

---

# Conception multi-objectif de lois de pilotage pour un avion de transport civil

**Guilhem Puyou\*** — **Caroline Berard\*\*** — **Gilles Ferreres\*\*\***  
**Philippe Menard\***

\* AIRBUS France  
316, route de Bayonne, F-31060 Toulouse cedex 09  
guilhem.puyou@airbus.com

\*\* Supaero  
10, avenue Edouard Belin, F-31055 Toulouse

\*\*\* ONERA-DCSD  
2, avenue Edouard Belin, F-31055 Toulouse cedex 04

---

*RÉSUMÉ.* De par le développement des avions modernes, le cahier des charges des lois de pilotage devient de plus en plus dense et varié. De fait, les concepteurs de lois ont désormais besoin d'utiliser des techniques de synthèse multi-objectif. Cet article propose une telle méthode, permettant de prendre en compte des critères temporels aussi bien que fréquentiels. Nous avons pour cela choisi de développer les méthodes dites de synthèse convexe introduites par Boyd et Barrat au début des années 1990. Puis, afin d'obtenir un correcteur réduit performant et valide sur l'ensemble du domaine de fonctionnement, nous avons mis en œuvre la commande modale robuste suivie de l'interpolation des correcteurs sous forme estimation-commande.

*ABSTRACT.* Due to modern day aircrafts evolution, requirements for flight control laws are more and more numerous and varied. For that reason, control laws designers need now to use multi-objectives synthesis techniques. We then choose to develop to solve today aircraft issue. The whole designed procedure use: first  $H_\infty$  to compute an initial stabilizing controller, then  $Q$ -parametrization to introduce the design shapping, convex synthesis to optimize the controller with respect to the requirements set, robust modal control to produce a performing and reduced order controller, and last observer state feedback controller interpolation for gain scheduling.

*MOTS-CLÉS :* multi-objectif, lois de pilotage, synthèse convexe, réduction modale, interpolation.

*KEYWORDS:* multiobjective, flight control laws, convex design, robust modal control, gain scheduling.

---

## 1. Introduction

L'évolution des besoins du transport civil et les progrès accomplis dans la conception structurale ont rendu les avions plus longs et plus flexibles. Les déformations et les efforts internes à l'avion se doivent donc d'être contrôlés afin d'améliorer le confort des passagers et surveiller les niveaux de charges. Dans le même temps, il est toujours nécessaire de contrôler la mécanique du vol de l'avion. Cependant, de par la proximité de la bande de contrôle des modes de la mécanique du vol avec les premiers modes structuraux, l'interaction entre l'aérodynamique, la mécanique du vol et les structures prend de plus en plus d'importance. L'ensemble des spécifications ne peut donc plus être atteint par des lois dédiées mono-objectifs. La résolution nécessite une optimisation multidisciplinaire et intégrée de la synthèse qui permettra en outre de gagner du temps et de mieux gérer les risques.

Le cahier des charges devient donc de plus en plus dense et intègre à la fois des critères temporels et fréquentiels. C'est pour cette raison que nous avons choisi de développer la méthode dite de synthèse convexe, qui contrairement à la plupart des autres techniques permet de prendre en compte des critères temporels en même temps que des spécifications  $H_2$ ,  $H_\infty$  ou des critères de robustesse. Cette méthode, initiée par (Boyd *et al.*, 1991) est basée sur la Youla-paramétrisation de correcteurs stabilisants (Bender *et al.*, 1985, Alazard *et al.*, 1999). Une telle approche permet de traduire le problème de contrôle en un problème de programmation convexe (Ferrerres *et al.*, 1997, Dardenne, 1998) et de répondre à la question de la faisabilité du cahier des charges initial.

Cependant, une telle méthode fournit des correcteurs d'ordre relativement élevé, alors que l'industrie aéronautique souhaite conserver des contrôleurs réduits et structurés. C'est pourquoi nous avons complété notre approche par l'utilisation de techniques de commande modale robuste (Magni, 2002, Magni *et al.*, 1998) afin de réduire le correcteur optimal, tout en conservant la performance de ce dernier.

Une fois la méthode de synthèse mise en place sur un point de vol, il est nécessaire d'étendre la performance du correcteur sur l'ensemble du domaine de fonctionnement en séquençant celui-ci par rapport aux variables disponibles. Nous avons pour ce faire mis en œuvre une méthode d'interpolation d'un ensemble de correcteurs mis sous forme estimation/commande en utilisant les conditions suffisantes de stabilité garantie de (Stilwell *et al.*, 1999) et en étendant celles-ci à des domaines de performances dans le cas multiparamétrique.

Nous allons dans cet article décrire les méthodes employées et leurs applications au contrôle de l'avion en longitudinal. Le plan proposé suit la démarche suivante : nous commençons par une brève description de la problématique, avant d'approfondir la synthèse convexe, la réduction modale et le séquençement par interpolation. Enfin nous concluons sur la méthodologie.

