Житомирський державний університет імені Івана Франка
Фізико-математичний факультет
Кафедра прикладної математики та інформатики

Я. Б. Сікора

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

**БАЗОВІ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.030601 „МЕНЕДЖМЕНТ”
ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ**

Житомир-2011

ББК 22.183.4р
С35
УДК 519.85(07)

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук, професор **Б. М. Ляшенко**;
доктор педагогічних наук, доцент **О. М. Спірін**;
кандидат фізико-математичних наук, доцент **А. Й. Щехорський**

Сікора Я. Б.
С35 Математичне програмування: базові навчально-методичні матеріали для студентів напряму підготовки 6.030601 «Менеджмент» заочної форми навчання. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. Івана Франка, 2011. – 24 с.

Базові навчально-методичні матеріали містять задачі з курсу математичного програмування. Описано підходи до розв'язування задач лінійного програмування на основі графічного і симплексного методів. Розглянуто транспортну задачу лінійного програмування.

Для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів освіти і для осіб, що займаються самоосвітою.

ББК 22.183.4р

Зміст

Вступ 4

Розподіл навчального часу за темами 5

Зміст лекцій, лабораторних занять. 6

Зразки завдань для позааудиторної самостійної роботи студента. 10

Вимоги до заліку ………………………………………………….……….21

Рекомендована література 24

Вступ

Курс призначений для вивчення основ математичного програмування, а саме, моделей оптимізаційних задач та методів їх розв'язання, що найчастіше застосовуються в плануванні та економічних розрахунках.

В основу курсу та робочої програми з нього для спеціальності „Менеджмент" покладені питання, що стосуються математичних понять, задач та алгоритмів, вивчення яких необхідне для розуміння принципів математичного моделювання економічних процесів та кількісного обґрунтування управлінських рішень.

Особливістю курсу є те, що він орієнтований на аналіз оптимізаційних задач та методів їх розв'язання; для його сприйняття та засвоєння необхідна попередня математична підготовка в об'ємі курсу вищої математики для спеціальностей гуманітарного напряму.

Зміст робочої програми визначає основи лінійного та нелінійного програмування, а також питання, які пов'язані з окремими підкласами задач математичного програмування, що мають особливе прикладне значення (дискретне, динамічне програмування).

Основною метою викладання є формування у майбутніх менеджерів знань і навичок створення математичних моделей, пошуку екстремуму функцій і функціоналів, використання методів та алгоритмів оптимізації.

Основними завданнями, що мають бути вирішені у процесі викладання дисципліни, є надання студентам систематизованих знань з основних математичних методів розв'язування оптимізаційних задач та формування умінь:

- постановки та формалізації економіко-управлінських задач;
- класифікувати задачі та методи математичного програмування;
- розв'язувати задачі лінійного прямування, використовувати симплекс-метод;
- економічно інтерпретувати теореми двоїстості;
- розв'язувати транспортні задачі;
- здійснювати цілочисельне програмування, нелінійне програмування, динамічне програмування, стохастичне програмування;
- використовувати ПЕОМ і відповідне програмне забезпечення при проведенні оптимізаційних розрахунків та аналізі результатів цих розрахунків.

Розподіл навчального часу за темами

№	Теми	Всього	Аудиторні заняття				Самостійна робота	Форма контролю
			лекції	практичні	лабораторні	підсумкові модульні роботи		
	Модуль 1 **Математичне програмування**	**54**	**2**	**-**	**2**		**50**	
1.	Предмет дисципліни.	4	1	-	-		3	
2.	Лінійне програмування.	9	1	-	-		8	
3.	Двоїстість у лінійному програмуванні.	4	-	-	-		4	
4.	Методика розв'язування транспортної задачі.	7	-	-	-		7	
5.	Цілочислове програмування.	6	-	-	-		6	
6.	Нелінійне програмування.	8	-	-	2		6	
7.	Динамічне програмування.	6	-	-	-		6	
8.	Стохастичне програмування.	4	-	-	-		4	
9.	Основи теорії ігор.	6	-	-	-		6	
	Всього	**54**	**2**	**-**	**2**		**50**	**залік**

Зміст лекцій, лабораторних занять

№	Номери і назви модулів, тем, лекцій, їх зміст (мета вивчення, провідна ідея, основні проблеми, ключові поняття), тема, мета, короткий зміст практичних, лабораторних занять	Кіль-кість навчаль них годин	Назва, короткий зміст питань, винесених на позааудиторне самостійне опрацювання	Кіль-кість навчаль них годин
	Настановча сесія			
1.	**I модуль. Математичне програмування** **Лекція 1:** Предмет дисципліни. Лінійне програмування. **Мета:** Ознайомити студентів з математичним програмуванням, дати основні поняття. **Зміст:** Загальна постановка оптимізаційної задачі. Класифікація задач і методів математичного програмування. Економічні приклади задачі лінійного програмування. Геометричний метод розв'язання задач лінійного програмування з двома змінними.	2	Змістовні приклади задач математичного програмування в економіці, менеджменті. Геометрична ілюстрація простих оптимізаційних задач з однією та двома змінними.	20
	Літня сесія			
2.	**Лабораторна робота 1:** Нелінійне програмування. **Мета:** ознайомитися з класичним методами оптимізації, дослідження методів розв’язання задач квадратичного програмування. **Зміст:** розв’язання задачі нелінійного програмування методами виключення змінних, Лагранжа, квадратичним симплекс-методом.	2	Причини виникнення і приклади нелінійностей в оптимізаційних економічних задачах. Поняття про окремі підкласи задач: квадратичного, геометричного, дробово-лінійного, опуклого програмування тощо. Різниця між глобальним та локальним оптимумами, точним та наближеним розв’язками задачі. Огляд методів одновимірної оптимізації: непрямих (класична схема пошуку стаціонарних точок, половинного поділу, дотичних, січних), прямих (рівномірний пошук, рівномірний випадковий пошук, метод	20

№	Номери і назви модулів, тем, лекцій, їх зміст (мета вивчення, провідна ідея, основні проблеми, ключові поняття), тема, мета, короткий зміст практичних, лабораторних занять	Кіль-кість навчаль них годин	Назва, короткий зміст питань, винесених на позааудиторне самостійне опрацювання	Кіль-кість навчаль них годин
			ламаних, пошук за золотим перерізом). Багатовимірна задача оптимізації без обмежень, її основні властивості.	
	Контрольна робота			
	Залік			**10**
	Разом	**4**		**50**

ЛАБОРАТОРНІ ЗАНЯТТЯ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

Тема 6. **Нелінійне програмування**

Мета: ознайомитися з класичним методами оптимізації, дослідження методів розв’язання задач квадратичного програмування.

