УДК 378.147:515.4

І.Г. Ленчук

МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗАСАДИ ЗОБРАЖЕНЬ В АКСОНОМЕТРІЇ. МНОГОГРАННИКИ.

Обґрунтовується вибір методу зображень стереометричних тіл за умов впровадження в геометрії нових інформаційних технологій навчання. Алгоритмізовано виконання проеційних креслень многогранників.

Розшифровуючи обрані орієнтири досліджень, доречно на самому початку зауважити, що ми не маємо наміру оперувати добре відомими аксонометричними проекціями курсу нарисної геометрії в їх традиційному тлумаченні [1]. Набагато цікавіше зайнятися окремою (особливою для педагога-практика) інтерпретацією класичної аксонометрії - *зображеннями* стереометричних об’єктів на проеційних кресленнях М.Ф.Четверухіна [2], які об’єктивно, неабияк природньо втілюються у так званому технічному малюванні. Технічні малюнки, як відомо, служать допоміжним дійовим засобом при проектуванні машин і механізмів. Отже, в такому розумінні ми будемо навчатися нюансам технічного малювання, а точніше, ***вірним, наочним*** і ***простим в побудовах*** зображенням звичних стереометричних фігур, які загалом є обов’язковими складовими геометричними елементами найвибагливіших технічних форм. Немає сумнівів також у тому, що міцні знання, вміння і навички учня в окресленому розділі конструктивної геометрії забезпечують виконання якісних і зрозумілих малюнків до теорем і задач стереометрії, тобто дають йому ключі до розв’язання найскладніших просторових ситуацій ***аналітичними, графічними*** чи ***графоаналітичними*** методами**.**

«Вміння малювати особливо необхідне в роботі вчителя. Малюнки, виконані вчителем на класній дошці крейдою, в пізнавальному відношенні значно корисніші, ніж готовий плакат, схема чи таблиця, тому що динамічний малюнок, який виникає паралельно поясненню, яскраво і наочно ілюструє думку вчителя в той час, коли його слухають. Малюнок урівень зі словом і письмом є способом передачі думки, часто-густо єдиним і незамінним. Іноді буває важко, а деколи і неможливо висловити те, що передається за допомогою схеми, нарису чи ескізу.» (цит. за кн. [3]).

Зображенням стереометричної фігури Ф’ на визначеній картинній площині будемо називати плоску фігуру Ф, подібну (в загальному випадку) до паралельної проекції фігури Ф’. Таким чином, за своєю геометричною суттю конструкція зображення усякого плоского чи просторового об’єкта уявляється як композиція двох послідовно здійснюваних перетворень: паралельного проеціювання і перетворення подібності.

Очевидно, що професійно побудоване на класній дошці проеційне креслення не тільки спрощує логіку мотивацій умовиводу вчителя, сприяє формальному унаочненню пояснень, але й допомагає слухачам уявно розчленувати задану стереометричну фігуру на окремі елементи, розібратися в їх взаємному розташуванні, самостійно провести теоретичні дослідження і зробити практичні висновки щодо розв’язуваної задачі.

Вірними вважають ті зображення, які цілком відповідають вище сформульованому означенню. Тобто зображення має бути плоскою фігурою, подібною до паралельної проекції заданого (оригіналом, моделлю чи в уяві) просторового об’єкту. Тут суттєво, щоб усі його елементи були побудовані на площині зображень з обов’язковим урахуванням спільних властивостей паралельних проекцій і перетворення подібності. *Ця вимога є чисто математичною*. В педагогічній практиці принципово важливо дотримуватися вірності зображень, бо відхід від цього згубно впливає на формування і розвиток просторової уяви слухача.

Наочність - це здатність зображення викликати у мозку спостерігача зорове відбиття, схоже з тим, яке викликає оригінал. Іншими словами, той, хто розглядає зображення, без попередньої підготовки і сторонньої допомоги має чітко зрозуміти, який саме стереометричний об’єкт відтворено на екрані. Отже, ***зображення по суті геометричної форми оригінала замінює його.*** *Вимога наочності, на відміну від вірності зображень, не є математичною. Їй швидше властивий суб’єктивізм*, адже в процесі навчання чи то вчитель біля дошки, чи то учень у зошиті прагне виконати малюнок *якомога більш наочним*, оскільки його найважливішим завданням є викликати просторову уяву геометричних співвідношень між елементами оригіналу.