## 2. Problématique

### 2.1. Notations

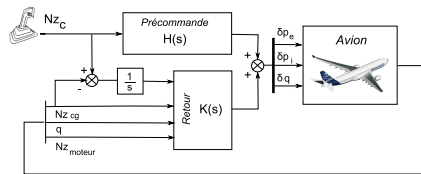
- $u$  : commande
- $y$  : sorties mesurées
- $Nz$  : facteur de charge
- $Nz_{cg}$  : facteur de charge mesuré au centre de gravité
- $Nz_{avant}$  : facteur de charge mesuré à l'avant du fuselage (cabine)
- $Nz_{moteur}$  : facteur de charge mesuré sur la voilure (sur les moteurs)
- $V_c$  : vitesse air conventionnelle
- $q$  : vitesse de tangage
- $\alpha$  : angle d'incidence
- $\theta$  : angle d'assiette
- $h$  : altitude
- $p$  : vitesse de roulis
- $r$  : vitesse de lacet
- $\phi$  : angle d'inclinaison
- $\beta$  : angle de dérapage
- $\delta p_i$  : ordre ailerons internes
- $\delta p_e$  : ordre ailerons externes
- $\delta q$  : ordre profondeur
- $W_z$  : entrée vent

### 2.2. Modèle et architecture

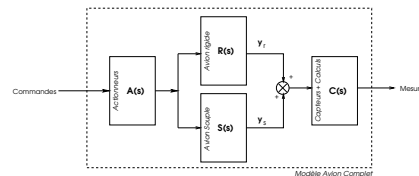
On découple habituellement le mouvement longitudinal (dans le plan vertical) du mouvement latéral de l'avion. Dans le cas d'un avion rigide, l'état longitudinal est caractérisé par les 5 variables  $(V, \alpha, q, \theta, h)$  alors que le mouvement latéral est quant à lui caractérisé par les 4 variables  $(\beta, p, r, \phi)$ . Cette modélisation classique peut se retrouver dans (Boiffier, 1998). Notre étude s'intéresse au contrôle de l'axe longitudinal d'un avion de la gamme Airbus. Bien que les commandes de vol électriques permettent de mettre en œuvre tout type d'architecture de contrôle, nous allons reprendre une forme de lois classique (Cf. figure 1) comprenant une partie retour (*feedback*) et une partie précommande. Les ordres pilotes, transmis par le manche, correspondent à des ordres en accélération (ou facteur de charge) verticale  $Nz$ . On dispose du vecteur de mesure suivant :  $Nz_{cg}, q, Nz_{moteur}$ .

Pour synthétiser les lois nous avons besoin d'un modèle d'avion complet (*i.e.* tenant compte de la souplesse structurale de l'avion). On construit pour cela une repré-

sentation sous forme de modèle d'état par couplage d'un modèle de la partie rigide et d'un modèle de la partie aéroélastique (Cf. figure 2) tout en négligeant leur interaction. Ces méthodes, devenues classiques, sont résumées dans (Kubica *et al.*, 1994).



**Figure 1.** Loix longitudinale



**Figure 2.** Modélisation avion

### 2.3. Cahier des charges

On distingue dans le cahier des charges 5 grandes familles de contraintes : la robustesse, les qualités de vol, le confort, les charges et enfin les actionneurs.

#### 2.3.1. Robustesse

– *Incertitudes non structurées.* Afin de rendre le système robuste à des incertitudes représentées sous forme non structurée (erreur de modèle, retards), on impose des marges sur les modules des fonctions de sensibilité  $S(s)$  et de sensibilité complémentaire  $T(s)$  en entrée ainsi qu'en sortie du système. On traduit cette exigence par une **contrainte  $H_\infty$** .

– *Dynamiques négligées.* On cherche ensuite à rendre le système robuste à des dynamiques négligées hautes fréquences ainsi qu'aux bruits qui peuvent intervenir dans la chaîne de mesure. On utilise pour cela un gabarit fréquentiel de *roll-off* qui impose une coupure sur le correcteur au-delà de la bande de fréquence utile. Compte tenu de la bande passante des actionneurs, on envisage un contrôle des modes de l'avion jusqu'aux environs de 3,5 Hz. On traduit cette exigence par une **contrainte  $H_\infty$** .

