>5</sup>On notera dans la suite cette limite par  $\lim_{\tilde{\gamma}_n \xrightarrow{\gamma} \gamma}$

**Remarque 46** Rappelons que  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\nu}$  sont des  $\gamma$ -symboles canoniques : la relation (1.123) ne serait pas vraie pour  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\nu}$  représentant quelconques de la classe d'équivalence.

On montre enfin que le produit  $\sharp_\gamma$  est séquentiellement continu pour la topologie forte de  $\Delta'_\gamma$ , c'est-à-dire :

$$\left( \nu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu, \mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu \text{ dans } \Delta'_\gamma \text{ fort} \right) \implies \left( \mu_n \sharp_\gamma \nu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu \sharp_\gamma \nu \text{ dans } \Delta'_\gamma \text{ fort} \right). \quad (1.124)$$

L'espace  $\Delta'_\gamma$  est ainsi bien adapté à l'analyse ; il permettra en particulier d'assurer un bon comportement notamment des approximations numériques dès lors qu'elles auront été analysées et construites dans le contexte topologique décrit précédemment.

## 1.5 En résumé

Dans cette présentation assez concise des principes de la représentation diffusive, on a vu qu'un opérateur  $\mathcal{H} = H(\partial_t)$  diffusif au sens strict admettait la représentation suivante, appelée  $\gamma$ -réalisation :

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), \quad \psi(0, \cdot) = 0 \\ H(\partial_t) u(t) = \langle \mu, \psi(t, \cdot) \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}, \end{cases} \quad (1.125)$$

où  $\gamma \in W_{loc}^{1, \infty}(\mathbb{R})$  définit un contour fermé (éventuellement à l'infini) vérifiant les hypothèses mentionnées au paragraphe précédent, et où  $\mu \in \Delta'_\gamma$  est solution de  $\mathcal{L}_\gamma^* \mu = h$  avec  $h$  réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}$ .

Les conditions essentielles à satisfaire pour qu'un opérateur  $\mathcal{H}$  admette une telle représentation sont :

- l'analyticité de  $H$  dans  $\Omega_\gamma^+$ ,
  - la décroissance à l'infini de  $H$  dans  $\Omega_\gamma^+$ .
- (1.126)

La condition sectorielle imposée à  $\gamma$  garantit en outre la nature diffusive des réalisations d'état. Par voie de conséquence, les opérateurs  $\gamma$ -réalisables sont de type pseudo-différentiel [60], ce qui implique en particulier une réponse impulsionnelle  $h$  régulière (en fait analytique) sur  $\mathbb{R}_t^{+*}$ .

Notons par ailleurs que la réalisation d'état qu'est la  $\gamma$ -réalisation est de dimension infinie. Pour des opérateurs rationnels notamment, elle n'est donc pas minimale, ce qui a première vue peut apparaître comme un inconvénient. En réalité, les avantages sont nombreux :

- une même équation d'état permet la réalisation d'une vaste classe d'opérateurs (rationnels ou non, convolutifs ou non),
- l'opérateur est caractérisé par son  $\gamma$ -symbole qui apparaît linéairement dans la  $\gamma$ -réalisation,
- la somme et le produit de deux opérateurs  $\gamma$ -réalisables sont des opérateurs de même nature, propriété essentielle pour les applications (cf. les paragraphes qui suivent) et intrinsèquement impossible dans le cadre standard rationnel (la somme ou le produit de deux opérateurs rationnels d'ordre  $n$  est en général un opérateur d'ordre  $2n$ ),
- les opérateurs et leurs approximations sont dans un même cadre mathématique,
- l'extension aux opérateurs non causaux voire multidimensionnels est naturelle,
- de nombreuses autres extensions sont possibles,
- il existe des réalisations diffusives aux propriétés particulières pouvant être utiles notamment en non linéaire [48].
- etc.

Un des avantages sur lequel il convient de revenir est la possibilité d'extension à divers problèmes. Dans les paragraphes précédents, plusieurs hypothèses ont été faites, en particulier sur le contour  $\gamma$  et sur les opérateurs considérés. La représentation diffusive se prête en fait à diverses extensions et peut s'adapter à de nombreuses situations où ne sont pas nécessairement vérifiées ces hypothèses. De nombreux compléments et extensions des concepts précédents ont été étudiés et sont présentés dans [48].

On mentionnera en particulier le fait que les opérateurs instables peuvent également avoir une réalisation diffusive (ce qui sous-entend en fait que le contour  $\gamma$  puisse "sortir" du demi-plan complexe gauche).

## 1.6 Extensions

### 1.6.1 Opérateurs non invariants dans le temps

La représentation diffusive peut être naturellement étendue aux opérateurs intégraux  $\mathcal{H}$  non invariants dans le temps, c'est à dire aux opérateurs non convolutifs de la forme :

$$\mathcal{H}u(t) = \int \mathbf{h}(t, s)u(s)ds = \int h(t, t-s)u(s)ds = (h(t, \cdot) *_s u)(t), \quad (1.127)$$

de symbole donné par :

$$H(t, \cdot) = \mathcal{L}(h(t, \cdot)), \quad (1.128)$$

et noté  $H(t, \partial_t)$ . A quelques adaptations techniques près, la plupart des résultats établis précédemment s'étendent à ces opérateurs.

A un opérateur  $\mathcal{H} = H(t, \partial_t)$   $\gamma$ -diffusif, on associe une classe d'équivalence de  $\gamma$ -symboles  $\mu$ , également non constante dans le temps, appartenant à l'espace  $C(\mathbb{R}_t; \Delta'_\gamma)$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mu(t, \cdot)$  est solution de  $\mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot) = h(t, \cdot)$ .

La  $\gamma$ -réalisation de  $\mathcal{H}$  s'écrit alors naturellement :

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), & \psi(0, \cdot) = 0 \\ H(t, \partial_t)u(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}, \end{cases} \quad (1.129)$$

les hypothèses essentielles à satisfaire étant :

- l'analyticité de  $H(t, \cdot)$  dans  $\Omega_\gamma^+$ ,
  - la décroissance à l'infini de  $H(t, \cdot)$  dans  $\Omega_\gamma^+$ .
- (1.130)

Notons cependant qu'avec de tels opérateurs, on perd la commutativité du produit de composition et donc du produit  $\sharp_\gamma$  associé.

### 1.6.2 Opérateurs $\gamma$ -diffusifs au sens large

La condition de décroissance à l'infini dans  $\Omega_\gamma^+$  du symbole de l'opérateur peut paraître assez restrictive. On peut en fait étendre la notion de  $\gamma$ -symbole à des opérateurs ne satisfaisant pas cette condition.

Pour cela on considère par exemple un opérateur  $\mathcal{H}$  non  $\gamma$ -diffusif au sens strict, mais tel qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  pour lequel  $\mathcal{H} \circ \partial_t^{-n}$  est  $\gamma$ -diffusif au sens strict : on dira d'un tel opérateur qu'il est  *$\gamma$ -diffusif au sens large de degré  $n$* .

En notant  $\mu \in \Delta'_\gamma$  le  $\gamma$ -symbole de  $\mathcal{H} \circ \partial_t^{-n}$ , on a :

$$\mathcal{H}u = \mathcal{H} \circ \partial_t^{-n} \circ \partial_t^n u = \langle \mu, \psi_{\partial_t^n u} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \langle \mu, \partial_t^n \psi_u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}. \quad (1.131)$$

La  $\gamma$ -réalisation de  $\mathcal{H}$  s'écrit donc  $\mathcal{H}u = \langle \mu, \psi_{\partial_t^n u} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \langle \mu, \partial_t^n \psi_u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$ .

**Remarque 47**    ► Dans le cas où  $n = 1$ , on a :

$$\mathcal{H}u = \langle \mu, \partial_t \psi_u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \langle \mu, \gamma \psi_u + u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}. \quad (1.132)$$

► Dans le cas où  $\mathcal{H} = H(\partial_t)$  (et donc  $\mu$ ) ne dépend pas du temps, le produit de composition est commutatif et on a également :

$$\mathcal{H}u = \partial_t^n \circ \mathcal{H} \circ \partial_t^{-n} u = \partial_t^n \langle \mu, \psi_u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \langle \mu, \partial_t^n \psi_u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}. \quad (1.133)$$

**Exemple 48** L'opérateur  $\partial_t^\alpha$ , avec  $\alpha \in ]0, 1[$  est  $\gamma$ -diffusif au sens large de degré 1.

La notion d'opérateurs  $\gamma$ -diffusifs est donc ainsi étendue aux opérateurs de symbole holomorphe dans  $\Omega_\gamma^+$  et de croissance dans  $\Omega_\gamma^+$  au plus polynômial.

### 1.6.3 Opérateurs matriciels

L'extension de la représentation diffusive aux opérateurs matriciels se fait elle aussi de manière naturelle.

#### Notations

Soit  $\mathcal{H}$  un opérateur matriciel de taille  $n \times m$ , dont on note  $\mathcal{H}_i^j$ ,  $i = 1 : n$ ,  $j = 1 : m$ , les éléments scalaires. En utilisant par souci de clarté la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés<sup>6</sup>, on note alors :

$$(\mathcal{H}u)_i = \mathcal{H}_i^j u_j. \quad (1.134)$$

On suppose que chacun des opérateurs scalaires  $\mathcal{H}_i^j$  est  $\gamma$ -diffusif au sens strict, et on note  $\mu_i^j$  son  $\gamma$ -symbole dans  $\Delta'_\gamma$ . Sous cette hypothèse, l'opérateur matriciel  $\mathcal{H}$  est dit lui même  $\gamma$ -diffusif au sens strict, et la matrice des  $\gamma$ -symboles  $\mu_i^j$ , notée  $\mu$ , est appelée  $\gamma$ -symbole de  $\mathcal{H}$ .

On définit alors l'espace  $\Delta_\gamma^{n \times m}$  des  $\gamma$ -symboles matriciels de taille  $n \times m$  :

$$\Delta_\gamma^{n \times m} := \left\{ \mu = (\mu_i^j)_{i=1:n, j=1:m} \text{ tel que, } \forall i, j, \mu_i^j \in \Delta'_\gamma \right\}. \quad (1.135)$$

On a alors, pour tout opérateur matriciel  $\mathcal{H}$  de taille  $n \times m$ ,  $\gamma$ -diffusif au sens strict et de  $\gamma$ -symbole  $\mu \in \Delta_\gamma^{n \times m}$  :

$$\forall i, (\mathcal{H}u)_i := \mathcal{H}_i^j u_j = \langle \mu_i^j, \psi_{u_j} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}. \quad (1.136)$$

En notant :

$$(\mu \cdot \psi)_i = \langle \mu_i^j, \psi_j \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}, \quad (1.137)$$

on écrira de manière simplifiée :

$$\mathcal{H}u = \mu \cdot \psi. \quad (1.138)$$

#### $\gamma$ -réalisation d'un opérateur matriciel

Une  $\gamma$ -réalisation de  $\mathcal{H}$  est donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_j(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi_j(t, \xi) + u_j(t) & j = 1 : m \\ (\mathcal{H}u)_i = (\mu \cdot \psi)_i = \langle \mu_i^j, \psi_j \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} & i = 1 : n, \end{cases} \quad (1.139)$$

que l'on notera plus simplement :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + u \\ \mathcal{H}u = \mu \cdot \psi. \end{cases} \quad (1.140)$$

**Remarque 49** Dans la  $\gamma$ -réalisation (1.139), un unique contour  $\gamma$  commun à toutes les  $\gamma$ -réalisations des opérateurs  $\mathcal{H}_i^j$  a été considéré. Une autre solution consistant à considérer un contour  $\gamma_{ij}$  pour chaque  $\mathcal{H}_i^j$  peut naturellement aussi être envisagée. On a alors :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_{ij}(t, \xi) = \gamma_{ij}(\xi) \psi_{ij}(t, \xi) + u_j(t) & i = 1 : n, j = 1 : m, \\ (\mathcal{H}u)_i = \langle \mu_i^j, \psi_{ij} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} & i = 1 : n. \end{cases} \quad (1.141)$$

Cependant le choix d'un unique contour  $\gamma$  n'est pas anodin et offre des avantages non négligeables. En effet, outre le fait que la  $\gamma$ -réalisation (1.139) associée à ce choix nécessite la résolution de seulement  $m$  équations différentielles contre  $n \times m$  pour la  $\gamma$ -réalisation (1.141), ce choix permet également d'obtenir une algèbre d'opérateurs matriciels associée à une algèbre de  $\gamma$ -symboles matriciels dans laquelle le produit  $\sharp_\gamma$  est bien défini (ce qui n'est pas le cas lorsque l'on considère plusieurs contours  $\gamma_{ij}$ ).

<sup>6</sup>  $a^j b_j := \sum_j a^j b_j$

### Opérateurs matriciels $\gamma$ -diffusifs au sens large

Supposons à présent que  $\mathcal{H}_i^j$  est  $\gamma$ -diffusif au sens large d'ordre  $n_{ij}$ . En posant  $N = \max(n_{ij})$ , et en notant  $\mu_i^j$  le  $\gamma$ -symbole de  $\mathcal{H}_i^j \circ \partial_t^{-N}$  on a alors naturellement la  $\gamma$ -réalisation de  $\mathcal{H}$  suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + \partial_t^N u \\ \mathcal{H}u = \mu \cdot \psi. \end{cases} \quad \text{où } \mu = (\mu_i^j)_{i=1:n, j=1:m}. \quad (1.142)$$

### Produit de $\gamma$ -symboles matriciels

Ces produits sont définis de la même manière que le produit matriciel à partir du produit de composition pour les opérateurs et du produit  $\#_\gamma$  pour les  $\gamma$ -symboles. On a :

- pour tous  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  opérateurs matriciels de taille respective  $n \times l$  et  $l \times m$ ,

$$\forall i = 1 : n, \forall j = 1 : m, \quad (\mathcal{H} \circ \mathcal{K})_i^j = \mathcal{H}_i^l \circ \mathcal{K}_l^j, \quad (1.143)$$

- $\forall \mu \in \Delta_\gamma^{n \times l}, \forall \nu \in \Delta_\gamma^{l \times m}$ ,

$$\forall i = 1 : n, \forall j = 1 : m, \quad (\mu \#_\gamma \nu)_i^j = \mu_i^l \#_\gamma \nu_l^j. \quad (1.144)$$

**Remarque 50** *Le produit d'un opérateur matriciel  $\mathcal{H}$  de taille  $n \times m$  (resp. d'un  $\gamma$ -symbole matriciel  $\mu \in \Delta_\gamma^{n \times m}$ ) avec un opérateur scalaire  $\mathcal{K}$  (resp. un  $\gamma$ -symbole scalaire  $\nu$ ) sera de même défini par :  $\forall i = 1 : n, \forall j = 1 : m$ ,*

$$(\mathcal{K} \circ \mathcal{H})_i^j = \mathcal{K} \circ \mathcal{H}_i^j \quad (\text{resp. } (\nu \#_\gamma \mu)_i^j = \nu \#_\gamma \mu_i^j). \quad (1.145)$$

En particulier,  $\Delta_\gamma^{m \times n}$  est une algèbre topologique (topologie produit), le produit interne étant (séquentiellement) continu.



# Chapitre 2

## Quelques éléments techniques

Dans ce chapitre sont données quelques indications techniques pour le calcul de l'expression analytique d'un  $\gamma$ -symbole et pour l'approximation numérique d'une réalisation diffusive.

### 2.1 Le $\gamma$ -symbole

Un problème qui se pose en pratique est de savoir comment réaliser un opérateur  $\mathcal{H}$  de symbole  $H(p)$  donné. Sous représentation diffusive, cet opérateur est caractérisé par son  $\gamma$ -symbole : dans ce paragraphe, on donne succinctement divers méthodes et résultats permettant d'établir l'expression analytique du  $\gamma$ -symbole de  $\mathcal{H}$ .

#### 2.1.1 Détermination analytique

Rappelons dans un premier temps les résultats théoriques donnés précédemment.

##### En théorie

Dans le cas le plus général, un  $\gamma$ -symbole de  $\mathcal{H}$  est donné par :

$$\mu(\xi) = \lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \left[ \frac{\tilde{\gamma}'_n(\xi)}{2i\pi} H(\tilde{\gamma}_n(\xi)) \right], \quad (2.1)$$

où  $\tilde{\gamma}_n$  est une suite décroissante d'arcs réguliers contenus dans  $\Omega_\gamma^+$  tels que  $\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma$  dans  $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R})$ .

En les points où  $\gamma$  est régulière, cette formule se simplifie :

$$\mu(\xi) = \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} H|_{\gamma^+}, \quad (2.2)$$

où  $H|_{\gamma^+}$  est la trace à droite au sens des distributions de  $H$  sur  $\gamma$  : par définition (et sous l'hypothèse d'analyticité de  $H$  dans  $\Omega_\gamma^+$ ),  $H|_{\gamma^+}$  est donc la limite dans  $\mathcal{D}'$  de la suite de fonctions  $H|_{\tilde{\gamma}_n}$  où  $\tilde{\gamma}_n$  est une suite d'arcs simples contenus dans  $\Omega_\gamma^+$  tels que  $\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma$  dans  $C^\infty$ .

Si de plus  $H$  est régulière en les points où  $\gamma$  est elle-même régulière,  $H|_{\gamma^+}$  est égal à la trace de  $H$  sur  $\gamma$  :

$$\mu(\xi) = \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} H(\gamma(\xi)). \quad (2.3)$$

##### En pratique

Dans la plupart des cas pratiques, le contour  $\gamma$  considéré est régulier sauf en un nombre fini de points anguleux en lesquels  $\gamma$  n'est pas dérivable.

Pour le calcul de  $\mu$ , on distinguera deux types de singularités que peut avoir  $H$  sur le contour  $\gamma$  : les pôles d'ordre finis et les singularités autres (points de branchement, pôles essentiels). La

contribution des pôles dans l'expression du  $\gamma$ -symbole sera calculée indépendamment du reste. On montre en effet que le  $\gamma$ -symbole canonique d'un opérateur ayant des pôles d'ordre  $n_q \geq 1$  en  $\gamma(\xi_q)$ ,  $q \in Q$  sera, dans le cas où  $\gamma$  est régulière en  $\xi_q$ , de la forme :

**Proposition 51**

$$\mu(\xi) = \mu_r(\xi) + \sum_{q \in Q} \sum_{n=0}^{n_q} \alpha_{q,n} \delta_{\xi_q}^{(n)}(\xi), \quad (2.4)$$

où  $\mu_r \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$  est la partie non singulière de  $\mu$ , donnée par :

$$\mu_r(\xi) = \lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \left[ \frac{\tilde{\gamma}'_n(\xi)}{2i\pi} H(\tilde{\gamma}_n(\xi)) \right] \xi\text{-pp}. \quad (2.5)$$

**Preuve.** On a  $\mu = \lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \left[ \frac{\tilde{\gamma}'_n}{2i\pi} H(\tilde{\gamma}_n) \right]$ , d'où :

$$\langle \mu, \psi \rangle = \lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \langle \frac{\tilde{\gamma}'_n}{2i\pi} H \circ \tilde{\gamma}_n, \psi \rangle = \lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{\gamma}'_n(\xi)}{2i\pi} H(\tilde{\gamma}_n(\xi)) \psi(\xi) d\xi = \lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{2i\pi} H(p) \Psi(p) dp. \quad (2.6)$$

On considère alors comme contour  $\tilde{\gamma}_n$  le contour égal à  $\gamma$  sauf en les points  $\gamma(\xi_q)$  où  $H$  a un pôle, qu'il contourne avec un demi-cercle de rayon  $\frac{1}{n}$  et de centre  $\gamma(\xi_q)$ . On a alors :

$$\gamma_n = \sum_{q \in Q} \gamma|_{I_q^n} + \frac{1}{2} C(\gamma(\xi_q), \frac{1}{n}), \quad (2.7)$$

où  $I_q^n$  est l'intervalle des valeurs  $\xi$  entre  $\gamma(\xi_q)$  et  $\gamma(\xi_{q+1})$  (le cercle exclus) et  $\frac{1}{2} C(\gamma(\xi_q), \frac{1}{n})$  est le demi-cercle de centre  $\gamma(\xi_q)$  et de rayon  $\frac{1}{n}$ . On a bien  $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma$ , d'où :

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{2i\pi} H(p) \Psi(p) dp &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{q \in Q} \left[ \int_{\gamma|_{I_q^n}} \frac{1}{2i\pi} H(p) \Psi(p) dp + \int_{\frac{1}{2} C(\gamma(\xi_q), \frac{1}{n})} \frac{1}{2i\pi} H(p) \Psi(p) dp \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma} \left[ \frac{\tilde{\gamma}'_n(\xi)}{2i\pi} H(\tilde{\gamma}_n(\xi)) \right] \psi(\xi) d\xi + \sum_{q \in Q} \frac{1}{2} \text{Res}(H(\cdot) \Psi(\cdot), \gamma(\xi_q)). \end{aligned}$$

Or, si  $H$  possède un pôle d'ordre  $n_q$  sur  $\gamma$  en  $\gamma(\xi_q)$  :

$$H(p) = \frac{\tilde{H}(p)}{(p - \gamma(\xi_q))^{n_q}}, \quad (2.8)$$

on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Res}(H(\cdot) \Psi(\cdot), \gamma(\xi_q)) &= \frac{1}{2(n_q - 1)!} \frac{d^{(n_q-1)}}{dp^{(n_q-1)}} (\tilde{H}(\cdot) \Psi(\cdot))|_{q=\gamma(\xi_q)} \\ &= \frac{1}{2(n_q - 1)!} \sum_{k=0}^{n_q} C_{n_q}^k \tilde{H}^{(n_q-k)}(\gamma(\xi_q)) \Psi^{(k)}(\gamma(\xi_q)). \end{aligned}$$

On montre ensuite que, sous réserve de régularité de  $\gamma$  en  $\xi_q$ ,  $\Psi^{(k)}(\gamma(\xi_q))$  s'exprime comme combinaison linéaire de  $\psi^{(j)}(\xi_q)$ ,  $j = 1 : k$ . ■



**Expression de  $\mu_r$** 

► Cas où  $\gamma$  est régulière et où  $H$  ne présente pas d'autres singularités que des pôles sur  $\gamma$  : pour le calcul de  $\mu_r$ , on utilisera en général la formule (2.3).

**Exemple 52** On considère l'opérateur  $\mathcal{H}$  de symbole  $H(p) = \frac{1}{p+a}$ ,  $a > 0$  et un contour  $\gamma$  régulier vérifiant les hypothèses précédentes.  $\forall \xi$  tel que  $\gamma(\xi) \neq -a$ , on a :

$$\mu_r(\xi) = \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} \frac{1}{\gamma(\xi) + a} \quad (2.9)$$

► Cas où  $H$  présente des singularités (autres que des pôles) intégrables sur  $\gamma$  : dans ce cas, on utilisera la formule (2.2) avec  $H|_{\gamma^+}$  trace à droite au sens des fonctions de  $H$  sur  $\gamma$ .

**Exemple 53** Pour  $H(p) = \frac{\sqrt{1+\frac{p}{2a}}}{p}$  et  $\gamma$  défini par  $\gamma(\xi) = -|\xi|$ , on a, pour tout  $\xi \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \mu_r(\xi) &= \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (H(-|\xi| + \text{sign}(\xi)i\varepsilon)) = \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1 + \frac{-|\xi| + \text{sign}(\xi)i\varepsilon}{2a}}}{-|\xi| + \text{sign}(\xi)i\varepsilon} \right) \\ &= \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{-|\xi| \sqrt{1 + \frac{-|\xi| + \text{sign}(\xi)i\varepsilon}{2a}}}{\xi^2 + \varepsilon^2} \right) + \underbrace{\frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{-\text{sign}(\xi)i\varepsilon \sqrt{1 + \frac{-|\xi| + \text{sign}(\xi)i\varepsilon}{2a}}}{\xi^2 + \varepsilon^2} \right)}_{=0} \\ &= -\frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi |\xi|} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \sqrt{1 + \frac{-|\xi|}{2a} + \frac{\text{sign}(\xi)i\varepsilon}{2a}} \right) = \begin{cases} -\frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi |\xi|} \sqrt{1 - \frac{|\xi|}{2a}} \text{ pour } 2a > |\xi| \geq 0 \\ -\frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi |\xi|} i \text{sign}(\xi) \sqrt{\frac{|\xi|}{2a} - 1} \text{ pour } |\xi| \geq 2a \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2i\pi \xi} \sqrt{1 - \frac{|\xi|}{2a}} \text{ pour } 2a > |\xi| \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi |\xi|} \sqrt{\frac{|\xi|}{2a} - 1} \text{ pour } |\xi| \geq 2a \end{cases} \end{aligned}$$

**Remarque 54** Le  $\gamma$ -symbole étant voué à être "intégré", on ne s'intéresse qu'à son expression presque partout. En les points où  $\gamma$  n'est pas dérivable, et dans le cas où  $H$  n'admet pas de pôle en ces points, la valeur de  $\mu$  n'est donc "pas importante". Par contre, s'il y a un pôle en un point  $\xi_k$  en lequel la fonction  $\gamma$  n'est pas dérivable, il faudra le traiter à part. En effet la trace à droite au sens des distributions en ce point donne une masse de dirac qui ne peut être multipliée avec une fonction discontinue, ce qui est le cas de  $\gamma'$  lorsque  $\gamma$  n'est pas dérivable en  $\xi_q$ .

**Expression des  $\alpha_{q,n}$**  L'expression des  $\alpha_{q,n}$  dépend de l'ordre  $n_q$  du pôle en  $\gamma(\xi_q)$ . On cherchera les coefficients  $\alpha_{q,n}$  tels que :

$$\frac{1}{2} \text{Res}(H(\cdot)\Psi(\cdot), \gamma(\xi_q)) = \sum_{n=0}^{n_q} \alpha_{q,n} (-1)^n \psi^{(n)}(\xi_q) = \sum_{n=0}^{n_q} \alpha_{q,n} \langle \delta_{\xi_q}^{(n)}, \psi \rangle. \quad (2.10)$$

On obtient par exemple :

**Proposition 55** ► si  $n_q = 1$  (cas d'un pôle simple) :

$$\mu(\xi) = \mu_r(\xi) + \alpha_{q,0} \delta_{\xi_q}(\xi) \text{ avec } \alpha_{q,0} := \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow \gamma(\xi_q)} (p - \gamma(\xi_q)) H(p). \quad (2.11)$$

► si  $n_q = 2$  :

$$\mu(\xi) = \mu_r(\xi) + \alpha_{q,0} \delta_{\xi_q}(\xi) + \alpha_{q,1} \delta'_{\xi_q}(\xi), \quad (2.12)$$

où

$$\alpha_{q,0} := \frac{1}{2} \tilde{H}(\gamma(\xi_q)) \text{ et } \alpha_{q,1} := -\frac{1}{2} \frac{\tilde{H}(\gamma(\xi_q))}{\gamma'(\xi_q)}, \text{ avec } \tilde{H}(p) = (p - \gamma(\xi_q))^2 H(p). \quad (2.13)$$

► etc.

**Preuve.** Si  $n_q = 1$  :

$$\frac{1}{2} \text{Res}(H(\cdot)\Psi(\cdot), \gamma(\xi_q)) = \frac{1}{2} \tilde{H}(\gamma(\xi_q)) \psi(\xi_q) = \langle \frac{1}{2} \tilde{H}(\gamma(\xi_q)) \delta_{\xi_q}, \psi \rangle. \quad (2.14)$$

Si  $n_q = 2$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Res}(H(\cdot)\Psi(\cdot), \gamma(\xi_q)) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dp} (\tilde{H}(\cdot)\Psi(\cdot)) \Big|_{p=\gamma(\xi_q)} = \frac{1}{2} \tilde{H}'(\gamma(\xi_q)) \Psi(\gamma(\xi_q)) + \frac{1}{2} \tilde{H}(\gamma(\xi_q)) \Psi'(\gamma(\xi_q)) \\ &= \langle \frac{1}{2} \tilde{H}'(\gamma(\xi_q)) \delta_{\xi_q}, \psi \rangle + \langle \frac{1}{2} \tilde{H}(\gamma(\xi_q)) \delta_{\xi_q}, \frac{\psi'}{\gamma'} \rangle = \langle \frac{1}{2} \tilde{H}'(\gamma(\xi_q)) \delta_{\xi_q} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{H}(\gamma(\xi_q))}{\gamma'(\xi_q)} \delta'_{\xi_q}, \psi \rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

■

**Exemple 56** Pour  $H(p) = \frac{\sqrt{1+\frac{p}{2a}}}{p}$  et  $\gamma$  défini par  $\gamma(\xi) = -|\xi|$ , on a, avec  $\xi_0 = 0$  :

$$\mu(\xi) = \mu_r(\xi) + \alpha_{0,0} \delta_0(\xi) \text{ avec } \alpha_{0,0} = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} p H(p) = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \frac{p}{2a}}) \Big|_{p=0} = \frac{1}{2}. \quad (2.16)$$

## 2.1.2 Simplifications dans certains cas particuliers

### Cas où $\gamma$ symétrique par rapport à l'axe des réels

Soit  $\gamma$  un arc symétrique par rapport à l'axe des réels :

$$\gamma(\xi) = \overline{\gamma(-\xi)}, \quad (2.17)$$

et  $\mathcal{H}$  un opérateur  $\gamma$ -diffusif, de symbole  $H = \mathcal{L}h$  avec  $h$  à valeurs réelles. Alors, on a :

**Proposition 57**

$$\mu(\xi) = \overline{\mu(-\xi)}, \quad (2.18)$$

d'où, pour  $u$  à valeurs réelles :

$$\mathcal{H}u(t) = 2 \text{Re} \int_0^{+\infty} \mu(\xi) \psi(t, \xi) d\xi. \quad (2.19)$$

**Preuve.** Si  $H = \mathcal{L}h$  avec  $h$  à valeurs réelles, alors  $H(i\cdot)$  est à partie réelle paire et partie imaginaire impaire :

$$H(i\omega) = \overline{H(-i\omega)}. \quad (2.20)$$

On a donc  $\mu(\xi) = \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} H(\gamma(\xi)) = \frac{-\gamma'(-\xi)}{2i\pi} H(\gamma(-\xi)) = \frac{\gamma'(-\xi)}{2i\pi} \overline{H(\gamma(-\xi))} = \overline{\mu(-\xi)}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi) \psi(t, \xi) d\xi = \int_{-\infty}^0 \mu(\xi) \psi(t, \xi) d\xi + \int_0^{+\infty} \overline{\mu(-\xi)} \psi(t, \xi) d\xi \\ &= - \int_{+\infty}^0 \overline{\mu(\xi)} \psi(t, -\xi) d\xi + \int_0^{+\infty} \mu(\xi) \psi(t, \xi) d\xi = \int_0^{+\infty} \overline{\mu(-\xi)} \psi(t, -\xi) + \mu(\xi) \psi(t, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Or, on a ici  $\psi(t, \xi) = \overline{\psi(t, -\xi)}$  puisque  $\psi(t, \xi)$  solution de  $\partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t)$  et  $\psi(t, -\xi)$  solution de  $\partial_t \psi(t, -\xi) = \gamma(\xi) \psi(t, -\xi) + u(t)$  donc de  $\partial_t (\overline{\psi(t, -\xi)}) = \gamma(\xi) \overline{\psi(t, -\xi)} + u(t)$ . Donc :

$$\mathcal{H}u(t) = \int_0^{+\infty} (\overline{\mu(-\xi)} \overline{\psi(t, \xi)} + \mu(\xi) \psi(t, \xi)) d\xi = 2 \text{Re} \int_0^{+\infty} \mu(\xi) \psi(t, \xi) d\xi. \quad (2.21)$$

■

**Cas où**  $\gamma(\xi) = \gamma(-\xi)$

Dans ce cas, et en notant  $\gamma^*$  le demi-arc spectral défini par :

$$\gamma^* = \gamma|_{\mathbb{R}^+}, \quad (2.22)$$

on a :

**Proposition 58**

$$\mathcal{H}u = \int_0^{+\infty} \mu^* \psi d\xi, \quad (2.23)$$

avec  $\mu^*$  défini par :

$$\mu^*(\xi) = \mu(\xi) + \mu(-\xi), \quad \xi > 0. \quad (2.24)$$

et  $\psi$   $\gamma^*$ -représentation de  $u$  solution de :

$$\partial_t \psi(t, \xi) = \gamma^*(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), \quad \psi(0, \xi) = 0, \quad \xi > 0. \quad (2.25)$$

**Preuve.** On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi) \psi(t, \xi) d\xi = \int_{-\infty}^0 \mu(\xi) \psi(t, \xi) d\xi + \int_0^{+\infty} \mu(\xi) \psi(t, \xi) d\xi \\ &= - \int_{+\infty}^0 \mu(-\xi) \psi(t, -\xi) d\xi + \int_0^{+\infty} \mu(\xi) \psi(t, \xi) d\xi = \int_0^{+\infty} (\mu(-\xi) \psi(t, -\xi) + \mu(\xi) \psi(t, \xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Or, on a ici  $\psi(t, \xi) = \psi(t, -\xi)$  puisque  $\psi(t, \xi)$  solution de  $\partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t)$  et  $\psi(t, -\xi)$  solution de  $\partial_t \psi(t, -\xi) = \gamma(-\xi) \psi(t, -\xi) + u(t)$  avec  $\gamma(\xi) = \gamma(-\xi)$ . Donc :

$$\mathcal{H}u(t) = \int_0^{+\infty} (\mu(-\xi) + \mu(\xi)) \psi(t, \xi) d\xi. \quad (2.26)$$

■

**Remarque 59** Dans ce cas le  $\gamma$ -symbole  $\mu^*$  est unique pour un opérateur donné.

**Cas où**  $\gamma(\xi) = -|\xi|$

On se place ici dans un cas particulier des deux paragraphes précédents puisque  $\gamma(\xi) = \gamma(-\xi) = \gamma(-\xi)$ . On a alors :

**Proposition 60**

$$\mathcal{H}u = \int_0^{+\infty} \mu^* \psi d\xi, \quad (2.27)$$

avec  $\mu^*$  défini par :

$$\mu^*(\xi) = \frac{1_{\xi > 0}}{2i\pi} [H(t, \xi e^{-i\pi^-}) - H(t, \xi e^{i\pi^-})] = \frac{1_{\xi > 0}}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [H(t, -\xi - i\varepsilon) - H(t, -\xi + i\varepsilon)].$$

**Preuve.** On a :

$$\mu^*(\xi) = \mu(\xi) + \mu(-\xi), \quad \xi > 0 \quad \text{où} \quad \mu = \frac{\gamma'}{2i\pi} H|_{\gamma^+}. \quad (2.28)$$

Or, pour  $\gamma(\xi) = -|\xi|$ , on a :

$$\gamma'(\xi) = -\text{sign}(\xi) \quad \text{et} \quad H|_{\gamma^+}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H(-|\xi| + \text{sign}(\xi)i\varepsilon), \quad (2.29)$$

d'où, pour  $\xi > 0$  :

$$\begin{aligned} \mu^*(\xi) &= \mu(\xi) + \mu(-\xi) = \frac{-1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H(-\xi + \text{sign}(\xi)i\varepsilon) + \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H(-\xi + \text{sign}(-\xi)i\varepsilon) \\ &= \frac{1_{\xi > 0}}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [H(t, -\xi - i\varepsilon) - H(t, -\xi + i\varepsilon)]. \end{aligned}$$

■

**Remarque 61** Dans ce cas particulier,  $\mu^*(\xi) \in \mathbb{R}$  puisque l'on a :

$$\mu^*(\xi) = \mu(\xi) + \mu(-\xi) = \mu(\xi) + \overline{\mu(\xi)} = 2 \operatorname{Re}(\mu(\xi)). \quad (2.30)$$

### 2.1.3 Exemples

#### Cas d'un opérateur d'impédance

On considère le modèle d'une paroi absorbante destinée à la réduction du bruit généré par les moteurs des avions ([28], [44]). Dans ce modèle intervient l'opérateur intégral  $\mathcal{H}$  de symbole laplace :

$$H(p) = \frac{1}{p\chi_{\text{eff}}(p)}, \quad (2.31)$$

où  $\chi_{\text{eff}}(p)$  désigne la compressibilité effective de Lafarge [33] qui est donnée par :

$$\chi_{\text{eff}}(p) = \chi \left( 1 - c \frac{p}{p + a' (1 + b'p)^{\frac{1}{2}}} \right), \quad (2.32)$$

avec  $\chi = \frac{1}{P_0}$ ,  $a' = \frac{8\mu}{\rho_0 \Lambda'^2}$ ,  $b' = \frac{1}{2a'}$ ,  $c = \frac{\gamma-1}{\gamma}$ , les paramètres physiques  $\rho_0$ ,  $P_0$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $\Lambda'$  désignant respectivement la densité et la pression au repos, la viscosité dynamique, le rapport des chaleurs spécifiques et la longueur caractéristique à haute fréquence du problème thermique.

La fonction  $H$  est décroissante à l'infini et holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus ([-\infty, -2a'[\cup \{ \frac{a'(1-\sqrt{(1+16(1-c)^2})}{4(1-c)^2}, 0 \})$ .

En considérant comme arc  $\gamma$  le demi axe des réels à partie réelle négative  $\mathbb{R}^-$ , c'est à dire l'arc  $\gamma$  défini par :

$$\gamma(\xi) = -|\xi|, \quad (2.33)$$

on montre que  $H(\partial_t)$  admet comme  $\gamma$ -symbole dans  $\Delta'_\gamma$  [17] :

$$\mu^*(\xi) = \frac{a'c}{\pi\chi} \frac{\sqrt{b'\xi-1}}{\xi^2(1-c)^2 + \frac{a'}{2}\xi - a'^2} \mathbf{1}_{\xi > 2a'} + \frac{1}{\chi} \delta_0(\xi) + k_1 \delta_{\xi_1}(\xi), \quad (2.34)$$

où  $\xi_1 = \frac{a'(\sqrt{1+16(1-c)^2}-1)}{4(1-c)^2} > 0$  et  $k_1 = \frac{c(\sqrt{1+16(1-c)^2}-1)}{\chi(1-c)\sqrt{1+16(1-c)^2}} > 0$ .

La  $\gamma$ -réalisation de  $H(\partial_t)$  s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \psi(t, \xi) = -|\xi| \psi(t, \xi) + u(t), \quad \psi(0, \cdot) = 0, \\ H(\partial_t)u(t) = \langle \mu^*, \psi(t, \cdot) \rangle \\ = \frac{a'c}{\pi\chi} \int_{2a'}^{+\infty} \frac{\sqrt{b'\xi-1}}{\xi^2(1-c)^2 + \frac{a'}{2}\xi - a'^2} \psi(t, \xi) d\xi + \frac{1}{\chi} \psi(t, 0) + k_1 \psi(t, \xi_1). \end{array} \right. \quad (2.35)$$

#### Tableau de $\gamma$ -symboles

Les  $\gamma$ -symboles de divers opérateurs sont donnés en tableau 2.1 dans le cas où  $\gamma(\xi) = -|\xi|$ .

#### 2.1.4 Cas où $H(\partial_t)$ n'est pas $\gamma$ -réalisable

On considère un opérateur intégral  $H(\partial_t)$  et un contour  $\gamma$  supposé régulier par simplicité tel que le symbole de  $H(\partial_t)$  soit décroissant à l'infini dans  $\Omega_\gamma^+$  :

$$H(p) \xrightarrow[|p| \rightarrow \infty]{} 0 \text{ dans } \Omega_\gamma^+, \quad (2.36)$$

mais non nécessairement holomorphe dans tout  $\Omega_\gamma^+$ . On suppose que  $\mu := \frac{\gamma'}{2i\pi} H|_{\gamma^+} \in \mathcal{D}'_{L_\infty}$ . D'après (1.114), le symbole de l'opérateur  $\mathcal{H}_r : u \mapsto \langle \mu, \mathfrak{R}d_\gamma u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$  est donné par :

$$H_r(p) = \mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \mu = \mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \left( \frac{\gamma'}{2i\pi} H|_{\gamma^+} \right). \quad (2.37)$$

<u>conditions</u>	<u>symbole diffusif <math>\mu</math></u> (fréquence $\xi > 0$ )	<u>rép. impulsionnelle <math>h</math></u> (temps $s > 0$ )	<u><math>\mathfrak{L}</math>-symbole <math>H</math></u> (fréquence $p \in \mathbb{C}$ )
$\int \mu d\xi = 0$	$-\xi\mu(t, \xi)$	$\partial_s h^{(*)}$	$pH(t, p)$
	$\partial_\xi \mu(t, \xi)^{(*)}$	$s h(t, s)$	$-\partial_p H(t, p)$
$a > 0, b \geq 0$	$\mu(t, a\xi - b)$	$e^{-\frac{b}{a}s} h(t, \frac{s}{a})$	$H(t, ap + b)$
	$\delta$	1	$p^{-1}$
$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} \alpha > 0 \\ \alpha \notin \mathbb{N} \end{array} \right\}$	$\mu_\alpha(\xi) := \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \operatorname{pf} \frac{\mathbf{1}_{\xi>0}}{\xi^\alpha}$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1}$	$p^{-\alpha}$
$\partial_s^\alpha h \in L_{\text{loc}}^1$	$\mu(t, \cdot) \# \mu_{-\alpha}$	$\partial_s^\alpha h$	$p^\alpha H(t, p)$
$a, b \geq 0$	$\frac{1}{b-a} \delta_a + \frac{1}{a-b} \delta_b$	$e^{-as} * e^{-bs}$	$[(p+a)(p+b)]^{-1}$
$a \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$	$\delta_a^{\#n} = \frac{1}{(n-1)!} \delta_a^{(n-1)}$	$\frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-as}$	$(p+a)^{-n}$
$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ a > 0 \end{array} \right\}$	$\mu_\alpha \operatorname{vp} \frac{1}{(a-\xi)} + \frac{\cos(\pi\alpha)}{a^\alpha} \delta_a$	$\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * e^{-as}$	$p^{-\alpha} (p+a)^{-1}$
$\left. \begin{array}{l} -1 < \operatorname{Re}(\alpha, \beta) < 1 \\ \operatorname{Re}(\alpha + \beta) > 0 \\ 0 < b < a \end{array} \right\}$	$\frac{\sin(\pi(\beta+\alpha)) \mathbf{1}_{\xi>a}}{\pi(\xi-a)^\alpha (\xi-b)^\beta} + \frac{\sin(\pi\beta) \mathbf{1}_{b<\xi<a}}{\pi(a-\xi)^\alpha (\xi-b)^\beta}$	(-)	$(p+a)^{-\alpha} (p+b)^{-\beta}$
$a > 0$	$\frac{\mathbf{1}_{0<\xi<a}}{\pi \sqrt{\xi(a-\xi)}}$	$e^{-\frac{at}{2}} I_0(\frac{at}{2})$	$\frac{1}{\sqrt{p}\sqrt{p+a}}$
$\left. \begin{array}{l} -1 < \operatorname{Re} \alpha < 1 \\ 0 < b < a \end{array} \right\}$	$\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left( \frac{a-\xi}{\xi-b} \right)^\alpha \mathbf{1}_{b<\xi<a}$	(-)	$\left( \frac{p+a}{p+b} \right)^\alpha - 1$
$\left. \begin{array}{l} 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1 \\ -\operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} \beta \leq 1 \end{array} \right\}$	$\frac{\operatorname{Im}[(\xi^\alpha e^{i\pi\alpha} + a)^\beta]}{\pi(\xi^{2\alpha} + 2a \cos(\pi\alpha) \xi^\alpha + a^2)^\beta}$	(-)	$(p^\alpha + a)^{-\beta}$
$(\gamma = \text{const. d'Euler})$	$-\operatorname{pf} \frac{\mathbf{1}_{\xi>0}}{\xi}$	$\ln s$	$-p^{-1}(\gamma + \ln p)$
	$\frac{1}{1+\xi}$	$-e^s \operatorname{Ei}(-s)$	$\frac{\ln(p)}{p-1}$
	$\frac{1}{1+\xi^2}$	$\sin s \operatorname{Ci} s - \cos s \operatorname{Ssi} s$	(-)
	$e^{-\xi}$	$\frac{1}{1+s}$	$-e^p \operatorname{Ei}(-p)$
	$\frac{e^{-\xi}}{\sqrt{\pi\xi}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+s}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} e^p (1 - \operatorname{erf} \sqrt{p})$
	$\frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} - e^\xi \operatorname{erfc} \sqrt{\xi}$	$\frac{1}{1+\sqrt{s}}$	$\frac{\operatorname{Ei} p}{e^p} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} - \frac{i\pi \operatorname{erfc} \sqrt{p}}{e^p}$
	$\sin \xi$	$\frac{1}{1+s^2}$	$\sin p \operatorname{Ci} p - \cos p \operatorname{Ssi} p$
	$\frac{\sin \xi}{\xi}$	$\arctan \frac{1}{s}$	$\frac{\pi}{2p} + \frac{\cos p \operatorname{Ssi} p - \sin p \operatorname{Ci} p}{p}$
	$J_0(\xi)$	$\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$	$\frac{\pi}{2} (H_0(p) - Y_0(p))$
	$\frac{\cos(\sqrt{\xi})}{\pi\sqrt{\xi}}$	$\frac{\exp(-1/4s)}{\sqrt{\pi s}}$	$\frac{\exp(-\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$
	$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\xi - n^2 \pi^2)$	$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 \pi^2 s}$	$(\sqrt{p} \tanh \sqrt{p})^{-1}$
	$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a^n}{n!(2n)!} \delta^{(2n)} a$	$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a^n}{n!(2n)!} s^{2n}$	$\frac{1}{p} \exp\left(\frac{a}{p^2}\right)$

(\*) dérivation au sens de  $D'(R)$ 

(-) expression trop complexe ou impossible au moyen des fonctions spéciales standard.

TAB. 2.1 – Tableau de  $\gamma$ -symboles

L'opérateur  $\mathcal{H}$  se décompose donc en la somme de deux opérateurs  $\mathcal{H}_r$  et  $\mathcal{H}_0$  :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_r + \mathcal{H}_0, \quad (2.38)$$

avec :

- $\mathcal{H}_r$  opérateur représentant la partie  $\gamma$ -réalisable de  $\mathcal{H}$  ( $H_r(p)$  est donc décroissante à l'infini et holomorphe dans  $\Omega_\gamma^+$ ),
- et  $\mathcal{H}_0 := \mathcal{H} - \mathcal{H}_r$  opérateur tel que :

$$\frac{\gamma'}{2i\pi} H_{0|\gamma^+} \in 0_{\Delta'_\gamma}. \quad (2.39)$$

En effet, on a  $H(p) = H_r(p) + H_0(p)$  d'où :

$$\mathcal{L}_\gamma^* \left( \frac{\gamma'}{2i\pi} H_{|\gamma(\cdot)^+} \right) = \mathcal{L}_\gamma^* \left( \frac{\gamma'}{2i\pi} H_{r|\gamma(\cdot)^+} \right) + \mathcal{L}_\gamma^* \left( \frac{\gamma'}{2i\pi} H_{0|\gamma(\cdot)^+} \right). \quad (2.40)$$

Comme  $\mathcal{H}_r$  est  $\gamma$ -réalisable, son  $\gamma$ -symbole canonique est donné par  $\mu_c := \frac{\gamma'}{2i\pi} H_{r|\gamma^+} \in \Delta'_{\gamma,c}$  et on a  $\mu_c \sim \mu$  d'où  $\mathcal{L}_\gamma^* \left( \frac{\gamma'}{2i\pi} H_{0|\gamma(\cdot)^+} \right) = 0$ .

### Cas particulier où les singularités de $H$ dans $\Omega_\gamma^+$ sont des pôles

On suppose à présent que les seules singularités de  $H$  dans  $\Omega_\gamma^+$  sont des pôles en  $p_q$ ,  $q = 1 : Q < \infty$ . On montre alors que  $H_r(p)$  se décompose de la manière suivante :

$$H_r(p) = H(p) - \sum_{q=1}^Q \text{Res} \left( \frac{H}{p-\cdot}, p_q \right), \quad (2.41)$$

d'où :

$$H_0(p) = \sum_{q=1}^Q \text{Res} \left( \frac{H}{p-\cdot}, p_q \right). \quad (2.42)$$

#### Exemple 62 (Cas d'un opérateur rationnel)

On considère l'opérateur  $H(\partial_t)$  de symbole :

$$H(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)(p+3)} \quad (2.43)$$

et le contour  $\gamma$  défini par :

$$\gamma(\xi) = -2.5 + |\xi| e^{-\text{sign}(\xi)i\frac{3\pi}{2}}. \quad (2.44)$$

$H$  est holomorphe sur  $\Omega_\gamma^+ \setminus \{-1, -2\}$  avec  $-2$  (respectivement  $-1$ ) pôle simple (respectivement d'ordre 2). On a donc :

$$\begin{aligned} H_0(p) &= \text{Res} \left( \frac{H}{p-\cdot}, -1 \right) + \text{Res} \left( \frac{H}{p-\cdot}, -2 \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \frac{H(z)}{p-z} + g'(-1) \text{ avec } g(z) = (z+1) \frac{H(z)}{p-z} \\ &= \frac{1}{p+2} + \frac{-3(p+1)+2}{4(p+1)^2} = \frac{1}{p+2} - \frac{3}{4} \frac{1}{(p+1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(p+1)^2}, \end{aligned}$$

d'où :

$$H_r(p) = -\frac{1}{4} \frac{1}{p+3}. \quad (2.45)$$

Dans ce cas, le résultat peut également être obtenu par décomposition en éléments simples. On obtient en effet :

$$H(p) = -\frac{1}{4} \frac{1}{p+3} + \frac{1}{p+2} - \frac{3}{4} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(p+1)^2}. \quad (2.46)$$

## 2.2 Approximations numériques

On cherche à présent une approximation de la réalisation diffusive d'un opérateur  $H(\partial_t)$ . On se donne pour cela une discrétisation  $\{\xi_k\}_{k=1:n}$  de  $\xi$  à partir de laquelle on peut, de diverses manières, définir un modèle temps continu de dimension finie, permettant de réaliser un opérateur approché de  $H(\partial_t)$ . Ce modèle peut ensuite être discrétisé en temps pour les besoins pratiques. Dans ce paragraphe, on se contente uniquement de donner quelques indications ; des détails supplémentaires sont donnés dans [48] ou dans [50] pour les opérateurs pseudo-différentiels de type fractionnaire.

### 2.2.1 Sur le choix de la discrétisation de $\xi$

La discrétisation de la variable  $\xi$  doit être adaptée au contour  $\gamma$  considéré. Dans l'équation d'état,  $\gamma(\xi)$  représente un pôle de la fonction de transfert. Plus ce pôle est proche de l'axe imaginaire, plus on se rapproche de la limite de stabilité. Par conséquent, on considérera une discrétisation d'autant plus fine que le contour  $\gamma$  est proche de l'axe  $i\mathbb{R}$ .

Dans le cas particulier (très fréquent en pratique) où  $\gamma(\xi)$  est un secteur défini par  $\gamma(\xi) = |\xi| e^{i \operatorname{sign}(\xi)\alpha}$ , avec  $\alpha \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ , la variable  $|\xi|$  est comparable à une fréquence. Les basses fréquences ayant plus de "poids" que les hautes fréquences dans la réalisation de l'opérateur, une discrétisation en  $\xi$  d'autant moins fine que les fréquences sont grandes sera utilisée. Les points de discrétisation  $\xi_k$  sont ainsi souvent définis comme éléments d'une suite géométrique de raison  $r$  :

$$\xi_{k+1} = r \xi_k, \quad (2.47)$$

permettant de couvrir la bande de fréquence  $[\xi_1, \xi_n]$ .

N.B. La fréquence 0 pouvant être importante dans certains cas, on pourra rajouter un point  $\xi_0 = 0 = \gamma(0)$ .

### 2.2.2 1<sup>ère</sup> méthode d'approximation via les fonctions d'interpolation

#### En théorie

On considère l'approximation  $\psi_n$  (resp.  $(\mu\psi)_n$ ) de  $\psi$  (resp. de  $\mu\psi$  si  $\mu \in L^1_{loc}$  et continue  $\xi$ -pp) dans  $L^2(\mathbb{R}) \supset \Delta_\gamma$  :

$$\psi_n(t, \xi) = \sum_{k=1}^n \psi(t, \xi_k) \Lambda_k(\xi), \quad (\text{resp. } (\mu\psi)_n(t, \xi) = \sum_{k=1}^n \mu(\xi_k) \psi(t, \xi_k) \Lambda_k(\xi)) \quad (2.48)$$

où  $\Lambda_k$ ,  $k = 1 : n$  sont des fonctions d'interpolation. Pour  $u$  suffisamment régulière, on a :

$$\|\psi_n - \psi\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{resp. } \|(\mu\psi)_n - \mu\psi\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0). \quad (2.49)$$

Une approximation convergente  $y_n$  de  $y = \mathcal{H}u$  est alors donnée par :

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^n \mu_k \psi(t, \xi_k), \quad (2.50)$$

avec

$$\mu_k = \langle \mu, \Lambda_k \rangle \quad (\text{resp. } \mu_k = \mu(\xi_k) \int_0^{+\infty} \Lambda_k(\xi) d\xi), \quad (2.51)$$

et la réalisation diffusive approchée de dimension  $n$  correspondante s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_k(t) = \gamma_k \psi_k(t) + u(t), & \psi_k(0) = 0, \quad k = 1 : n, \\ y_n(t) = \sum_{k=1}^n \mu_k \psi_k(t), \end{cases} \quad (2.52)$$

avec  $\psi_k(t) = \psi(t, \xi_k)$  et  $\gamma_k = \gamma(\xi_k)$ .

## En pratique

### ► Evaluation des intégrales

Dans le cas où l'on possède une expression analytique du  $\gamma$ -symbole  $\mu$ , il est envisageable, au moins dans certains cas, de calculer l'expression exacte de  $\mu_k = \langle \mu, \Lambda_k \rangle$ . Notons cependant que ces coefficients sont propres à un seul opérateur.

Lorsque  $\mu \in L_{loc}^1$  et continue  $\xi$ -pp, il suffit d'évaluer  $\mu_k = \mu(\xi_k) \int_0^{+\infty} \Lambda_k(\xi) d\xi$ , ce qui nécessite d'une part le calcul de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \Lambda_k(\xi) d\xi$  (qui dans la plupart du temps est assez simple), d'autre par l'évaluation de  $\mu$  en  $\xi_k$ . Comme  $\mu \in L_{loc}^1$ , une approximation de  $\mu(\xi_k)$  peut être obtenue en utilisant numériquement la formule (2.1) :

$$\mu(\xi_k) \simeq \frac{\tilde{\gamma}'_n(\xi)}{2i\pi} H(\tilde{\gamma}_n(\xi)), \quad (2.53)$$

avec  $\tilde{\gamma}_n \succ \gamma$  régulière et proche de  $\gamma$ .