Теоретичні питання

1. Метод виключення змінних.
2. Метод Лагранжа.
3. Постановка задачі опуклого квадратичного програмування.
4. Теорема Куна-Таккера.
5. Квадратичний симлекс-метод.

Хід виконання роботи

1. Згідно номеру свого варіанту оберіть умову задачі.
2. Розв’яжіть задачу методом виключення змінних і методом Лагранжа.
3. Порівняйте результати.
4. Згідно номеру свого варіанту сформулюйте задачу квадратичного програмування.
5. Розв’яжіть задачу квадратичного програмування квадратичним симплекс-методом.

Варіанти завдань

Завдання 1

Знайти глобальний розв’язок задачі $xy^3 \to \max, \quad ax + by = c$ спочатку методом виключення змінних, а потім методом Лагранжа:

№	a	b	c	№	a	b	c	№	a	b	c	№	a	b	c
1	2	3	7	**6**	2	5	6	**11**	3	1	10	**16**	6	2	4
2	1	5	8	**7**	1	4	8	**12**	1	5	10	**17**	6	2	8
3	3	1	6	**8**	3	5	7	**13**	2	7	10	**18**	6	2	5
4	4	4	9	**9**	4	3	6	**14**	4	4	8	**19**	8	2	10
5	2	1	6	**10**	1	6	9	**15**	4	2	12	**20**	8	3	11

Завдання 2

У всіх задачах виконуються умови: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

1) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 \to \min,$
$2x_1 + 3x_2 \leq 6;$

2) $-2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 12x_2 \to \max,$
$3x_1 + 4x_2 \leq 12;$

3) $2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_1 \to \min,$
$x_1 + 2x_2 \leq 1;$

4) $x_1^2 + 3x_2^2 - x_1 - 2x_2 \to \min,$
$x_1 + 4x_2 \leq 7;$

5) $-2x_1^2 - 3x_2^2 + 16x_1 + 24x_2 \to \max,$
$2x_1 + x_2 \leq 4;$

6) $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 8x_2 \to \min,$
$x_1 + 2x_2 \leq 4;$

7) $-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 2x_2 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 \leq 16;$

8) $-x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 5x_1 + 2x_2 \to \max,$
$2x_1 + 3x_2 \leq 15.$

9) $z = 4x_1^2 + 15x_2^2 - 32x_1 - 120x_2,$
$2x_1 + 5x_2 \leq 20;$

10) $-x_1^2 + 2x_1 + x_2 \to \max,$
$2x_1 + 3x_2 \leq 12;$
$2x_1 + x_2 \leq 4.$

11) $z = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1 - 40x_2 \to \min$
$2x_1 + 5x_2 \leq 10$

12) $z = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 48x_2 \to \min$
$2x_1 + 5x_2 \leq 10$

Виконати	Завдання: Кутковецький В. Я. Дослідження операцій: [навч. посіб.] / В. Я. Кутковецький. – [2-ге видання, виправлене]. – К.: ВД «Професіонал», 2005. – 264 с. – с. 143.

Завдання для самостійної роботи

▪ виконати завдання	6 годин

Оцінювання

▪ звіт	1 оцінка

Література

Основна література

1. Егоршин А. А. Математическое программирование: [учеб. пособие] / А. А. Егоршин, Л. М. Малярец. – Х.: ИД „ИНЖЭК”, 2003. – 240 с.
2. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій: [навч. посіб.] / В. Я. Кутковецький. – [2-ге видання, виправлене]. – К.: ВД „Професіонал”, 2005. – 264 с.
3. Таха Х. Введение в исследование операцій / Х. Таха. – 6-е изд.; пер. с англ. – М.: Изд. дом „Вильямс”, 2001. – 912 с.
4. http://stud.zu.edu.ua/study/Metods_Optimazation/Metods_Optimazation_Theory.pdf
5. http://stud.zu.edu.ua/study/Metods_Optimazation/Dynamic_Nonlinear_Programming.pdf

Додаткова література

6. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: підручник / Ю. П. Зайченко. – К.: ВІПОЛ, 2000.
7. Исследование операций / Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – Т. 1,2. – М.: Мир, 1981. – 712 с.

Зміст звіту

Тема роботи; завдання; результати обчислень; висновки за результатами розв’язання.

Контрольні запитання

1. Дайте означення функції Лагранжа.
2. Коли застосовується метод множників Лагранжа розв'язування нелінійних задач? Наведіть приклад постановки таких задач.
3. Сформулюйте необхідні і достатні умови існування екстремуму для задач безумовної і умовної оптимізації.
4. Що називається градієнтом, гессіаном, стаціонарною точкою?
5. Сформулюйте критерій Сильвестра.
6. Дайте означення опуклої функції.
7. Сформулюйте задачу опуклого програмування.
8. Який вигляд має функція Лагранжа для задачі опуклого програмування?
9. Дайте означення сідловок точки функції Лагранжа.
10. Сформулюйте теорему Куна-Таккера.

ЗРАЗКИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПОЗААУДИТОРНОЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА

Самостійна робота полягає у вивченні теоретичного матеріалу та виконанні комплексної контрольної роботи.

Для самостійного вивчення студентами заочної форми навчання пропонуються теми.

№ п/п	Вид самостійної роботи		
	Найменування тем, що винесені на самостійне вивчення	Години	Рекомендована література
1.	Двоїстість у лінійному програмуванні.	4	[11] с.141-170, [13] с.39-54
2.	Методика розв’язування транспортної задачі.	7	[11] с.193-225, [13] с.75-82
3.	Цілочислове програмування.	6	[11] с.397-427, [13] с. 93-106
4.	Динамічне програмування.	6	[9], [11] с. 441-465, [13] с.108-123
5.	Стохастичне програмування.	4	[11] с. 825-828
6.	Основи теорії ігор.	6	[11] с. 580-590, [13] с.125-132

Кожний студент має виконати усі завдання контрольної роботи. Розв’язання завдань має бути виконано з необхідним поясненням і обґрунтуванням виконуваних дій. Контрольна робота має бути акуратно оформлена; порядок запису виконаних завдань має відповідати їх нумерації.

Студент, який не виконав усіх завдань і не оформив належним чином контрольну роботу, **не допускається до захисту контрольної роботи** з виставленням оцінки **“не зараховано”**.

Захист контрольної роботи здійснюється за таким порядком: студент отримує індивідуальний варіант завдань, аналогічних завданням з контрольної роботи і протягом обмеженого часу демонструє володіння методами розв’язання відповідних задач. Подальше уточнення степеня володіння необхідними методами та навичками здійснюється на співбесіді. По ходу співбесіди викладач має право задавати питання щодо застосованих термінів, понять, формул, теорем.

Успішний захист контрольної роботи може бути врахований при виставленні залікової оцінки.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1.

