

L'identification bayésienne en vue de la retouche de correcteur

Fabien DELMOND*, Christelle CUMER*, Daniel ALAZARD**

*Laboratoire : *ONERA/DCSD, **SUPAERO,
2 av. Édouard Belin
31055 Toulouse*

Thème clé principal :

Systèmes continus : commande, retouche de correcteur, identification

Mots clés : identification bayésienne, filtre de Kalman, estimateur, structure estimation/commande, retouche de correcteur.

Abstract

In this paper, a new controller adjustment procedure is proposed in order to ensure a better control of closed loop characteristics when the controller order is lower than the plant order. The basic idea is the close relation between identification quality and command insensitivity. The advantage of this method is that the full order model of the system is directly considered in association with its reduced controller. In this way, it is useless to compute a reduced model before adjustment : the result of the adjustment can be immediately applied to the system. The method consists in defining closed loop noises in order to identify fictitiously modal characteristics of the controlled plant via a bayesian identification algorithm.

Introduction

Lorsqu'on effectue la synthèse d'un correcteur sur un système complexe, on est souvent amené à réduire l'ordre de notre modèle [1] ou bien l'ordre du correcteur [2] (synthétisé sur le modèle du système le plus complet), et à faire des hypothèses simplificatrices sur le cahier des charges pour le rendre compatible avec la méthode de synthèse. Il se trouve alors que le correcteur d'ordre réduit issu de cette synthèse ne remplit plus forcément le cahier des charges initial sur le modèle d'ordre complet. Il convient alors de refaire une synthèse ou de modifier le correcteur déjà existant. D'une façon plus générale il peut être

également intéressant de modifier ou d'ajuster le correcteur suite à une évolution du modèle ou du cahier des charges sans relancer tout le processus de synthèse.

La méthode de retouche du correcteur que nous proposons ici présente l'avantage de travailler directement à partir du modèle complet, et du correcteur d'ordre réduit. Les objectifs de retouche considérés ici sont la maîtrise de la dynamique en boucle fermée (pulsations et amortissements des modes).

L'outil qui sera utilisé est un dérivé de l'outil PRABI¹. Le PRABI est un outil d'analyse de la robustesse paramétrique fondée sur une identification fictive des paramètres incertains [3] [4] [5] [6].

1 Contexte du problème

Avant de débiter la retouche, on a à notre disposition deux données :

- un modèle complet du système à corriger,
- un correcteur d'ordre réduit.

Le correcteur dont on dispose est souvent sous une forme quelconque, ses états ne représentant rien de physique. Une première étape consiste donc à mettre le correcteur sous une forme exploitable en vue de la retouche. On utilise pour cela une structure du type estimation/commande (qui exploite un modèle réduit du système pour la partie estimation, modèle que l'on appelle modèle embarqué). Cette structuration est détaillée dans [7], et on obtient la structure de la figure 1.

Les paramètres de réglage du correcteur ont, grâce à cette structure, un sens physique, puisque les états du correcteur constituent une partie des états estimés du système. De sorte que si l'on choisit de mettre dans le modèle embarqué les modes intéressants du point de vue de la retouche, on pourra agir sur ces modes principalement par le retour d'état K_c . De plus une bonne connaissance du système nous permet de régler la dynamique de la boucle fermée "au touché" (cf [8]).

*delmond@cert.fr

¹"Parameter Robust Analysis by Bayesian Identification"

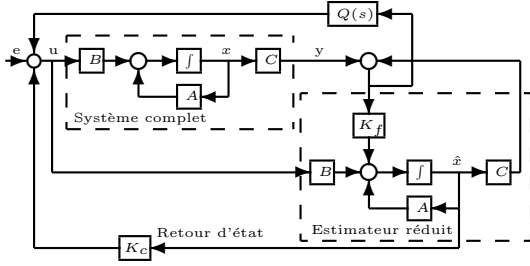


FIGURE 1: Structure estimation/commande.

Les gains de la matrice K_c de retour d'état constituent donc un ensemble pertinent de paramètres pour le réglage de la boucle fermée. L'objectif est donc de mettre au point une méthode qui permette de trouver de façon systématique l'ensemble des nouveaux gains de la matrice K_c répondant aux objectifs de retouche.