L'hypothèse  $\mu \in L_{loc}^1$  est assez restrictive. Cependant, on a vu que dans la plupart des cas pratiques,  $\mu$  peut se décomposer en :

$$\mu = \mu_r + \mu_d \text{ avec } \sum_{q \in Q} \sum_{n=0}^{n_q} \alpha_{q,n} \delta_{\xi_q}^{(n)}. \quad (2.54)$$

On traitera donc séparément  $\mu_r$  et  $\mu_d$  en appliquant la méthode adaptée. Pour les termes en  $\alpha_{q,0} \delta_{\xi_q}$ , on notera que l'on a directement  $\langle \mu_d, \psi \rangle = \alpha_{q,0} \psi_q(t)$ .

### ► Sur le choix des fonctions d'interpolation

Les fonctions  $\Lambda_k$  considérées sont souvent les fonctions "chapeau" (voir figure 2.1a) d'interpolation linéaire définies par :

$$\forall k = 2..n-1, \quad \Lambda_k(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi < \xi_{k-1} \text{ ou } \xi \geq \xi_{k+1} \\ \frac{\xi - \xi_{k-1}}{\xi_k - \xi_{k-1}} & \text{si } \xi_{k-1} \leq \xi < \xi_k \\ \frac{\xi - \xi_{k+1}}{\xi_k - \xi_{k+1}} & \text{si } \xi_k \leq \xi < \xi_{k+1}. \end{cases} \quad (2.55)$$

Les fonctions  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_n$  jouent un rôle particulier. La fonction  $\Lambda_1$  sera en général soit définie comme n'importe quel autre fonction  $\Lambda_k$  en introduisant un point  $\xi_0$  fictif tel que  $\xi_0 < \xi_1$ , soit donnée par l'une des deux fonctions suivantes (voir figures 2.1b et 2.1c) :

$$\Lambda_1(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi < 0 \text{ ou } \xi \geq \xi_2 \\ 1 & \text{si } 0 \leq \xi < \xi_1 \\ \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} & \text{si } \xi_1 \leq \xi < \xi_2. \end{cases} \quad \text{ou} \quad \Lambda_1(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi < \xi_1 \text{ ou } \xi \geq \xi_2 \\ \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} & \text{si } \xi_1 \leq \xi < \xi_2. \end{cases} \quad (2.56)$$

La fonction  $\Lambda_n$  pourra elle aussi être définie comme n'importe quel autre fonction  $\Lambda_k$  en introduisant un point  $\xi_{n+1}$  fictif tel que  $\xi_n < \xi_{n+1}$ , ou sera définie de telle manière qu'elle ait le même comportement asymptotique que la fonction à approcher.

### 2.2.3 2<sup>ème</sup> méthode : approximation optimale du $\gamma$ -symbole

On considère l'approximation par mesures atomiques  $\mu_n$  du  $\gamma$ -symbole  $\mu$  de  $\mathcal{H}$  :

$$\mu_n(\xi) = \sum_{k=1}^n \mu_k \delta_{\xi_k}(\xi). \quad (2.57)$$

où  $\mu_k$  sont des coefficients à déterminer. L'approximation de  $H(i\omega)$  correspondante est donnée par :

$$\langle \mu_n, \frac{1}{i\omega - \gamma} \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{i\omega - \gamma(\xi_k)}. \quad (2.58)$$



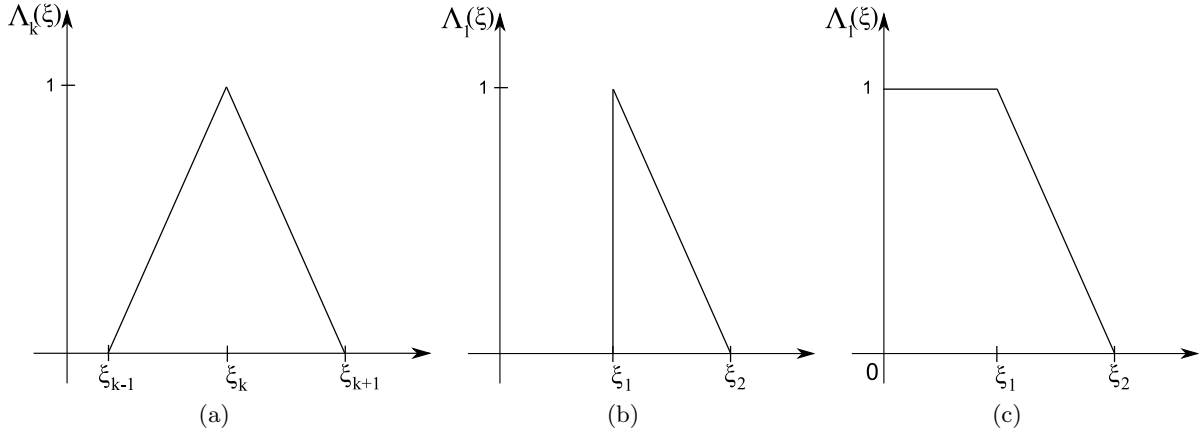


FIG. 2.1 – Fonctions "chapeau"

On cherche alors les coefficients  $\mu_k$  solutions du problème de minimisation :

$$\min_{(\mu_k)_k \in \mathbb{C}^n} \left[ \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{i\omega - \gamma(\xi_k)} - H(i\omega) \right|^2 d\omega \right]. \quad (2.59)$$

Le problème est résolu après quadrature de l'intégrale en  $\omega$  par une méthode des rectangles. Le pas de discrétisation  $\Delta\omega$  étant pris constant, la solution est obtenue par pseudo-inversion :

$$\mu^* = A^\dagger b = (A^* A)^{-1} A^* b \quad \text{lorsque } J > n, \quad (2.60)$$

où  $A_{jk} = \frac{1}{i\omega_j - \gamma(\xi_k)}$ ,  $j = 1 : J$ ,  $k = 1 : n$  et  $b_j = H(i\omega_j)$ ,  $j = 1 : J$ . Une méthode de pénalisation peut être utilisée en cas de mauvais conditionnement de  $A^* A$ ; on a alors :

$$\mu^* = (A^* A + \varepsilon I)^{-1} A^* b. \quad (2.61)$$

Là encore, la réalisation diffusive approchée de dimension  $n$  s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_k(t) = \gamma_k \psi_k(t) + u(t), & \psi_k(0) = 0, \quad k = 1..n, \\ y_n(t) = \sum_{k=1}^n \mu_k^* \psi_k(t), \end{cases} \quad (2.62)$$

avec  $\psi_k(t) = \psi(t, \xi_k)$  et  $\gamma_k = \gamma(\xi_k)$ .

## 2.2.4 Discrétisation temporelle

Quelle que soit l'approximation utilisée, on obtient une réalisation d'état approchée de dimension finie de l'opérateur considéré, c'est à dire une formulation du type :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_k(t) = \gamma_k \psi_k(t) + u(t), & \psi_k(0) = 0, \quad k = 1..n \\ y_n(t) = \sum_{k=1}^n \mu_k \psi_k(t), \end{cases} \quad (2.63)$$

qui peut s'écrire sous la forme matricielle équivalente :

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t) = A\psi(t) + Bu(t), & \psi(0) = 0, \\ y_n(t) = M\psi(t), \end{cases} \quad (2.64)$$

avec  $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))^T$ ,  $A = \text{diag}(\gamma_k)$ ,  $B = (1, \dots, 1)^T$  et  $M = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ .

On peut ensuite discrétiser le problème en temps.

Une première solution serait d'utiliser un schéma d'Euler ou tout autre schéma explicite standard. Cependant la stabilité de l'approximation resterait alors à vérifier et l'étendue couverte par les  $\gamma_k$  nécessiterait un pas de temps  $\Delta t$  excessivement petit.

La méthode utilisée en pratique tire profit de la nature diagonale de (2.63) qui permet de construire un schéma inconditionnellement stable. D'après la formule de Duhamel, la solution  $\psi$  de l'équation d'état est donnée par :

$$\psi(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds. \quad (2.65)$$

En supposant  $u$  constante sur  $[t, t + \Delta t]$  on a alors :

$$\begin{aligned} \psi(t + \Delta t) &= \int_0^t e^{A(t+\Delta t-s)} B u(s) ds + \int_t^{t+\Delta t} e^{A(t+\Delta t-s)} B u(s) ds \\ &\simeq e^{A \Delta t} \psi(t) + \int_t^{t+\Delta t} e^{A(t+\Delta t-s)} ds B u(t) \\ &\simeq e^{A \Delta t} \psi(t) + [-A^{-1} e^{A(t+\Delta t-s)}]_t^{t+\Delta t} B u(t) \\ &\simeq e^{A \Delta t} \psi(t) + A^{-1} (e^{A \Delta t} - I) B u(t) \\ &\simeq F \psi(t) + G u(t) \end{aligned}$$

avec  $F = e^{A \Delta t}$  et  $G = A^{-1} (e^{A \Delta t} - I) B$ . On obtient donc l'approximation numérique :

$$\begin{cases} \psi^{t+\Delta t} = F \psi^t + G u^t \text{ avec } \psi^0 = 0 \\ y^{t+\Delta t} = M \psi^{t+\Delta t}, \end{cases} \quad (2.66)$$

qui est telle que  $y^{t+\Delta t} \simeq (H(\partial_t)u)^{t+\Delta t}$ .

La stabilité de ce schéma découle directement du fait que  $|e^{\gamma_k \Delta t}| = e^{\operatorname{Re}(\gamma_k) \Delta t} \leq 1$  lorsque  $\operatorname{Re}(\gamma_k) \leq 0$ , condition imposée par l'hypothèse (1.15) faite sur le contour  $\gamma$ .

# Chapitre 3

## Inversion de $\gamma$ -symboles

Au même titre que la composition d'opérateurs, l'inversion est une opération utile dans le traitement de problèmes dynamiques. L'analyse de l'inversion de  $\gamma$ -symboles de  $\Delta'_\gamma$  fait l'objet de ce chapitre. Dans une première partie, on traite de l'inverse d'un  $\gamma$ -symbole ainsi que de sa  $\gamma$ -réalisation. Puis on s'intéresse plus particulièrement à la réalisation numérique d'une telle opération. Enfin, après avoir illustré l'inversion  $\gamma$ -symbolique scalaire par quelques exemples, on étend les résultats aux cas d'opérateurs matriciels.

### 3.1 Problématique

On note  $\mathcal{H} = H(\partial_t)$  un opérateur de  $\gamma$ -symbole  $\mu$ . Le problème est de construire, s'il existe, le  $\gamma$ -symbole, que l'on appellera inverse de  $\mu$  et que l'on notera  $\mu^{-1}$ , de l'opérateur  $\mathcal{H}^{-1}$  de symbole :

$$H^{-1}(p) = \frac{1}{H(p)} = \frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*\mu(p)}. \quad (3.1)$$

On peut constater dès à présent que l'opération d'inversion  $\gamma$ -symbolique ne peut être définie dans  $\Delta'_\gamma$  car  $\mathcal{H}^{-1}$  n'admet pas de  $\gamma$ -symbole dans  $\Delta'_\gamma$ . En effet, d'après la proposition 21,  $\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*\mu(p) \rightarrow 0$  quand  $|p| \rightarrow \infty$  dans  $\Omega_\gamma^+$  d'où

$$|H^{-1}(p)| \underset{\substack{|p| \rightarrow \infty \\ \text{dans } \Omega_\gamma^+}}{\longrightarrow} \infty; \quad (3.2)$$

$H^{-1}$  ne satisfait donc pas la condition nécessaire de décroissance à l'infini dans  $\Omega_\gamma^+$ . L'espace  $\Delta'_\gamma$  n'est en fait pas assez grand pour contenir les  $\gamma$ -symboles d'opérateurs  $\gamma$ -diffusifs (au sens strict) et ceux de leurs inverses.

Dans le chapitre précédent, on a également vu que  $(\Delta'_\gamma, \#_\gamma)$  est une algèbre *non unitaire*. En effet, l'opérateur identité, noté  $\mathcal{I}d$ , de symbole  $Id(p) = 1$  n'admet pas de  $\gamma$ -symbole dans  $\Delta'_\gamma$  puisque la fonction 1 n'est pas décroissante à l'infini dans  $\Omega_\gamma^+$ .

Pour définir l'inversion  $\gamma$ -symbolique, il faut donc se placer dans une sur-algèbre unitaire de  $\Delta'_\gamma$ . On considère pour cela la sur-algèbre notée  $\Sigma_\gamma$  constituée de  $\gamma$ -symboles d'opérateurs  $\gamma$ -diffusifs au sens large (voir paragraphe 1.6.2), c'est-à-dire pour lesquels qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que la composition de ces opérateurs avec  $\partial_t^{-n}$  soit  $\gamma$ -diffusif au sens strict.

Dans tout ce chapitre, on supposera que  $\gamma(0) = 0$ ; on a alors :  $\delta \in \Delta'_\gamma$  est  $\gamma$ -symbole (non canonique) de  $\partial_t^{-1}$ .

## 3.2 L'algèbre $\Sigma_\gamma$

### 3.2.1 Construction-définition

Soit  $\mathcal{H}$  un opérateur  $\gamma$ -diffusif au sens large de degré  $m \in \mathbb{N}$ . On a :

$$H(p) = \mathbf{H}(p) p^m, \quad (3.3)$$

avec  $\mathbf{H}$  symbole d'un opérateur  $\gamma$ -diffusif au sens strict. On note  $\boldsymbol{\mu} \in \Delta'_\gamma$  le  $\gamma$ -symbole de  $\mathbf{H}(\partial_t)$  et  $\boldsymbol{\mu}_c$  son  $\gamma$ -symbole canonique.

On définit alors le  $\gamma$ -symbole canonique de  $\mathcal{H}$ , noté  $\mu_c$ , dont la définition prolonge celle des opérateurs  $\gamma$ -diffusifs au sens strict :

$$\mu_c = \boldsymbol{\mu}_c \gamma^m, \quad (3.4)$$

cette écriture abusive signifiant plus précisément :

$$\mu_c := \lim_{\tilde{\gamma} \xrightarrow{\gamma} \gamma} \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} H(\tilde{\gamma}) = \lim_{\tilde{\gamma} \xrightarrow{\gamma} \gamma} \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} \mathbf{H}(\tilde{\gamma}) \tilde{\gamma}^m = \lim_{\tilde{\gamma} \xrightarrow{\gamma} \gamma} \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} (\mathcal{L}\mathcal{L}^*\boldsymbol{\mu})(\tilde{\gamma}) \tilde{\gamma}^m. \quad (3.5)$$

Très clairement,  $\gamma^m \Delta'_{\gamma,c} \subset \gamma^{m+1} \Delta'_{\gamma,c}$ . Cette propriété permet d'introduire naturellement l'espace vectoriel des  $\gamma$ -symboles canoniques au sens large :

**Définition 63** *L'espace  $\Sigma_{\gamma,c}$  des  $\gamma$ -symboles canoniques au sens large est défini par :*

$$\Sigma_{\gamma,c} := \cup_{m \in \mathbb{N}} \{ \mu_c := \boldsymbol{\mu}_c \gamma^m \text{ avec } \boldsymbol{\mu}_c \in \Delta'_{\gamma,c} \}. \quad (3.6)$$

**Remarque 64** *On a évidemment :  $\Delta'_{\gamma,c} \subset \Sigma_{\gamma,c}$ .*

**Remarque 65** *Tout élément de  $\Sigma_{\gamma,c}$  est appelé  $\gamma$ -symbole canonique et est associé à un opérateur diffusif au sens large (d'un certain degré  $m$ ) : par simplicité, on parlera également de  $\gamma$ -symbole canonique de degré  $m$ . Notons que les opérateurs  $\gamma$ -diffusifs au sens large de degré  $m = 0$  sont les opérateurs  $\gamma$ -diffusifs au sens strict.*

Pour tout opérateur  $H(\partial_t)$   $\gamma$ -diffusif au sens large de degré  $m$  et de  $\gamma$ -symbole canonique  $\mu_c \in \Sigma_{\gamma,c}$ , il existe une unique classe  $\boldsymbol{\mu} \in \Delta'_\gamma$  (un unique symbole  $\mathbf{H} = \mathcal{L}\mathcal{L}^*\boldsymbol{\mu}$ ) telle que :

$$\mu_c = \lim_{\tilde{\gamma} \xrightarrow{\gamma} \gamma} \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} (\mathcal{L}\mathcal{L}^*\boldsymbol{\mu})(\tilde{\gamma}) \tilde{\gamma}^m. \quad (3.7)$$

Le  $\gamma$ -symbole  $\boldsymbol{\mu}$  est en fait le  $\gamma$ -symbole de l'opérateur  $\mathbf{H}(\partial_t) = H(\partial_t) \circ \partial_t^{-m}$ . Par extension des propriétés établies au chapitre précédent, on a  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} \#_\gamma \delta^m$  avec  $\delta^m = \underbrace{\delta \# \dots \# \delta}_{m \text{ fois}} \in \Delta'_\gamma$   $\gamma$ -symbole de l'opérateur  $\partial_t^{-m}$ .

**Remarque 66** *Notons que  $\partial_t^{-m}$  doit être  $\gamma$ -diffusif, ce qui est le cas si  $\frac{1}{p^m}$  est holomorphe sur  $\Omega_\gamma^+$ . On voit donc ici que 0 doit appartenir à  $\overline{\Omega_\gamma^-}$ . Dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, on peut cependant adapter la construction de  $\Sigma_\gamma$ . Pour cela on considérera par exemple les opérateurs  $H(\partial_t)$  tels que  $H(\partial_t) \circ (\partial_t - a)^{-m}$  avec  $a \in \Omega_\gamma^-$  soit  $\gamma$ -diffusif au sens strict.*

On note  $0_{\Delta'_\gamma}$  la classe nulle de  $\Delta'_\gamma$ .

**Définition 67** *L'ensemble  $\Sigma_\gamma$  des  $\gamma$ -symboles au sens large est défini par le quotient :*

$$\Sigma_\gamma := \left( \Sigma_{\gamma,c} + 0_{\Delta'_\gamma} \right) / 0_{\Delta'_\gamma}. \quad (3.8)$$

Tout  $\mu \in \Sigma_\gamma$  est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence  $\sim$  :

$$\mu_1 \sim \mu_2 \iff (\mu_1 - \mu_2) \in 0_{\Delta'_\gamma}. \quad (3.9)$$

Tout élément de cette classe d'équivalence est  $\gamma$ -symbole d'un même opérateur  $H(\partial_t)$  puisque l'on a, pour tout  $\mu_0 \in 0_{\Delta'_\gamma}$  et tout  $\psi \in \Delta_\gamma$  :

$$\langle \mu_0 \#_\gamma \delta^m, \psi \rangle = 0. \quad (3.10)$$

Ainsi, pour tout opérateur  $H(\partial_t)$   $\gamma$ -diffusif au sens large de degré  $m$  et de  $\gamma$ -symbole  $\mu \in \Sigma_\gamma$ , on a

$$H(\partial_t)u = \langle \mu \#_\gamma \delta^m, \partial_t^m \psi_u \rangle. \quad (3.11)$$

**Définition 68** Le degré d'un  $\gamma$ -symbole  $\mu \in \Sigma_\gamma$  est défini par :

$$\deg(\mu) := \inf_{m \in \mathbb{N}} \{m; \mu \#_\gamma \delta^m \in \Delta'_\gamma\}. \quad (3.12)$$

### 3.2.2 Produit # dans $\Sigma_\gamma$

Le produit  $\#_\gamma$  s'étend algébriquement aux  $\gamma$ -symboles d'opérateurs  $\gamma$ -diffusifs au sens large.

**Définition 69** Soient  $\mu, \nu \in \Sigma_\gamma$  de degrés respectifs  $m$  et  $n$ , et  $\mu_c$  et  $\nu_c$  leur  $\gamma$ -symboles canoniques respectifs. Alors :

►  $\mu \#_\gamma \delta^m$  est l'unique classe d'équivalence de  $\Delta'_\gamma$  telle que :

$$\mu_c = \lim_{\tilde{\gamma} \xrightarrow{\sim} \gamma} \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} [\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*(\mu \#_\gamma \delta^m)](\tilde{\gamma}) \times \tilde{\gamma}^m. \quad (3.13)$$

►  $\mu \#_\gamma \nu$  est l'élément de  $\Sigma_\gamma$  de représentant canonique :

$$(\mu \#_\gamma \nu)_c = \lim_{\tilde{\gamma} \xrightarrow{\sim} \gamma} \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} [\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*(\mu \#_\gamma \delta^m)](\tilde{\gamma}) \times [\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*(\nu \#_\gamma \delta^n)](\tilde{\gamma}) \times \tilde{\gamma}^{m+n} \quad (3.14)$$

**Remarque 70** Soit  $H(\partial_t)$  l'opérateur de  $\gamma$ -symbole  $\mu$  ; on a :

$$(\mu \#_\gamma \delta^m)_c = \lim_{\tilde{\gamma} \xrightarrow{\sim} \gamma} \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} \frac{H(\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}^m} \text{ et } \frac{H(p)}{p^m} = \mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*(\mu \#_\gamma \delta^m). \quad (3.15)$$

En notant  $K(\partial_t)$  l'opérateur de  $\gamma$ -symbole  $\nu$ , on vérifie alors aisément que  $\mu \#_\gamma \nu$  est bien le  $\gamma$ -symbole de  $H(\partial_t) \circ K(\partial_t)$  :

$$(\mu \#_\gamma \nu)_c = \lim_{\tilde{\gamma} \xrightarrow{\sim} \gamma} \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} H(\tilde{\gamma}) \times K(\tilde{\gamma}). \quad (3.16)$$

On a le résultat suivant :

**Proposition 71** Soient  $\mu, \nu \in \Sigma_\gamma$  deux  $\gamma$ -symboles de degrés respectifs  $m$  et  $n$ . Alors :

$$\deg(\mu \#_\gamma \nu) \leq m + n. \quad (3.17)$$

### 3.2.3 Propriétés de $\Sigma_\gamma$

Le produit  $\#_\gamma$  est commutatif, interne dans  $\Sigma_\gamma$ , et sans diviseurs de zéro ; il prolonge algébriquement le produit dans  $\Delta'_\gamma$ . Muni de ce produit, l'ensemble  $\Sigma_\gamma$  a les propriétés suivantes :

- $\Delta'_\gamma$  est une *sous-algèbre* de  $(\Sigma_\gamma, \#_\gamma)$ .
- $(\Sigma_\gamma, \#_\gamma)$  est *unitaire*, l'unité,  $\gamma$ -symbole de l'opérateur  $\mathcal{I}d$  noté  $\iota_c$ , ayant pour représentant canonique :

$$\iota_c = \frac{\gamma'}{2i\pi}. \quad (3.18)$$

- $\Sigma_\gamma$  n'est pas isomorphe à l'algèbre de convolution<sup>1</sup>  $\mathcal{L}_\gamma^*(\Sigma_\gamma)$  : en général  $\mathcal{L}_\gamma^*(\mu)$  ne représente plus la réponse impulsionnelle de l'opérateur auquel est associé  $\mu$  et on a :

$$\mathcal{L}_\gamma^*(\mu \#_\gamma \nu) \neq \mathcal{L}_\gamma^*(\mu) * \mathcal{L}_\gamma^*(\nu) \text{ pour } \mu, \nu \in \Sigma_\gamma \setminus \Delta'_\gamma. \quad (3.19)$$

En effet, via le théorème de Cauchy et lorsque  $\gamma$  est régulière, on montre par exemple que :

$$\forall s > 0, (\mathcal{L}_\gamma^* \iota)(s) = \int_{J_\gamma} e^{\gamma(\xi)s} \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} d\xi = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{ps} dp = 0, \quad (3.20)$$

puisque  $p \mapsto e^{ps}$  est holomorphe sur tout  $\mathbb{C}$ .

**Remarque 72** On a désormais, lorsque  $\mu$  est de degré  $m$  :

$$h = \mathcal{L}^{-1}H \text{ avec } H(p) = p^m [\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*(\mu \#_\gamma \delta^m)](p). \quad (3.21)$$

Dans la suite, on appellera donc inverse du  $\gamma$ -symbole  $\mu$  d'un opérateur  $\mathcal{H}$  l'inverse de  $\mu$  dans  $\Sigma_\gamma$ .

### 3.2.4 Extension aux $\gamma$ -symboles matriciels

L'espace  $\Sigma_\gamma^{n \times m}$  des  $\gamma$ -symboles matriciels (de degré quelconque) se définit de façon naturelle :

$$\Sigma_\gamma^{n \times m} := \{\mu = (\mu_i^j)_{i=1:n, j=1:m}, \mu_i^j \in \Sigma_\gamma\}. \quad (3.22)$$

et le produit  $\#$  s'étend à  $\Sigma_\gamma^{n \times m}$  de façon standard :  $\forall \mu \in \Sigma_\gamma^{n \times l}, \forall \nu \in \Sigma_\gamma^{l \times m}$ ,

$$\forall i = 1 : n, \forall j = 1 : m, (\mu \#_\gamma \nu)_i^j = \sum_l \mu_i^l \#_\gamma \nu_l^j, \quad (3.23)$$

En particulier,  $\Sigma_\gamma^{n \times n}$  est une algèbre d'unité  $\text{diag}(\iota, \dots, \iota)$  (non commutative).

## 3.3 L'inversion dans $\Sigma_\gamma$

### 3.3.1 Inverse d'un $\gamma$ -symbole

**Définition 73** Le  $\gamma$ -symbole  $\mu \in \Sigma_\gamma$  est dit *inversible* dans  $\Sigma_\gamma$  s'il existe  $\mu^{-1} \in \Sigma_\gamma$ , appelé *inverse* de  $\mu$ , tel que :

$$\mu \#_\gamma \mu^{-1} = \iota. \quad (3.24)$$

Si  $H(\partial_t)$  a pour  $\gamma$ -symbole  $\mu$ , alors  $\mu^{-1}$  est le  $\gamma$ -symbole de l'opérateur  $H(\partial_t)^{-1}$  de symbole  $\frac{1}{H(p)}$ . On a donc :

<sup>1</sup>rappelons qu'au contraire, par construction,  $\Delta'_\gamma$  est isomorphe à  $\mathcal{L}_\gamma^*(\Delta'_\gamma)$ .

**Proposition 74** Soit  $\mu \in \Sigma_\gamma$  de degré  $m$ , d'inverse  $\mu^{-1} \in \Sigma_\gamma$ . Alors, le représentant canonique de la classe  $\mu^{-1}$  est donné par :

$$(\mu^{-1})_c = \lim_{\tilde{\gamma} \xrightarrow{\sim} \gamma} \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} \frac{1}{H(\tilde{\gamma})} = \lim_{\tilde{\gamma} \xrightarrow{\sim} \gamma} \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} \frac{1}{\tilde{\gamma}^m [\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*(\mu \#_\gamma \delta^m)](\tilde{\gamma})}. \quad (3.25)$$

D'après (3.11), la  $\gamma$ -réalisation de  $H^{-1}(\partial_t)$  de  $\gamma$ -symbole  $\mu^{-1}$ , et de degré  $m'$  (différent de  $m$ ) est donnée par :

$$H^{-1}(\partial_t)(u) = \langle \delta^{m'} \#_\gamma \mu^{-1}, \partial_t^{m'} \psi_u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}. \quad (3.26)$$

### Inversibilité dans $\Sigma_\gamma$

Pour que le  $\gamma$ -symbole d'un opérateur  $H(\partial_t)$  soit inversible, il faut et il suffit que  $H^{-1}(\partial_t)$  soit  $\gamma$ -diffusif au sens large, d'un certain degré  $m \in \mathbb{N}$ . Le symbole  $\frac{1}{p^m H(p)}$  de  $\partial_t^{-m} \circ H^{-1}(\partial_t)$  (et donc  $\frac{1}{H(p)}$ ) doit donc être analytique dans  $\Omega_\gamma^+$ . On a en particulier le résultat :

**Théorème 75** 1.  $\mu \in \Delta'_\gamma$  est inversible dans  $\Sigma_\gamma$  si :

- (i)  $\frac{1}{H} = \frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \mu}$  est analytique dans  $\Omega_\gamma^+$ ,
- (ii) et  $\exists m \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{H(p)p^m} \rightarrow 0$  quand  $|p| \rightarrow 0$  dans  $\Omega_\gamma^-$ .

2.  $\mu \in \Sigma_\gamma$  de degré  $n$  est inversible dans  $\Sigma_\gamma$  si et seulement si  $\delta^n \# \mu \in \Delta'_\gamma$  est inversible dans  $\Sigma_\gamma$ .

**Remarque 76** L'inversibilité de  $\mu$  entraîne en particulier que  $H$  n'a aucun zéro dans  $\Omega_\gamma^+$ .

**Exemple 77** Soit  $\alpha > 0$  et  $\gamma$  régulière. L'opérateur  $H(\partial_t) = \partial_t^{-\alpha}$  de symbole  $H(p) = \frac{1}{p^\alpha}$  est  $\gamma$ -diffusif au sens strict. Son  $\gamma$ -symbole est donné par :

$$\mu = \frac{\gamma'}{2i\pi} \text{pf} \frac{1}{\gamma^\alpha}. \quad (3.27)$$

L'inverse  $\partial_t^\alpha$  de  $H(\partial_t)$  est quant à lui  $\gamma$ -diffusif au sens large, le  $\gamma$ -symbole de  $\partial_t^\alpha$  étant :

$$\mu^{-1} = \frac{\gamma'}{2i\pi} \gamma^\alpha \in \Sigma_\gamma, \quad (3.28)$$

avec  $\mu^{-1} \# \delta^m \in \Delta'_\gamma$  si  $m > \alpha$ .

### 3.3.2 Sur la continuité de l'opération d'inversion

Avant de s'intéresser à la continuité de l'opération d'inversion, il est important d'étudier son domaine de définition dans  $\Delta'_\gamma$ . C'est l'objet du théorème suivant :

**Théorème 78** Le domaine de définition  $D$  de la fonction

$$\begin{array}{ccc} \Delta'_\gamma & \longrightarrow & \Sigma_\gamma \\ \mu & \longmapsto & \mu^{-1} \end{array} \quad (3.29)$$

est d'intérieur vide pour la topologie forte.

**Preuve.** Pour montrer que  $D$  n'est voisinage d'aucun de ses points pour la topologie forte, il suffit de montrer :

$$\forall \mu \in D, \exists \mu_n \in \Delta'_\gamma \setminus D \text{ telle que } \mu_n \rightarrow \mu \text{ dans } \Delta'_\gamma. \quad (3.30)$$

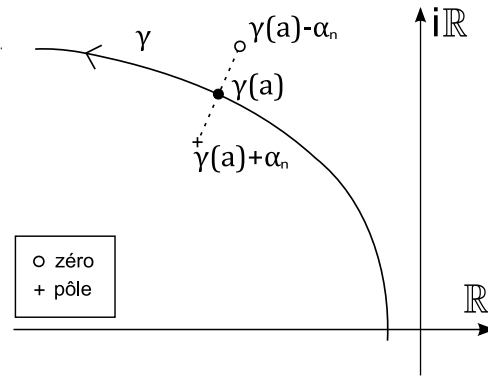


FIG. 3.1 –

Soit  $\mu \in D$   $\gamma$ -symbole inversible dans  $\Sigma_\gamma$  d'un opérateur  $H(\partial_t)$ . Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on considère alors la suite d'opérateurs  $H_n(\partial_t)$  de symboles :

$$H_n(p) = H(p) K_n(p) \quad (3.31)$$

$$\text{avec } K_n(p) = \frac{p - \gamma(a) - \alpha_n}{p - \gamma(a) + \alpha_n} = 1 - \frac{2\alpha_n}{p - \gamma(a) + \alpha_n}, \quad (3.32)$$

où  $\alpha_n \in \mathbb{C}$  tel que  $\gamma(a) + \alpha_n \in \Omega_\gamma^+$ ,  $\gamma(a) - \alpha_n \in \Omega_\gamma^-$  et  $\alpha_n \rightarrow 0$  (voir figure 3.1). Il est clair que  $H(\partial_t)$  étant  $\gamma$ -diffusif au sens strict,  $H_n(\partial_t)$  l'est également. On note  $\mu_n \in \Delta'_\gamma$  le  $\gamma$ -symbole de  $H_n(\partial_t)$ ;  $\mu_n$  n'est pas inversible dans  $\Sigma_\gamma$  puisque  $H_n$  a un zéro dans  $\Omega_\gamma^+$ .

Montrons maintenant que  $\mu_n \rightarrow \mu$  dans  $\Delta'_\gamma$ . D'après (3.32), on a :

$$\mu_n = \mu \# (\iota - 2\alpha_n \nu_n) = \mu - 2\mu \# (\alpha_n \nu_n), \quad (3.33)$$

avec  $\nu_n \in \Delta'_\gamma$   $\gamma$ -symbole de l'opérateur de symboles-Laplace  $\frac{1}{p - \gamma(a) + \alpha_n}$ . D'après le théorème de résidus, on a :

$$\nu_n \xrightarrow{\Delta'_\gamma} \delta_a \text{ quand } \alpha_n \rightarrow 0, \quad (3.34)$$

d'où, du fait de la continuité de la multiplication par un scalaire dans un espace vectoriel :

$$\alpha_n \nu_n \xrightarrow{\Delta'_\gamma} 0 \cdot \delta_a = 0, \text{ quand } \alpha_n \rightarrow 0. \quad (3.35)$$

Le produit  $\#_\gamma$  étant séquentiellement continu dans  $\Delta'_\gamma$ , on a alors :

$$\mu \# (\alpha_n \nu_n) \xrightarrow{\Delta'_\gamma} 0, \quad (3.36)$$

d'où  $\mu_n \rightarrow \mu$  dans  $\Delta'_\gamma$ . ■

**Remarque 79** On a en fait montré que  $D$  ne contient aucun ensemble séquentiellement ouvert.

**Remarque 80** Ce processus de construction d'une suite d'éléments non inversibles convergeant vers un élément inversible est général et interdit la possibilité de construction d'algèbres de Banach "raisonnables" de  $\gamma$ -symboles (dans une algèbre de Banach, l'ensemble des éléments inversibles est ouvert).

**Corollaire 81** L'ensemble  $\mathcal{J} = \Delta'_\gamma \setminus D$  est dense dans  $\Delta'_\gamma$ .

Pour tout  $\mu \in D$ , il existe donc des  $\gamma$ -symboles de  $\Delta'_\gamma$  arbitrairement voisins de  $\mu$  et qui ne sont pas inversibles dans  $\Sigma_\gamma$ . Pour approcher l'inverse de  $\mu$ , il faudra donc imposer aux approximations de  $\mu$  considérées d'appartenir à  $D$ .

On cherche à présent à cerner au mieux les éléments de  $D$ . Pour cela, on a besoin du lemme suivant, extension évidente du théorème 1.7 de [48] :



**Lemme 82** Si  $\mu_n \rightarrow 0$  dans  $\Delta'_{\gamma\text{fort}}$  alors  $H_n = \mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*\mu_n \rightarrow 0$  uniformément sur tout disque  $B$  de centre  $a \in \Omega_\gamma^+$  et de rayon  $r$  suffisamment petit.

On a alors les résultats suivants :

**Proposition 83** L'ensemble  $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$  des  $\mu \in \Delta'_\gamma$  tels que  $\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*\mu$  admet au moins un zéro dans  $\Omega_\gamma^+$  est séquentiellement ouvert (et donc ouvert).

**Preuve.** Montrons que  $\mathcal{J}_0$  est voisinage séquentiel de chacun de ses point. Soit  $H(\partial_t)$  un opérateur de  $\gamma$ -symbole  $\mu \in \Delta'_\gamma$  tel que  $H(a) = 0$ ,  $a \in \Omega_\gamma^+$ . D'après le lemme, pour toute suite  $\mu_n \in \Delta'_\gamma$  telle que  $\mu_n \rightarrow \mu$ ,  $K_n = \frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*\mu} \rightarrow H$  uniformément sur tout disque  $B$  de centre  $a$  et de rayon  $r$  suffisamment petit. Pour  $n \geq n_0$  assez grand,  $K_n$  a alors nécessairement un zéro dans  $B$ . ■

**Proposition 84**  $\mathcal{J}_0$  est dense dans  $\Delta'_\gamma$ .

**Preuve.** Identique à celle du théorème 78. ■

**Corollaire 85**  $D$  est rare<sup>2</sup> dans  $\Delta'_{\gamma\text{fort}}$ .

**Preuve.**  $D$  est le complémentaire d'un ensemble d'intérieur dense. ■

En fait,  $D$  étant constitué des  $\gamma$ -symboles d'opérateurs  $H(\partial_t)$  de symbole  $H(p)$  d'inverse analytique dans  $\Omega_\gamma^+$  et à croissance au plus polynômial quand  $p \rightarrow \infty$  dans tout secteur fermé contenu dans  $\Omega_\gamma^+$ , on peut finalement se demander si  $D$  est dense dans  $\Delta'_\gamma \setminus \mathcal{J}_0$ . La réponse à cette question est probablement encore négative.

Pour illustrer cela, considérons à titre d'exemple l'opérateur  $H(\partial_t)$  de symbole  $H(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}$ , de  $\gamma$ -symbole  $\mu \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0$ . Si on cherche à approcher  $\mu$  par une suite "raisonnable", de la forme  $\mu_n = \frac{\gamma'}{2i\pi}H_n|_{\gamma^+}$  avec  $H_n(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(e^{-\sqrt{p}} + \frac{1}{n+24}\right)$ , les zéros de  $H_n$  sont  $p_k = (\ln(n+24) + (2k+1)i\pi)^2 = (\ln(n+24))^2 - (2k+1)^2\pi^2 + i(2k+1)\pi \ln(n+24)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Or, lorsque  $k = 0$ ,  $(\ln(n+24))^2 - (2k+1)^2\pi^2 > 0$  :  $H_n$  a donc un zéro dans  $\Omega_\gamma^+$  et donc  $\mu_n \notin D \forall n$ . Il est probable qu'il en soit de même pour tout autre  $\mu \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0$  et tout autre type d'approximation de  $\mu$ . Le problème est ouvert.

Les résultats précédents montrent que le problème de l'inversion dans  $\Sigma_\gamma$  est *essentiellement mal posé au sens de l'existence*. Bien évidemment, ces résultats étant conditionnés par la topologie de  $\Delta'_\gamma$  (qui, rappelons-le, est la seule permettant la continuité au moins séquentielle du produit), rien n'interdit que pour une autre topologie mieux adaptée au problème de l'inversion, l'ensemble des éléments inversibles soit dense voire ouvert dans un ensemble "raisonnable". En pratique, il sera néanmoins nécessaire, avant de procéder à toute inversion numérique, où des produits seront inévitables, de s'assurer qu'un  $\gamma$ -symbole donné est *effectivement* inversible (et non seulement "suffisamment voisin" d'un élément inversible), sous peine de résultats instables voire inutilisables.

**Remarque 86** Les difficultés soulevées dans l'analyse précédente sont inhérentes au problème de l'inversion d'opérateurs convolutifs. Rappelons que, contrairement au cadre de la représentation diffuse, pour une réalisation d'état de dimension finie, ces questions n'ont même pas de sens : l'inverse d'une fonction de transfert non nulle  $H(p) = C(A-pI)^{-1}B$  n'est en effet jamais réalisable par l'équation d'état  $\dot{X} = AX + B\partial_t^m u$ , l'ensemble des zéros de  $H$  n'étant jamais égal à l'ensemble de ses pôles.

On se pose à présent la question de la continuité de l'opération d'inversion dans  $D$  : si l'on considère une suite  $\mu_n \in D$  convergeant vers  $\mu \in D$ , la suite  $(\delta^m \# \mu_n^{-1})_n$  converge-t-elle vers  $\delta^m \# \mu^{-1}$  ? On montre en fait, via un contre-exemple, que ce n'est pas le cas pour la convergence \*-faible de  $\Delta'_\gamma$ .

On note  $D_m \subset D$  le domaine de définition de la fonction  $\mu \in \Delta'_\gamma \mapsto \delta^m \# \mu^{-1} \in \Delta'_\gamma$ .

<sup>2</sup>Nulle part dense.

**Proposition 87**  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ , la fonction :

$$\begin{array}{ccc} D_m & \longrightarrow & \Delta'_\gamma \\ \mu & \longmapsto & \delta^m \# \mu^{-1} \end{array} \quad (3.37)$$

n'est nulle part séquentiellement continue dans  $D_m$  pour la topologie  $*$ -faible de  $\Delta'_\gamma$ .

**Preuve.** Il suffit de montrer que pour tout  $\mu \in D_m$ , il existe une suite  $\mu_n \in D_m$  telle que  $\mu_n \rightarrow \mu \in D_m$  et  $\delta^m \# \mu_n^{-1}$  diverge dans  $\Delta'_\gamma$ . Or par simple manipulation technique, une telle suite peut être construite à partir de la suite de symboles  $H_n(p) = \left(\frac{p}{(p+\frac{1}{n})}\right)^n$ . En effet, on vérifie que d'une part  $H_n(i\omega) = H_n|_{(i\xi)^+}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et tend vers 1  $\forall \omega \neq 0$ , d'autre part que  $\nu_n^{-1} = \frac{1}{H_n}|_{(i\xi)^+}$  diverge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  du fait que  $\nu_n^{-1}$  est une distribution d'ordre  $n$  et de support singulier  $\{0\}$ . ■

**Remarque 88** Ce défaut de continuité s'étend probablement à l'espace  $\Delta'_\gamma$ , bien que dans ce cas, la convergence de suites de distributions d'ordre non borné soit possible (il existe en effet, dans  $\Delta'_\gamma$ , des distributions de support singulier ponctuel et d'ordre infini). La construction de contre-exemples prouvant la non continuité s'avère alors plus complexe.

On vient de montrer que si  $\mu_n \in D \rightarrow \mu \in D$  dans  $\Delta'_\gamma$  fort, la suite  $(\delta^m \# \mu_n^{-1})_n$  ne converge pas forcément vers  $\delta^m \# \mu^{-1}$  : elle peut soit diverger, soit converger vers un autre élément. En réalité, ce dernier cas de figure ne peut pas avoir lieu dans  $\Delta'_\gamma$  grâce au résultat suivant :

**Proposition 89** L'opération d'inversion est à graphe séquentiellement fermé dans  $\Delta'_\gamma$  fort :

$$\left. \begin{array}{l} \mu_n \rightarrow \mu \\ \delta^m \# \mu_n^{-1} \rightarrow l \end{array} \right\} \implies l = \delta^m \# \mu^{-1}. \quad (3.38)$$

**Preuve.** Soit  $\mu_n \in D$  une suite de  $\gamma$ -symboles inversibles dans  $\Sigma_\gamma$  telle que :

$$\mu_n \rightarrow \mu \text{ et } \delta^m \# \mu_n^{-1} \rightarrow l \text{ dans } \Delta'_\gamma. \quad (3.39)$$

Grâce à la continuité séquentielle du produit  $\#$  dans  $\Delta'_\gamma$ , on a alors :

$$\delta^m \# \mu_n^{-1} \# \mu_n \rightarrow l \# \mu \text{ dans } \Delta'_\gamma; \quad (3.40)$$

le  $\gamma$ -symbole  $l$  vérifie donc :

$$l \# \mu = \delta^m, \quad (3.41)$$

c'est à dire :  $l = \delta^m \# \mu^{-1}$ . ■

Finalement, la suite  $(\delta^m \# \mu_n^{-1})_n$  n'est pas forcément convergente, mais si elle converge, c'est obligatoirement vers  $\delta^m \# \mu^{-1}$ . Ce résultat est moins fort que la continuité séquentielle mais reste néanmoins important, en particulier dans le cadre de l'inversion numérique.

D'un point de vue numérique, le défaut de continuité de l'inversion peut entraîner l'instabilité de l'opération d'inversion, le problème consistant à trouver  $\nu \in \Delta'_\gamma$  tel que  $\nu \# \mu = \delta^m$  étant mal posé au sens de Hadamard dans  $\Delta'_\gamma$ .

On peut néanmoins montrer que l'inversion  $\gamma$ -symbolique est continue au sens d'une convergence plus faible que celle de  $\Delta'_\gamma$ . On considère pour cela le sous espace  $\Delta_{\gamma,0} \subset \Delta_\gamma$  défini par :

$$\Delta_{\gamma,0} := \{\psi = (\mathfrak{A}d_\gamma u)(t); u \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+), t > 0\}. \quad (3.42)$$

**Lemme 90** Tout  $\psi \in \Delta_{\gamma,0}$  est la trace sur  $\gamma$  d'une fonction  $\Psi$  analytique dans  $\mathbb{C}$ .

**Preuve.**  $\Psi(-p) = \mathcal{L}u(t - \cdot)|_{[0,t]}$ ,  $u \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+)$ . ■

On introduit une première convergence affaiblie, que l'on appellera convergence *ultra faible* (u.f.) :

**Définition 91**

$$\mu_n \xrightarrow{u.f.} \mu \iff \forall \psi \in \Delta_{\gamma,0}, \langle \mu_n - \mu, \psi \rangle \rightarrow 0. \quad (3.43)$$

La continuité séquentielle de l'opération d'inversion pour cette convergence n'a pas encore lieu. Il faudrait pour cela que, étant donné une suite  $\mu_n \xrightarrow{D} \mu$ , on ait  $\langle \delta^m \# \mu_n^{-1} - \delta^m \# \mu^{-1}, \psi \rangle \rightarrow 0$  pour tout  $\psi \in \Delta_{\gamma,0}$ . Or :

$$\langle \delta^m \# \mu_n^{-1}, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\Psi(i\omega)}{H_n(i\omega)(i\omega)^m} d\omega, \quad (3.44)$$

avec  $H_n$  symbole-Laplace de l'opérateur de  $\gamma$ -symbole  $\mu_n$  et  $\Psi(i\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega s} \mathbf{u}(s) ds = 2\pi (\mathcal{F}^{-1} \mathbf{u})(\omega)$  avec  $\mathbf{u}$  à support borné, et donc puisque  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, t)$ ,  $\Psi(i\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ . Or, on n'a pas de tel résultat de convergence dans  $L^2(\mathbb{R})$ . On doit donc faire appel à une convergence encore plus faible permettant d'utiliser le lemme 82.

On introduit la convergence suivante, que l'on appellera convergence *hyper faible* (h.f.) :

**Définition 92** Soient  $\omega_1 > 0$  et  $\omega_2 < \infty$  :

$$\mu_n \xrightarrow{h.f.} \mu \iff \forall \psi \in \Delta_{\gamma,0}, \int_{\omega_1}^{\omega_2} (H_n(i\omega) - H(i\omega)) \Psi(i\omega) d\omega \rightarrow 0. \quad (3.45)$$

On a alors le résultat :

**Théorème 93**  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ , la fonction :

$$\begin{array}{ccc} D_m \text{ fort} & \longrightarrow & \Delta'_\gamma \text{ hyper faible} \\ \mu & \longmapsto & \delta^m \# \mu^{-1} \end{array} \quad (3.46)$$

est séquentiellement continue.

**Preuve.** Soit  $\mu \in D_m$  le  $\gamma$ -symbole d'un opérateur  $H(\partial_t)$ , et  $\mu_n \in D$  une suite de  $\gamma$ -symboles d'opérateurs  $H_n(\partial_t)$  telle que  $\mu_n \rightarrow \mu$  dans  $D$ . Soit par ailleurs  $\psi \in \Delta_{\gamma,0}$  et  $\Psi$  son prolongement analytique dans  $\mathbb{C}$ . D'après le lemme 82, puisque  $\mu_n \rightarrow \mu$  on a :

$$H_n(i\omega)|_{[\omega_1, \omega_2]} \rightarrow H(i\omega)|_{[\omega_1, \omega_2]} \text{ dans } L^\infty(\omega_1, \omega_2). \quad (3.47)$$

De plus,  $\mu_n$  et  $\mu$  étant inversibles,  $H_n$  et  $H$  n'ont aucun zéro dans  $\Omega_\gamma^+$  donc en particulier sur  $i\mathbb{R}^*$ ; ceci implique :

$$\frac{1}{H_n(i\omega)|_{[\omega_1, \omega_2]}} \rightarrow \frac{1}{H(i\omega)|_{[\omega_1, \omega_2]}} \quad (3.48)$$

dans  $L^\infty(\omega_1, \omega_2)$  fort et donc dans  $L^\infty(\omega_1, \omega_2)$  \*-faible. Comme en outre  $\frac{\Psi(i\omega)}{(i\omega)^m} \in L^1(\omega_1, \omega_2)$ , on a :

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\Psi(i\omega)}{H_n(i\omega)(i\omega)^m} d\omega \rightarrow \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\Psi(i\omega)}{H(i\omega)(i\omega)^m} d\omega. \quad (3.49)$$

■

C'est ce résultat qui sera utilisé dans la suite pour assurer la convergence de l'approximation de l'inverse du  $\gamma$ -symbole dans  $\Delta'_\gamma$ .

**Remarque 94** Du point de vue des applications, la convergence hyper-faible est en général suffisante du fait qu'à tout problème pratique est associée une "bande fréquentielle utile" limitée tant aux fréquences basses qu'aux fréquences élevées. Il conviendra toutefois de rester prudent dans l'analyse des résultats du fait que la convergence hyper-faible ne permet pas seule de contrôler efficacement le comportement des réponses fréquentielles hors de la bande utile.

**Remarque 95** l'espace  $\Delta'_\gamma$  n'est pas complet pour les convergences u.f. et h.f.

### 3.4 Inversion numérique

#### 3.4.1 Etude mathématique

En s'appuyant sur les résultats de continuité précédemment obtenus, on construit un processus d'approximation de l'inverse d'un  $\gamma$ -symbole.

##### Principe

Soit  $H(\partial_t)$  un opérateur  $\gamma$ -diffusif au sens strict de  $\gamma$ -symbole  $\mu \in D$ , d'inverse  $\gamma$ -diffusif de degré  $m$ . On a donc :

$$(\delta^m \# \mu^{-1}) \#_{\gamma} \mu = \delta^m. \quad (3.50)$$

Dans ce paragraphe, on note  $\mathfrak{I}$  l'application :

$$\mathfrak{I} : \mu \in D_m \mapsto \delta^m \# \mu^{-1} \in \Delta'_{\gamma}. \quad (3.51)$$

On souhaite construire une approximation numérique de  $\mathfrak{I}(\mu)$ . On cherche pour cela une suite  $(\mathfrak{I}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'opérateurs *continus* telle que :

$$\mathfrak{I}_n(\mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathfrak{I}(\mu) = \delta^m \# \mu^{-1} \text{ dans } \Delta'_{\gamma}; \quad (3.52)$$

les modes de convergence seront précisés le moment venu.

##### Construction des opérateurs $\mathfrak{I}_n$

Soit  $\mathfrak{h}'$  un espace de Hilbert tel que  $\Delta'_{\gamma} \hookrightarrow \mathfrak{h}'$  avec injection continue et dense et  $\mathcal{Q}_n$  une suite de sous-espaces de Hilbert de  $\mathfrak{h}'$  de dimension  $n$  tels que  $\mathcal{Q}_n \subset \mathcal{Q}_{n+1} \subset \Delta'_{\gamma}$ , et  $\cup_n \mathcal{Q}_n$  dense dans  $\mathfrak{h}'$ . Soit  $\mathcal{A}_{\mu,n}$  une suite d'opérateurs linéaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mu,n} : \mathcal{Q}_n &\longrightarrow \Delta'_{\gamma} \\ \nu_n &\longmapsto \mu \# \nu_n \end{aligned} \quad (3.53)$$

tels que  $\delta^m \in \text{Im}(\mathcal{A}_{\mu,n})$ ; on considère alors la suite de problèmes :

$$\min_{\nu_n \in \mathcal{Q}_n} \|\mathcal{A}_{\mu,n} \nu_n - \delta^m\|_{\mathfrak{h}'}^2, \quad (3.54)$$

dont la solution  $\nu_n^*$  est unique (du fait que  $\Delta'_{\gamma}$  est sans diviseurs de zéro), et donnée par :

$$\nu_n^* = \mathcal{A}_{\mu,n}^{\dagger} \delta^m. \quad (3.55)$$

**Définition 96** *L'opérateur  $\mathfrak{I}_n$  est défini par:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_n : D_m &\longrightarrow \mathcal{Q}_n \\ \mu &\longmapsto \mathcal{A}_{\mu,n}^{\dagger} \delta^m. \end{aligned} \quad (3.56)$$

##### Propriétés des opérateurs $\mathfrak{I}_n$

**Théorème 97** *L'opérateur  $\mathfrak{I}_n$  est séquentiellement continu sur  $D_m$  \*-faible.*

**Preuve.** Montrons que  $\mu_k \xrightarrow{*} \mu$  dans  $D_m \implies \mathfrak{I}_n(\mu_k) \longrightarrow \mathfrak{I}_n(\mu)$ . L'opérateur  $\mathfrak{I}_n$  se décompose selon :

$$\mu \xrightarrow{f_1} \mathcal{A}_{\mu,n} \xrightarrow{f_2} \mathcal{A}_{\mu,n}^{\dagger} \xrightarrow{f_3} \mathcal{A}_{\mu,n}^{\dagger} \delta^m = \mathfrak{I}_n(\mu), \quad (3.57)$$

avec :

- $f_1 : D_m$  \*-faible  $\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Q}_n, \Delta'_\gamma$  \*-faible) séquentiellement continue pour la convergence simple. En effet, si  $\mu_k \xrightarrow{*} \mu$  dans  $D_m$ , on a, grâce à la continuité séparée séquentielle du produit  $\#$  dans  $(\Delta'_\gamma$  \*-faible)  $\times$   $(\Delta'_\gamma$  fort), pour tout  $\nu \in \mathcal{Q}_n$  :

$$\mathcal{A}_{\mu_k, n} \nu := \mu_k \# \nu \xrightarrow{*} \mu \# \nu = \mathcal{A}_{\mu, n} \nu. \quad (3.58)$$

Au sens de cette convergence, on a donc  $\mathcal{A}_{\mu_k, n} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mu, n}$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{Q}_n, \Delta'_\gamma)$  simplement.