1. Побудувати економічну модель задачі оптимального використання ресурсів (4 види ресурсів, 2 види продукції).
2. Побудувати математичну модель задачі оптимального використання ресурсів.
3. Розв’язати задачу геометрично та зробити економічні висновки.
4. Розв’язати задачу симплекс-методом. Порівняти отримані результати з геометричним розв’язком.
5. Побудувати економічну і математичну модель двоїстої задачі.
6. Знайти розв’язок двоїстої задачі, використовуючи розв’язок початкової.
7. Встановити конкретний економічний зміст двоїстих оцінок даної задачі.

Дані про запаси ресурсів C_1, C_2, C_3, C_4 та прибутки від реалізації одиниць продукції Π_1, Π_2 необхідно вибрати з табл.1 у відповідності з номером варіанту. Витрати ресурсів на одиницю продукції Π_1 та Π_2 задати самостійно.

Таблиця 1

№	Запаси ресурсів	Прибуток від одиниці продукції

	C_1	C_2	C_3	C_4	$П_1$	$П_2$
1	10	15	12	20	3	6
2	6	8	16	20	15	20
3	4	6	10	8	4	8
4	8	12	10	6	2	10
5	10	20	12	16	8	12
6	12	16	8	20	12	10
7	20	15	10	15	10	12
8	10	8	8	10	16	20
9	16	12	20	16	8	10
10	24	20	16	20	12	16
11	8	4	12	10	5	10
12	4	6	4	8	12	10
13	6	12	6	8	6	8
14	5	10	5	5	8	6
15	2	4	2	2	30	20
16	12	16	10	12	40	60
17	16	12	10	16	20	30
18	3	6	9	6	15	30
19	20	25	30	25	10	15
20	6	9	6	6	24	30
21	8	12	10	8	12	16
22	10	15	20	15	8	6
23	24	18	30	24	12	16
24	8	12	16	12	10	15
25	12	8	8	12	4	6
26	10	8	8	10	12	16
27	15	20	20	15	3	6
28	4	6	6	8	4	6
29	8	10	10	12	6	8
30	6	10	8	8	9	6

Завдання 2.

1. Побудувати економічну модель транспортної задачі (3 постачальника, 5 споживачів).
2. Побудувати математичну модель транспортної задачі.
3. Методом північно-західного кута побудувати початковий базисний план.
4. Охарактеризувати метод потенціалів перевірки опорного плану на оптимальність. Перевірити чи є оптимальним початковий базисний план.
5. Якщо початковий базисний план не є оптимальним, то здійснити перехід від одного опорного плану до іншого. Знайти оптимальний план даної транспортної задачі.
6. Зробити економічні висновки, вказавши оптимальний план перевезень товару та обчисливши мінімальну вартість перевезень.

Дані про запаси постачальників та потреби пунктів призначення необхідно вибрати з таблиці у відповідності з номером варіанту. Елементи матриці вартостей перевезень задати самостійно.

№	**Запаси**			**Потреби**				
	A_1	**A_2**	**A_3**	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
1	220	180	80	50	90	120	70	150
2	250	130	230	210	10	40	40	310
3	250	70	170	80	30	200	130	50
4	180	250	200	190	50	40	230	120
5	200	150	220	180	80	30	160	120

6	160	190	190	30	20	20	30	440
7	90	210	210	40	30	20	20	400
8	150	230	170	30	120	110	30	260
9	60	240	100	40	250	80	20	10
10	30	160	240	140	90	120	60	20
11	200	150	60	220	20	130	20	20
12	230	250	190	200	10	100	80	280
13	130	130	250	60	50	110	180	110
14	20	250	200	220	110	10	60	70
15	190	250	60	40	170	210	50	30
16	130	180	200	80	10	160	80	180
17	170	50	250	10	90	230	120	20
18	170	50	250	90	30	110	70	310
19	210	100	170	70	220	50	100	40
20	110	30	250	10	50	30	20	280
21	90	110	130	90	120	20	50	50
22	190	230	140	160	220	110	10	60
23	150	250	200	100	10	10	160	320
24	70	100	150	20	70	100	20	110
25	150	30	120	10	180	40	50	20
26	180	250	110	10	190	30	150	160
27	10	220	210	10	50	140	80	160
28	240	230	150	170	100	40	30	280
29	250	130	250	70	110	170	120	160
30	70	100	240	140	70	110	70	20

Приклад розв'язання завдання

ВАРІАНТ № 0

Завдання 1

1.1. Економічна постановка задачі оптимального використання сировини

Таблиця 1.1

Вид сировини	Запас сировини	Витрати сировини на одиницю продукції	
		$П_1$	$П_2$
C_1	19	2	3
C_2	13	2	1
C_3	15	0	3
C_4	18	3	0
Прибуток від реалізації одиниці продукції		7	5

Відповідно до даних табл.1.1 необхідно організувати випуск продукції $П_1$ і $П_2$, щоб сумарний прибуток від реалізації продукції був максимальним.

1.2. Математична постановка задачі оптимального використання сировини

Нехай x_1 і x_2 – кількість одиниць продукції $П_1$ і $П_2$ відповідно. Тоді відповідно до умови задачі (табл. 1.1) отримаємо

$$F = 7x_1 + 5x_2 \to \max, \qquad (1.1)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19, \\ 2x_1 + x_2 \le 13, \\ 3x_2 \le 15, \\ 3x_1 \le 18, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Функція F (1.1) виражає прибуток від реалізації продукції $П_1$ і $П_2$, обмеження-нерівності (1.2) випливають з економічного змісту задачі оптимального використання сировини.

1.3. Геометричне розв'язання задачі

У площині Ox_1x_2 зобразимо область допустимих значень невідомих (план). Кожна з нерівностей (1.2) являє собою на площині Ox_1x_2 півплощину. Щоб з'ясувати, яка з двох можливих півплощин, які виникають при проведенні відповідної прямої, задовольняє заданій нерівності, достатньо підставити в цю нерівність точку $x_1=x_2=0$. Очевидно, точка O(0,0) задовольняє першим чотирьом нерівностям (1.2) і належить відповідним півплощинам. Півплощини, що описуються нерівностями $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, лежать правіше осі x_2 і вище осі x_1 відповідно.

Шуканий план заштрихований на рис. 1.

