



## Open Archive Toulouse Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/>  
Eprints ID: 5292

**To link to this article:** DOI:10.3166/JESA.45.547-574  
URL: <http://dx.doi.org/10.3166/JESA.45.547-574>

**To cite this version:** Mignot, Rémi and Hélie, Thomas and Matignon, Denis *Simulation en guides d'ondes numériques stables pour des tubes acoustiques à profil convexe.* ( In Press: 2011) Journal Europeen des Systemes Automatisés (JESA), 45 . pp. 547-574. ISSN 1269-6935

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: [staff-oatao@inp-toulouse.fr](mailto:staff-oatao@inp-toulouse.fr)

---

# Simulation en guides d'ondes numériques stables pour des tubes acoustiques à profil convexe

Rémi Mignot\* — Thomas Hélie\*\* — Denis Matignon\*\*\*

\* Institut Langevin, ESPCI ParisTech  
10, rue Vauquelin  
F-75005 Paris  
remi.mignot@espci.fr

\*\* IRCAM & CNRS, UMR 9912  
1, place Igor Stravinsky  
F-75004 Paris  
thomas.helie@ircam.fr

\*\*\* Université de Toulouse, ISAE  
10, avenue E. Belin  
BP 54032  
F-31055 Toulouse Cedex 4  
denis.matignon@isae.fr

---

*RÉSUMÉ.* Ce travail porte sur la modélisation physique de tubes acoustiques convexes pour la simulation numérique en temps réel. Le propos principal de cet article est l'apport de l'automatique et du traitement du signal pour la résolution numérique de problèmes de stabilité pour des systèmes de dimension infinie intervenant en acoustique musicale.

*ABSTRACT.* This work deals with the physical modelling of convex acoustic pipes for real-time simulation. The main purpose of this paper is the use of automatic control and signal processing to solve some stability problems for infinite dimensional systems involved in music acoustics.

*MOTS-CLÉS :* équations aux dérivées partielles, représentation d'état, réalisation minimale, réseaux de Kelly-Lochbaum, stabilité, guides d'ondes, systèmes différentiels avec retard.

*KEYWORDS:* partial differential equations, state-space representation, minimal realization, Kelly-Lochbaum framework, stability, acoustic waveguides, linear delay filters.

---

## 1. Introduction

### 1.1. Motivations

Cet article met en lumière la manière dont certains outils élémentaires de l'automatique permettent de résoudre des problèmes de simulation numérique de tubes acoustiques réalistes utilisés pour la synthèse sonore en temps réel (par exemple d'instruments de musique à vent), mais aussi de réduire significativement le coût de calcul. Ces résultats présentent une pertinence applicative dans la mesure où le réalisme de la synthèse sonore nécessite précisément de recourir à des modèles non triviaux incluant l'évasement d'un profil de tube (on parle de *perce*) et la prise en compte des pertes visco-thermiques dues aux couches limites au voisinage des parois, qui font apparaître des opérateurs de dérivation fractionnaire.

Les modèles 3D et 2D avec des conditions aux frontières réalistes sont beaucoup trop complexes pour être envisagés en synthèse sonore temps réel. Ils peuvent être réduits de façon efficace en une équation des ondes 1D incluant un terme qui modélise l'évasement du profil de tube. Il s'agit de l'*équation des pavillons* appelée aussi modèle de Webster (Webster, 1919). Une version plus élaborée de ce modèle conservatif inclut l'effet des pertes. Ce modèle dissipatif dit de Webster-Lokshin reste 1D et inclut un terme qui met en jeu une dérivation fractionnaire en temps. Cet opérateur joue un rôle crucial d'un point de vue perceptif sur le réalisme sonore mais sa mise en œuvre numérique reste complexe.

Il existe bien des méthodes d'analyse numérique pour les EDP indépendantes de l'évasement du pavillon (on parle souvent de la "courbure" du profil) qui préservent au niveau discret l'aspect conservatif ou dissipatif de ces modèles continus. Cependant, la complexité de ces modèles (en particulier à cause de l'opérateur modélisant les pertes) et les calculs numériques nécessaires rendent leur utilisation peu adaptée au temps réel.

Historiquement, les premières simulations efficaces et peu coûteuses introduites pour des modèles simples (ondes planes conservatives) reposaient sur des outils du traitement de signal : le formalisme dit de guide d'ondes numérique (Smith, 1987), et plus spécialement, une forme factorisée introduite par Kelly-Lochbaum (Kelly *et al.*, 1962). L'idée initiale reposait sur la factorisation du d'alembertien de l'équation des ondes planes en deux opérateurs de transport (selon  $\partial_x^2 - \partial_{ct}^2 = (\partial_x - \partial_{ct})(\partial_x + \partial_{ct})$ ) qui gouvernent chacun des ondes progressives "aller-retour" découplées, à partir desquels on pouvait dériver une forme en système à retards efficace pour la simulation.

Dans cet article, nous adaptons ce formalisme de *structure de Kelly-Lochbaum* au cas du modèle de Webster-Lokshin en utilisant le fait que dans l'équation de Webster-Lokshin, une factorisation de l'opérateur qui généralise le d'alembertien est encore possible. Ceci peut conduire à plusieurs définitions possibles d'ondes progressives, pour chacune desquelles une expression de l'énergie acoustique conduit bien à des formes quadratiques définies positives.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au modèle de Webster seul, conservatif, dans le cas convexe. On choisit de discrétiser le profil en  $N$  tronçons de cônes (courbure nulle), et de le réécrire dans le formalisme guide d'ondes : un système à retard stable entrée-sortie est obtenu mais qui fait apparaître des états internes instables, rendant caduque l'utilisation de sa réalisation. Une étude montre que sur les  $2N$  états,  $N$  d'entre eux sont instables et  $N$  sont stables. L'extraction d'une réalisation minimale garantit la stabilité, interne comme externe (Mignot *et al.*, 2008). Néanmoins, comme indiqué ci-dessus, ce modèle conservatif reste insuffisant pour le réalisme.

Dans un second temps, nous nous intéressons au modèle de Webster-Lokshin qui inclut les pertes. L'opérateur de dérivation fractionnaire rend les méthodes d'analyse numérique d'EDP encore plus lourdes et les méthodes de découpage en un grand nombre de tronçons de cônes moins pertinentes que dans le cas sans pertes. Une nouvelle stratégie est adoptée. Elle consiste à considérer des tronçons de tube à évasement (ou "courbure") constant et d'utiliser ce degré de liberté supplémentaire pour limiter au maximum le nombre de tronçons de tubes à raccorder pour former la totalité du profil cible. Le problème revient à résoudre une EDP à paramètres *uniformes*, en particulier à courbure constante. Il devient alors intéressant de connaître les solutions analytiques de ces modèles, ou quand cela n'est pas possible, de développer des procédures numériques efficaces pour les approcher aussi précisément que possible.

Le dernier point clef étudié est le cas où la courbure constante d'un tronçon est négative. Ce cas de profil convexe peut être vu comme un cas limite d'un assemblage infini de cônes de longueur infinitésimale. Sa représentation en guide d'ondes conduit là encore à une réalisation dont une partie des états est instable (mais dans le cadre d'un système de dimension infinie bien plus complexe à traiter). Une solution originale reposant sur des équivalences algébriques de fonctions de transfert et des choix de déformation de contour de Bromwich du problème original est proposée. La solution finalement obtenue conduit bien à un système simulable et stable.

## 1.2. Plan

Il aurait certes été possible de s'intéresser uniquement au modèle physique le plus complexe (courbure variable avec partie convexe, pertes viscothermiques) et de donner d'emblée au lecteur la solution la plus performante à notre connaissance ; cette solution rassemble un nombre certain de techniques de l'automatique (variables d'état, réalisation minimale, systèmes diffusifs...) et du traitement du signal (guides d'ondes, structure de Kelly-Lochbaum, paramétrisation efficace de familles de fonctions de transfert...). Cela étant, il nous est apparu plus pertinent de procéder d'une autre manière, à savoir partir de modèles simples pour aller vers des modèles complexes et de montrer, à chaque fois que cela était possible, les techniques numériques associées, que celles-ci fassent appel à l'analyse numérique, à l'automatique ou au traitement du signal : ce n'est donc qu'à la fin que l'on sera en mesure de traiter le modèle physique le plus complexe.

Le choix de cette démarche est dicté par un certain souci d'ordre pédagogique, et par le souhait, mis en exergue dans le sous-titre de notre article, de mettre en évidence quelques apports des techniques de l'automatique et du traitement du signal pour la résolution numérique en temps réel de problèmes de dimension infinie intervenant en acoustique musicale.

En conséquence, le plan suivant est proposé : nous commençons en section 2 par l'étude de l'équation des pavillons, considérés ici sans pertes. Le modèle classique de Webster est présenté en section 2.1, et l'accent est mis sur la conservation de l'énergie ; puis des techniques de simulation numérique par différences finies sont brièvement rappelées en section 2.2, toujours avec un souci de définir des énergies équivalentes au niveau discret ; enfin, la simulation par des techniques de traitement de signal en guide d'ondes est proposée en section 2.3 : une discrétisation en tronçons de cônes, plus fine que celle usuelle en tronçons de cylindres, y est présentée ; elle fait naturellement apparaître des problèmes de stabilité dans le cas de courbure négative.

Ces modèles souffrant d'un manque de réalisme sonore évident, on étudie dans la section 3 le modèle avec pertes visqueuses et thermiques aux parois du tube acoustique, ou encore modèle de Webster-Lokshin. Ce modèle avec dérivée fractionnaire est présenté en section 3.1, son étude énergétique fine est conduite grâce à des réalisations en variables d'état ou variables de mémoire du terme fractionnaire ; puis les principes des méthodes numériques de différences finies dédiées sont résumés en section 3.2. La difficulté relative de leur mise en œuvre conduit à reconsidérer le système physique comme concaténation de tubes élémentaires à courbures constantes en section 3.3, tubes élémentaires pour lesquels une analyse des singularités du transfert MIMO dans le plan de Laplace donne des résultats intéressants, tant du point de vue de l'interprétation acoustique que de la simulation numérique (apparition de pôles instables en fonction d'une longueur critique), ce qui fait l'objet de la section 3.4.

Ainsi, une difficulté particulière étant apparue lors de la résolution pour les profils convexes, la solution spécifique de réalisation en guides d'ondes stables est détaillée en section 4 : celle-ci fait appel à une structure généralisée présentée en section 4.1, puis aux réalisations stables qui sont examinées en section 4.2.

## 2. Modèle conservatif de Webster : du continu au simulable

### 2.1. Modèle continu conservatif

#### 2.1.1. Propagation

Une description mono-dimensionnelle de la propagation acoustique dans un tube axisymétrique de section variable  $x \mapsto S(x) = \pi R(x)^2$  est fournie par l'équation des pavillons (dite de Webster (Webster, 1919))  $\partial_x^2 p(x, t) + 2 \frac{R'(x)}{R(x)} \partial_x p(x, t) - \partial_{ct}^2 p(x, t) = 0$  (ou, sous forme *conservative*  $\frac{1}{S(x)} \partial_x (S(x) \partial_x p(x, t)) - \partial_{ct}^2 p(x, t) = 0$ ) et l'équation d'Euler  $\rho \partial_t v(x, t) + \partial_x p(x, t) = 0$  où  $p$  est la pression,  $v$  la vitesse particulaire (projetée sur le vecteur unitaire  $e_x$ ), et où la variable spatiale  $x$  ne représente pas l'ab-

scisse axiale usuelle, mais est l'abscisse curviligne qui mesure la longueur du profil (voir (Hélie, 2003));  $t$  est le temps,  $\rho$  la masse volumique du gaz, et  $c$  est la célérité des ondes acoustiques. Ce problème peut se réécrire sous la forme du système hyperbolique

$$\partial_t X(x, t) + M(x) \partial_x X(x, t) = 0, \quad [1]$$

où l'état  $X = [p, Sv]^t$  se compose de la pression et du débit acoustique  $u := Sv$ ; et  $M = \begin{bmatrix} 0 & \rho c^2/S \\ S/\rho & 0 \end{bmatrix}$ , matrice inversible et à valeurs propres réelles ( $\pm c$ ).

