



Open Archive Toulouse Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/>
Eprints ID: 9180

To cite this document: Roussouly, Nicolas and Petitjean, Frank and Salauin, Michel
Analyse de la fiabilité d'une structure spatiale. (2011) In: CSMA 2011 - 10ème Colloque
National en Calcul des Structures, 09-13 May 2011, Giens, France.

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: staff-oatao@inp-toulouse.fr

Analyse de la fiabilité d'une structure spatiale

N. Roussouly^{1,2}, F. Petitjean², M. Salaun¹

¹ Université de Toulouse, Institut Clément Ader (ICA), ISAE

² Département Génie Mécanique, Icam

Résumé — L'analyse de la fiabilité des grandes structures est difficile car le nombre de variables aléatoires d'entrée et le nombre de réponses à traiter sont généralement grands. Lorsque le comportement mécanique de la structure n'est pas fortement non-linéaire, les surfaces de réponse présentent des outils intéressants pour évaluer la fiabilité. Ce papier expose une stratégie de résolution appliquée à une structure spatiale. Elle consiste à simplifier le problème initial dans le but de conserver l'information essentielle. Pour cela, la réduction s'appuie sur la sélection des variables les plus pertinentes. Un indicateur d'erreur est utilisé pour valider la précision des résultats. Des tirages de Monte Carlo viennent corroborer certains résultats.

Mots clés — Fiabilité des structures, surface de réponse, méthode adaptative, satellite.

1 Introduction

L'approche probabiliste connaît un intérêt grandissant dans les applications industrielles car elle permet de prendre des décisions pertinentes grâce à la richesse des résultats fournis. Une information qui nous intéresse particulièrement ici est la fiabilité ainsi que les paramètres qui en sont responsables. Plus précisément, à partir d'un vecteur de variables aléatoires d'entrée, noté $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_M)$, muni d'une loi de distribution conjointe, notée $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, et d'une fonction de performance, notée $G(\mathbf{X})$, telle que, pour toute réalisation \mathbf{x} de \mathbf{X} , le domaine défini par $G(\mathbf{x}) \leq 0$ traduit la défaillance, la fiabilité du système est décrite à partir de la probabilité de défaillance, notée P_f , telle que :

$$P_f = \int_{G(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_M$$

La difficulté de résolution relève essentiellement de l'évaluation de la fonction de performance qui est généralement très coûteuse car issue d'un code éléments finis. Dans les approches industrielles, la complexité peut être accrue par le nombre de variables et de modes de défaillance à traiter, potentiellement grand. Ajoutons également le problème lié à la connaissance de la distribution conjointe et notamment à la structure de dépendance des lois marginales des variables mais cette difficulté ne sera pas prise en compte ici. La méthodologie des surfaces de réponse est une approche intéressante dans le cas où le modèle mécanique de référence n'est pas fortement non-linéaire. Son utilisation demande néanmoins quelques précautions pour limiter les temps de calcul mais aussi pour valider les résultats de fiabilité fournis. C'est en ce sens que l'application suivante est présentée.

Une première section introduit quelques outils concernant les surfaces de réponse dont une partie concerne la validation des résultats de fiabilité et une autre une méthodologie adaptative. Leur utilisation est présentée sur un exemple issu de la littérature [1]. La section suivante décrit une application plus précise sur une structure satellite. Elle montre comment le problème est traité pour sélectionner les variables les plus influentes, calculer et valider les probabilités de défaillance. Pour plus de détails sur ces parties, on pourra consulter [2, 3].

2 Méthodologie des surfaces de réponse

2.1 Approche générale

On considère un modèle physique représenté par l'application $y = \phi(\mathbf{x})$, où $y \in \mathbb{R}$ est une réponse d'intérêt, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$ est le vecteur des M variables d'entrée et ϕ la fonction déterministe du modèle mécanique.