– *Incertitudes paramétriques.* Nous allons utiliser un certain nombre de paramètres mesurés pour séquencer les lois de pilotage afin de rendre celles-ci valables et performantes sur l'ensemble du domaine de fonctionnement. On utilise en particulier le point de vol (caractérisé par la vitesse conventionnelle  $V_c$  et le nombre de Mach  $M$ ), la configuration becs et volets (*conf*), ainsi que le centrage de l'avion (*cg*). Toutefois on n'utilise pas l'information sur le remplissage des réservoirs fuel, de même que l'estimation de masse totale de l'avion. Ainsi il nous faudra synthétiser des lois robustes aux cas de masse et remplissages de l'avion que nous appellerons aussi cas d'inertie. On traduit cette exigence de robustesse paramétrique par une **contrainte** sur la valeur singulière structurée (VSS), notée  $\mu$ .

### 2.3.2. Qualités de vol

– *Stabilité.* On doit imposer un amortissement du mode d'oscillation d'incidence supérieur à 0,5.

– *Ordres pilotes.* Le contrôle de l'avion en longitudinal se fait *via* le facteur de charge  $Nz$ . On impose des contraintes sur la réponse de l'avion à un échelon de  $Nz$ , pour des valeurs comprises entre -1 g et +2,5 g.

$Nz_{cg}$	<b>Temps de réponse</b>	proche de l'avion naturel
	<b>Dépassement</b>	<10%
q	<b>Temps de mise en montée</b>	<0.1s
	<b>Dépassement</b>	<20%
	<b>Taux de réponse' après 0.1s</b>	0.2 °/s <sup>2</sup>

– *Vent.* Pour un échelon de vent vertical, l'avion doit rejoindre son objectif initial en facteur de charge  $Nz$ , sans oscillations autour de la valeur d'équilibre.

On traduit l'ensemble des exigences sur les qualités de vol par des **contraintes temporelles**.

– *Critère APC (Aircraft Pilot Coupling).*

**Critère basses fréquences (<1 Hz).** Le pompage piloté est l'exemple le plus connu de couplage entre l'avion et le pilote. Ce phénomène correspond à un comportement d'oscillatoire instable de la boucle fermée pilote-avion qui peut conduire à un crash de l'appareil. On situe la fréquence critique pour le pompage piloté autour de 0,4 Hz (soit 2,5 rad/s). Ainsi pour permettre aux lois de minimiser les risques d'entrée en oscillation, on contraint de 1 à 2,5 rad/s la décroissance de l'amplitude du transfert entre la déflexion du manche  $\delta q_{manche}$  et la dérivée de l'angle d'assiette  $\dot{\theta}$  :

$$\left\| \frac{\Delta \dot{\theta}}{\Delta \delta q_{manche}} \right\| \leq -20 \text{ dB/dec} \quad [1]$$

**Critère hautes fréquences (>1Hz).** Ce critère a été mis en place pour se prémunir contre le couplage entre le pilote et les modes structuraux de l'avion.

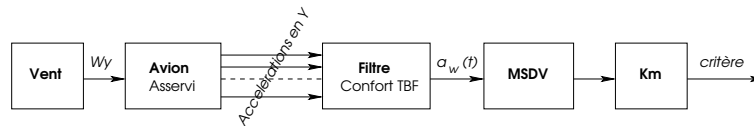
$$\left\| \frac{Nz_{avant}}{\delta q_{manche}} \right\| < 0.2 \text{ g/}^\circ \quad [2]$$

On traduit les exigences APC par deux **contraintes  $H_\infty$** .

### 2.3.3. Confort

On étudie le confort en turbulence. On distingue deux types de vibrations, les vibrations très basse fréquence (TBF) en-dessous de 1Hz et les vibrations basse fréquence (BF) de 1 à 20Hz. Les spécifications détaillées ci-dessous sont basées sur la norme ISO 2631-1.

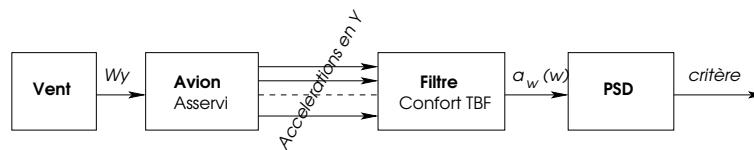
– *Confort TBF.* Il correspond au mal des transports qui se caractérise par une sensation déplaisante intégrant le temps d'exposition (plus le passager est exposé, plus la sensation est déplaisante). La norme mesure un pourcentage de personnes malades après un temps d'exposition T à la turbulence en utilisant  $a_w$  (somme pondérée d'accélération mesurées en différents points du siège - Cf. figure 3) et en faisant une intégration temporelle du signal :  $MSDV(T) = \sqrt{\int_0^T a_w^2(t) dt}$ . Cette intégration est finalement pondérée par un facteur  $K_m$  dépendant de la population exposée.



**Figure 3.** Critère confort TBF

Spécification : il est difficile de donner une valeur absolue. La meilleure contrainte est de faire "aussi bien ou mieux que les avions existants". Le critère issu de la norme peut être traduit par l'égalité de Parseval en un **critère  $H_2$** .