При цьому в жодному разі не треба плутати вірність з наочністю зображень, оскільки останні можуть бути вірними і, водночас, не наочними. Наприклад, будь-яка плоска фігура може зображатися відрізком, тетраедр - трикутником, паралелепіпед - паралелограмом, конус - рівнобедреним трикутником чи колом тощо, якщо, звичайно, площину зображень і напрям проеціювання вибрати особливим чином. Зрозуміло, що такі зображення вірні, тому що вони є паралельними проекціями своїх прообразів, але їх не можна назвати наочними. Нарешті, якщо проеційне креслення має помилки, тобто не є вірним, то його аж ніяк не треба вважати наочним, адже воно викличе у спостерігача неправильне уявлення про оригінал.

Простота в побудовах передбачає, що при виконанні зображень стереометричних фігур і в доповнювальних побудовах на них стосовно кожної окремої теореми чи задачі не виникає потреби в незрозумілих діях, застосуванні складних правил чи алгоритмів. Під час занять у класі чи при виконанні домашніх завдань лише при умові, що учень працює просто, а всі побудови взаємопов’язані і зрозумілі йому, можна одержати якісне зображення за короткий час.

У ліцеях, коледжах, школах із фізико-математичним ухилом просторові уявлення учнів, їх успіхи у вивченні стереометрії неодмінно пов’язані з культурою зображень, набутими відчуттями співвідношення міри абстракції і наочності. Як відомо, одним із керівних принципів М.Ф.Четверухіна є вільне виконання зображень у будь-якій паралельній проекції без строгого встановлення положення фігури-оригіналу відносно вибраних площини проекції і напряму проеціювання. За цим методом довільна паралельна проекція оригіналу з невизначеним коефіцієнтом подібності вважається його зображенням. Тут потрібно лише ретельно дотримуватися властивостей визначальних перетворень. І зовсім не обов’язково знати, в якій саме конкретній аксонометрії виконано малюнок. Однак зараз більшість учнів не в змозі з ходу досить ефектно користуватися четверухінським методом: потрібна серйозна підготовча робота. Щонайперше потрібно навчитися уявляти - «бачити» об’єкти, відчувати найбільш вдалі ракурси при виконанні стереометричних побудов. Цьому вчить елементарна аксонометрична грамота.

Отже, у навчанні зображенням не все так просто, як здавалося б на перший погляд. З одного боку, малюнки М.Ф.Четверухіна зобов’язані задовольняти основні вимоги до них: ***вірність, максимальну наочність і простоту в побудовах***. З іншого, - їх потрібно виконувати ***вільно***, лише дотримуючись інваріантів паралельних проекцій і подібності. Але ж це нонсенс, у певній мірі суперечність, оскільки найкращу, гарантовану наочність забезпечують не вільно виконані зображення, а стандартизовані аксонометричні проекції. *Фахівець конструктивної геометрії щоразу на власному досвіді переконується, що успішно розв’язати цей «гордіїв вузол» можна, не відкидаючи сліпо і категорично основні співвідношення і правила дій в аксонометрії, а розумно використовуючи їх у формуванні правил-орієнтирів усіх можливих просторових побудов в умовах школи і вузу.* Тут, для зручності і полегшення графічних операцій «від руки», вводяться обгрунтовані умовності, раціональні спрощення тощо. Лише за таких обставин неодмінно прийде успіх у навчанні цьому специфічному малюванню, а кожний зацікавлений матиме чіткі й конкретні алгоритми дій і в стереометрії, і в технічному малюванні.

Таким чином, нам доведеться розробити технологію і обгрунтувати техніку виконання всіх просторових зображень. На початку потрібно алгоритмізувати побудову усякої піраміди і призми, а далі - конуса і циліндра обертання. Особливу увагу надамо зображенню в ортогональній проекції кулі та її елементів. У процесі роботи важливе місце варто відвести вписуванню в коло і описуванню навколо нього правильних многокутників, а також конкретному (стрижневому) факту встановлення зручних умовних співвідношень між визначальними в проекціях елементами плоскої фігури, яка є в кожному окремому випадку основою тривимірного тіла, що розглядається. Адже загальновідомо, що дія виконання проеційного креслення стереометричного тіла зводиться, врешті-решт, до вміння будувати паралельну проекцію його основи - многокутника, кола. У випадку зі сферою теж потрібно будувати зображення кола, яке в оригіналі є або екватором, або відмінною від нього паралеллю поверхні. На завершення цих випробовувань необхідно чітко визначитися з науково-методичними принципами зображень комбінацій стереометричних тіл.