2 La méthode d'identification bayésienne

Considérons à présent le système suivant :

$$(S) \begin{cases} \dot{x} &= A(\theta)x + w \\ y &= Cx + v \\ y_k &= y(k\Delta t) \end{cases} \quad (1)$$

où v et w sont des bruits blancs gaussiens indépendants centrés, ayant pour propriétés² :

$$\begin{aligned} E[w(t)w(\tau)^T] &= Q\delta(t - \tau) \\ E[v(t)v(\tau)^T] &= R\delta(t - \tau) \end{aligned} \quad 3$$

(Q et R représentant les matrices de covariance des bruits d'état et de mesure), et où y_k représente la sortie échantillonnée (Δt étant la période d'échantillonnage) utilisée pour l'identification bayésienne.

En outre, on considère que le système précédent comprend un certain nombre de paramètres incertains, considérés comme des variables aléatoires, et regroupés dans un vecteur θ . On se limite dans un premier temps aux variations de la matrice A . De plus les calculs d'espérance seront menés en régime asymptotique. On peut alors démontrer (cf [3] et [9]) que :

$$p(\theta_0 + \Delta\theta/y^k) = \Lambda \exp[-Trace(M_0^{-1}\Delta M)] \quad (2)$$

où

$$— p(\theta_0 + \Delta\theta/y^k) \text{ est la probabilité que } \theta = \theta_0 + \Delta\theta \text{ sachant } y^k,$$

² $E[x]$ désignant l'espérance mathématique de la variable aléatoire x .

³La signification de la fonction δ est ici un Dirac; cependant si l'on choisit δ comme étant une fonction "triangle" de largeur Δt on obtiendra les mêmes résultats par passage à la limite.

- y^k est l'ensemble des sorties échantillonnées de y_0 à y_k ,
- Λ une constante,
- $M_0 = E[(y_k - \hat{y}_{k/k-1})(y_k - \hat{y}_{k/k-1})^T]$ lorsque le filtre de Kalman [10] (qui permet l'obtention de $\hat{y}_{k/k-1}$) associé au système nominal est accordé sur θ_0 [11],
- $\Delta M / M_0 + \Delta M = E[(y_k - \hat{y}_{k/k-1})(y_k - \hat{y}_{k/k-1})^T]$ lorsque le filtre de Kalman associé au système nominal est calculé en $\theta_0 + \Delta\theta$ (filtre désaccordé).

On peut également démontrer que :

$$Trace(M_0^{-1}\Delta M) = \Delta\theta^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta\theta$$

Il en découle que suivant une direction $\Delta\theta$ la probabilité $p(\theta_0 + \Delta\theta/y^k)$ suit une loi gaussienne, G_{θ_0} représentant la matrice de covariance de l'erreur d'identification du paramètre θ autour de θ_0 .

Dans [3] et [9] on trouvera l'ensemble des calculs permettant d'obtenir $G_{\theta_0}^{-1}$. Les calculs y sont menés sur un système discrétisé, mais un calcul analogue peut être fait pour un système continu (voir annexe).

L'équation (2) permet donc de caractériser la qualité d'identification du vecteur θ_0 suivant la direction $\Delta\theta$ et la décomposition en valeurs singulières de la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ permet de trouver, dans l'espace paramétrique θ , la direction $\Delta\theta_M$ des variations du paramètre θ (autour de la valeur nominale θ_0) qui sont *le mieux identifiables*, c'est-à-dire telle que le système soit *le plus sensible* aux variations paramétriques dans cette direction. $\Delta\theta_M$ correspond au vecteur singulier ($\Delta\theta_M^T \Delta\theta_M = 1$) associé à la plus grande valeur singulière de $G_{\theta_0}^{-1}$, c'est-à-dire à la plus petite valeur singulière de G_{θ_0} que l'on notera σ^2 car elle représente une variance. On peut alors écrire :

$$p(\theta_0 + \alpha\Delta\theta_M/y^k) = \Lambda \exp\left[-\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\right].$$

Dans la direction $\Delta\theta_M$, la gaussienne est très *sélective* (figure 2.a).

On peut également déterminer, et c'est cela même que nous allons exploiter par la suite, la direction $\Delta\theta_m$ des variations du paramètre θ qui sont *le moins identifiables*, c'est-à-dire telle que le système soit *le plus insensible* aux variations paramétriques dans cette direction (figure 2.b). $\Delta\theta_m$ correspond au vecteur singulier associé à la plus petite valeur singulière de $G_{\theta_0}^{-1}$.