### 2.1.2. Énergie acoustique

L'énergie acoustique dans un tube de longueur  $L$  est donnée par

$$E(t) = \int_0^L \left( \frac{\rho v(x, t)^2}{2} + \frac{p(x, t)^2}{2\rho c^2} \right) S(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^L X^t(x, t) Q(x) X(x, t) dx, \quad [2]$$

avec  $Q = \text{diag}[S/(\rho c^2), \rho/S]$ . On vérifie que le système ouvert est bien conservatif puisque, en notant  $A = QM = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , on a  $\dot{E}(t) = -\int_0^L X^t A \partial_x X dx = -\frac{1}{2} [X^t A X]_{x=0}^{L=x} = S(0)v(0, t)p(0, t) - S(L)v(L, t)p(L, t) = u(0, t)p(0, t) - u(L, t)p(L, t)$ , qui ne dépend que des variables de bord, et non des variables internes.

### 2.1.3. État acoustique

Enfin, le changement de variables d'état suivant :  $\Phi = \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix} = \frac{R}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{diag}[1, \rho c/S] X$  fait apparaître dans l'équation d'état [1] des opérateurs de transport :  $\phi^\pm$  définissent des ondes aller-retour (utilisables pour les guides d'ondes); celles-ci sont découplées dans le cas d'une section  $S$  constante et couplées sinon. La même énergie s'écrit alors pour l'état  $\Phi$  sous la forme [2] avec  $Q_\phi = \pi/(\rho c^2)I_2$ .

Il est important de noter pour l'étude de stabilité des ondes que pour ces deux choix d'état (variables de Kirchhoff  $X$  ou ondes aller-retour  $\Phi$ ), l'énergie est une forme quadratique définie positive en l'état.

### 2.1.4. Conditions aux limites

Un exemple important, en  $x = 0$  et  $x = L$  est le suivant :

$$p(x = 0, t) = p_0(t) \quad [3]$$

$$p(x = L, t) = Z_L S(L)v(x = L, t) = Z_L u(x = L, t) \quad [4]$$

L'impédance terminale  $Z_L \in \mathbb{R}$  est une constante qui vérifie  $0 < Z_L < +\infty$ . On définit aussi le coefficient de réflexion  $R_L = \frac{1-Z_L}{1+Z_L}$ , qui vérifie  $|R_L| < 1$ .

Le bilan d'énergie montre que, lorsqu'on arrête d'alimenter le système en  $x = 0$  à partir d'un temps  $T$ , *i.e.* pour  $t > T$ , où  $p_0(t) = 0$ , alors l'énergie vérifie

$$\dot{E}(t) = -Z_L(u(L, t))^2 = -\frac{1}{Z_L}(p(L, t))^2 \leq 0 \quad [5]$$

elle est décroissante, uniquement grâce à la condition d'impédance : le système fermé est alors dissipatif. Dans le cas où l'impédance est soit nulle, soit infinie, il y a alors conservation de l'énergie : le système fermé est conservatif.

## 2.2. Simulation par différences finies

On propose de travailler sur une forme équivalente,  $\partial_{ct}p = -\rho c/S \partial_x u$  et  $\partial_{ct}u = -S/(\rho c) \partial_x p$  en les variables  $ct$  et  $x$  ; et l'on définit  $r^2(x) = S(x)/(\rho c)$ .

En suivant par exemple (Haddar *et al.*, 2008, chap. 3), on note  $\Delta t$  et  $h := L/N$  les pas de discrétisation en temps et en espace, respectivement, avec  $N$  le nombre de points de discrétisation de l'intervalle  $[0, L]$ . Soient  $x_i = i h$  et  $x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2}) h$ , notons  $p_i^n$  l'approximation de  $p(i h, n\Delta t)$ , et  $u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  celle de  $u((i + \frac{1}{2}) h, (n + \frac{1}{2})\Delta t)$ , où le débit est  $u = S v$ . Ceci nous permet de définir en section 2.2.1 un schéma numérique aux différences finies, puis en section 2.2.2 de mener l'étude de son énergie discrète.

### 2.2.1. Définition du schéma

Fixant  $c = 1$  pour simplifier, on propose le schéma suivant :

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{r^2(x_i)} \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} \quad \text{pour } n > 0 \text{ et } 0 < i \leq N \quad [6]$$

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -r^2(x_{i+\frac{1}{2}}) \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h} \quad \text{pour } n > 0 \text{ et } 0 \leq i < N. \quad [7]$$

Les conditions aux limites correspondantes sont :

$$p_0^n = p_0(n\Delta t), \quad [8]$$

$$p_N^{n+1} + p_N^n = Z_L (u_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + u_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}). \quad [9]$$

On a volontairement rajouté un noeud fictif en  $(N + \frac{1}{2})h$  pour la variable  $u$ . Ce schéma est explicite, centré, et précis au second ordre à la fois en temps et en espace, comme le montre un calcul classique fondé sur un développement de Taylor.

### 2.2.2. Étude de l'énergie

On définit l'analogue discret de l'énergie associée au schéma selon :

$$E^n = \frac{h}{2} \left( \sum_{i=0}^{N-1} |r(x_i) p_i^n|^2 + \frac{1}{r(x_{i+\frac{1}{2}})^2} u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right) + \frac{h}{4} |r(x_N) p_N^n|^2.$$

On définit d'abord  $\gamma = \max \left\{ r(x_{i+\frac{1}{2}})/r(x_{i+1}), r(x_{i+\frac{1}{2}})/r(x_i), i = 1, \dots, N-1 \right\}$  et on montre que, sous la condition Courant-Friedrich-Lewy (CFL)  $\gamma \Delta t < h$ ,  $E^n$  permet de définir une norme : plus précisément, on met en évidence l'existence d'une constance  $C > 0$  indépendante de  $n$ , telle que :

$$E^n \geq C \sum_{i=1}^N |r(x_i) p_i^n|^2 + \left| (u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) / 2r(x_{i-\frac{1}{2}}) \right|^2.$$

De plus, lorsque  $n > n_0$ , pas à partir duquel  $p_0^n$  est nul,

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = -Z_L |u_N^{n+\frac{1}{2}}|^2 \leq 0, \quad [10]$$

avec la notation  $u_N^{n+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2} (u_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + u_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$ , ce qui permet de conclure quant à la stabilité  $L^2$  du schéma numérique, et prouve la décroissance de l'énergie discrète.

On conçoit donc que ce type de schéma numérique puisse bien fonctionner dans des cas simples comme celui-ci, avec garanties de convergence numérique, et ce, quelle que soit la courbure du profil. Néanmoins, ces garanties peuvent vite devenir restrictives, et il n'est pas toujours évident de modifier les schémas, d'élargir leur domaine de validité à des modèles physiques plus sophistiqués, comme nous le verrons en section 3.2.

### 2.3. Simulation par guide d'ondes

La simulation par différences finies revient implicitement à approximer le tube par une concaténation de cylindres de longueur  $h$ . En synthèse de la parole (cf. *e.g.* (Markel *et al.*, 1976)) il est courant de faire cette approximation, mais le formalisme des Guides d'Ondes y est le plus souvent préféré (cf. (Smith, 1987)). Avec ce formalisme, l'équation de Webster et les continuités de pression et de débit permettent de mettre en forme une structure de filtre en treillis. Dans cette structure, l'effet du tube sur des ondes progressives est représenté par des retards purs pour la propagation d'ondes planes et des coefficients de réflexions aux jonctions des cylindres.

Comparée à la méthode des différences finies, cette approche a de nombreux avantages : elle est plus simple à mettre en oeuvre, elle est moins coûteuse en terme de ressource CPU, et elle permet une discrétisation spatiale non-uniforme du tube original. En outre, dans (Välimäki, 1995), le même formalisme a été utilisé avec une approximation en cônes, mais cette approche pose un problème de stabilité dans le cas de

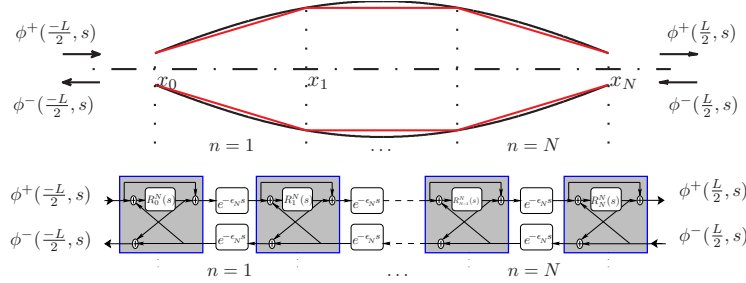


tubes convexes. Nous présentons maintenant l'exemple d'un tube convexe approximé par  $N$  cônes, et nous montrons dans un cas simple comment ce problème d'instabilité est levé. Enfin nous donnons à une représentation d'état du système à  $N$  cônes.

### 2.3.1. Approximation d'un tube par tronçons de cônes

Considérons un tube quelconque de longueur  $L$  discrétisé en  $N$  cônes, dont les points de jonction se situent en  $x_n^N = (-\frac{1}{2} + \frac{n}{N})L$  pour  $0 \leq n \leq N$ . Le profil  $r$  est alors approximé par le modèle  $\tilde{r}_N$  continu et affine par morceaux (cf. figure 1a) : pour  $x \in [x_{n-1}^N, x_n^N]$  (avec  $1 \leq n \leq N$ ) alors  $\tilde{r}_N(x) = r(x_{n-1}^N) + \xi_n^N(x - x_{n-1}^N)$  avec pour pente  $\xi_n^N = (r(x_n^N) - r(x_{n-1}^N))/\epsilon_N$  et pour pas de discrétisation  $\epsilon_N = L/N$ .

Pour chaque tronçon de tube, on fait l'hypothèse d'une propagation d'ondes idéalement sphériques. Pour des ondes progressives définies par  $\phi^\pm := r(p \pm v)$ , la résolution de [1] avec l'hypothèse de continuité de pression et de débit acoustique, conduit à une structure de Kelly-Lochbaum (cf. (Kelly *et al.*, 1962)). Cette structure fait intervenir des opérateurs de retard pur  $e^{-\epsilon_N s}$ , et des fonctions de transfert  $R_n^N(s) = \alpha_n^N / (s - \alpha_n^N)$  avec  $\alpha_n^N = \frac{1}{2}(\xi_n^N - \xi_{n+1}^N)/r(x_n^N)$ , où  $\xi_n^N = 0$  pour  $n \in \{0, N+1\}$ . Ces fonctions représentent les réflexions d'ondes aux jonctions de cônes, et les retards représentent le temps de propagation à travers un cône. Notons qu'ici, des sous-systèmes d'ordre 1 apparaissent aux jonctions à la place des coefficients de réflexion pour les cylindres.



**Figure 1.** (a) profil approximé, (b) structure de Kelly-Lochbaum

### 2.3.2. Un cas simple : levée d'une instabilité

Le problème est que pour des jonctions de cônes dont la différence de pente est négative, cf. *e.g.* figure 1a, les sous-systèmes de fonction  $R_n^N$  sont instables en boucle ouverte ( $\alpha_n^N > 0$ ).