De manière générale, un méta-modèle est une approximation du modèle physique telle que $y = \hat{\phi}(\mathbf{x}) + \varepsilon$ où $\hat{\phi}$ est la fonction d'approximation et ε désigne l'erreur entre le vrai modèle et le modèle approché. Nous appellerons dans la suite surfaces de réponse (SR) un méta-modèle dont la fonction d'approximation est du type $\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^P a_j z_j$ où z_j avec $j = 1 \dots P$ sont des monômes des variables d'entrée x_m d'ordre 2 maximum. La SR est déterminée en fonction d'un échantillon statistique de taille N , tel que $N \geq P$, obtenu à partir de simulations du modèle de référence. Elle peut être écrite sous forme matricielle par l'équation de régression linéaire :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\mathbf{a} + \varepsilon$$

où $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^T$ est le vecteur de la réponse évaluée en chaque point de l'échantillon, \mathbf{Z} est la matrice des régresseurs de taille $N \times P$ de rang maximum, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_P)^T$ est le vecteur des coefficients à déterminer, et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T$ est le vecteur des termes d'erreur en chaque point de l'échantillon. Les coefficients \mathbf{a} sont estimés par minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés. Un moyen d'évaluer la qualité de la SR est d'utiliser le coefficient de détermination, noté R^2 , compris entre 0 et 1. Néanmoins, ce dernier n'est pas toujours pertinent, surtout lorsqu'il s'agit de ne pas construire une SR avec tous les termes possibles mais de sélectionner les plus importants.

2.2 Erreur de prédiction et sélection de la surface de réponse

Pour éviter les risques de surapprentissage et construire une SR prédictive, on souhaite sélectionner un nombre de termes limité, noté ξ , parmi les P potentiels. Si le critère de sélection d'un terme est basé sur le coefficient R^2 , alors on obtiendra toujours $\xi = P$ car l'ajout d'un terme dans la SR améliore obligatoirement R^2 . Pour éviter cela, plusieurs critères peuvent être utilisés tels que le *Cp de Mallows* [4], l'*Akaike Information Criteria* (AIC) [5], le *Bayesian Information Criteria* (BIC) [6] ou encore le coefficient de détermination ajusté, noté R_{adj}^2 . Ces critères, appelés critères par pénalisation, consistent à pénaliser l'erreur empirique du modèle par le nombre de termes présents dans celui-ci. Cela permet de compenser l'amélioration monotone du modèle lorsque le nombre de termes augmente. D'autres méthodes appelées *validation croisée* et *bootstrap* permettent également de mieux estimer l'erreur de prédiction en évaluant l'erreur du modèle sur plusieurs échantillons qui ne sont pas utilisés pour le construire. Ces méthodes ne font aucune hypothèse contrairement aux Cp, AIC et BIC qui supposent que les termes d'erreur ε_i sont indépendants et normalement distribués¹. Néanmoins, ces derniers restent intéressants pour sélectionner les termes pertinents parmi une liste potentielle, mais ne seront pas utilisés pour évaluer l'erreur de la SR de manière absolue. La sélection des termes peut se faire de manière itérative en utilisant les méthodes *forward*, *backward*, *stepwise* ou *sequential replacement*. Elles consistent à sélectionner un sous-ensemble de termes en fonction des critères par pénalisation. En utilisant les quatre critères précédents, puisqu'on ne connaît pas a priori le meilleur, on peut construire quatre SR potentielles dont la meilleure est choisie en fonction de son erreur évaluée par validation croisée. Plus précisément, on préférera utiliser le critère, noté Q^2 , similaire au coefficient R^2 en validation croisée.

Le coefficient Q^2 est une mesure pertinente de la qualité d'une SR mais reste néanmoins global et donc peu sensible aux erreurs dans les extrémités du domaine sur lequel est construite la SR. De ce fait, il n'est pas particulièrement intéressant pour évaluer l'influence de l'erreur d'une SR sur la fiabilité puisque le domaine de défaillance est généralement situé en queue de distribution. C'est pour cela que la validation finale est basée sur le *bootstrap*.

2.3 Validation de la surface de réponse

Le *bootstrap* consiste à former de nombreux échantillons à partir de l'échantillon initial ce qui permet de construire plusieurs SR et donc d'évaluer les variations des prédictions aux points de l'échantillon. Pour cela, plusieurs centaines d'échantillons *bootstrap*, notés \mathbf{x}^{*b} pour $b = 1 \dots B$, sont formés et utilisés pour construire les SR, notées $\hat{\phi}^{*b}$, et prédire les réponses, notées y_i^{*b} , basées sur l'échantillon global, telles que $\hat{y}_i^{*b} = \hat{\phi}^{*b}(\mathbf{x}_i)$ avec $i = 1 \dots N$. En chaque point de l'échantillon, les variations des prédictions

1. Notons que cette hypothèse n'a pas réellement de sens ici étant donné que les simulations sont déterministes. Cela signifie que, pour deux simulations avec les mêmes valeurs des paramètres d'entrée, les réponses sont strictement égales. Elle a un sens dans le cas d'expériences physiques qui possèdent une part d'aléa.

sont évaluées à partir des intervalles de confiance à 95% basés sur les percentiles, ce qui consiste à chercher l'intervalle $[y_{i_{\text{inf}}}^*, y_{i_{\text{sup}}}^*]$ qui contient 95% des valeurs observées sur les B échantillons *bootstrap*.