Безперечно, в теорії конструктивної геометрії є обгрунтовані, прості і такі, що цілком задовольняють вимогу правильності алгоритмів зображень всіх часто вживаних правильних многокутників. Однак з успіхом скористатися ними можна лише за обставин, коли виконавець малюнка має відмінну просторову уяву і хорошу практику, оскільки теоретично їх наочне розташування на картинній площині ніяк не регламентується. Досвідчені вчителі геометрії володіють власними (чи запозиченими) правилами-орієнтирами якісного зображення на дошці кожної окремо взятої плоскої, а отже, і просторової фігури [4]. Наприклад, правильний трикутник в основі піраміди чи призми зручно зображувати так, щоб одна його сторона була нахилена до горизонтального напряму приблизно під кутом 10^0 - 15^0, а інша утворювала з першою кут у 120^0 і була вдвічі меншою за неї. Обидві ці сторони мають бути видимими на картинній площині. У випадку квадрата доцільно одну із його сторін розташовувати горизонтально, а іншу (суміжну) - вдвічі меншою і під кутом не більшим за 45^0 до першої. Аналогічно, з орієнтиром на наочність результуючого зображення, алгоритмізують побудови й інших правильних многокутників. Такі добре зримо продумані (методом «спроб і помилок») схеми певною мірою знімають проблеми, оскільки останні зображення мають бути гарантовано наочними, що, як підкреслювалося вище, особливо ціниться в стереометрії. Однак, на жаль, ці правила-орієнтири не є однотипними, а тому важко запам’ятовуються і практично не придатні для використання за обставин впровадження нових (машинних) інформаційних технологій навчання.

Отже, ми знову переконуємося, що наблизитися до максимально наочних зображень, універсалізувати побудови можна виключно через графічні посилання на стандартизовані аксонометричні напрямки.