- $f_2 : \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{Q}_n, \text{Im}(\mathcal{A}_{\mu, n})) \longmapsto \mathcal{B}^\dagger \in \mathcal{L}(\text{Im}(\mathcal{A}_{\mu, n}), \mathcal{Q}_n)$  continue car  $\mathcal{Q}_n$  étant de dimension finie, l'inverse, l'adjoint et le produit sont des opérations trivialement continues.
- $f_3 : \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\Delta'_\gamma, \mathcal{Q}_n) \longmapsto \mathcal{B} \delta^m \in \mathcal{Q}_n$  est trivialement continue (application linéaire en dimension finie).

■

**Proposition 98** *Pour tout  $\mu \in D_m$ , si l'application  $\nu \in \Delta'_\gamma \longmapsto \mu \# \nu \in \mathfrak{h}'$  est bornée dans  $\mathfrak{h}'$ , c'est à dire :*

$$\exists k > 0, \forall \nu \in \Delta'_\gamma, \|\mu \# \nu\|_{\mathfrak{h}'} \leq k \|\nu\|_{\mathfrak{h}'}, \quad (3.59)$$

*et si la convergence h.f. est plus faible que la convergence dans  $\mathfrak{h}'$ , alors :*

$$\mathfrak{I}_n(\mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{h.f.}} \mathfrak{I}(\mu) = \delta^m \# \mu^{-1} \text{ dans } \Delta'_\gamma. \quad (3.60)$$

**Preuve.**  $\mathfrak{I}_n(\mu)$  est l'unique solution  $\nu_n^*$  du problème (3.54), c'est à dire que  $\mathcal{A}_{\mu, n} \nu_n^*$  est la projection orthogonale de  $\delta^m$  dans  $\text{Im}(\mathcal{A}_{\mu, n})$  qui est fermé ( $\mathcal{Q}_n$  étant de dimension finie).  $\cup_n \mathcal{Q}_n$  étant dense dans  $\mathfrak{h}'$ , on a alors :

$$\mathcal{Q}_n \ni \mathcal{A}_{\mu, n} \nu_n^* = \mu \# \nu_n^* \rightarrow \delta^m \text{ dans } \mathfrak{h}'. \quad (3.61)$$

$\mu \# (\cdot)$  étant bornée, on a alors :

$$\mu^{-1} \# \mu \# \nu_n^* = \nu_n^* = \mathfrak{I}_n(\mu) \rightarrow \mu^{-1} \# \delta^m \text{ dans } \mathfrak{h}'. \quad (3.62)$$

La convergence h.f. étant plus faible que la convergence de  $\mathfrak{h}'$ , on a le résultat. ■

Pour atteindre  $\delta^m \# \mu^{-1}$ , on a approché l'opérateur  $\mathfrak{I}$ , qui est non continu dans  $D_m$ , par une suite d'opérateurs  $\mathfrak{I}_n$  qui eux sont continus dans  $D_m$  \*-faible : en ce sens, on a donc régularisé le problème de l'inversion  $\gamma$ -symbolique.

En pratique, le  $\gamma$ -symbole  $\mu$  dont on souhaite approcher l'inverse peut n'être pas connu : on a alors seulement accès à une approximation  $\mu^*$  de  $\mu$ . Grâce au corollaire suivant, on est cependant assuré que  $\mathfrak{I}(\mu^*)$  sera proche, au sens de la convergence hyper faible, de  $\mathfrak{I}(\mu)$  :

**Corollaire 99** *Si  $\mu_k^* \in D_m \rightarrow \mu \in D_m$ , alors :*

$$\mathfrak{I}_n(\mu_k^*) \xrightarrow[n \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty]{\text{h.f.}} \mathfrak{I}(\mu) = \delta^m \# \mu^{-1} \text{ dans } \Delta'_\gamma. \quad (3.63)$$

**Preuve.** Découle des théorèmes 93, 97, de la proposition 98, et du fait que la convergence \*-faible implique la convergence h.f. ■

**Remarque 100** *Dans les 3 cas :  $\gamma \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$ ,  $\gamma$  borné, et ( $\gamma \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$  et  $\gamma$  borné), on peut montrer que les résultats précédents s'étendent avec respectivement :  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = \infty$ , et  $\omega_1 = 0$  et  $\omega_2 = \infty$ . Dans ce dernier cas, les convergences u.f. et h.f. sont équivalentes. Une méthode de régularisation améliorée peut ainsi être proposée de manière à éviter d'éventuelles oscillations divergentes de l'approximation hors du segment fréquentiel  $[\omega_1, \omega_2]$ , dit "bande utile". Il s'agit de remplacer  $H(\partial_t)$  par un opérateur  $\tilde{H}(\partial_t)$  tel que  $\tilde{H}(p) \simeq H(p)$  et  $\tilde{H}(p)$  analytique dans un domaine  $\tilde{\Omega}$  borné tel que  $\tilde{\Omega} \subset \Omega_\gamma^-$ . En choisissant alors le contour  $\tilde{\gamma}$  égal à la frontière de  $\tilde{\Omega}$ , les deux conditions,  $\tilde{\gamma}$  borné et  $\tilde{\gamma} \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$  sont satisfaites et le processus précédemment décrit appliqué à  $\tilde{\gamma}$  converge au sens ultra-faible avec  $\omega_1 = 0$  et  $\omega_2 = \infty$ . Au plan numérique ce procédé sera naturellement mis en œuvre en choisissant  $\omega_1$  et  $\omega_2$  tels que  $0 < \omega_1 \ll \xi_1 < \dots < \xi_N \ll \omega_2$  où  $\{\xi_k\}$  est le réseau de  $\tilde{\gamma}$ -représentation numérique considéré.*

### Sur le choix de la norme hilbertienne $\|\cdot\|_{\mathfrak{h}'}$

On considère dans la suite que  $\gamma \cap i\mathbb{R} = \{0\}$ . Pour que l'espace  $\mathfrak{h}'$  vérifie les hypothèses de la proposition 98, sa norme doit porter sur les symboles-Laplace eux-mêmes et non sur les  $\gamma$ -symboles. On considère la norme hilbertienne<sup>3</sup> définie par :

$$\|\mu\|^2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} |H(i\omega)|^2 d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \langle \mu, \frac{1}{i\omega - \gamma} \rangle \right|^2 d\omega, \quad (3.64)$$

où  $H(\partial_t)$  est l'opérateur associé à  $\mu$  (i.e.  $H = \mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^* \mu$  est le prolongement analytique du  $\gamma$ -symbole canonique) et où  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}_+^*$  sont les limites de la bande fréquentielle utile (déterminées en pratique en fonction du problème concret considéré).

**Remarque 101** La norme (3.64) est applicable à tout  $\mu \in \Delta'_\gamma$  puisque, par construction,  $H(i\omega)$  est alors analytique sur  $i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . La complétion de  $\Delta'_\gamma$  pour cette norme conduit en particulier à des fonctions  $H$  non analytiques, et donc à des objets  $\mu$  purement formels, sans existence pratique.

L'espace  $\mathfrak{h}'$  est alors le complété de  $\Delta'_\gamma$  pour cette norme. On a :

**Proposition 102**  $\Delta'_\gamma \hookrightarrow \mathfrak{h}'$  avec injection dense et continue.

**Preuve.** La densité est obtenue par construction. La continuité découle directement du lemme 82.

■

On montre de plus les résultats suivants :

**Lemme 103**  $\mu_n \in \Delta'_\gamma \xrightarrow{\mathfrak{h}'} \mu \in \Delta'_\gamma \implies \mu_n \xrightarrow{\text{h.f.}} \mu$ .

**Preuve.** 1.  $\mu_n \rightarrow \mu \implies \mu_n \xrightarrow{\mathfrak{h}'} \mu \implies \forall K \in L^2(\omega_1, \omega_2), \int_{\omega_1}^{\omega_2} H_n(i\omega)K(\omega)d\omega \rightarrow 0$ .  
2.  $\forall \psi \in \Delta_{\gamma,0}, \psi = \Psi|_\gamma$  avec  $\Psi$  analytique dans  $\mathbb{C}$  et donc  $\Psi|_{i[\omega_1, \omega_2]} \in L^2(\omega_1, \omega_2)$ . ■

**Lemme 104** Pour tout  $\mu \in D_m$ , l'application  $\nu \in \Delta'_\gamma \mapsto \mu \# \nu \in \mathfrak{h}'$  est bornée dans  $\mathfrak{h}'$ , c'est à dire :

$$\exists k > 0, \forall \nu \in \Delta'_\gamma, \|\mu \# \nu\|_{\mathfrak{h}'} \leq k \|\nu\|_{\mathfrak{h}'}. \quad (3.65)$$

**Preuve.** Soient  $\mu \in D_m$  (respectivement  $\nu \in \Delta'_\gamma$ )  $\gamma$ -symbole de  $H(\partial_t)$  (respectivement  $K(\partial_t)$ ). On a :

$$\|\mu \# \nu\|_{\mathfrak{h}'}^2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} |H(i\omega)K(i\omega)|^2 d\omega. \quad (3.66)$$

Étant analytique sur tout  $i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , la fonction  $H$  est bornée sur  $[\omega_1, \omega_2]$ ; on a donc :

$$\|\mu \# \nu\|_{\mathfrak{h}'}^2 \leq \sup_{\omega \in [\omega_1, \omega_2]} |H(i\omega)|^2 \|\nu\|_{\mathfrak{h}'}^2. \quad (3.67)$$

■

L'espace  $\mathfrak{h}'$  vérifie donc les hypothèses de la proposition 98, garantissant la convergence de l'approximation précédemment étudiée.

On s'intéresse à présent à l'expression analytique de  $\|\mu\|_{\mathfrak{h}'}$ . Après calculs, et grâce à (1.114), on a :

$$\|\mu\|_{\mathfrak{h}'}^2 = \langle \overline{\mu(\xi)}, \langle \mu(\eta), k(\xi, \eta) \rangle_\eta \rangle_\xi, \quad (3.68)$$

avec

$$k(\xi, \eta) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\xi))(i\omega - \gamma(\eta))} d\omega. \quad (3.69)$$

<sup>3</sup>Cette fonctionnelle est bien une norme : du fait que  $H$  est analytique,  $H|_{i[\omega_1, \omega_2]} = 0 \implies H = 0$ .

Cette norme dérive du produit scalaire  $(\cdot|\cdot)$  défini, sur tous  $\gamma$ -symboles  $\mu, \nu$  associés aux opérateurs  $H(\partial_t)$  et  $K(\partial_t)$  par :

$$(\mu|\nu) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \overline{H(i\omega)} K(i\omega) d\omega = \langle \overline{\mu(\xi)}, \langle \nu(\eta), k(\xi, \eta) \rangle_{\eta} \rangle_{\xi}. \quad (3.70)$$

Le noyau  $k(\xi, \nu)$  peut être approché numériquement par quadrature de l'intégrale. Cependant, il est également possible de déterminer son expression analytique :

**Proposition 105** *Le noyau  $k$  s'exprime :*

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad k(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{-(f(\eta) + \overline{f(\xi)})}{\gamma(\eta) + \overline{\gamma(\xi)}} & \text{si } \gamma(\eta) \neq -\overline{\gamma(\xi)} \\ -\frac{1}{\omega_2 + i\gamma(\eta)} + \frac{1}{\omega_1 + i\gamma(\eta)} & \text{si } \gamma(\eta) = -\overline{\gamma(\xi)} \end{cases} \quad (3.71)$$

avec

$$\begin{aligned} f(\eta) &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\eta))} d\omega \\ &= -\arctan\left(\frac{\omega_2 - \gamma_I(\eta)}{\gamma_R(\eta)}\right) + \arctan\left(\frac{\omega_1 - \gamma_I(\eta)}{\gamma_R(\eta)}\right) \\ &\quad - \frac{i}{2} \left[ \ln(\omega_2^2 - 2\omega_2\gamma_I(\eta) + |\gamma(\eta)|^2) - \ln(\omega_1^2 - 2\omega_1\gamma_I(\eta) + |\gamma(\eta)|^2) \right], \end{aligned} \quad (3.72)$$

où  $\gamma_R = \text{Re}(\gamma)$  et  $\gamma_I = \text{Im}(\gamma)$ .

**Preuve.** Lorsque  $\gamma(\eta) \neq -\overline{\gamma(\xi)}$ , et après décomposition en éléments simples :

$$k(\xi, \eta) = \frac{-1}{\gamma(\eta) + \overline{\gamma(\xi)}} \left( \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\eta))} d\omega + \overline{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\xi))} d\omega} \right); \quad (3.73)$$

or,

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\eta))} d\omega &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{-\gamma_R(\eta)}{(\gamma_R(\eta))^2 + (\omega - \gamma_I(\eta))^2} d\omega + i \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{-\omega + \gamma_I(\eta)}{(\gamma_R(\eta))^2 + (\omega - \gamma_I(\eta))^2} d\omega \\ &= -\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\frac{1}{\gamma_R(\eta)}}{1 + \left(\frac{\omega - \gamma_I(\eta)}{\gamma_R(\eta)}\right)^2} d\omega - \frac{i}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{2\omega - 2\gamma_I(\eta)}{\omega^2 - 2\omega\gamma_I(\eta) + |\gamma(\eta)|^2} d\omega \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$= -\left[ \arctan\left(\frac{\omega - \gamma_I(\eta)}{\gamma_R(\eta)}\right) \right]_{\omega_1}^{\omega_2} - \frac{i}{2} \left[ \ln(\omega^2 - 2\omega\gamma_I(\eta) + |\gamma(\eta)|^2) \right]_{\omega_1}^{\omega_2}. \quad (3.75)$$

Lorsque  $\gamma(\eta) = -\overline{\gamma(\xi)}$ , on a :

$$k(\xi, \eta) = -\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(i\omega - \gamma(\eta))^2} d\omega = -\left[ \frac{1}{\omega + i\gamma(\eta)} \right]_{\omega_1}^{\omega_2}. \quad (3.76)$$

■

**Remarque 106** *De façon similaire, on peut également considérer la norme :*

$$\|\mu\|^2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{|H(i\omega)|^2}{\omega} d\omega \quad (3.77)$$

qui a la propriété d'accorder le même poids à chaque décade de fréquence, du fait que :

$$\forall a \geq 0, \quad \int_{10^a}^{10^{a+1}} \frac{1}{\omega} d\omega = \ln(10). \quad (3.78)$$

**Remarque 107** On pourrait considérer la dualité  $\langle \Delta'_{\gamma,0}, \Delta_{\gamma,0} \rangle$  au lieu de  $\langle \Delta'_\gamma, \Delta_\gamma \rangle$  pour l'analyse des opérateurs de convolution. L'espace  $\Delta'_{\gamma,0}$  est cependant au moins aussi gros que  $\mathfrak{h}'$  dont les éléments ne sont pas tous approximables numériquement. En effet, il y a dans  $\mathfrak{h}'$  des traces de fonctions de transfert ayant des singularités hors de  $\Omega_\gamma^-$ ; or ces éléments ne peuvent pas être réalisés au moyen d'une  $\gamma$ -réalisation d'état, l'intégrale sur  $\tilde{\gamma}$  ne prenant en compte que les singularités de  $\Omega_\gamma^-$ . Les réalisations d'état  $\langle \mu, \psi \rangle_{\Delta'_{\gamma,0}, \Delta_{\gamma,0}}$  ne sont en fait pas praticables au delà de  $\Delta'_\gamma$  qui est lui même un cas limite (dual de la limite inductive des  $\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}_n, \gamma}(\Delta_{\tilde{\gamma}_n})$ ) et qui semble être au final l'espace le mieux adapté puisqu'il cumule les propriétés topologiques tout en permettant l'accessibilité numérique de  $\langle \mu, \psi \rangle$ .

### 3.4.2 Mise en œuvre

On décrit ici la méthodologie à mettre en œuvre pour réaliser concrètement une inversion numérique.

Soit  $\mathcal{Q}_n$  l'espace des mesures atomiques sur un maillage  $\{\xi_k\}_{k=0:n}$  et soit  $\mu_n \in \mathcal{Q}_n$  inversible, d'inverse  $\mu_n^{-1}$  de degré  $m$ , approximation d'un  $\gamma$ -symbole  $\mu$  inversible, d'inverse  $\mu^{-1}$  de degré  $m$ . On a donc :

$$\mu_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \delta_{\xi_k} \simeq \mu, \text{ avec } \alpha = (\alpha_k)_{k=0:n} \in \mathbb{C}^{n+1}. \quad (3.79)$$

On souhaite inverser numériquement ce  $\gamma$ -symbole, opération qui revient concrètement à trouver un vecteur de coefficients  $\beta = (\beta_k)_{k=0:n} \in \mathbb{C}^{n+1}$  tel que :

$$\nu_n := \sum_{k=0}^n \beta_k \delta_{\xi_k} \simeq \delta^m \# \mu^{-1}. \quad (3.80)$$

Pour cela on peut considérer par exemple les problèmes :

$$\min_{\nu_n \in \mathcal{Q}_n} \left\| \nu_n - (\mu_n)^{-1} \# \delta^m \right\|_{\mathfrak{h}'}^2 = \min_{\beta \in \mathbb{C}^{n+1}} \left\| \sum_{k=0}^n \beta_k \delta_{\xi_k} - (\mu_n)^{-1} \# \delta^m \right\|_{\mathfrak{h}'}^2, \quad (3.81)$$

et

$$\min_{\nu_n \in \mathcal{Q}_n} \left\| \mu_n \# \nu_n - \delta^m \right\|_{\mathfrak{h}'}^2 = \min_{\beta \in \mathbb{C}^{n+1}} \left\| \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k \delta_{\xi_k} \right) \# \left( \sum_{j=0}^n \beta_j \delta_{\xi_j} \right) - \delta^m \right\|_{\mathfrak{h}'}^2, \quad (3.82)$$

tous deux ayant leurs avantages et inconvénients respectifs.

Différentes méthodes de résolution de (3.81) et (3.82) ont été envisagées.

#### Résolution de (3.81)

Pour la résolution de (3.81) on considère deux méthodes, l'une étant exacte (aux erreurs d'arrondi près), l'autre étant approchée.

**Méthode 1** D'après (3.64), le problème (3.81) s'écrit encore :

$$\begin{aligned} & \min_{\nu_n \in \mathcal{Q}_n} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \left\langle \nu_n, \frac{1}{i\omega - \gamma(\cdot)} \right\rangle - \frac{1}{(i\omega)^m \left\langle \mu_n^*, \frac{1}{i\omega - \gamma(\cdot)} \right\rangle} \right|^2 d\omega \\ \iff & \min_{\beta \in \mathbb{C}^{n+1}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \sum_{k=0}^n \left( \frac{\beta_k}{i\omega - \gamma(\xi_k)} \right) - \frac{1}{(i\omega)^m \sum_{k=0}^n \left( \frac{\alpha_k}{i\omega - \gamma(\xi_k)} \right)} \right|^2 d\omega \\ \iff & \min_{\beta \in \mathbb{C}^{n+1}} \left\| \mathbf{A}\beta - \mathbf{b} \right\|_{\mathbf{E}}^2, \end{aligned} \quad (3.83)$$



avec :

►  $E := \mathcal{L}\mathcal{L}_\gamma^*(\Delta'_\gamma)$  espace des fonctions de transfert d'opérateurs  $\gamma$ -diffusifs au sens strict, muni de la norme :

$$\|H\|_E^2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} |H(i\omega)|^2 d\omega, \quad (3.84)$$

►  $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_0 \ \cdots \ \mathbf{A}_n] \in E^{n+1}$  définie par :

$$\mathbf{A}_k: \omega \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{i\omega - \gamma(\xi_k)} \in \mathbb{C}, \quad (3.85)$$

► et  $\mathbf{b} \in E$  définie par :

$$\mathbf{b}: \omega \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{(i\omega)^m \sum_{k=0}^n \left( \frac{\alpha_k}{i\omega - \gamma(\xi_k)} \right)} \in \mathbb{C}. \quad (3.86)$$

La solution de (3.83) est donnée par :

$$\begin{aligned} \beta^* &= K^{-1}h \quad \text{avec} \quad h = \left( \int_{\omega_1}^{\omega_2} \overline{\mathbf{A}_i(\omega)} b(\omega) d\omega \right)_{i=0:n}, \\ \text{et} \quad K &= \left( \int_{\omega_1}^{\omega_2} \overline{\mathbf{A}_i(\omega)} \mathbf{A}_j(\omega) d\omega \right)_{i,j=0:n} = (k(\xi_i, \xi_j))_{i,j=0:n}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

la fonction  $k$  étant définie par (3.69) et (3.71).

**Remarque 108** Dans le cas particulier où  $\gamma(\xi) = -|\xi|$ , les coefficients  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont réels (voir paragraphe 2.1.2). En prenant en compte cette contrainte, la solution de (3.83) s'écrit :

$$\beta^* = [\text{Re}(K)]^{-1} \text{Re}(h). \quad (3.88)$$

Numériquement, le calcul de cette solution nécessite de connaître l'expression de  $h$  (celle de  $K$  étant connue). Cela n'étant pas le cas, une approximation de  $h$  par quadrature de l'intégrale en  $\omega$  doit être envisagée, ce qui diminue l'intérêt de cette approche qui résidait en le fait que la solution obtenue était exacte. Les résultats obtenus avec cette méthode restent malgré tout très bons.

**Méthode 2** Le problème (3.81) est résolu après quadrature de l'intégrale en  $\omega$ . On considère ainsi le problème :

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{n+1}} \sum_{j=1}^J \left| \sum_{k=0}^n \left( \frac{\beta_k}{i\omega_j - \gamma(\xi_k)} \right) - \frac{1}{(i\omega_j)^m \sum_{k=0}^n \left( \frac{\alpha_k}{i\omega_j - \gamma(\xi_k)} \right)} \right|^2 \Delta\omega_j, \quad (3.89)$$

qui a pour solution :

$$\beta^* = (A^*DA)^{-1}A^*Db \quad (3.90)$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{1}{i\omega_j - \gamma(\xi_k)} \right)_{k=0:n, j=1:J}, \quad b = \left( \frac{1}{(i\omega_j)^m \sum_{k=0}^n \left( \frac{\alpha_k}{i\omega_j - \gamma(\xi_k)} \right)} \right)_{j=1:J} \\ \text{et} \quad D &= \begin{bmatrix} \Delta\omega_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \Delta\omega_J \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

**Remarque 109** Si l'on recherche une solution réelle (en particulier lorsque  $\gamma(\xi) = -|\xi|$ ), la solution de (3.89) s'écrit :

$$\beta^* = (\text{Re}(A^*DA))^{-1} \text{Re}(A^*Db). \quad (3.92)$$

### Résolution de (3.82)

Notons tout d'abord que résoudre (3.82) revient à résoudre (3.81) avec une norme différente, à savoir la norme avec poids (dépendant de  $\alpha$ ) définie par :

$$\|\mu\|_{\mathfrak{H}'}^2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \sum_{k=0}^n \left( \frac{\alpha_k}{i\omega - \gamma(\xi_k)} \right) \right|^2 |H(i\omega)|^2 d\omega. \quad (3.93)$$

Par conséquent, il est possible de résoudre (3.82) avec les méthodes 1 et 2 présentées précédemment. Appliquer la méthode 1 au problème (3.82) nécessiterait cependant le calcul d'intégrales, dont l'expression analytique n'est pas accessible. De plus une méthode de résolution exacte de (3.82) est proposée dans la suite. C'est pourquoi on ne s'intéressera pas à cette méthode.

On peut par contre résoudre (3.82) en utilisant la méthode 2. Le problème (3.82) est alors approché par le problème :

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{n+1}} \sum_{j=1}^J \left| \sum_{l=0}^n \left( \frac{\alpha_l}{i\omega_j - \gamma(\xi_l)} \right) \sum_{k=0}^n \left( \frac{\beta_k}{i\omega_j - \gamma(\xi_k)} \right) - \frac{1}{(i\omega_j)^m} \right|^2 \Delta\omega_j, \quad (3.94)$$

qui a pour solution :

$$\beta^* = (A^*DA)^{-1}A^*b, \quad (3.95)$$

avec :

$$A = \left( \sum_{l=0}^n \left( \frac{\alpha_l}{i\omega_j - \gamma(\xi_l)} \right) \frac{1}{i\omega_j - \gamma(\xi_k)} \right)_{j=1:J, k=0:n}, \quad b = \left( \frac{1}{(i\omega_j)^m} \right)_{j=1:J}$$

$$\text{et } D = \begin{bmatrix} \Delta\omega_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \Delta\omega_J \end{bmatrix}. \quad (3.96)$$

**Méthode 3** La deuxième méthode de résolution consiste à approcher (3.82) par un problème de résolution plus simple consistant à approcher les termes  $\delta_{\xi_k} \# \delta_{\xi_j}$  et  $\delta^m$  par des mesures atomiques sur le réseau  $\xi_k$  :

$$\forall i, j = 0 : n, \quad \delta_{\xi_i} \# \delta_{\xi_j} \simeq \sum_{k=0}^n a_k^{ij} \delta_{\xi_k} \quad \text{et} \quad \delta^m \simeq \sum_{k=0}^n b_k \delta_{\xi_k}. \quad (3.97)$$

Ainsi, le problème (3.82) est lui-même approché par le problème :

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{n+1}} \left\| \sum_{k,j=0}^n \alpha_k \beta_j \sum_{l=0}^n a_l^{kj} \delta_{\xi_l} - \sum_{l=0}^n b_l \delta_{\xi_l} \right\|_{\mathfrak{H}'}^2, \quad (3.98)$$

qui s'écrit encore

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{n+1}} \left\| \sum_{l=0}^n (A\beta - b)_l \delta_{\xi_l} \right\|_{\mathfrak{H}'}^2 \quad \text{avec } A = \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k a_k^{kj} \right)_{i,j=0:K}. \quad (3.99)$$

Son unique solution est donnée par :

$$\beta^* = A^{-1}b. \quad (3.100)$$

Cette méthode de mise en œuvre simple ne nécessite que peu de calculs préliminaires mais a l'inconvénient de ne procurer qu'une solution approchée au problème de l'inversion  $\gamma$ -symbolique.

**Remarque 110** Dans le cas  $\gamma(\xi) = -|\xi|$ , les coefficients  $a_k^{ij}$  et  $b_k$  sont réels. La solution obtenue via (3.100) sera donc elle aussi réelle.

**Méthode 4 :** En notant  $\mathbf{A}$  l'opérateur linéaire défini par :

$$\mathbf{A} : \beta \in \mathbb{C}^{n+1} \mapsto \sum_{k,j=0}^n \alpha_k \beta_j \delta_{\xi_k} \# \delta_{\xi_j}, \quad (3.101)$$

le problème (3.82) s'écrit :

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{n+1}} \|\mathbf{A}\beta - \delta^m\|_{\mathfrak{H}'}^2. \quad (3.102)$$

Soit alors un espace  $E \sim \mathbb{C}^N$  avec  $N > n + 1$  tel que :

$$\forall \beta \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad \|\mathbf{A}\beta - \delta^m\|_{\mathfrak{H}'}^2 = \|\mathbf{A}\beta - \delta^m\|_E^2 = \|A\beta - b\|_{\mathbb{C}^N}^2, \quad (3.103)$$

où  $A$  (resp.  $b$ ) est une matrice (resp. un vecteur) à déterminer. On choisit pour  $E$  l'espace engendré par  $\cup_{q=1:M}(\{\delta_{\xi_k}^q\}_{k=0:n})$ ; cet espace est de dimension  $N = n(K+1)$ . En notant  $s$  l'indice pour lequel  $\xi_s = 0$ , et puisque [48] :

$$\delta_a \# \delta_b = \begin{cases} \frac{\delta_a - \delta_b}{\gamma(a) - \gamma(b)} & \text{si } a \neq b \\ \delta_a^2 \underset{\gamma'(a)}{\sim} \frac{\delta'_a}{\gamma'(a)} & \text{si } a = b, \end{cases} \quad (3.104)$$

on peut exprimer  $(\sum_{k=0}^n \alpha_k \delta_{\xi_k}) \# (\sum_{j=0}^n \beta_j \delta_{\xi_j})$  et  $\delta^m$  dans la base de  $E$  :

$$\left( \sum_{k=0}^n \alpha_k \delta_{\xi_k} \right) \# \left( \sum_{j=0}^n \beta_j \delta_{\xi_j} \right) = \sum_{q=1}^M \sum_{k=0}^n \tilde{\beta}_{qk} \delta_{\xi_k}^q \quad \text{et} \quad \delta^m = \sum_{q=1}^M \sum_{k=0}^n b_{qk} \delta_{\xi_k}^q, \quad (3.105)$$

avec

$$\tilde{\beta}_{qk} = \begin{cases} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{\alpha_k \beta_j + \beta_k \alpha_j}{\gamma(\xi_k) - \gamma(\xi_j)} & \text{si } q = 1 \\ \alpha_k \beta_k & \text{si } q = 2 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{qk} = \begin{cases} 1 & \text{si } q = m \text{ et } k = s \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.106)$$

**Remarque 111** Les opérateurs associées aux  $\gamma$ -symboles  $\delta^m$  ne sont pas atomiques et ne sont donc pas réalisables au moyen de l'équation d'état numérique naturellement associée à l'espace  $\mathcal{Q}_n$  (c'est-à-dire :  $\partial_t \psi_k(t) = \gamma(\xi_k) \psi_k(t) + u(t)$ ,  $k = 0 : n$ ). Toutefois, cette impossibilité est sans conséquence car elle n'invalide en rien les développements précédents qui ne sont aucunement basés sur la réalisation d'état, mais seulement sur la structure algébrique des  $\gamma$ -symboles.

Dans la suite, on notera  $\tilde{\beta}$  (resp.  $b$ ) le vecteur  $(\tilde{\beta}_{10}, \tilde{\beta}_{11}, \dots, \tilde{\beta}_{1n}, \tilde{\beta}_{20}, \dots, \tilde{\beta}_{2n}, \dots, \tilde{\beta}_{M0}, \dots, \tilde{\beta}_{Mn})^T \in \mathbb{C}^N$  (resp. le vecteur  $(b_{10}, b_{11}, \dots, b_{1n}, b_{20}, \dots, b_{2n}, \dots, b_{M0}, \dots, b_{Mn})^T \in \mathbb{C}^N$ ). On a :

$$\tilde{\beta} = A\beta, \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_M \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times (K+1)} \quad (3.107)$$

où les matrices carrées  $A_i \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (n+1)}$  sont définies par<sup>4</sup> :

<sup>4</sup>En pratique, il faut que  $M \geq \max(2, m)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = (A_{1_k}^l)_{k,l=0:n} \text{ avec } A_{1_k}^l = \begin{cases} \frac{\alpha_k}{\gamma(\xi_k) - \gamma(\xi_l)} & \text{si } k \neq l \\ \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{\alpha_j}{\gamma(\xi_k) - \gamma(\xi_j)} & \text{si } k = l \end{cases} \\ A_2 = \text{diag}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \\ A_i = O^{(n+1) \times (n+1)} \text{ pour } i = 3 : M. \end{array} \right. \quad (3.108)$$

On a alors :

$$\| \mathbf{A}\beta - \delta^m \|_{\mathfrak{H}}^2 = \left\| \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k \delta_{\xi_k} \right) \# \left( \sum_{j=0}^n \beta_j \delta_{\xi_j} \right) - \delta^m \right\|_{\mathfrak{H}'}^2 \quad (3.109)$$

$$= \left\| \sum_{q=1}^M \sum_{k=0}^n ((A\beta)_{qk} - b_{qk}) \delta_{\xi_k}^q \right\|_{\mathbb{E}}^2 \quad (3.110)$$

$$= \sum_{q,r=1}^M \sum_{k,l=0}^n \overline{(A\beta - b)_{rl}} (A\beta - b)_{qk} \langle \delta_{\xi_l}^r(\xi), \langle \delta_{\xi_k}^q(\eta), k(\xi, \eta) \rangle_{\eta} \rangle_{\xi} \quad (3.111)$$

$$= \|A\beta - b\|_{\mathbb{C}^N}^2, \quad (3.112)$$

où, pour  $c = (c_{10}, c_{11}, \dots, c_{1n}, c_{20}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{M0}, \dots, c_{Mn})^T \in \mathbb{C}^N$  :

$$\|c\|_{\mathbb{C}^N}^2 = \sum_{q,r=1}^M \sum_{k,l=0}^n \overline{c_{rl}} c_{qk} K^{qkrl} \quad (3.113)$$

avec

$$K^{qkrl} = \langle \delta_{\xi_l}^r(\xi), \langle \delta_{\xi_k}^q(\eta), k(\xi, \eta) \rangle_{\eta} \rangle_{\xi}. \quad (3.114)$$

Le problème (3.82) s'écrit donc :

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{n+1}} \|A\beta - b\|_{\mathbb{C}^N}^2, \quad (3.115)$$

et sa solution est donnée par :

$$\beta^* = (A^* K^T A)^{-1} A^* K^T b, \quad (3.116)$$

avec

$$K = (K_i^j)_{i,j=1:M(n+1)}, \quad (3.117)$$

$$K_i^j = K^{qkrl} \text{ pour } \begin{cases} i = (q-1)(K+1) + k + 1 \\ j = (r-1)(K+1) + l + 1, \end{cases} \quad q, r = 1 : M \text{ et } k, l = 0 : n. \quad (3.118)$$

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \xrightarrow[r=1]{l} \qquad \qquad \qquad \xrightarrow[r]{\qquad \qquad \qquad} \qquad \qquad \qquad \xrightarrow[l]{r=M} \\ \hline \begin{bmatrix} K^{1111} & \dots & K^{111n} & K^{1121} & \dots & \dots & K^{11M1} & \dots & K^{11Mn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ K^{1n11} & \dots & K^{1n1n} & K^{1n21} & \dots & \dots & K^{1nM1} & \dots & K^{1nMn} \\ \hline K^{2111} & \dots & K^{211n} & K^{2121} & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \hline K^{M111} & \dots & K^{M11n} & \dots & \dots & \dots & K^{M1M1} & \dots & K^{M1Mn} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ K^{Mn11} & \dots & K^{Mn1n} & \dots & \dots & \dots & K^{MnM1} & \dots & K^{MnMn} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{array}{c} \downarrow k \\ \downarrow q \\ \downarrow k \\ \downarrow q = M \end{array} \end{array} \end{array} \quad (3.119)$$

Du fait de la structure particulière de  $A$  et de  $b$ , la solution  $\beta^*$  de (3.115) s'écrit également sous la forme simplifiée :

$$\beta^* = (\tilde{A}^* \tilde{K}^T \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^* \tilde{\tilde{K}}, \quad (3.120)$$

où

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2(n+1) \times (n+1)}, \quad (3.121)$$

$$\tilde{\tilde{K}} = (K_i^j)_{i,j=1..2(n+1)} \in \mathbb{C}^{2(n+1) \times 2(n+1)}, \quad (3.122)$$

$$\text{et } \tilde{\tilde{K}} = (K^{ms10}, \dots, K^{ms1K}, K^{ms20}, \dots, K^{ms2K})^T \in \mathbb{C}^{2(n+1)}. \quad (3.123)$$

Seuls les termes  $K^{qkr l}$  pour  $(q, r, k, l) \in (\{1, 2\}^2 \times \{0..n\}^2) \cup (\{m\} \times \{1, 2\} \times \{s\} \times \{0..n\})$  nécessitent donc d'être explicités. Leurs expressions sont données en annexe B.

**Remarque 112** Dans le cas où  $\gamma(\xi) = -|\xi|$ , la solution est donnée par :

$$\beta^* = \left[ \tilde{A}^* \operatorname{Re} \left( \tilde{\tilde{K}} \right)^T \tilde{A} \right]^{-1} \tilde{A}^* \operatorname{Re} \left( \tilde{\tilde{K}} \right) \quad (3.124)$$

**Remarque 113** Quoique assez technique dans l'expression des coefficients, la formulation (3.115) se prête bien à la programmation numérique. Sa portée est en outre universelle.

### 3.4.3 Cas où $\mu$ est non inversible dans $\Sigma_\gamma$

On étudie ici un processus numérique permettant de déterminer la partie  $\gamma$ -réalisable de l'inverse non  $\gamma$ -réalisable d'un opérateur. On considère un opérateur  $\mathcal{H}$   $\gamma$ -diffusif au sens strict, de symbole-Laplace  $H(p)$  et de  $\gamma$ -symbole  $\mu$  non inversible dans  $\Sigma_\gamma$ , tel qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\frac{1}{H(p) p^m} = H_r(p) + H_0(p), \quad (3.125)$$

avec  $H_r(\partial_t)$   $\gamma$ -diffusif au sens strict et  $H_0(p)$  analytique dans  $\Omega_\gamma^-$  et singulier dans  $\Omega_\gamma^+$ , avec  $H_0(p) \rightarrow 0$  quand  $|p| \rightarrow \infty$ . Soit  $\mu_n^*$  un  $\gamma$ -symbole "numérique" de  $H(\partial_t)$  voisin de  $\mu$  :

$$\mu_n^* = \sum_{k=0}^n \alpha_k \delta_{\xi_k} \simeq \mu, \text{ avec } \alpha = (\alpha_k)_{k=0:n} \in \mathbb{C}^{n+1}; \quad (3.126)$$

on a alors :

$$H(i\omega) \simeq \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{i\omega - \gamma(\xi_k)}. \quad (3.127)$$

Le problème de l'inversion numérique de  $\mu_n^*$  que l'on se pose ici consiste à trouver un  $\gamma$ -symbole numérique approchant la partie  $\gamma$ -réalisable de l'inverse de  $\mathcal{H}$ , c'est à dire un vecteur de coefficients  $\beta = (\beta_k)_{k=0:n} \in \mathbb{C}^{n+1}$  tel que :

$$\nu_n^* := \sum_{k=0}^n \beta_k \delta_{\xi_k} \simeq \mu_r, \quad (3.128)$$

Les méthodes précédentes, utilisables dans le cas d'un  $\gamma$ -symbole inversible ne peuvent s'appliquer directement dans le cas présent. En effet, rien n'impose a priori que le  $\gamma$ -symbole  $\mu_r$  de  $\mathcal{H}_r$  soit proche de  $\mu$ , au sens de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_r}$ . Il est donc nécessaire de mettre en place une méthode spécifique à ce cas particulier.

La méthode proposée consiste à résoudre le problème :

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{n+1}} \left\| \sum_{k=0}^n \frac{\beta_k}{i\omega - \gamma(\xi_k)} - H_r(i\omega) \right\|_{\mathfrak{H}'}^2, \quad (3.129)$$

la fonction de transfert  $H_r(i\omega)$  inconnue devant être estimée à partir de  $\alpha$  uniquement.

L'opérateur  $\mathcal{H}_r$  étant  $\gamma$ -diffusif au sens strict, il existe un contour régulier  $\tilde{\gamma} \succ \gamma$  tel que, en notant  $\tilde{\mu}$  le  $\tilde{\gamma}$ -symbole donné par :

$$\tilde{\mu} = \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} \frac{1}{(H \circ \tilde{\gamma}) \tilde{\gamma}^m} \in L_{\text{loc}}^1, \quad (3.130)$$

on ait :

$$H_r(i\omega) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{\mu}(\xi)}{i\omega - \tilde{\gamma}(\xi)} d\xi = \mathcal{L}\mathcal{L}_{\tilde{\gamma}}^*(\tilde{\mu}). \quad (3.131)$$

**Remarque 114** Dans le cas où  $\Omega_{\tilde{\gamma}}^- \cap \mathbb{C}^+$  est un domaine, rappelons que la formule (3.131) n'est valable que pour  $i\omega \in i\mathbb{R} \cap \Omega_{\tilde{\gamma}}^+$ . La formule de Cauchy

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{H(z)}{z-p} dz = H(p) \quad (3.132)$$

est en effet valable pour  $p \in D$ , où  $D$  est le domaine bordé par  $\gamma$  tel que  $H$  holomorphe dans  $\bar{D}$ .

Comme  $\tilde{\mu}$  est alors une fonction, il est possible de l'évaluer numériquement en différents points  $\xi_k$  en appliquant directement la formule (3.130), dans laquelle on utilise la formule approchée (3.127) de  $H$ . Ainsi, une approximation de  $H_r(i\omega)$  est donnée par :

$$H_r(i\omega) \simeq \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{i\omega - \tilde{\gamma}(\xi_k)} = \mathcal{L}\mathcal{L}_{\tilde{\gamma}}^*\left(\sum_{k=0}^n \lambda_k \delta_{\xi_k}\right),$$

avec  $\lambda_k = \tilde{\mu}(\xi_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Lambda_k(\xi) d\xi$  où  $\tilde{\mu}(\xi_k) = \frac{\tilde{\gamma}'(\xi_k)}{2i\pi} \frac{1}{\left(\sum_{l=0}^n \frac{\alpha_l}{\tilde{\gamma}(\xi_k) - \tilde{\gamma}(\xi_l)}\right) (\tilde{\gamma}(\xi_k))^m}$ . (3.133)

**Remarque 115** La  $\tilde{\gamma}$ -réalisation de  $\mathcal{H}_r$  est donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\psi}(\cdot, \xi) = \tilde{\gamma}(\xi) \tilde{\psi}(\cdot, \xi) + u, \\ (\mathcal{H}_r u)(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\mu}(\xi) \tilde{\psi}(t, \xi) d\xi. \end{cases} \quad (3.134)$$

On notera que l'équation d'état n'est stable que lorsque  $\text{Re}(\tilde{\gamma}(\xi)) < 0$ . Dans le cas où  $\Omega_{\tilde{\gamma}}^- \cap \mathbb{C}^- \neq \emptyset$ , cette représentation ne pourrait pas être utilisée numériquement, à moins d'adaptations spécifiques ou de simulation sur un temps borné.

Pour obtenir une approximation  $\nu_n^* := \sum_{k=0}^n \beta_k \delta_{\xi_k}$  du  $\gamma$ -symbole  $\mu_r$ , on considère ensuite le problème :

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{n+1}} \left[ \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \sum_{k=0}^n \frac{\beta_k}{i\omega - \gamma(\xi_k)} - \sum_{l=0}^n \frac{\lambda_l}{i\omega - \tilde{\gamma}(\xi_l)} \right| d\omega \right], \quad (3.135)$$

qui, après quadrature en  $\omega$  et lorsque la discrétisation en  $\omega$  est régulière (i.e.  $\Delta\omega = cte$ ), se résout numériquement par pseudo-inversion :

$$\beta^* = A^\dagger b, \quad (3.136)$$

où

$$A = \left( \frac{1}{i\omega_j - \gamma(\xi_k)} \right)_{j=1:J, k=0:n} \quad \text{et} \quad b = \left( \sum_{l=0}^n \frac{\lambda_l}{i\omega_j - \tilde{\gamma}(\xi_l)} \right)_{j=1:J}. \quad (3.137)$$

### 3.4.4 Exemples

Dans les exemples suivants est réalisée l'inversion  $\gamma$ -symbolique de quelques opérateurs. Après l'analyse du cas particulier de l'opérateur d'intégration, on considère l'inversion  $\gamma$ -symbolique des opérateurs  $(\partial_t + 1)^{-1}$ ,  $(\sqrt{\partial_t + 1})^{-1}$ , puis un plus complexe rencontré en aéroacoustique, à savoir l'opérateur d'impédance d'une paroi absorbante [12]. On considère enfin le cas d'un opérateur non inversible dans  $\Sigma_\gamma$ .

Pour les simulations numériques on considère le contour  $\gamma$  défini par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \gamma(\xi) = -|\xi|, \quad (3.138)$$

ainsi que la discrétisation  $\{\xi_k\}_{k=0:n}$  du paramètre  $\xi$  ( $n$  variant selon les cas) définie de la manière suivante :

$$\xi_0 = 0, \quad (3.139)$$

$$\xi_1 = 10^{-1}, \quad (3.140)$$

$$\xi_k = \xi_1 q^k, \quad k = 2 : n, \text{ avec } q > 1 \text{ tel que } \xi_n = 10^3. \quad (3.141)$$

**Remarque 116** Cette discrétisation permet de couvrir la plage fréquentielle  $[0, 10^3]$ .

On note  $s \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , l'indice tel que  $\xi_s = 0$ . Dans le cas de la discrétisation ci-dessus, on a  $s = 0$ . On prend également  $\omega_1 = 10^{-1}$  et  $\omega_2 = 10^3$  comme bornes de l'intégrale de la norme (3.64).

Pour quantifier l'erreur d'inversion numérique, on introduit les quantités :

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sum_l \left| \sum_{k=0}^n \frac{\beta_k^*}{i\omega_l - \gamma(\xi_k)} - H^{-1}(i\omega_l) \right| \frac{\Delta\omega_l}{\omega_l}}{\sum_l |H^{-1}(i\omega_l)| \frac{\Delta\omega_l}{\omega_l}} \simeq \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\omega} \left| \sum_{k=0}^n \frac{\beta_k^*}{i\omega - \gamma(\xi_k)} - H^{-1}(i\omega) \right| d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\omega} |H^{-1}(i\omega)| d\omega}, \\ \text{et } E_{\text{sup}} &= \sup_{\omega_l} \left| \frac{\sum_{k=0}^n \frac{\beta_k^*}{i\omega_l - \gamma(\xi_k)} - H^{-1}(i\omega_l)}{H^{-1}(i\omega_l)} \right| \simeq \sup_{\omega} \left| \frac{\sum_{k=0}^n \frac{\beta_k^*}{i\omega - \gamma(\xi_k)} - H^{-1}(i\omega)}{H^{-1}(i\omega)} \right|. \end{aligned}$$

### Inversion de l'opérateur $\partial_t^{-1}$

Afin de tester les méthodes décrites précédemment, on considère l'opérateur  $\partial_t^{-1}$  de  $\gamma$ -symbole  $\delta$ . Cet opérateur est inversible dans  $\Sigma_\gamma$  et admet comme inverse l'opérateur de dérivation  $\partial_t$  qui est  $\gamma$ -diffusif au sens large de degré 2. On note formellement  $\delta^{-1}$  le  $\gamma$ -symbole de ce dernier et  $H^{-1}(i\omega)$  sa réponse fréquentielle définie par  $H^{-1}(i\omega) = i\omega$ .

D'un point de vue numérique, on cherche en fait à approcher le  $\gamma$ -symbole numérique de  $\partial_t^{-2} \circ \partial_t = \partial_t^{-1}$ . Dans cet exemple, les  $\gamma$ -symboles numériques utilisés sont égaux aux  $\gamma$ -symboles puisque l'on a :

$$\delta = \sum_{k=0}^n \alpha_k \delta_{\xi_k} \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (3.142)$$

et

$$\delta^2 \#_\gamma \delta^{-1} = \delta = \sum_{k=0}^n \beta_k \delta_{\xi_k} \quad \text{avec} \quad \beta_k = \alpha_k, \forall k = 0 : n. \quad (3.143)$$

On prend  $n = 20$ , ce qui correspond à  $q = 1.6238$ , et on présente les résultats de la méthode d'inversion 3 (qui dans ce cas particulier est une méthode de résolution exacte aux erreurs d'arrondi près), les autres méthodes fournissant des résultats similaires. Les résultats sont présentés figure 3.2 sur laquelle on peut comparer le gain et la phase des fonctions de transfert de l'opérateur inverse théorique  $\partial_t \circ \partial_t^{-2}$  et de l'inverse numérique correspondant  $\nu \simeq \partial_t \circ \partial_t^{-2} = \partial_t^{-1}$ .

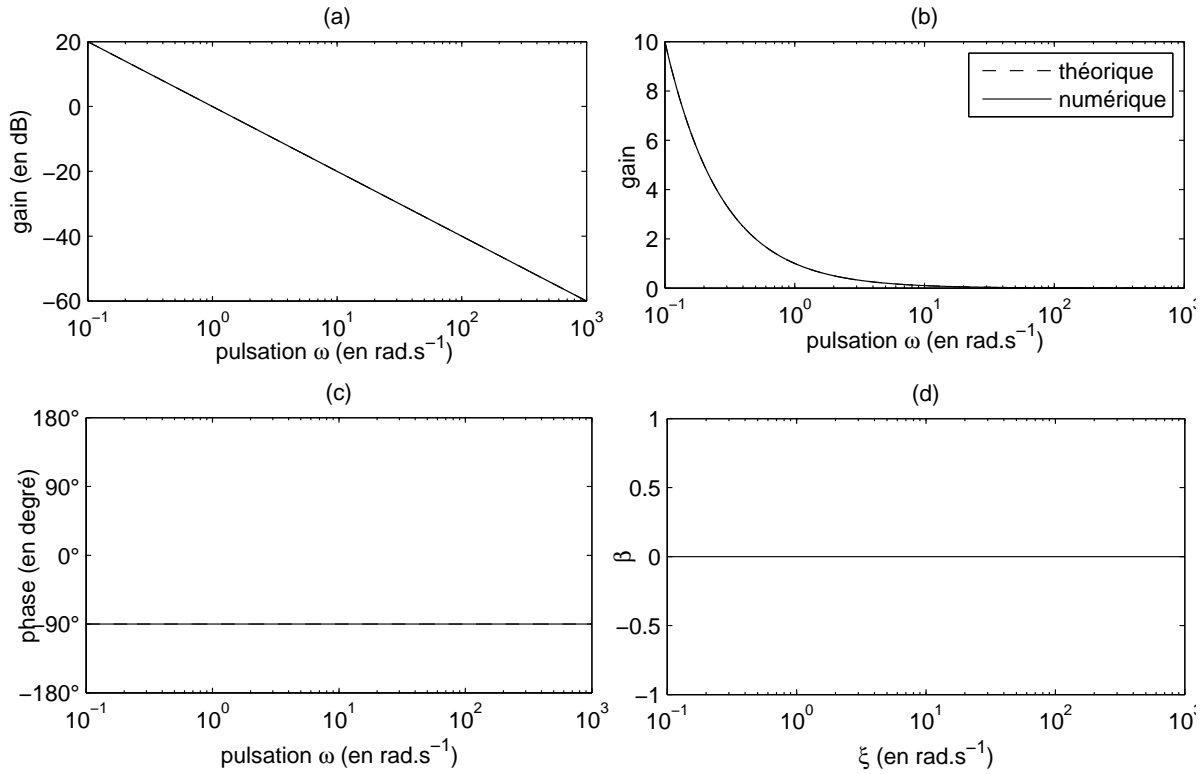


FIG. 3.2 – (a), (b) et (c) : gains et phases des réponses fréquentielles des inverses théorique et numérique  $\partial_t^{-2} \circ \partial_t$  - (d) : coefficients  $\beta^*$ .

	valeur de $\beta_n^*$	erreur relative : $\frac{\ \beta^* - \beta\ }{\ \beta\ }$	E	$E_{\text{sup}}$
en théorie	1	0	0	0
méthode 1	1.0000	0.0149	$8.0300 \times 10^{-7}$	$1.9575 \times 10^{-6}$
méthode 2	1.0000	$2.3418 \times 10^{-8}$	$5.5460 \times 10^{-13}$	$6.3365 \times 10^{-12}$
méthode 3	1.0000	0	$4.0596 \times 10^{-17}$	$2.2199 \times 10^{-16}$
méthode 4	1.0000	$7.1044 \times 10^{-7}$	$2.8449 \times 10^{-13}$	$1.5692 \times 10^{-9}$

TAB. 3.1 – Tableau comparatif des erreurs dans le cas de l'inversion de l'opérateur  $\partial_t^{-1}$



	E	E <sub>sup</sub>
méthode 1	0.0079	0.0967
méthode 2	0.0122	0.1392
méthode 3	0.1029	1.4529
méthode 4	0.0137	60.9516

TAB. 3.2 – Tableau comparatif des erreurs dans le cas de l'inversion de l'opérateur  $(\partial_t + 1)^{-1}$

On constate que les tracés se superposent parfaitement, que ce soit en échelle logarithmique sur la figure 3.2(a) ou en échelle semi-logarithmique sur la figure 3.2(b). On peut également comparer les valeurs des  $\beta_k^*$  avec les valeurs théoriques, cf tableau 3.1.

L'opération d'inversion de l'opérateur d'intégration via celle de son  $\gamma$ -symbole donne donc d'excellents résultats à toute fréquence, ce qui confirme la validité de l'approche.

### Inversion de l'opérateur $(\partial_t + 1)^{-1}$

On considère à présent à l'opérateur  $(\partial_t + 1)^{-1}$ , dont l'inverse  $\partial_t + 1$  est  $\gamma$ -diffusif de degré 1.

Contrairement à l'exemple précédent, les  $\gamma$ -symboles considérés ne sont plus décomposables de manière exacte en somme de masses de Dirac sur les points  $\xi_k$ <sup>5</sup> : les  $\gamma$ -symboles numériques sont donc des approximations des  $\gamma$ -symboles (cf paragraphe 2.2).

Pour cette inversion numérique, on a considéré  $n + 1 = 51$  points de discrétisation en  $\xi$  ce qui correspond à  $q = 1.2068$ , et on a comparé les résultats obtenus avec les 4 méthodes d'inversion.

En figure 3.3 sont donnés les diagrammes de Bode des fonctions de transfert de l'inverse théorique  $(\partial_t + 1) \circ \partial_t^{-2}$  et des inverses numériques obtenus avec les différentes méthodes. On constate que les méthodes 1 et 2 donnent d'excellents résultats : les courbes correspondantes sont quasiment superposées à celle de l'inverse théorique.

On note en revanche que la qualité de l'inversion se dégrade aux hautes fréquences avec les méthodes 3 et 4, alors que l'erreur relative E, donnée dans le tableau 3.2 reste très faible. Ceci s'explique en partie par le fait que les problèmes (3.81) et (3.82), respectivement résolus via les méthodes 1, 2 et 3, 4, sont équivalents au choix de la norme près. Résoudre (3.81) revient à résoudre (3.82) avec la norme (3.93) qui accorde plus de poids aux basses fréquences qu'aux hautes puisque  $\left| \sum_{k=0}^n \left( \frac{\alpha k}{i\omega - \gamma(\xi_k)} \right) \right|^2$  décroît quand  $\omega$  grandit. L'utilisation de la norme (3.77) pourrait permettre de pallier ce problème si nécessaire.

En figure 3.4 sont également comparés les  $\beta^*$  obtenus avec les 4 méthodes. A noter les oscillations dues au fait que l'approximation est relative à une topologie faible.

### Inversion $\gamma$ -symbolique de l'opérateur $(\sqrt{\partial_t + 1})^{-1}$

On considère l'opérateur  $(\sqrt{\partial_t + 1})^{-1}$ , de symbole-Laplace  $H(p) = \frac{1}{\sqrt{p+1}}$  et d'inverse  $\gamma$ -diffusif de degré 1. La figure 3.5 montre les résultats de la méthode 4 ( $n = 20$ ), les autres méthodes donnant des résultats similaires. Les courbes se superposent et l'inversion est d'excellente qualité dans la bande fréquentielle concernée par le réseau  $\{\xi_k\}$ .