Notons tout de même que nous ne nous intéressons pas ici au choix de l'estimateur, mais uniquement à la qualité de l'identification paramétrique qui en résulte, voire même uniquement à la direction de sensibilité minimale.

3 Identification et retouche

On peut déduire de ce qui précède que s'il existe une direction paramétrique $\Delta\theta_m$ telle que $\Delta\theta_m^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta\theta_m = 0$, alors le système est totalement

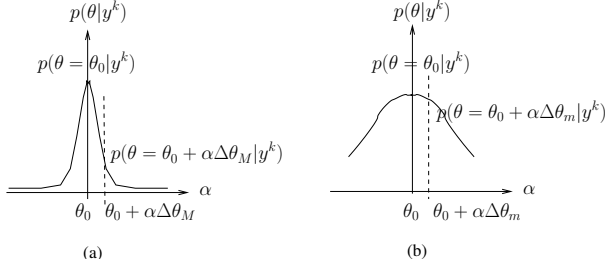


FIGURE 2: Qualité de l'identification bayésienne : (a) dans la direction de sensibilité maximale, (b) dans la direction de sensibilité minimale.

insensible aux variations paramétriques suivant cette direction (puisque la direction est nullement identifiable). Ou encore, la variation d'une partie des paramètres est parfaitement compensée par la variation de l'autre partie des paramètres.

L'interprétation de cette direction $\Delta\theta_m$ en termes de retouche est alors la suivante : si le vecteur paramétrique θ est composé

- d'une part, des paramètres de la boucle fermée que l'on désire maîtriser (pulsations et amortissements des modes),
- d'autre part, des paramètres de réglage du correcteur,

alors la direction $\Delta\theta_m$ nous donnera la combinaison linéaire des paramètres de réglage permettant de maîtriser (ou de contrer) une direction de variation des paramètres de la boucle fermée. Si par exemple nous voulons maîtriser 2 paramètres de la boucle fermée à l'aide de 2 paramètres de réglage, nous concluons que ces paramètres de réglages sont parfaits si le noyau de la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ (de taille 4×4) est de dimension 2. Plus généralement la pertinence de paramètres de réglages sera évaluée par l'analyse comparative des valeurs singulières de $G_{\theta_0}^{-1}$ les unes par rapport aux autres. Si l'on dispose de plusieurs paramètres de réglage pour maîtriser un seul paramètre de la boucle fermée, on peut chercher une combinaison linéaire de ces paramètres de réglage qui minimise $\Delta\theta^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta\theta$ (voir section suivante).

4 Obtention du vecteur paramétrique

On extrait un premier vecteur θ_K composé des paramètres de réglage du correcteur selon la figure 3. θ_K est le vecteur des variations de tous les coefficients du gain K_c . Les matrices M_k et N_k sont telles que :

$$\delta K_c = M_k \text{diag}(\theta_K) N_k .$$

Pour pouvoir ensuite travailler sur les modes de la boucle fermée (amortissements et pulsations) il convient de remettre ce système sous forme d'état (voir figure 4).

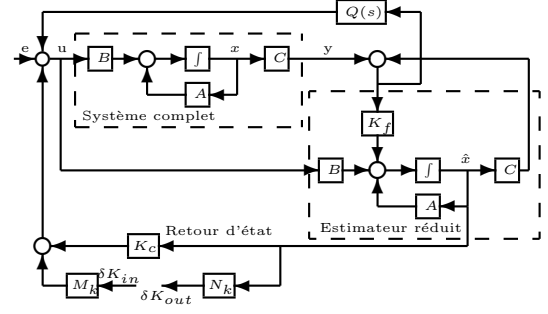


FIGURE 3: Extraction des paramètres de réglage.

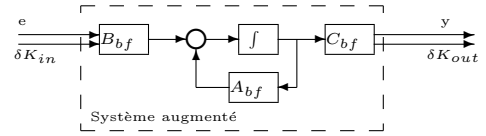


FIGURE 4: Représentation compacte du système augmenté

Ceci étant fait, on extrait le vecteur θ_P des paramètres modélisant les variations sur la matrice dynamique A_{bf} de la boucle fermée selon la figure 5. Les matrices M_p et N_p sont telles que :

$$\delta A_{bf} = M_p \text{diag}(\theta_P) N_p$$

représente des variations sur les amortissements et les pulsations des modes que l'on souhaite maîtriser (voir [8]).