Ces variations sont utilisées pour définir des indicateurs dans une région d'intérêt proche de l'état limite. Cette région est liée au voisinage du point de défaillance le plus probable tel qu'il est défini dans [7]. Plus précisément, en notant β l'indice de fiabilité obtenu par la méthode FORM (*First Order Reliability Method*), on définit la boule de rayon $\beta(1 + \delta_{\epsilon_{\text{pdf}}})$ avec :

$$\delta_{\epsilon_{\text{pdf}}} = \sqrt{1 - \frac{2 \ln(\epsilon_{\text{pdf}})}{\beta^2}} - 1$$

où ϵ_{pdf} définit le niveau d'importance à partir duquel on considère que la densité de probabilité autour du point de défaillance le plus probable est négligeable. En notant φ_n la loi de distribution multinormale et \mathbf{u}^* les coordonnées du point de défaillance dans l'espace normal standard, on considère que tout point \mathbf{u} de l'espace (normal standard) a une densité de probabilité négligeable si $\varphi_n(\mathbf{u}) \leq \epsilon_{\text{pdf}} \varphi_n(\mathbf{u}^*)$. La région d'intérêt, notée \mathcal{S} , est définie par l'hypercube qui encadre l'intersection entre la boule $\mathcal{B}(\mathbf{0}, \beta(1 + \delta_{\epsilon_{\text{pdf}}}))$ et l'état limite $H(\mathbf{u}) = 0$ où H est la fonction de performance dans l'espace normal standard.

L'indicateur d'erreur est calculé à partir des variations des prédictions dans la région d'intérêt. Si l'on note \hat{y}_i la prédiction de la SR au point d'échantillon i , ces indicateurs sont

$$\epsilon_{\text{inf}} = \max_{i \in \mathcal{S}} (|\hat{y}_i - \hat{y}_{i_{\text{inf}}}^*|) \quad \epsilon_{\text{sup}} = \max_{i \in \mathcal{S}} (|\hat{y}_i - \hat{y}_{i_{\text{sup}}}^*|)$$

Ils peuvent être reportés sur l'état limite afin de déterminer leur influence sur la probabilité de défaillance. De cette manière, si \mathbf{X} est le vecteur des variables aléatoires d'entrée, G la fonction de performance telle que $G(\mathbf{x}) \leq 0$ est le domaine de défaillance, on calcule les probabilités de défaillance notées *inf* et *sup*, telles que :

$$P_{f_{\text{inf}}} = \mathbb{P}(G(\hat{\phi}(\mathbf{X}) - \epsilon_{\text{inf}}) \leq 0) \quad P_{f_{\text{sup}}} = \mathbb{P}(G(\hat{\phi}(\mathbf{X}) + \epsilon_{\text{sup}}) \leq 0)$$

Cet intervalle ne contient pas, à coup sûr, la vraie probabilité de défaillance mais il permet d'avoir une idée de l'influence de l'erreur du modèle sur celle-ci.

La région d'intérêt peut également être un moyen d'enrichir de manière adaptative la surface de réponse en ajoutant des points d'échantillon supplémentaires. De cette manière, la zone enrichie est, à chaque itération, celle qui contribue le plus à la probabilité de défaillance.

2.4 Méthode adaptative

Les méthodes adaptatives sont des méthodes itératives qui consistent à se rapprocher progressivement de la zone de défaillance. La méthode présentée ici s'appuie sur la région d'intérêt pour enrichir l'échantillon et valider les résultats. Elle compte trois étapes qui sont : (a) localiser la région d'intérêt, (b) améliorer la SR et (c) valider la SR. À l'itération initiale, l'échantillon est distribué suivant un Latin Hypercube Sampling (LHS) étant donné que c'est un moyen simple de couvrir correctement l'espace et qu'il peut être enrichi en respectant une structure quasi-LHS [1, 8]. Rajoutons qu'à chaque itération, le nombre de termes autorisés dans la SR est limité à ξ_{lim} tel que $3\xi_{\text{lim}} \leq N$, ceci pour que les SR construites sur les échantillons *bootstrap* ne soient pas détériorées, et le nombre de points d'échantillon initial est $N_{\text{init}} = 3M$ (M étant le nombre de variables). Tout au long de la procédure, la SR est construite dans l'espace normal standard des variables aléatoires d'entrée.