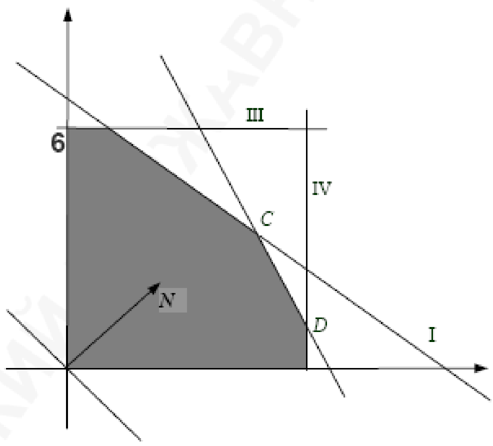

Рис. 1

Відомо, що максимальне значення функції F досягається на межі області, а точніше в одній з вершин шестикутника OABCDE. Щоб знайти оптимальну вершину, проведемо пряму $F = 0(7x_1 + 5x_2 = 0)$. Нижче цієї прямої функція F (1.1) приймає від'ємні значення, вище – додатні. Зростання функції F буде відбуватися в напрямі вектора $\overrightarrow{N}$, перпендикулярного прямій $F = 0$. З рисунка видно, що в точці O досягається мінімальне значення функції F. Рухаючись у напрямі вектора $\overrightarrow{N}$, переконуємося, що крайньою точкою заштрихованої області є точка C. Отже, $\max F = F(C)$.

Знайдемо координати точки C, яка є перетином прямих (I) і (II). Розв'язуємо систему рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 19, \\ 2x_1 + x_2 = 13, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 3$.

Значення функції F в точці C дорівнює $F(C) = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50$.

Економічні висновки з геометричного розв'язку

Максимальний прибуток, що дорівнює 50 ум. од., досягається при виробництві 5 од. продукції $П_1$ і 3 од. продукції $П_2$. При цьому сировина 1-го і 2-го видів буде повністю використана, а сировина 3-го і 4-го видів – не повністю. Залишок сировини 3-го виду складе $15 - 3 \cdot 3 = 6$ од., а залишок сировини 4-го виду буде $18 - 3 \cdot 5 = 3$ од.

Таким чином, для отримання максимального прибутку в результаті реалізації виробленої продукції необов'язково використовувати наявну сировину, необхідну для виробництва продукції. Можна заздалегідь розрахувати оптимальний план і відповідні йому залишки сировини. Ці залишки сировини можна використовувати для інших потреб.

1.4. Розв'язання задачі симплекс-методом

Для розв'язання задачі симплекс-методом запишемо перші чотири обмеження-нерівності (1.2) у вигляді обмежень-рівнянь шляхом додавання невід'ємних змінних

x_3, x_4, x_5, x_6 (по одній змінній в кожне обмеження-нерівність). Функцію F будемо також вважати змінною.

У результаті отримуємо наступну задачу лінійного програмування: знайти максимальне значення змінної F при невід'ємних значеннях інших змінних, якщо всі змінні задовольняють систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 + x_6 = 18, \\ -7x_1 - 5x_2 + F = 0. \end{cases} \qquad (1.3)$$

Тут змінні x_3, x_4, x_5, x_6 є базисними, змінні x_1, x_2 – вільними. Значення функції F на опорному плані x_0 дорівнює нулю: $F(x_0) = 0$. Це відповідає випадку, коли продукція ще не випускається, сировина не використовується.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β
x_3	2	3	1	0	0	0	19
x_4	2	1	0	1	0	0	13
x_5	0	3	0	0	1	0	15
x_6	**3**	0	0	0	0	1	18
Δ	-7	-5	0	0	0	0	0
x_3	0	3	1	0	0	-2/3	7
x_4	0	**1**	0	1	0	-2/3	1
x_5	0	3	0	0	1	0	15
x_1	1	0	0	0	0	1/3	6
Δ	0	-5	0	0	0	7/3	42
x_3	0	0	1	-3	0	**4/3**	4
x_2	0	1	0	1	0	-2/3	1
x_5	0	0	0	-3	1	2	12
x_1	1	0	0	0	0	1/3	6
Δ	0	0	0	5	0	-1	47
x_6	0	0	3/4	-9/4	0	1	3
x_2	0	1	1/2	-1/2	0	0	3
x_5	0	0	-3/2	3/2	1	0	6
x_1	1	0	-1/4	3/4	0	0	5
Δ	0	0	3/4	11/4	0	0	50

Оскільки в рядочку Δ всі елементи більші або дорівнюють нулю, то знайдений розв'язок є оптимальним. Йому відповідають значення $x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 6, x_6 = 3.$ Розв'язок, отриманий симплекс-методом, співпадає з геометричним розв'язком.

Необхідно виготовити 5 од. продукції Π_1 і 3 од. продукції Π_2. При цьому сировина 1-го виду використовується повністю ($x_3 = 0$), сировина 2-го виду також використовується повністю ($x_4 = 0$). Невикористаними залишаються 6 од. сировини 3-го виду ($x_5 = 6$) і 3 од. сировини 4-го виду ($x_6 = 3$).

1.5. Побудова двоїстої задачі

Припустимо, що деяка фірма хоче купити сировину *C1, C2, C3, C4* у підприємства, яке готове випускати продукцію Π_1 і Π_2. Як повинні поводити себе обидві сторони?

Зацікавити покупця: загальна вартість сировини повинна бути якомога меншою.

Зацікавити продавця: загальна вартість сировини, що використовується на виробництво одиниці продукції кожного виду повинна бути не менша доходу від реалізації одиниці продукції даного виду.

Нехай y_1, y_2, y_3, y_4 – вартості одиниці сировини *C1, C2, C3, C4* відповідно. Тоді згідно з умовою задачі оптимального використання сировини (табл. 1.1) та інтересам обох сторін, приходимо до наступної задачі лінійного програмування:

$$F^* = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \to \min, \qquad (1.4)$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 3y_4 \geq 7, \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 5, \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Задача (1.4)-(1.5) називається двоїстою до вихідної задачі (1.1)-(1.2).

Якщо одна з двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то і друга також має оптимальний розв'язок, причому $\min F^* = \max F$.

1.6. Розв'язання двоїстої задачі

Розв'язок двоїстої задачі можна також знаходити за допомогою симплекс-методу. Проте теорія двоїстості дає змогу знаходити розв'язок двоїстої задачі, знаючи розв'язок прямої задачі.

Запишемо перші два обмеження-нерівності (1.5) двоїстої задачі у вигляді обмежень-рівностей шляхом віднімання нових невід'ємних змінних y_5 і y_6 відповідно. Тоді двоїста задача набуває вигляду

$$\begin{cases} F^* = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \to \min, \\ 2y_1 + 2y_2 + 3y_3 - y_5 = 7, \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_6 = 5, \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Між змінними прямої і двоїстої задачі встановимо наступну відповідність:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array}$$

Тоді оптимальний розв'язок двоїстої задачі (1.6) можна отримати з останньої симплекс-таблиці прямої задачі. Він записаний в останньому рядку цієї таблиці. Маємо

$$y_{опт}(\frac{3}{4}, \frac{11}{4}, 0,0,0,0), \ \min(y_{опт}) = 50. \qquad (1.7)$$

На оптимальному плані $y_{опт}$ двоїстої задачі $y_1 = \frac{3}{4}, y_2 = \frac{11}{4}, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 0, y_6 = 0.$

Як бачимо, оцінюється тільки сировина 1-го і 2-го видів, сировина 3-го і 4-го видів віддаються покупцю безкоштовно.