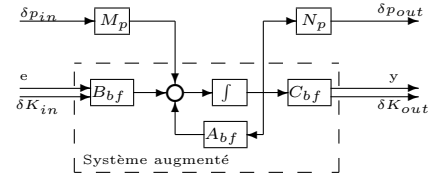


FIGURE 5: Extraction des paramètres de A_{bf} à modifier.

Le vecteur paramétrique complet $\theta = [\theta_P \ \theta_K]^T$ agit donc selon le schéma de la figure 6, sa valeur nominale est $\theta_0 = 0$.

Une fois effectué le calcul de la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ sur le système augmenté (figure 5), le but est de trouver, à $\delta\theta_P$ fixé, la variation de $\delta\theta_K$ telle que $\Delta\theta^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta\theta$ soit minimal (avec $\Delta\theta = [\delta\theta_P \ \delta\theta_K]^T$). Il s'agit donc d'un problème de minimisation quadratique sous contrainte.

On peut alors décomposer notre critère :

$$\begin{aligned} \Delta\theta^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta\theta &= \delta\theta_P^T G_{PP} \delta\theta_P + \delta\theta_P^T G_{PK} \delta\theta_K \\ &\quad + \delta\theta_K^T G_{PK}^T \delta\theta_P + \delta\theta_K^T G_{KK} \delta\theta_K \end{aligned}$$

Le minimum de ce critère à $\delta\theta_P$ fixé, correspond à :

$$\boxed{\delta\theta_K = -G_{KK}^{-1} G_{PK}^T \delta\theta_P .} \quad (3)$$

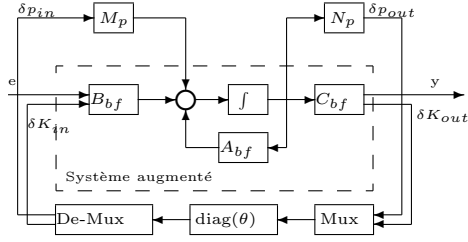


FIGURE 6: Vecteur paramétrique θ complet.

5 Exemple applicatif

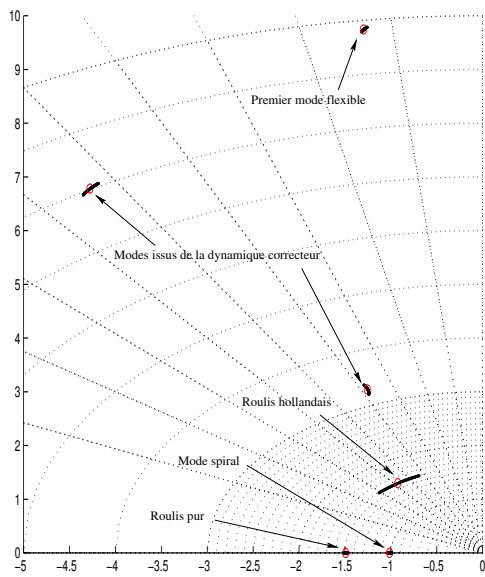


FIGURE 7: Effet du potentiomètre sur le roulis hollandais.

Le modèle utilisé ici est un modèle d'avion souple comportant 20 modes, dont 4 modes rigides (le roulis hollandais, le mode de roulis pur et le mode spiral). On dispose également de 6 sorties (ou mesures) et de 2 entrées (braquages des ailerons et de la gouverne). Le correcteur nominal utilisé est un correcteur d'ordre 6.

L'objectif est de modifier l'amortissement du mode de roulis hollandais tout en conservant au mieux les 2 autres modes rigides et sans déstabiliser les modes flexibles.

Sur la figure 7, on peut observer l'effet du potentiomètre synthétisé selon la méthode exposée dans le paragraphe 4 (autour de sa position nominale représentée par les ronds) sur le lieu des racines de la boucle fermée. On constate que le mode de roulis pur et le mode spiral ont très peu évolués, le mode de roulis hollandais quant à lui se déplace bien selon une courbe d'isopulsation. Les autres modes (qui comprennent les modes issus de la dynamique correcteur et les modes flexibles) ont un déplacement

peu significatif et donc largement satisfaisant.