### Inversion $\gamma$ -symbolique d'un opérateur d'expression complexe rencontrée en aéroacoustique

On considère l'opérateur d'impédance d'une paroi poreuse ([28], [44]), de symbole :

$$Q(p) = \sqrt{\frac{\chi_{\text{eff}}(p)}{\rho_{\text{eff}}(p)}} \tanh \left( e p \sqrt{\chi_{\text{eff}}(p) \rho_{\text{eff}}(p)} \right) \quad (3.144)$$

<sup>5</sup>car  $\forall k, 1 \neq -\gamma(\xi_k)$ .

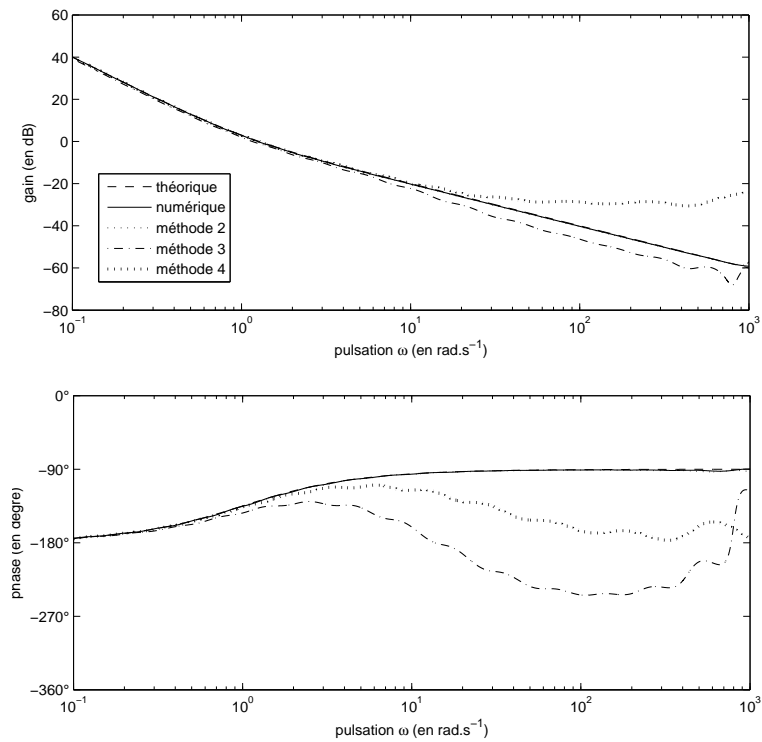


FIG. 3.3 – Diagramme de Bode de l'inverse théorique et numérique  $\partial_t^{-2} \circ (\partial_t + 1)$

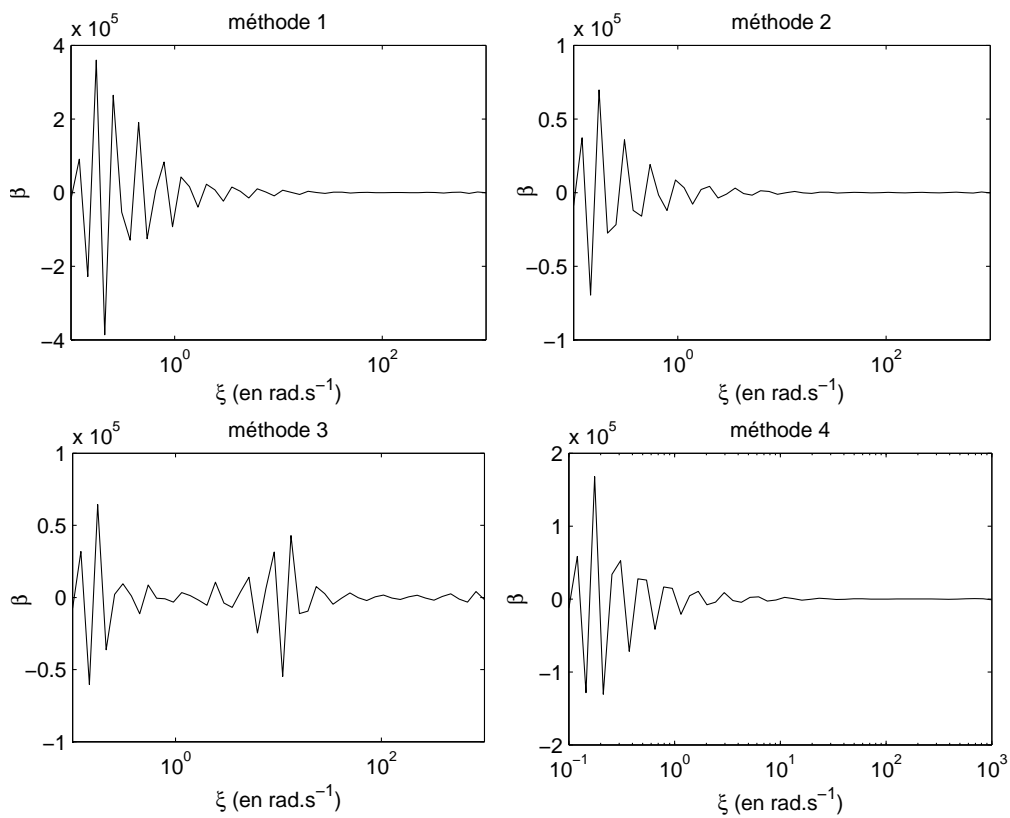


FIG. 3.4 – Coefficients  $\beta^*$  obtenus avec les 4 méthodes dans le cas de l'inversion de  $(\partial_t + 1)^{-1}$

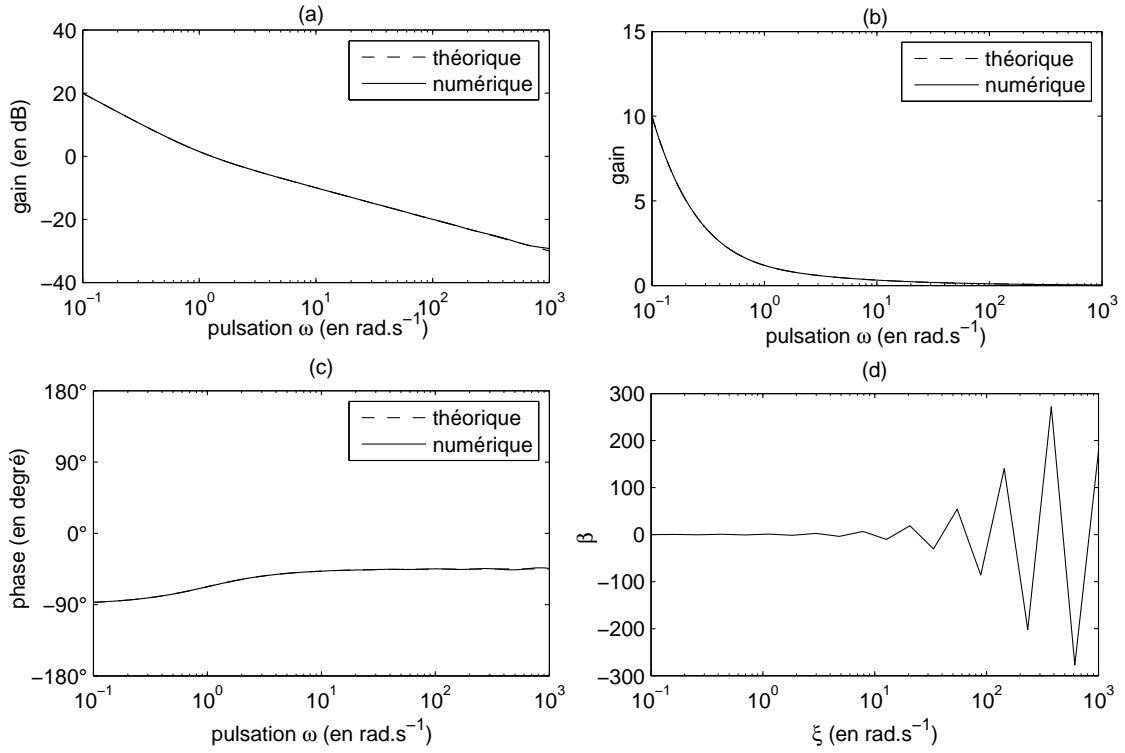


FIG. 3.5 – (a), (b) et (c) : gains et phases des réponses fréquentielles de l'inverse théorique et numérique  $\partial_t^{-1} \circ \sqrt{\partial_t + 1}$  (d) : coefficients  $\beta^*$ .

avec

$$\rho_{\text{eff}}(p) = \rho \left(1 + a \frac{\sqrt{1 + bp}}{p}\right) \text{ et } \chi_{\text{eff}}(p) = \chi \left(1 - c \frac{p}{p + a'\sqrt{1 + b'p}}\right), \quad (3.145)$$

où

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \alpha_\infty, \quad \chi = \frac{1}{P_0}, \quad a = \frac{8\mu}{\rho_0 \Lambda^2}, \quad a' = \frac{8\mu}{\rho_0 \Lambda'^2}, \\ b &= \frac{1}{2a}, \quad b' = \frac{1}{2a'}, \quad 0 < c = \frac{\gamma - 1}{\gamma} < 1, \end{aligned} \quad (3.146)$$

les paramètres physiques  $e, \rho_0, P_0, \mu, \gamma, \alpha_\infty, \Lambda, \Lambda'$  désignant respectivement l'épaisseur de la paroi, la densité et la pression au repos, la viscosité dynamique, le rapport des chaleurs spécifiques, la tortuosité, la longueur caractéristique à haute fréquence du problème visqueux incompressible et la longueur caractéristique à haute fréquence du problème thermique.

Les valeurs numériques de ces coefficients sont :

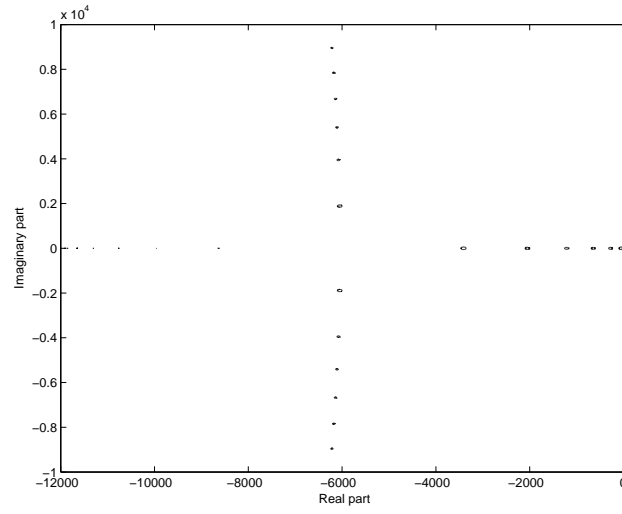
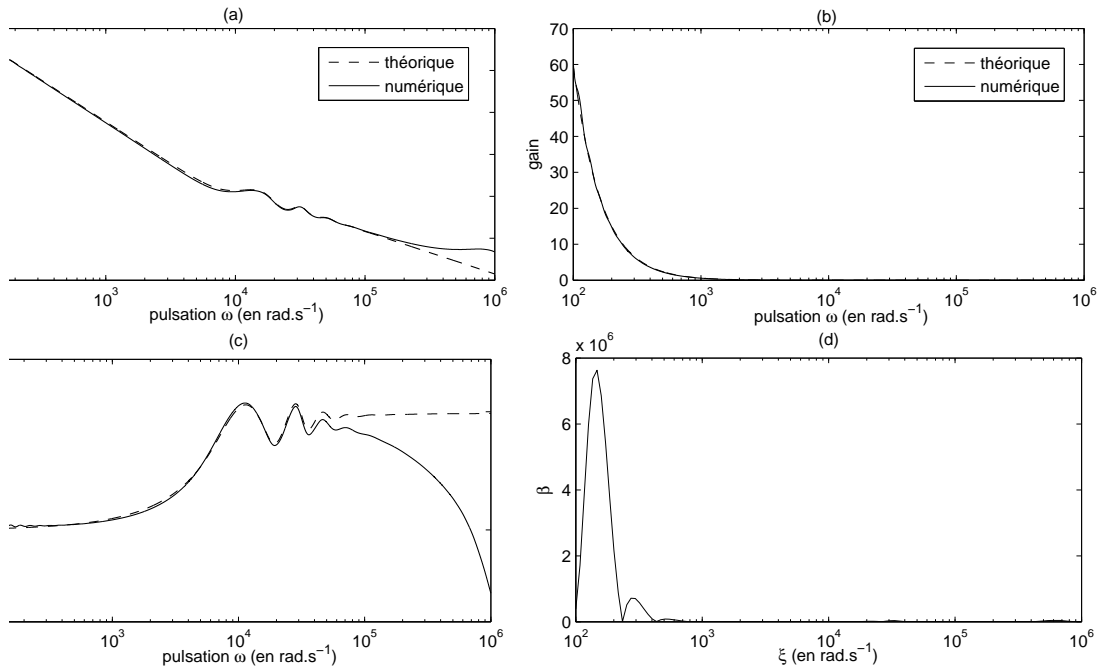
$$\begin{aligned} \Lambda = \Lambda' &= 0.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad \rho_0 = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad P_0 = 10^5 \text{ Pa} \\ \mu &= 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \gamma = 1.4, \quad \alpha_\infty = 1.3, \quad e = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}. \end{aligned}$$

La fonction de transfert  $Q(p)$  possède, outre une coupure sur  $\mathbb{R}^-$ , des poles complexes (voir figure 3.6). On a choisi comme contour  $\gamma$  un secteur défini par :

$$\gamma(\xi) = |\xi| e^{i \text{sign}(\xi) \alpha_\gamma} \text{ avec } \alpha_\gamma = \frac{115\pi}{180}. \quad (3.147)$$

On utilise  $n + 1 = 121$  points de discrétisation en  $\xi$  (avec  $\xi_0 = 0$ ), répartis géométriquement entre  $\xi_1 = 10^2$  et  $\xi_n = 10^6$  (ce qui correspond à  $q = 1.0805$ ) et on choisit  $\omega_1 = 10^2, \omega_2 = 10^6$  comme bornes de la bande fréquentielle utile.

Les résultats obtenus par inversion  $\gamma$ -symbolique selon la méthode 2 sont donnés en figure 3.7. L'inversion est de bonne qualité dans la bande fréquentielle considérée.

FIG. 3.6 – Pôles de  $Q(p)$ FIG. 3.7 – (a), (b) et (c) : gains et phases des réponses fréquentielles de l'inverse théorique et numérique  $\partial_t^{-1} \circ Q(\partial_t)^{-1}$  - (d) : coefficients  $\beta^*$ .

**Cas d'un  $\gamma$ -symbole non inversible dans  $\Sigma_\gamma$** 

On considère l'opérateur rationnel  $H(\partial_t)$ ,  $\gamma$ -diffusif au sens strict, d'inverse non  $\gamma$ -diffusif, défini par le symbole :

$$H(p) = \frac{p - 10}{100(p + 3)^2}. \quad (3.148)$$

On a clairement :

$$\frac{1}{H(p)p^2} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \text{ dans } \Omega_\gamma^+, \quad (3.149)$$

et

$$\frac{1}{H(p)p^2} = \frac{100(p + 3)^2}{(p - 10)p^2} = \frac{-69p - 90}{p^2} + \frac{169}{p - 10}; \quad (3.150)$$

la partie  $\gamma$ -réalisable de l'inverse de  $H(\partial_t)$ , noté  $H_r(\partial_t)$  est défini par le symbole :

$$H_r(p) = \frac{-69p - 90}{p^2}. \quad (3.151)$$

On utilise  $n + 1 = 101$  points de discrétisation en  $\xi$  (avec  $\xi_0 = 0$ ), répartis géométriquement entre  $\xi_1 = 10^{-5}$  et  $\xi_n = 10^4$  (ce qui correspond à  $q = 1.2328$ ), et on prend  $\omega_1 = 10^{-5}$ ,  $\omega_2 = 10^4$  comme bornes de la bande utile.

Le contour  $\tilde{\gamma}$  considéré est :

$$\tilde{\gamma}(\xi) = 10^{-3} + |\xi| e^{i \operatorname{sign}(\xi) \alpha_{\tilde{\gamma}}} \text{ avec } \alpha_{\tilde{\gamma}} = \frac{130\pi}{180}, \quad (3.152)$$

ce qui implique (cf remarque 114) que la formule (3.131) utilisée pour  $H_r(i\omega)$  n'est valable que pour  $\omega \in ]10^{-3}, \infty[$ . On utilise ensuite comme contour  $\gamma$  le secteur d'angle  $\frac{3\pi}{4}$  :

$$\gamma(\xi) = |\xi| e^{i \operatorname{sign}(\xi) \alpha_\gamma} \text{ avec } \alpha_\gamma = \frac{3\pi}{4}. \quad (3.153)$$

Les résultats obtenus sont donnés en figure 3.8. On compare la réponse fréquentielle (gain et phase) théorique de  $H_r(\partial_t)$  avec celles obtenues numériquement par réalisation diffusive sur  $\tilde{\gamma}$  puis sur  $\gamma$ . On constate, comme prévu par la théorie, que la formule (3.131) n'est valable que pour  $\omega > 10^{-3}$  et que la quantité calculée est nulle pour  $\omega < 10^{-3}$ . L'inversion  $\gamma$ -symbolique est bonne dans la bande fréquentielle  $[10^{-2}, 10^3]$ .

**3.5 Extension aux opérateurs matriciels**

L'extension de l'inversion  $\gamma$ -symbolique aux opérateurs matriciels se fait de manière naturelle. De ce fait, le sujet sera traité formellement puisque les questions topologiques sont similaires à celles du cas scalaire.

On se place dans l'espace des  $\gamma$ -symboles matriciels "carrés"  $\Sigma_\gamma^{n \times n}$ , et on considère le problème de l'inversion  $\gamma$ -symbolique d'un opérateur matriciel  $\mathcal{H}$  de taille  $n \times n$  et de  $\gamma$ -symbole  $\mu \in \Sigma_\gamma^{n \times n}$ . De même que l'inverse  $M^{-1}$  d'une matrice  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  s'exprime :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \times (M^c)^T, \quad (3.154)$$

où  $M^c$  est la matrice des cofacteurs de  $M$ , on déduit, par manipulations algébriques et du fait que  $\Sigma_\gamma$  n'a pas de diviseurs de 0, le résultat suivant :

**Théorème 117** *Si  $\mu$  est inversible dans  $\Sigma_\gamma^{n \times n}$ , alors  $\det(\mu)$  est inversible dans  $\Sigma_\gamma$  et :*

$$\mu^{-1} = (\det(\mu))^{-1} \#_\gamma (\mu^c)^T, \quad (3.155)$$

avec :

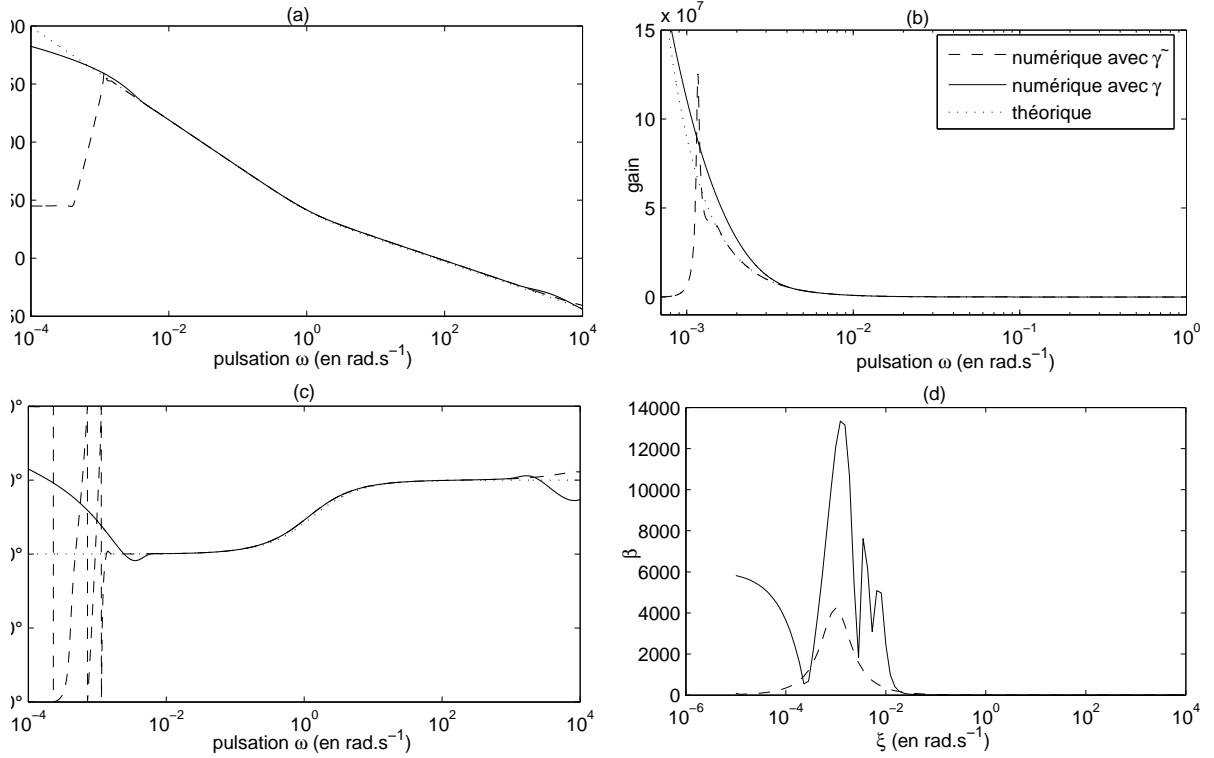


FIG. 3.8 – (a), (b) et (c) : gains et phases des réponses fréquentielles de  $H_r(\partial_t)$  théoriques et obtenus numériquement avec les contours  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  - (d) : coefficients  $\beta^*$  (pour les contours  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$ ).

►  $\det(\mu) \in \Sigma_\gamma$   $\gamma$ -symbole scalaire<sup>6</sup> défini par la récurrence :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ si } n = 1 : \quad & \det(\mu) = \mu, \\ \bullet \text{ si } n > 1 : \quad & \det(\mu) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \mu_j^i \#_\gamma \det(\tilde{\mu}_{ij}), \end{aligned} \quad (3.156)$$

où  $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$  est choisi arbitrairement et  $\tilde{\mu}_{ij}$  est le  $\gamma$ -symbole obtenu à partir de  $\mu$  en supprimant sa  $i^{\text{ème}}$  colonne et sa  $j^{\text{ème}}$  ligne,

►  $\mu^c \in \Sigma_\gamma^{n \times n}$  est le  $\gamma$ -symbole défini par :

$$\forall i, j = 1 : n, \quad (\mu^c)_i^j = (-1)^{i+j} \det(\tilde{\mu}_{ij}). \quad (3.157)$$

On en déduit :

**Corollaire 118** Pour qu'un  $\gamma$ -symbole  $\mu \in \Sigma_\gamma^{n \times n}$  soit inversible dans  $\Sigma_\gamma^{n \times n}$ , il faut et il suffit que  $\det(\mu)$  soit inversible dans  $\Sigma_\gamma$ .

Au plan numérique, au moins lorsque  $n$  est petit, la formule (3.155) est utilisable. Le calcul de  $\mu^{-1}$  nécessite alors, outre l'inversion de  $\det(\mu)$ , divers produits  $\#$  (calcul de  $\det(\mu)$  et de la matrice des cofacteurs  $\mu^c$ ). La manipulation numérique du produit  $\#$  est présentée dans [48].

Du point de vue technique, le problème de l'inversion de  $\gamma$ -symboles matriciels est largement ouvert.

**Remarque 119** L'expression de l'inverse  $\mathcal{H}^{-1}$  d'un opérateur matriciel  $\mathcal{H}$  de taille  $n \times n$  est similaire à celle de  $\mu^{-1}$  donnée en (3.155) à ceci près que le produit  $\#_\gamma$  est remplacé par le produit de composition  $\circ$ . Cependant,  $\mathcal{H}$  inversible  $\nRightarrow \mu$  inversible dans  $\Sigma_\gamma^{n \times n}$ .

<sup>6</sup>dont l'inversion relève donc des méthodes introduites précédemment.

**Remarque 120** La fonction

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma^{m \times n} &\longrightarrow \Delta_\gamma^{m \times n} \\ \mu &\longmapsto \delta^{m+1} \# \mu^{-1} \end{aligned} \quad (3.158)$$

présente les mêmes caractéristiques topologiques que dans le cas scalaire.

Plus généralement, la pseudo-inversion de  $\gamma$ -symboles rectangulaires peut être également définie de façon similaire au cas des matrices. Le problème est largement ouvert.

**Exemple 121** On considère l'opérateur matriciel  $\mathcal{H}$  suivant ( $\partial_t^0$  désigne l'opérateur identité) :

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \partial_t & \partial_t^2 & 0 \\ \partial_t^{-1} & \partial_t^0 & \partial_t^0 \\ 0 & \partial_t & \partial_t \end{bmatrix}, \quad (3.159)$$

de  $\gamma$ -symbole matriciel  $\mu$  défini par :

$$\mu = \begin{bmatrix} \delta^{-1} & \delta^{-2} & 0 \\ \delta & \delta^0 & \delta^0 \\ 0 & \delta^{-1} & \delta^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.160)$$

où  $\delta^0$  est le  $\gamma$ -symbole de l'opérateur identité. On a :

$$\det(\mathcal{H}) = -\partial_t^2 \quad \text{et} \quad \det(\mu) = -\delta^{-2}, \quad (3.161)$$

d'où

$$\mathcal{H}^{-1} = -\partial_t^{-2} \circ \begin{bmatrix} 0 & -\partial_t^3 & \partial_t^2 \\ -\partial_t^0 & \partial_t^2 & -\partial_t \\ \partial_t^0 & -\partial_t^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mu^{-1} = -\delta^2 \#_\gamma \begin{bmatrix} 0 & -\delta^{-3} & \delta^{-2} \\ -\delta^0 & \delta^{-2} & -\delta^{-1} \\ \delta^0 & -\delta^{-2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.162)$$

**Exemple 122** Soit  $\mu \in \Sigma_\gamma^{n \times n}$  le  $\gamma$ -symbole de l'opérateur matriciel  $\mathcal{H}$  défini par :

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \partial_t + 1 & \sqrt{\partial_t} \\ 0 & \sqrt{\partial_t^{-1}} \end{bmatrix}. \quad (3.163)$$

Le  $\gamma$ -symbole  $\det(\mu)$  est associé à l'opérateur  $(\partial_t + 1) \circ \sqrt{\partial_t^{-1}} = \sqrt{\partial_t} + \sqrt{\partial_t^{-1}}$  dont l'inverse est  $\gamma$ -diffusif au sens strict.  $\det(\mu)$  est donc inversible dans  $\Sigma_\gamma$ , d'où  $\mu$  inversible dans  $\Sigma_\gamma^{n \times n}$ .

**Exemple 123** On considère maintenant le  $\gamma$ -symbole  $\mu \in \Sigma_\gamma$  de l'opérateur  $\mathcal{H}$  défini par :

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 2\partial_t & \sqrt{\partial_t} \\ \partial_t + 1 & \sqrt{\partial_t^{-1}} \end{bmatrix}. \quad (3.164)$$

$\det(\mu)$  est le  $\gamma$ -symbole de l'opérateur  $2\partial_t \sqrt{\partial_t^{-1}} - (\partial_t + 1) \sqrt{\partial_t} = \sqrt{\partial_t}(1 - \partial_t)$  dont l'inverse a pour fonction de transfert :

$$\frac{1}{\sqrt{p}(1-p)}, \quad (3.165)$$

qui a un pôle en 1 et qui n'est pas conséquent pas analytique dans  $\Omega_\gamma^+ \supset \mathbb{C}^+$ . Le  $\gamma$ -symbole  $\det(\mu)$ , et par conséquent  $\mu$ , ne sont donc pas inversibles.





Deuxième partie

Application à certains problèmes  
dynamiques non locaux



# Chapitre 4

## Quelques problèmes

Étant dédiée aux opérateurs intégraux, la représentation diffusive offre de nombreuses perspectives d'application dans des domaines variés. Dans ce chapitre, on présente succinctement divers problèmes (analyse et simulation de systèmes, réduction et identification de modèles) que l'utilisation de la représentation diffusive permet d'aborder de façon naturelle. Certains d'entre eux ont été étudiés en détail et ont fait l'objet de publications ; en particulier les problèmes d'identification sont largement détaillés dans ce mémoire. Les autres problèmes sont en cours d'étude ou restent à développer. D'autres applications (estimation d'état, contrôle) seront étudiées dans la suite.

### 4.1 Analyse et simulation de systèmes dynamiques

Grâce à la représentation diffusive, une équation intégro-différentielle peut être formulée au moyen d'une représentation d'état locale en temps. Les méthodes d'analyse, de transformation ou de simulation numérique dédiées au cas différentiel peuvent ainsi être adaptées et permettent la résolution de problèmes complexes. Dans ce chapitre, plusieurs exemples d'application sont présentés.

#### 4.1.1 Transformation d'un modèle de flammes sphériques en vue de sa simulation

Le modèle de Volterra, établi par Joulin dans [31], décrit l'évolution du rayon  $x$  d'une flamme sphérique initiée par une source de puissance  $u$  dans un milieu réactif (voir paragraphe 7.3.2 pour plus de détails) :

$$\begin{cases} x(t) \partial_t^{\frac{1}{2}} x(t) = 2x(t) \ln x(t) + 2u(t) \quad \forall t > 0, \\ x(0^+) = 0, u \geq 0, x \geq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Ce problème est bien posé [3]. On s'intéresse ici à la simulation numérique de ce modèle, sujet qui a déjà fait l'objet de publication [4] mais qui est abordé ici de manière différente.

En appliquant  $H(\partial_t)^{-1}$  aux deux membres de l'équation du modèle (4.1), on obtient :

$$x = \partial_t^{-\frac{1}{2}} \left( 2 \ln x + 2 \frac{u}{x} \right), \quad (4.2)$$

dont la formulation diffusive s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + 2 \left( \ln x(t) + \frac{u(t)}{x(t)} \right) \\ x(t) = \langle \mu(\cdot), \psi(t, \cdot) \rangle, \end{cases} \quad (4.3)$$

avec  $\mu$   $\gamma$ -symbole de l'opérateur  $\gamma$ -diffusif au sens strict  $\partial_t^{-\frac{1}{2}}$ . Étant différentielle, l'équation en  $\psi$  peut être intégrée au moyen de schémas numériques standard. On note cependant que la quantité

$2(\ln x(t) + \frac{u(t)}{x(t)})$  est singulière lorsque  $x(t)$  est proche de 0, ce qui est le cas notamment autour de  $t = 0$ .

Pour supprimer cette singularité, on peut utiliser une transformation opératorielle de type changement de temps (étudiée en détails dans [47]) qui consiste à considérer le temps  $\tau = \varphi(t)$  tel que :

$$x \partial_t \psi = \partial_\tau \psi. \quad (4.4)$$

On montre que :

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{x} \text{ et } \frac{dt}{d\tau} = x \circ \varphi^{-1}, \quad (4.5)$$

et que le modèle (4.3) peut encore s'écrire :

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{\psi}(\tau, \xi) = \tilde{x}(\tau) \gamma(\xi) \tilde{\psi}(\tau, \xi) + 2[\tilde{x}(\tau) \ln \tilde{x}(\tau) + u(t)], \\ \partial_\tau t(\tau) = \tilde{x}(\tau), \\ \tilde{x}(\tau) = \langle \mu(\cdot), \tilde{\psi}(\tau, \cdot) \rangle, \end{cases} \quad (4.6)$$

avec  $t = \varphi^{-1}(\tau)$ ,  $\tilde{\psi}(\tau, \cdot) = \psi(\varphi^{-1}(\tau), \cdot)$  et  $\tilde{x}(\tau) = x(\varphi^{-1}(\tau))$ . Le second membre de l'équation d'état n'étant plus singulier en 0, on peut appliquer (par exemple) un schéma d'Euler qui conduit alors à :

$$\begin{cases} \tilde{\psi}^{n+1}(\xi) = (1 + \Delta\tau \tilde{x}^n \gamma(\xi)) \tilde{\psi}^n(\xi) + 2 \Delta\tau [\tilde{x}^n \ln \tilde{x}^n + u(t^n)], \\ t^{n+1} = t^n + \Delta\tau \tilde{x}^n, \\ \tilde{x}^n = \langle \mu, \tilde{\psi}^n \rangle, \end{cases} \quad (4.7)$$

avec  $\tilde{x}^n = x(t^n)$ . Après approximation en  $\xi$ , la simulation numérique se déroule naturellement et conduit à des simulations de bonne qualité. Deux exemples de courbes obtenues avec cette méthode (le schéma d'Euler étant remplacé par un schéma de Runge Kutta) sont visibles en figure 7.4.

#### 4.1.2 Etude et simulation d'un modèle de paroi poreuse

Les travaux exposés dans ce paragraphe ont été publiés dans [12] et [17].

##### Problème considéré

On considère le problème de simulation d'un modèle de paroi poreuse établi par S. Gasser dans le domaine fréquentiel [28]. Le modèle qui décrit la propagation des ondes à l'intérieur du milieu poreux d'interface  $\Gamma = \{z = 0\} \times ]0, X[$  avec le milieu fluide, est donné sur  $(\omega, z, x) \in \mathbb{R} \times ]0, 1[ \times ]0, X[$  par :

$$\begin{cases} e(x) i\omega \rho_{\text{eff}}(i\omega) \hat{u} + \partial_z \hat{P} = 0 \\ e(x) i\omega \chi_{\text{eff}}(i\omega) \hat{P} + \partial_z \hat{u} = 0 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \rho_{\text{eff}}(i\omega) = \rho \left(1 + a \frac{\sqrt{1+b'i\omega}}{i\omega}\right) \\ \chi_{\text{eff}}(i\omega) = \chi \left(1 - c \frac{i\omega}{i\omega + a' \sqrt{1+b'i\omega}}\right), \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $u$  et  $P$  représentent la vitesse et la pression dans le milieu poreux et  $e(x)$  est l'épaisseur de la paroi. Le modèle (4.8) est complété par les conditions aux limites  $u|_{z=1} = 0$  (réflexion totale en  $z = 1$ ) et  $u|_{z=0} = w$ . Par ailleurs, le couplage avec le modèle d'un milieu fluide nécessite deux conditions de raccord à l'interface :

$$P|_{\Gamma}^{\text{fluide}} = P|_{z=0} \text{ et } u|_{\Gamma}^{\text{fluide}} \cdot n = \phi u|_{z=0}. \quad (4.9)$$

Les termes  $w = u|_{z=0}$  et  $y := P|_{z=0}$  peuvent donc s'interpréter respectivement comme l'*entrée* et la *sortie* du système (4.8), définissant un opérateur (d'impédance de la paroi poreuse)  $w \mapsto y$ , noté  $Q(\partial_t)$ .

Du fait de la présence d'opérateurs de convolution (causaux) associés à  $\rho_{\text{eff}}$  et  $\chi_{\text{eff}}$ , respectivement notés  $\rho_{\text{eff}}(\partial_t)$  et  $\chi_{\text{eff}}(\partial_t)$ , le modèle temporel associé à (4.8) est non local. Dans de telles situations, on peut envisager d'utiliser par exemple des approximations de Padé de  $\rho_{\text{eff}}(i\omega)$  et  $\chi_{\text{eff}}(i\omega)$ , mais ce type de construction n'offre en pratique aucune garantie de stabilité.

### Formulation d'état de la paroi poreuse

On propose d'utiliser la représentation diffusive pour obtenir une formulation temps locale de (4.8). On considère pour cela les opérateurs  $H_1(\partial_t)$  et  $H_2(\partial_t)$ , de symboles respectifs :

$$H_1(p) = \frac{1}{p \rho_{\text{eff}}(p)} \text{ et } H_2(p) = \frac{1}{p \chi_{\text{eff}}(p)}. \quad (4.10)$$

On montre que ces deux symboles sont décroissants à l'infini et holomorphes sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ . Les opérateurs  $H_1(\partial_t)$  et  $H_2(\partial_t)$  sont donc  $\gamma$ -diffusifs au sens strict pour le contour  $\gamma$  défini par  $\gamma(\xi) = -|\xi|$ ; on note  $\mu_1$  et  $\mu_2$  leurs  $\gamma$ -symboles respectifs.

On réécrit alors le système (4.8) sous la forme :

$$\begin{cases} u = -H_1(\partial_t) \frac{\partial_z P}{e(x)}, \\ P = -H_2(\partial_t) \frac{\partial_z u}{e(x)}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Les opérateurs  $\partial_z P \mapsto u$  et  $\partial_z u \mapsto P$  ayant pour réalisation diffusive :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_1 = \gamma(\xi) \psi_1 - \frac{1}{e} \partial_z P \\ u := \langle \mu_1, \psi_1 \rangle, \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \partial_t \psi_2 = \gamma(\xi) \psi_2 - \frac{1}{e} \partial_z u \\ P := \langle \mu_2, \psi_2 \rangle, \end{cases} \quad (4.12)$$

on déduit la formulation locale en temps de l'opérateur  $Q(\partial_t)$  sur  $(t, z, x, \xi) \in \mathbb{R}^{*+} \times ]0, 1[ \times ]0, X[ \times \mathbb{R}^+$  :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_1 = \gamma(\xi) \psi_1 - \frac{1}{e} \langle \mu_2, \partial_z \psi_2 \rangle \\ \partial_t \psi_2 = \gamma(\xi) \psi_2 - \frac{1}{e} \langle \mu_1, \partial_z \psi_1 \rangle \\ \langle \mu_1, \psi_1(t, 1, x, \cdot) \rangle = 0 \\ \langle \mu_2, \psi_2(t, 0, x, \cdot) \rangle = w(t, x) \\ y(t, x) = \langle \mu_1, \psi_1(t, 0, x, \cdot) \rangle. \end{cases} \quad (4.13)$$

Comme  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont positifs, la fonction

$$(\psi_1, \psi_2) \mapsto \|(\psi_1, \psi_2)\|_{\mu, x} = \left[ \iint (\mu_1 |\psi_1|^2 + \mu_2 |\psi_2|^2) d\xi dz \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.14)$$

définit une semi-norme. On montre alors [12] que la fonctionnelle  $E_{\psi_x} = \frac{1}{2} \|(\psi_1, \psi_2)\|_{\mu, x}^2$  est telle que, pour tout  $(\psi_1, \psi_2)$  solution de (4.13) :

$$\frac{dE_{\psi_x}}{dt} - \frac{1}{e} w y \leq 0. \quad (4.15)$$

Grâce à la propriété  $\psi(t, 0) = 0$ , on déduit de (4.15) la positivité de la forme quadratique  $w \mapsto \mathcal{Q}_T(w) := \int_0^T w y dt$  pour tout  $T > 0$  et tout  $x$  : la nature passive de la paroi absorbante est ainsi restaurée par le modèle (4.13).

### Couplage avec un modèle de propagation des ondes en milieu fluide

Du fait de (4.15), le couplage de (4.13) avec tout modèle dynamique de type passif (en particulier le modèle aéroacoustique étudié dans [44]) conduit à un système globalement dissipatif au sens d'une fonctionnelle énergie définie à partir de  $E_{\psi_x}$  et de l'énergie  $E_m$  du modèle considéré de telle sorte que les transferts entre les deux sous-systèmes soient équilibrés. Notons que cette dissipation d'énergie globale due à l'absorption des ondes à la frontière n'est pas accessible sous la forme fréquentielle (4.8) : en ce sens, le modèle diffusif (4.13) est conforme à l'interprétation physique d'un tel milieu.

### Réalisation diffusive de l'opérateur d'impédance

Une autre réalisation d'état de  $Q(\partial_t)$  peut être obtenue directement à partir de son  $\gamma$ -symbole. On a besoin pour cela de l'expression de  $Q(p)$  qui est donnée, après calculs [12] par :

$$Q(p) = \sqrt{\frac{\chi_{\text{eff}}(p)}{\rho_{\text{eff}}(p)}} \tanh \left( e(x) p \sqrt{\chi_{\text{eff}}(p) \rho_{\text{eff}}(p)} \right). \quad (4.16)$$

On montre que l'opérateur  $\tilde{Q}(\partial_t)$  de symbole  $\tilde{Q}(p) = \frac{Q(p)}{p}$  est  $\gamma$ -diffusif au sens strict. En notant  $\nu$  son  $\gamma$ -symbole, on obtient la réalisation d'état de  $Q(\partial_t)$  :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + w \\ y = \langle \nu, \partial_t \psi \rangle. \end{cases} \quad (4.17)$$

Notons que  $\tilde{Q}(p)$  possède des pôles complexes (voir figure 3.6 au paragraphe 3.4.4) et que le contour  $\gamma$  utilisé doit donc être adapté. On prendra par exemple un contour de type secteur défini par  $\gamma(\xi) = |\xi| e^{i \text{sign}(\xi)(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$ , avec  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ .

### Simulation numérique

Les formulations (4.13) et (4.17) étant locales en temps, les problèmes tant de simulation que, par exemple, de contrôle ou encore d'identification peuvent être abordés par les méthodes classiques. La simulation numérique de modèles de la forme (4.17) a été abordée au paragraphe 2.2. Pour (4.13), on peut construire des schémas numériques dont la stabilité découle du bilan d'énergie (4.15). Une étude approfondie de tels schémas a été menée dans [13] pour une classe de modèles générale dont fait partie 4.17 ; un résumé est présenté dans le paragraphe 4.1.3. Des exemples de simulations sont données dans [12]. On notera que la simulation de (4.17) est plus précise et moins coûteuse que celle de (4.13) puisqu'elle fait l'économie du calcul intermédiaire de  $u$  et  $P$  dans tout le milieu poreux.

#### 4.1.3 Schémas numériques pour une classe de modèles de propagation non locaux

On ne donne ici qu'un résumé succinct du problème et des travaux réalisés. Ces travaux ont donné lieu à une publication [13] à laquelle on pourra se référer pour plus de détails.

La résolution numérique des équations intégral-différentielles est un problème délicat, faisant l'objet de nombreuses publications (voir par exemple [5, 9, 41]). Les méthodes standard sont basées sur des approximations diverses, de type Pade [25] par exemple, ou sur des quadratures directes des intégrales [65, 8], et nécessitent généralement une discrétisation temporelle coûteuse, particulièrement en présence d'opérateurs intégraux à mémoire longue. De plus, la stabilité des schémas numériques est en général difficile à obtenir [10], car les techniques standard dédiées aux équations différentielles ordinaires (dissipation d'énergie par exemple) sont difficilement utilisables pour les équations intégral-différentielles. La construction de schémas numériques stables et peu coûteux reste donc un problème important pour lequel les méthodes spécifiques dédiées à l'analyse et l'approximation des opérateurs convolutifs, telle la représentation diffusive, peuvent être utiles.

On considère l'équation intégral-différentielle de la forme abstraite :

$$H(\partial_t)\Phi = G(\nabla)\Phi + f \quad \text{sur } (t, x) \in \mathbb{R}_t^{+*} \times \mathbb{R}_x^n, \quad (4.18)$$

où  $H(\partial_t)$  est un opérateur convolutif inversible et diagonal, et  $G(\nabla)$  est un opérateur linéaire différentiel anti auto-adjoint. De nombreux phénomènes de propagation, tel que la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu dispersif (voir paragraphe 4.1.2), peuvent être modélisés par le modèle (4.18). Au moyen de la représentation diffusive, on obtient une nouvelle formulation à la fois équivalente à (4.18) et temps-locale, écrite sous forme de problème de Cauchy :

$$\partial_t \Psi = \mathcal{A}\Psi + \mathcal{B}f \quad \text{avec } (t, x, \xi) \in \mathbb{R}_t^{+*} \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi, \quad \Psi(0, \dots) = 0, \quad (4.19)$$

de telle sorte que la solution de (4.18) s'exprime  $\Phi = \mathcal{C}\Psi$ .

On montre alors que, sous des hypothèses naturelles sur le symbole  $H(p)$ , la formulation (4.19) est dissipative au sens d'une fonctionnelle énergie dérivée de celle de l'équation standard :  $\partial_t \Phi = G(\nabla)\Phi$ . Cette propriété essentielle permet d'envisager ensuite la discrétisation en  $\xi$  de (4.19), ce qui aboutit sur une équation dissipative approchée à partir de laquelle on peut construire des schémas numériques intuitifs après discrétisation en les variables  $t, x$ . Différentes classes de schémas ainsi obtenus ont été étudiés, et leur stabilité a été établie au sens d'une fonctionnelle énergie adaptée, héritée du modèle continu (4.18) : des conditions suffisantes de stabilité ont ainsi été établies. Ces schémas ont ensuite été mis en œuvre sur le modèle de paroi poreuse (4.8), de la forme (4.18) avec :

$$\Phi = \begin{pmatrix} u \\ P \end{pmatrix}, G(\nabla) = \begin{bmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{bmatrix} \text{ et } H(\partial_t) = \begin{bmatrix} H_1(\partial_t) & 0 \\ 0 & H_2(\partial_t) \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$H_1(\partial_t)$  et  $H_2(\partial_t)$  étant des opérateurs convolutifs de symboles  $H_1(p) = kp + a\sqrt{1+bp}$  et  $H_2(p) = k'p + \frac{cp^2}{p+a'\sqrt{1+b'p}}$ . Sur cet exemple, les conditions suffisantes de stabilité se sont avérées être quasiment nécessaires. Une interprétation physique de ces conditions a été établie en terme de vitesse de propagation numérique haute fréquence.

## 4.2 Réduction de modèles non linéaires

Les problèmes de réduction de modèle sont fréquents et d'autant plus importants que les systèmes considérés sont grands. Grâce à la représentation diffusive, on peut reformuler ces problèmes et reporter ce qui concerne les opérateurs sur leurs  $\gamma$ -symboles. La méthode de réduction proposée est présentée dans ce paragraphe de manière formelle et illustrée d'un exemple académique.

On considère le modèle entrée-sortie :

$$\begin{cases} H(\partial_t)X = f(X, u) \\ y = h(X), \end{cases} \quad (4.21)$$

où :

- ▶  $H(\partial_t)$  est un opérateur diffusif matriciel carré de  $\gamma$ -symbole  $\mu \in \Sigma^{n \times n}$  inversible et d'inverse  $\mu^{-1} \in \Delta_\gamma^{n \times n}$ ,
- ▶  $f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{C}^n$  est une fonction suffisamment régulière, continue et dérivable en  $(0, 0)$ , telle que (4.21) soit asymptotiquement stable pour  $u = 0$  et que l'on ait :

$$f(0, 0) = 0, \quad (4.22)$$

$$\text{et } \partial_1 f(0, 0) = 0. \quad (4.23)$$

- ▶  $h$  est une fonction de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^p$  telle que  $h(0) = 0$ ,
- ▶  $u, X$  et  $y$  sont des trajectoires de la variable temps  $t \in \mathbb{R}^+$ , à valeurs respectives dans  $\mathbb{C}^q, \mathbb{C}^n$  et  $\mathbb{C}^p$ .

**Remarque 124** ▶ *La condition de stabilité asymptotique, quelque peu restrictive, pourra éventuellement être affaiblie moyennant adaptations techniques dépassant le cadre de cette étude.*

▶ *La condition (4.23) est à considérer sans perte de généralité. Dans le cas où  $\partial_1 f(0, 0) \neq 0$ , on pose  $K(\partial_t) := H(\partial_t) - \partial_1 f(0, 0)$  et  $g(X, u) := f(X, u) - \partial_1 f(0, 0)X$  et on choisit un contour  $\gamma$  tel que  $K(\partial_t)$  admette un  $\gamma$ -symbole dans  $\Sigma_\gamma$  : on se ramène ainsi à un système de la forme (4.21) satisfaisant l'hypothèse (4.23).*

▶ *Du fait de la stabilité du point  $(0, 0)$  et de la condition (4.23), le système (4.21) est équivalent, lorsque  $u$  est petit, au système dynamique :*

$$\begin{cases} H(\partial_t)X = Bu, \\ y = CX, \end{cases} \quad (4.24)$$

avec  $B = \partial_2 f(0, 0)$  et  $C = h'(0)$

Le problème de réduction du modèle (4.21) consiste à trouver un opérateur  $\tilde{H}(\partial_t)$  et deux fonctions  $\tilde{f}$  et  $\tilde{h}$  tels que la sortie  $\tilde{y}(t) \in \mathbb{C}^p$  du modèle réduit :

$$\begin{cases} \tilde{H}(\partial_t)\tilde{X} = \tilde{f}(\tilde{X}, u) \\ \tilde{y} = \tilde{h}(\tilde{X}) \end{cases} \quad (4.25)$$

d'entrée  $u$  et d'état  $\tilde{X}(t) \in \mathbb{C}^{\tilde{n}}$  avec  $\tilde{n} < n$ , soit aussi proche que possible de  $y(t)$  (en un sens à préciser selon les cas). L'opérateur  $\tilde{H}(\partial_t)$  recherché est  $\gamma$ -symbolique ; on note  $\tilde{\mu}$  son  $\gamma$ -symbole. On note également  $\tilde{B} = \partial_2 \tilde{f}(0, 0)$  et  $\tilde{C} = \tilde{h}'(0)$ .

**Remarque 125** *Si l'état  $X$  du modèle à réduire (4.21) peut avoir un sens physique, il est peu probable qu'après réduction le nouvel état  $\tilde{X}$  du modèle réduit (4.25) en ait un : il s'agit alors d'un modèle comportemental entrée-sortie.*

Le problème de réduction considéré peut en fait se ramener à un problème d'identification simplifié. En effet, le modèle à réduire (4.21) étant connu, on évalue pour une entrée  $u_m$  "suffisamment riche" donnée, la sortie  $y(u_m)$  correspondante. Le modèle réduit recherché devant être tel que  $\tilde{y}(u) \simeq y(u)$ , le problème de réduction de (4.21) peut alors être formulé comme un problème d'identification du modèle (4.25) à partir de la "mesure"  $y(u_m)$  de  $\tilde{y}(u)$  et de la donnée  $u$ .

Dans le cas de la réduction de modèle, ce problème est cependant simplifié du fait que le modèle à réduire est connu. Lorsque  $u$  est petit, les deux systèmes (4.21) et (4.25) se comportent en effet comme leurs linéarisés autour de l'équilibre. Le fait que leurs comportements entrée-sortie sont similaires se traduit par :

$$\tilde{C} \tilde{\mu} \tilde{B} = C \mu B. \quad (4.26)$$

Ainsi, en fixant  $\tilde{C}$  et  $\tilde{B}$  de manière judicieuse par rapport au modèle, on peut identifier  $\tilde{\mu}$  par pseudo-inversion :

$$\tilde{\mu} = \mathbf{A}_{\tilde{C}, \tilde{B}}^\dagger C \mu B, \quad (4.27)$$

où  $\mathbf{A}_{\tilde{C}, \tilde{B}}$  est l'opérateur linéaire défini par  $\mathbf{A}_{\tilde{C}, \tilde{B}} : \tilde{\mu} \mapsto \tilde{C} \tilde{\mu} \tilde{B}$ .

**Exemple 126** *On considère le modèle :*

$$\text{diag}(H_i(\partial_t))X = \begin{bmatrix} aX_1 + \varepsilon_1 g_1(X, u) + u \\ b_1 X_1 + b_2 X_2 + \varepsilon_2 g_2(X, u) \\ cX_2 + g_3(X_1, X_3, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(X, u) \\ f_2(X, u) \\ f_3(X, u) \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

d'état  $X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$  et de sortie mesurée  $y(t) \in \mathbb{R}$  définie par :

$$y = X_3 = CX, \quad (4.29)$$

où  $C = [001]$ . On suppose que  $\partial_i f_3(0, 0, 0) = 0$  pour  $i = 1, 2, 3$ , et que, pour  $u$  suffisamment petit,  $X$  reste suffisamment petit pour que  $\varepsilon_i f_i(X, u)$  soient négligeables,  $f_i(0, 0)$  étant supposé nul  $\forall i$ . Dans ce cas, lorsque  $u$  est petit, le modèle (4.28) est voisin du modèle simplifié :

$$\text{diag}(H_i(\partial_t))X = \begin{bmatrix} aX_1 + u \\ b_1 X_1 + b_2 X_2 \\ cX_2 + f_3(X_1, X_3, u) \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Pour se ramener à un modèle satisfaisant les hypothèses (4.22) et (4.23), on pose :

$$H(\partial_t) = \begin{bmatrix} H_1(\partial_t) - a & 0 & 0 \\ -b_1 & H_2(\partial_t) - b_2 & 0 \\ 0 & -c & H_3(\partial_t) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$



et on considère le modèle équivalent à (4.30) suivant :

$$\mathcal{H}X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(X_1, X_3, u) \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

dont le linéarisé à l'équilibre est, du fait des hypothèses sur  $f_3$  :

$$\begin{cases} \mathcal{H}X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u = Bu \\ y = [0 \ 0 \ 1] X = CX. \end{cases} \quad (4.33)$$

En considérant une variable d'état  $\tilde{X} \in \mathbb{R}^2$ , et en posant :

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\tilde{X}) &: = \tilde{X}_2, \\ \tilde{f}(X, u) &: = \begin{bmatrix} u \\ f_3(X_1, X_3, u) \end{bmatrix}, \\ \text{et } \tilde{\mathcal{H}} &: = \begin{bmatrix} H_1(\partial_t) - a & 0 \\ -b_1 c (H_2(\partial_t) - b_2)^{-1} & H_3(\partial_t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

on a alors :

$$\tilde{C} \tilde{\mathcal{H}}^{-1} \tilde{B} = C \mathcal{H}^{-1} B, \quad (4.34)$$

où

$$\tilde{C} := \partial_{\tilde{X}} \tilde{h}(0, 0) = [0 \ 1] \quad \text{et} \quad \tilde{B} := \partial_2 \tilde{f}(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

### 4.3 Identification de modèles de Volterra non linéaires

Les problèmes d'identification de modèles sont d'autant plus délicats que des opérateurs complexes sont à identifier. Tel est le cas des modèles de Volterra ou plus généralement des modèles faisant intervenir un ou plusieurs opérateurs intégraux inconnus. Sous représentation diffuse, on peut reformuler de tels modèles de manière unifiée et bien adaptée aux transformations formelles et au traitement numérique, via les  $\gamma$ -symboles des opérateurs. En reportant ainsi le problème sur les  $\gamma$ -symboles (comme dans le cas de la réduction de modèle), on peut développer de nouvelles méthodes d'identification, faisant souvent appel à l'inversion  $\gamma$ -symbolique traitée précédemment. Les méthodes introduites dans ce paragraphe ont donné lieu à plusieurs publications [18, 19, 20, 21, 22] ainsi qu'à une application contractuelle relative à l'identification à partir de données réelles et à des fins de contrôle, d'un modèle dynamique de MEMS [15, 16, 21].