1.7. Економічний зміст двоїстих оцінок

Значення $y_1 = y_1^*, y_2 = y_2^*, y_3 = y_3^*, y_4 = y_4^*$ на оптимальному плані $y_{опт}$ (1.7) позначають двоїсті оцінки сировини C_1, C_2, C_3, C_4 відповідно. Здійснимо їх аналіз.

1. $y_1^* \neq 0$ і $y_2^* \neq 0$, і сировина C_1 і C_2, як випливає з розв'язання прямої задачі, повністю використовуються при оптимальному плані виробництва.

2. $y_3^* = 0$ і $y_4^* = 0$, і сировина C_3 і C_4 не повністю використовуються при оптимальному плані виробництва.

Таким чином, додатну двоїсту оцінку мають лише ті види сировини, які повністю використовуються при оптимальному плані виробництва. Щоб задовольнити інтереси і продавця і покупця фактично продаються лише ті види сировини, які мають додатні двоїсті оцінки при оптимальному плані виробництва; сировина з нульовою двоїстою оцінкою якби віддається задарма.

Двоїсті оцінки визначають дефіцитність сировини, що використовується.

Завдання 2

2.1. Економічна постановка транспортної задачі

Нехай на трьох базах зосереджено вантаж в кількості $a_1 = 230$, $a_2 = 250$, $a_3 = 170$, який потрібно перевезти в п'ять пунктів призначення в кількості $b_1 = 140$, $b_2 = 90$, $b_3 = 160$, $b_4 = 110$, $b_5 = 150$. Відомі вартості перевезень одиниці товару з пунктів відправлення в пункти призначення, які задаються матрицею вартостей перевезень

$$C = \begin{pmatrix} 40 & 19 & 25 & 25 & 35 \\ 49 & 26 & 27 & 18 & 38 \\ 46 & 27 & 36 & 40 & 45 \end{pmatrix}.$$

Припускаючи, що весь товар повинен бути вивезений з пунктів відправлення і всі потреби пунктів призначення будуть задоволені, необхідно організувати доставку товару, щоб сумарна вартість перевезень була мінімальною.

2.2. Математична модель транспортної задачі

Позначимо x_{ij} – кількість одиниць товару, що перевозиться з пункту відправлення A_i в пункт призначення B_j. Якщо відома вартість c_{ij} перевезення одиниці товару з пункту A_i в пункт B_j, то вартість перевезення кількості x_{ij} з A_i в B_j дорівнює $c_{ij}x_{ij}$, так що загальна вартість перевезення визначається як сума всіх можливих добутків цього виду. Отже, цільова функція

$$F = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} \to \min . \qquad (2.1)$$

Система обмежень на змінні x_{ij} випливає з умов повного вивезення товару з пунктів A_i і повного задоволення потреб пунктів B_j, тобто маємо дві групи обмежень:

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = a_i \quad (i=1, 2, 3), \qquad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j \quad (j=1, 2, 3, 4, 5) \qquad (2.3)$$

Вважаємо, що перевезення товару з пунктів B_j в пункти A_i не допускається, тоді всі змінні

$$x_{ij} \geq 0. \qquad (2.4)$$

Звернемо увагу на той факт, що згідно умови задачі сума всього вивезеного товару з пунктів A_i дорівнює всім постачанням в пункти B_j (230+250+170=140+90+160+110+150=650), тобто

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} x_{ij} . \qquad (2.5)$$

Отримаємо наступну задачу лінійного програмування:

$$F = 40x_{11} + 19x_{12} + 25x_{13} + 25x_{14} + 35x_{15} +$$
$$+ 49x_{21} + 26x_{22} + 27x_{23} + 18x_{24} + 38x_{25} + \qquad (2.6)$$
$$+ 46x_{31} + 27x_{32} + 36x_{33} + 40x_{34} + 45x_{35} \to \min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 230, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 250, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 170, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 140, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 160, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 150, \end{cases} \qquad (2.7)$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3, 4, 5).} \qquad (2.8)$$

Система лінійних рівнянь (2.7) містить 8 рівнянь з 15 невідомими. Вона має безліч розв'язків (перевезення можна здійснювати безкінечним числом способів). Оскільки сумарні перевезення співпадають із сумарними потребами, а саме

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 650,$$

то змінні транспортної задачі пов'язані додатковою умовою

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 650.$$

Це значить, що ранг системи рівнянь (2.7) на одиницю менша числа рівнянь, тобто $r = 8 - 1 = 7$. Тоді 7 змінних будуть базисними, інші 15-7=8 вільними змінними.

Опорний план (базисний розв'язок) даної транспортної задачі буде містити 7 базисних і 8 вільних змінних, при цьому вільні змінні прирівнюються до нуля.

Поставимо у відповідність кожній змінній транспортної задачі певну клітинку матриці перевезень. Базисними змінними будуть відповідати базисні (заповнені) клітинки, вільним змінним – вільні (незаповнені) клітинки. Таким чином, кожному опорному плану даної транспортної задачі повинні відповідати 7 заповнених і 8 вільних клітинок.

2.3. Побудова початкового базисного розв'язку

Початковий базисний розв'язок будемо будувати методом найменшої вартості. Згідно цього методу на кожному кроці заповнення матриці перевезень заповнюються такі клітинки, яким відповідають мінімальні вартості перевезень одиниці товару.

Отримуємо опорний план, наведений в табл. 2.1. Тут спочатку заповнюється клітинка (2,4), якій відповідає мінімальна вартість $c_{24} = 18$, потім клітинка (1,2), для якої $c_{12} = 19$, потім клітинка (1,3) і т.д.

Таблиця 2.1

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	40	90 19	140 25	7	35	230
A_2	49	26	20 27	110 18	120 38	250
A_3	140 46	27	36	40	30 45	170
Потреби	140	90	160	110	150	650

Для опорного плану X_1, якому відповідає табл. 2.1, значення базисних змінних такі:

$$x_{11}=90,\ x_{12}=140,\ x_{23}=20,\ x_{24}=110,\ x_{25}=120,\ x_{31}=140,\ x_{35}=30. \qquad (2.9)$$

Інші змінні дорівнюють нулю. Вартість перевезень на цьому плані

$$F(X_1)=90\cdot19+140\cdot25+20\cdot27+110\cdot18+120\cdot38+140\cdot46+30\cdot45=20080. \qquad (2.10)$$

2.4. Метод потенціалів перевірки опорного плану на оптимальність

Поставимо у відповідність кожному з трьох рівнянь (2.2) змінну α_i (i=1, 2, 3), а кожному з п'яти рівнянь (2.3) змінну β_j (j=1, 2, 3, 4, 5). Змінну α_i називають потенціалом пункту A_i, а змінну β_j – потенціалом пункту B_j.