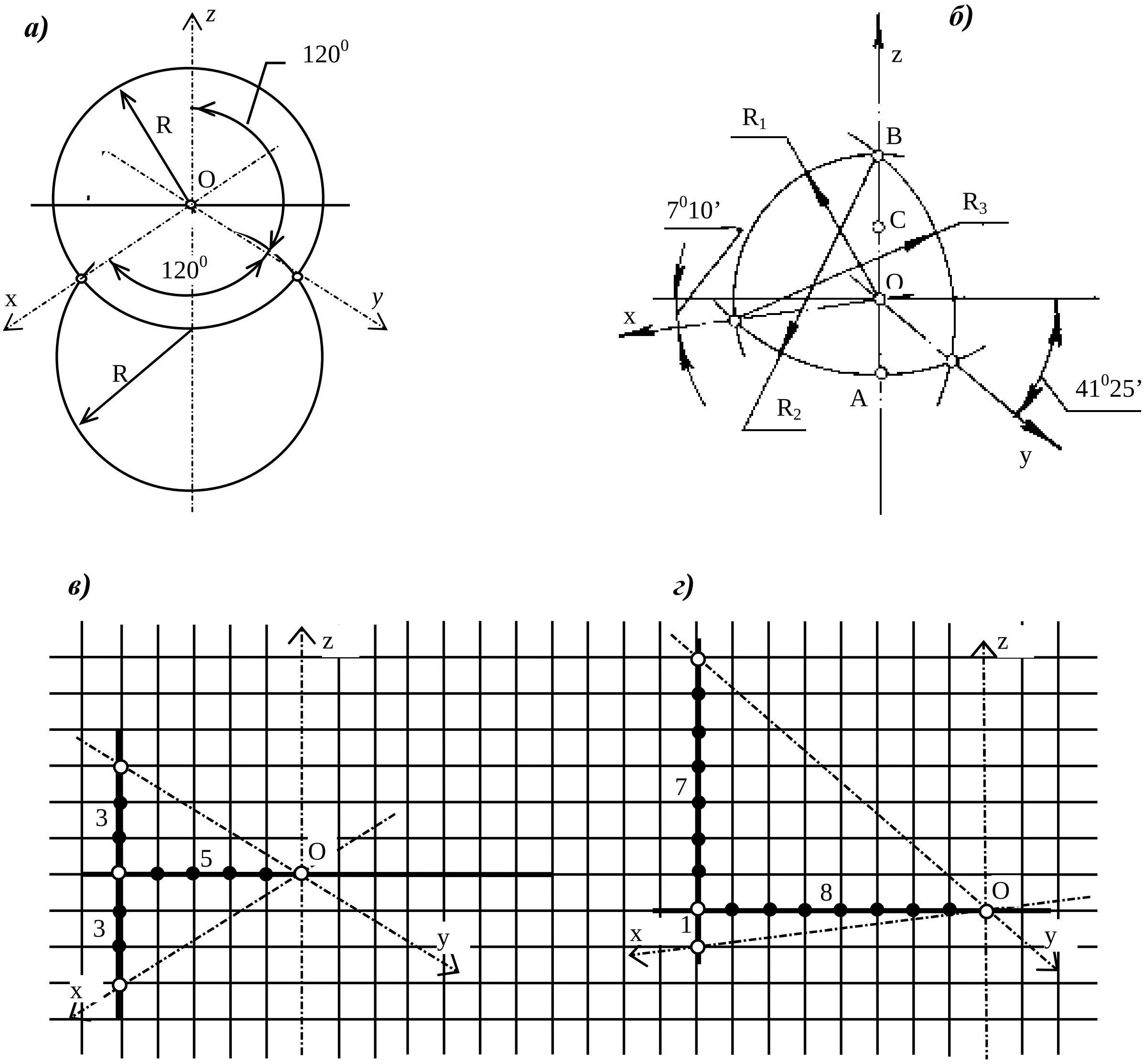

Рис. 1

Відомо, що аксонометричні осі в прямокутних ізометрії та диметрії будуються досить просто і швидко як за допомогою традиційних креслярських інструментів, так і без них (рис.1). Стосовно диметрії, звернемо увагу на те, що від'ємна піввісь осі Ох і додатна піввісь осі Оу перетинаються під кутом $48^035'$, що (у малюванні) «трохи» більше 45^0. Ця обставина значно спрощує проведення потрібних напрямків у прямокутній диметрії в процесі реалізації алгоритмів стереометричних побудов «від руки». Адже кут у 45^0 будується елементарно, в тому числі і без використання креслярських інструментів.

Нехай в основі піраміди (призми) лежить рівносторонній трикутник. Розглянемо коло з радіусом R=6 одиницям довільно взятого масштабу і впишемо в нього правильний трикутник АВС (на рис.2, а побудовано горизонтальну проекцію $A_1B_1C_1$ основи многогранника на епюрі Г.Монжа). У прямокутному трикутнику $M_1A_1O_1$ кут A_1 дорівнює 30^0. Звідси маємо $\frac{M_1O_1}{M_1A_1}=tg30^0=0{,}57735027\approx 0{,}6=\frac{3}{5}$. Цим, власне, введено умовні співвідношення в трикутнику, про які говорилося раніше, і в прямокутній декартовій системі координат хОу однозначно визначено кожну його вершину :А(3;5), В(3;-5), С(-6;0). Тепер, скориставшись координатною ламаною аксонометрії (алгоритмом у п'ять кроків [5]), а також тим, що відношення відрізків на прямій і паралельність прямих є інваріантами паралельного проеціювання, можна записати насправді оптимальний алгоритм побудови такого многогранника в аксонометрії:

R= *Ізометрія* *Диметрія*

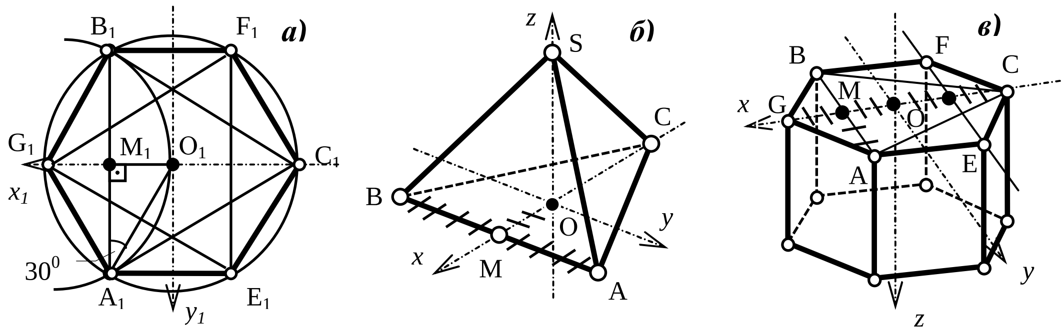

Рис. 2

1) будуємо аксонометричні осі, як показано на рис.1;
2) від початку координат в додатному напрямку осі Ох відкладаємо 3 одиниці масштабу (ОМ=3);
3) через точку М проводимо пряму, паралельну осі Оу;
4) від точки М на проведеній прямій в додатному і від'ємному напрямках осі Оу відкладаємо по 5 відрізків одиничної довжини в ізометрії і по 2,5 в диметрії (МА=МВ=5 або МА=МВ=2,5 відповідно);
5) від точки О у від'ємному напрямку осі Ох відкладаємо відрізок $OC = 2 \cdot OM$ (ОС=6);
6) з'єднавши попарно точки А.,В,С відрізками прямих, одержимо гарантовано наочне зображення основи піраміди (призми). Вершину S піраміди (нижню основу A'B'C' призми) побудувати на зображенні не складно.

Якщо ж ми говоримо про проеційне креслення М.Ф.Четверухіна (технічний малюнок), виконаний в ізометрії (чи диметрії) "від руки", що врешті-решт нас цікавить найбільше, то тут доцільно скористатися дещо спрощеним алгоритмом, а саме:

1) проведемо дві прямі, що перетинаються приблизно під кутом 120^0 і рівнонахилені до горизонту; точку О перетину цих прямих приймаємо за центр трикутника (приблизно під кутом 5^0 - 10^0 до горизонту проводимо пряму лінію і на ній довільно вибираємо точку О-центр трикутника);
2) на одній із прямих від точки О вліво-вниз відкладаємо три одиничні відрізки (ОМ=3) і через точку М ведемо пряму, паралельну іншій прямій (від точки О вліво-вниз відкладаємо три одиничні відрізки (ОМ=3) і через точку М ведемо пряму, нахилену до ОМ під кутом «трохи» більшим 45^0);
3) в обох напрямках прямої, що проведена через точку М, від цієї точки відкладаємо по 5 одиничних відрізків (по 2,5 одиничні відрізки), чим визначимо на зображенні дві вершини трикутника А і В;
4) від точки О вправо-вверх відкладаємо відрізок ОС вдвічі більший відрізка ОМ (ОС=6), що

R=7 *Диметрія*

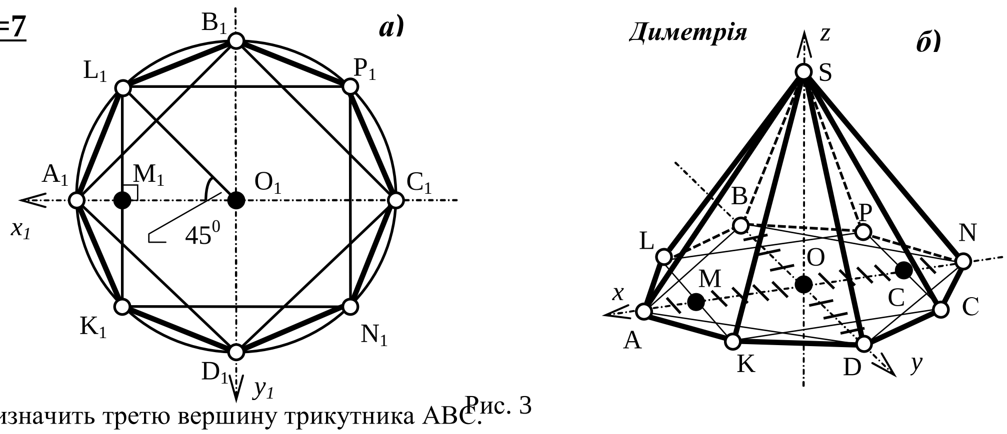

Рис. 3

визначить третю вершину трикутника АВС.

Далі у викладках тепер уже не потрібно так ретельно займатися деталями алгоритмізації зображень решти популярних у практичній стереометрії многокутників, оскільки схеми відповідних конструктивних дій абсолютно ідентичні щойно розглянутій. Відмінність полягає лише в тому, що усякий інший многокутник матиме свої власні умовні співвідношення, а отже, і лише йому властиві координати вершин у системі xOy.

Побудову в аксонометрії правильного шестикутника добре видно із рисунків 2,а,в. Очевидно, що тут для досягнення мети досить скористатися або перетворенням осьової симетрії відносно прямої Oy: E=S(A), F=S(B), G=S(C), або перетворенням центральної симетрії відносно точки O: F=S_0(A), E=S_0(B), G=S_0(C).