#### 4.3.1 Motivations

On considère les modèles de Volterra de la forme :

$$H(\partial_t)X = f(u, X), \quad (4.36)$$

où :

- ▶  $u$  et  $X$  sont des trajectoires définies sur  $t \in ]0, \infty[$ , à valeur dans  $\mathbb{R}$ ,
- ▶  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  (en général non linéaire),
- ▶  $H(\partial_t)$  est un opérateur convolutif causal défini sur un espace adapté de fonctions à support dans  $\mathbb{R}_t^+$ .

On suppose que le problème (4.36) est bien posé au sens de l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport à l'entrée  $u$  de la solution  $X$ . L'opérateur  $H(\partial_t)$  étant en outre supposé inversible, (4.36) peut être réécrit sous la forme standard d'équation de Volterra :

$$X(t) = \int_0^t k(t-s) f(u(s), X(s)) ds \quad \forall t > 0, \quad (4.37)$$

où  $k$  est la réponse impulsionnelle de l'opérateur  $H(\partial_t)^{-1}$ .

Cette forme de modèle est suffisamment riche pour décrire des phénomènes physiques complexes et variés, que l'on rencontre dans divers domaines :

- ▶ phénomènes thermiques (on considèrera au paragraphe 7.3.2 un modèle de combustion élaboré dans [31]),
- ▶ ingénierie électrique [56],
- ▶ systèmes différentiels linéaires SISO avec correcteur non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bf(u, X) \\ X = Cx; \end{cases} \quad (4.38)$$

on a alors  $H(p)^{-1} = C(pI - A)^{-1}B$ ,

- ▶ systèmes aux dérivées partielles SISO sur  $\mathbb{R}_t^{+*} \times \Omega_z \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi = A(z, \nabla) \varphi + Bf(u, \int T \varphi dz), \quad \varphi_0 = 0, \\ X = \int T \varphi dz, \end{cases} \quad (4.39)$$

qui peut être réécrit sous la forme synthétique  $\int_0^t k(t-s) f(u(s), X(s)) ds = X(t)$  où la fonction  $k$  est la réponse impulsionnelle associée à l'opérateur  $f \mapsto X$ , c'est à dire la solution de :

$$\begin{cases} \dot{\phi} = A(z, \nabla) \phi + B\delta, \quad \phi_0 = 0 \\ k = \int T \phi dz. \end{cases} \quad (4.40)$$

- ▶ etc.

L'identification de tels systèmes devient un problème central dès lors que la connaissance du phénomène modélisé est trop imprécise pour obtenir un modèle suffisamment fiable par simple analyse physique (une telle analyse est même parfois impossible à réaliser car trop complexe). Le problème (d'identification) considéré consiste à construire des estimations (si possible optimales) de  $H(\partial_t)$  et/ou de  $f$  à partir de données (en général bruitées)  $X^* = X + \eta$  où  $\eta$  désigne un bruit de mesure additif et  $X$  est générée par un procédé expérimental soumis à une entrée connue  $u$ . Un tel problème peut présenter de sérieuses difficultés :

- ▶ du fait du couplage entre l'opérateur  $H(\partial_t)$  et la fonction  $f$  via l'équation (4.36),
- ▶ lorsque l'opérateur  $H(\partial_t)$  est non rationnel, ce qui est en général le cas (par exemple dès lors que des phénomènes distribués sous-jacents sont impliqués),
- ▶ lorsque  $f$  est singulière,
- ▶ lorsque  $f$  est fortement non linéaire (par exemple non dérivable) et qu'aucune information n'est disponible la concernant,
- ▶ lorsqu'il existe des bifurcations dynamiques.

On propose dans ce chapitre diverses méthodes d'identification toutes basées sur la paramétrisation via la représentation diffusive de l'opérateur  $H(\partial_t)$  dont l'identification portera alors sur son  $\gamma$ -symbole.

### 4.3.2 Paramétrisation de l'opérateur $H(\partial_t)$ via la représentation diffusive

Identifier un opérateur consiste à identifier une quantité caractéristique de cet opérateur. Lorsque l'opérateur à identifier est linéaire, une approche commode et assez générale consiste à travailler

dans le domaine fréquentiel où tout opérateur causal peut être défini par son symbole  $H(i\omega)$ , transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle. L'identification de  $H(i\omega)$  peut alors être classiquement réalisée au moyen de techniques de Fourier ; on pourra se référer à [42, 59] pour plus de détails concernant ces techniques, à [45] pour un exemple d'application à l'identification des dynamiques d'un hélicoptère, et à [46] pour un exemple intéressant de méthode optimale basée sur une structure ARMA. Une identification purement fréquentielle présente néanmoins des inconvénients majeurs. En particulier, le symbole  $H(i\omega)$  ainsi identifié est en général mal adapté à la construction de réalisations temporelles efficaces ; ceci est en partie dû au coût numérique excessif des approximations par quadrature résultant de la nature convolutive intrinsèque de l'opérateur qui peut parfois être à mémoire longue [56], ou avoir des composantes de type retard [49]. Un autre inconvénient est que les méthodes fréquentielles ne sont pas compatibles avec l'identification temps-réel (et donc avec la poursuite lorsque le symbole a la propriété d'évoluer lentement). Enfin, et surtout, le nombre d'inconnus à identifier est excessif, ce qui rend le problème d'autant plus sensible aux bruits de mesures.

Via la représentation diffuse il est possible d'utiliser la notion de symbole pour une identification directement en domaine temporel d'un nombre réduit de paramètres inconnus, suffisant pour une bonne précision. Ainsi, au lieu d'identifier le symbole  $H(i\omega)$  de l'opérateur, on identifie son  $\gamma$ -symbole qui intervient de manière linéaire dans la réalisation temporelle de l'opérateur. On a en effet, pour tout opérateur  $H(\partial_t)$   $\gamma$ -diffusif de degré  $n$  :

$$H(\partial_t)X = \langle \mu, \partial_t^n \psi_X \rangle = \langle \mu, \psi_{\partial_t^n X} \rangle, \quad (4.41)$$

où  $\mu$  est le  $\gamma$ -symbole de  $H(\partial_t) \circ \partial_t^{-n}$ , ce qui, en notant  $\mathcal{A}_{\partial_t^n X}$  l'opérateur linéaire défini par :

$$\mathcal{A}_{\partial_t^n X} : \mu \longmapsto \langle \mu, \psi_{\partial_t^n X} \rangle, \quad (4.42)$$

s'écrit :

$$H(\partial_t)X = \mathcal{A}_{\partial_t^n X} \mu. \quad (4.43)$$

Identifier le  $\gamma$ -symbole d'un opérateur présente de nombreux avantages parmi lesquels on peut mentionner en particulier :

- ▶ une formulation entrée-sortie différentielle stable est disponible dès lors que le  $\gamma$ -symbole est bien défini ;
- ▶ des algorithmes récursifs d'identification peuvent aisément être construits, autorisant l'identification temps-réel ou même la poursuite (dans ce dernier cas, le  $\gamma$ -symbole dépend de  $t$ ) ;
- ▶ de même que pour les méthodes purement fréquentielles, aucune distinction qualitative n'est faite entre les opérateurs rationnels ou non rationnels, qui peuvent être identifiés par le même procédé numérique.

Il est également important de rappeler que la  $\gamma$ -réalisation d'un opérateur  $H(\partial_t)$  est locale en temps ; en notant  $A_\mu$  la fonction linéaire définie par :

$$A_\mu : \varphi \longmapsto \langle \mu, \varphi \rangle, \quad (4.44)$$

on a :

$$[H(\partial_t)X](t) = A_\mu([\partial_t^n \psi_X](t, \cdot)). \quad (4.45)$$

De ce fait, tout opérateur dynamique  $H(\partial_t)$  est traité comme n'importe quelle application linéaire  $A$ .

### 4.3.3 Les méthodes proposées

Pour identifier les opérateurs  $H(\partial_t)$  et  $f$  à partir de données potentiellement bruitées  $X_m$  et  $u_m$  :

$$X_m = X + \varepsilon_1, \quad u_m = u + \varepsilon_2, \quad (4.46)$$

où  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont des bruits "suffisamment petits" et  $(X, u)$  est solution de (4.36), on considère le problème :

$$\min_{H(\partial_t), f} \|H(\partial_t)X_m - f(u_m, X_m)\|^2. \quad (4.47)$$

D'après le paragraphe 4.3.2, ce problème s'écrit encore :

$$\min_{\mu, f} \|\mathcal{A}_{\partial_t^n X_m} \mu - f(u_m, X_m)\|^2. \quad (4.48)$$

**Remarque 127** *Excepté lorsque le bruit de mesure est suffisamment régulier (c'est-à-dire suffisamment pauvre à haute fréquence), le calcul numérique direct de  $\mathcal{A}_{\partial_t^n X_m}$  engendrerait en pratique des erreurs excessives du fait que le bruit présent dans  $X_m$  serait amplifié à haute fréquence par l'opération  $\partial_t^n$ . Il convient donc de préfiltrer les données de manière à atténuer suffisamment les composantes haute fréquence du signal mesuré, ce qui, du point de vue du modèle, s'interprète comme la composition des deux membres de (4.36) par un opérateur inversible  $Q(\partial_t)$  convenable, de type "passe-bas"<sup>1</sup>. C'est alors sur le nouveau modèle ainsi obtenu, équivalent au modèle initial du fait que l'opérateur  $Q(\partial_t)$  est inversible, qu'est mise en œuvre la méthode d'identification précédemment décrite. Bien que tout opérateur  $Q(\partial_t)$  de réponse  $Q(i\omega)$  suffisamment décroissante à haute fréquence convienne pour pouvoir mettre en œuvre la méthode, la détermination systématique et optimale du préfiltre  $Q(\partial_t)$  en fonction des caractéristiques statistiques du bruit de mesure est un problème important, qui n'a pas été approfondi dans cette étude dont l'objet était en premier lieu de montrer la pertinence de l'approche. Ce problème fera l'objet de travaux ultérieurs.*

Dans la suite, on introduit plusieurs méthodes d'identification qui sont ensuite détaillées et mise en œuvre sur des exemples dans les chapitres 5, 6 et 7. Ces méthodes font largement appel à la notion de projection orthogonale. Lorsqu'une telle projection n'est pas envisageable, des extensions sont évidemment possibles (méthodes itératives, non linéaires,...).

► **Premier cas :  $f$  est connue et on identifie uniquement l'opérateur  $H(\partial_t)$ .**

Le problème (4.47) s'écrit alors :

$$\min_{\mu} \|\mathcal{A}_{\partial_t^n X_m} \mu - f(u_m, X_m)\|^2. \quad (4.49)$$

Via la représentation diffusive, on se ramène donc à un problème de moindres carrés classique que l'on résout par simple pseudo-inversion, la solution étant donnée par  $\mu^* = \mathcal{A}_{\partial_t^n X_m}^\dagger f(u_m, X_m)$ . Cette première approche a permis de valider la méthode sur un cas simplifié ; les résultats obtenus ont donné lieu à publications [18], [22].

► **Deuxième cas : on identifie simultanément  $H(\partial_t)$  et  $f$ .**

On introduit une paramétrisation de la fonction  $f$  en la décomposant sur une base topologique  $(\mathbf{g}^p \otimes \mathbf{k}^q)_{p,q}$  d'un produit tensoriel d'espaces de Hilbert auquel  $f$  appartient : on a alors  $f = \sum_{p,q} a_{pq} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{k}^q$ . Les paramètres à identifier sont donc le  $\gamma$ -symbole  $\mu$  et les coefficients  $a_{pq}$  ; le problème (4.47) s'écrit alors :

$$\min_{(\mu, a_i)} \|\mathcal{G}_{u_m, X_m}(\mu, a) - v_m\|^2, \quad (4.50)$$

où  $v_m$  est une quantité connue déduite des données  $X_m$  et  $u_m$ , avec  $a = (a_{pq})$  et  $\mathcal{G}_{u_m, X_m}$  un opérateur linéaire défini sur  $(\mu, a)$  construit à partir des données. La solution s'obtient là encore par simple pseudo-inversion, cette fois-ci de l'opérateur  $\mathcal{G}_{u_m, X_m}$ . L'identification de  $f$  étant ici faite simultanément à celle de  $H(\partial_t)$  il est impossible d'adapter sa paramétrisation en fonction de son allure "générale". Il est donc souvent nécessaire de prendre un nombre de  $a_{pq}$  assez grand, ce qui rend l'estimation sensible aux bruits. Les résultats obtenus sont néanmoins bons et ont été publiés dans [19].

<sup>1</sup>A noter que cet opérateur peut être non causal, lorsque l'identification n'a pas à être mise en œuvre en ligne.

► *Troisième cas : on identifie séparément  $H(\partial_t)$  et  $f$ .*

On suppose ici pour simplifier que  $f$  ne dépend que de  $X$ . Afin de découpler l'identification de  $f$  de celle de  $H(\partial_t)$ , on exploite la propriété caractéristique des opérateurs statiques, à savoir :  $f(X)(t) = f(Y)(\tau)$  si  $X(t) = Y(\tau)$ . On propose pour cela une transformation opératorielle de l'équation (4.36), basée sur l'application de l'opérateur de différences  $D$  défini par :

$$D(Y) : (t, \tau) \rightarrow D(Y)(t, \tau) = Y(t) - Y(\tau). \quad (4.51)$$

Cet opérateur permet de supprimer le terme non linéaire  $f$  de l'équation, sur le sous-ensemble  $\{(t, \tau) \in [0, T] \times [0, T] \text{ tels que } X(t) = X(\tau)\} \subset [0, T] \times [0, T]$ . On peut ainsi identifier l'opérateur  $H(\partial_t)$  seul (comme dans le premier cas), et ensuite s'intéresser à l'identification de la fonction  $f$ . Les résultats obtenus ont été publiés dans [21] et [20]; une nouvelle publication est en cours de rédaction.

#### 4.3.4 Sur l'intérêt de l'inversion $\gamma$ -symbolique en identification

L'inversion  $\gamma$ -symbolique étudiée dans le chapitre 3 est une opération très utile voire parfois nécessaire en identification. On notera par exemple qu'après identification (via une des méthodes décrites précédemment) d'un modèle de Volterra de la forme (4.36), la réalisation d'état diffusive du modèle identifié, utile pour la simulation, l'analyse, le contrôle, etc., fait intervenir l'inverse du  $\gamma$ -symbole identifié. En effet, soit  $\mu^*$  (respectivement  $f^*$ ) l'estimation du  $\gamma$ -symbole de  $H(\partial_t)$  (respectivement de la fonction  $f$ ). Le modèle identifié s'écrit alors :

$$H^*(\partial_t)X = f^*(u, X), \quad (4.52)$$

où  $H^*(\partial_t)$  est l'opérateur de  $\gamma$ -symbole  $\mu^*$ . Le modèle (4.52) s'écrit encore  $X = H^*(\partial_t)^{-1}f^*(u, X)$ ; sa réalisation d'état diffusive est donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + f^*(u, X), \psi(0, \xi) = 0 \\ X = \langle (\mu^*)^{-1}, \psi \rangle. \end{cases} \quad (4.53)$$

D'autres exemples d'utilisation de l'inversion  $\gamma$ -symbolique en identification sont donnés dans le paragraphe 5, ainsi que dans l'exemple formel ci-dessous.

**Exemple 128** *On considère le modèle :*

$$\begin{cases} H(\partial_t)X = AX + Bu \\ y = CX, \end{cases} \quad (4.54)$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont connus,  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  est inconnu, et  $H(\partial_t)$  est un opérateur convolutif causal. On souhaite identifier  $H(\partial_t)$  à partir des données  $u$  et  $y$ , et simuler le modèle ainsi identifié.

La quantité  $X$  étant inconnue, on ne peut utiliser la formulation  $y = CH(\partial_t)^{-1}(AX + Bu)$  déduite de (4.54) pour identifier  $H(\partial_t)$ . On pose donc :

$$\tilde{H}(\partial_t) := H(\partial_t) - A, \quad (4.55)$$

et on note  $\tilde{\mu}$  son  $\gamma$ -symbole. On a  $X = \tilde{H}(\partial_t)^{-1}Bu$ , d'où :

$$y = C\tilde{H}(\partial_t)^{-1}Bu = C\tilde{\mu}^{-1} \cdot \psi_{Bu} = \mathcal{A}\tilde{\mu}^{-1}, \quad (4.56)$$

avec  $\mathcal{A} : \mu \mapsto C\mu \cdot \psi_{Bu}$  opérateur linéaire. Via cette formulation dans laquelle  $X$  n'intervient pas, on peut identifier, par pseudo-inversion de  $\mathcal{A}$ , le  $\gamma$ -symbole  $\tilde{\mu}^{-1} \in \Sigma_\gamma^{n \times n}$  de  $\tilde{H}(\partial_t)^{-1}$  :

$$\tilde{\mu}^{-1} = \mathcal{A}^\dagger y. \quad (4.57)$$

Le  $\gamma$ -symbole  $\mu$  de  $H(\partial_t)$  est alors donné, d'après (4.55), par :

$$\mu = \tilde{\mu} + A\iota, \quad (4.58)$$

le  $\gamma$ -symbole  $\tilde{\mu} \in \Sigma_\gamma^{n \times n}$  de  $\tilde{H}(\partial_t)$  étant ensuite obtenu par inversion numérique de  $\tilde{\mu}^{-1}$ . Enfin, la simulation de (4.54) est obtenue via la réalisation d'état diffusive :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + AX + Bu, \psi(0, \xi) = 0 \\ X = \mu^{-1} \cdot \psi \\ y = CX, \end{cases} \quad (4.59)$$

qui nécessite cette fois l'inversion  $\gamma$ -symbolique de  $\mu$ .

# Chapitre 5

## Identification d'un opérateur $H(\partial_t)$ via son $\gamma$ -symbole

La méthode d'identification proposée est basée sur une paramétrisation adaptée de  $H(\partial_t)$  via son  $\gamma$ -symbole. Elle a été précédemment mise en oeuvre, dans une version simplifiée, sur des problèmes variés [56], [27].

### 5.1 Présentation de la méthode

#### 5.1.1 Principe

On s'intéresse au problème d'identification d'un opérateur intégral (en général matriciel)  $\mathcal{H} = H(\partial_t)$  :

$$X \longmapsto y = H(\partial_t)X, \quad (5.1)$$

que l'on suppose  $\gamma$ -diffusif au sens strict dans un premier temps. En notant  $\mu$  le  $\gamma$ -symbole de  $\mathcal{H}$ , on a :

$$y = \mathcal{H}X = \mu \cdot \psi_X, \quad (5.2)$$

où  $\psi_X = \mathfrak{Rd}_\gamma X$ , ce qui, en notant  $\mathcal{A}_X$  l'opérateur linéaire défini par :

$$\mathcal{A}_X : \mu \longmapsto \mu \cdot \psi_X, \quad (5.3)$$

s'écrit

$$y = \mathcal{A}_X \mu. \quad (5.4)$$

On considère des mesures (directes ou indirectes)  $y_m$  et  $X_m$  de la sortie  $y$  et de l'entrée  $X$  associée ; le problème consiste alors à identifier  $\mu$  à partir de ces données.

On recherchera la solution  $\mu$  dans un sous-espace de Hilbert noté  $\mathcal{E}$  de l'espace  $\Delta'_\gamma$ , et on notera  $\mu_0$  la valeur exacte (mais inconnue) de  $\mu$  en supposant que celle-ci est dans  $\mathcal{E}$  ; elle vérifie :

$$y = \mathcal{A}_X \mu_0. \quad (5.5)$$

#### Cas où $X$ est connue et $y$ mesurée

Dans un premier temps on suppose  $X$  connu exactement, c'est à dire  $X_m = X$ . On considère alors le problème :

$$\min_{\mu \in \mathcal{E}} \|\mathcal{A}_X \mu - y_m\|_{\mathcal{F}}^2, \quad (5.6)$$

où  $\mathcal{F}$  est un espace de Hilbert à préciser. On prendra ici  $\mathcal{F} := L^2(0; T)$  avec  $T > 0$ , et la norme associée :

$$\|f\|_{\mathcal{F}} = \left( \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.7)$$

La solution de ce problème est classiquement donnée par :

$$\mu^* = \mathcal{A}_X^\dagger y_m, \quad (5.8)$$

où  $\mathcal{A}_X^\dagger$  désigne le pseudo-inverse de  $\mathcal{A}_X$  [6]. Au sens de la norme hilbertienne de  $\mathcal{F}$ , l'estimateur  $\mu^*$  de  $\mu_0$  est optimal. Ce type d'identification a été utilisé avec succès par exemple dans [7].

### Cas où $y$ est connue et $X$ mesurée

On suppose à présent  $y$  connue exactement et on considère une mesure  $X_m$  de  $X$ .

► Une première manière d'identifier  $\mu$  consiste à appliquer la méthode précédente à l'opérateur  $\mathcal{H}^{-1}$  afin d'obtenir une approximation de  $\mu_0^{-1}$  qu'il suffit ensuite d'inverser numériquement (voir chapitre 3). En effet, on a :

$$X = \mathcal{H}^{-1}y = \mathcal{A}_y \mu^{-1}, \quad (5.9)$$

d'où l'approximation optimale de l'inverse de  $\mu_0$  suivante :

$$(\mu^{-1})^* = \mathcal{A}_y^\dagger X_m. \quad (5.10)$$

► Il est également possible d'identifier directement le  $\gamma$ -symbole  $\mu$  de  $\mathcal{H}$  par résolution du problème :

$$\min_{\mu \in \mathcal{E}} \|\mathcal{A}_{X_m} \mu - y\|_{\mathcal{F}}^2. \quad (5.11)$$

On obtient ainsi l'approximation de  $\mu_0$  :

$$\mu^* = \mathcal{A}_{X_m}^\dagger y. \quad (5.12)$$

On note que cette formulation nécessite le calcul d'un nouveau  $\mathcal{A}_{X_m}^\dagger$  à chaque nouvelle mesure  $X_m$  de  $X$ .

### Cas où $y$ et $X$ sont mesurées

Il faut également considérer le cas où  $X$  et  $y$  sont mesurées (avec bruit de mesure). Une estimation  $\mu^*$  de  $\mu_0$  est alors donnée par résolution du problème :

$$\min_{\mu \in \mathcal{E}} \|\mathcal{A}_{X_m} \mu - y_m\|_{\mathcal{F}}^2, \quad (5.13)$$

de solution :

$$\mu^* = \mathcal{A}_{X_m}^\dagger y_m. \quad (5.14)$$

**Exemple 129** On considère ici un modèle de Volterra de la forme :

$$H(\partial_t)X = f(X, u) + v, \quad (5.15)$$

où :

- $f$  est une fonction non linéaire (opérateur statique) supposée connue,
- $H(\partial_t)$  est un opérateur dynamique linéaire, de fonction de transfert  $H$ ,  $\gamma$ -diffusif au sens strict et de  $\gamma$ -symbole  $\mu \in \Delta'_\gamma$ ,
- $X$ ,  $u$  et  $v$  sont des trajectoires de la variable  $t \in [0, T]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $X_m$  un mesure de  $X$  et  $(u, v)$  l'entrée associée. Le problème consiste alors, à partir des données  $(u, v, X_m)$  et étant donnée la fonction  $f$ , à identifier l'opérateur  $H(\partial_t)$ .

Pour cela, on réécrit le modèle (5.15) sous la forme :

$$\mathcal{A}_X \mu = f(X, u) + v, \quad (5.16)$$

qui en posant :

$$y = f(X, u) + v, \quad (5.17)$$

est de la forme (5.4). En posant de plus  $y_m = f(X_m, u) + v$ , on se ramène au problème (5.13).



**Remarque 130** Une formulation récursive de (5.14) peut être établie sous la forme (voir [27]) :

$$\mu_t^* = \mu_{t-\Delta t}^* + K_{t-\Delta t}(y_m - \mathcal{A}_{X_m} \mu_{t-\Delta t}^*)|_{[0,t]}; \quad (5.18)$$

un telle formulation permet une identification temps-réel ou même une poursuite de  $\mu$  dans le cas d'un opérateur  $\mathcal{H} = H(t, \partial_t)$  variant lentement dans le temps.

## 5.1.2 Extensions

La méthode d'identification proposée peut s'étendre au cas des opérateurs  $\gamma$ -diffusifs au sens large et au cas des trajectoires multiples comme expliqué ci-dessous.

### Cas des opérateurs $\gamma$ -diffusifs au sens large

L'extension au cas où  $H(\partial_t)$  est  $\gamma$ -diffusif au sens large de degré  $n$  se fait de manière naturelle. On a :

$$y = (\delta^n \#_\gamma \mu) \cdot \psi_{\partial_t^n X} = \mathcal{A}_{\partial_t^n X} (\delta^n \#_\gamma \mu). \quad (5.19)$$

A partir de ce modèle, on peut identifier le  $\gamma$ -symbole  $\delta^n \#_\gamma \mu$  de l'opérateur  $\partial_t^{-n} \circ \mathcal{H}$  de manière similaire au cas où  $\mathcal{H}$  est  $\gamma$ -diffusif au sens strict. On réalise ensuite l'opérateur  $\mathcal{H}$  à partir de l'estimation  $(\delta^n \#_\gamma \mu)^*$  de  $\delta^n \#_\gamma \mu$  comme indiqué au paragraphe 1.6.2.

### Cas des trajectoires multiples

Comme ce sera le cas la plupart du temps en pratique, on considère à présent un ensemble de trajectoires d'entrée  $X^j$ ,  $j = 1 : J$  et les sorties  $y^j = H(\partial_t)X^j$  associées. Soient  $y_m^j$  et  $X_m^j$  des mesures de  $y^j$  et  $X^j$ . En redéfinissant les variables  $y$  et  $X$  de la manière suivante :

$$y = (y^1, \dots, y^J)^T, \quad X = (X^1, \dots, X^J)^T, \quad (5.20)$$

on se ramène au modèle d'identification (5.4) avec :

$$\mathcal{A}_X : \mu \mapsto \begin{bmatrix} \mu \cdot \psi_{X^1} \\ \vdots \\ \mu \cdot \psi_{X^J} \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

En notant alors :

$$y_m = (y_m^1, \dots, y_m^J)^T \text{ et } X_m = (X_m^1, \dots, X_m^J)^T, \quad (5.22)$$

le problème d'identification de  $\mu$  peut être résolu de la même manière que dans le cas d'une trajectoire unique.

### 5.1.3 Analyse de l'estimateur

L'estimateur  $\mu^*$  de  $\mu_0$  de la méthode d'identification proposée est donné par :

$$\mu^* = \mathcal{A}_{X_m}^\dagger y_m. \quad (5.23)$$

Lorsque les données ne sont pas bruitées et que le modèle est exact, cet estimateur est lui même exact puisque l'on a :

$$\mathcal{A}_X \mu_0 = y, \quad (5.24)$$

et donc :

$$\mu_0 = \mathcal{A}_X^\dagger y. \quad (5.25)$$

Du fait de la dépendance de  $\mathcal{A}_{X_m}^\dagger$  en le bruit de mesure, on note également que l'estimateur  $\mu^*$  est *biaisé*.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse d'une part à la convergence de l'estimateur, et d'autre part au biais d'identification.

### Hypothèse sur les bruits de mesure

On suppose ici que les bruits de mesure sont additifs et de moyenne nulle, c'est à dire que l'on a :

$$\begin{aligned} X_m &= X + \eta \text{ avec } \mathbb{E}[\eta] = 0, \\ y_m &= y + \varepsilon \text{ avec } \mathbb{E}[\varepsilon] = 0. \end{aligned}$$

Cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée en pratique. Si l'on reprend l'exemple 129 du modèle de Volterra et que l'on suppose que le bruit de mesure de  $X$  est additif et de moyenne nulle, c'est à dire que :

$$X_m = X + \eta \text{ avec } \mathbb{E}[\eta] = 0, \quad (5.26)$$

on a :

$$y_m = f(X + \eta, u) + v. \quad (5.27)$$

En supposant la fonction  $f$  Fréchet différentiable par rapport à la première variable, d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe  $\beta \in [0, 1]$  tel que :

$$f(X + \eta, u) = f(X, u) + \partial_1 f(X + \beta\eta, u) \cdot \eta. \quad (5.28)$$

En posant :

$$\varepsilon = \partial_1 f(X + \beta\eta, u) \cdot \eta, \quad (5.29)$$

on retrouve bien une quantité  $y_m$  de la forme  $y_m = y + \varepsilon$ , mais rien n'impose a priori que  $\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$ .

Cela ne pose cependant pas de réel problème pour la suite. En effet, l'hypothèse  $\mathbb{E}[\varepsilon] = \mathbb{E}[\eta] = 0$  n'est pas utilisée pour le résultat de convergence. L'étude du biais, essentiellement destinée à exhiber le biais d'identification, pourra quant à elle être adaptée aisément.

### Convergence

On a le résultat suivant :

**Proposition 131** *Si la fonction à valeur opératorielle  $X \mapsto \mathcal{A}_X^\dagger$  est localement Fréchet différentiable, avec  $\mathcal{A}_X^{\dagger'}$  continue par rapport à  $X$ , alors  $\mu^* := \mathcal{A}_{X_m}^\dagger y_m$  est un estimateur convergent de  $\mu_0$ , c'est à dire :*

$$\lim_{\eta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} \mu^* = \mu_0. \quad (5.30)$$

**Preuve.** (indications) La fonction  $X \mapsto \mathcal{A}_X^\dagger$  étant différentiable, d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe  $\beta \in [0, 1]$  tel que :

$$\mathcal{A}_{X_m}^\dagger = \mathcal{A}_{X+\eta}^\dagger = \mathcal{A}_X^\dagger + \mathcal{A}_{X+\beta\eta}^{\dagger'} \cdot \eta. \quad (5.31)$$

On obtient ainsi :

$$\mu^* = \mathcal{A}_{X_m}^\dagger y_m = \left[ \mathcal{A}_X^\dagger + \mathcal{A}_{X+\beta\eta}^{\dagger'} \cdot \eta \right] (y + \varepsilon) \quad (5.32)$$

$$= \mathcal{A}_X^\dagger y + \left( \mathcal{A}_{X+\beta\eta}^{\dagger'} \cdot \eta \right) y - \mathcal{A}_X^\dagger \varepsilon - \left( \mathcal{A}_{X+\beta\eta}^{\dagger'} \cdot \eta \right) \varepsilon. \quad (5.33)$$

Puisque  $\mathcal{A}_X^\dagger$  et  $\mathcal{A}_X^{\dagger'}$  sont des opérateurs linéaires continus et que la fonction à valeur opératorielle  $X \mapsto \mathcal{A}_X^{\dagger'}$  est continue, il s'ensuit :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} \left[ \left( \mathcal{A}_{X+\beta\eta}^{\dagger'} \cdot \eta \right) y - \mathcal{A}_X^\dagger \varepsilon - \left( \mathcal{A}_{X+\beta\eta}^{\dagger'} \cdot \eta \right) \varepsilon \right] = 0; \quad (5.34)$$

grâce à (5.25), on obtient alors :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}_{X_m}^\dagger y_m = \mathcal{A}_X^\dagger y = \mu_0. \quad (5.35)$$

■

**Remarque 132**  $X$  et  $\eta$  étant des objets fonctionnels, la différentiabilité s'entend au sens d'un espace de Banach (de dimension infinie) sous-jacent non spécifié ici.

**Remarque 133** Dans le cas de l'exemple 129, les bruits  $\varepsilon$  et  $\eta$  ne sont pas indépendants. Le résultat précédent reste cependant valable du fait que  $\varepsilon \rightarrow 0$  lorsque  $\eta \rightarrow 0$ .

Les hypothèses de cette proposition, à savoir la Fréchet-différentiabilité de  $X \mapsto \mathcal{A}_X^\dagger$  et la continuité (par rapport à  $X$ ) de  $\mathcal{A}_X^\dagger$  sont nécessaires ; l'inversion matricielle étant une opération différentiable, cela suffit à assurer la différentiabilité continue des opérateurs  $\mathcal{A}_X$  et  $\mathcal{A}_X^*$ . En pratique, ces hypothèses seront satisfaites (au sens des topologies usuelles) si tous les éléments de  $\mathcal{A}_X$  sont suffisamment réguliers par rapport à  $t$ , c'est à dire si leur contenus fréquentiels sont décroissants aux hautes fréquences, ce qui est le cas des opérateurs  $\gamma$ -diffusifs au sens strict.

### Biais d'identification [14]

Le fait que  $\mathcal{A}_{X_m}^\dagger$  dépende du bruit de mesure implique que l'estimateur  $\mu^*$  de  $\mu_0$  est biaisé. En effet, si l'on suppose que  $X \mapsto \mathcal{A}_X^\dagger$  est deux fois Fréchet-différentiable avec  $\mathcal{A}_X^{\dagger\prime\prime}$  continue par rapport à  $X$ , d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe  $\beta \in [0, 1]$  tel que :

$$\mathcal{A}_{X_m}^\dagger = \mathcal{A}_{X+\eta}^\dagger = \mathcal{A}_X^\dagger + \mathcal{A}_X^{\dagger\prime} \cdot \eta + \frac{1}{2} \mathcal{A}_{X+\beta\eta}^{\dagger\prime\prime} \cdot (\eta, \eta). \quad (5.36)$$

On obtient alors :

$$\mu^* = \mu_0 + \left( \mathcal{A}_X^{\dagger\prime} \cdot \eta \right) y + \frac{1}{2} \left( \mathcal{A}_{X+\beta\eta}^{\dagger\prime\prime} \cdot (\eta, \eta) \right) y + \mathcal{A}_X^\dagger \varepsilon + \left( \mathcal{A}_X^{\dagger\prime} \cdot \eta \right) \varepsilon + \frac{1}{2} \left( \mathcal{A}_{X+\beta\eta}^{\dagger\prime\prime} \cdot (\eta, \eta) \right) \varepsilon. \quad (5.37)$$

Du point de vue probabiliste, grâce aux propriétés  $\mathbb{E}[\eta] = 0$  et  $\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$ , on a :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \mathcal{A}_X^{\dagger\prime} \cdot \eta \right) y \right] = \left( \mathcal{A}_X^{\dagger\prime} \cdot \mathbb{E}[\eta] \right) y = 0 \quad (5.38)$$

$$\text{et } \mathbb{E} \left[ \mathcal{A}_X^\dagger \varepsilon \right] = \mathcal{A}_X^\dagger \mathbb{E}[\varepsilon] = 0. \quad (5.39)$$

En notant :

$$\varepsilon_{\mu^*} := \frac{1}{2} \left( \mathcal{A}_{X+\beta\eta}^{\dagger\prime\prime} \cdot (\eta, \eta) \right) y + \left( \mathcal{A}_X^{\dagger\prime} \cdot \eta \right) \varepsilon + \frac{1}{2} \left( \mathcal{A}_{X+\beta\eta}^{\dagger\prime\prime} \cdot (\eta, \eta) \right) \varepsilon, \quad (5.40)$$

on obtient alors, à partir de (5.37) :

$$\mathbb{E}[\mu^*] = \mu_0 + \mathbb{E}[\varepsilon_{\mu^*}]. \quad (5.41)$$

Puisque des termes quadratiques en  $\eta$  apparaissent dans l'expression de  $\varepsilon_{\mu^*}$ , on a en général  $\mathbb{E}[\varepsilon_{\mu^*}] \neq 0$  et donc l'estimateur  $\mu^*$  est biaisé. Sous des hypothèses raisonnables, on peut cependant s'attendre à ce que le biais  $\varepsilon_{\mu^*}$  satisfasse la propriété  $\lim_{\eta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[|\varepsilon_{\mu^*}|] = 0$ , ce qui signifie en pratique que le biais d'identification peut être négligé lorsque le bruit de mesure est suffisamment petit.

Pour le cas où le bruit est grand (suffisamment grand pour que la part d'erreur d'identification due au biais soit supérieure à celle due au bruit), on présente au paragraphe 5.1.3 une technique de réduction de biais simple, valable lorsque certaines caractéristiques statistiques du bruit de mesure sont connues.

### Réduction du biais

On présente ici une méthode empirique simple pour améliorer la précision de l'identification en estimant le biais de  $\mu^*$ . Dans ce but, on fait les hypothèses suivantes :

1. le biais dépend continûment des paramètres à identifier ;
2. dans l'expression de l'erreur d'identification  $\mu_0 - \mu^*$ , le terme de biais  $\varepsilon_{\mu^*}$  est dominant ;

3. le biais  $\varepsilon_{\mu^*}$  a une variance petite comparée à celle de l'erreur d'identification  $\mu_0 - \mu^*$  ; en d'autres mots, le biais dépend peu de la trajectoire particulière du bruit de mesure (il dépend essentiellement des caractéristiques statistiques du bruit)

L'hypothèse 1) est physiquement raisonnable et même nécessaire pour avoir une identification robuste. L'hypothèse 2) peut apparaître moins évidente ; notons cependant que si elle n'est pas satisfaite, le processus décrit dans la suite sera neutre : aucune amélioration ne sera obtenue et l'erreur d'identification n'augmentera pas non plus significativement. Finalement, l'hypothèse 3) implique de subtiles propriétés ergodiques sous-jacentes difficiles à établir mais qui sont la plupart satisfaites en pratiques. Sur la base de ces trois hypothèses, il est possible d'estimer le biais d'identification que l'on soustraira ensuite au paramètre identifié  $\mu^*$ . Une telle méthode de réduction de biais a été utilisée avec succès pour un problème d'identification de modèle de micro-miroirs ayant donné lieu à publication [14].

Grâce à la propriété 2), la relation entre le  $\gamma$ -symbole exact  $\mu_0$ , l'identifié  $\mu^*$  et le biais associé  $\varepsilon_{\mu^*}$  peut être réduite à :

$$\mu^* \simeq \mu_0 + \varepsilon_{\mu^*}. \quad (5.42)$$

Considérons à présent un jeu de données *simulées numériquement* à partir du modèle identifié (défini par  $\mu^*$ ), avec le même niveau de bruit que les données mesurées (avec lesquelles on a utilisé le processus d'identification). On identifie alors le  $\gamma$ -symbole à partir de ce jeu de données simulées : le nouveau  $\gamma$ -symbole identifié est noté  $\mu_1$ .

Puis, grâce à l'hypothèse 2), on peut considérer l'estimation suivant du biais de  $\mu_1$  (en fait l'opposé de l'erreur d'identification) :

$$\varepsilon_{\mu_1}^* := \mu_1 - \mu^* \quad (5.43)$$

qui, grâce à l'hypothèse 1) et 3), sera proche de la valeur inconnue  $\varepsilon_{\mu^*}$  si le bruit est suffisamment petit. On peut ensuite s'attendre à améliorer l'identification du  $\gamma$ -symbole en considérant :

$$\mu_1^* := \mu^* - \varepsilon_{\mu_1}^* = 2\mu^* - \mu_1. \quad (5.44)$$

Ce processus peut être réitéré à partir de la nouvelle valeur  $\mu_1^*$ , et cela jusqu'à ce que  $\varepsilon_{\mu_n}$  se stabilise autour de 0 : dans ce cas, on aura  $\mathbb{E}(\mu_n^*) \rightarrow \mu_0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Remarque 134** *Puisque les modèles mathématique utilisé pour l'identification ne décrivent en général pas tous les phénomènes complexes présents dans les situations physiques, dans la plupart des cas, l'erreur de biais peut être noyé dans des erreurs plus grandes résultant de telles imperfections "structurelles"<sup>1</sup> du modèle. Dans de tels cas, la réduction de biais peut s'avérer inutile.*

## 5.2 Du point de vue numérique

En pratique, on a accès à  $J$  jeux de données discrètes  $\{y_m^{j,k}, X_m^{j,k}\}_{k=0:K}$  où  $y_m^{j,k}$  et  $X_m^{j,k}$  sont les valeurs des trajectoires  $y_m^j$  et  $X_m^j$ , mesures respectives de la sortie du système  $y^j$  et de l'entrée associée  $X^j$ , au temps  $t_k$ , avec  $t_k = t_{k-1} + \Delta t_k$ ,  $k = 1 : K$ . Le problème de minimisation (5.13) que l'on résout pour identifier  $H(\partial_t)$  dépend du choix du contour  $\gamma$  et de la discrétisation de la variable  $\xi$ . Une fois ces paramètres fixés, on discrétise le problème d'une part en la variable  $\xi$  et d'autre part en  $t$  avant de le résoudre numériquement.

### Choix du contour $\gamma$

L'opérateur  $H(\partial_t)$  que l'on identifie est supposé  $\gamma$ -diffusif, ce qui implique l'analyticité de  $H$  dans  $\Omega_\gamma^+$ . L'ensemble des singularités de  $H$  doit donc être à l'intérieur du domaine  $\overline{\Omega_\gamma^-}$  délimité par

<sup>1</sup>Notons que lorsque le modèle présente des "imperfections structurelles",  $\mu^* \neq \mu_0$  même avec des mesures non bruitées.

$\gamma$ . En identification, l'opérateur  $H(\partial_t)$  est inconnu et on ne sait a priori pas où sont les singularités de son Laplace-symbole  $H$ . On choisit donc un contour  $\gamma$  tel que le domaine  $\overline{\Omega_\gamma}$  soit suffisamment grand, de manière à englober les singularités de  $H$ . En pratique, on prendra souvent un contour de type secteur  $\gamma(\xi) = |\xi| e^{i \operatorname{sign}(\xi)(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$ , avec  $\alpha$  suffisamment "petit". On rappelle cependant (voir paragraphe 2.2.1) que plus le contour  $\gamma$  considéré est proche de l'axe  $i\mathbb{R}$ , plus la discrétisation en  $\xi$  doit être fine, donc numériquement coûteuse. Si l'identification est bonne, on peut ensuite réitérer le processus en prenant un angle  $\alpha$  plus grand ( $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ). Notons qu'en pratique, des informations sur l'opérateur  $H(\partial_t)$  à identifier sont souvent disponibles, ce qui peut guider quant au choix du contour  $\gamma$ .

### Discrétisation en $\xi$

Le modèle d'identification en temps continu utilisé est le suivant :

$$y^j(t) = [H(\partial_t)X^j](t) = [\mathcal{A}_{X^j} \mu](t), \quad j = 1 : J. \quad (5.45)$$

En considérant une discrétisation  $\{\xi_l\}_{l=1:L}$  de la variable  $\xi$ , et en utilisant une approximation de  $\mu$  telle que décrite au paragraphe 2.2, on a :

$$[\mathcal{A}_{X^j} \mu](t) = \sum_{l=1}^L \mu_l \psi_{X^j}(t, \xi_l), \quad (5.46)$$

ce qui nous amène au problème de minimisation discrétisé en  $\xi$  :

$$\min_{\mu \in \mathbb{C}^L} \sum_{j=1}^J \int_0^T \left| \sum_{l=1}^L \mu_l \psi_{X_m^j}(t, \xi_l) - y_m^j(t) \right|^2 dt. \quad (5.47)$$

Des indications quant au choix de la discrétisation en  $\xi$  sont données au paragraphe 2.2.1. Notons cependant qu'à partir des données discrètes  $\{y_m^{j,k}, X_m^{j,k}\}_{k=0:K}$ , on ne peut identifier la réponse fréquentielle  $H(i\omega)$  que sur la bande  $[\frac{2\pi}{\Delta t}; \frac{2\pi}{2t_K}]$ , où  $\Delta t = \max(\Delta t_k)$ . En conséquence, la bande  $[\xi_1; \xi_L]$  couverte par la discrétisation en  $\xi$  sera choisie de telle sorte que<sup>2</sup>  $[\frac{2\pi}{\Delta t}; \frac{2\pi}{2t_K}] \subset |\gamma([\xi_1; \xi_L])|$ .

### Discrétisation en temps

On propose ensuite deux manières de discrétiser en temps : soit on discrétise la solution une fois le problème résolu, soit on discrétise le problème avant de le résoudre.

► *Résolution du problème (5.47) et discrétisation de la solution :*

Le problème (5.47) peut s'écrire sous la forme :

$$\min_{\mu \in \mathbb{C}^L} \|A_{X_m} \mu - y_m\|_{(L^2(0;T))^J}^2, \quad (5.48)$$

avec

$$A_{X_m} = (\psi_{X_m^j}(\cdot, \xi_l))_{j=1:J, l=1:L}, \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_L)^T \quad \text{et} \quad y_m = (y_m^1, \dots, y_m^J)^T, \quad (5.49)$$

et où la norme sur  $(L^2(0;T))^J$  est donnée par :

$$\|(f^1, \dots, f^J)^T\|_{(L^2(0;T))^J} = \left( \int_0^T \sum_{j=1}^J |f^j(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.50)$$

<sup>2</sup>La quantité  $|\gamma(\xi)|$  est comparable à une fréquence. Dans le cas d'un contour de type secteur ou de la forme  $\gamma(\xi) = -|\xi|$ , on a  $|\gamma(\xi)| = |\xi|$ .

La solution du problème (5.48) est alors donnée par :

$$\mu^* = \mathbf{A}_m^{-1} \mathbf{b}_m, \quad (5.51)$$

avec

$$\mathbf{A}_m = \left( \int_0^T \sum_j \overline{\psi_{X_m^j}(t, \xi_l)} \psi_{X_m^j}(t, \xi_m) dt \right)_{l,m=1:L} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_m = \left( \int_0^T \sum_j \overline{\psi_{X_m^j}(t, \xi_l)} y_m^j(t) dt \right)_{l=1:L}. \quad (5.52)$$

Il ne reste ensuite plus qu'à discrétiser les intégrales pour calculer numériquement les éléments de la matrice  $\mathbf{A}_m$  et du vecteur  $\mathbf{b}_m$ , en utilisant les données  $\{y_m^{j,k}, X_m^{j,k}\}$  disponibles. Pour cela plusieurs méthodes sont possibles : méthode des rectangles, des trapèzes, utilisation des splines pour estimer les trajectoires  $y_m^j$  et  $X_m^j$ , etc.

► *Discrétisation du problème (5.47) et résolution :*

Après quadrature de l'intégrale (quadrature adaptée à la discrétisation  $\{t_k\}_{k=0:K}$  des données), le problème de minimisation (5.47) est approché par :

$$\min_{\mu \in \mathbb{C}^L} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left| \sum_{l=1}^L \mu_l \psi_{X_m^j}^{l,k} - y_m^{j,k} \right|^2 \Delta t_k, \quad (5.53)$$

où  $\psi_{X_m^j}^{l,k}$  est une approximation de  $\psi_{X_m^j}(t_k, \xi_l)$  obtenue par intégration numérique de l'équation d'état de la réalisation diffusive de  $H(\partial_t)$  (voir schéma numérique du paragraphe 2.2.4):

$$\psi_{X_m^j}^{l,k} = e^{\gamma(\xi_l) \Delta t_k} \psi_{X_m^j}^{l,k-1} + \frac{e^{\gamma(\xi_l) \Delta t_k} - 1}{\gamma(\xi_l)} X_m^{j,k-1}, \quad \psi_{X_m^j}^{l,0} = 0, \quad k = 1 : K, \quad l = 1 : L. \quad (5.54)$$

Le problème approché s'écrit encore :

$$\min_{\mu \in \mathbb{C}^L} \|A_{X_m} \mu - \mathbf{y}_m\|_{\mathbb{C}^{J \times K}}^2, \quad (5.55)$$

avec  $\|z\|_{\mathbb{C}^{J \times K}}^2 = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K |c_{j,k}|^2$  et :

$$A_{X_m} = \begin{bmatrix} A_{X_m^1} \\ \vdots \\ A_{X_m^J} \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_m^1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m^J \end{bmatrix}, \quad (5.56)$$

où :

$$A_{X_m^j} = (\psi_{X_m^j}^{l,k})_{k=1:K, l=1:L} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}_m^j = (y_m^{j,1}, \dots, y_m^{j,K})^T. \quad (5.57)$$

Sa solution est donnée par :

$$\mu^* = (A_{X_m}^* D A_{X_m})^{-1} A_{X_m}^* D \mathbf{y}_m, \quad (5.58)$$

avec

$$D = \begin{bmatrix} \Delta t_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \Delta t_K \end{bmatrix}. \quad (5.59)$$

**Remarque 135** La solution (5.58) est la même que celle que l'on aurait obtenue avec la première méthode, en utilisant une méthode des rectangles pour le calcul de la matrice  $\mathbf{A}_m$  et du vecteur  $\mathbf{b}_m$ .

**Remarque 136** Dans le cas où l'opérateur  $H(\partial_t)$  est  $\gamma$ -diffusif au sens large, la matrice  $\mathbf{A}_m$  à pseudo-inverser doit être adaptée.

**Remarque 137** Dans le cas d'un problème mal conditionné, on peut ajouter des termes de pénalisation sur  $\mu$ ,  $\mu'$  ou  $H'$ , de manière à limiter l'amplitude et les oscillations de  $\mu^*$  et/ou de  $H^*$ . Le problème à résoudre s'écrit alors :

$$\min_{\mu \in \mathcal{E}} \|\mathcal{A}_{X_m} \mu - y_m\|_{\mathcal{F}}^2 + \epsilon_1 \|\mu\|^2 + \epsilon_2 \|\mu'\|^2 + \epsilon_3 \|H'\|^2, \quad (5.60)$$

$\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  et  $\epsilon_3$  étant des paramètres à adapter selon le problème considéré.

## 5.3 Application numérique

### 5.3.1 Validation de la méthode sur des exemples "test"

On cherche dans un premier temps à illustrer l'efficacité de la méthode d'identification sur des exemples "test". On considère pour cela l'opérateur  $H(\partial_t)$  de symbole :

$$H(p) = \frac{\sqrt{p}}{p+1}. \quad (5.61)$$

Cet opérateur est  $\gamma$ -diffusif au sens strict et peut être réalisé avec le contour  $\gamma$  défini par :

$$\gamma(\xi) = -|\xi|. \quad (5.62)$$

Les données  $\{y_m^{j,k}, X_m^{j,k}\}_{k=0:K}$  utilisées pour l'identification sont obtenues par simulation numérique du modèle :

$$H(\partial_t)X = y. \quad (5.63)$$

Pour réaliser l'opérateur, on utilise une représentation diffuse avec 120 points de discrétisation en  $\xi$  répartis de manière géométrique entre  $\xi_1 = 10^{-1}$  et  $\xi_L = 10^3$ , le contour  $\gamma$  étant défini par (5.62). Le diagramme de Bode de la fonction de transfert de l'opérateur ainsi approché est comparé à celui de l'opérateur théorique  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}} \circ (\partial_t + 1)^{-1}$  en figure 5.1. On peut constater que l'opérateur est très bien approché dans la bande fréquentielle  $[10^{-1}, 10^3]$  couverte par les  $\{\xi_l\}_{l=1:L}$ .

On considère une discrétisation temporelle  $\{t_k\}_{k=0:K}$  définie par :

$$t_0 = 0 \text{ et } t_k = t_{k-1} + \Delta t_k, \quad k = 1 : K \text{ avec } K = 150\,000 \text{ et } \Delta t_k = 10^{-3}. \quad (5.64)$$

On choisit comme entrée une impulsion  $X = \delta_{t=0}$  correspondant à l'entrée discrète  $\{X^k\}_{k=0:K}$  définie aux temps  $\{t_k\}_{k=0:K}$  par :

$$X^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.65)$$

On note  $\{y^k\}_{k=0:K}$  la sortie discrète associée. Les  $J$  trajectoires discrètes d'entrée (respectivement de sortie) mesurées considérées sont obtenues à partir de  $\{X^k\}_{k=0:K}$  (respectivement à partir de  $\{y^k\}_{k=0:K}$ ) par addition de bruits blancs centrés numériques  $\{\eta^{j,k}\}_{k=0:K}$ ,  $j = 1 : J$  (respectivement  $\{\varepsilon^{j,k}\}_{k=0:K}$ ,  $j = 1 : J$ ) d'écart type  $\sigma_\eta$  (respectivement  $\sigma_\varepsilon$ ):

$$X_m^{j,k} = X^k + \eta^{j,k} \text{ (respectivement } y_m^{j,k} = y^k + \varepsilon^{j,k}). \quad (5.66)$$

#### Cas où il existe une valeur exacte $\mu_0$ telle que $A_X \mu_0 = y$

Dans un premier temps on identifie l'opérateur  $H(\partial_t)$  avec le même contour  $\gamma$  et les mêmes points de discrétisation  $\{\xi_l\}_{l=1:L}$  utilisés pour la simulation des données. Ainsi, la valeur exacte  $\mu_0$  de  $\mu$  appartient à l'espace de recherche des solutions  $\mathcal{E}$  et peut donc être comparée à la solution obtenue par la méthode d'identification. Pour identifier  $\mu$ , on utilise un seul jeu de données  $\{y_m^{1,k}, X_m^{1,k}\}_{k=0:K}$  ( $J = 1$ ) et on suppose que seule la sortie est bruitée ( $\eta^{1,k} = 0$ ). Les résultats obtenus d'une part sans bruit de mesure sur la sortie ( $\varepsilon^{1,k} = 0$ ) et d'autre part avec un bruit de mesure d'écart-type

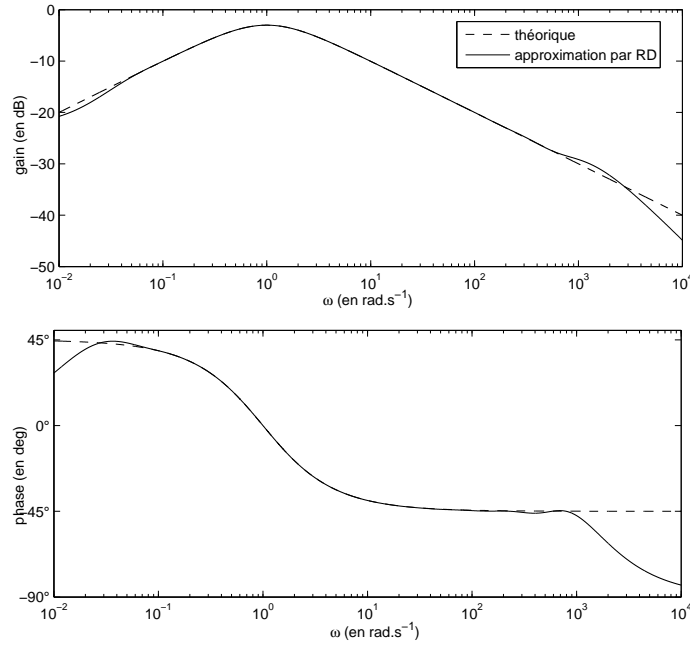


FIG. 5.1 – Diagramme de Bode de l'opérateur approché utilisé pour les simulations du modèle et de l'opérateur théorique  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}} \circ (\partial_t + 1)^{-1}$ .