Dans (Mignot *et al.*, 2008), ce problème a été résolu dans le cas simple d'un cône convexe connecté sur un cylindre à sa gauche, et sur une impédance nulle (coefficient de réflexion égal à  $-1$  pour les ondes  $\phi^\pm$ ) à sa droite. Dans ce cas, la structure fait apparaître un seul sous-système de fonction de transfert  $R(s) = \alpha / (s - \alpha)$ , instable

en boucle ouverte ( $\alpha > 0$ ). Une première réalisation “naïve” de ce système différentiel à retard est donnée par la représentation d’état :

$$\begin{cases} sX(s) &= A(s)X(s) + B(s)u(s), \\ y(s) &= C(s)X(s) + D(s)u(s), \end{cases} \quad [11]$$

$$\text{où } A(s) = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-\epsilon s} & (1 - e^{-\epsilon s}) \end{bmatrix} \text{ et } C(s) = (1 - e^{-\epsilon s}) [1 \quad 1]. \quad [12]$$

Afin d’étudier la stabilité des variables internes du système, cherchons les valeurs propres de la matrice  $A(s)$  qui sont les racines de la fonction caractéristique :

$$\det(sI_2 - A(s)) = (s - \alpha)(s - \alpha + \alpha e^{-\epsilon s}). \quad [13]$$

Ce système est instable puisqu’il existe au moins une valeur propre réelle positive,  $\alpha > 0$ . Cependant, selon l’écriture de  $A(s)$  et  $C(s)$  (cf. équation [12]), on constate que la dimension du sous-espace non-observable est 1, alors le changement de variable :  $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = QX = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X$ , sépare dans  $z_1$  la partie observable, et dans  $z_2$  la partie non-observable. L’élimination de  $z_2$  donne la réalisation minimale suivante :

$$\begin{cases} s z_1(s) &= \alpha(1 - e^{-\epsilon s}) z_1(s) + \alpha(1 - e^{-\epsilon s}) u(s), \\ y(s) &= (1 - e^{-\epsilon s}) z_1(s) - e^{-\epsilon s} u(s), \end{cases} \quad [14]$$

qui a pour équation caractéristique  $s - \alpha + \alpha e^{-\epsilon s} = 0$ . Enfin nous montrons qu’il n’existe pas de racines à partie réelle positive tant que  $\alpha\epsilon < 1$ . Dans ce cas le système est stable. Notons que cette condition est équivalente à : le rayon  $r(x)$  du cône convergent reste positif pour  $0 \leq x \leq \epsilon$ , ce qui est se justifie du point de vue physique.

Dans (Mignot, 2009, p. 91-95), cette preuve de stabilité est étendue pour la connexion de  $N$  cônes, cf. figure 1a. Dans ce cas, une première réalisation instable de dimension  $2N$  est réduite à sa réalisation minimale, stable, à  $N$  sous-états. En section 3.4, nous rencontrerons un problème similaire pour le cas de tubes avec courbures.

### 2.3.3. Représentation d’état du système à $N$ cônes

Nous donnons maintenant une représentation d’état globale du système à retard donné par la figure 1b. Avec  $U(s) = [\hat{\phi}^+(\frac{-L}{2}, s), \hat{\phi}^-(\frac{L}{2}, s)]^T$  pour entrée, et  $Y_N(s) = [\hat{\phi}^-(\frac{-L}{2}, s), \hat{\phi}^+(\frac{L}{2}, s)]^T$  pour sortie :

$$\begin{cases} sX_N(s) &= A_N(e^{-\epsilon_N s})X_N(s) + B_N(e^{-\epsilon_N s})U(s), \\ Y(s) &= C_N(e^{-\epsilon_N s})X_N(s) + D_N(e^{-\epsilon_N s})U(s), \end{cases} \quad [15]$$

où  $X_N(s) = \frac{\Delta_N}{s} [\hat{\phi}(x_0^N, s), \hat{\phi}(x_1^N, s), \dots, \hat{\phi}(x_N^N, s)]^T$  est le vecteur d’état (avec  $\hat{\phi} = \hat{\phi}^+ + \hat{\phi}^-$ ), et  $A_N(w) = \Delta_N W_N(w)$ , avec  $W_N(w)$  est une matrice de Toeplitz symétrique telle que  $[W_N(w)]_{ij} = w^{|i-j|}$ , et  $\Delta_N = \text{diag}([\alpha_0^N, \alpha_1^N, \dots, \alpha_N^N])$ . Enfin,

avec  $V_N(w)$  composée de la première colonne et de la dernière colonne de  $W_N(w)$ ,  $B_N(w) = \Delta_N V_N(w)$ ,  $C_N(w) = V_N(w)^T$ , et  $D_N(w)$  est une matrice  $2 \times 2$  avec  $w^N$  sur l'anti-diagonale et 0 sur la diagonale.

Intéressons-nous au cas particulier d'un tube de profil  $r(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ , cf. figure 1a. Ce profil nous intéressera en section 3.4, parce que son paramètre de courbure  $\Upsilon := r''/r$  est constant. Pour ce cas, les pôles réels  $\alpha_n^N$  des fonctions  $R_n^N$  ont la même valeur pour  $1 \leq n < N$  :  $\alpha_n^N = \frac{\pi}{2\epsilon_N} (1 - \cos \epsilon_N)$ . Notons que ces pôles sont positifs, mais les sous-états associés sont stabilisés (cf. (Mignot *et al.*, 2008)). Dans le cas de tubes avec courbures (cf. section 3.4), nous rencontrerons un paradoxe équivalent mais avec une complexité plus élevée.

### 3. Modèle dissipatif de Webster-Lokshin : du continu au simulable

#### 3.1. Modèle continu dissipatif

Une description réaliste des tubes acoustiques ne peut se faire sans prendre en compte les pertes, visqueuses et thermiques, aux parois du tube : une description fine de celles-ci fait apparaître, dans une limite hautes-fréquences, un terme en dérivées fractionnaires en temps, voir par exemple (Polack, 1991).

Ainsi, avec  $x \in (0, L)$ ,  $r(x) > 0$ ,  $\varepsilon(x) \geq 0$ ,  $p(t, x)$  le modèle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\partial_{ct}^2 p + 2\varepsilon(x) \partial_{ct}^{3/2} p - \frac{1}{r^2} \partial_x (r^2 \partial_x p) = 0; \quad [16]$$

et conditions aux limites statiques en  $x = 0$  et  $x = L$ . Il s'agit du modèle de Lokshin (Lokshin, 1978 ; Lokshin *et al.*, 1978) à coefficients variables en espace de type Webster.

De manière à bien comprendre ce modèle et les principes de sa résolution, tant théorique que numérique, fondamentalement liée à la réalisation en variables d'état diffusives ou variables de mémoire des opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires, nous choisissons (en suivant (Matignon *et al.*, 2010)) de présenter en section 3.1.1 un modèle réduit qui concentre les idées principales pour l'étude du modèle complet, dont les principes d'étude seront donnés, par analogie, en section 3.1.2.

##### 3.1.1. Étude d'un modèle réduit

En projetant l'équation [16] sur un mode propre (*i.e.* une fonction propre spatiale de l'opérateur  $-\frac{1}{r^2} \partial_x (r^2 \partial_x p)$ , qui n'est autre qu'un laplacien à coefficients variables ; la valeur propre associée étant  $k^2 = c^2 \omega^2 > 0$ ), on aboutit classiquement à un modèle d'oscillateur à 1-d.d.l. du type :

$$\ddot{z} + \theta(\dot{z}) + \omega^2 z = 0, \quad [17]$$

où l'on a posé  $\theta(v) := \partial_t^{\frac{1}{2}} v$  : moralement, la dérivation fractionnaire agit dans le domaine fréquentiel comme un filtre passe-haut de fonction de transfert  $(2i\pi f)^{\frac{1}{2}}$  ; il

s'agit en fait d'un amortissement de l'entrée  $v := \dot{z}$ , un amortissement qui n'est pas instantané comme le serait classiquement le terme d'amortissement fluide  $\zeta v$  avec  $\zeta > 0$ , mais à mémoire : c'est une convolution temporelle causale. Pour le voir, nous examinons à présent un transfert et une réalisation minimale passive d'un ensemble de systèmes du premier ordre qui s'approchent du dérivateur fractionnaire pur.

On considère  $L$  circuits du premier ordre (avec paramètres  $\xi_l > 0$ ), d'entrée  $v$  et de sortie  $\theta_L$ , réalisés en interne par le système dynamique :

$$\dot{\psi}_l(t) = -\xi_l \psi_l(t) + v(t), \quad \psi_l(0) = 0 \quad [18]$$

$$\theta_L(t) = \sum_{l=1}^L \nu_l (v(t) - \xi_l \psi_l(t)). \quad [19]$$

La fonction  $E_\psi(t) := \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \nu_l \xi_l \psi_l^2(t)$  est une énergie ( $\nu_l > 0$ ) qui admet le bilan suivant :

$$\dot{E}_\psi = - \sum_{l=1}^{N_\xi} \nu_l (v - \xi_l \psi_l)^2 + v \theta_L \quad [20]$$

Du point de vue externe, l'agrégation *positive* de circuits passifs reste passive :

$$H_L(s) = \sum_{l=1}^L \nu_l \frac{s}{s + \xi_l} \quad \text{avec } \nu_l > 0.$$

en effet,  $\Re e\left(\frac{s}{s+\xi}\right) = \frac{|s|^2 + \Re e(s)\xi}{|s+\xi|^2} \geq 0$ , lorsque  $\Re e(s) \geq 0$ .

L'analyse énergétique du système couplé de départ [17], où l'on a remplacé  $\theta$  par son approximation  $\theta_L$ , peut se faire facilement à l'aide d'une énergie augmentée au *fonction de Lyapounov*

$$\mathcal{E} := E_m + E_\psi,$$

où l'on a défini classiquement  $E_m(t) := \frac{1}{2}v^2(t) + \frac{1}{2}\omega^2 z^2(t)$  l'énergie mécanique. En effet, en utilisant [20], on trouve, tous calculs faits :

$$\dot{\mathcal{E}} = - \sum_{l=1}^L \nu_l (v - \xi_l \psi_l)^2 \leq 0.$$

Ce qui permet de conclure à la stabilité asymptotique, *i.e.*  $\mathcal{E}(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , grâce au principe d'invariance de LaSalle, qui est facile à appliquer en dimension finie. Bien noter en revanche que rien ne permet de garantir que l'énergie mécanique  $E_m(t)$  soit une fonction strictement décroissante du temps : elle tend *a fortiori* vers 0, mais pas nécessairement de façon monotone.

### 3.1.2. Principes de l'étude du modèle de Webster-Lokshin

Le modèle s'écrit :

$$\partial_{ct}^2 p + 2\varepsilon(x) \partial_{ct}^{3/2} p - \frac{1}{r^2(x)} \partial_x (r^2(x) \partial_x p) = 0;$$

il n'est pas standard car il n'y a pas de propriété énergétique simple, eu égard à la présence de dérivée fractionnaire en temps (partie Lokshin); de plus, il n'y a pas de solution analytique simple, les coefficients  $\varepsilon(x)$  et  $r(x)$  étant variables en espace (dans le cas constant du cylindre, on sait trouver plusieurs formes analytiques de la solution, voir (Matignon *et al.*, 1995)).

Cela étant, en utilisant les réalisations diffusives sous une forme un peu plus élaborée qu'en section 3.1.1, on peut selon le même principe aboutir à l'existence et unicité des solutions et de plus, à la stabilité asymptotique.