6 Paramétrisation de l'identification

Lorsqu'on souhaite effectuer plusieurs corrections simultanées avec contraintes de "poids" différents, on a besoin d'orienter l'identification. En effet l'identification des paramètres par cette méthode est en fait une identification **fictive**, puisqu'on a le choix des matrices de bruits d'états et de mesures (Q et R) ainsi que le choix de la matrice d'observation (C_o) servant à l'identification, comme illustré sur la figure 8.

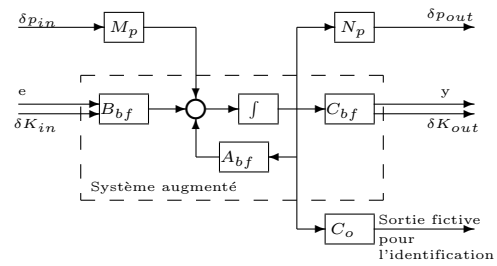


FIGURE 8: Système fictif pour l'identification.

Or il apparaît que le choix de ces 3 paramètres est d'une grande importance lors du calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$. Par exemple, on peut démontrer qu'un pôle inobservable d'un point de vue de la sortie fictive (C_o) ne donne aucune contrainte pour le déplacement d'un autre pôle *-i.e.*: *lors du déplacement d'un pôle, les pôles inobservables par C_o se déplacent de façon non contrôlée*. Réciproquement, le déplacement d'un pôle fortement observable aura une grande influence sur la matrice $G_{\theta_0}^{-14}$.

Ceci est également vrai pour un mode complexe conjugué, puisque si l'on ne fait aucun calcul préalable des matrices Q , R et C_o , l'identifiabilité de la pulsation et de l'amortissement ne sont pas égales. Supposons par exemple que la pulsation du mode soit très peu identifiable et que l'on veuille modifier l'amortissement du mode sous une contrainte forte d'isopulsation, il paraît alors évident que le résultat de la retouche aura grande chance d'être décevant. Si, par contre, la pulsation et l'amortissement de ce mode sont également identifiables, le pôle sera beaucoup plus manoeuvrable dans le plan complexe. Un choix judicieux des paramètres de l'identification fictive (Q , R et C_o) est donc indispensable.

Pour éclaircir ces notions, considérons un système où :

$$A_{bf} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix}$$

⁴On trouvera en [12] une interprétation plus précise de cette matrice.

Supposons de plus que les paramètres auxquels on s'intéresse sont à la fois ξ et ω , soit un vecteur :

$$\delta p = \begin{bmatrix} \delta\omega \\ \delta\xi \end{bmatrix}$$

Il vient que si :

$$G_{\theta_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alors on ne pourra pas maîtriser les variations de ξ lors de la retouche, mais si :

$$G_{\theta_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors ξ et ω sont également maîtrisables. Par là-même, lorsqu'on choisira de déplacer ξ à ω constant, l'erreur commise en ξ et en ω sera du même ordre. Par extension, si on désire effectuer un déplacement de ξ avec une tolérance sur les variations de ω , on pourra choisir Q , R , C_o , tels que :

$$G_{\theta_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

par exemple.

Cette paramétrisation optimale de l'identification fictive peut être obtenue par optimisation numérique. L'inconvénient est que ce type d'optimisation fait appel à un grand nombre de calculs de $G_{\theta_0}^{-1}$ ce qui prend énormément de temps. Une autre solution en cours de développement consiste à obtenir la paramétrisation de façon analytique.

7 Conclusions et perspectives

En l'état actuel de l'avancement des travaux, cette méthode de retouche s'est révélé performante pour maîtriser la dynamique en boucle fermée. Les intérêts de cette méthode sont d'une part, d'agir directement sur le modèle de validation (on modifie directement les caractéristiques du système complet bouclé) et d'autre part cette méthode permet d'effectuer des retouches sur des systèmes d'ordre relativement élevés (environ une centaine de pôles).

La méthode présente aussi des inconvénients : on se limite pour le moment à des retouches de type modales (variations de la matrice A_{bf}) et il faut également préciser que ces retouches ont un caractère local. Cependant, il est possible de calculer une matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ où $\Delta\theta$ est un vecteur paramétrique comprenant des variations de A_{bf} et également des variations de C_o (cf [13]).