$\sigma_\varepsilon = 10^{-4}$  sont donnés en figures 5.2 et 5.3. On constate que l'identification est bonne sur la bande fréquentielle  $[\frac{2\pi}{K\Delta t}, \frac{2\pi}{2\Delta t}] = [4.19 \times 10^{-2}, 3.14 \times 10^3]$  accessible par les données et les  $\xi_l$ ,  $l = 1 : L$ . Le tracé du  $\gamma$ -symbole identifié  $\mu^*$  est superposé à celui de la valeur exacte  $\mu_0$  dans le cas de données non bruitées.

Pour quantifier l'erreur d'identification entre  $\mu_0$  et  $\mu^*$ , on introduit les quantités  $E_\mu^0$ ,  $E_\mu^1$  et  $E_\mu^2$  définies par :

$$\begin{aligned} E_\mu^0 &= \frac{\sum_l |\mu_l^* - \mu_l| \Delta \xi_l}{\sum_l |\mu_l| \Delta \xi_l}, \\ E_\mu^1 &= \frac{\sum_l |\mu_l^* - \mu_l| \frac{\Delta \xi_l}{\xi_l}}{\sum_l |\mu_l| \frac{\Delta \xi_l}{\xi_l}}, \\ \text{et } E_\mu^2 &= \frac{\|\mu^* - \mu_0\|^2}{\|\mu_0\|^2} = \frac{\sum_l |\mu_l^* - \mu_{0l}|}{\sum_l |\mu_{0l}|}. \end{aligned}$$

On considère également les quantités  $E$  et  $E_{\text{sup}}$  suivantes :

$$E = \frac{\sum_i \left| \sum_{l=0}^L \frac{\mu_l^*}{i\omega_j - \gamma(\xi_l)} - H(i\omega_j) \right| \frac{\Delta \omega_j}{\omega_j}}{\sum_j |H(i\omega_j)| \frac{\Delta \omega_j}{\omega_j}} \simeq \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\omega} \left| \sum_{l=0}^L \frac{\mu_l^*}{i\omega - \gamma(\xi_l)} - H(i\omega) \right| d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\omega} |H(i\omega)| d\omega}, \quad (5.67)$$

$$\text{et } E_{\text{sup}} = \sup_{\omega_j} \left| \frac{\sum_{l=0}^L \frac{\mu_l^*}{i\omega_j - \gamma(\xi_l)} - H(i\omega_j)}{H(i\omega_j)} \right| \simeq \sup_{\omega} \left| \frac{\sum_{l=0}^L \frac{\mu_l^*}{i\omega - \gamma(\xi_l)} - H(i\omega)}{H(i\omega)} \right|, \quad (5.68)$$

qui permettent d'estimer la qualité de l'identification de la réponse fréquentielle de  $H(\partial_t)$ . Les valeurs de ces quantités sont données en table 5.1 pour différentes valeurs de l'écart-type  $\sigma_\varepsilon$  du bruit de mesure de sortie. La valeur du paramètre de pénalisation<sup>3</sup>  $\epsilon_1$  est également précisée. On

<sup>3</sup>Seule la pénalisation en  $\|\mu\|$  est ici considérée; on a donc  $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ .



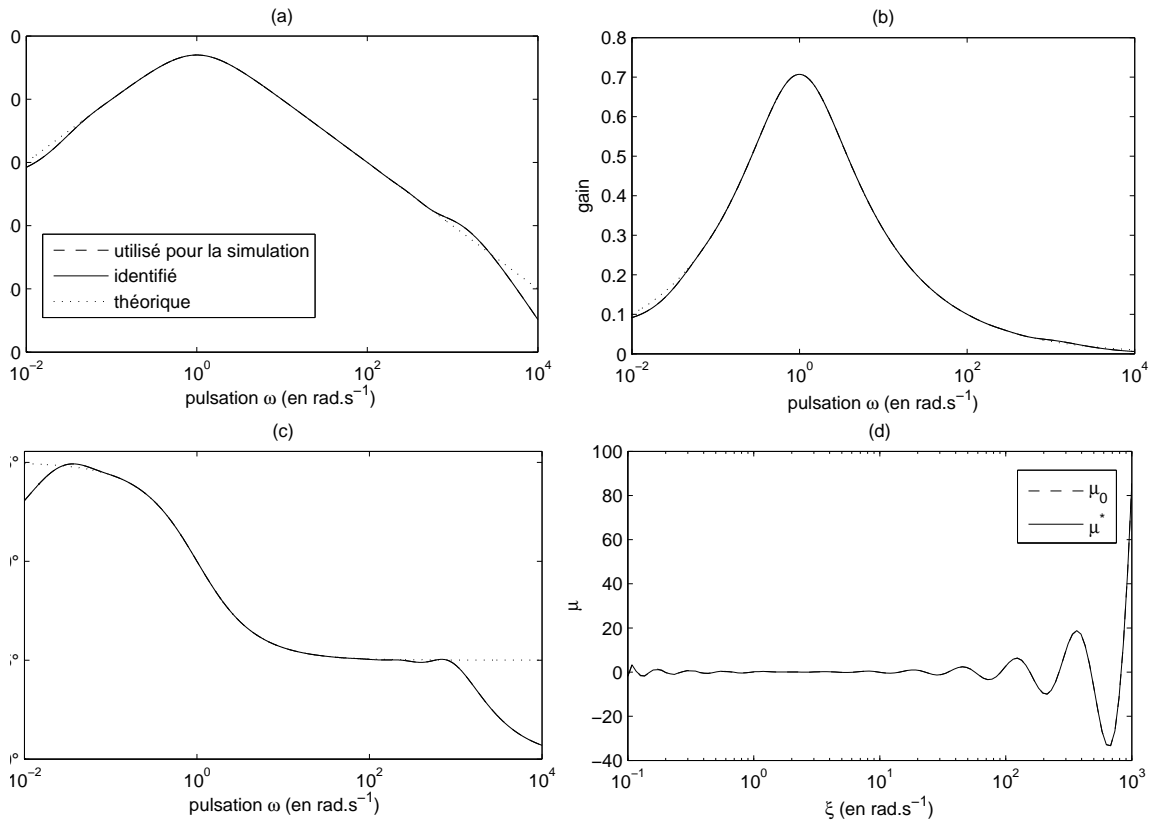


FIG. 5.2 – **Identification sans bruit de mesure** sur la sortie : (a), (b) et (c) : Gains en dB, gains et phases des réponses fréquentielles de  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}} \circ (\partial_t + 1)^{-1}$ , de son approximation sous RD et de l'opérateur identifié.- (d) : Coefficients  $\mu_0$  et  $\mu^*$

constate comme prévu que lorsque  $\sigma_\varepsilon$  tend vers 0, il y a convergence de  $\mu^*$  vers  $\mu_0$ , et de  $H^*$ , réponse fréquentielle de l'opérateur de  $\gamma$ -symbole  $\mu^*$ , vers  $H$ . On note également que plus il y a de bruit, plus le paramètre de pénalisation  $\varepsilon_1$  doit être grand pour reconditionner le problème.

### Cas où il n'existe pas de valeur $\mu_0$ exacte

On cherche à présent à identifier  $H(\partial_t)$  en utilisant un contour  $\gamma$  différent de celui utilisé pour la simulation des données. On choisit un contour  $\gamma$  de type secteur, c'est à dire de la forme :

$$\gamma(\xi) = |\xi| e^{i \operatorname{sign}(\xi) \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \text{ avec } \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad (5.69)$$

et on utilise  $L = 140$  points de discrétisation en  $\xi$  répartis géométriquement entre  $\xi_1 = 10^{-1}$  et  $\xi_L = 10^3$ . On considère là encore un seul jeu de données  $\{y_m^{1,k}, X_m^{1,k}\}$  dont l'entrée est connue ( $\eta^{1,k} = 0$ ) et la sortie est bruitée par un bruit blanc centré d'écart-type  $\sigma_\varepsilon = 10^{-4}$ . Le terme de pénalisation  $\varepsilon$  est quant à lui pris égal à  $10^{-6}$ . Le diagramme de Bode de l'opérateur identifié et la valeur des coefficients  $\mu^*$  sont donnés en figure 5.4. L'identification est un peu moins bonne que dans le cas où le contour  $\gamma$  est le même que celui utilisé pour la simulation des données ; elle reste cependant de bonne qualité comme en témoignent les valeurs de  $E$  et  $E_{\text{sup}}$  obtenues :

$$E = 5.1080 \times 10^{-10} \text{ et } E_{\text{sup}} = 0.1452. \quad (5.70)$$

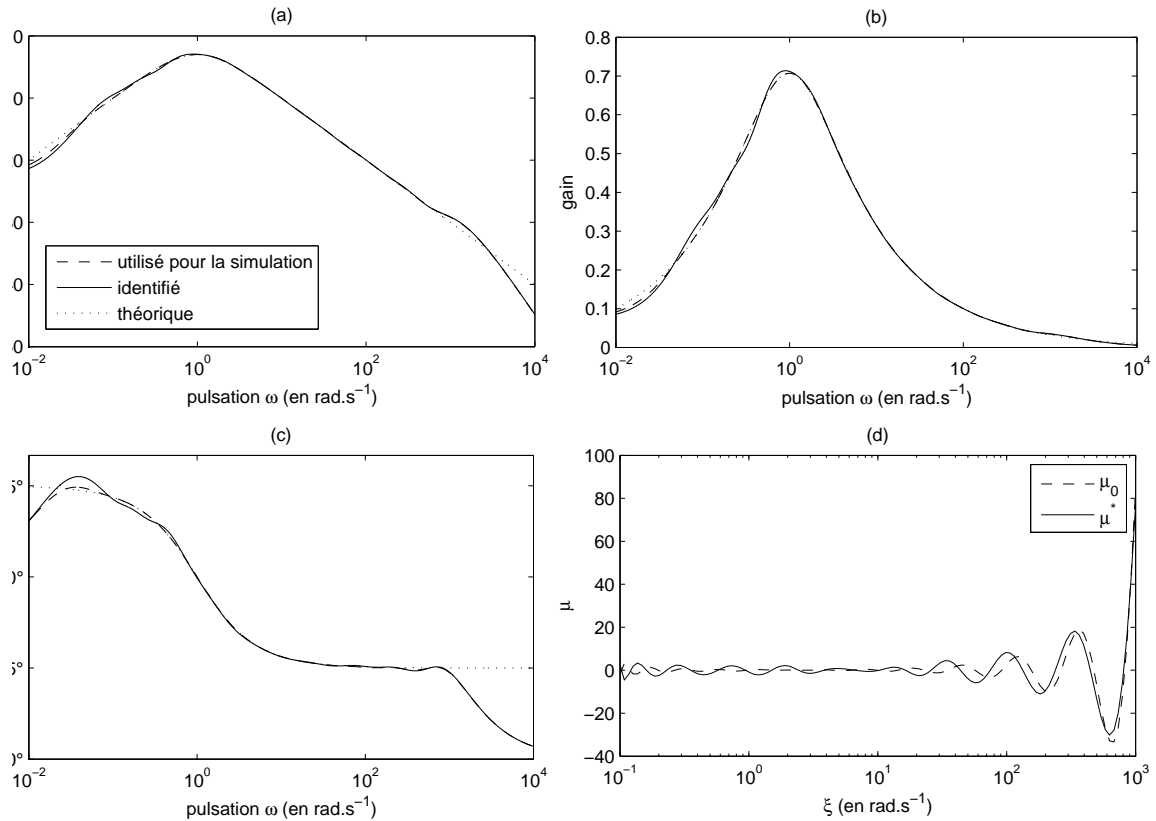


FIG. 5.3 – **Identification avec bruit de mesure** sur la sortie ( $\sigma_\varepsilon = 10^{-4}$ ) : (a), (b) et (c) : Gains en dB, gains et phases des réponses fréquentielles de  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}} \circ (\partial_t + 1)^{-1}$ , de son approximation sous RD et de l'opérateur identifié.- (d) : Coefficients  $\mu_0$  et  $\mu^*$

### 5.3.2 Application à l'identification de l'opérateur d'impédance d'une paroi poreuse [18]

On considère maintenant un exemple physique plus réaliste, dans lequel l'entrée  $X$  et la sortie  $y$  sont bruitées.

#### Le problème considéré

Le bruit des moteurs constitue une part importante des nuisances sonores produites par les avions et sa réduction est à l'heure actuelle un enjeu important. Pour les zones chaudes comme les tuyères soumises à l'écoulement des gaz d'échappement, S. Gasser propose dans [28] de recouvrir les parois d'un matériau absorbant. Du fait de la structure complexe de tels matériaux, les impédances acoustiques générées sont des fonctions non rationnelles et complexes de la fréquence, avec des retards inévitables dus à la propagation des ondes dans le milieu. De plus, leur détermination analytique est difficile. Par conséquent, le processus d'identification est nécessaire lorsque des modèles fiables sont requis pour la simulation numérique par exemple. Ainsi il devient possible, pour un matériau donné, de calculer le champ aéroacoustique dans une cavité de moteur équipée d'une paroi absorbante et d'évaluer la réduction de bruit obtenue.

L'impédance sur un bord homogène 2D a la propriété de ne pas dépendre des variables de paramétrisation de la surface ; de ce fait, au moins aux hautes fréquences, cette impédance peut être identifiée à partir de mesures physiques sur un petit morceau de matériau (voir figure 5.5 pour le dispositif physique de mesure). Dans la suite, on montre comment la méthode introduite précédemment peut être utilisée sur cet exemple.

Pour simplifier l'analyse, on suppose que le problème décrit en figure 5.5 peut être réduit à un

$\sigma_\varepsilon$	E	$E_{\text{sup}}$	$E_\mu^0$	$E_\mu^1$	$E_\mu^2$	$\epsilon_1$
0	$7.3121 \times 10^{-15}$	$1.3064 \times 10^{-6}$	$2.4323 \times 10^{-4}$	0.0065	0.0065	$10^{-16}$
$10^{-8}$	$5.6500 \times 10^{-14}$	$8.7091 \times 10^{-6}$	0.0018	0.0055	0.0055	$10^{-15}$
$10^{-7}$	$6.6201 \times 10^{-13}$	$9.0663 \times 10^{-5}$	0.0040	0.0142	0.0142	$10^{-14}$
$10^{-6}$	$6.3046 \times 10^{-12}$	$7.7146 \times 10^{-4}$	0.0385	0.0888	0.0895	$10^{-13}$
$10^{-5}$	$5.3474 \times 10^{-11}$	0.0107	0.0404	0.1215	0.1218	$10^{-12}$
$10^{-4}$	$6.7330 \times 10^{-10}$	0.0673	0.2212	0.6249	0.6314	$10^{-11}$
$10^{-3}$	$3.2136 \times 10^{-9}$	0.3872	1.3715	1.1155	1.1134	$10^{-10}$

TAB. 5.1 – Comparaison des valeurs de E,  $E_{\text{sup}}$ ,  $E^\mu$ ,  $E_1^\mu$  et  $E_2^\mu$  pour différentes valeurs de l'écart-type  $\sigma_\varepsilon$  du bruit de mesure sur les données de sortie.

problème 1D, ce qui est légitime lorsque la source et le capteur sont suffisamment loin de la paroi absorbante. Ce cas simplifié est suffisant pour illustrer la méthode d'identification ; pour une analyse plus réaliste, le problème 3D peut être traité de manière similaire, à des adaptations techniques près. Sous ces conditions, le problème 1D de la propagation des ondes acoustiques peut être décrit par le modèle suivant<sup>4</sup> :

$$\partial_t^2 P = \partial_x^2 P + v \otimes \delta_0 \quad \text{dans } x \in ] - \infty, 1], \quad (5.71)$$

où  $v \otimes \delta_0$  désigne la source au point  $x = 0$ ,  $v$  étant une fonction du temps connue, et  $P$  est la pression acoustique, que l'on mesure au point  $x_m$  :

$$y = P(t, x_m). \quad (5.72)$$

La paroi absorbante peut alors être résumée par un opérateur d'impédance  $Q(\partial_t)$  au point  $x = 1$  [12]:

$$\partial_x P|_{x=1} = Q(\partial_t) \partial_t P|_{x=1}. \quad (5.73)$$

Le problème d'identification considéré consiste alors à construire une approximation de l'opérateur  $Q(\partial_t)$  à partir des données  $y$  et  $v$  (notons qu'en pratique, la mesure  $y$  peut être perturbée par un bruit blanc additif non spécifié explicitement ici).

### Résolution du problème

On cherche dans un premier temps à expliciter l'opérateur  $P(., 0) \mapsto y$ , noté  $K(\partial_t)$ . Pour cela, il faut calculer le coefficient de réflexion au point  $x = 1$  pour toute fréquence  $\omega$ . Soit  $\varphi$  une solution harmonique de (5.71) avec  $v = 0$  ;  $\varphi$  peut être exprimée comme la somme d'une onde incidente  $\varphi^i$  (se propageant dans le sens des  $x$  croissants) et de l'onde réfléchie associée  $\varphi^r$  (se propageant dans le sens des  $x$  décroissants) (voir figure 5.5) :

$$\varphi = \varphi^i + \varphi^r. \quad (5.74)$$

Ces deux ondes sont respectivement données par :

$$\begin{aligned} \varphi^i(t, \omega, x) &= e^{i\omega(t-x)}, \\ \text{et } \varphi^r(t, \omega, x) &= k(\omega) e^{i\omega(t+x)}, \end{aligned}$$

où  $k(\omega)$  est le coefficient de réflexion à la fréquence  $\omega$ , dépendant de  $Q(i\omega)$ . Au point  $x = 1$ , le coefficient  $k(\omega)$  vérifie la relation d'impédance (5.73) qui mène après quelques calculs simples à :

$$k(\omega) = \frac{1 + Q(i\omega)}{1 - Q(i\omega)} e^{-2i\omega}. \quad (5.75)$$

<sup>4</sup>Par simplicité, la vitesse a été prise égale à 1.

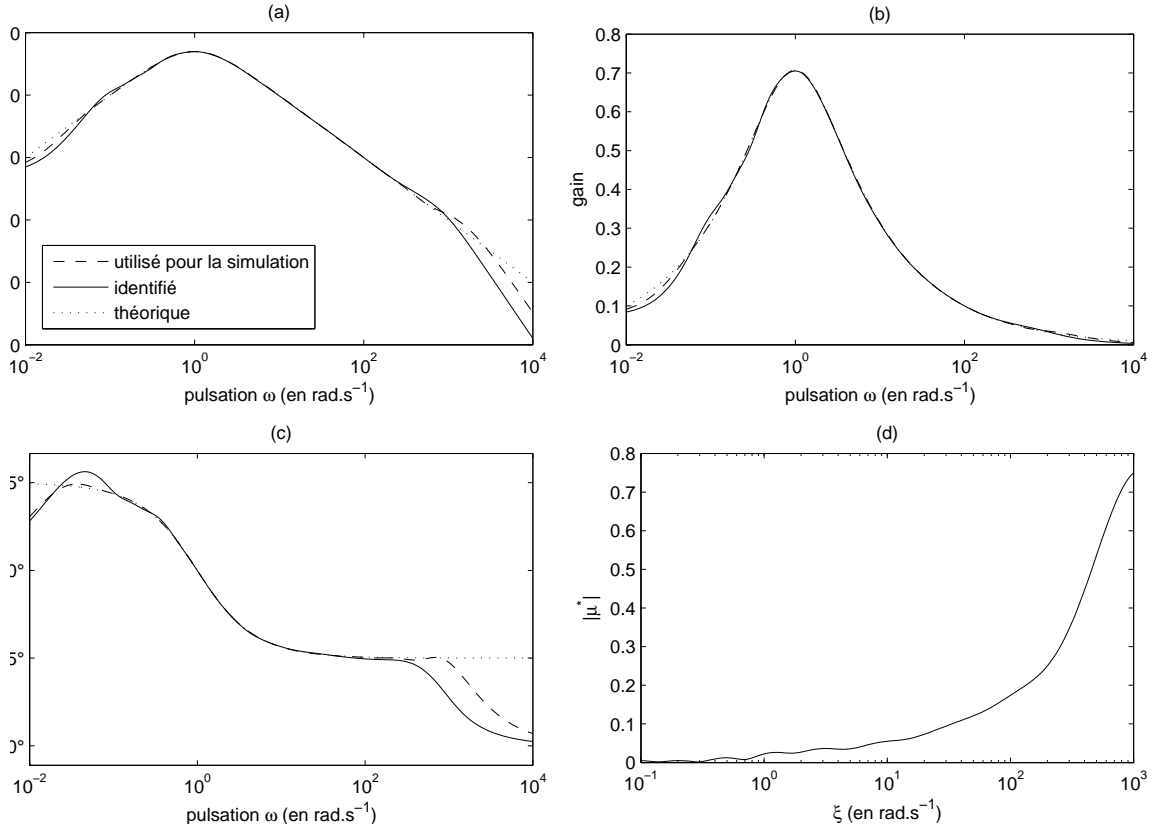


FIG. 5.4 – **Identification avec bruit de mesure** ( $\sigma_\varepsilon = 10^{-4}$ ) **et contour  $\gamma$  différent** : (a), (b) et (c) : Gains en dB, gains et phases des réponses fréquentielles de  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}} \circ (\partial_t + 1)^{-1}$ , de son approximation sous RD et de l'opérateur identifié.- (d) : Coefficients  $\mu_0$  et  $\mu^*$

On a alors :

$$\varphi(t, \omega, x) = (e^{-i\omega x} + \frac{1 + Q(i\omega)}{1 - Q(i\omega)} e^{i\omega(x-2)}) e^{i\omega t}, \quad (5.76)$$

d'où, à partir de (5.72) :

$$K(i\omega) = e^{-i\omega x_m} + \frac{1 + Q(i\omega)}{1 - Q(i\omega)} e^{i\omega(x_m-2)}. \quad (5.77)$$

D'autre part, la solution de (5.71) est classiquement donnée par :

$$P(t, x) = \frac{1}{2} (\partial_t^{-1} v)(t - x); \quad (5.78)$$

par synthèse harmonique, la relation entrée-sortie  $v \mapsto y$  peut alors être explicitée dans le domaine temporel ( $\tau_a$  désigne l'opérateur de translation  $f(t) \mapsto f(t - a)$ ) de la manière suivante :

$$y = \frac{1}{2} \tau_{x_m} \circ \partial_t^{-1} v + \frac{1}{2} M(\partial_t) \circ \tau_{2-x_m} \circ \partial_t^{-1} v, \quad (5.79)$$

avec :

$$M(i\omega) := \frac{1 + Q(i\omega)}{1 - Q(i\omega)}. \quad (5.80)$$

En définissant les nouvelles données et notations suivantes :

$$\tilde{y}_m := y - \frac{1}{2} (\tau_{x_m} + \tau_{2-x_m}) \circ \partial_t^{-1} v, \quad \tilde{X}_m := \frac{1}{2} \tau_{2-x_m} v, \quad \tilde{M}(\partial_t) := M(\partial_t) - 1, \quad (5.81)$$

on obtient alors la relation :

$$\tilde{y}_m = \partial_t^{-1} \circ \tilde{M}(\partial_t) \tilde{X}_m \quad (5.82)$$

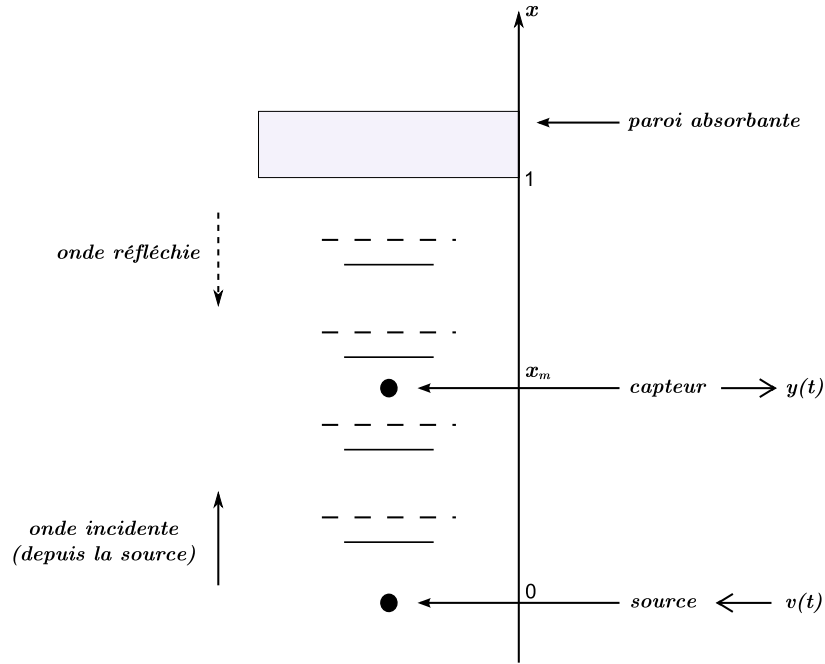


FIG. 5.5 – Dispositif physique de mesure pour l'identification de l'impédance d'un matériau homogène absorbant.

sur laquelle on peut directement appliquer la méthode pour identifier le  $\gamma$ -symbole de  $\partial_t^{-1} \circ \widetilde{M}(\partial_t)$ , que l'on notera<sup>5</sup>  $\mu$ .

D'après (5.80), on a :

$$Q(i\omega) = \frac{\widetilde{M}(i\omega)}{\widetilde{M}(i\omega) + 2}. \quad (5.83)$$

Une estimation du  $\gamma$ -symbole  $\nu$  de  $\partial_t^{-1} \circ Q(\partial_t)$  est alors obtenue à partir de  $\mu$  via la relation :

$$\nu = (\mu + 2\delta)^{-1} \# \mu \# \delta; \quad (5.84)$$

on note que ce calcul nécessite l'inversion du  $\gamma$ -symbole  $\mu + 2\delta$ . On obtient alors la représentation d'état entrée-sortie suivante de l'opérateur  $w \mapsto Q(\partial_t)w$  :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + w, & \psi_0 = 0 \\ Q(\partial_t)w = \langle \nu, \gamma \psi + w \rangle, \end{cases} \quad (5.85)$$

qui est exacte (de dimension infinie) si  $\mu$  est le  $\gamma$ -symbole exact, et approchée (de dimension finie<sup>6</sup>) si  $\mu$  est le  $\gamma$ -symbole identifié.

### Résultats numériques

On considère le matériau poreux étudié dans [44], [28], dont l'impédance a été calculée analytiquement dans [12]. Cette impédance est donnée par :

$$Q(i\omega) = \varphi \sqrt{\frac{\chi_{\text{eff}}(i\omega)}{\rho_{\text{eff}}(i\omega)}} \tanh \left( i\omega \sqrt{\chi_{\text{eff}}(i\omega) \rho_{\text{eff}}(i\omega)} \right), \quad (5.86)$$

<sup>5</sup>On notera indifféremment  $\mu$  le  $\gamma$ -symbole identifié ou exact de  $\partial_t^{-1} \circ \widetilde{M}(\partial_t)$ .

<sup>6</sup>Dans ce cas,  $\langle f, g \rangle = \sum_k f_k g_k$ .

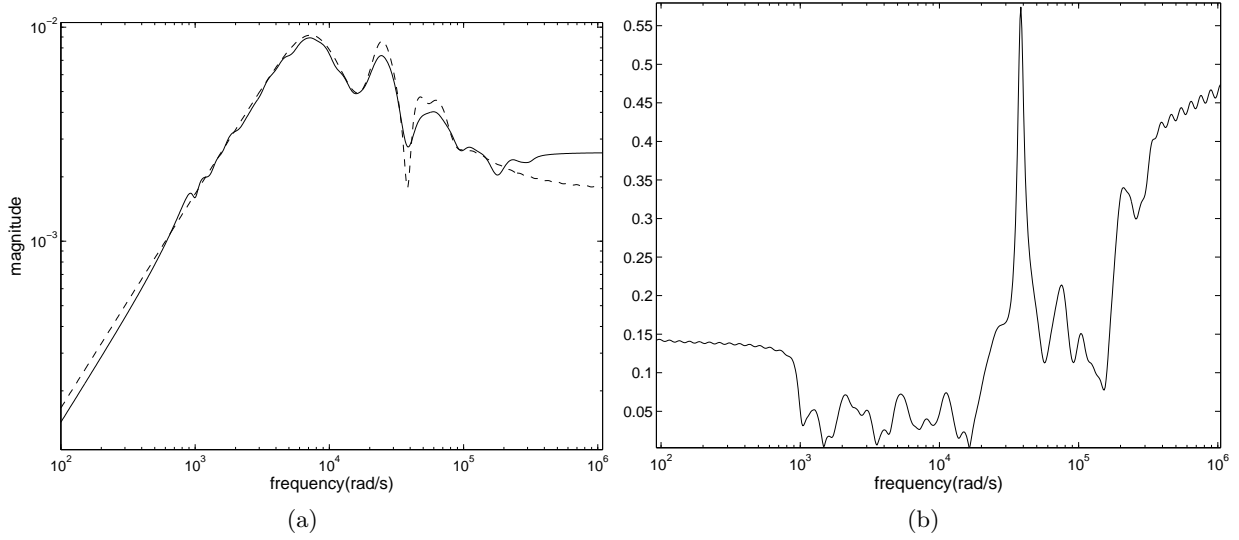


FIG. 5.6 – (a) : Réponses fréquentielles identifiée (—) et exacte (- - -) de l'opérateur  $Q(\partial_t)$  - (b) : Erreur relative d'identification  $|\frac{Q-Q^*}{Q}|$ .

avec  $\varphi = 3.33$  et où les fonctions  $\rho_{\text{eff}}(i\omega)$  et  $\chi_{\text{eff}}(i\omega)$  sont respectivement la densité effective de Pride et al. [52] et la compressibilité effective de Lafarge [33]. Ces fonctions sont exprimées par [28] :

$$\rho_{\text{eff}}(i\omega) = e\rho \left(1 + a \frac{(1+b i\omega)^{\frac{1}{2}}}{i\omega}\right) \text{ et } \chi_{\text{eff}}(i\omega) = e\chi \left(1 - c \frac{i\omega}{i\omega + a'(1+b'i\omega)^{\frac{1}{2}}}\right), \quad (5.87)$$

avec

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \alpha_\infty, \quad \chi = \frac{1}{P_0}, \quad a = \frac{8\mu}{\rho_0 \Lambda^2}, \quad a' = \frac{8\mu}{\rho_0 \Lambda'^2}, \\ b &= \frac{1}{2a}, \quad b' = \frac{1}{2a'}, \quad 0 < c = \frac{\gamma-1}{\gamma} < 1, \end{aligned} \quad (5.88)$$

où  $e, \rho_0, P_0, \mu, \gamma, \alpha_\infty, \Lambda, \Lambda'$  sont des paramètres physiques de valeurs  $\Lambda = \Lambda' = 0.11 \cdot 10^{-3}$  m,  $\rho_0 = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $P_0 = 10^5$  Pa,  $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $\alpha_\infty = 1.3$ ,  $e = 5 \cdot 10^{-2}$  m.

Via une analyse standard, on peut montrer que le prolongement analytique de  $Q$  présente des singularités pouvant être localisées asymptotiquement près d'une ligne droite verticale (voir figure 3.6 du chapitre 3) : l'opérateur  $Q(\partial_t)$  présente des comportements sous-jacents de type retard, hérités des modes propagatifs à l'intérieur du matériau poreux, et desquels résultent des variations complexes de gains et de phase de  $Q$ , rendant le problème d'identification sensible ou même mal posé.

On considère le problème d'identification numérique d'un tel opérateur  $Q(\partial_t)$  sous sa formulation d'état (5.85), dans la situation idéale décrite précédemment. Les données mesurées  $y_m = y + \varepsilon$  ont été générées sur  $t \in [0, T]$  par simulation numérique précise de (5.79), avec  $v$  un bruit blanc gaussien et  $\varepsilon$  un bruit blanc gaussien de sortie, de rapport signal sur bruit égal à 26 dB.

Les paramètres numériques utilisés sont  $\Delta t = 10^{-5}$  s,  $T = 0.05$  s,  $L = 100$ ,  $\xi_1 = 10^3$  rad/s,  $\xi_L = 3 \cdot 10^5$  rad/s,  $\xi_{l+1} = r \xi_l$ ,  $l = 1 : L - 1$ ,  $\gamma(\xi) = |\xi| e^{i \text{sign}(\xi) (\frac{\pi}{2} + \alpha)}$ ,  $\alpha = \frac{10\pi}{180}$ .

La comparaison entre les réponses fréquentielles exacte<sup>7</sup> et identifiée de l'impédance  $Q(i\omega)$  est visible en figures 5.6a et 5.6b. Comme prévu, l'identification est précise dans la bande fréquentielle  $[10^3 \text{ rad/s}, 3 \cdot 10^5 \text{ rad/s}]$  couverte par l'ensemble  $\{\gamma(\xi_k)\}_{k=1:n}$ . On peut noter que l'identification reste correcte dans toute la bande fréquentielle audio, en particulier aux basses fréquences grâce à la nature asymptotique rationnelle de  $Q(i\omega)$  qui se comporte comme  $i\omega$  quand  $\omega \rightarrow 0$ .

En figure 5.7, on peut voir le graphe du  $\gamma$ -symbole identifié associé à l'opérateur  $\partial_t^{-1} \circ \widetilde{M}(\partial_t)$ , à partir duquel est réalisé l'opérateur  $Q(\partial_t)$  via la formulation entrée-sortie (5.85).

<sup>7</sup>A des erreurs numériques près, qui sont négligeables dans la bande fréquentielle considérée.

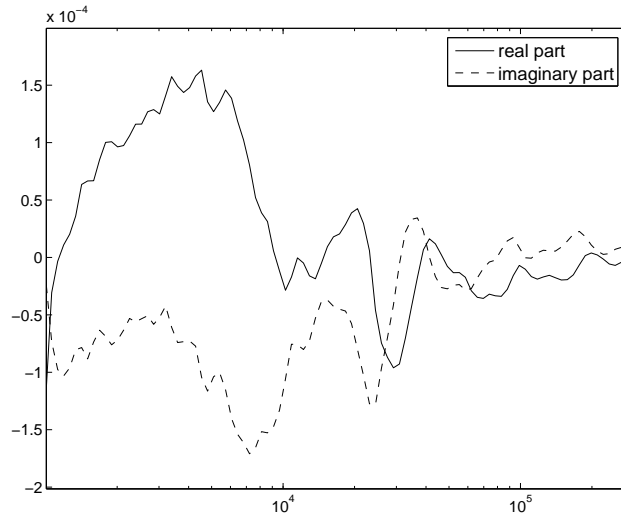


FIG. 5.7 –  $\gamma$ -symbole identifié  $\mu(\xi)$ ,  $\xi > 0$ .

Outre ces résultats quantitatifs, on peut ajouter que la méthode d'identification est robuste par rapport au niveau de bruit de perturbation  $\varepsilon$ , au temps de mesure  $T$  et à la dimension  $L$  du modèle identifié.

**Remarque 138** *Cette dernière propriété essentielle est une conséquence du fait que les pôles  $\gamma(\xi_k)$  de la fonction de transfert identifiée sont a priori imposés par la discrétisation en  $\xi$  du modèle diffusif entrée-sortie. Il s'ensuit, grâce aux propriétés de la représentation diffusive, que le  $\gamma$ -symbole identifié  $\mu$  converge (dans un sens non précisé ici), quand  $L \rightarrow +\infty$ ,  $\alpha \rightarrow \frac{\pi^+}{2}$ ,  $\xi_1 \rightarrow 0^+$ ,  $\xi_L \rightarrow +\infty$  et  $T \rightarrow +\infty$ , vers le  $\gamma$ -symbole exact, et qu'il en est de même pour l'impédance identifiée  $Q(i\omega)$  au sens de l'espace de Fréchet  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_\omega)$ .*





## Chapitre 6

# Identification simultanée de l'opérateur dynamique et de la fonction non linéaire du modèle

Le problème d'identification d'un opérateur dynamique  $H(\partial_t)$  via son  $\gamma$ -symbole  $\mu$ , lorsque l'entrée et la sortie du système sont mesurées, a été traité dans le paragraphe précédent. On s'intéresse désormais à l'identification d'un modèle de Volterra de la forme particulière, adaptée au problème et peu restrictive en pratique :

$$H(\partial_t)X = f(u, X) + v, \quad (6.1)$$

où  $H(\partial_t)$  et  $f$  sont inconnus. On se donne des mesures  $u_m$ ,  $v_m$  et  $X_m$  de  $u$ ,  $v$  et de  $X$ , à partir desquelles on cherche à identifier  $H(\partial_t)$  et  $f$ ; pour cela, on considère le problème :

$$\min_{H(\partial_t), f} \|H(\partial_t)X_m - f(u_m, X_m) - v_m\|^2. \quad (6.2)$$

### 6.1 Principe

Pour tout  $(u, v)$  fixé, l'équation (6.1) traduit l'équilibre entre deux trajectoires obtenues à partir de  $X$ , dépendant respectivement de l'opérateur linéaire dynamique  $H(\partial_t)$  et de l'opérateur (non linéaire) statique défini par la fonction  $f^1 : [f(u, x)](t) = f(u(t), x(t)) \forall t$ . Du point de vue des trajectoires (et si l'évaluation numérique de  $H(\partial_t)X$  n'est pas trop coûteuse), on peut remarquer que les opérateurs  $H(\partial_t)$  et  $f(u, \cdot)$  jouent un rôle comparable dans l'expression (6.1). La méthode proposée consiste à paramétrer d'une part l'opérateur  $H(\partial_t)$  au moyen de son  $\gamma$ -symbole (comme présenté dans le paragraphe précédent), et d'autre part la fonction  $f$  au moyen d'une base de fonctions adaptée. On obtient ainsi un problème équivalent dans lequel les paramètres inconnus dépendent linéairement des données, et dont la dimension est raisonnable sous approximation numérique.

#### Paramétrisation de l'opérateur $H(\partial_t)$

On suppose que l'opérateur  $H(\partial_t)$  est  $\gamma$ -diffusif de degré  $n$  et on note  $\mu$  le  $\gamma$ -symbole de  $H(\partial_t) \circ \partial_t^{-n}$ . On suppose également que  $\mu$  est inversible dans  $\Sigma_\gamma$ . On a (voir chapitre 5) :

$$H(\partial_t)X = \mathcal{A}_{\partial_t^n X}(\mu), \quad (6.3)$$

où  $\mathcal{A}_{\partial_t^n X}$  est l'opérateur linéaire défini par  $\mathcal{A}_{\partial_t^n X} : \mu \longmapsto \langle \mu, \psi_{\partial_t^n X} \rangle$ .

---

<sup>1</sup>On distinguera les trajectoires  $(u, x, \dots)$ , qui sont des fonctions du temps, et les valeurs prises par ces trajectoires au temps  $t$  (i.e.  $u(t), x(t), \dots$ ).

### Paramétrisation de la fonction $f$

On considère une base topologique  $\{\mathbf{g}^p \otimes \mathbf{k}^q\}_{p,q=1:+\infty}$  d'un produit tensoriel d'espaces de Hilbert auquel  $f$  appartient ; on a alors :

$$f = \sum_{p,q} a_{pq} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{k}^q, \text{ avec } a_{pq} \in \mathbb{R}. \quad (6.4)$$

### Modèle équivalent à (6.1)

Le modèle de Volterra (6.1) peut alors être réécrit de manière équivalente sous la forme :

$$\mathcal{A}_{\partial_t^n X} \mu - \sum_{p,q} \mathbf{g}^p(u) \mathbf{k}^q(X) a_{pq} = v, \quad (6.5)$$

ou encore, de manière simplifiée et en notant  $a := (a_{pq})$  :

$$\mathcal{G}_{u,X}(\mu, a) = v, \quad (6.6)$$

où  $\mathcal{G}_{u,X}$  désigne l'opérateur linéaire défini par :

$$\mathcal{G}_{u,X} : (\mu, a) \mapsto \mathcal{A}_{\partial_t^n X} \mu - \sum_{p,q} \mathbf{g}^p(u) \mathbf{k}^q(X) a_{pq}. \quad (6.7)$$

Le problème (6.2) s'écrit alors de manière équivalente :

$$\min_{\mu, a} \|\mathcal{G}_{u_m, X_m}(\mu, a) - v_m\|^2; \quad (6.8)$$

sa solution est formellement obtenue par projection orthogonale :

$$(\mu^*, a^*) = \mathcal{G}_{u_m, X_m}^\dagger v_m. \quad (6.9)$$

## 6.2 Du point de vue numérique

On considère  $J$  solutions  $(u^j, v^j, X^j)$ ,  $j = 1 : J$  de (6.1), et on se donne  $J$  jeux de données discrètes  $\{u_m^{j,k}, v_m^{j,k}, X_m^{j,k}\}_{k=0:K}$  où  $u_m^{j,k}$ ,  $v_m^{j,k}$  et  $X_m^{j,k}$  sont les mesures respectives de  $u^j$ ,  $v^j$  et  $X^j$  au temps  $t_k$ . On a  $t_0 = 0$ ,  $t_k = t_{k-1} + \Delta t_k$ ,  $k = 1 : K$  et on note  $T = t_K$ . On note également  $u_m^j$ ,  $v_m^j$  et  $X_m^j$  les trajectoires mesurées continues telles que  $u_m^j(t_k) = u_m^{j,k}$ ,  $v_m^j(t_k) = v_m^{j,k}$  et  $X_m^j(t_k) = X_m^{j,k}$ .

Pour résoudre (6.8) numériquement, il faut se ramener à un problème approché de dimension finie, ce qui s'obtient par troncature de la décomposition de  $f$  sur la base de fonctions, et par discrétisation d'une part en la variable  $\xi$  et d'autre part en la variable temps  $t$ .

### Approximation de dimension finie de $f$ et discrétisation en $\xi$

Une approximation de  $f$  est obtenue par troncature à un ordre fini  $P \times Q$  de la somme infinie (6.4) :

$$f \simeq \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{k}^q. \quad (6.10)$$

Les valeurs de  $P$  et de  $Q$  doivent être choisies de manière à assurer le meilleur compromis entre les erreurs générées par la troncature et celles générées par la présence de bruit de mesure, ou même par un défaut structurel du modèle. En pratique, ce choix se fait de manière empirique.

On considère une discrétisation  $\{\xi_l\}_{l=1:L}$  de la variable  $\xi$ , et l'approximation de  $H(\partial_t)X = \mathcal{A}_{\partial_t^n X} \mu$  correspondante (voir paragraphe 2.2) :

$$[\mathcal{A}_{\partial_t^n X} \mu](t) \simeq \sum_{l=1}^L \mu_l \psi_{\partial_t^n X}(t, \xi_l), \text{ avec } \mu_l \in \mathbb{C}. \quad (6.11)$$

Le modèle approché de (6.1) que l'on utilisera s'écrit donc, pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\sum_{l=1}^L \mu_l \psi_{\partial_t^n X^j}(t, \xi_l) = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq} \mathbf{g}^p(u^j(t)) \otimes \mathbf{k}^q(X^j(t)) + v^j(t), \quad j = 1 : J, \quad (6.12)$$

ce qui nous amène au problème :

$$\min_{(\mu, a) \in \mathbb{C}^L \times \mathbb{R}^{P \times Q}} \sum_{j=1}^J \int_0^T \left| \sum_{l=1}^L \mu_l \psi_{\partial_t^n X_m^j}(t, \xi_l) - \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq} \mathbf{g}^p(u_m^j(t)) \otimes \mathbf{k}^q(X_m^j(t)) - v_m^j(t) \right|^2 dt. \quad (6.13)$$

### Discrétisation en temps

La discrétisation en temps du problème (6.13) peut se faire de différentes manières (voir paragraphe 5.2) ; on ne présentera ici qu'une seule méthode.

Après quadrature de l'intégrale, le problème (6.13) est approché par :

$$\min_{(\mu, a) \in \mathbb{C}^L \times \mathbb{R}^{P \times Q}} \left\| G_{u_m, X_m} \left[ \frac{\mu}{a} \right] - v_m \right\|_{\mathbb{C}^{J \times K}}^2, \quad (6.14)$$

avec  $\|z\|_{\mathbb{C}^{J \times K}}^2 = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K |c_{j,k}|^2 \Delta t_k$ ,

$$\begin{aligned} \mu &= (\mu_1, \dots, \mu_L)^T, \quad a = (a_{11}, \dots, a_{1Q}, a_{21}, \dots, a_{P1}, \dots, a_{PQ})^T, \\ v_m &= (v_m^{1,1}, \dots, v_m^{1,K}, v_m^{2,1}, \dots, v_m^{J,1}, \dots, v_m^{J,K})^T, \end{aligned} \quad (6.15)$$

et  $G_{u_m, X_m}$  la matrice définie par :

$$G_{u_m, X_m} = \begin{bmatrix} G_{u_m^1, X_m^1} \\ \vdots \\ G_{u_m^J, X_m^J} \end{bmatrix} \quad \text{avec } G_{u_m^j, X_m^j} = [\Psi^j | K^{j1} | \dots | K^{jP}],$$

où  $\Psi_{kl}^j = \psi_{\partial_t^n X_m^j}^{l,k}$ ,  $K_{kq}^{jp} = \mathbf{g}^p(u_m^{j,k}) \mathbf{k}^q(X_m^{j,k})$ ,

$\psi_{\partial_t^n X_m^j}^{l,k}$  étant une approximation de  $\psi_{\partial_t^n X_m^j}(t_k, \xi_l)$  obtenue par intégration numérique de l'équation d'état de la réalisation diffusive de  $H(\partial_t)$  (voir schéma numérique du paragraphe 2.2.4) :

$$\psi_{\partial_t^n X_m^j}^{l,k} = e^{\gamma(\xi_l) \Delta t_k} \psi_{\partial_t^n X_m^j}^{l,k-1} + \frac{e^{\gamma(\xi_l) \Delta t_k} - 1}{\gamma(\xi_l)} \partial_t^n X_m^{j,k-1}, \quad \psi_{\partial_t^n X_m^j}^{l,0} = 0, \quad k = 1 : K, \quad l = 1 : L. \quad (6.16)$$

Sa solution est donnée par :

$$(\mu^*, a^*) = G_{u_m, X_m}^\dagger v_m, \quad (6.17)$$

où :

$$G_{u_m, X_m}^\dagger = (G_{u_m, X_m}^* D G_{u_m, X_m}^\dagger)^{-1} G_{u_m, X_m}^* D \quad \text{avec } D = \begin{bmatrix} \Delta t_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \Delta t_K \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

### Formulation récursive

Les estimés  $\mu^*$  et  $a^*$  obtenus peuvent ensuite être utilisés comme initialisation d'une méthode récursive afin d'améliorer la qualité de l'estimation. En supposant l'opérateur  $H(\partial_t)$  connu et égal à  $H^*(\partial_t)$ , on identifie à nouveau la fonction  $f$ , cette fois ci de manière indépendante. A partir de l'estimation  $f_1^*$  ainsi obtenue, on identifie ensuite  $H(\partial_t)$ , et on réitère jusqu'à ce que la qualité de l'estimation soit suffisante. La convergence d'une telle méthode reste encore à étudier.

### 6.3 Application à un exemple académique

On considère le modèle de Volterra :

$$\partial_t^{\frac{1}{2}} X = -\frac{1}{c} \arctan(cX) + v, \text{ avec } c = 10^4. \quad (6.19)$$

L'opérateur  $\partial_t^{\frac{1}{2}}$  est  $\gamma$ -diffusif au sens large de degré 1 et peut être réalisé avec un contour  $\gamma$  de type secteur, défini par :

$$\gamma(\xi) = |\xi| e^{i \operatorname{sign}(\xi)(\frac{\pi}{2} + \alpha)}, \text{ avec } \alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}]. \quad (6.20)$$

Les données  $\{v_m^{j,k}, X_m^{j,k}\}_{k=0:K}$  utilisées pour l'identification sont obtenues par simulation numérique de (6.19), l'opérateur  $H(\partial_t)^{-1} = \partial_t^{-\frac{1}{2}}$  étant réalisé au moyen d'une réalisation diffusive avec 150 points de discrétisation en  $\xi$  répartis de manière géométrique entre  $\xi_1 = 10^{-3}$  et  $\xi_L = 10^6$ , et un contour  $\gamma$  défini par (6.20) avec  $\alpha = \frac{88\pi}{180}$ . Le diagramme de Bode de la réponse fréquentielle de l'opérateur ainsi approché peut être comparé à celui de l'opérateur théorique  $\partial_t^{-\frac{1}{2}}$  en figure 6.1. On note que l'opérateur est très bien approché dans la bande fréquentielle  $[10^{-1}, 10^4]$ .

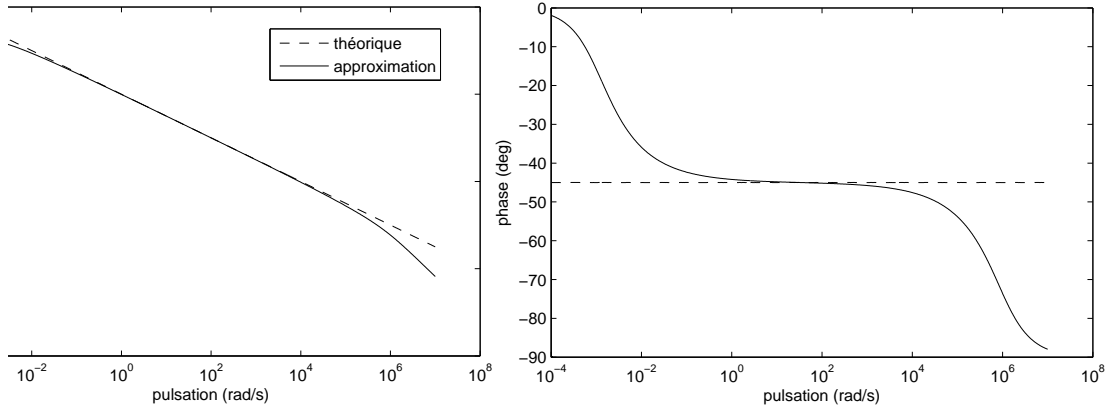


FIG. 6.1 – Fonctions de transfert de l'opérateur  $\partial_t^{-1/2}$  et de sa réalisation via représentation diffusive qui a été utilisée lors des simulations

On considère une discrétisation temporelle  $\{t_k\}_{k=0:K}$  définie par :

$$t_0 = 0 \text{ et } t_k = t_{k-1} + \Delta t_k, \quad k = 1 : K \text{ avec } K = 6 \cdot 10^5 \text{ et } \Delta t_k = 10^{-5}. \quad (6.21)$$

Les entrées  $\{v^{j,k}\}_{k=0:K}$  considérées sont obtenues par filtrage de bruits blancs centrés d'écart-type  $\sigma = 1$  ; elle sont supposées connues (pas de bruit de mesure) :

$$v_m^{j,k} = v^k. \quad (6.22)$$

On note  $\{X^{j,k}\}_{k=0:K}$  la sortie discrète associée à l'entrée  $\{v^{j,k}\}_{k=0:K}$ . Les  $J$  trajectoires discrètes de sortie mesurées sont obtenues à partir des  $\{X^{j,k}\}_{k=0:K}$  par addition de bruits blancs centrés numériques  $\{\varepsilon^{j,k}\}_{k=0:K}$ ,  $j = 1 : J$  d'écart type  $\sigma_\varepsilon$  :

$$X_m^{j,k} = X^{j,k} + \varepsilon^{j,k}. \quad (6.23)$$

On utilise  $J = 4$  trajectoires.

Dans un premier temps, on suppose les bruits de mesure  $\varepsilon^{j,k}$  nuls. On identifie  $H(\partial_t)$  en utilisant un contour  $\gamma$  de la forme (6.20) avec  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  et en considérant 100 points de discrétisation en  $\xi$  répartis géométriquement entre  $\xi_1 = 10^{-1}$  et  $\xi_L = 10^4$ . Enfin, on cherche une approximation de  $f : X \mapsto -\frac{1}{c} \arctan(cX)$  sous forme de combinaison linéaire de 30 fonctions "chapeaux". Les résultats obtenus sont donnés en figure 6.2.