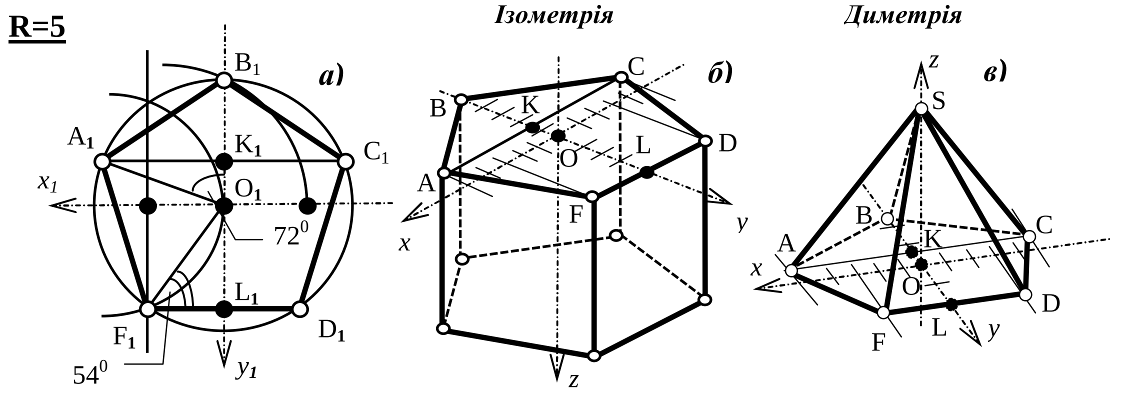

Рис. 4

Умовні співвідношення між елементами правильних чотирикутника і восьмикутника при R=7 одиницям масштабу, а також п'ятикутника (R=5) графічно в достатньо зрозумілій формі представлені на рисунках 3 і 4. Тут, у першому випадку (рис.3, а), із трикутника $O_1M_1L_1$ дістанемо $\frac{O_1M_1}{O_1L_1}=\frac{O_1M_1}{O_1A_1}=\cos 45^0=0{,}70710681\approx\frac{5}{7}$. Тому вершини восьмикутника (і двох квадратів) матимуть такі координати: A(7;0), C(-7;0), B(0;-7), D(0;7), K(5;5), L(5;-5), P(-5;-5), N(-5;5). В останньому ж випадку (рис. 4,а) залучаємо до розгляду вже два визначальні трикутники: $A_1K_1O_1$ і $F_1O_1L_1$. Із трикутника $A_1K_1O_1$ знаходимо $O_1K_1=5\cdot\cos 72^0=5\cdot 0{,}309017\approx 1{,}5$, $A_1O_1=5\cdot\sin 72^0=5\cdot 0{,}95105655\approx 4{,}75$, а з трикутника $F_1O_1L_1$ випливає, що $O_1L_1=5\cdot\sin 54^0=5\cdot 0{,}80901703\approx 4$ і $F_1L_1=5\cdot\cos 54^0=5\cdot 0{,}58778529\approx 3$. Тому остаточно одержимо: A(4,75; -1,5), C(-4,75; -1,5), B(0, -5), F(3, 4), D(-3, 4).

Аналогічно (рис.5,6) вводяться умовні співвідношення для випадків правильних семикутника (де R=8 і A(0; -8), B(6,25;-5), L(-6,25;-5), C(7,75;1,75), F(-7,75;1,75), D(3,5;7,25), E(-3,5;7,25)) та дев'ятикутника (де R=16 і A(0;-16), B(10,25;-12,25), C(15,75;-2,75), D(13,75;8), E(5,5;15)). Решта вершин дев'ятикутника розміщуються на малюнку відповідно симетрично точкам B, C, D і E відносно осі Oy.