Оскільки всі основні обмеження транспортної задачі (2.2) і (2.3) є обмеження-рівності, то потенціали α_i і β_j можуть приймати будь-які значення (вони можуть бути додатними, від'ємними або дорівнювати нулю). Кожній змінній $x_{ij}\ge 0$ транспортної задачі повинно відповідати одне обмеження – нерівність двоїстої задачі

$$\alpha_i+\beta_j\le c_{ij}, \qquad (2.11)$$

так як змінна x_{ij} входить лише один раз в підсистему (2.2) і один раз в підсистему (2.3).

Оптимальний план транспортної задачі знадиться серед її опорних планів.

Для того, щоб деякий оптимальний план транспортної задачі був оптимальним необхідно і достатньо, щоб потенціали транспортної задачі задовольняли умови

$$\alpha_i+\beta_j=c_{ij} \qquad (2.12)$$

для базисних клітинок і умовам

$$\alpha_i+\beta_j\le c_{ij} \qquad (2.13)$$

для вільних клітинок.

Система рівнянь (2.12) для невідомих потенціалів містить 7 рівнянь з 8 невідомими (7 базисних клітинок і 8 потенціалів). Одному з потенціалів можна надавати довільне значення. Зазвичай $\alpha_1=0$ і потім однозначно визначають інші потенціали (ранг системи рівнянь тут дорівнює 7 – рангу системи рівнянь транспортної задачі).

Оскільки кожне рівняння системи (2.12) містить лише невідомі, то, знаючи одну з них, можна відразу знайти іншу. Тому відшукання потенціалів зручно здійснювати безпосередньо в матриці перевезень, в якій заповнені базисні клітинки.

Для опорного плану X_1, представленого в табл. 2.1, значення потенціалів записані в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Постачальники	Споживачі					Запаси	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	40	-90 19	$+140$ 25	7	35	230	0
A_2	49	26	-20 27	110 18	$+120$ 38	250	2
A_3	140 46	$+$ 27	36	40	-30 45	270	9
Потреби	140	90	160	110	150	650	
β_j	37	19	25	16	36		

Якщо значення потенціалів α_i і β_j знайдені, тобто виконані умови (2.12) для заповнених клітинок, слід перевірити справедливість умов (2.13) для незаповнених клітинок.

Умові оптимальності (2.13) не задовольняють клітинки (1,5) і (3,2), причому $\alpha_1+\beta_5-c_{15}=1$ і $\alpha_3+\beta_2-c_{32}=1$.

Таким чином, опорний план X_1, представлений у табл. 2.2, не є оптимальним і необхідно побудувати інший опорний план X_2, значення цільової функції при якому менше, ніж при X_1.

2.5. Перехід від одного опорного плану транспортної задачі до іншого

Якщо опорний план транспортної задачі не є оптимальним, то одну з базисних змінних слід зробити вільною, а деяку вільну змінну – базисною. Для побудови нового опорного плану X_2 такого, що $F(X_2) < F(X_1)$, при розв'язанні транспортної задачі використовуються цикли. Всі вершини циклу знаходяться в клітинках матриці перевезень. Одна з вершин циклу знаходиться у вільній клітинці, інші – в базисних клітинках. У якості такої вільної клітинки зазвичай вибирають ту, для якої різниця при перевірці умови (2.13) є найбільшою. Якщо таких вільних клітинок декілька, то вибирають будь-яку з них або ту, якій буде відповідати цикл з більшим числом вершин (в останньому випадку відбувається суттєвий перерозподіл товару серед базисних клітинок).

Аналіз табл. 2.2 показує, що різниці є додатними для двох вільних клітинок (1,5) і (3,2). Проте ці різниці співпадають (вони дорівнюють 1), тому перевагу надаємо тій клітинці, для якої можливий цикл буде містити більше число вершин. Бачимо, що для клітинки (1,5) цикл буде складатися з чотирьох вершин, а для клітинки (3,2) – з шести вершин.

Будемо вводити в число базисних вільну клітинку (3,2). Будуємо для цієї клітинки цикл перерахунку (в табл. 2.2 він показаний пунктиром) і з метою перерозподілу перевезень робимо цей цикл означеним, приписавши вільній клітинці (3,2) знак «+» і чергуючи знаки в базисних вершинах циклу. Для визначення базисної змінної, яку ми будемо робити вільною, обчислимо мінімальне значення з величин перевезень, що відповідають від'ємним базисним клітинкам побудованого циклу. Маємо $\theta = \min(30,20,90) = 20$.

Значення $\theta = 20$ відповідає клітинці (2,3). Отже, необхідно вивести з числа базисних клітинку (2,3), а замість неї базисною стає клітинка (3,2). Перерозподіл перевезень між означеними клітинками здійснюється відповідно до знаку вершини циклу: якщо вершина має знак «+», то перевезення збільшується на величину θ, а якщо вершина має знак «-», то зменшується на θ.

У результаті описаного здвигу по циклу приходимо до нового опорного плану X_2, який представлений в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Постачальники	Споживачі					Запаси	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	^{40}	-70 ^{19}	160 ^{25}	^{7}	$+$ ^{35}	230	0
A_2	^{49}	^{26}	^{27}	110 ^{18}	140 ^{38}	250	1
A_3	40 ^{46}	$+\ 20$ ^{27}	^{36}	^{40}	-10 ^{45}	270	8
Потреби	140	90	160	110	150	650	
β_j	38	19	25	17	37		

Опорний план X_2 має вигляд

$x_{12} = 70$, $x_{13} = 160$, $x_{24} = 110$, $x_{25} = 140$, $x_{31} = 140$, $x_{32} = 20$ $x_{35} = 10$,

інші змінні дорівнюють нулю. Значення цільової функції на опорному плані X_2 можна обчислити за формулою

$$F(X_2) = F(X_1) - \theta \cdot (\alpha_3 + \beta_2 - c_{32}).$$

У даному випадку $F(X_2) = 20080 - 20 \cdot 1 = 20060$.

Як і раніше, потенціали α_i і β_j, що відповідають опорному плану X_2, знаходимо з умов $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ для базисних клітинок, покладаючи $\alpha_1 = 0$. Значення потенціалів α_i і β_j виписані в табл. 2.3.