On constate que l'identification de  $H(\partial_t)$  est bonne dans la bande fréquentielle couverte par les  $\{\xi_l\}_{l=1:L}$ . Pour ce qui est de la fonction non linéaire  $f$ , on note que l'écart entre  $f(x)$  et son estimé  $f^*(x)$  est d'autant plus grand que  $x$  s'éloigne de 0. Ceci s'explique par le nombre de données disponibles : les valeurs de  $x$  proches de 0 ont plus de poids dans l'identification que celles qui en sont loin car elles sont représentées en plus grand nombre. Pour quantifier la qualité de l'identification de  $H(\partial_t)$ , on utilise les quantités  $E$  et  $E_{\text{sup}}$  définies au paragraphe 5.3.1 par (5.67) et (5.68) ; on a :

$$E = 3.5459 \cdot 10^{-9} \text{ et } E_{\text{sup}} = 0.6830. \quad (6.24)$$

Pour la fonction  $f$ , on introduit les quantités  $E^f$  et  $E_{\text{sup}}^f$  définies par :

$$E^f = \frac{\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} |f^*(X) - f(X)| dX}{\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} |f(X)| dX} \text{ et } E_{\text{sup}}^f = \sup_{X \in [X_{\min}, X_{\max}]} \frac{|f^*(X) - f(X)|}{|f(X)|}, \quad (6.25)$$

avec  $f^*$  l'estimation de  $f$  obtenue par la méthode d'identification, et  $X_{\min}$  et  $X_{\max}$  les valeurs minimale et maximale atteintes par les jeux de données utilisés pour l'identification. On obtient :

$$E^f = 0.0535 \text{ et } E_{\text{sup}}^f = 0.3602. \quad (6.26)$$

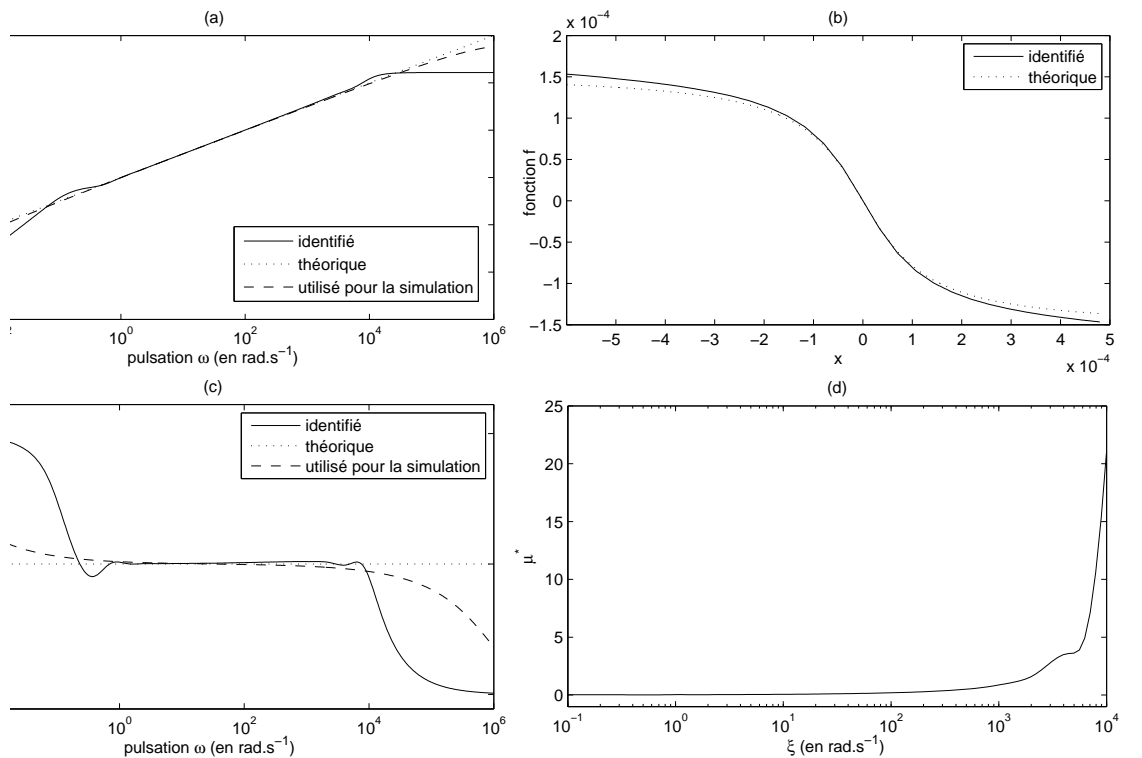


FIG. 6.2 – Identification de  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}}$  et  $f = -\frac{1}{c} \arctan(c \cdot)$  sans bruit de mesure. (a) et (c) : gain et phase de la réponse impulsionnelle de l'opérateur identifié comparé à l'opérateur théorique  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}}$  - (b) : fonction identifiée  $f^*$ - (d) :  $\gamma$ -symbole identifié  $\mu^*$ .

On suppose à présent les mesures  $X_m^{j,k}$  bruitées avec  $\sigma_\varepsilon = 10^{-5}$ , et on garde les mêmes paramètres d'identification pour  $H(\partial_t)$  et  $f$ . On obtient les résultats de la figure 6.3. On note que l'identification de  $H(\partial_t)$  reste de très bonne qualité. Celle de  $f$  s'est quant à elle détériorée ; son allure reste néanmoins proche de la fonction théorique. On a :

$$E = 2.5277 \times 10^{-8}, E_{\text{sup}} = 1.0882, E^f = 0.0225 \text{ et } E_{\text{sup}}^f = 10.6449. \quad (6.27)$$

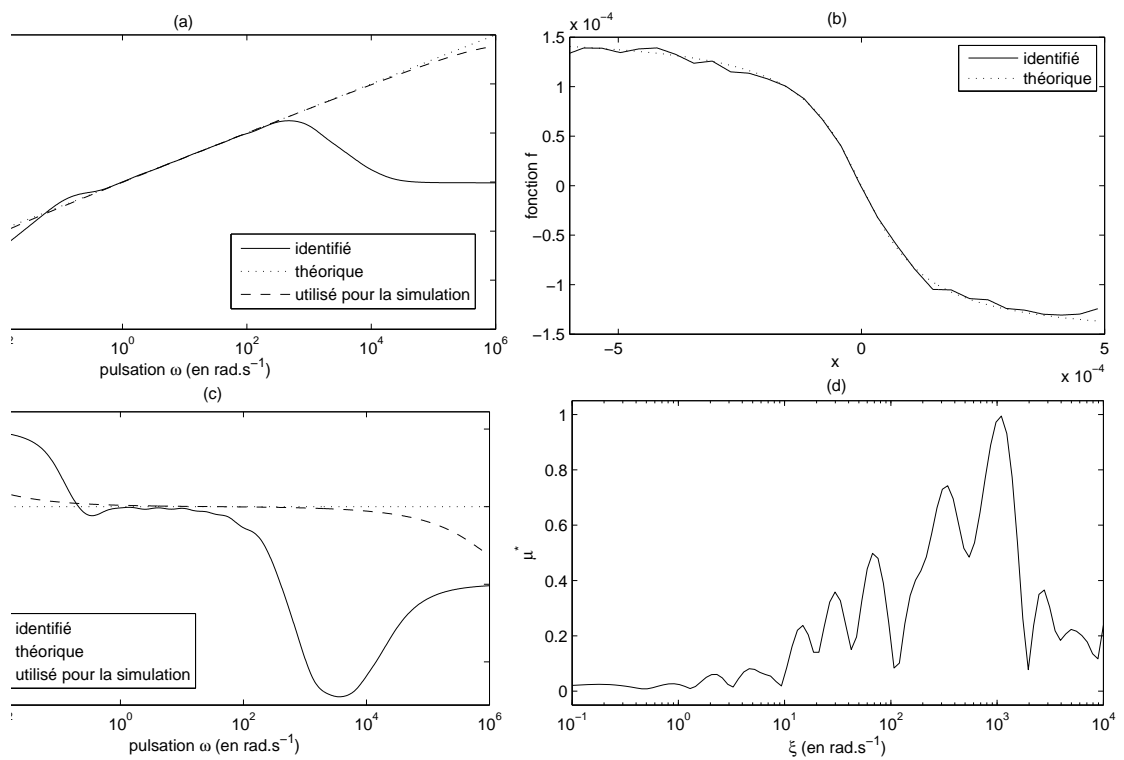


FIG. 6.3 – Identification de  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}}$  et  $f = -\frac{1}{c} \arctan(c \cdot)$  avec bruit de mesure ( $\sigma_\varepsilon = 10^{-5}$ ). (a) et (c) : gain et phase de la réponse impulsionnelle de l'opérateur identifié comparé à l'opérateur théorique  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}}$  - (b) : fonction identifiée  $f^*$ - (d) :  $\gamma$ -symbole identifié  $\mu^*$ .

# Chapitre 7

## Identification par suppression du terme non linéaire

La difficulté principale rencontrée lors de l'identification d'un système de Volterra vient du couplage qu'il y a entre la partie dynamique linéaire caractérisée par l'opérateur  $H(\partial_t)$  et la partie non linéaire statique, caractérisée par la fonction  $f$ . La méthode proposée dans ce paragraphe permet de découpler les identifications : via une transformation adaptée du modèle, on supprime dans un premier temps le terme non linéaire de l'équation et on identifie l'opérateur  $H(\partial_t)$ . La fonction  $f$  peut ensuite être identifiée par interpolation à partir du "pseudo-graphe" déduit de l'opérateur identifié  $H^*(\partial_t)$  et des données.

### 7.1 Présentation de la méthode

La méthode proposée dans ce paragraphe peut être présentée de manière très générale. Etant donnés trois espaces de Hilbert séparables  $E, F, G$ , une fonction non linéaire  $g : E \rightarrow G$  et  $A : F \rightarrow G$  linéaire, on considère le modèle abstrait :

$$g(x) + Ay + z = 0, \quad (7.1)$$

où  $x, y, z$  sont des trajectoires définies sur  $t \in [0, T]$  à valeurs respectivement dans  $E, F, G$ . Le problème considéré consiste à estimer à la fois  $A$  et  $g$  à partir de trajectoires données (éventuellement) bruitées  $x_m, y_m, z_m$ , c'est à dire à résoudre :

$$\min_{A, g} \|g(x_m) + Ay_m + z_m\|^2, \quad (7.2)$$

avec  $\|\cdot\|$  une norme hilbertienne, par exemple  $\int_0^T \|\cdot\|_G^2 dt$ ,  $x_m = x + \varepsilon_1$ ,  $y_m = y + \varepsilon_2$ ,  $z_m = z + \varepsilon_3$  où  $(x, y, z)$  est solution de (7.1) et  $\varepsilon_i$  sont des bruits (suffisamment petits).

Lorsque  $g$  est connue, l'opérateur  $A$  peut être aisément identifié du fait de sa linéarité, le problème (7.2) se réduisant alors au problème standard de moindres carrés :

$$\min_A \|\mathcal{Y} \cdot A - b\|^2, \quad (7.3)$$

avec  $\mathcal{Y} \cdot A = Ay$  et  $b = -g(x) - z$ . La solution formelle est alors obtenue par pseudo-inversion de l'opérateur  $\mathcal{Y}$  [6] :

$$A^* = \mathcal{Y}^\dagger \cdot b. \quad (7.4)$$

La méthode présentée ci-dessous permet de se ramener à un cas semblable et d'identifier  $A$  indépendamment de  $g$ . Pour cela, on transforme le modèle (7.1) de sorte que le terme  $g(x)$  soit *supprimé*<sup>1</sup> dans un sous ensemble d'équations, spécifiquement défini à partir des données  $x$ . Sous certaines hypothèses fréquemment satisfaites en pratique, ce "sous-modèle" se révèle suffisant pour obtenir une bonne estimation de  $A$  sous la forme (7.4). Une fois l'opérateur  $A$  correctement estimé, on déduit aisément une estimation de  $g$  via les méthodes standard.

<sup>1</sup>A une constante près  $g_0 := g(x(t_0)) \in G$  qui sera identifié simultanément.

### 7.1.1 L'opérateur de différences $D_{x,\varepsilon}$

Soit  $\mathbf{X}$  un espace de Banach et  $\Omega$  un espace métrique complet. On note  $C^0(\Omega; \mathbf{X})$  l'espace de Banach des fonctions continues définies sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $\mathbf{X}$ . Cet espace est muni de la norme :

$$\|x\| = \sup_{\xi \in \Omega} \|x(\xi)\|_{\mathbf{X}}. \quad (7.5)$$

On se donne un espace  $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$  et on définit :

$$C^0(\Omega, \mathbf{X}_0) := \{x \in C^0(\Omega; \mathbf{X}) \text{ tel que } \forall \xi \in \Omega, x(\xi) \in \mathbf{X}_0\}. \quad (7.6)$$

Soient  $\Omega^j, j = 1 : J$  des espaces métriques<sup>2</sup>. La norme sur l'espace produit  $\prod_{j=1}^J C^0(\Omega^j; \mathbf{X})$  est définie par :

$$\|x\| = \sup_j \sup_{\xi \in \Omega^j} \|x^j(\xi)\|_{\mathbf{X}}. \quad (7.7)$$

Soit  $\mathbf{Y}$  un espace de Banach et  $g : \mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{Y}$  une fonction continue pour la topologie induite sur  $\mathbf{X}_0$ . Pour tout  $x \in \prod_{j=1}^J C^0(\Omega^j; \mathbf{X}_0)$ , on note par convention :

$$g \circ x = (g(x^j))_{j=1:J} \in \prod_{j=1}^J C^0(\Omega^j; \mathbf{Y}). \quad (7.8)$$

On note également :

$$\Omega^{i,j} := \Omega^i \times \Omega^j. \quad (7.9)$$

**Définition 139** On note  $D$  l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} D : \prod_{j=1}^J C^0(\Omega^j; \mathbf{X}) &\longrightarrow \prod_{i,j=1}^J C^0(\Omega^{i,j}; \mathbf{X}) \\ x = (x^j)_{j=1:J} &\longmapsto Dx = (D^{i,j}x)_{i,j=1:J} \end{aligned} \quad (7.10)$$

avec

$$\forall i, j \in \{1 : J\}, \forall t, \tau \in \Omega^{i,j}, (D^{i,j}x)(t, \tau) = x^i(t) - x^j(\tau). \quad (7.11)$$

L'opérateur  $D$  est linéaire (évident) et continu : la continuité de  $D$  découle de celle de l'opérateur  $+$  dans les espaces de Banach ; c'est une propriété essentielle, notamment pour les traitements numériques. On montre également la propriété suivante :

**Proposition 140** Pour tout  $x \in \prod_{j=1}^J C^0(\Omega^j; \mathbf{X}_0)$  et pour toute fonction  $g : \mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{Y}$  linéaire, on a :

$$D(g \circ x) = g \circ (Dx). \quad (7.12)$$

**Preuve.** On a :  $D(g \circ x) = (D^{i,j}(g \circ x))_{i,j=1:n}$  avec,  $\forall i, j \in \{1 : J\}, \forall t, \tau \in \Omega^{i,j}$  :

$$\begin{aligned} (D^{i,j}(g \circ x))(t, \tau) &= (g \circ x)^i(t) - (g \circ x)^j(\tau) = (g(x^i))(t) - (g(x^j))(\tau) \\ &= g(x^i(t)) - g(x^j(\tau)) = g(x^i(t) - x^j(\tau)) = g \circ ((D^{i,j}x)(t, \tau)). \end{aligned}$$

■

On considère ensuite les sous-ensembles de  $\Omega^{i,j}$  des couples  $(t, \tau)$  tels que  $x^i(t)$  soit "proche" de  $x^j(\tau)$  :

$$\Omega_{x,\varepsilon}^{i,j} := \{(t, \tau) \in \Omega^{i,j}; \|(D^{i,j}x)(t, \tau)\|_{\mathbf{X}} \leq \varepsilon\}. \quad (7.13)$$

En figure 7.1 sont donnés deux exemples de couple  $(t, \tau) \in \Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}$  dans le cas où  $i = j$  puis dans le cas où  $i \neq j$ .

<sup>2</sup>En pratique,  $\Omega^j$  sera un intervalle en temps de la forme  $[t_0^j, t_f^j]$ .



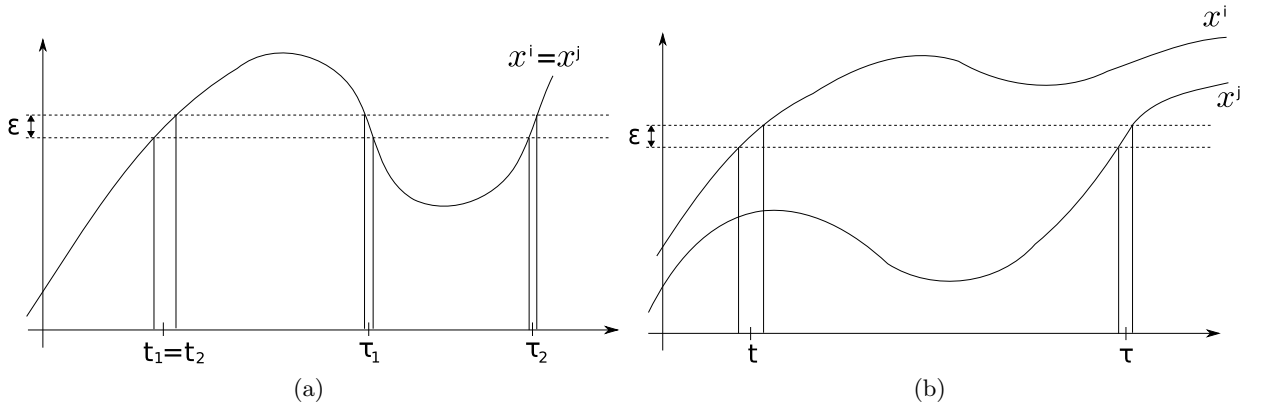


FIG. 7.1 – Exemple de  $(i, i, t, \tau)$  et de  $(i, j, t, \tau)$  tels que  $\|D^{i,i}x(t, \tau)\| \leq \varepsilon$  et  $\|D^{i,j}x(t, \tau)\| \leq \varepsilon$ .

**Remarque 141** Les ensembles  $\Omega_{x,\varepsilon}^{i,i}$  ne sont jamais vides puisque  $(D^{i,i}x)(t, t) = 0$ . De plus, du fait de la continuité de  $Dx$ , on a  $\bigcap_{\varepsilon > 0} \Omega_{x,\varepsilon}^{i,j} = \Omega_{x,0}^{i,j}$ .

Pour tout  $i, j \in \{1 : J\}$ , on note alors  $D_{x,\varepsilon}^{i,j}$  l'opérateur de différences sur l'ensemble  $\Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}$  :

$$\begin{aligned} D_{x,\varepsilon}^{i,j} : \prod_{j=1}^J C^0(\Omega^j; \mathbf{X}) &\longrightarrow C^0(\Omega^{i,j}; \mathbf{X}) \\ y = (y^j)_{j=1:J} &\longmapsto D_{x,\varepsilon}^{i,j}y = (D^{i,j}y)|_{\Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}}, \end{aligned} \quad (7.14)$$

et on pose, par simplicité :

$$D_{x,\varepsilon} := (D_{x,\varepsilon}^{i,j})_{i,j=1:J}. \quad (7.15)$$

**Théorème 142** Pour tout  $x \in \prod_{j=1}^J C^0(\Omega^j; \mathbf{X}_0)$  et pour toute fonction  $g : \mathbf{X}_0 \longrightarrow \mathbf{Y}$  :

- (1)  $D_{x,0}x = 0$ ,
- (2)  $D_{x,0}(g \circ x) = 0$ ,
- (3)  $\|D_{x,\varepsilon}(x)\| \leq \varepsilon$
- (4)  $\forall (t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) \in \Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}$  tel que  $(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (t, \tau) \in \Omega_{x,0}^{i,j}$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ (D_{x,\varepsilon}^{i,j}(g \circ x))(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) \right] = 0_{\mathbf{X}}$ ,
- (5) si  $g$  est  $k$ -Lipschitz, alors  $\|D_{x,\varepsilon}(g \circ x)\| \leq k\varepsilon$ .

**Preuve.** (1)  $\forall i, j \in \{1 : J\}$ ,  $\forall (t, \tau) \in \Omega_{x,0}^{i,j}$ ,  $(D^{i,j}x)(t, \tau) = x^i(t) - x^j(\tau)$ . Or,  $(t, \tau) \in \Omega_{x,0}^{i,j}$  donc  $\|(D^{i,j}x)(t, \tau)\|_E \leq 0$  d'où :  $(D^{i,j}x)(t, \tau) = 0$ .

(2)  $\forall i, j \in \{1 : J\}$ ,  $\forall (t, \tau) \in \Omega_{x,0}^{i,j}$ ,  $(D^{i,j}x)(t, \tau) = 0$  c'est à dire  $x^i(t) = x^j(\tau)$  d'où  $g(x^i(t)) = g(x^j(\tau)) \iff (g(x^i))(t) = (g(x^j))(\tau)$ . On a alors :  $(D^{i,j}(g \circ x))(t, \tau) = (g(x^i))(t) - (g(x^j))(\tau) = 0$ .

(3)  $\|D_{x,\varepsilon}(x)\| = \sup_{i,j} \sup_{(t,\tau) \in \Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}} \|(D^{i,j}x)(t, \tau)\|_{\mathbf{X}} \leq \varepsilon$  par définition de  $\Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}$ .

(4)  $\forall (t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) \in \Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}$ ,  $(D_{x,\varepsilon}^{i,j}(g \circ x))(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = g(x^i(t_\varepsilon)) - g(x^j(\tau_\varepsilon))$ . Comme  $(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (t, \tau) \in \Omega_{x,0}^{i,j}$  et par continuité de  $g$  et de  $x$  on a alors :  $(D_{x,\varepsilon}^{i,j}(g \circ x))(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = g(x^i(t)) - g(x^j(\tau)) = (D_{x,0}^{i,j}(g \circ x))(t, \tau) = 0$  d'après (2).

(5)  $\|D_{x,\varepsilon}(g \circ x)\| = \sup_{i,j} \sup_{(t,\tau) \in \Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}} \|(D^{i,j}(g \circ x))(t, \tau)\|_{\mathbf{Y}} = \sup_{i,j} \sup_{(t,\tau) \in \Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}} \|g(x^i(t)) - g(x^j(\tau))\|_{\mathbf{Y}}$   
 $\leq \sup_{i,j} \sup_{(t,\tau) \in \Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}} k \|x^i(t) - x^j(\tau)\|_{\mathbf{X}} = k \sup_{i,j} \sup_{(t,\tau) \in \Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}} \|(D^{i,j}x)(t, \tau)\|_{\mathbf{X}} \leq k\varepsilon$  par définition de  $\Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}$ . ■

**Remarque 143** La convergence (5) est uniforme alors qu'en (4), on utilise une topologie plus faible de convergence simple. De ce fait, on peut s'attendre à ce que les traitements numériques soient plus délicats lorsque  $g$  n'est pas Lipschitzienne. Cependant, dans beaucoup de situations concrètes, la fonction  $g$  est Lipschitzienne sur des sous-ensembles  $E_\eta \subset E_0$ , de telle sorte que la propriété  $\|D_{x,\varepsilon}(g_\eta \circ x)\| \leq k_\eta \varepsilon$  reste vraie pour toute fonction  $g_\eta$  (définie sur  $E_0$ )  $k_\eta$ -Lipschitz-continue telle que  $g_\eta|_{E_\eta} = g|_{E_\eta}$ . On verra sur un exemple concret (avec  $E = G = \mathbb{R}$ ,  $g = \ln$ ,  $E_\eta = [\eta, +\infty[$ ) qu'une telle propriété (couplée avec (4)) peut être suffisante pour obtenir de bons résultats d'identification.

La propriété (2) découle de la nature statique de la fonction  $g$  qui se traduit par :

$$x^i(t) = x^j(\tau) \implies g(x^i(t)) = g(x^j(\tau)). \quad (7.16)$$

Cette propriété est essentielle; elle permet de supprimer le terme non linéaire  $g$  dans un sous-ensemble d'équations directement déduit de  $x$ .

Par commodité, on note  $\Omega_{x,\varepsilon}$  l'ensemble, appelé  $\varepsilon$ -noyau de  $Dx$ , défini par :

$$\Omega_{x,\varepsilon} := \bigcup_{i,j} (\{(i,j)\} \times \Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}); \quad (7.17)$$

c'est l'ensemble de tous les  $(i,j,t,\tau)$  tels que  $\|x^i(t) - x^j(\tau)\|_{\mathbf{X}} \leq \varepsilon$ . Ainsi, pour tout  $y \in \prod_{j=1}^J C^0(\Omega^j; \mathbf{Y})$ , la fonction  $D_{x,\varepsilon} y$  est simplement définie par :

$$\begin{aligned} D_{x,\varepsilon} y : \quad \Omega_{x,\varepsilon} &\rightarrow \mathbf{Y} \\ (i,j,t,\tau) &\mapsto y^i(t) - y^j(\tau). \end{aligned} \quad (7.18)$$

### 7.1.2 Transformation de l'équation via l'opérateur de différences D

On considère à présent le modèle (7.1) :  $g \circ x + Ay + z = 0$ , avec désormais  $(x,y,z)$  un vecteur de trajectoires à valeurs dans  $E^J \times F^J \times G^J$ , avec  $x^j, y^j, z^j$  définis sur  $\Omega^j = [t_0^j, t_f^j]$ , et on applique l'opérateur D aux deux membres de l'équation. On a alors :

**Proposition 144** Pour tout  $(x,y,z) \in \prod_{j=1}^J C^0(\Omega^j; E \times F \times G)$ , il y a équivalence<sup>3</sup> entre le modèle (7.1) et le modèle :

$$\begin{cases} D(g \circ x) + AD(y) + D(z) = 0 \\ g_0 + Ay_0 + z_0 = 0, \end{cases} \quad (7.19)$$

avec  $k \in \{1 : J\}$  et  $t_*^k \in \Omega^k$  choisis arbitrairement,  $g_0 := (g \circ x^k)(t_*^k) \in G$ ,  $y_0 := y^k(t_*^k) \in G$  et  $z_0 := z^k(t_*^k) \in G$ .

**Preuve.** L'implication (7.1)  $\implies$  (7.19) est évidente.

Montrons que (7.19)  $\implies$  (7.1). On a :

$$\forall i, j \in \{1 : J\}, \forall (t, \tau) \in \Omega^{i,j}, g(x^i(t)) - g(x^j(\tau)) + A(y^i(t) - y^j(\tau)) + z^i(t) - z^j(\tau) = 0, \quad (7.20)$$

d'où :

$$\forall i \in \{1 : J\}, \forall t \in \Omega^i, g(x^i(t)) - g(x^k(t_*^k)) + A(y^i(t) - y^k(t_*^k)) + z^i(t) - z^k(t_*^k) = 0, \quad (7.21)$$

et puisque  $(g \circ x^k)(t_*^k) + Ay^k(t_*^k) + z^k(t_*^k) = 0$  :

$$\forall i \in \{1 : J\}, \forall t \in \Omega^i, g \circ x^i(t) + Ay^i(t) + z^i(t) = 0. \quad (7.22)$$

■

**Remarque 145** Du fait que D est un opérateur de différences, on perd l'équivalence lorsqu'on l'applique seul au modèle (7.1). Pour récupérer l'équivalence, il faut considérer une condition "initiale" en un temps  $t_*^k$ . Notons que cette condition initiale n'est pas forcément unique : on peut effectivement considérer  $j_0 < J$  couples  $(k, t_*^k) \in \{1 : J\} \times \Omega^i$  tels que  $(g \circ x^k)(t_*^k) + Ay^k(t_*^k) + z^k(t_*^k) = 0$ . On se ramène alors à un modèle de la forme (7.19) avec  $g_0 := ((g \circ x^k)(t_*^k))_k \in G^{j_0}$ ,  $y_0 := (y^k(t_*^k))_k \in G^{j_0}$  et  $z_0 := (z^k(t_*^k))_k \in G^{j_0}$ . En pratique on choisira les  $j_0$  couples de telle sorte que  $g_0 = g_{0*} \times (1, \dots, 1)^T$ ,  $g_{0*} \in E$  : ainsi un seul coefficient  $g_{0*}$  sera à identifier.

<sup>3</sup>au sens où  $(x,y,z)$  solution de (7.1) si et seulement si  $(x,y,z)$  solution de (7.19).

### 7.1.3 Réduction au sous-ensemble $\Omega_{x,0}$

On considère à présent le modèle équivalent (7.19) sur le sous-ensemble  $\Omega_{x,0}$  de  $\cup_{i,j} (\{1 : J\}^2 \times \Omega^{i,j})$ , ce qui revient à appliquer l'opérateur  $D_{x,0}$  au lieu de l'opérateur  $D$ . D'après la propriété (2) de la proposition 142, on obtient alors :

$$\begin{cases} A D_{x,0} y + D_{x,0} z = 0 \\ g_0 + A y_0 + z_0 = 0. \end{cases} \quad (7.23)$$

L'avantage de ce modèle est que la fonction non linéaire  $g$  a été supprimée et ne se retrouve que dans l'équation de condition initiale alors que l'opérateur  $A$  et l'inconnue  $g_0$  interviennent de façon linéaire. Formellement, ces inconnues pourront être identifiées par résolution du problème :

$$\min_{(A, g_0)} \|\mathcal{Y}_0 \cdot (A, g_0) + (D_{x,0} z, z_0)\|_{(L^2(\Omega_{x,0}; G)) \times G^{j_0}}^2 \quad (7.24)$$

avec :

$$\|(Z_1, z_2)\|_{(L^2(\Omega_{x,0}; G)) \times G^{j_0}}^2 = \sum_{i,j=1}^J \int_{\Omega_{x,0}^{i,j}} \|Z_1(i, j, t, \tau)\|_G^2 d\zeta + \|z_2\|_{G^{j_0}}^2, \quad (7.25)$$

où  $\zeta$  est un paramétrage de l'espace  $\Omega_{x,0}$ . La solution de ce problème s'obtient par pseudo-inversion de l'opérateur  $\mathcal{Y}_0 : (A, g_0) \mapsto (A D_{x,0} y, g_0 + A y_0)$ .

La restriction au sous-ensemble  $\Omega_{x,0}$  peut faire perdre l'équivalence entre les modèles (7.23) et (7.1). Cette équivalence peut cependant être préservée si  $\Omega_{x,0}$  est suffisamment riche, ce qui sera le cas, lorsque la dimension de  $E$  est égale à 1, si l'on considère suffisamment de trajectoires sur un temps  $T$  suffisamment long.

**Remarque 146** *Grâce au théorème 142, un préfiltrage des données  $x, y$  et  $z$  par un opérateur  $Q(\partial_t)$  peut être envisagé; les nouvelles données préfiltrées sont alors  $x' := Q(\partial_t)x, y' = Q(\partial_t)y$  et  $z' = Q(\partial_t)z$ . En effet, en appliquant  $Q(\partial_t)$  à (7.1), on obtient un modèle équivalent  $Q(\partial_t)g(x) + Q(\partial_t)Ay + Q(\partial_t)z = 0$ ; si, en un certain sens,  $Q(\partial_t)g(x) \simeq g(x')$ , alors  $D_{x',0}Q(\partial_t)g(x) \simeq D_{x',0}g(x') = 0$ . Un tel préfiltrage pourra être utile en pratique, voire nécessaire, pour la construction de l'ensemble  $\Omega_{x,0}$ .*

En pratique, grâce aux propriétés (4) et (5) de la proposition 142 qui permettent de négliger (en un certain sens) le terme  $D_{x,\varepsilon}(g \circ x)$ , (7.24) est remplacé par le problème affaibli suivant, basé sur l'opérateur  $\mathcal{Y}_\varepsilon : (A, g_0) \mapsto (A D_{x_m,\varepsilon} y_m, g_0 + A y_{m0})$  :

$$\min_{(A, g_0)} \|\mathcal{Y}_\varepsilon \cdot (A, g_0) + (D_{x_m,\varepsilon} z_m, z_{m0})\|_{(L^2(\Omega_{x_m,\varepsilon}; G)) \times G^{j_0}}^2, \quad (7.26)$$

dont la solution formelle est  $(A^*, g_0^*) = -\mathcal{Y}_\varepsilon^\dagger \cdot (D_{x_m,\varepsilon} z_m, z_{m0})$ . Si les données  $x_m, y_m, z_m$  permettent d'obtenir une estimation  $(A^*, g_0^*) \simeq (A, g_0)$  (en particulier si  $J$  est suffisamment grand et si les bruits  $\varepsilon_i$  sont suffisamment petits), alors, grâce aux propriétés de continuité, on peut s'attendre à ce que,  $\forall (i, j, t, \tau) \in \Omega_{x,\varepsilon}$  :

$$A^* (\tilde{y}^i(t) - y_m^j(\tau)) + z_m^i(t) - z_m^j(\tau) \simeq 0. \quad (7.27)$$

De plus, bien que  $g$  soit encore inconnue à ce stade, on peut également s'attendre à ce que  $\forall i \in \{1 : J\}$ ,  $g(x_m^i) + A^* y_m^i + z_m^i \simeq 0$ , c'est à dire :

$$g(x_m^i(t)) + A^* y_m^i(t) + z_m^i(t) \simeq 0, \forall t \in [t_0^i, t_f^i], \quad (7.28)$$

que l'on peut également écrire sous la forme :

$$g(x_m^i(t)) \simeq -A y_m^i(t) - z_m^i(t), \forall t \in [t_0^i, t_f^i]. \quad (7.29)$$

A partir de là, l'identification de la fonction non linéaire  $g$  peut être obtenue au moyen de méthodes classiques de régression mises en oeuvre sur le "pseudo-graphe" de  $g$  (dédié des données disponibles) :

$$\mathcal{G}_g = \bigcup_{j=\{1:J\}, t \in [t_0^j, t_f^j]} \{(x_m^j(t), -A^* y_m^j(t) - z_m^j(t))\} \subset E \times G. \quad (7.30)$$

### 7.1.4 Cas où $g$ est variable d'une trajectoire à l'autre

On suppose à présent que la fonction  $g$  peut changer d'une trajectoire à l'autre, et que l'on a, pour tout  $j = 1 : J$  :

$$g_j(x^j) + Ay^j + z^j = 0, \quad (7.31)$$

ce que l'on note :

$$g \circ x + Ay + z = 0, \quad (7.32)$$

avec  $g = (g_1, \dots, g_J)^T$  et  $g \circ x = (g_j(x_j))_{j=1:J}$ . Contrairement au cas précédent,  $x^i(t) = x^j(\tau) \not\Rightarrow g_i(x^i(t)) = g_j(x^j(\tau))$ , sauf dans le cas où  $i = j$ . On considère donc le sous ensemble de  $\Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}$ , noté  $\Omega_{x,\varepsilon}^j$ , défini par :

$$\Omega_{x,\varepsilon}^j := \{(t, \tau) \in \Omega^{j,j}; \|(D^{j,j}x)(t, \tau)\|_{\mathbf{X}} \leq \varepsilon\}. \quad (7.33)$$

En notant  $\Omega_{x,\varepsilon} := \bigcup_j (\{j\} \times \Omega_{x,\varepsilon}^j)$ , et en définissant l'opérateur de différence  $D_{x,\varepsilon}$  de la manière suivante :

$$D_{x,\varepsilon} y : \begin{array}{ccc} \Omega_{x,\varepsilon} & \rightarrow & \mathbf{Y} \\ (j, t, \tau) & \mapsto & y^j(t) - y^j(\tau). \end{array} \quad (7.34)$$

le théorème 142 reste valable et la méthode d'identification peut alors être appliquée.

### 7.1.5 Application aux modèles de Volterra sous représentation diffusive

Le modèle de Volterra

$$H(\partial_t)X = f(u, X) + v \quad (7.35)$$

est de la forme (7.1). En effet, en supposant que  $H(\partial_t)$  est  $\gamma$ -diffusif de degré  $n$ , et en notant  $\mu \in \Delta'_\gamma$  le  $\gamma$ -symbole de  $H(\partial_t) \circ \partial_t^{-n}$ , on a :

$$H(\partial_t)X = \langle \mu, \partial_t^n \psi_X \rangle, \quad (7.36)$$

avec  $\psi_X$  la représentation diffusive de  $X$ . Le modèle (7.35) s'écrit alors de manière équivalente :

$$\langle \mu, \partial_t^n \psi_X \rangle - f \circ (u, X) - v = 0. \quad (7.37)$$

L'opérateur linéaire  $\varphi \mapsto \langle \mu, \varphi \rangle$  étant statique :

$$\forall t, (\langle \mu, \varphi \rangle)(t) = \langle \mu, \varphi(t) \rangle, \quad (7.38)$$

le modèle (7.37) peut s'écrire (contrairement à (7.35) qui est un modèle non local) :

$$\forall t, \langle \mu, \partial_t^n \psi_X(t) \rangle - f(u(t), X(t)) - v(t) = 0. \quad (7.39)$$

On obtient ainsi un modèle de la forme (7.1) avec :

$$\begin{aligned} E &= \mathbb{R}^2, F = \Delta_\gamma, G = \mathbb{R}, \Omega^i := [0, t_f], \\ x &:= (u, X), y := \partial_t^n \psi_X, z := -v, g := -f, A : y \mapsto \langle \mu, y \rangle, \end{aligned} \quad (7.40)$$

et la méthode d'identification présentée précédemment peut donc être formellement appliquée. Le problème s'écrit :

$$\min_{(\mu, g_0)} \|\mathcal{Y}_\varepsilon \cdot (\mu, g_0) + (-D_{x_m, \varepsilon} v_m, -v_{m0})\|^2 \quad (7.41)$$

avec  $\mathcal{Y}_\varepsilon : (\mu, g_0) \mapsto (\langle \mu, D_{x_m, \varepsilon} y_m \rangle, g_0 + \langle \mu, y_{m0} \rangle)$ .

On ne considérera cependant dans la suite que des modèles de Volterra dont l'opérateur  $H(\partial_t)$  est  $\gamma$ -diffusif de degré 0 ou 1. Le préfiltrage du modèle proposé en remarque 127 pour pallier l'amplification du bruit de mesure dans le cas où  $n > 1$  n'est pas valable pour cette méthode<sup>4</sup>. En composant l'équation par un opérateur dynamique  $Q(\partial_t)$ , on perd en effet la nature statique de la fonction  $f$  (qui est remplacée par  $Q(\partial_t) \circ f$ ) sur laquelle est basée toute la méthode. Le cas  $n > 1$  reste donc un problème ouvert.

<sup>4</sup>Le cas où  $n = 1$  ne pose pas de problème d'amplification du bruit. En effet on peut dériver  $\psi$  en utilisant la relation  $\partial_t \psi = \gamma \psi + X$  dans laquelle le bruit n'est pas dérivé.

## 7.2 Du point de vue numérique

On considère  $J$  jeux de données  $(x_m^{j,k}, y_m^{j,k}, z_m^{j,k})$  tels que

$$x_m^{j,k} = x^j(t_k) + \varepsilon_1^{j,k}, y_m^{j,k} = y^j(t_k) + \varepsilon_2^{j,k}, z_m^{j,k} = z^j(t_k) + \varepsilon_3^{j,k}, \quad (7.42)$$

avec  $(x^j, y^j, z^j)$  solution de (7.1),  $\{\varepsilon_i^{j,k}\}_k$  un bruit blanc numérique centré d'écart-type  $\sigma_i$  et  $t_k = t_{k-1} + \Delta t_k$ ,  $k = 1 : K$ ,  $t_0 = 0$ . On souhaite appliquer la méthode d'identification précédemment introduite sur ces données. Pour cela, on procède par étapes.

### Préfiltrage des données

Le filtre  $Q(\partial_t)$  de fonction de transfert  $Q(p)$  que l'on utilise pour filtrer les données peut être de divers types :

- filtre passe-bas causal du premier ordre :

$$Q(p) = \frac{a}{p + a}, \quad a > 0. \quad (7.43)$$

Ce type de filtre induit un retard.

- filtre passe-bas non causal du premier ordre :

$$Q(p) = \mathbf{1}_{[-a;a]}(p), \quad a > 0. \quad (7.44)$$

Ce filtre n'induit pas de retard mais ne peut être appliqué qu'en domaine fréquentiel, ce qui entre autre implique de connaître la trajectoire entière (exclut l'identification temps-réel)

- filtre passe-bas causal du premier ordre, de fréquence de coupure variable dans le temps :

$$Q(p) = \frac{a(t)}{p + a(t)}, \quad a(t) > 0 \forall t. \quad (7.45)$$

Ce filtre permet d'adapter la fréquence de coupure en fonction des variations de la trajectoire à filtrer : plus la trajectoire varie brusquement, plus la fréquence de coupure considérée est élevée. Ainsi, le retard induit par le filtre est moindre dans les zones où les variations sont rapides.

D'autres solutions sont évidemment envisageables (passage par les splines de lissage [57], etc.) ; le problème reste largement ouvert.

### Construction de l'ensemble $\Omega_{x,\varepsilon}$

La construction pratique de l'ensemble  $\Omega_{x,\varepsilon}$  ainsi que le choix du paramètre  $\varepsilon$  sont des problèmes encore largement ouverts. La méthode que l'on a utilisée pour les tests numériques est détaillée ci-dessous.

On se donne une discrétisation  $\{x_l\}$ ,  $l = 1 : L$  de la variable  $x$ . On procède alors en deux étapes :

- On cherche des couples  $(j, t)$  tels que  $\|x^j(t) - x_l\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Pour cela, on considère les trajectoires continues  $x_m^j$  obtenues par interpolation (linéaire, par splines [57], etc) des jeux de données  $\{t_k, x_m^{j,k}\}$  ; puis, pour tout  $x_l \in [x_m^{j,k}, x_m^{j,k+1}]$ , on cherche le temps  $t$  tel que :

$$x_m^j(t) = x_l. \quad (7.46)$$

- On forme ensuite les couples  $(t, \tau) \in \Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}$  à partir de l'ensemble des  $(j, t)$  déterminé à l'étape précédente.

Étant donné  $\varepsilon$ , on a, pour tout  $l$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|x^j(t) - x_l\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \|x^i(\tau) - x_l\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \implies \|x^j(t) - x^i(\tau)\|_{\mathbf{X}} \leq \varepsilon \iff (t, \tau) \in \Omega_{x,\varepsilon}^{i,j}. \quad (7.47)$$

On a alors  $(i, j, t, \tau) \in \Omega_{x,\varepsilon}$ .

De nombreuses questions relatives à cette construction peuvent être soulevées et restent à étudier. Dans la suite, on note  $(i^q, j^q, t^q, \tau^q)$ ,  $q = 1 : Q$  l'ensemble des quadruplets déterminés précédemment ; c'est un sous-ensemble discret de  $\Omega_{x,\varepsilon}$ . On note également  $y_m^j$  et  $z_m^j$  les interpolations (linéaires, par splines, etc.) des jeux de données  $\{t_k, y_m^{j,k}\}$  et  $\{t_k, z_m^{j,k}\}$ , et  $y_m = \left(y_m^j\right)_j$ ,  $z_m = \left(z_m^j\right)_j$ .

### Problème approché discret

Après discrétisation en temps, le problème de minimisation (7.26) est approché par :

$$\min_{(A, g_0)} \|Y_\varepsilon(A, g_0) - b\|_{G^Q \times G^{n_0}}^2 \quad (7.48)$$

avec

$$Y_\varepsilon(A, g_0) = \left( \left[ A(D^{i^q, j^q} y_m)(t^q, \tau^q) \right]_{q=1:Q}, g_0 + A y_{m0} \right) = A \left( \left[ (D^{i^q, j^q} y_m)(t^q, \tau^q) \right]_{q=1:Q}, y_{m0} \right) + f_0(0, 1),$$

et  $b = - \left( \left[ (D^{i^q, j^q} z_m)(t^q, \tau^q) \right]_{q=1:Q}, z_{m0} \right)$ .

(7.49)

Concrètement, l'opérateur  $Y_\varepsilon$  s'exprime au moyen d'une matrice. Dans le cas des modèles de Volterra par exemple, on a, avec  $y := \partial_t^n \psi_X \in C^0(\Omega; \Delta_\gamma)$  :

$$(Ay)(t) = \langle \mu, y(t) \rangle, \quad (7.50)$$

que l'on approche par :

$$Ay = \sum_l \mu_l [y(t)](\xi_l). \quad (7.51)$$

Ainsi, l'opérateur  $Y_\varepsilon$  considéré s'exprime :

$$Y_\varepsilon(\mu, f_0) = \left[ \begin{array}{c|c} \Psi^1 & 0 \\ \hline \Psi^2 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mu \\ g_0 \end{array} \right] \quad (7.52)$$

avec  $\mu = (\mu_l)_l$  et  $\Psi_{q,l}^1$  (respectivement  $\Psi_{j,l}^2$ ) une approximation de  $\partial_t^n \psi_{X_m^{i^q}}(t^q, \xi_l) - \partial_t^n \psi_{X_m^{j^q}}(\tau^q, \xi_l)$  (respectivement de  $\partial_t^n \psi_{X_m^k}(t^k, \xi_l)$ ) obtenue par intégration numérique de l'équation d'état de la réalisation diffusive de  $H(\partial_t)$  (voir schéma numérique du paragraphe 2.2.4).

La solution de (7.48) est obtenue par pseudo-inversion de  $Y_\varepsilon$  :

$$(\mu^*, g_0^*) = Y_\varepsilon^\dagger b = (Y_\varepsilon^* Y_\varepsilon)^{-1} Y_\varepsilon^* b. \quad (7.53)$$

**Remarque 147** Comme d'habitude, lorsque le problème est mal conditionné, on remplacera la pseudo-inverse  $Y_\varepsilon^\dagger$  par :

$$(Y_\varepsilon^* Y_\varepsilon + \eta I)^{-1} Y_\varepsilon^*, \quad (7.54)$$

où  $\eta > 0$  est un petit paramètre de reconditionnement.

### Identification de $g$

Une fois l'opérateur linéaire  $A$  identifié, il est possible d'estimer la fonction  $g$  à partir de son "pseudo-graphe" :

$$\mathcal{G}_g = \bigcup_{j=\{1:J\}, k=\{1:K\}} \left\{ \left( x_m^{j,k}, -A^* y_m^{j,k} - z_m^{j,k} \right) \right\}. \quad (7.55)$$

Pour cela, on considère une base topologique  $\{\mathbf{g}^p\}_{p=1:+\infty}$  d'un espace de Hilbert auquel  $g$  appartient ; on a alors :

$$g = \sum_p a_p \mathbf{g}^p, \quad a_p \in \mathbb{R}. \quad (7.56)$$

En pratique, on considère une approximation de  $g$  obtenue par troncature à un ordre fini<sup>5</sup>  $P$  de (7.56) :

$$g \simeq \sum_{p=1}^P a_p \mathbf{g}^p, \quad (7.57)$$

et on considère le problème :

$$\min_{a \in \mathbb{R}^P} \left\| \sum_p a_p \mathbf{g}^p(x_m) + A^* y_m + z_m \right\|^2, \quad (7.58)$$

dont la solution est donnée par :

$$a^* = G^\dagger b \quad (7.59)$$

avec :

$$G = \begin{bmatrix} G^1 \\ \vdots \\ G^J \end{bmatrix} \text{ où } G_{k,p}^j = \mathbf{g}^p(x_m^{j,k}), \text{ et } b = \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^J \end{bmatrix} \text{ où } b^j = \left( -A^* y_m^{j,k} - z_m^{j,k} \right)_{k=1:K}. \quad (7.60)$$

## 7.3 Application numérique

### 7.3.1 Validation sur un exemple académique

On considère le modèle :

$$\partial_t^{1/2} X = -\text{sat}(X) + v, \quad (7.61)$$

où :

$$\text{sat}(X) = \begin{cases} -X_b & \text{si } X \leq -X_b \\ X & \text{si } -X_b < X < X_b \\ X_b & \text{si } x \geq X_b, \end{cases} \text{ avec } X_b = 3 \cdot 10^{-4}. \quad (7.62)$$

Les données  $\{v_m^{j,k}, X_m^{j,k}\}_{k=0:K}$  utilisées pour l'identification sont obtenues par simulation numérique de (7.61), l'opérateur  $H(\partial_t)^{-1} = \partial_t^{-\frac{1}{2}}$  étant réalisé au moyen de la même réalisation diffusive que celle utilisée au paragraphe 6.3.

On considère la discrétisation temporelle  $\{t_k\}_{k=0:K}$  définie par :

$$t_0 = 0 \text{ et } t_k = t_{k-1} + \Delta t_k, \quad k = 1 : K \text{ avec } K = 6 \times 10^5 \text{ et } \Delta t_k = 10^{-5}. \quad (7.63)$$

Les entrées  $\{v^{j,k}\}_{k=0:K}$  considérées sont obtenues par filtrage de bruits blancs centrés d'écart-type  $\sigma = 1$  ; elle sont supposées connues (pas de bruit de mesure) :

$$v_m^{j,k} = v^k. \quad (7.64)$$

On note  $\{X^{j,k}\}_{k=0:K}$  la sortie discrète associée à l'entrée  $\{v^{j,k}\}_{k=0:K}$ . Les  $J = 4$  trajectoires discrètes de sortie mesurées sont obtenues à partir des  $\{X^{j,k}\}_{k=0:K}$  par addition de bruits blancs centrés numériques  $\{\varepsilon^{j,k}\}_{k=0:K}$ ,  $j = 1 : J$  d'écart type  $\sigma_\varepsilon$  :

$$X_m^{j,k} = X^{j,k} + \varepsilon^{j,k}. \quad (7.65)$$

Dans un premier temps, on suppose les bruits de mesure  $\varepsilon^{j,k}$  nuls. On identifie  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}}$  en utilisant un contour  $\gamma$  de la forme (6.20) avec  $\alpha = \frac{70}{180}\pi$  et en considérant 100 points de discrétisation en  $\xi$  répartis géométriquement entre  $\xi_1 = 10^0$  et  $\xi_L = 10^5$ . Les résultats obtenus sont donnés en

<sup>5</sup>La valeur de  $P$  doit être choisie de manière à assurer le meilleur compromis entre les erreurs générées par la troncature et celles générées par la présence de bruit de mesure, ou même par un défaut structurel du modèle. En pratique, ce choix se fait de manière empirique.

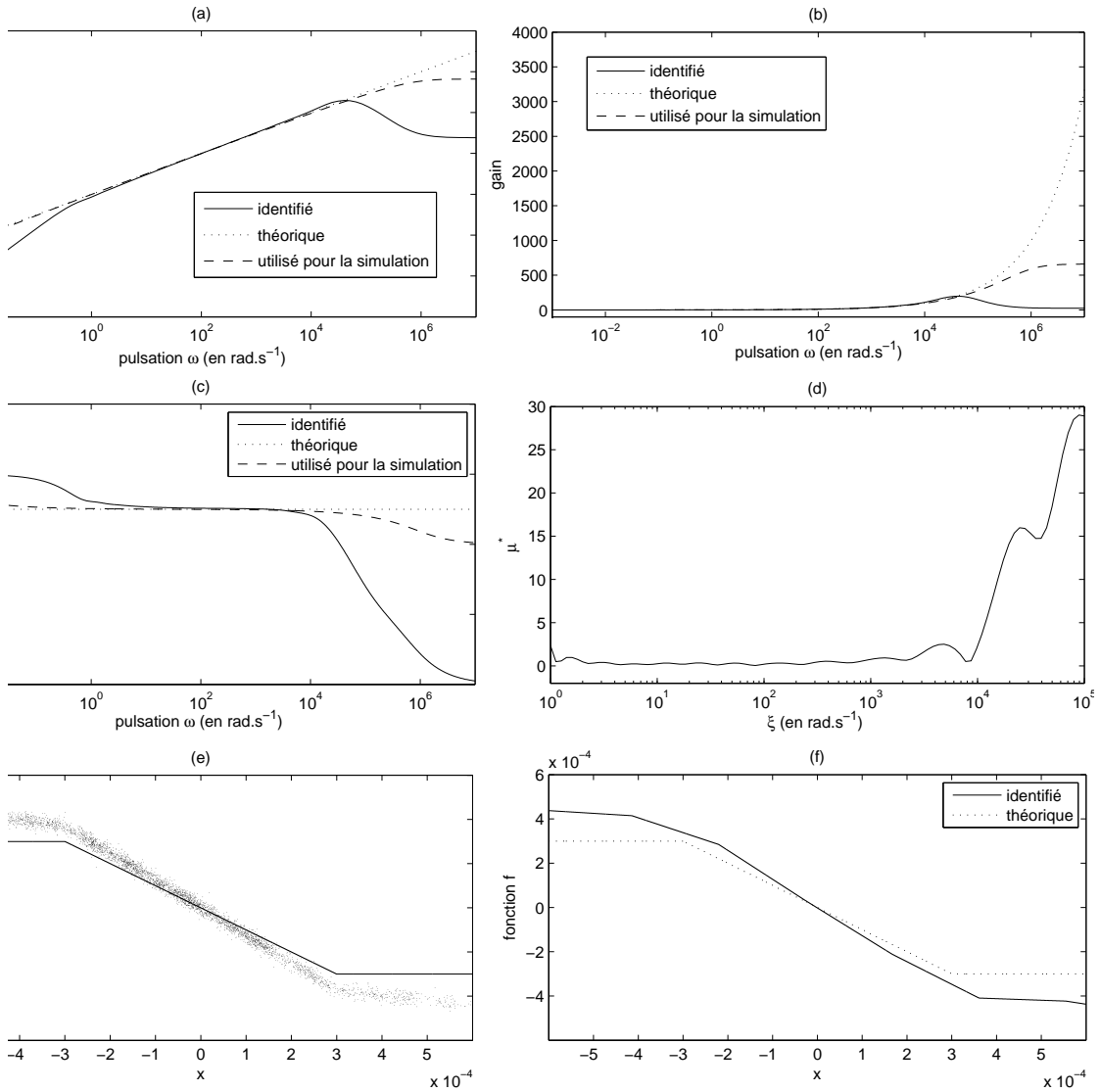


FIG. 7.2 – Identification de  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}}$  et  $f = -\text{sat}$  sans bruit de mesure. (a), (b) et (c) : gain et phase de la réponse impulsionnelle de l'opérateur identifié comparé à l'opérateur théorique  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}}$  - (d) :  $\gamma$ -symbole identifié  $\mu^*$  - (e) : pseudo-graphe de  $f$  - (f) : fonction identifiée  $f^*$

figure 7.2 (a), (b), (c) et (d). On constate que l'identification de  $H(\partial_t)$  est bonne dans la bande fréquentielle  $[10^0; 10^4]$ . Les quantités  $E$  et  $E_{\text{sup}}$  définies au paragraphe 5.3.1 par (5.67) et (5.68) ont pour valeur :

$$E = 4.2038 \times 10^{-8} \text{ et } E_{\text{sup}} = 1.1349. \quad (7.66)$$

L'identification de la fonction  $f = -\text{sat}$  se fait au moyen de 10 fonctions "chapeau" d'interpolation. Un des  $J$  pseudo-graphes de  $f$  déduit de  $\mu^*$  est donné en figure 7.2 (e) ; la fonction identifiée  $f^*$  obtenue est donnée en figure 7.2 (f). De même que dans le paragraphe 6.3, on constate que l'estimé  $f^*(x)$  est d'autant moins bon que  $x$  s'éloigne de 0. On note également que l'erreur d'identification de  $f$  découle essentiellement de celle de  $H(\partial_t)$ , l'erreur d'interpolation du pseudo-graphe étant ici négligeable. Les quantités  $E^f$  et  $E_{\text{sup}}^f$  définies au paragraphe 5.3.1 par (6.25) ont pour valeur :

$$E^f = 0.4257 \text{ et } E_{\text{sup}}^f = 1257.9. \quad (7.67)$$

On suppose à présent les mesures  $y_m^{j,k}$  bruitées avec  $\sigma_\varepsilon = 10^{-4}$ , et on garde les mêmes paramètres d'identification pour  $H(\partial_t)$  et  $F$ . On obtient les résultats de la figure 7.3. On note que l'estimation



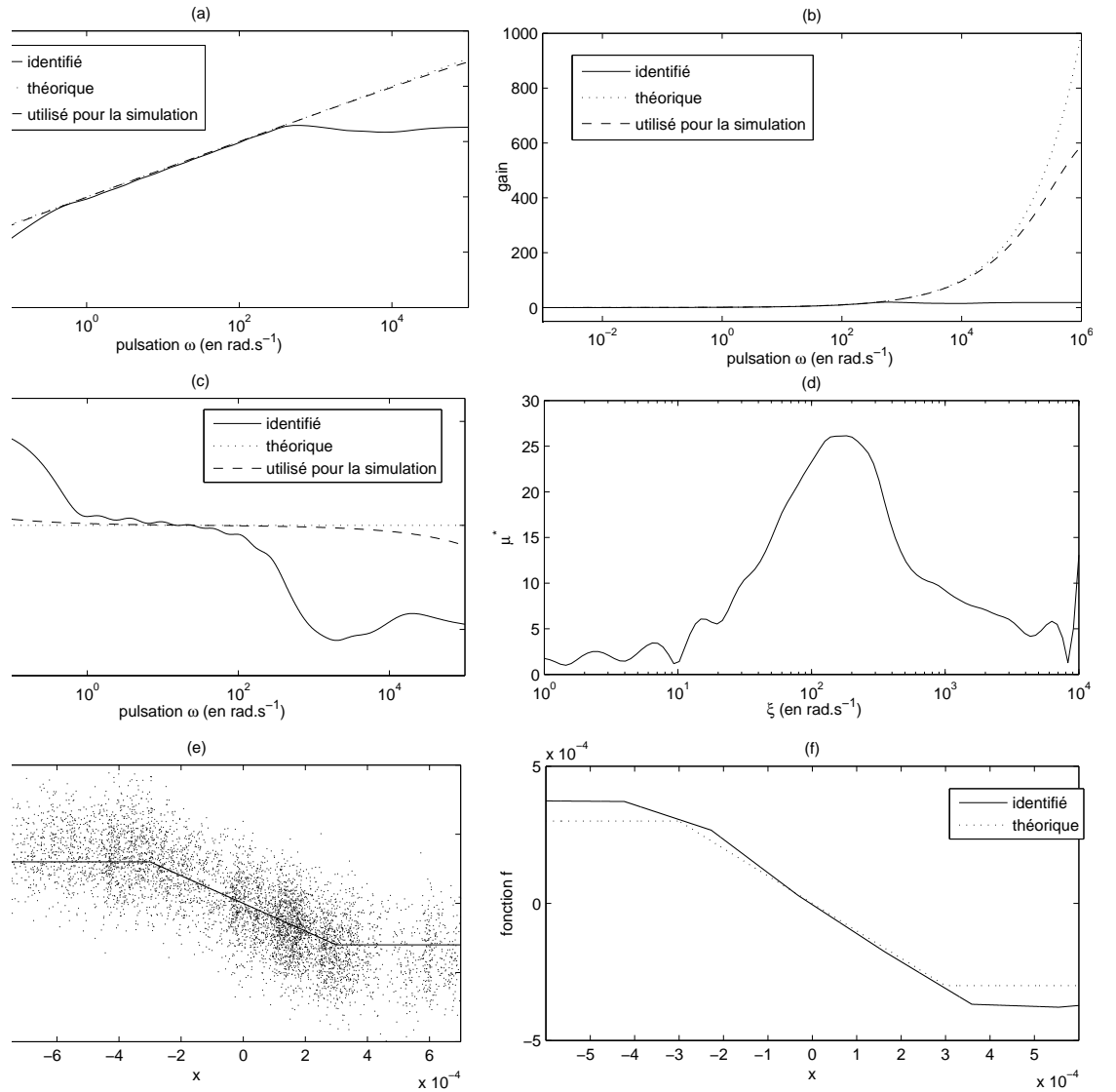


FIG. 7.3 – Identification de  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}}$  et  $f = -\text{sat}$  avec bruit de mesure ( $\sigma_\varepsilon = 10^{-4}$ ). (a), (b) et (c) : gain et phase de la réponse impulsionnelle de l'opérateur identifié comparé à l'opérateur théorique  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}}$  - (d) :  $\gamma$ -symbole identifié  $\mu^*$  - (e) : pseudo-graphe de  $f$  - (f) : fonction identifiée  $f^*$ .

de  $H(\partial_t)$  reste de bonne qualité sur la bande fréquentielle  $[10^0; 10^3]$  légèrement moins large que précédemment. Le pseudo-graphe de  $F$  est quant à lui plus dispersé à cause du bruit de mesure ; l'identification de  $F$  reste similaire au cas sans bruit. On a :

$$E = 8.6492 \times 10^{-8}, E_{\text{sup}} = 0.8858, E^F = 0.2122 \text{ et } E_{\text{sup}}^F = 113.8723. \quad (7.68)$$

### 7.3.2 Application à un cas physique réaliste

Dans ce paragraphe, on illustre la méthode d'identification introduite précédemment sur un problème physique réaliste, les données étant obtenues par simulation d'un phénomène dynamique complexe étudié dans [2], [3] et [31].