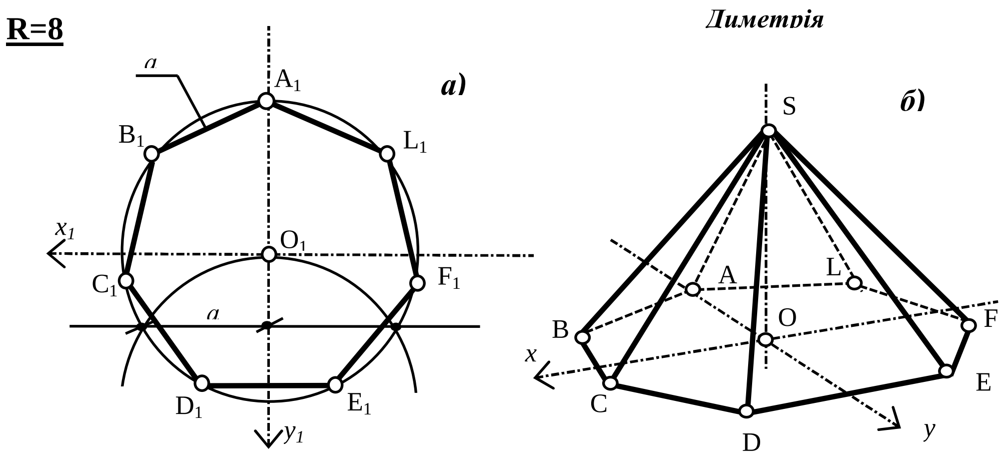

Рис. 5

-

R=16

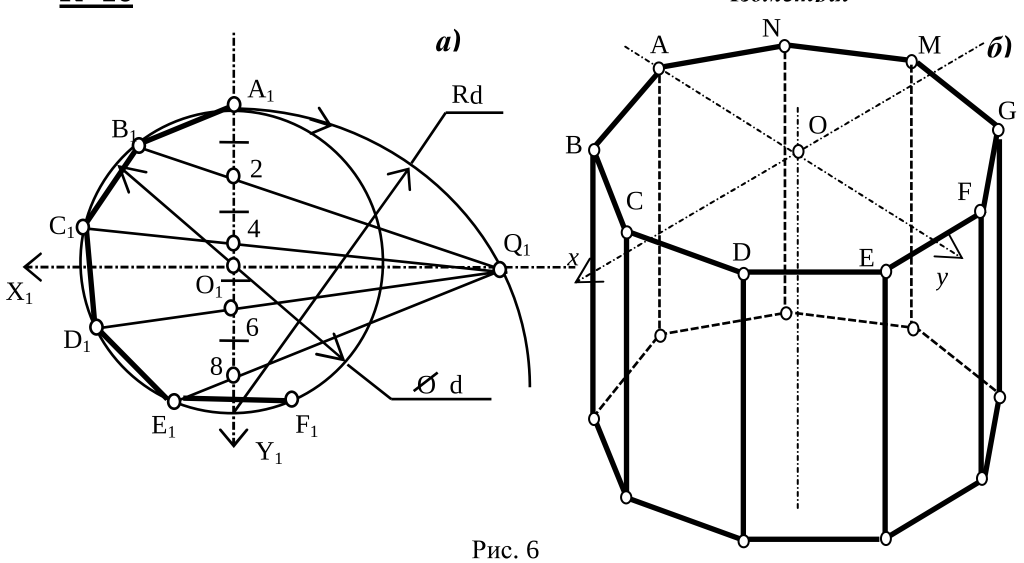

Рис. 6

Звичайно ж, порівняно з іншими, останні два многокутники є мало вживаними фігурами в теорії і практиці шкільного курсу геометрії. І, можливо, однією із причин саме такого стану речей якраз і є відсутність чітких алгоритмів відповідних побудов. Однак цікаво і важливо інше: ***вдало підібраний в кожному окремому випадку радіус описаного навколо многокутника кола індукує (з похибкою заокруглень <1%) зручні в побудовах числові значення координат вершин розглядуваної плоскої фігури,*** що й забезпечує якісне виконання малюнків відповідних гранних тіл в аксонометрії за вже описаною раніше схемою. З наголосом зауважимо також, що чотири-(восьми)кутну піраміду (призму) зображати в ізометрії не рекомендується, оскільки таке, до речі, зумовлене природою цієї проекції вірне зображення не досить наочне і залишає у спостерігача неприємне враження.

Цими умовиводами, загалом, можна було б завершити дослідження на кшталт алгоритмізації зображень найпростіших (для початку) тривимірних об'єктів. Однак уважний читач напевне помітив, що до цього часу нам доводилося оперувати лише многогранниками, в основі кожного з яких був винятково правильний многокутник. Здавалося б, що саме цей останній фактор відіграє визначальну роль у створенні найпростіших алгоритмів означених конструктивних операцій. Безумовно, що кожний, хто добре зрозумів суть концепції зазначених стереометричних побудов, забажає навчитися виконувати схожі проеційні малюнки многогранників з будь-яким многокутником в основі, відмінним від правильного (скажемо, прямокутним трикутником, рівнобічною трапецією тощо). Адже останнім справді належить чільне місце і в стереометрії, і в техніці.