Étape (a) À chaque itération, la SR est construite et utilisée pour calculer l'indice de fiabilité par FORM, noté β_i , et la région d'intérêt \mathcal{S}_i . La région est considérée localisée si l'indice de fiabilité varie peu, c'est-à-dire si l'écart relatif entre β_i et β_{i-1} est inférieur à un certain niveau noté ϵ_β . Dans ce cas, la région est fixée et n'est plus mise à jour, on passe à l'étape (b). Dans le cas contraire, la région est utilisée pour enrichir l'échantillon LHS. Comme à chaque itération, le nombre de points d'échantillon augmente, le nombre de termes dans la SR peut également augmenter.

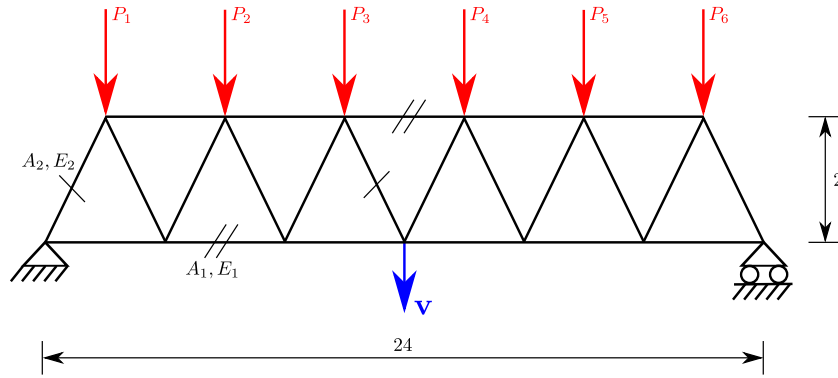


FIGURE 1 – Structure du treillis (unité m)

Variable	Loi de distribution	Moyenne	Ecart-type
E_1, E_2 (Pa)	Log-normale	2.10×10^{11}	2.10×10^{10}
A_1 (m ²)	Log-normale	2.0×10^{-3}	2.0×10^{-4}
A_2 (m ²)	Log-normale	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-4}
$P_1 - P_6$ (N)	Gumbel	5.0×10^4	7.5×10^3

TABLE 1 – Propriétés des variables aléatoires du treillis.

Étape (b) On considère maintenant que la région d'intérêt est déterminée et est appelée S_{conv} . Elle est utilisée pour enrichir l'échantillon jusqu'à ce que le coefficient Q^2 de la SR atteigne une valeur souhaitée notée ϵ_{model} . À chaque itération, une seconde SR (appelée SR locale) est construite avec les points d'échantillon inclus uniquement dans la région d'intérêt. Si le Q^2 de la SR locale dépasse celui de la SR globale, alors les points en dehors de la région d'intérêt sont définitivement supprimés de l'échantillon (mais sauvegardés). Dans ce cas, le critère ϵ_{model} n'est testé que sur la SR locale. Notons que si la SR globale atteint la valeur ϵ_{model} , le plan d'expérience complet est maintenu. Lorsque la SR converge, on passe à l'étape (c) pour la validation.

Étape (c) La dernière étape est l'application de ce qui est décrit en section 2.3. La méthode *bootstrap* est d'abord utilisée pour extraire les indicateurs. Les probabilités de défaillance $P_{f_{\text{inf}}}$ et $P_{f_{\text{sup}}}$ sont évaluées par FORM suivi d'un tirage d'importance centré au point de défaillance le plus probable. À cette étape, si les variations observées sur les probabilités sont trop importantes, la procédure peut être relancée à partir de la dernière itération avec un critère ϵ_{model} plus contraignant.