### Le modèle considéré

Dans [31], Joulin propose un modèle de Volterra pour décrire, sous certaines conditions thermodynamiques adaptées, l'évolution d'une flamme sphérique initiée par une source dans un milieu réactif. Sous certaines hypothèses physiques raisonnables, un tel phénomène peut être décrit par un système de 2 équations différentielles portant sur la température et la densité de masse du milieu. En considérant la zone réactive comme une mince couche située dans une sphère de rayon  $x(t)$ , Joulin a établi que lorsque la flamme se développe dans un espace libre,  $x$  est solution de l'équation non linéaire d'Abel-Volterra suivante<sup>6</sup> (N.B.  $u(t)$  désigne la puissance de la source au temps  $t$ ) :

$$x(t) \int_0^t \frac{\dot{x}(s) ds}{\sqrt{\pi(t-s)}} = 2x(t) \ln x(t) + 2u(t) \quad \forall t > 0, \quad (7.69)$$

avec les conditions additionnelles :  $x(0^+) = 0$ ,  $u \geq 0$ ,  $x \geq 0$  (dont l'interprétation physique est évidente). Il a été démontré dans [3] que le problème d'évolution (7.69) est bien posé, c'est à dire que la solution  $x$  existe, est unique, et dépend continûment de  $u$ . En notant  $H(\partial_t)$  l'opérateur convolutif<sup>7</sup>  $x \mapsto \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\dot{x}(s) ds}{\sqrt{\pi(t-s)}}$  et  $f(u, X) + v := \ln x + \frac{u}{x}$ , (7.69) peut être formellement réécrite sous la forme (7.35).

En conditions réelles, l'évolution de  $x$  dépend également de perturbations variées (dues par exemple à la perte de symétries spatiales); le modèle, c'est à dire à la fois l'opérateur convolutif  $H(\partial_t)$  et la fonction  $f$ , est alors plus ou moins éloigné de (7.69). Dans ce cas, et si la précision du modèle est requise, un processus d'identification peut être justifié.

On considère le problème d'identification de  $H(\partial_t)$  et de  $f$  à partir de données (bruitées)  $(u, x)$  obtenues par simulation de (7.69).

### Sur le comportement dynamique du rayon de la flamme

Il a été montré dans [2] qu'il existe un seuil de puissance de la source  $u$ , au-delà duquel la flamme se développe alors qu'elle s'éteint en deçà. En ce sens, le phénomène d'évolution est essentiellement instable avec deux comportements qualitativement différents. Du fait de la nature héréditaire du problème, il est difficile de connaître la valeur de ce seuil qui doit être évalué sur la base de simulations numériques. En figure 7.4 on peut voir les deux comportements de la flamme : celle-ci s'éteint en figure 7.4a ou se développe en figure 7.4b, la fonction source étant donnée, comme dans [3], par :

$$u(t) = E t^{0.3} (1-t) \mathbf{1}_{[0,1]}(t). \quad (7.70)$$

A ce comportement dynamique sensible s'ajoute le fait que l'entrée  $u$  est dynamiquement pauvre et que  $f$  est singulière, ce qui engendre des problèmes d'identification mal conditionnés. En conséquence, ce modèle peut être vu comme un test significatif pour la méthode d'identification proposée.

### Formulation du problème d'identification

L'opérateur  $H(\partial_t) = \frac{1}{2} \partial_t^{\frac{1}{2}}$  est  $\gamma$ -diffusif de degré 1; en notant  $\mu$  le  $\gamma$ -symbole de  $H(\partial_t) \circ \partial_t^{-1}$ , le modèle (7.69) s'écrit :

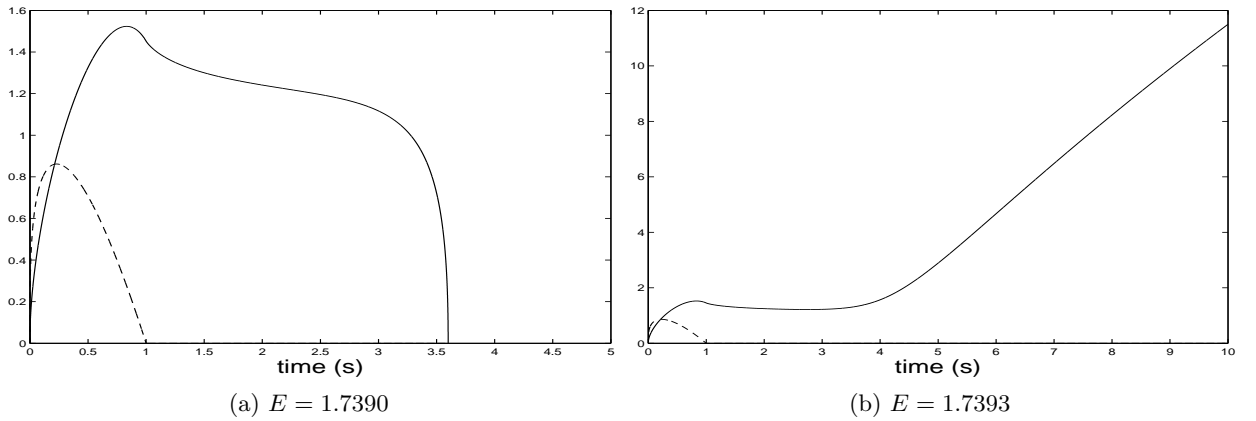
$$\langle \mu, \gamma \psi_x + x \rangle = \ln x + \frac{u}{x}, \quad (7.71)$$

ce qui est de la forme (7.1), avec :

$$\begin{aligned} g &:= \ln, \quad y := \gamma \psi_x + x, \quad z := \frac{u}{x}, \quad Ay = \langle \mu, y \rangle \\ E = G = \mathbb{R}, \quad E_0 = \mathbb{R}^{+*}, \quad F = \Delta_\gamma. \end{aligned} \quad (7.72)$$

<sup>6</sup>Ici sans dimension par simplicité.

<sup>7</sup>Notons que dans le cas idéal,  $H(\partial_t) = \frac{1}{2} \partial_t^{\frac{1}{2}}$ .

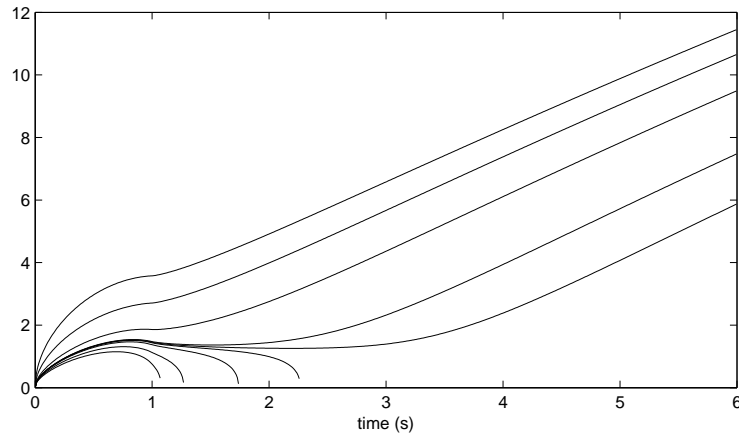
FIG. 7.4 – Source  $u$  (---) et rayon de la flamme  $x$  (—)

### Résultats numériques et commentaires

Le problème consiste à identifier le  $\gamma$ -symbole  $\mu$  de l'opérateur  $H(\partial_t) \circ \partial_t^{-1}$  à partir de données numériques expérimentales. Ces données sont composées de  $J = 9$  jeux  $(u^{j,k}, x_m^{j,k})_{k=0:K}$  (voir figure 7.5), avec  $K = 6 \cdot 10^5$  et  $u^{j,k} = u^j(t_k)$ , les 9 sources  $u^j$  étant de la forme (7.70) avec  $E = 1.5, 1.6, 1.7, 1.73, 1.74, 1.75, 2.0, 3.0$  et  $5.0$ . Le pas de temps  $\Delta t$  a été pris constant et égal à  $10^{-5}$  et le temps final est  $T = K \Delta t = 6$ . Les mesures sont telles que :

$$x_m^{j,k} = x^j(t_k) + \varepsilon^{j,k}, \quad (7.73)$$

avec  $\{\varepsilon^{j,k}\}_k$  un bruit blanc centré numérique d'écart-type  $\sigma_\varepsilon = 10^{-1}$ , et  $(u^j, x^j)$  solution de (7.69). Les valeurs  $x^j(t_k)$  sont obtenues par simulation numérique de (7.69) (voir paragraphe 4.1.1), l'opérateur  $\partial_t^{-\frac{1}{2}}$  étant réalisé au moyen de la même réalisation diffusive que celle utilisée au paragraphe 6.3.

FIG. 7.5 – Trajectoires  $x^j$  simulées.

Le contour  $\gamma$  choisi pour l'identification est de type secteur :  $\gamma(\xi) = |\xi| e^{i \text{sign}(\xi)(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$  avec  $\alpha = \frac{70}{180}\pi$ . On utilise 130 points de discrétisation  $\xi_l$  géométriquement espacés pour couvrir 7 décades fréquentielles de  $10^{-2}$  à  $10^5$ .

En figure 7.6 (d), on peut voir le symbole diffusif identifié  $\mu^*$  associé à  $H^*(\partial_t) \circ \partial_t^{-1}$ . La réponse fréquentielle associée  $H^*(i\omega)$  est donnée en figure 7.6 (a), (b), (c). Dans la bande fréquentielle  $[10^{-1}; 10^2]$ , la réponse fréquentielle est correctement identifiée.

Un des pseudo-graphes de  $g$  :

$$\mathcal{G}_g^j = \bigcup_k \{ (x_m^{j,k}, -A^* y_m^{j,k} - z_m^{j,k}) \} \quad (7.74)$$

est visible en figure 7.6 (e). L'identification de la fonction  $g$  a été obtenue au moyen d'une méthode standard de moindres carrés mise en oeuvre sur l'ensemble disponible du pseudo-graphe donné par (7.55) ; les résultats sont montrés en figure 7.6 (f). Malgré la faible richesse fréquentielle des données, l'identification de  $g$  reste très bonne, même pour les valeurs de  $x$  grandes, contrairement au cas de l'exemple 7.3.1. Ceci s'explique par le fait que les valeurs les plus grandes de  $x$  sont atteintes en des temps longs (voir figure 7.5) et que l'opérateur  $H(\partial_t)$  a été très bien identifié aux basses fréquences. De ce fait, le pseudo-graphe de  $g$  déduit de  $\mu^*$  est très proche du graphe exact, ce qui a permis une identification de  $g$  d'aussi bonne qualité. On note également que la fonction  $g$  a été bien identifiée autour de 0 malgré la singularité du logarithme ; bien que  $g$  ne soit pas Lipschitzienne autour de 0, la propriété (5) du théorème 142 reste satisfaite autour de ce point.

On obtient ici :

$$E = 3.1414 \times 10^{-6}, E_{\text{sup}} = 1.0115, E^g = 0.0376, E_{\text{sup}}^g = 619.6384. \quad (7.75)$$

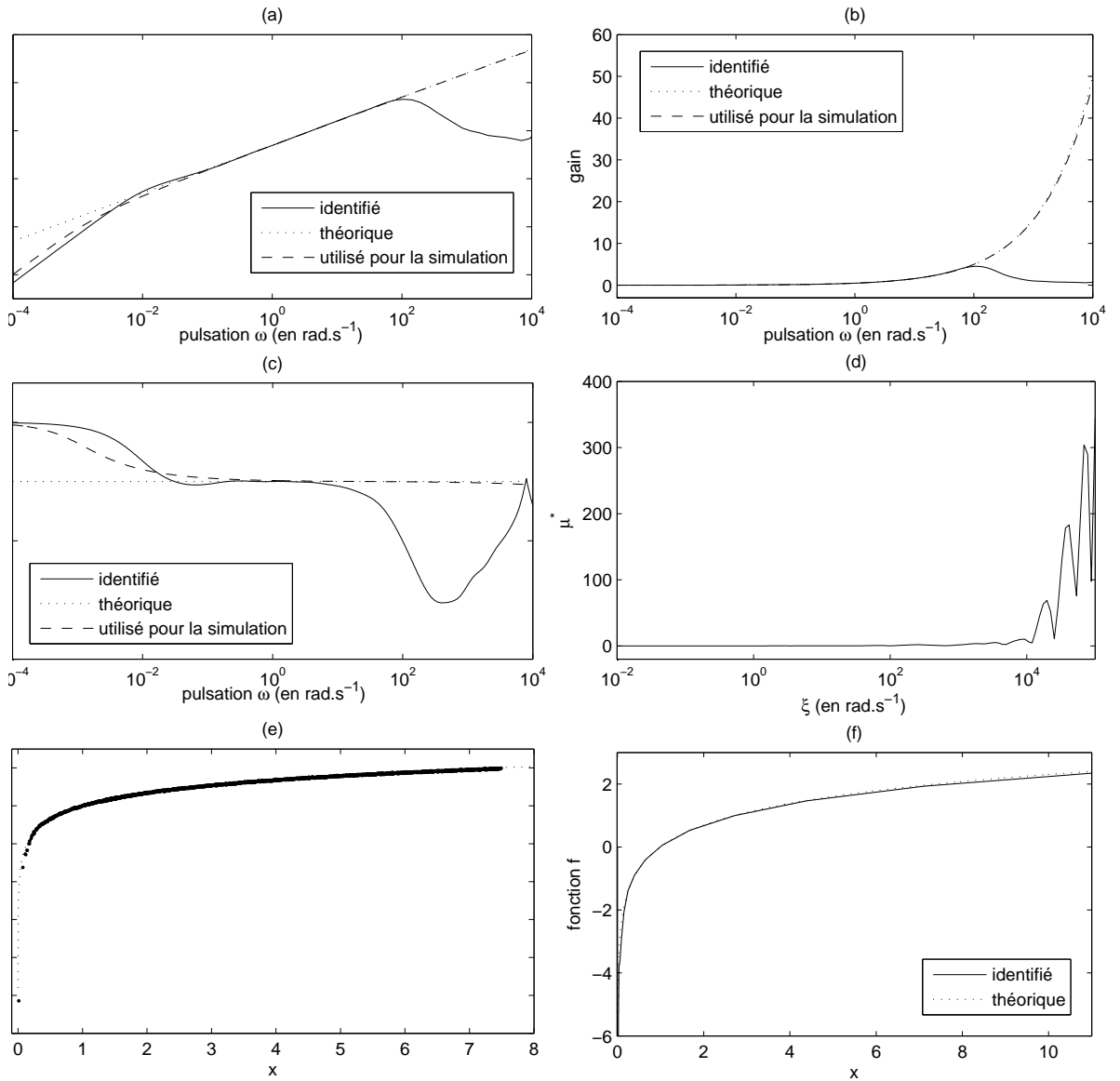


FIG. 7.6 – Identification de  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}}$  et  $g = \ln$  avec bruit de mesure ( $\sigma_\varepsilon = 10^{-1}$ ). (a), (b) et (c) : gain et phase de la réponse impulsionnelle de l'opérateur identifié comparé à l'opérateur théorique  $H(\partial_t) = \partial_t^{\frac{1}{2}}$  - (d) :  $\gamma$ -symbole identifié  $\mu^*$  - (e) : pseudo-graphe de  $g$  - (f) : fonction identifiée  $g^*$ .



# Conclusion

De portée générale et dotée d'un cadre mathématique bien défini, la représentation diffusive offre des perspectives d'application intéressantes, notamment en modélisation, simulation, identification, estimation, contrôle, etc., comme l'illustrent les divers problèmes abordés dans cette thèse. Dans certains cas, comme en identification de modèles, l'inversion opératorielle est une opération algébrique naturelle, qui permet d'exprimer certaines solutions de façon simple et directe. Le cadre théorique et les principaux résultats topologiques de cette opération dans l'algèbre étendue des  $\gamma$ -symboles, étudiés en première partie du mémoire, permettent ainsi d'aborder concrètement certains problèmes dynamiques où l'inversion opératorielle s'avère utile. Diverses questions sont encore ouvertes, par exemple sur l'efficacité des inversions numériques de  $\gamma$ -symboles, notamment en termes de rapidité de convergence et de coût numérique.

Plusieurs méthodes ont été proposées ou parfois même seulement évoquées dans la seconde partie de ce mémoire, laissant en suspens de nombreuses questions qui devront faire l'objet d'études approfondies. Là encore, l'étude de convergence des méthodes d'identification proposées et la sensibilité aux incertitudes sur la structure du modèle sont des questions importantes, en vue d'établir les conditions d'applicabilité des méthodes à des données réelles. Du point de vue numérique, il serait en particulier intéressant d'étudier l'influence de chacun des paramètres intervenant dans les réalisations numériques, et de tester diverses méthodes et variantes en vue d'améliorer la résolution du problème de moindres carrés (4.48), parfois numériquement mal conditionné lorsque les modèles sont singuliers, au sens où les données mesurées renferment peu d'information sur certains paramètres à identifier, ce qui arrive fréquemment en pratique. Sont à étudier également les possibilités d'extension et/ou d'adaptation des méthodes d'identification au cas où  $f$  n'est plus une fonction mais un opérateur, de type hystérésis par exemple.

Un autre aspect pouvant être approfondi dans un futur proche est la possibilité de tirer parti de la différence de nature entre l'opérateur  $H(\partial_t)$ , qui est dynamique linéaire, et la fonction  $f$ , qui est, au "contraire", non linéaire mais statique, en vue de la résolution de problèmes dynamiques sur les systèmes de Volterra. De cette réflexion est née l'idée de base de la méthode présentée au chapitre 7, qui permet de découpler l'identification du  $\gamma$ -symbole de  $H(\partial_t)$  de celle de  $f$ .

Finalement, tout problème dont la solution fait intervenir à un moment ou un autre un opérateur dynamique susceptible de formulation diffusive, bien d'autres applications que celles évoquées dans ce mémoire peuvent être envisagées. En particulier, les problèmes relatifs à des modèles de grande dimension sont naturellement adaptés au cadre diffusif. En effet, l'unification apportée par la représentation diffusive permet d'une part d'inclure dans un même cadre algébrique-topologique les opérateurs rationnels et une vaste classe d'opérateurs non rationnels. Sous approximation, on dispose alors d'une algèbre d'opérateurs concrètement réalisables bien adaptée au cas non rationnel comme au cas rationnel. D'autre part, comme il a été montré au paragraphe 4.2, il est possible de poser en termes de  $\gamma$ -symbole le problème de réduction de modèle, via l'identification (à partir de données simulées) d'un opérateur  $H(\partial_t)$  synthétisant l'ensemble des composantes dynamiques linéaires d'un système dynamique, lesquelles peuvent parfois être en nombre très important, notamment lorsque le système présente des comportements directement liés à des phénomènes répartis sous-jacents.

Les perspectives d'application les plus intéressantes se trouvent donc tout naturellement dans

les problèmes relatifs aux systèmes de grande dimension présentant des propriétés de dissipation, d'origine thermique ou autre. On peut mentionner à titre d'exemples envisagés dans un avenir proche :

- les phénomènes d'hystérésis et/ou de saturation avec mémoire évanescence dans certains composants du génie électriques par exemple [7], où les discontinuités de la tension d'alimentations à découpage provoquent d'importants courants de Foucault de nature répartie à l'intérieur des carcasses métalliques, induisant à leurs tours des phénomènes dynamiques complexes ;
- certains systèmes dynamiques de la biologie dont la modélisation nécessite la prise en compte d'un grand nombre d'équations de bilans biochimiques, avec des paramètres la plupart du temps mal connus ou variables [23, 63]. La possibilité, offerte par la formulation diffusive et la maîtrise de l'inversion  $\gamma$ -symbolique, de séparer les parties linéaires dynamiques et non linéaires statiques, pourrait alors conduire à une méthodologie praticable en vue de l'identification, de la réduction de modèles ou du contrôle.



**Troisième partie**

**Annexes**



# Annexe A

## Notions sur les Opérateurs

### A.1 Opérateurs linéaires intégraux

**Définition 148** Un opérateur linéaire intégral  $\mathcal{H}$  est un opérateur qui admet une formulation de la forme :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{h}(t, s)u(s)ds, \quad (\text{A.1})$$

la fonction  $\mathbf{h}$  étant appelée noyau de l'opérateur  $\mathcal{H}$ .

**Définition 149** Un opérateur linéaire intégral  $\mathcal{H}$  est dit convolutif ou de convolution si son noyau  $\mathbf{h}$  est de la forme :

$$\mathbf{h}(t, s) = h(t - s). \quad (\text{A.2})$$

On a alors :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t - s)u(s)ds = \int_{\mathbb{R}} h(s)u(t - s)ds = (h * u)(t). \quad (\text{A.3})$$

La fonction  $h(s) = \mathbf{h}(t, t - s)$  est appelée réponse impulsionnelle de l'opérateur de convolution  $\mathcal{H}$ ; c'est la fonction obtenue par application de l'opérateur à une masse de Dirac :

$$h(t) = (\mathcal{H}\delta)(t) = (h * \delta)(t). \quad (\text{A.4})$$

Par extension, la réponse impulsionnelle d'un opérateur intégral général (i.e. non forcément convolutif) est la fonction  $h$  définie par :

$$h(t, s) = \mathbf{h}(t, t - s) \quad (\text{A.5})$$

On a donc la formulation équivalente :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t, t - s)u(s)ds = (h(t, \cdot) * u)(t). \quad (\text{A.6})$$

L'appellation "réponse impulsionnelle" pour le fonction  $h(t, s) = \mathbf{h}(t, t - s)$  est donc abusive puisque l'on a :

$$(\mathcal{H}\delta)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t, t - s)\delta(s)ds = h(t, t). \quad (\text{A.7})$$

En fait, à  $t$  fixé, la fonction  $h(t, \cdot) : s \mapsto h(t, s)$  est la réponse impulsionnelle de l'opérateur de convolution  $\mathcal{H}_t$  défini par :

$$(\mathcal{H}_t u)(s) = \int_{\mathbb{R}} h(t, s - \tau)u(\tau)d\tau = (h(t, \cdot) * u)(s). \quad (\text{A.8})$$

On a donc :

$$\mathcal{H}u = (\mathcal{H}_t u)|_{t=s}. \quad (\text{A.9})$$

**Définition 150** *Le symbole (ou symbole-Laplace)  $H$  d'un opérateur linéaire intégral  $\mathcal{H}$  est la transformée de Laplace par rapport à la variable  $s$  de la réponse impulsionnelle  $h(t, s)$  :*

$$H(t, p) = (\mathcal{L}h(t, \cdot))(p) \quad (\text{A.10})$$

On a :

$$(\mathcal{H}u)(t) = (h(t, \cdot) * u)(t) = (\mathcal{L}^{-1} [H(t, \cdot)\mathcal{L}u])(t), \quad (\text{A.11})$$

et l'on note :

$$(\mathcal{H}u)(t) = (H(t, \partial_t)u)(t) \text{ ou simplement } \mathcal{H}u = H(t, \partial_t)u. \quad (\text{A.12})$$

Par ailleurs, le théorème des noyaux de Schwartz [58] permet de donner un sens aux opérateurs intégraux à noyau de type distribution. En ce sens général, les opérateurs de dérivation ou plus généralement les opérateurs dont le symbole  $H(t, p)$  n'est pas décroissant à l'infini peuvent encore s'écrire sous la forme (A.1).

**Exemple 151** ►  $\mathcal{H} = Id$ , de symbole  $Id(p) = 1$  et de réponse impulsionnelle  $\delta$ , s'écrit :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int \delta(t-s)u(s)ds = \int \delta(s)u(t-s)ds = u(t). \quad (\text{A.13})$$

►  $\mathcal{H} = \partial_t$ , de symbole  $H(p) = p$  et de réponse impulsionnelle  $\delta'$ , s'écrit :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int \delta'(t-s)u(s)ds = - \int \delta(s)\partial_s u(t-s)ds = \int \delta(s)u'(t-s)ds = u'(t). \quad (\text{A.14})$$

►  $\mathcal{H} = a(t)\partial_t$ , de symbole  $H(p) = a(t)p$  et de réponse impulsionnelle  $\delta'$ , s'écrit :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int a(t)\delta'(t-s)u(s)ds = a(t)u'(t). \quad (\text{A.15})$$

## A.2 Notions générales

### Opérateurs $t$ -locaux

**Définition 152** *Un opérateur  $\mathcal{K}$  sur un espace  $\mathfrak{E}$  de fonctions continues définies sur un ouvert  $I \subseteq \mathbb{R}_t$  est dit  $t$ -local (ou simplement local lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre) lorsque pour tout  $t \in I$  et toutes  $f, g \in \mathfrak{E}$ , si  $f$  et  $g$  coïncident sur un voisinage de  $t$ , alors  $(\mathcal{K}(f))(t) = (\mathcal{K}(g))(t)$ .*

- Les opérateurs différentiels (à coefficients constants ou non) sont des opérateurs locaux.
- Un opérateur  $\mathcal{K}$  qui vérifie  $(\mathcal{K}(f))(t) = K(t, f(t)) \forall t \in E$ , est dit statique ; il est évidemment local.
- La composition de deux opérateurs locaux est un opérateur local.
- Un opérateur sur un espace de distributions est dit local lorsque sa restriction à un sous espace de fonctions continues l'est.

### Opérateurs causaux (resp. anticausaux)

**Définition 153** *Un opérateur  $\mathcal{K}$  agissant sur un espace vectoriel de fonctions (ou de distributions) de la variable  $t \in \mathbb{R}$  et à valeurs dans un espace vectoriel est dit causal (resp. anticausal) lorsque :*

$$\begin{aligned} \forall u, v \in \text{dom}(\mathcal{K}), \forall t \in \mathbb{R}, \\ \text{supp}(u - v) \subset [t, +\infty[ \Rightarrow \text{supp}[\mathcal{K}(u) - \mathcal{K}(v)] \subset [t, +\infty[ \\ (\text{resp. } \text{supp}(u - v) \subset ] - \infty, t] \Rightarrow \text{supp}[\mathcal{K}(u) - \mathcal{K}(v)] \subset ] - \infty, t], \end{aligned}$$

où  $\text{supp } f$  désigne le support de  $f$ , i.e le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel la fonction (ou distribution)  $f$  est identiquement nulle.

- Les opérateurs à la fois causaux et anticausaux sont les opérateurs locaux.
- Un opérateur linéaire intégral  $\mathcal{H}$  de réponse impulsionnelle  $h(t, s)$  est causal (resp. anticausal) si et seulement si

$$\text{supp } h \subset \{(t, s) \in \mathbb{R}^2; s \geq 0\} \quad (\text{resp. } \text{supp } h \subset \{(t, s) \in \mathbb{R}^2; s \leq 0\}). \quad (\text{A.16})$$

On a alors :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{h}(t, s)u(s) ds = \int_0^{\infty} h(t, s)u(t-s)ds, \quad (\text{A.17})$$

et, si  $\text{supp } u \subset \mathbb{R}^+$ ,

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_0^t h(t, s)u(t-s)ds = \int_0^t h(t, t-s)u(s)ds. \quad (\text{A.18})$$

Lorsque  $h(t, \cdot) \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ , les opérateurs linéaires intégraux peuvent donc être décomposés de manière unique en la somme de deux opérateurs respectivement causal et anticausal :

$$\mathcal{H}u = \int_{\mathbb{R}} h(t, t-s)u(s) ds = \int_{\mathbb{R}} h(t, t-s)1_{\mathbb{R}_+}(t-s)u(s) ds + \int_{\mathbb{R}} h(t, t-s)1_{\mathbb{R}_-}(t-s)u(s) ds. \quad (\text{A.19})$$

Lorsque  $h(t, \cdot)$  est une distribution, cette décomposition n'est plus unique lorsque  $h(t, \cdot)$  est singulière en 0 (présence d'une composante à la fois causale et anticausale).



## Annexe B

# Expression analytique des coefficients $K^{qkrl}$ en inversion $\gamma$ -symbolique numérique

Dans le paragraphe (3.4.2) plusieurs méthodes de résolution du problème d'inversion numérique scalaire ont été présentées. La méthode 3 nécessite, avant d'être mise en oeuvre, le calcul préliminaire des termes :

$$K^{qkrl} = \langle \delta_{\xi_l}^r(\xi), \langle \delta_{\xi_k}^q(\eta), k(\xi, \eta) \rangle_{\eta > \xi} \rangle_{\xi}, \quad (\text{B.1})$$

pour  $(q, r, k, l) \in (\{1, 2\}^2 \times \{0..n\}^2) \cup (\{m\} \times \{1, 2\} \times \{s\} \times \{0..n\})$ . Dans la suite, la fonction notée  $k$  (resp.  $f$ ) sera celle définie par (3.71) (resp. par (3.72)). On rappelle également que l'indice  $s \in \llbracket 0, n \rrbracket$  est tel que  $\xi_s = 0$ .

Les calculs sont essentiellement basés sur le fait que  $\delta_{\xi_k}^q$  est le  $\gamma$ -symbole de l'opérateur  $(\partial_t - \gamma(\xi_k))^{-q}$  et que par conséquent, d'après (3.70), on a :

$$K^{qkrl} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{(\mathrm{i}\omega - \gamma(\xi_l))^r (\mathrm{i}\omega - \gamma(\xi_k))^q} d\omega. \quad (\text{B.2})$$

On peut également utiliser le fait que :

$$\delta_{\xi_k}^2 \approx \frac{1}{\gamma'(\xi_k)} \delta'_{\xi_k}. \quad (\text{B.3})$$

Après calculs, on montre les résultats suivants :

► soit  $(k, l) \in \{0..n\}^2$  :

- si  $q = r = 1$  on a :

$$K^{qkrl} = k(\xi_l, \xi_k) = \begin{cases} \frac{-(f(\xi_k) + \overline{f(\xi_l)})}{\gamma(\xi_k) + \overline{\gamma(\xi_l)}} & \text{si } \gamma(\xi_k) \neq -\overline{\gamma(\xi_l)} \\ \frac{1}{\omega_2 + \mathrm{i}\gamma(\xi_k)} + \frac{1}{\omega_1 + \mathrm{i}\gamma(\xi_k)} & \text{si } \gamma(\xi_k) = -\overline{\gamma(\xi_l)} \end{cases}, \quad (\text{B.4})$$

- si  $q = r = 2$  on a :
  - si  $\gamma(\xi_k) \neq -\overline{\gamma(\xi_l)}$ ,

$$K^{qkrl} = s_1(f(\xi_k) + \overline{f(\xi_l)}) + s_2 \left( \frac{1}{\omega_2 + \mathrm{i}\gamma(\xi_k)} - \frac{1}{\omega_1 + \mathrm{i}\gamma(\xi_k)} + \frac{1}{\omega_2 - \mathrm{i}\gamma(\xi_l)} - \frac{1}{\omega_1 - \mathrm{i}\gamma(\xi_l)} \right) \quad (\text{B.5})$$

où :

$$s_1 = \frac{-2}{(\gamma(\xi_l) + \gamma(\xi_k))^3} \text{ et } s_2 = \frac{1}{(\gamma(\xi_l) + \gamma(\xi_k))^2}, \quad (\text{B.6})$$

– et si  $\gamma(\xi_k) = -\overline{\gamma(\xi_l)}$ ,

$$K^{qkrl} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(\omega_1 + i\gamma(\xi_k))^3} - \frac{1}{(\omega_2 + i\gamma(\xi_k))^3} \right), \quad (\text{B.7})$$

• si  $q = 1$  et  $r = 2$  on a :

– si  $\gamma(\xi_k) \neq -\overline{\gamma(\xi_l)}$ ,

$$K^{qkrl} = \frac{1}{(\overline{\gamma(\xi_l)} + \gamma(\xi_k))^2} (f(\xi_k) + \overline{f(\xi_l)}) - \frac{1}{\gamma(\xi_l) + \gamma(\xi_k)} \left( \frac{1}{\omega_2 - i\overline{\gamma(\xi_l)}} - \frac{1}{\omega_1 - i\overline{\gamma(\xi_l)}} \right), \quad (\text{B.8})$$

– et si  $\gamma(\xi_k) = -\overline{\gamma(\xi_l)}$ ,

$$K^{qkrl} = \frac{i}{2} \left( \frac{1}{(i\omega_2 - \gamma(\xi_k))^2} - \frac{1}{(i\omega_1 - \gamma(\xi_k))^2} \right), \quad (\text{B.9})$$

• si  $q = 2$  et  $r = 1$  on a :

– si  $\gamma(\xi_k) \neq -\overline{\gamma(\xi_l)}$  :

$$K^{qkrl} = \frac{1}{(\overline{\gamma(\xi_l)} + \gamma(\xi_k))^2} (f(\xi_k) + \overline{f(\xi_l)}) - \frac{1}{\gamma(\xi_l) + \gamma(\xi_k)} \left( \frac{1}{\omega_2 + i\gamma(\xi_k)} - \frac{1}{\omega_1 + i\gamma(\xi_k)} \right), \quad (\text{B.10})$$

– et si  $\gamma(\xi_k) = -\overline{\gamma(\xi_l)}$ ,

$$K^{qkrl} = \frac{i}{2} \left( \frac{-1}{(i\omega_2 - \gamma(\xi_k))^2} + \frac{1}{(i\omega_1 - \gamma(\xi_k))^2} \right), \quad (\text{B.11})$$

► soit  $l \in \{0..n\}$ ,  $q = m$  et  $k = s$  :

• si  $r = 1$  on a :

– si  $\gamma(0) \neq -\overline{\gamma(\xi_l)}$  :

$$K^{qkrl} = u_{m-1} (f(0) + \overline{f(\xi_l)}) + \sum_{q=0}^{m-2} u_q \left( \frac{(i\omega_2 - \gamma(0))^{q-m+1} - (i\omega_1 - \gamma(0))^{q-m+1}}{i(q-m+1)} \right) \quad (\text{B.12})$$

avec

$$u_q = \frac{(-1)^{1+q}}{(\gamma(0) + \overline{\gamma(\xi_l)})^{1+q}} \quad \forall q = 0..m-1, \quad (\text{B.13})$$

– et si  $\gamma(0) = -\overline{\gamma(\xi_l)}$  :

$$K^{qkrl} = \frac{i}{m} \left( \frac{-1}{(i\omega_2 - \gamma(0))^m} + \frac{1}{(i\omega_1 - \gamma(0))^m} \right) \quad (\text{B.14})$$

• si  $r = 2$ , on a :

– si  $\gamma(0) \neq -\overline{\gamma(\xi_l)}$  :

$$K^{qkrl} = v_{m-1} (f(0) + \overline{f(\xi_l)}) + \sum_{q=0}^{m-2} v_q \left( \frac{(i\omega_2 - \gamma(0))^{q-m+1} - (i\omega_1 - \gamma(0))^{q-m+1}}{i(q-m+1)} \right) + v_{-1} \left( \frac{1}{\omega_2 - i\overline{\gamma(\xi_l)}} - \frac{1}{\omega_1 - i\overline{\gamma(\xi_l)}} \right),$$

avec

$$v_{-1} = \frac{1}{(-\overline{\gamma(\xi_l)} - \gamma(0))^m} \text{ et } v_q = \frac{(q+1)(-1)^q}{(\gamma(0) + \overline{\gamma(\xi_l)})^{2+q}} \quad \forall q = 0..m-1, \quad (\text{B.15})$$

– et si  $\gamma(0) = -\overline{\gamma(\xi_l)}$  :

$$K^{qkrl} = \frac{i}{m+1} \left( \frac{1}{(i\omega_2 - \gamma(0))^{m+1}} - \frac{1}{(i\omega_1 - \gamma(0))^{m+1}} \right). \quad (\text{B.16})$$



# Bibliographie

- [1] J. Audounet, F. A. Devy-Vareta, and G. Montseny. Pseudo-invariant diffusive control. In *Proceedings of the 14th Annual International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2000)*, Perpignan, France, 2000.
- [2] J. Audounet, V. Giovangigli, and J.M. Roquejoffre. A threshold phenomenon in the propagation of a point source initiated flame. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 121(3-4) :295–316, 1998.
- [3] J. Audounet and J.M. Roquejoffre. An asymptotic fractional differential model of spherical flame. *European Series on Applied and Industrial Mathematics (ESAIM) : Proceedings*, 5(4) :15–28, 1998.
- [4] J. Audounet, J.M. Roquejoffre, and H. Rouzaud. Numerical simulation of a point-source initiated flame ball with heat losses. *European Series on Applied and Industrial Mathematics (ESAIM) : Modélisation Mathématique et Analyse Numérique (M2AN)*, 36(2) :273–291, 2002.
- [5] C.T.H. Baker. A perspective on the numerical treatment of Volterra equations. *Journal of computational and applied mathematics*, 125(1-2) :217–249, 2000.
- [6] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville. *Generalized inverses : Theory and applications*. Springer Verlag, New York, USA, 2003.
- [7] P. Bidan, T. Lebey, G. Montseny, and J. Saint-Michel. Transient voltage distribution in inverter fed motor windings : experimental study and modeling. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 16(1) :92–100, Jan. 2001.
- [8] P. Bocher, H. De Meyer, and G. Vanden Berghe. Numerical solution of volterra equations based on mixed interpolation. *Computers & Mathematics with Applications*, 27(11) :1–11, 1994.
- [9] H. Brunner and P.J. Houwen. *The numerical solution of Volterra equations*. Elsevier Science Ltd, 1986.
- [10] H. Brunner and J.D. Lambert. Stability of numerical methods for Volterra integro-differential equations. *Computing*, 12(1) :75–89, 1974.
- [11] Ph. Carmona and L. Coutin. Fractional brownian motion and the markov property. *Electronic Communications in Probability*, 3 :95–107, Oct. 1998.
- [12] C. Casenave and E. Montseny. Dissipative state formulations and numerical simulation of a porous medium for boundary absorbing control of aeroacoustic waves. In *17th IFAC World Congress*, pages 13432–13437, Seoul (Korea), July 6-11 2008.
- [13] C. Casenave and E. Montseny. Time-local dissipative formulation and stable numerical schemes for a class of integrodifferential wave equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 341 :1763–1783, 2008.
- [14] C. Casenave, E. Montseny, and H. Camon. Identification of Nonlinear Dynamic Models of Electrostatically Actuated MEMS. *soumis à Control Engineering Practice*.
- [15] C. Casenave, E. Montseny, and H. Camon. Rapport intermédiaire : Modélisation, identification et validation. *Convention LAAS-LNE 2008, Modélisation et identification du comportement de structures MEMS pour l'élaboration d'une loi de commande appliquée à l'électronique basée sur la tension de pull-in*.

- [16] C. Casenave, E. Montseny, and H. Camon. Identification of electrostatically actuated mems models from real measurement data. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009.
- [17] C. Casenave, E. Montseny, and L. Ségui. Formulation différentielle dissipative d'un modèle de paroi absorbante en aéroacoustique. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences - Mécanique*, 336(4) :398–403, 2008.
- [18] C. Casenave and G. Montseny. Optimal identification of delay-diffusive operators and application to the acoustic impedance of absorbent materials. In *7th Workshop on Time-Delay Systems (TDS 2007)*, Nantes (France), September 17-19 2007.
- [19] C. Casenave and G. Montseny. Identification of Nonlinear Volterra Models by means of Diffusive Representation. In *17th IFAC World Congress*, pages 4024–4029, Seoul (Korea), July 6-11 2008.
- [20] C. Casenave and G. Montseny. A Cancellation Operator Suitable for Identification of Nonlinear Volterra Models. In *IFAC Workshop on Control of Distributed Parameter Systems (CDPS 2009)*, Toulouse (France), 20-24 July 2009.
- [21] C. Casenave and G. Montseny. Diffusive Identification of Volterra Models by Cancellation of the Nonlinear Term. In *15th IFAC Symposium on System Identification, SYSID 2009*, Saint-Malo (France), 6-8 July 2009.
- [22] C. Casenave and G. Montseny. Optimal Identification of Delay-Diffusive Operators and Application to the Acoustic Impedance of Absorbent Materials. In *Topics in Time Delay Systems : Analysis, Algorithms and Control*, volume 388, page 315. Springer Verlag, Lecture Notes in Control and Information Science (LNCIS), 2009.
- [23] K.C. Chen, A. Csikasz-Nagy, B. Györffy, J. Val, B. Novak, and J. Tyson. Kinetic analysis of a molecular model of the budding yeast cell cycle. *Molecular biology of the cell*, 11 :369–391, 2000.
- [24] Y. Degerli, F. Lavernhe, P. Magnan, and J. Farre. Bandlimited  $1/f^\alpha$  noise source. *Electronics Letters*, 35(7) :521–522, Ap. 1999.
- [25] M. Dehghan, M. Shakourifar, and A. Hamidi. The solution of linear and nonlinear systems of Volterra functional equations using Adomian–Pade technique. *Chaos, Solitons and Fractals*, 39(5) :2509–2521, 2009.
- [26] F.A. Devy-Vareta, J. Audounet, D. Matignon, and G. Montseny. Pseudo-invariance by matched scaling : application to robust diffusive control of a flexible beam. In *2nd European Conference on Structural Control*, Champs sur Marne (France), 3-6 Juillet 2000.
- [27] G. Garcia and J. Bernussou. Identification of the dynamics of a lead acid battery by a diffusive model. *European Series on Applied and Industrial Mathematics (ESAIM) : Proceedings*, 5 :87–98, 1998.
- [28] S. Gasser. *Etude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux modcreuses de nickel*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2003.
- [29] J.-P. Groby and C. Tsogka. A time domain method for modeling wave propagation phenomena in viscoacoustic media. In Springer, editor, *Proceedings of the Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (WAVES)*, pages 911–915, Jyväskylä, Finland.
- [30] B. I. Henry and S. L. Wearne. Existence of turing instabilities in a two-species fractional reaction-diffusion system. *SIAM J. Appl. Math.*, 62 :870–887, 2002.
- [31] G. Joulin. Point-source initiation of lean spherical flames of light reactants : an asymptotic theory. *Combustion science and technology*, 43(1-2) :99–113, 1985.
- [32] A. Kolmogorov and S. Fomine. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. MIR, Moscou, 1974.

- [33] D. Lafarge. *Propagation du son dans les matstructure rigide saturés par un fluide viscothermique*. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, France, 1993.
- [34] T. A. M. Langlands and B. I. Henry. The accuracy and stability of an implicit solution method for the fractional diffusion equation. *J. Comput. Phys.*, 205 :719–736, 2005.
- [35] L. Laudebat. *Modélisation et identification sous représentation diffusive de comportements dynamiques non rationnels en génie électrique*. PhD thesis, Université de Toulouse, décembre 2003.
- [36] L. Laudebat, P. Bidan, and G. Montseny. Modeling and optimal identification of pseudodifferential electrical dynamics by means of diffusive representation i. modeling. *IEEE Transaction on Circuits and System I*, 51 :1801–1813, 2004.
- [37] M. Lavrentiev and B. Chabat. *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*. MIR, Moscou.
- [38] M. Lenczner and G. Montseny. Diffusive realization of operator solutions of certain operational partial differential equations. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences - Mathématiques*, 341(12) :737–740, Dec. 2005.
- [39] D. Levadoux and B. Michielsen. Analysis of a boundary integral equation for high-frequency helmholtz problems. In SIAM, editor, *Proceedings of the Fourth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Golden, Colorado)*, Philadelphia.
- [40] D. Levadoux and G. Montseny. Diffusive formulation of the impedance operator on circular boundary for 2d wave equation. In *The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, Jyväskylä (Finland), 30 juin - 4 juillet 2003.
- [41] P. Linz. Numerical methods for Volterra integral equations with singular kernels. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, pages 365–374, 1969.
- [42] L. Ljung. *System identification : theory for the user*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- [43] A. Lorenzi and F. Messina. Identification problems for maxwell integro-differential equations related to media with cylindric symmetries. *J. Inverse Ill-Posed Prob.*, 11 :411–437, 2003.
- [44] P.-A. Mazet and Y. Ventribout. Control of aero-acoustic propagations with wall impedance boundary conditions : Application to a porous material model. Brown University, Providence, 20-24 Juillet 2005. WAVES.
- [45] B. Mettler, M.B. Tischler, and T. Kanade. System identification of small-size unmanned helicopter dynamics. In *Annual Forum Proceedings- American Helicopter Society*, volume 2, pages 1706–1717. Citeseer, 1999.
- [46] A. Monin and G. Salut. ARMA lattice identification : a new hereditary algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(2) :360–370, Feb 1996.
- [47] E. Montseny. *Transformations opératorielles de systèmes dynamiques et applications*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse, 2009.
- [48] G. Montseny. *Représentation diffusive*. Hermes Science Publ., 2005.
- [49] G. Montseny. Diffusive representation for operators involving delays. In *Applications of Time-delay Systems*, pages 217–232. Springer Verlag, Lecture Notes in Control and Information Science (LNCIS), 2007.
- [50] G. Montseny. Simple approach to approximation and dynamical realization of pseudodifferential time-operators such as fractional ones. *IEEE Trans on Circuits and System II*, 51(11) :613–618, Nov. 2004.
- [51] Ph. Mouyon and N. Imbert. Identification of a 2d turbulent wind spectrum. In *Aerospace Science and Technology*, volume 6, pages 3599–605, Kansas City (Missouri USA), 15-18 Oct. Dec. 2002.
- [52] S.R. Pride, F.D. Morgan, and A.F. Gangi. Drag forces of porous-medium acoustics. *Physical review B*, 47(9) :4964–4978, 1993.

- [53] V. Rasvan. Functional Differential Equations Associated to Propagation. In *Topics in Time Delay Systems : Analysis, Algorithms and Control*, volume 388, page 293. Springer Verlag, Lecture Notes in Control and Information Science (LNCIS), 2009.
- [54] H. Rouzaud. Long-time dynamics of an integro-differential equation describing the evolution of a spherical flame. *Revista matemática Complutense*, 16(1) :207, 2003.
- [55] A. Rumeau. *Modélisation comportementale en génie électrique sous Représentation Diffusive : Méthode et Applications*. PhD thesis, Université de Toulouse, décembre 2009.
- [56] A. Rumeau, P. Bidan, T. Lebey, L. Marchin, B. Barbier, and S. Guillemet. Behavior modeling of a  $\text{CaCu}_3\text{Ti}_4\text{O}_{12}$  ceramic for capacitor applications. In *IEEE Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena*, Kansas City (Missouri USA), 15-18 Oct. 2006.
- [57] L.L. Schumaker. *Spline functions : basic theory*. Cambridge Mathematical Library, 2007.
- [58] L. Schwartz. Théorie des noyaux. volume volume I, pages 220–230, 1952.
- [59] T. Söderström, P. Stoica, and R. Johansson. System identification. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 115 :739, 1993.
- [60] M.E. Taylor. *Pseudo differential operators*. Princeton university Press, NJ, 1981.
- [61] C. M. Topaz and A. L. Bertozzi. Swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups. *SIAM J. Appl. Math.*, 65 :152–174.
- [62] M.R. Virga. Titchmarsh's Theorem for Analytic Functions. *The American Mathematical Monthly*, 74(7) :849–851, 1967.
- [63] W. Wiechter and M. Wurzel. Metabolic isotopomer labeling systems - part i : global dynamic behavior. *Mathematical Biosciences*, (169) :173–205, 2001.
- [64] K. Yosida. *Functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [65] C. Zhang and S. Vandewalle. General linear methods for volterra integro-differential equations with memory. *SIAM journal on scientific computing*, 27(6) :2010–2031, 2006.

# Diffusive representation and operatorial inversion for the analysis and the resolution of non local dynamic problems

**Author :** CÉLINE CASENAVE

**Thesis supervisor :** GÉRARD MONTSENY

---

**Summary :** The first part of the thesis is devoted to the mathematical and numerical problem of inversion of dynamic convolutive operators formulated in terms of diffusive symbols. After having introduced an adapted algebraic framework, we first establish several mathematical results allowing to regularize this problem, in fact ill-posed in the Hadamard sense. Namely, the continuity of the inversion operation is proved for a suitably weakened topology. Then, we propose numerical methods based on the above theoretical study and test them on a few concrete examples. In the second part, various dynamic problems are formulated in an original way by means of the tools introduced in the first part. In particular, identification methods based on both the notions of diffusif symbol and symbolic inversion are proposed and studied for nonlinear Volterra models. For illustration, these methods are implemented on some non trivial numerical examples.

---

**Keywords :** diffusive representation, state representation, integral operator, convolution operator, Volterra equation, dynamic problems, identification, modelling, numerical approximations

# Représentation diffuse et inversion opératorielle pour l'analyse et la résolution de problèmes dynamiques non locaux

**Auteur :** CÉLINE CASENAVE

**Directeur de thèse :** GÉRARD MONTSENY

**Date et lieu de soutenance :** le 9 décembre 2009 au LAAS - CNRS

**Discipline :** Systèmes automatiques

**Laboratoire :** LAAS - CNRS, 7 avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse cedex 4

---

**Résumé :** La première partie de la thèse est consacrée au problème de l'inversion d'opérateurs dynamiques de convolution formulé en termes de symboles diffusifs. Après avoir introduit un cadre algébrique adapté, on établit plusieurs résultats garantissant la résolubilité concrète du problème de l'inversion opératorielle, en fait mal posé au sens de Hadamard, mais régularisable. La continuité de l'opération d'inversion est en particulier obtenue pour un mode de convergence convenablement affaibli. Diverses méthodes d'inversion numérique sont ensuite proposées et testées sur quelques exemples. Dans la seconde partie, divers problèmes dynamiques sont abordés de façon originale au moyen des outils développés dans la première partie. Plus particulièrement, plusieurs techniques d'identification de modèles de Volterra basées sur la paramétrisation de l'opérateur dynamique via son symbole diffusif, sont proposées et étudiées sur la base d'exemples numériques non triviaux.

---

**Mots-clés :** représentation diffuse, représentation d'état, opérateurs intégraux, opérateurs de convolution, équation de Volterra, problèmes dynamiques, identification, modélisation, approximations numériques