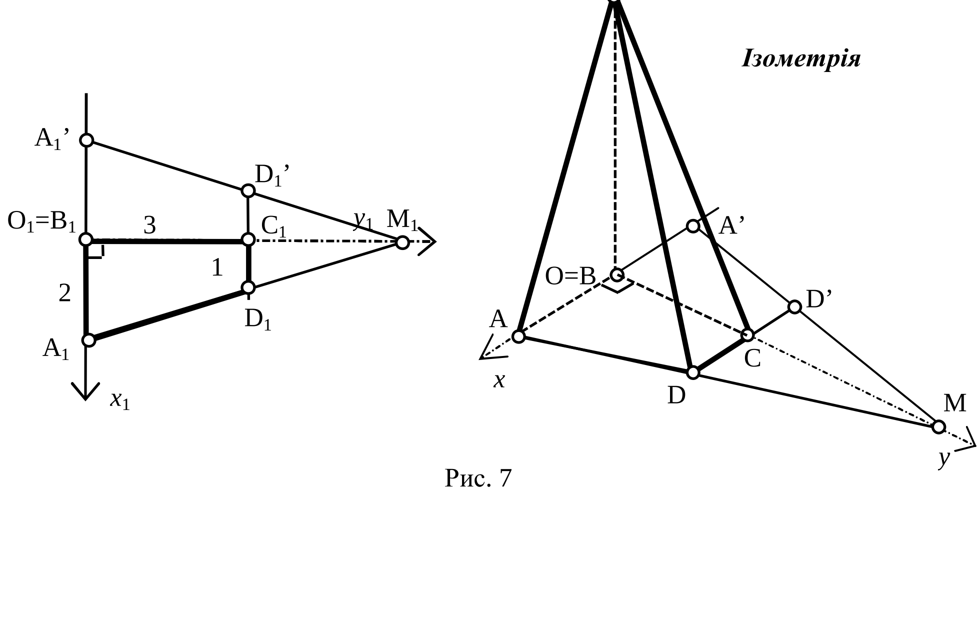

Рис. 7

Можливо, відразу в це й важко повірити, однак ми стверджуємо, що і в такому випадку не варто зраджувати обраним базовим вихідним позиціям. Тобто, перш за все, зумисне потрібно (рис. 7) грунтовно попрацювати з основою стереометричного тіла в натуральну величину, а саме, сумістити многокутник з площиною зображень, віднести його до деякої власноруч розумно (раціонально) введеної ортонормованої системи координат xOy і «на око» (або ж за умовою задачі) виділити умовні співвідношення між визначальними елементами розглядуваної плоскої фігури (строгість цієї операції треба співвідносити з призначенням проеційного креслення). Наступні побудови в аксонометрії виконуємо інструментами чи " від руки" за схожими до наведених вище алгоритмами.

Таким чином, із зображеннями найпершої групи тіл стереометрії, многогранниками, ми визначилися остаточно. Створені конструктивно прості алгоритмічні схеми для побудови всіх можливих часто вживаних означених фігур. Вірність і гарантована наочність проеційних малюнків, що якісно і легко виконуються навіть «від руки», досягається вдало залученими до справи аксонометричними напрямками і введеними умовними співвідношеннями між позиційно і метрично визначальними елементами многокутників, що лежать в їх основах. Всі перераховані фактори в сукупності спричиняють до можливої реалізації цих алгоритмів на сучасних персональних комп'ютерах у вигляді тривіальних навчальних програм, що й зроблено під керівництвом автора студентами фізико-математичного факультету Вітюком О. і Лисогором О.

ЛІТЕРАТУРА

1. Глазунов Е.А, Четверухин Н.Ф. Аксонометрия. —М.: Гос. из-во техн.-теорет. литер-ры, 1953.—291 с.
2. Четверухін М.Ф. Рисунки просторових фігур у курсі геометрії. /Посібник для вчителів середньої школи. —К.: Радянська школа, 1963.—188 с.
3. Щербина В.В. Построение технического рисунка. —К.: Вища школа, 1980.—144 с.
4. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике. —К.: Радянська школа, 1983.—192 с.
5. Ленчук В.І., Ленчук І.Г. Основи стереометричних побудов /Посібник для вчителів та студентів.—Житомир: Олеся, 1994.—224 с.

Ленчук Іван Григорович - кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедрою математики Житомирського державного педагогічного інституту ім. І.Франка.

Наукові інтереси:

– методика викладання в вищій школі;
– прикладна і конструктивна геометрія.