L'idée sous-jacente est de passer d'un nombre fini ( $L$ ) de d.d.l. (opérateur  $\theta_L$  et transfert  $H_L$ ) à un nombre infini et même continu de d.d.l. (opérateur  $\theta = \partial_t^{1/2}$  et transfert  $s^{1/2}$ ), tout en préservant la propriété fondamentale de passivité. La démarche repose sur l'égalité suivante :

$$H(s) = \int_0^\infty \nu_{1-\beta}(\xi) \frac{s}{s+\xi} d\xi = s^\beta, \quad \text{pour} \quad \nu_{1-\beta}(\xi) = \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \frac{1}{\xi^\beta}.$$

Ainsi, il s'avère qu'une dérivée fractionnaire d'ordre  $0 < \beta < 1$  peut se voir simplement comme la superposition positive d'un continuum de circuits passe-haut passifs du premier ordre.

Du point de vue interne, on s'intéresse naturellement à l'énergie des ondes :

$$E_m(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [(\partial_t p)^2(x, t) + (\partial_x p)^2(x, t)] r^2(x) dx,$$

et à l'énergie diffusive des dérivées fractionnaires :

$$E_\psi(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \int_0^\infty \nu_{1/2}(\xi) \xi \psi(\xi, x, t)^2 d\xi \right] 2\varepsilon(x) dx.$$

Pour conclure, il suffit au moins formellement d'appliquer la méthodologie de la section 3.1.1 à l'EDP de Webster-Lokshin en définissant un système dynamique couplé (pression, débit et variables diffusives) et une énergie augmentée  $\mathcal{E} = E_m + E_\psi$ . Cependant, étant donné que les outils mathématiques utilisés peuvent se révéler très techniques, au niveau de cet exposé il a été choisi de ne pas rentrer dans ces détails, le lecteur désireux d'approfondir ces questions pouvant se référer par exemple à (Matignon, 2009 ; Matignon, 2006 ; Matignon *et al.*, 2005 ; Montseny *et al.*, 2001).

C'est cette réécriture équivalente, mettant en jeu une véritable réalisation au sens de l'automatique par variables de mémoire, qui va permettre de définir des schémas numériques aux différences finies espace-temps, lesquels seront à même de préserver au niveau discret les bilans énergétiques mis en évidence en continu.

### 3.2. Simulation par différences finies

L'idée consiste à reprendre le schéma numérique présenté en section 2.2 pour Webster d'une part, et à utiliser une discrétisation ad hoc de la formulation diffusive équivalente des opérateurs fractionnaires d'autre part, voir (Haddar *et al.*, 2008, chap. 3) pour les détails techniques : nous définissons en section 3.2.1 le schéma numérique, lequel va utiliser explicitement une discrétisation de la dérivation fractionnaire sous la forme diffusive déjà étudiée en section 3.1.1 ; puis en section 3.2.2 nous menons l'étude de l'énergie discrète associée à ce schéma fort complexe.

#### 3.2.1. Définition du schéma

Ici  $\theta_i^n$  dénote une approximation de  $\theta(ih, n\Delta t)$ , qui est la dérivée fractionnaire d'ordre  $\beta$ . On définit le schéma numérique suivant, centré, explicite et du second ordre :

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{r^2(x_i)} \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} - 2\varepsilon(x_i) (\partial_t^{1-\beta} p_i)^{n+\frac{1}{2}}, \quad [21]$$

pour  $n > 0$  et  $0 < i \leq N$ , et

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -r^2(x_{i+\frac{1}{2}}) \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h}, \quad [22]$$

où  $(\partial_t^{1-\beta} p_i)^{n+\frac{1}{2}}$  est une approximation de  $(\partial_t^{1-\beta} p_i)$  à  $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ . En s'inspirant du bilan énergétique du modèle continu, on choisit d'utiliser l'identité  $\partial^{1-\beta}(p_i) = \theta^{[1-\beta]}(p_i)$ , et de définir :

$$(\partial_t^{1-\beta} p_i)^{n+\frac{1}{2}} := (\theta_i^{n+1} + \theta_i^n) / 2,$$

où  $\theta_i^n$  est une approximation de  $\theta^{[1-\beta]}(p_i)(n\Delta t)$ . Cette dernière requiert l'évaluation d'une intégrale dans l'espace  $\xi$ .

Soit  $(\xi_l, \nu_l(\beta))_{1 \leq l \leq L}$  une quadrature associée à l'évaluation de  $\int_0^\infty \nu(\xi) \xi^{-\beta} d\xi$ , cela permet de définir :

$$\theta_i^n = \sum_{l=1}^L \nu_l(\beta) (p_i^n - \xi_l \psi_{i,l}^n), \quad [23]$$

où  $\psi_{i,l}^n \approx \psi(\xi_l, x_i, n\Delta t)$  satisfait :

$$\psi_{i,l}^{n+1} = e^{-\xi_l \Delta t} \psi_{i,l}^n + \frac{1 - e^{-\xi_l \Delta t}}{\xi_l} \frac{p_i^{n+1} + p_i^n}{2}, \quad [24]$$

qui provient de l'expression exacte (par intégration entre  $n\Delta t$  et  $(n+1)\Delta t$ ),  $\psi(\xi, x, t) = \int_0^t e^{-\xi(t-s)} p(x, s) ds$ .

Une heuristique, souvent utilisée en pratique, consiste à comparer la fonction de transfert idéale  $H(s) = s^\beta$  et celle de son approximation  $H_L(s)$  sur un diagramme de Bode ( $s = 2i\pi f$ ), ou log-log : c'est la raison pour laquelle, en suivant (Oustaloup, 1983), on choisit les nœuds  $\xi_l$  sur une grille *géométrique*, définie par une valeur inférieure  $\xi_m$  et une valeur supérieure  $\xi_M$ , et le nombre de points  $L$  ; dans ce cas, on définit  $\xi_l = \left(\frac{\xi_M}{\xi_m}\right)^{\frac{l-1}{L-1}} \xi_m$ ,  $l = 1, \dots, L$ . Les poids  $\nu_l(\beta) > 0$  sont obtenus par exemple en appliquant une règle des trapèzes.

### 3.2.2. Étude de l'énergie

C'est grâce à une étude énergétique minutieuse, que l'on arrive à prouver la stabilité  $L^2$  du schéma [21-24] et ce, pour *tout* choix de quadrature de la forme [23] avec des poids de quadrature positifs,  $\nu_l(\beta)$ . Comme dans le cas sans perte, cette stabilité est conditionnée par le CFL, soit  $\gamma\Delta t < h$ .

Plus précisément, on définit une énergie pour les variables diffusives discrétisées ; en notant  $\omega_l := \frac{\xi_l \Delta t}{2} \frac{1+e^{-\xi_l \Delta t}}{1-e^{-\xi_l \Delta t}}$ , on définit :

$$E_\psi^n := \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \nu_l(\beta) \omega_l \xi_l \left( \sum_{i=1}^{N-1} 2\varepsilon(x_i) |\psi_{i,l}^n|^2 + \varepsilon(x_N) |\psi_{N,l}^n|^2 \right) \quad [25]$$

qui est l'énergie associée au terme  $\partial_t^{1-\beta}$ . Des calculs minutieux permettent d'obtenir le bilan suivant :

$$\begin{aligned} \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} &= -u_N^{n+\frac{1}{2}} p_N^{n+\frac{1}{2}} - \frac{E_\psi^{n+1} - E_\psi^n}{\Delta t} \\ &\quad - \sum_{l=1}^L \nu_l(\beta) \omega_l^2 \left( \sum_{i=1}^{N-1} 2\varepsilon(x_i) \left| \dot{\psi}_{i,l}^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 + 2\varepsilon(x_N) \left| \dot{\psi}_{N,l}^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \end{aligned} \quad [26]$$

avec la notation condensée  $\dot{\psi}_{i,l}^{n+\frac{1}{2}} := \frac{\psi_{i,l}^{n+1} - \psi_{i,l}^n}{\Delta t}$ .

En conséquence, l'énergie totale  $\mathcal{E}^n := E^n + E_\psi^n$ , est décroissante en fonction de  $n$ . Ainsi  $E^n$  reste uniformément bornée par rapport à  $n$ , et la stabilité  $L^2$  du schéma est ainsi démontrée, toujours sous la condition CFL  $\gamma\Delta t < h$ .

Il est important de bien comprendre que ces techniques de différences finies espace-temps, directement héritées de la formulation diffusive, permettent de définir des schémas numériques dont on sait prouver la stabilité sous condition CFL, mais qu'on ne dispose pas d'estimation d'erreur *a priori* pour la formule de quadrature [23], ce qui rend l'utilisation de ces schémas délicate en pratique : de fait, les simulations numériques sont moyennement efficaces.

Aussi, il existe d'autres techniques numériques beaucoup plus sophistiquées, comme par exemple (Li, 2010) qui utilise les résultats de (Greengard *et al.*, 2000 ;

Greengard *et al.*, 2004), qui permettent de donner une estimation d'erreur *a priori*, et se révèlent particulièrement efficaces, mais pour lesquelles on ne dispose d'aucune preuve de stabilité dans les modèles couplés, voir aussi (Haddar *et al.*, 2010) pour la comparaison.

### 3.3. Simulation par guide d'ondes

Pour les tubes acoustiques avec pertes visco-thermiques modélisées par le modèle de Lokshin, la simulation des Guides d'Onde par discrétisation en tronçons de cônes (cf. section 2.3) pose problème. En effet, la prise en compte des pertes visco-thermiques nécessite la simulation de filtres numériques d'ordres élevés, et ce pour chaque cône élémentaire, ce qui augmente le coût de calcul. De plus, dans ce cas la stabilité de la structure de Kelly-Lochbaum associée n'est pas démontrée.

Dans (Hélie *et al.*, 2006a), plutôt que de discrétiser un tube en cônes, il a été proposé d'en faire une discrétisation en tronçons de tubes avec courbure. Ainsi il est possible d'approximer le profil original avec une qualité équivalente, mais avec un nombre réduit de tronçons.

Ainsi dans (Hélie *et al.*, 2007b) on démontre qu'en considérant des tronçons à courbure  $\Upsilon := r''/r$  constante, et un coefficient de pertes visco-thermiques  $\varepsilon$  constant, il est possible d'obtenir une structure de Kelly-Lochbaum similaire à celle de la figure 1b. Cependant, l'apport de la courbure et des pertes complexifie le système, et nous choisissons ici de modéliser les tronçons de façon isolée.

Nous définissons alors un tronçon par un tube fini de longueur  $L$  et de coefficients des pertes et de courbure constants ( $\varepsilon$  et  $\Upsilon$ ). On réécrit [16] en considérant la variable  $rp$  au lieu de  $p$ , et en faisant apparaître  $\Upsilon$  :

$$\partial_{ct}^2(rp) + 2\varepsilon\partial_{ct}^{3/2}(rp) + [\Upsilon - \partial_x^2](rp) = 0. \quad [27]$$

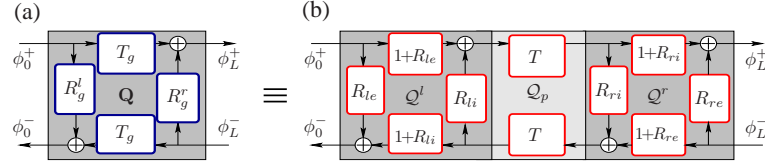
Nous allons construire des systèmes représentant les effets acoustiques d'un tronçon sur les ondes progressives (dimensionnées) données par  $\phi^\pm := \frac{r}{2}(p \pm \rho cv)$ . Dans (Hélie *et al.*, 2007b), les effets d'un tronçon de tube sur les ondes  $\phi^\pm$  sont mis sous forme de systèmes entrées/sorties pour le modèle de *Webster-Lokshin*. Deux formes équivalentes (d'un point de vue entrées/sorties) y sont données.