Cette extension peut permettre de mettre en évidence des découplages, puisque le fait qu'un paramètre de C (ou un ensemble de paramètres) ne soit pas identifiable signifie qu'il y a un découplage entre une sortie et un mode (selon le choix judicieux de Q , on peut également mettre en évidence d'autres types de découplages).

On espère également effectuer des développements complémentaires pour que la méthode permette la retouche de spécifications fréquentielles (roll-off par exemple) ou, plus généralement, la retouche de certains critères dans un problème multi-objectifs.

Références

- [1] Skelton R. E. *Dynamic systems control : Linear systems analysis and synthesis*. Wiley and Sons (1988).
- [2] Anderson B. D. O. et Liu Y. *Controller reduction : Concepts and approaches*. IEEE Transactions on Automatic Control (1989).
- [3] Gauvrit M. *Performance des estimateurs bayésiens en boucle ouverte et fermée ; dualité identification-commande*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier (1982).
- [4] Sousa J. *Técnica de Controle Robusto Paramétrico Aplicadas na Pilotagem Automatica de Misseis*. Rapport de fin d'études, IME (1996).
- [5] Pellanda P. *Controle Robusto Aplicado na Estabilização de Sistemas Elétricos de Pôntia*. Rapport de fin d'études, IME (1993).
- [6] Mendes I. *Aplicação em Tempo Real de Controle Robusto Paramétrico em um Levitador Magnético*. Rapport de fin d'études, IME (1998).
- [7] Alazard D., Cumer C., Apkarian P., Gauvrit M. et Ferreres G. *Robustesse et commande optimale*. Cépaduès (1999).
- [8] Alazard D. *Extracting physical tuning potentiometers from a complex control law : application to flexible aircraft flight control*. Dans *Guidance, Navigation and Control Conference* (August 2001).
- [9] Lavigne G. *Dualité : qualité de l'identification - insensibilité de la commande ; application à la synthèse de commandes robustes aux incertitudes paramétriques*. Thèse de doctorat, ENSAE (1994).
- [10] Kalman R. E. *A new approach to linear filtering and prediction problems*. Journal of Basic Engineering (Trans. ASME D) (1960).
- [11] Labarrere M., Krief J. P. et Gimonet B. *Le filtrage et ses applications*. Cépaduès (1978).
- [12] Delmond F. *Structure et retouche de correcteur*. Rapport Technique ONERA/DCSD (2002).
- [13] Cumer C. *Techniques de commande robuste*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (1998).
- [14] Zhou K., Doyle J. C. et Glover K. *Robust and optimal control*. Prentice Hall (1996).

Annexe

Calcul de $Trace(M_0^{-1}\Delta M)$ pour un système continu

Considérons le système incertain (1) et le filtre de Kalman accordé sur la valeur nominale θ_0 du paramètre θ :

$$(S_a) \begin{cases} \dot{x} &= A_0 x + w \\ \hat{x} &= A_0 \hat{x} + K_0 C(x - \hat{x}) + K_0 v \\ y &= Cx + v \end{cases} \quad (4)$$

où $A_0 = A(\theta_0)$ et où w et v sont des bruits pseudo blancs, gaussiens, centrés, indépendants, et tels que :

$$\begin{aligned} E[w(t)w(\tau)^T] &= \frac{Q}{\Delta t} \delta(t - \tau) \\ E[v(t)v(\tau)^T] &= \frac{R}{\Delta t} \delta(t - \tau) \end{aligned}$$

la fonction $\delta(u)$ étant un triangle centrée en 0, de largeur Δt :

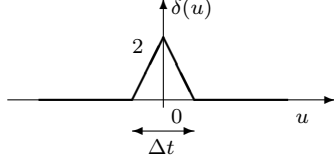


FIGURE 9: Fonction $\delta(u)$

On définit $P_0 = E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T]$. P_0 vérifie l'équation de Riccati continue ([14]) :

$$P_0 A_0^T + A_0 P_0 - P_0 C^T R^{-1} C P_0 + Q = 0 \quad (5)$$

et le gain de Kalman est $K_0 = P_0 C^T R^{-1}$. De plus on définit la sortie échantillonnée comme :

$$y_k = Cx(k\Delta t) + v(k\Delta t)$$

Le but est de calculer :