Перевірка умов оптимальності $\alpha_i + \beta_j \le c_{ij}$ для вільних клітинок показує, що їх різниця є додатною лише для одної вільної клітинки (1,5). Для неї

$$\alpha_1+\beta_5-c_{15}=0+37-35=2.$$

Цикл перерахунку для клітинки (1,5) показаний в табл. 2.3. Зробимо здвиг по циклу на величину $\theta=\min(70,10)=10$.

В результаті приходимо до опорного плану X_3 (табл. 2.4). Опорному плану X_3, представленому в табл. 2.4, відповідає розв'язок транспортної задачі:

$x_{12}=60$, $x_{13}=160$, $x_{15}=10$, $x_{24}=110$, $x_{25}=140$, $x_{31}=140$, $x_{35}=30$, інші змінні дорівнюють нулю.

Таблиця 2.4

Постачальники	Споживачі					Запаси	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	40	60 19	– 160 25	7	+10 35	230	0
A_2	49	26	+ 27	110 18	–140 38	250	3
A_3	140 46	30 27	36	40	45	270	8
Потреби	140	90	160	110	150	650	
β_j	38	19	25	15	35		

Вартість перевезень для цього розв'язку

$$F(X_3)=F(X_2)-\theta\cdot(\alpha_1+\beta_5-c_{15})=20060-10\cdot 2=20040.$$

Перевірка вільних клітинок табл. 2.4 показує, що опорний план X_3 також є неоптимальним. Умову оптимальності не задовольняє вільна клітинка (2,3), для якої

$$\alpha_2+\beta_3-c_{23}=3+25-27=1>0.$$

Для клітинки (2,3) будуємо означений цикл перерахунку і робимо здвиг по циклу на величину $\theta=\min(140,160)=140$.

Новий опорний план представлений в табл. 2.5. Для нього

$$x_{12}=60,\ x_{13}=20,\ x_{15}=150,\ x_{23}=140,\ x_{24}=110,\ x_{31}=140,\ x_{35}=30,$$

$$F(X_4)=F(X_3)-\theta\cdot(\alpha_2+\beta_3-c_{23})=20040-140\cdot 1=19900.$$

Таблиця 2.5

Постачальники	Споживачі					Запаси	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	40	60 19	20 25	7	150 35	230	0
A_2	49	26	140 27	110 18	38	250	2
A_3	140 46	30 27	36	40	45	270	8
Потреби	140	90	160	110	150	650	
β_j	38	19	25	16	35		

Аналіз табл. 2.5 показує, що умові оптимальності $\alpha_i+\beta_j\le c_{ij}$ задовольняють всі вільні клітинки. Це значить, що опорний план X_4 є оптимальним.

2.6. Економічні висновки

Мінімальна вартість перевезень, що дорівнює 19900 у.о., забезпечується при наступних перевезеннях:

$$A_1\xrightarrow{60}B_2,\ A_1\xrightarrow{20}B_3,\ A_1\xrightarrow{150}B_5,\ A_2\xrightarrow{140}B_3,$$

$$A_2\xrightarrow{110}B_4,\ A_3\xrightarrow{140}B_1,\ A_3\xrightarrow{30}B_2.$$

При таких перевезеннях весь товар буде вивезений з пунктів відправлення ($a_1=60+20+150=230$, $a_2=140+110=250$, $a_3=140+30=170$) і всі потреби пунктів призначення будуть задоволені ($b_1=140$, $b_2=60+30=90$, $b_3=20+140=160$, $b_4=110$, $b_5=150$).

ВИМОГИ ДО ЗАЛІКУ

- Володіння теоретичним матеріалом з тем курсу.
- Зараховано усі звіти за лабораторні заняття, передбачені робочою програмою та інструктивно-методичними матеріалами.
- Пройдено перевірку рівня засвоєння знань з тем, які виносилася на самостійне опрацювання, на індивідуальній консультації у викладача.

ПИТАННЯ ДО ЗАЛІКУ

Теоретичні питання

1. Загальна постановка оптимізаційної задачі.
2. Змістовні приклади задач математичного програмування в економіці, менеджменті.
3. Означення розв’язку задачі математичного програмування: оптимальний план, оптимальне значення цільової функції, точка оптимуму; проблема його пошуку.
4. Класифікація задач і методів математичного програмування.
5. Математична постановка, економічні приклади задачі лінійного програмування.
6. Геометричний метод розв’язання задач лінійного програмування з двома змінними; ілюстрація можливих випадків, які трапляються при розв’язанні задачі.
7. Канонічна задача лінійного програмування, основні форми її запису: розгорнута, за допомогою векторів умов, матрична.
8. Правила переходу від загальної задачі лінійного програмування до канонічної.
9. Поняття базису, допустимого базису; взаємозв’язок між базисами і опорними планами.
10. Ознаки оптимальності або необмеженості цільової функції на множині допустимих планів.
11. Правило покращання неоптимального допустимого базису.
12. Алгоритм симплекс-методу і його реалізація за допомогою симплекс-таблиць.
13. Метод штучного базису.
14. Поняття про модифікований алгоритм симплекс-методу.
15. Розв’язання задач лінійного програмування на ПЕОМ.
16. Означення прямої задачі та двоїстої до неї у симетричному випадку, взаємозв’язок між ними; співвідношення між допустимими значеннями цільових функцій прямої та двоїстої задач.
17. Перша та друга теореми двоїстості. Знаходження розв’язку однієї з пари симетричних взаємодвоїстих задач за відомим розв’язком іншої задачі. Економічна інтерпретація теорем двоїстості (оптимальні значення двоїстих змінних як оптимальні оцінки ресурсів у задачі оптимізації плану виробництва).
18. Теорія двоїстості для випадків, коли вихідною є загальна задача лінійного програмування або канонічна задача.
19. Поняття про двоїстий симплекс-метод.
20. Постановка транспортної задачі, умова існування її розв’язку.
21. Пошук початкового базисного розв’язку методом північно-західного кута або методом найменшого елемента.
22. Пошук оптимального опорного плану перевезень за методом потенціалів.
23. Розв’язання транспортної задачі на ПЕОМ.
24. Економічні приклади, математична постановка задач цілочислового (дискретного) програмування.
25. Метод відтинань і метод розгалуженого пошуку для розв’язання задач цілочислового лінійного програмування.
26. Причини виникнення і приклади нелінійностей в оптимізаційних економічних задачах.
27. Класифікація задач нелінійного програмування.