Une première forme, dite "globale", est représentée en figure 2a. Les 4 fonctions de transfert représentent les effets globaux du tronçon sur les ondes  $\phi^\pm : R_g^l$  et  $R_g^r$  pour les réflexions de gauche et de droite, et  $T_g$  pour la transmission à travers le tronçon. "global" signifie que tous les effets internes y sont mélangés et prennent donc en compte les aller-retour d'ondes successifs.

Une seconde forme, dite "décomposée", est représentée en figure 2b. Cette forme a pour intérêt d'isoler les effets acoustiques internes dans des fonctions de transfert. Par exemple,  $R_{le}$  représente la réflexion de  $\phi_0^+$  à l'interface gauche du tronçon, et



$T$  représente la propagation à travers le tronçon. Ici les aller-retour d'ondes sont représentés par la boucle interne. Cette forme permet de retrouver la structure de *Kelly-Lochbaum* qui est bien adaptée à la simulation numérique par guides d'ondes.



**Figure 2.** Quadripôle  $Q$  et sa forme décomposée

Définissons  $\Gamma(i\omega) = ik(\omega)$ , où  $k(\omega)$  est le nombre d'onde complexe standard. La fonction  $\Gamma$  est donnée dans le domaine de Laplace par (cf. [27]) :

$$\Gamma(s) = \sqrt{\left(\frac{s}{c}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\frac{s}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon}. \quad [28]$$

La résolution de [27] donne les fonctions de  $Q$

$$T_g = \{A_T \cosh(\Gamma L) + B_T \sinh(\Gamma L) / \Gamma\}^{-1}, \quad [29]$$

$$R_g^l = \{A_R \cosh(\Gamma L) + B_{R^l} \sinh(\Gamma L) / \Gamma\} T_g, \quad [30]$$

$$R_g^r = \{A_R \cosh(\Gamma L) + B_{R^r} \sinh(\Gamma L) / \Gamma\} T_g, \quad [31]$$

où  $A_T$ ,  $A_R$ ,  $B_T$ ,  $B_{R^l}$  et  $B_{R^r}$  sont des fonctions connues de  $s$  et  $\Gamma(s)^2$ . Avec  $\zeta = r'/r$ , les fonctions de la forme décomposée sont données dans (Hélie *et al.*, 2007b) :

$$T(s) = e^{-\Gamma(s)L}, \quad [32]$$

$$R_{le}(s) = \frac{\frac{s}{c} - \Gamma(s) - \zeta_l}{\frac{s}{c} + \Gamma(s) + \zeta_l}, \quad R_{li}(s) = -\frac{\frac{s}{c} - \Gamma(s) + \zeta_l}{\frac{s}{c} + \Gamma(s) + \zeta_l}, \quad [33]$$

$$R_{re}(s) = \frac{\frac{s}{c} - \Gamma(s) + \zeta_r}{\frac{s}{c} + \Gamma(s) - \zeta_r}, \quad R_{ri}(s) = -\frac{\frac{s}{c} - \Gamma(s) - \zeta_r}{\frac{s}{c} + \Gamma(s) - \zeta_r}. \quad [34]$$

Avec  $\tau := L/c$ , notons qu'on peut écrire  $T_g(i\omega) = D_g(i\omega) e^{-i\omega\tau}$  et  $T(i\omega) = D(i\omega) e^{-i\omega\tau}$ , où  $D_g$  et  $D$  sont des fonctions de transfert associées à des systèmes causaux. En conséquence, les réponses impulsionnelles de  $T_g$  et  $T$  sont celles de  $D_g$  et  $D$  retardées de  $\tau$  correspondant au temps de propagation à travers le tronçon.

Dans le cas des tubes à courbures négatives ( $\Upsilon < 0$ ) ces deux formes présentent un paradoxe : alors que des calculs numériques montrent que la forme globale de la figure 2a est stable, les fonctions de transfert de la forme décomposée de la figure 2b possèdent dans le domaine de Laplace des singularités à l'origine d'instabilités du système. La partie suivante a pour objectif de comprendre l'origine de ce problème.

### 3.4. Analyse des singularités

#### 3.4.1. Analyse complexe de $\Gamma$

La fonction  $\Gamma(s)$  (associée à un nombre d'onde  $k(\omega)$ , cf. [28]) est une racine carrée d'un nombre complexe contenant lui-même une racine de  $s$ . Or il existe une infinité de prolongements de la racine carrée définie sur  $\mathbb{R}^+$  pour le plan complexe, et nous devons en choisir un pour définir dans  $\mathbb{C}$  les fonctions de transfert du système.

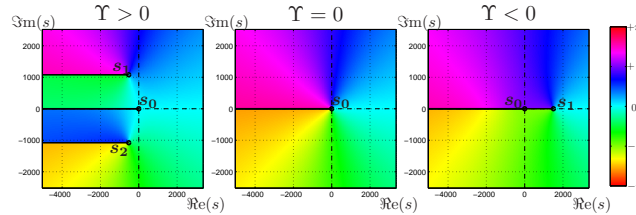
Dans (Montseny, 1998 ; Hélie *et al.*, 2007a), la fonction  $\Gamma$  est définie par le choix de lignes (appelées *coupures*) reliant des *points de branchement* à l'infini. Ces coupures sont des ensembles continus et infinis de singularités, se manifestant par des discontinuités de  $\Gamma(s)$ . Quant aux points de branchement  $s_n$ , ils sont les solutions de  $\Gamma(s)^2 = 0$ , et  $s_0 = 0$  (pour  $\sqrt{s}$ ).

- $\Upsilon = 0$  : l'unique point de branchement est  $s_0 = 0$ .
- $\Upsilon > 0$  :  $\Gamma$  a 3 points de branchement :  $s_0 = 0$ ,  $s_1$  et  $s_2 = \overline{s_1}$ , avec  $\Re(s_1) \leq 0$ .
- $\Upsilon < 0$  :  $\Gamma$  a 2 points de branchement :  $s_0 = 0$ , et  $s_1 \in \mathbb{R}^+$ .

Alors que ces points de branchement sont fixes (ils dépendent de  $c$ ,  $\varepsilon$  et  $\Upsilon$ ), les coupures sont à choisir.

Pour les courbures positives ou nulles, puisque aucun point de branchement ne se trouve dans le demi-plan droit de Laplace (que l'on nomme  $\mathbb{C}_0^+ := \{s \in \mathbb{C} / \Re(s) > 0\}$ ), il est alors possible de définir un prolongement analytique dans  $\mathbb{C}_0^+$  pour respecter la stabilité. La figure 3 présente le cas de coupures horizontales.

Mais pour les courbures négatives, un des points de branchement,  $s_1$ , se trouve dans  $\mathbb{C}_0^+$ , ainsi il n'est pas possible de définir un prolongement analytique dans  $\mathbb{C}_0^+$  puisqu'au moins une partie de coupure se retrouve dans  $\mathbb{C}_0^+$ . La figure 3 présente le cas de 2 coupures se chevauchant sur  $\mathbb{R}^- : ]-\infty, 0]$  et  $]-\infty, s_1]$ .



**Figure 3.** Phase de  $\Gamma(s)$  dans  $\mathbb{C}$ , points de branchement et coupures horizontales

#### 3.4.2. Pôles et interprétation physique

Alors que les fonctions de transfert de la forme décomposée (cf. [32-34]) ont le même type de singularités que  $\Gamma$  (du type coupures), les 3 fonctions de transfert globales (cf. [29-31]) sont fonctions de  $\Gamma(s)^2$  et non  $\Gamma(s)$  (la transformation  $\Gamma \mapsto -\Gamma$  les laisse invariant). Ainsi ces 3 fonctions de transfert n'ont qu'une seule coupure venant de  $\sqrt{s}$ , et des pôles associés aux modes des résonances du tronçon.

Cette dernière remarque implique que seules les fonctions de transfert de la forme décomposée dépendent du choix de  $\Gamma$ . Les relations globales (entrées/sorties) ne dépendent pas du choix des coupures partant de  $s_1$  et  $s_2$  (dues à la courbure) mais seulement de celle partant de  $s_0 = 0$  (due aux pertes visco-thermiques). Pour ce point de branchement, nous choisissons  $\mathbb{R}^-$  pour des raisons de stabilité et de symétrie hermitienne.

Dans (Mignot *et al.*, 2009), pour  $z = \rho e^{i\theta}$ ,  $\sqrt{\cdot}$  est définie par  $\sqrt{z} := \sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$  avec  $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times ]-\pi, \pi]$ . Avec cette définition, l'ensemble des coupures de  $\Gamma$  est  $\mathbb{R}^- \cup \mathcal{C}$  avec  $\mathcal{C} := \{s \in \mathbb{C} / \Gamma(s)^2 \in \mathbb{R}^-\}$ , et  $\Gamma$  a alors pour propriété :

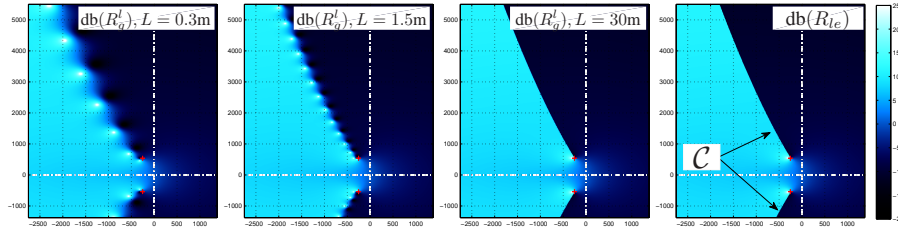
$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}, \Re(\Gamma(s)) > 0. \quad [35]$$

En conséquence, quand  $L \rightarrow \infty$ ,  $T(s) = e^{-\Gamma(s)L} \rightarrow 0, \forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$ . Ainsi, dans la forme décomposée de la figure 2-(b),  $T(s)$  se comporte comme un ‘‘coupe-circuit’’ à la limite. On démontre alors le résultat

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}, \lim_{L \rightarrow \infty} R_g^L(s) = R_{le}(s). \quad [36]$$

**La fonction  $R_{le}$  est donc interprétée comme la réflexion globale du tube évasé semi-infini à droite (ou anéchoïque).** Nous retrouvons un raisonnement similaire à celui de (Gilbert *et al.*, 1990) pour les cônes.

Nous constatons alors la convergence des pôles et des zéros de  $R_g^L$  vers la coupure  $\mathcal{C}$  de  $R_{le}$  quand  $L$  augmente. Ainsi, la coupure s'interprète comme une densification de pôles et de zéros entrelacés. La figure 4 illustre cette convergence pour  $\Upsilon > 0$ .



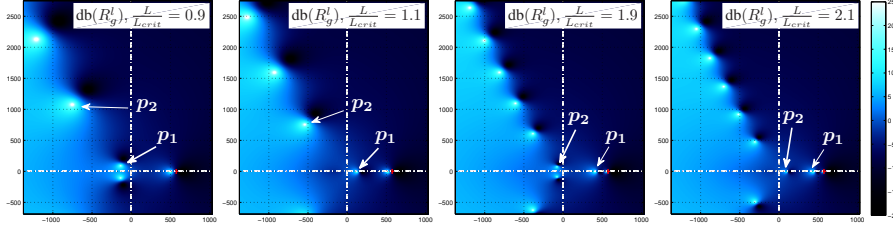
**Figure 4.** Convergence des pôles et des zéros de  $R_g^L$  quand  $L \rightarrow \infty$  (avec  $\Upsilon > 0$ ). Les pôles, zéros et points de branchement sont respectivement représentés par des points blancs, noirs, et des croix rouges

### 3.4.3. Interprétation pour $\Upsilon < 0$

Pour les coupures négatives, en raison de la partie de coupure sur  $[0, s_1] \subset \mathbb{R}^+$ , les fonctions associées ont une infinité de singularités à l'origine d'instabilités. Or des observations numériques montrent que les fonctions de transfert globales du tronçon, qui n'ont pas cette coupure, sont bien stables, comme attendu.