$$M_0 = E[(y_k - \hat{y}_{k/k-1})(y_k - \hat{y}_{k/k-1})^T]$$

L'intégration de (4) sur un pas Δt à partir de $t = (k-1)\Delta t$ par la formule des rectangles permet d'écrire :

$$\begin{aligned} y_k &= C(I + \Delta t A_0)x_{k-1} + \Delta t C w_{k-1} + v_k \\ y_k - \hat{y}_{k/k-1} &= C(I + \Delta t(A_0 - K_0 C))(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) \\ &\quad + \Delta t C(w_{k-1} - K_0 v_{k-1}) + v_k \end{aligned} \quad (6)$$

avec: $\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k} = \hat{x}(k\Delta t)$, $\forall k$. On dispose également des relations suivantes :

$$\begin{aligned} E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})^T] &= P_0 \\ E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})v_{k-1}^T] &= -\frac{1}{2}K_0 R \\ E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})w_{k-1}^T] &= \frac{1}{2}Q \\ E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})v_k^T] &= 0 \\ E[(w_{k-1} - K_0 v_{k-1})v_k^T] &= 0 \\ E[v_k v_k^T] &= \frac{R}{\Delta t} \end{aligned} \quad (7)$$

On déduit des équations (6) et (7) que lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ (on négligera les termes d'ordre 1 en Δt devant les termes constants et les termes en $\frac{1}{\Delta t}$), alors :

$$M_0 = C P_0 C^T + \frac{R}{\Delta t} \quad (8)$$

Considérons maintenant le cas où le filtre de Kalman est désaccordé; c'est-à-dire synthétisé sur un modèle tenant compte d'une variation paramétrique $\Delta\theta$:

$$(S_d) \begin{cases} \dot{x} &= A_0 x + w \\ \dot{\hat{x}} &= (A_0 + \Delta A)\hat{x} + K_p C(x - \hat{x}) + K_p v \\ y &= Cx + v \end{cases} \quad (9)$$

avec $\Delta A = A(\theta_0 + \Delta\theta) - A_0$ et $K_p = P_p C^T R^{-1}$, où P_p vérifie l'équation de Riccati sur le filtre et le système accordés en $\theta_0 + \Delta\theta$:

$$P_p(A_0 + \Delta A)^T + (A_0 + \Delta A)P_p - P_p C^T R^{-1} C P_p + Q = 0 \quad (10)$$

Une démarche analogue au calcul de M_0 nous mène à la relation :

$$M_0 + \Delta M = C P C^T + \frac{R}{\Delta t} \quad (11)$$

où $P = E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T]$ pour le système (S_d) .

Si on note $X = [x \ (x - \hat{x})]^T$, alors X vérifie l'équation différentielle (12) :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ -\Delta A & A_0 + \Delta A - K_p C \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -K_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \quad (12)$$

et en notant :

$$\begin{aligned} -\tilde{P} &= E[XX^T], \\ -\tilde{A} &= \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ -\Delta A & A_0 + \Delta A - K_p C \end{bmatrix}, \\ -\tilde{B} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -K_p \end{bmatrix}, \\ -\text{et } \tilde{Q} &= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

alors \tilde{P} vérifie l'équation de Lyapunov (13) :

$$0 = \tilde{A}\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A}^T + \tilde{B}\tilde{Q}\tilde{B}^T \quad (13)$$

et on obtient P à partir de \tilde{P} par :

$$P = [0 \ I] \tilde{P} [0 \ I]^T \quad (14)$$

On a donc au final, d'après les équations (11) et (8), toujours pour $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\boxed{\text{Trace}[M_0^{-1} \Delta M] = \Delta t \cdot \text{Trace}[R^{-1} C(P - P_0)C^T]} \quad (15)$$

Le scalaire résultant de ce calcul donne la valeur de $\Delta\theta^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta\theta$ pour l'incertitude $\Delta\theta$ considérée dans la synthèse du filtre de Kalman désaccordé (équation (9)). Pour calculer tous les éléments de la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$, il faut répéter ces calculs dans toutes les directions élémentaires de l'espace paramétrique (voir [13] pour plus de détails; notamment en ce qui concerne les termes hors-diagonaux de la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$). On peut alors noter que Δt viendra en facteur de chaque terme de la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$, on peut donc le supprimer puisqu'on ne s'intéresse qu'à l'identifiabilité des paramètres les uns par rapport aux autres.