2.5 Exemple d'application

La méthode est illustrée sur une application issue de [1]. Il s'agit d'un treillis dont la structure est présentée en Figure 1. Les variables aléatoires d'entrée sont les sections, modules d'Young et forces, ce qui correspond à 10 variables. Elles sont considérées comme indépendantes les unes des autres. Le Tableau 1 présente les propriétés aléatoires des variables. On souhaite évaluer la fiabilité de la structure avec la fonction de performance $G(\mathbf{x}) = 0.14 - |\mathbf{v}(\mathbf{x})|$ où \mathbf{x} sont des réalisations des variables \mathbf{X} obtenues par transformation isoprobabiliste des variables d'entrée et \mathbf{v} désigne le déplacement vertical au centre du treillis. L'indice de fiabilité généralisé de référence, calculé par FORM suivi de tirages d'importance (500 000 simulations) vaut $\beta_{\text{REF}} = 3.98$. La méthode adaptative, présentée en section 2.4, est utilisée avec les paramètres suivants : $\epsilon_{\text{pdf}} = 0.05$ pour le niveau d'importance de la région d'intérêt, $\epsilon_{\beta} = 0.01$ pour le critère de convergence de la région d'intérêt. Les valeurs du critère de convergence ϵ_{model} (qualité de la SR) sont modifiées en fonction des variations obtenues autour de la probabilité de défaillance. Les résultats sont présentés dans le tableau 2 où β_{gen} est l'indice de fiabilité généralisé ($\beta_{\text{gen}} = -\Phi^{-1}(P_f)$) où Φ , est la fonction de répartition gaussienne) $\beta_{\text{gen}_{\text{inf}}}$ et $\beta_{\text{gen}_{\text{sup}}}$ sont respectivement les indices généralisés obtenus à partir de $P_{f_{\text{inf}}}$ et $P_{f_{\text{sup}}}$, et N_{calc} désigne le nombre de calculs réalisés.

β^{REF}	ϵ_{model}	Q^2	β_{gen}	$\beta_{\text{gen}_{\text{inf}}}$	$\beta_{\text{gen}_{\text{sup}}}$	N_{calc}
3.98	0.990	0.9920	3.80 (4.7%) ^a	3.37 (11.3%) ^b	4.06 (6.8%) ^b	62
	0.995	0.9970	3.90 (2%) ^a	3.67 (5.8%) ^b	4.09 (4.9%) ^b	+ 16 = 78
	0.999	0.9994	3.99 (0.3%) ^a	3.87 (3%) ^b	4.09 (2.4%) ^b	+ 64 = 142

a. Écart relatif avec β^{REF} .

b. Écart relatif avec β_{gen} .

TABLE 2 – Résultats de la méthode adaptative obtenus sur le treillis.

Le critère ϵ_{pdf} vaut dans un premier temps 0.99. La valeur Q^2 de la SR obtenue vaut 0.992 et 62 calculs sont nécessaires. Les variations de l'indice de fiabilité généralisé obtenues grâce aux indicateurs *bootstrap* sont trop importantes et on souhaite les réduire. Pour cela, le critère est affiné avec $\epsilon_{\text{pdf}} = 0.995$. Les variations sont réduites avec 16 calculs supplémentaires. Pour la dernière étape, le critère est fixé à $\epsilon_{\text{pdf}} = 0.999$ et le nombre de calculs supplémentaires est de 64. Notons bien que, dans cette dernière étape, seuls les points d'échantillon dans la région d'intérêt sont utilisés pour construire la SR, ce qui correspond à 103 points. Les variations calculées à partir des indicateurs *bootstrap* sont inférieures à 3%.

3 Application au satellite TARANIS

TARANIS est un satellite développé par le CNES (Centre National d'Études Spatiales). Le modèle éléments finis (EF) est présenté en figure 2. Il contient 380 000 ddl et est étudié sous 8 cas de chargement statiques (accélération imposées). Le solveur EF utilisé est MSC.Nastran.

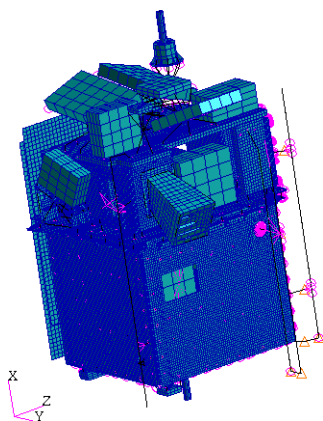


FIGURE 2 – Modèle EF de TARANIS

Les critères de défaillance sont les marges élastiques dans les panneaux latéraux, inférieur et supérieur et les marges de glissement dans les liaisons vissées entre les panneaux latéraux et le plateau inférieur. Tous les paramètres de ces composants ainsi que les amplitudes de chargement sont considérées comme aléatoires, ce qui représente 76 variables aléatoires. Les variables sont supposées indépendantes, gaussiennes avec des coefficients de variation de 4% pour les caractéristiques matériaux et de 6% pour les épaisseurs. Notons que les variables qui interviennent dans le calcul des marges de sécurité (limite élastique, précharge dans les vis et coefficient de frottement des assemblages) sont considérées comme

fixes avec des valeurs caractéristiques (valeurs à contenu statistique). En tenant compte des cas de chargement, le nombre de réponses initiales est de 1200 mais seules 150 sont sélectionnées en fonction des valeurs des marges obtenues avec un calcul déterministe classique.