Les tubes à courbure  $\Upsilon = r''/r$  constante négative sont de forme sinusoidale, et changent de signe tout les  $L_{crit} := \pi\sqrt{|\Upsilon|}$ . Or on constate numériquement que quand

$L$  augmente un pôle  $p_k$  de  $R_g^l$  devient instable dès que la longueur  $L$  du tronçon dépasse une valeur entière  $k$  de  $L_{crit}$ . La figure 5 illustre ceci.



**Figure 5.** Passage des pôles de  $\mathbb{C}_0^-$  vers  $\mathbb{R}^+$ , pour  $\Upsilon < 0$

Dans ce cas, quand  $L \rightarrow \infty$  une infinité de pôles deviennent instables et se densifient sur  $[0, s_1]$ . Ainsi, pour  $L < L_{crit}$  les fonctions de transfert globales du tronçon sont stables, mais les fonctions de transfert de la forme décomposée qui sont associées à des tubes semi-infinis ont une infinité de singularités instables. Ce phénomène provient de la décomposition originale de la figure 2b bien adaptée pour la simulation en guides d'onde pour les courbures positives. Pour les courbures négatives nous devons alors chercher une autre décomposition adaptée aux guides d'ondes et stables pour les courbures négatives.

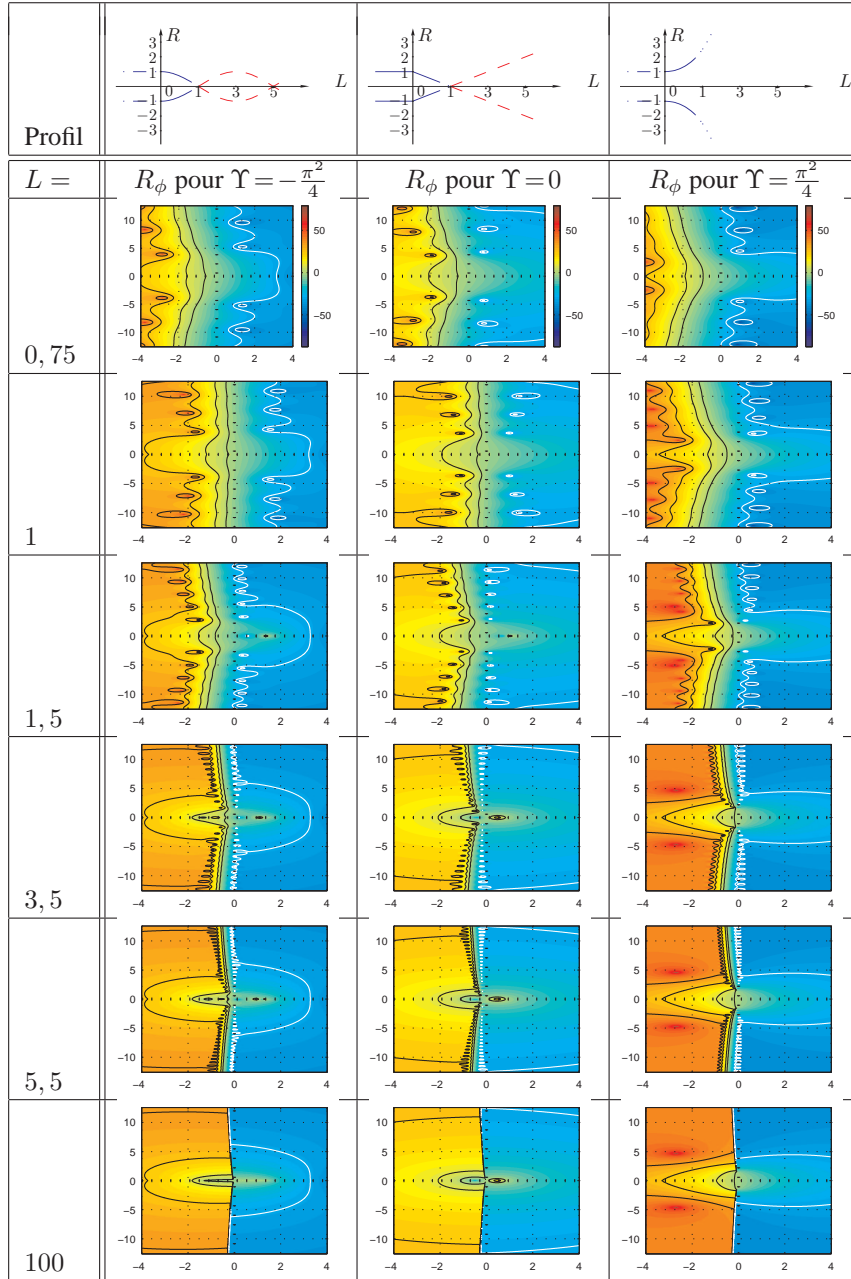
Notons qu'en section 2.3 nous avons un problème similaire. La structure de Kelly-Lochbaum pour des cônes sans pertes fait apparaître des sous-systèmes instables en boucle ouverte, mais l'étude du système global a montré que le bouclage permet la stabilisation. Nous ne pouvons néanmoins pas utiliser cette solution parce que la prise en compte des pertes visco-thermiques n'y garantit plus la stabilité.

#### 3.4.4. Commentaire de la figure 6

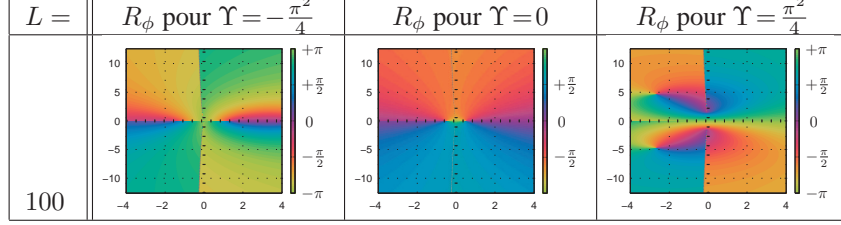
La figure 6 présente 3 scénarios. Dans la colonne de droite (tube droit puis en cosinus hyperbolique), les pôles de  $R_\phi$  (qui sont reliés aux modes acoustiques) sont toujours à partie réelle strictement négative. Au fur et à mesure que la longueur  $L$  du tube croît, on observe une densification de ces pôles (et de zéros) qui génèrent à la limite une coupure dans  $\mathbb{C}_0^-$  (qui se voit mieux sur la phase, cf. figure 7). La fonction de transfert limite correspond à celle d'un pavillon infini qui est  $R_{le}$  (cf. [33]).

La colonne du centre correspond au cas d'un cône convergent de longueur critique  $L = 1$ . Le scénario est toutefois différent puisqu'au-delà de la longueur critique ( $L = 1$ ), la réalité physique du problème est perdue : le dépassement de cette longueur critique se traduit par l'apparition d'un seul pôle à partie réelle strictement positive, et la perte de la stabilité du système associé.

Enfin, dans la colonne de gauche (profil en arche de cosinus avec pour longueur critique  $L = 1$ ), chaque passage d'un rayon positif à un rayon négatif (ou inversement) correspond à l'apparition d'un pôle sur  $\mathbb{R}^+$ . A la limite, on obtient une coupure différente du cas  $\Upsilon > 0$  car non confinée dans  $\mathbb{C}_0^-$  (cf. figure 7).



**Figure 6.** Module des fonctions de réflexion  $R_\phi$  [dB] pour une jonction continue d'un tube droit sans perte avec un tube non droit et avec pertes ( $\varepsilon = 0, 1$ ). Des lignes de niveau (en noir au-dessus de 0dB et blanc en dessous) facilitent la lecture de certains pôles et zéros et permettent de voir leur évolution avec la longueur du tube  $L$



**Figure 7.** Phase des fonctions  $R_\phi$  (en rd) associées à la dernière ligne de la figure 6

#### 4. Solution spécifique pour les tubes convexes en guides d'ondes stables

##### 4.1. Structure généralisée

###### 4.1.1. Forme globale et forme décomposée

Nous avons vu, que le tronçon peut être modélisé par 2 systèmes (cf. figure 2). Le premier est donné par le quadripôle  $\mathbf{Q}$  et ses 4 fonctions globales ; et le second par une forme décomposée avec 10 fonctions de transfert.

– **Forme globale :** Quel que soit le signe de la courbure, les fonctions de transfert globales  $R_g^l$ ,  $R_g^r$ , et  $T_g$  sont stables. De plus nous savons qu'elles n'ont qu'une coupure sur  $\mathbb{R}^-$  due aux pertes. Les simuler telles quelles, par une approche modale, permettrait d'obtenir une réalisation stable du tronçon. Mais pour une réalisation faible coût simulable en temps réel il est nécessaire de "tronquer" les modes, ce qui pose des problèmes de réalisme.

– **Forme décomposée :** Cette forme a l'avantage d'être adaptée à la modélisation par *guides d'ondes*, mais pose des problèmes de stabilité. Pour les courbures négatives, il y a l'apparition d'une partie de coupure instable dans  $\mathbb{R}^+$ .

Nous voyons dans la prochaine partie qu'il existe une infinité de représentations du tronçon et nous en obtenons une paramétrisation qui nous permettra de trouver une réalisation stable en section 4.2 respectant dans une certaine mesure le formalisme des guides d'ondes.

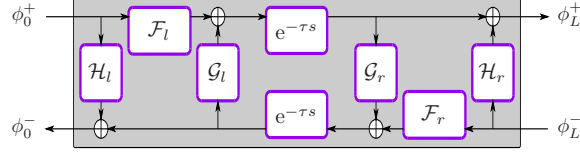
###### 4.1.2. Forme standard d'un tronçon

Dans un premier temps nous cherchons à représenter les deux formes de la figure 2 par une structure commune : la structure de la figure 8 est équivalente à l'une des 2 formes (globale ou décomposée) si les égalités suivantes sont vérifiées :

– Forme globale :  $\mathcal{H}_l = R_g^l$ ,  $\mathcal{F}_l = D_g$ ,  $\mathcal{G}_l = 0$ ,  $\mathcal{H}_r = R_g^r$ ,  $\mathcal{F}_r = D_g$ , et  $\mathcal{G}_r = 0$ .

– Forme décomposée :  $\mathcal{H}_l = \mathcal{R}_{le}$ ,  $\mathcal{F}_l = D(1 + R_{ri})(1 + R_{le})$ ,  $\mathcal{H}_r = R_{re}$ ,  $\mathcal{F}_r = D(1 + R_{li})(1 + R_{re})$ ,  $\mathcal{G}_l = R_{li}D(1 + R_{ri})/(1 + R_{li})$ , et  $\mathcal{G}_r = R_{ri}D(1 + R_{li})/(1 + R_{ri})$ .

où  $D$  et  $D_g$  correspondent aux transmissions  $T$  et  $T_g$  sans le retard en facteur. Les autres fonctions de la forme décomposée sont données par [32-34].