28. Багатовимірна задача оптимізації без обмежень, її основні властивості.
29. Класична схема багатовимірної оптимізації без обмежень.
30. Властивості багатовимірної задачі оптимізації з обмеженнями (достатні умови існування розв'язку; необхідна умова локального екстремуму в термінах можливих напрямків і напрямків зростання цільової функції; особливості задачі опуклого програмування). Функція Лагранжа та її сідлові точки; двоїстість у нелінійному програмуванні.
31. Умови оптимальності, засновані на застосуванні диференціального числення; теорема Куна-Таккера.
32. Загальна постановка задачі динамічного програмування.
33. Основні типи задач і моделей динамічного програмування.
34. Принцип оптимальності Беллмана.
35. Приклади розв'язання оптимізаційних задач методами динамічного програмування.
36. Загальна постановка задачі стохастичного програмування, її особливості щодо оперативного управління та перспективного планування.
37. Класифікація задач стохастичного програмування.
38. Методи розв'язання задач стохастичного програмування (непрямі, прямі).
39. Основні поняття теорії ігор.
40. Матричні ігри двох осіб. Платіжна матриця.
41. Гра у чистих стратегіях. Максимінна та мінімаксна стратегії. Сідлова точка.
42. Змішані стратегії.
43. Основна теорема теорії матричних ігор.
44. Зведення антагоністичної матричної гри двох осіб до задачі лінійного програмування.

Практичні завдання

1.Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування: $L = x_1 + 6x_2 \to \min$, якщо

$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 \le 56, \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 15, \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 15, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Розв'язати симплексним методом задачу лінійного програмування:

$L = -4x_1 + 6x_2 \to \min$, якщо $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 1, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗАЛІКОВОЇ РОБОТИ

Вид завдання	Оцінка	Вимоги до знань та умінь студентів
Теоретичне	0-16 балів	Несвідоме, механічне відтворення матеріалу зі значними помилками та прогалинами; судження необґрунтовані; недостатньо проявляється самостійність мислення. Відповідь містить стилістичні та граматичні помилки.
	17-21 балів	Свідоме відтворення матеріалу з незначними помилками; дещо порушено логічність та послідовність викладу; недостатньо проявляється самостійність мислення. Відповідь стилістично правильна, містить незначні граматичні помилки.
	22-25 бали	Свідоме і повне відтворення матеріалу з деякими неточностями у другорядному матеріалі; виклад матеріалу достатньо обґрунтований, дещо порушено послідовність викладу. Відповідь стилістично та граматично правильна.
	26-30 балів	Виклад матеріалу глибоко обгрунтований, логічний, переконливий. Відповідь містить власні приклади,що свідчить про творче застосування матеріалу. Відповідь стилістично та граматично правильна.
Максимальна кількість балів	**30 балів**	
Практичне	32-35 балів	• Правильно побудована модель задачі зі вказаними одиницями вимірювання. • Правильно обрано й використано необхідні математичні формули. • Обчислювальні або графічні задачі виконані правильно, хід розв'язання вірний. • Результати обчислень правильні. • Висновки аргументовані, є посилання на математичні поняття і формули, пояснено деякі економічні процеси, що відбуваються в діяльності окремого суб'єкта господарювання. • Робота написана стилістично та граматично правильно з використанням професійних термінів.
	26-31 балів	• Правильно побудована модель задачі зі вказаними одиницями вимірювання. • Правильно обрано й використано необхідні математичні формули. • Є помилки механічного характеру або помилки при обчисленні, правильний хід розв'язання. • Результати обчислень неправильні. • Висновки аргументовані, є посилання на правила, формули. • Робота написана стилістично та граматично правильно з використанням професійних термінів.
	21-25 балів	• Правильно побудована модель задачі, хоча не вказані одиниці вимірювання. • Правильно обрано й використано необхідні математичні формули. • Результати обчислень правильні, в обгрунтуванні результату є помилки або воно відсутнє. • У роботі є незначні стилістичні та граматичні помилки.
	0-20 балів	Відповідь відсутня або неправильна, хід розв'язання неправильний
Максимальна кількість балів	**70 балів**	
Всього	**100 балів**	

Рекомендована література

Основна

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – М.: „Высш. шк.”, 1986. – 319 с.
2. Егоршин А. А. Математическое программирование: [учеб. пособие] / А. А. Егоршин, Л. М. Малярец. – Х.: ИД „ИНЖЭК”, 2003. – 240 с.
3. Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С., Тюптя В. И. Математические методы исследования операций: учеб. пособие для вузов. – К., 1979.
4. Кулян В. Р. Математическое программирование с элементами информационных технологий / В. Р. Кулян, Е. А. Юнькова, А. Б. Жильцов. – К.: МАУП, 2000. – 124 с.
5. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій: [навч. посіб.] / В. Я. Кутковецький. – [2-ге видання, виправлене]. – К.: ВД „Професіонал”, 2005. – 264 с.
6. Ляшенко И. Н., Карагодова Е. А., Черникова Н. В., Шор Н. З. Линейное и нелинейное программирование / Под ред. И. Н. Ляшенка. – К.: Вища школа, 1975. – 372 с.
7. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: підручник / Ю. П. Зайченко. – К.: ВІПОЛ, 2000.
8. http://stud.zu.edu.ua/study/Metods_Optimazation/Metods_Optimazation_Theory.pdf.
9. http://stud.zu.edu.ua/study/Metods_Optimazation/Dynamic_Nonlinear_Programming.pdf.

Додаткова

10. Бугір М. К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі / М. К. Бугір. – К., 1998. – 272 с.
11. Гетманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування: [навч. посіб.] / В. Д. Гетманцев. – К.: Либідь, 2001. – 265 с.
12. Исследование операций / Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – Т. 1,2. – М.: Мир, 1981. – 712 с.
13. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике / П. В. Конюховский. – СПб.: Изд-во „Питер”, 2000. – 208 с.
14. Плис А. И. MATHCAD: математический практикум для экономистов и инженеров: [учеб. пособие] / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 656 с.
15. Таха Х. Введение в исследование операцій / Х. Таха. – 6-е изд.; пер. с англ. – М.: Изд. дом „Вильямс”, 2001. – 912 с.
16. Цегелик Г. Г. Лінійне програмування: [навч. посіб.] / Г. Г. Цегелик. – Львів: Світ, 1995.

Навчальне видання

СІКОРА Ярослава Богданівна

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Базові навчально-методичні матеріали
для студентів напряму підготовки 6.030601 «Менеджмент»
заочної форми навчання

Надруковано з оригінал-макета автора

Підписано до друку __.__.11. Формат 60х90/16. Ум. друк. арк. 0.95.
Обл. вид. арк. __. Друк різографічний.
Гарнітура Times New Roman. Зам. ___. Наклад 100.

Видавництво Житомирського державного університету імені Івана Франка
Свідоцтво про державну реєстрацію:
серія ЖТ №10 від 07.12.04 р.
вул. Велика Бердичівська, 40, м. Житомир, 10008
електронна пошта (E-mail): zu@zu.edu.ua