La méthode adaptative ne peut pas être appliquée directement car elle est adaptative pour une seule réponse. Une première construction de SR sur un domaine relativement large va permettre d'identifier les réponses critiques. À partir de ces dernières, les variables les plus influentes par rapport aux probabilités de défaillance sont sélectionnées et le domaine d'étude est limité à la réunion des régions d'intérêt de chaque réponse. À cette étape, les résultats obtenus sur certaines réponses sont suffisamment précis, les autres sont traitées par méthode adaptative. Pour commencer, une analyse de sensibilité est effectuée.

3.1 Analyse de sensibilité préliminaire

L'analyse de sensibilité préliminaire est basée sur une méthode de screening appelée MORRIS OAT [9]. Elle consiste à évaluer en plusieurs points de l'espace les effets élémentaires des variables (dérivées)

Nom des réponses	β_{REF}	β_{with}	$\beta_{reduction}$	$\beta_{adaptive}$
1260_c3	**	4.12 +7.2% -6.8%	4.06 +2.8% -3.2%	**
1250_c3	**	5.06 +5.5% -4.9%	5.03 +2.5% -2.7%	**
1190_c7	**	4.10 +6.4% -6.2%	3.92 +3.5% -3.5%	**
PZ_c4	2.79 +2.0% -1.7%	2.79 +6.4% -7.2%	2.76 +12.0% -15.2%	2.79 +2.1% -3.0%
1180_c7	3.77 +13.1% -4.3%	3.78 +5.9% -5.9%	3.71 +3.2% -3.4%	**

TABLE 3 – Indices de fiabilité généralisés obtenus sur TARANIS.

pour en déduire des statistiques. Ces statistiques sont la moyenne des effets élémentaires, la moyenne de leur valeur absolue (notée $\hat{\mu}^*$) et leur écart type (noté $\hat{\sigma}$). Elles permettent de fournir une information sur l'importance d'une variable mais aussi sur son influence non-linéaire et/ou par interaction avec une autre variable. La méthode OAT classique calcule les effets élémentaires de manière itérative en appliquant un incrément sur chaque variable. Dans notre cas, le solveur EF Nastran possède un module d'analyse de sensibilité qui permet d'évaluer les gradients en une seule simulation grâce à une formulation semi-analytique. Son utilisation pour calculer les effets élémentaires réduit considérablement le nombre de calculs. Au total, 15 simulations EF sont lancées et les gradients sont évalués en chaque point.

Les résultats obtenus montrent que, pour chaque réponse, peu de variables sont réellement importantes. Malgré cela, en regroupant les informations de toutes les réponses, seulement 15 variables sont négligeables et peuvent être remplacées par des variables déterministes (on prend leur valeur moyenne). De plus, aucune direction d'échantillonnage ne peut être privilégiée car la direction de l'effet des variables n'est jamais la même d'une réponse à l'autre. Enfin l'analyse de sensibilité est utilisée pour pré-sélectionner les termes croisés pour la construction des SR. En effet, avec 61 variables (celles sélectionnées en enlevant les 15 énoncées précédemment), le nombre de termes d'interaction potentiels pour la construction itérative de la SR (cf. section 2.2) est de 1830. De plus, avec le nombre de réponse à étudier, le temps de calcul pour la construction des SR est largement augmenté. Pour éviter cela, en sélectionnant les variables qui peuvent, a priori, avoir un effet par interaction avec une autre variable, la liste des termes croisés peut être réduite. Pour chaque réponse, les variables sélectionnées sont celles qui correspondent à 95% des valeurs cumulées de $\hat{\sigma}$ lorsque les variables sont rangées dans l'ordre décroissant de leur influence. Parmi les réponses, le nombre de termes d'interaction composés à partir de ces variables est de 412 en moyenne et 630 au maximum. Notons bien qu'il ne s'agit pas d'une sélection dans le sens où les autres variables sont toujours prises en compte par leurs termes linéaires et quadratiques.