**Figure 8.** Forme standard d'un tronçon

#### 4.1.3. Paramétrisation

Dans un cas général, la forme standard (figure 8) permet de représenter le tronçon de tube si les formules algébriques suivantes sont vérifiées.

$$\begin{aligned} R_g^l &= \mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l \mathcal{G}_r e^{-2\tau s} / d(s), & R_g^r &= \mathcal{H}_r + \mathcal{F}_r \mathcal{G}_l e^{-2\tau s} / d(s), \\ D_g &= \mathcal{F}_l / d(s) = \mathcal{F}_r / d(s), & \text{avec } d(s) &= 1 - \mathcal{G}_l \mathcal{G}_r e^{-2\tau s}. \end{aligned} \quad [37]$$

On remarque alors que l'on a 2 degrés de liberté. En choisissant  $\mathcal{G}_l$  et  $\mathcal{G}_r$  comme degrés de liberté, la résolution du système [37] donne

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_l &= R_g^l - D_g \mathcal{G}_r e^{-2\tau s}, & \mathcal{F}_l &= D_g (1 - \mathcal{G}_l \mathcal{G}_r e^{-2\tau s}), \\ \mathcal{H}_r &= R_g^r - D_g \mathcal{G}_l e^{-2\tau s}, & \mathcal{F}_r &= D_g (1 - \mathcal{G}_r \mathcal{G}_l e^{-2\tau s}). \end{aligned} \quad [38]$$

Ainsi, il est possible de choisir arbitrairement les fonctions  $\mathcal{G}_l$  et  $\mathcal{G}_r$ , tout en préservant les relations entrées/sorties originales du système. Nous avons donc une paramétrisation du système par 2 fonctions. Par exemple la forme globale correspond au choix :  $\mathcal{G}_l = 0$ ,  $\mathcal{G}_r = 0$ .

Dans le cas de la forme décomposée, les 6 fonctions de transfert n'ont pas de retard interne, les modes du tronçon sont simulés par la boucle du système. Pour la forme globale,  $\mathcal{G}_l = \mathcal{G}_r = 0$ , la boucle est dans ce cas ouverte, les modes sont alors simulés par les retards contenus dans les dénominateurs des 4 autres fonctions.

**Remarques :** Quel que soit le choix de  $\mathcal{G}_l$  et  $\mathcal{G}_r$  causales et stables,  $\mathcal{H}_l$ ,  $\mathcal{H}_r$ ,  $\mathcal{F}_l$  et  $\mathcal{F}_r$  définies par [38] sont elles aussi causales et stables. De plus, choisir  $\mathcal{G}_l$  et  $\mathcal{G}_r$  inférieurs à 1 en module dans  $\mathbb{C}_0^+$  garantit la stabilité de la boucle interne du système.

Il nous faut donc chercher maintenant des fonctions  $\mathcal{G}_l$  et  $\mathcal{G}_r$  qui permettent d'assurer la stabilité du système, et de conserver le formalisme des *guides d'ondes*.

## 4.2. Réalisation stable pour un tronçon convexe

### 4.2.1. Stabilisation des tubes convexes

Pour l'approche des *guides d'ondes*, le choix "idéal" est celui de la forme décomposée. Avec

$$R_{li}^* := R_{li}D(1+R_{ri})/(1+R_{li}) \text{ et } R_{ri}^* := R_{ri}D(1+R_{li})/(1+R_{ri}), \quad [39]$$

ce choix "idéal" est donné par  $\mathcal{G}_l = R_{li}^*$  et  $\mathcal{G}_r = R_{ri}^*$ . Cependant ces fonctions sont des fonctions de  $\Gamma$  et ont donc des singularités instables sur  $[0, s_1]$  pour  $\Upsilon < 0$ . Nous devons donc faire un autre choix.

#### 4.2.1.1. Que peut être un "bon choix" ?

Pour comprendre qualitativement ce que peut être un "bon choix" de  $\mathcal{G}_l$  et  $\mathcal{G}_r$  regardons par exemple l'expression de la fonction de transfert  $\mathcal{F}_l$  donnée par [38] :  $\mathcal{F}_l(s) = D_g(s) (1 - \mathcal{G}_l(s)\mathcal{G}_r(s) e^{-2\tau s})$ . La fonction  $D_g$  possède une coupure sur  $\mathbb{R}^-$  en raison des pertes, et une infinité de paires de pôles complexes conjugués dans  $\mathbb{C}_0^-$  qui correspondent chacune à un mode du tronçon. Ces pôles sont les zéros du dénominateur de  $D_g$  qui est :  $1 - R_{li}^* R_{ri}^* e^{-2\tau s}$ . Choisir  $\mathcal{G}_l = R_{li}^*$  et  $\mathcal{G}_r = R_{ri}^*$ , permet de compenser exactement les pôles de  $D_g$ . Avec ce choix,  $\mathcal{F}_l$  n'a plus de pôle comme singularité, mais uniquement la coupure  $\mathcal{C}$  de  $\Gamma$ .

L'idée que nous proposons et testons ici, est de compenser les pôles en hautes fréquences (il y en a une infinité) par la boucle interne de la structure avec un choix qui vérifie  $\mathcal{G}_l(i\omega) \approx R_{li}^*(i\omega)$  et  $\mathcal{G}_r(i\omega) \approx R_{ri}^*(i\omega)$  pour  $|\omega|$  grand, mais avec  $\mathcal{G}_l$  et  $\mathcal{G}_r$  holomorphes dans  $\mathbb{C}_0^+$ . Et les quelques pôles restant du système en basses fréquences sont alors simulés tels quels par les 4 fonctions  $\mathcal{H}_l, \mathcal{H}_r, \mathcal{F}_l$  et  $\mathcal{F}_r$  données par [38].

#### 4.2.1.2. Comment trouver un "bon choix" ?

Pour simplifier les choses, nous modifions artificiellement les fonctions  $R_{li}^*$  et  $R_{ri}^*$  par une transformation  $s \mapsto \gamma(s)$  du plan de Laplace. Le choix est alors donné par :

$$\mathcal{G}_l(s) := R_{li}^*(\gamma(s)), \text{ et } \mathcal{G}_r(s) := R_{ri}^*(\gamma(s)). \quad [40]$$

Maintenant le choix ne réside plus que dans celui de cette "transformation". Pour assurer le bon comportement en hautes fréquences ( $\mathcal{G}_l(i\omega) \approx R_{li}^*(i\omega)$  et  $\mathcal{G}_r(i\omega) \approx R_{ri}^*(i\omega)$ ), on pose pour  $\gamma$  :

$$\forall s \in \overline{\mathbb{C}_0^+} \text{ avec } |s| \text{ grand : } \gamma(s) \approx s. \quad [41]$$

#### 4.2.1.3. Propriété d'une "bonne transformation"

En plus de vérifier [41], il est intéressant de maîtriser les singularités de  $\mathcal{G}_l$  et  $\mathcal{G}_r$  par le choix de  $\gamma$ . Dans un premier temps la transformation choisie doit assurer la stabilité et la passivité de  $\mathcal{G}_l$  et  $\mathcal{G}_r$ , et si possible limiter l'ensemble de leurs singularités. Pour garantir la bonne définition des fonctions, nous donnons les contraintes :



- P1 :  $\gamma$  est à symétrie hermitienne,
- P2 :  $\gamma$  est analytique dans  $\mathbb{C}_0^+$ ,
- P3 :  $] - \infty, s_1] \cap \gamma(\mathbb{C}_0^+) = \{\emptyset\}$ ,
- P4 :  $\forall s \in \mathbb{C}_0^+, |R_{li}^*(\gamma(s))| < 1$  et  $|R_{ri}^*(\gamma(s))| < 1$ .

Avec ces propriétés, choisir  $\mathcal{G}_l(s) := R_{li}^*(\gamma(s))$  et  $\mathcal{G}_r(s) := R_{ri}^*(\gamma(s))$  définit des fonctions hermitienne (P1), holomorphes dans  $\mathbb{C}_0^+$  (P2, P3 et parce que  $R_{li}^*$  et  $R_{ri}^*$  ont leurs singularités sur  $] - \infty, s_1]$  uniquement) et P4 garantit la stabilité de la boucle.

Remarquons que l'ensemble des coupures de  $\mathcal{G}_l$  et  $\mathcal{G}_r$  devient  $\mathcal{C}^\dagger := \{s \in \mathbb{C} / \gamma(s) \in ] - \infty, s_1]\}$  (avec  $\mathcal{C}^\dagger \subset \mathbb{C}_0^-$  grâce à P3). La transformation  $\gamma$  permet donc de repousser la partie instable de la coupure de  $\Gamma$  ( $[0, s_1] \subset \mathbb{R}^+$ ) dans  $\mathbb{C}_0^-$ , ce qui stabilise les fonctions de transfert.

**Exemple 1.** Définissons par exemple la transformation  $\gamma(s) := s + A/(1 + \frac{s}{\beta})$ . Avec  $\beta > 0$  et  $A > s_1$ , on vérifie que cette transformation est à symétrie hermitienne (P1), est analytique dans  $\mathbb{C} \setminus \{-\beta\}$  (P2), et vérifie  $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \gamma(s) = s$  (cf. [41]). De plus en choisissant convenablement  $A$  et  $\beta$ , elle peut vérifier (P3) et (P4).

#### 4.2.2. Réalisation numérique stable

Nous donnons ici des résultats de réalisations stables d'un tronçon à courbure négative en utilisant l'idée présentée précédemment avec un certain nombre de considérations obtenues empiriquement. La procédure est résumée par les étapes suivantes :

- Nous choisissons une transformation  $\gamma$  vérifiant (P1-P4) et l'équation [41].
- Nous en déduisons  $\mathcal{G}_l$  et  $\mathcal{G}_r$  par [40], et  $\mathcal{H}_l, \mathcal{H}_r, \mathcal{F}_l, \mathcal{F}_r$  par [38].
- Nous approximons les 6 fonctions par des filtres simulables numériquement.

##### 4.2.2.1. Définition de la transformation

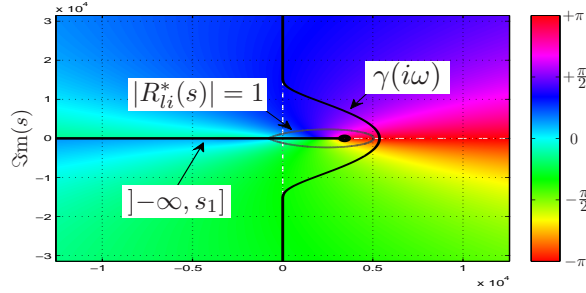
Dans la pratique, au lieu de chercher  $\gamma$  défini dans  $\mathbb{C}$ , nous limitons la recherche à  $i\mathbb{R}$  (domaine de Fourier). Donc nous cherchons un contour défini par  $\gamma(i\mathbb{R})$ .

En hautes fréquences, ce contour doit se rapprocher au plus près de l'axe imaginaire (voir [41]), alors nous le choisissons tel que  $\gamma(i\omega) = i\omega$  pour  $|\omega| > \omega_0$ , où  $\omega_0$  est une pulsation que nous nommons *pulsation de raccord*.

En basses fréquences, il doit non seulement contourner la partie de la coupure  $[0, s_1]$  (pour garantir P3), mais aussi contourner l'ensemble des  $s \in \mathbb{C}$  tels que  $|R_{li}^*(s)| > 1$  et  $|R_{ri}^*(s)| > 1$  (P4). De plus, ce contour doit vérifier une contrainte de régularité  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $i\mathbb{R}$  (condition nécessaire pour P2).

Dans l'exemple présenté en figure 9, on définit  $\gamma(i\omega) := i\omega + \rho s_1 g(\omega)$ , où  $\rho > 1$  est un paramètre réglé empiriquement, et  $g$  est une fonction de la classe de Gevrey assurant la régularité  $\mathcal{C}^\infty$  aux raccords ( $\omega = \pm\omega_0$ ), avec  $g(0) = 1$  et  $g(\omega) = 0 \forall |\omega| \geq \omega_0$ . Remarquons que  $\gamma(i\omega)$  contourne la coupure et la courbe de niveau à 1

comme attendu. Afin de ne simuler que les 2 premiers modes du tronçon, la pulsation  $\omega_0$  est choisie égale à  $\Im m(p_2)$  où  $p_2$  est le pôle associé au deuxième mode du tronçon.