3.2 Première approche

L'étude de fiabilité est menée à partir des 61 variables précédemment sélectionnées. Un échantillon LHS de 183 points (3 fois le nombre de variables) est distribué sur un domaine large, c'est à dire ± 5 écarts type autour des moyennes des variables. Les SR sont construites sur chaque réponse avec la démarche itérative présentée en section 2.2 où les termes croisés potentiels sont ceux qui ont été sélectionnés à la section précédente. Les probabilités de défaillance sont évaluées par FORM suivi de tirages d'importance avec 100 000 simulations (les coefficients de variation sont inférieurs à 1%). Les résultats des indices de fiabilité généralisés correspondants sont reportés dans le tableau 3, colonne β_{with} . Notons que seules les réponses avec des probabilités supérieures à 10^{-7} sont présentées. La réponse appelée PZ_c4 correspond à la contrainte dans un panneau alors que les autres réponses sont des glissements de vis d'interface. La colonne β_{REF} correspond à des résultats de référence obtenus par des tirages de Monte Carlo directs avec 60 236 simulations. Les autres colonnes seront détaillées plus loin. Les écarts relatifs notés dans le tableau ont différentes significations. Pour Monte Carlo, il s'agit des intervalles de confiance à 95%. À

ce sujet, certaines réponses n'ont pas de valeur numérique car trop peu de simulations ont été effectuées et les résultats ne sont pas assez précis. Seule la réponse PZ_c4 est réellement satisfaisante. Les écarts relatifs des autres colonnes sont les variations calculées grâce aux indicateurs *bootstrap* présentés en section 2.3. Notons qu'ici, la région d'intérêt a été définie avec $\epsilon_{pdf} = 0.05$ mais aucun point d'échantillon n'a été trouvé dans la région (les régions d'intérêt sont bien incluses dans le domaine d'étude). De ce fait les indicateurs *bootstrap* ont été déterminés sur le domaine global.

Pour être plus précis et confiant vis-à-vis des variations obtenues grâce aux indicateurs, les résultats sont affinés dans la section suivante. Avant cela, le problème peut être simplifié en limitant le domaine d'étude aux régions d'intérêt mais aussi en essayant de sélectionner les variables les plus influentes. Signalons que les qualités globales des SR sont relativement correctes puisque toutes les valeurs Q^2 sont supérieures à 0.99. La sélection des variables est faite en fonction des facteurs d'omission [10]. Plus précisément, les indices de fiabilité généralisés sont calculés en fixant certaines variables à leur valeur moyenne. Les variables fixées sont sélectionnées en fonction d'un seuil sur leur facteur d'importance. En faisant évoluer la valeur seuil, on cherche l'ensemble des variables réellement influentes sur les probabilités de défaillance. Parmi les réponses étudiées, le nombre de variables aléatoires sélectionnées est de 14 (parmi 61 initiales) et les facteurs d'omission montrent que les écarts relatifs des indices de fiabilité généralisés avec ceux initialement calculés sont inférieurs à 1%. Enfin, le nouveau domaine d'étude est limité à la réunion des régions d'intérêt des réponses. Notons que la réunion des régions d'intérêt peut être très étendue si les variables n'ont le même effet sur les réponses. Dans notre cas, seules deux variables (parmi 14) ont des effets différents sur plusieurs réponses mais malgré ça, la réunion des régions est plus petite que le domaine initial.

3.3 Analyse après réduction

Le nouveau problème se limite aux 14 variables sélectionnées et à la nouvelle région réduite. Un nouvel échantillon LHS de 42 points (3 fois le nombre de variables) est distribué. Comme précédemment les SR sont construites et les indices de fiabilité généralisés sont calculés par FORM suivi de tirages d'importance avec 100 000 simulations. Les résultats sont reportés dans le tableau 3, colonne $\beta_{\text{réduction}}$. Les variations observées sur les réponses concernant les vis sont déjà bien réduites puisque le plus grand écart relatif observé est de 3.5%. Seules les variations de la réponse PZ_c4 sont importantes, même plus importante que celles calculées à la section précédente. Étant donné qu'il s'agit de la dernière réponse, la méthode adaptative peut être utilisée efficacement.

3.4 Application de la méthode adaptative

Les calculs effectués à la section précédente sont utilisés pour lancer la procédure. Cela signifie qu'un échantillon initial existe et qu'il est utilisé pour construire une SR, évaluer l'indice de fiabilité ainsi que la région d'intérêt. Cet échantillon contient 42 points, la valeur Q^2 de la SR est de 0.992 et l'indice de fiabilité évalué par FORM vaut 2.80. La méthode est paramétrée avec $\epsilon_{pdf} = 0.05$, $\epsilon_{\beta} = 0.01$ et $\epsilon_{\text{modél}} = 0.995$. La procédure converge après une itération ce qui signifie qu'une fois l'indice de fiabilité convergé, la valeur Q^2 est immédiatement testée et atteint le critère souhaité. Le nombre de calculs EF correspondant est de 15 et la valeur Q^2 de la SR identifiée vaut 0.9992. Les résultats avec les écarts calculés grâce aux indicateurs *bootstrap* sont donnés dans le tableau 3, colonne $\beta_{\text{adaptative}}$. La figure 3 résume l'évolution des différents résultats. Rappelons que les résultats correspondant à β_{with} et β_{REF} ont été obtenus avec 61 variables aléatoires alors que les autres ne tiennent compte que de 14 variables aléatoires.

4 Conclusion

Ce papier présente un exemple d'analyse de fiabilité sur une structure spatiale. Le comportement mécanique de la structure est suffisamment simple pour être efficacement approché par des surfaces de réponse. Néanmoins le problème initial comporte un nombre important de variables aléatoires en entrée et de réponses à traiter. En ce sens, la stratégie présentée tente de réduire le problème dans le but de se focaliser sur les informations essentielles. Elle insiste également sur la validation des résultats fournis, notamment en utilisant les indicateurs calculés par *bootstrap* dans le but de connaître l'influence de

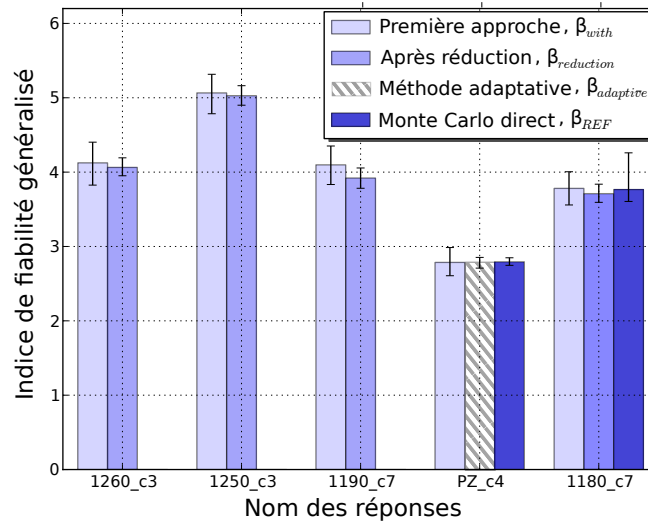


FIGURE 3 – Comparaison des indices de fiabilité généralisés obtenus.

l'erreur d'une surface de réponse sur la probabilité de défaillance évaluée.

5 Remerciements

Ce travail est supporté par le Centre National d'Études Spatiales (CNES), et Thales Alenia Space (TAS). Les auteurs remercient Fabrice Buffe (CNES), Anne Carpine et Jérôme Buffe (TAS).

Références

- [1] G. Blatman and B. Sudret. An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 25(2) :183–197, 2010.
- [2] N. Roussouly, F. Petitjean, and M. Salaun. A new adaptive response surface method for reliability analysis. Submitted, 2010.
- [3] N. Roussouly, F. Petitjean, and M. Salaun. A strategy based on response surface for reliability analysis of a spacecraft structure. Submitted, 2011.
- [4] C.L. Mallows. Some comments on C_p . *Technometrics*, 42(1) :87–94, 2000.
- [5] H. Akaike. Information theory and an extension of the likelihood ratio principle. In *2nd International Symposium on Information Theory, Tsahkadsor, Armenian*, pages 267–281, 1973.
- [6] G. Schwarz. Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, 6(2) :461–464, 1978.
- [7] A. Dutfoy and R. Lebrun. Le test du maximum fort : une façon efficace de valider la qualité d'un point de conception. *AFM, Maison de la Mécanique*, 2007.
- [8] G.G. Wang. Adaptive response surface method using inherited latin hypercube design points. *Journal of Mechanical Design*, 125(2) :210–220, 2003.
- [9] M.D. Morris. Factorial sampling plans for preliminary computational experiments. *Technometrics*, 33 :161–174, 1991.
- [10] H.O. Madsen. Omission sensitivity factors. *Structural Safety*, 5(1) :35–45, 1988.