**Figure 9.** Phase de  $R_{li}^*$  et contour  $\gamma(i\omega)$

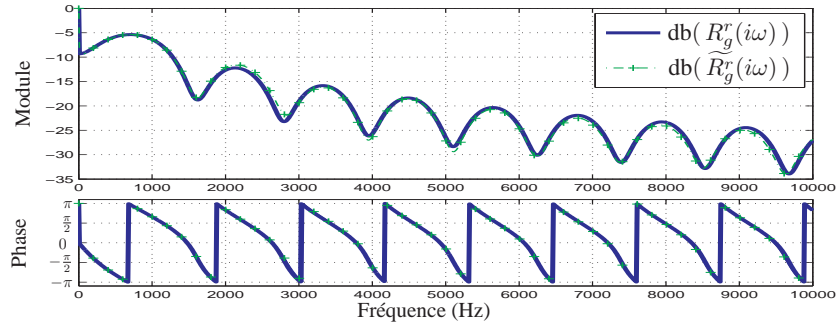
#### 4.2.2.2. Approximation et résultats

Pour la réalisation numérique du système, d'abord les fonctions de transfert  $\mathcal{G}_l$  et  $\mathcal{G}_r$  sont approximées par des filtres standard simulables numériquement. Ce type d'approximation est présenté dans (Montseny, 1998) pour son principe et en détails dans (Hélie *et al.*, 2006b ; Hélie *et al.*, 2007a), avec de nombreux exemples. Il nécessite ici le placement de  $P$  pôles sur  $\mathbb{R}^-$ , et leurs résidus sont obtenus par une optimisation par moindres carrés.

Rappelons que les modes de fréquences supérieures à  $\omega_0$  sont simulés par la boucle interne du système (cf. section 4.2.1.1), et qu'il ne reste que ceux de fréquences inférieures à  $\omega_0$ , au nombre de 2, qui doivent être simulés par les fonctions  $\mathcal{H}_l$ ,  $\mathcal{H}_r$ ,  $\mathcal{F}_l$  et  $\mathcal{F}_r$ . Ces 4 fonctions sont alors approximées de la même manière avec un placement de  $P$  pôles sur  $\mathbb{R}^-$  et de 2 paires de pôles complexes conjugués placées en  $(p_1, p_1^*)$  et  $(p_2, p_2^*)$ .

La figure 10, représente en fréquences un résultat de simulation d'un tube convexe avec pertes visco-thermiques. Les paramètres suivant on été choisis :  $L = 15$  cm (longueur du tube),  $\Upsilon = -100$  m<sup>-2</sup> (courbure),  $r(0) = 7$  cm et  $r(L) = 10$  cm (rayons aux extrémités),  $\varepsilon = 0,0033$  m<sup>-1/2</sup> (pertes), et  $F_e = 44100$  Hz (fréquence d'échantillonnage). Ici,  $P = 6$  pôles sont placés sur  $\mathbb{R}^-$ . Précisons que l'augmentation de l'ordre d'approximation permet de raffiner les résultats mais rend la simulation temps réel plus coûteuse en utilisation CPU.

Après discrétisation des fonctions de transfert, le système global est simulé numériquement par : 2 retards purs (simulés par des tampons circulaires faible coût), et 52 pôles (6 pôles réels pour chacune des 6 fonctions, et 2 paires de pôles complexes conjugués pour les 4 fonctions  $\mathcal{H}_l$ ,  $\mathcal{H}_r$ ,  $\mathcal{F}_l$  et  $\mathcal{F}_r$ ). Ceci est équivalent à environ 104 multiplications par échantillon (nous négligeons les additions par rapport aux multiplications, et nous considérons qu'un pôle réel à une complexité de 2 multiplications réel et une paire de pôles complexes conjugués, système d'ordre 2, a une complexité de 4 multiplications réelles).



**Figure 10.**  $R_g^r$  et sa version simulée  $\widetilde{R}_g^r$ . L'erreur maximale est d'environ 1,9 dB, et son erreur moyenne de 0,3 dB

## 5. Conclusion

Nous avons étudié un système à paramètres répartis qui est un modèle acoustique, l'EDP de Webster-Lokshin. Nous avons constaté, en étudiant des sous-modèles de complexité croissante, que les méthodes d'analyse numérique ont leurs limitations si l'objectif premier est la simulation numérique temps réel. Aussi, on a montré que le formalisme éprouvé des guides d'ondes, issu du traitement du signal (et très utilisé en traitement de la parole), était à même, une fois adapté, d'améliorer significativement les performances. Cela étant, dans le cas de tubes à courbure négative, on doit du coup résoudre un certain nombre de problèmes, surtout d'instabilité interne des modèles décomposés qui sont en contradiction apparente avec la stabilité externe du modèle global : pour ce faire, les techniques issues de l'automatique se révèlent particulièrement opérantes. Quelques exemples de résultats de simulation sont donnés pour conclure la présentation.

## 6. Bibliographie

- Bagley R. L., Torvik P. J., « On the fractional calculus model of viscoelastic behavior », *J. Rheology*, vol. 30, n° 1, p. 133-155, 1986.
- Berners D. P., Acoustics and signal processing techniques for physical modeling of brass instruments, PhD thesis, Stanford University, 1999.
- Bilbao S., *Waves and Scattering Methods for Numerical Simulation*, John Wiley and Sons, Chichester, 2004.
- Deü J.-F., Matignon D., « Simulation of fractionally damped mechanical systems by means of a Newmark-diffusive scheme », *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 59, n° 5, p. 1745-1753, March, 2010.
- Diethelm K., Ford N., Freed A., Luchko Y., « Algorithms for the fractional calculus : A selection of numerical methods », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, n° 6-8, p. 743-773, 2005.

- Gilbert J., Kergomard J., Polack J.-D., « On the reflection functions associated with discontinuities in conical bores », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 87, n° 4, p. 1773-1780, 1990.
- Greengard L., Lee J.-Y., « Accelerating the nonuniform fast Fourier transform », *SIAM Review*, vol. 46, n° 3, p. 443-454, 2004.
- Greengard L., Lin P., « Spectral approximation of the free-space heat kernel », *Appl. Comput. Harmonic Anal.*, vol. 9, n° 1, p. 83-97, 2000.
- Haddar H., Li J. R., Matignon D., « Efficient solution of a wave equation with fractional-order dissipative terms », *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 234, n° 6, p. 2003-2010, July, 2010.
- Haddar H., Matignon D., Theoretical and numerical analysis of the Webster-Lokshin model, Technical Report n° RR-6558, Institut National de la Recherche en Informatique et Automatique (INRIA), 2008. URL : [http://hal.inria.fr/inria-00288254\\_v2/](http://hal.inria.fr/inria-00288254_v2/).
- Hélie T., « Unidimensional models of acoustic propagation in axisymmetric waveguides », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 114, p. 2633-2647, 2003.
- Hélie T., Hézard T., Mignot R., Matignon D., « On the 1D wave propagation in wind instruments with a smooth profile », *Forum Acusticum 2011*, EAA, Aalborg, Denmark, 2011.
- Hélie T., Matignon D., « Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses », *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 16, p. 503-536, January, 2006a.
- Hélie T., Matignon D., « Representations with poles and cuts for the time-domain simulation of fractional systems and irrational transfer functions », *Signal Processing*, vol. 86, n° 10, p. 2516-2528, 2006b.
- Hélie T., Matignon D., Mignot R., « Criterion design for optimizing low-cost approximations of infinite-dimensional systems : towards efficient real-time simulation », *Int. Journal of Tomography and Statistics*, vol. 7, p. 13-18, 2007a.
- Hélie T., Mignot R., Matignon D., « Waveguide modeling of lossy flared acoustic pipes : derivation of a Kelly-Lochbaum structure for real-time simulations », *Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, IEEE, New Paltz, USA, p. 267-270, October, 2007b.
- Kelly J. L., Lochbaum C. C., « Speech Synthesis », *Proc. 4th Int. Cong. Acoust.*, Copenhagen, Denmark, p. 1-4, 1962.
- Li J.-R., « A fast time-stepping method for evaluating fractional integrals », *SIAM J. on Scientific Computing*, vol. 31, n° 6, p. 4696-4714, 2010.
- Lokshin A. A., « Wave equation with singular retarded time », *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 240, p. 43-46, 1978. (in Russian).
- Lokshin A. A., Rok V. E., « Fundamental solutions of the wave equation with retarded time », *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 239, p. 1305-1308, 1978. (in Russian).
- Markel J. D., Gray A. H., *Linear Prediction of speech*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- Matignon D., « Asymptotic stability of the Webster-Lokshin model », *Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, Kyoto, Japan, July, 2006. 11 p., CD-Rom.
- Matignon D., *An introduction to fractional calculus*, vol. Scaling, Fractals and Wavelets of Digital Signal and Image Processing Series, ISTE & Wiley, chapter 7, p. 237-278, January, 2009.

- Matignon D., d'Andréa-Novel B., « Spectral and time-domain consequences of an integro-differential perturbation of the wave PDE », *WAVES'95*, INRIA, SIAM, Mandelieu, France, p. 769-771, April, 1995.
- Matignon D., d'Andréa-Novel B., Systems control theory applied to natural and synthetic musical sounds, Technical report, ISAE, April, 2010. URL : <http://oatao.univ-toulouse.fr/3887/>.
- Matignon D., Prieur C., « Asymptotic stability of linear conservative systems when coupled with diffusive systems », *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 11, p. 487-507, 2005.
- Mignot R., Réalisation en Guides d'Ondes Numériques Stables d'un Modèle Acoustique Réaliste pour la Simulation en Temps-Réel d'Instruments à Vent, PhD thesis, Telecom Paris-Tech, 2009.
- Mignot R., Hélie T., Matignon D., « Stable realization of a delay system modeling a convergent acoustic cone. », *IEEE workshp MED'08*, IEEE, Ajaccio, France, p. 1574-1579, 2008.
- Mignot R., Hélie T., Matignon D., « On the singularities of fractional differential systems, using a mathematical limiting process based on physical grounds », *Physica Scripta*, October, 2009.
- Mignot R., Hélie T., Matignon D., « Digital waveguide modeling for wind instruments : building a state-space representation based on the Webster-Lokshin model », *IEEE Transactions on Audio Speech and Language Processing*, vol. 18, n° 4, p. 843-854, May, 2010.
- Montseny G., « Diffusive representation of pseudo-differential time-operators », *ESAIM : Proc.*, vol. 5, p. 159-175, 1998.
- Montseny G., Audounet J., Matignon D., « Diffusive representation for pseudo-differentially damped non-linear systems », *Nonlinear control in the year 2000, Vol. 2*, vol. 259 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, Springer, p. 163-182, 2001.
- Oustaloup A., *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*, Série Automatique, Masson, 1983.
- Pagneux V., Propagation acoustique dans les guides à section variable et effet d'écoulement, PhD thesis, Université du Maine, 1996.
- Polack J.-D., « Time domain solution of Kirchhoff's equation for sound propagation in viscothermal gases : a diffusion process », *J. Acoustique*, vol. 4, p. 47-67, February, 1991.
- Smith J. O., Music applications of digital waveguides, Technical Report n° STAN-M-39, Center for Computer Research in Music and Acoustics (CCRMA), Department of Music, Stanford University, 1987.
- Välimäki V., Discrete-time modeling of acoustic tubes using fractional delay filters, PhD thesis, Helsinki University of Technology, 1995.
- Webster A., « Acoustic impedance and the theory of horns and of the phonograph », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.*, vol. 5, p. 275-282, 1919.