– *Confort BF.* Il correspond à une sensation d'inconfort immédiate indépendante du temps d'exposition, obtenue par mesure de la densité spectrale d'une accélération pondérée :  $PSD = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^\infty A_w^2(\omega) d\omega}$  (Cf. figure 4).



**Figure 4.** Critère confort BF

Spécification : la norme ISO 2631-1 définit des niveaux d'inconfort. Cependant, cette graduation issue de la marine est difficilement applicable à l'avion. L'expérience montre en outre qu'entre deux signaux de même densité spectrale, le plus inconfortable est celui qui possède la réponse fréquentielle d'amplitude maximale. La réalité

est donc un compromis entre le critère de la norme (qui est de type  $H_2$ ) et le maximum de la réponse fréquentielle en amplitude (qui est une spécification de type  $H_\infty$ ).

#### 2.3.4. Charges

Les charges correspondent aux efforts internes subis par la structure. Ces charges peuvent être induites soit par une manœuvre effectuée par le pilote, soit par de la turbulence, nous n'aborderons ici que le deuxième cas. Soit  $H_i(s)$  la fonction de transfert entre le vent (de spectre  $\Phi$ ) et la  $i^{\text{ème}}$  force ; la charge en turbulence  $Y_i^{turb}$  est donnée par

$Y_i^{turb} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \|H_i(j\omega)\|^2 \Phi(\omega) d\omega}$ . On traduit cette exigence par une **contrainte  $H_2$** .

#### 2.3.5. Actionneurs

Il existe deux types de saturations sur les actionneurs ; une saturation en position ainsi qu'une saturation en vitesse. On doit s'assurer que dans le cadre d'une utilisation nominale de l'avion les ordres donnés aux gouvernes ne dépassent pas ces saturations afin de se prémunir contre le pompage piloté. On traduit cette exigence par une **contrainte temporelle**.

### 3. Synthèse d'un correcteur multi-objectif

#### 3.1. Démarche

Cette méthode, appelée synthèse convexe, a été développée par (Boyd *et al.*, 1991). Notre travail (Ferrerres *et al.*, 2006) fait suite à celui de (Ferrerres *et al.*, 1997, Dardenne, 1998).

##### 3.1.1. Principe

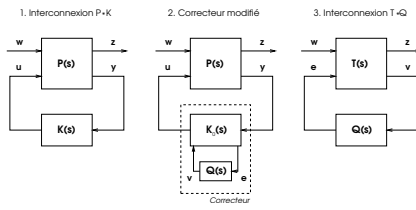
Le but de la synthèse convexe est de traduire le problème de synthèse d'un correcteur en un problème d'optimisation convexe :  $\min_{x \in \mathcal{C}} f(x)$  (où  $f$  est une fonction convexe et  $\mathcal{C}$  un ensemble convexe). Ceci permet d'assurer au concepteur que si solution il y a, elle correspond à l'optimum du problème et que sinon, les contraintes  $\mathcal{C}$  ne sont pas faisables. Pour formaliser le problème, on utilise la paramétrisation de Youla qui fournit une paramétrisation de  $\mathcal{H}_{stab}(P)$  : l'ensemble des boucles fermées stables atteignables. La première expression de  $\mathcal{H}_{stab}(P)$  est donnée par l'interconnection du système  $P(s)$  et du correcteur  $K(s)$  (Cf. figure 5 schéma 1)

$$\mathcal{H}_{stab}(P) = \{P * K \text{ stable}\} \quad [3]$$

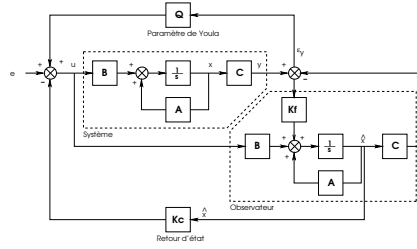
(Doyle, 1984) a prouvé qu'il est possible de générer tous les correcteurs stabilisants à partir d'un correcteur initial stabilisant quelconque ( $K_0(s)$ ), et ce à travers un paramètre  $Q(s)$  (Cf. figure 5 schéma 2), appelé paramètre de Youla. Finalement le

couplage précédent peut être transcrit *via* l'interconnexion  $T * Q$  (Cf. figure 5 schéma 3) où  $T = \begin{bmatrix} T_1 & -T_2 \\ T_3 & 0 \end{bmatrix}$ . On a alors :

$$\mathcal{H}_{stab}(P) = \{T_1 - T_2QT_3 \mid Q \text{ stable}\} \quad [4]$$



**Figure 5.** Youla-paramétrisation



**Figure 6.** Forme estimation/commande

$T_1, T_2, T_3$  sont alors extraits du système  $P$  et d'un correcteur initial stabilisant à l'aide d'une mise sous forme estimation/commande du système asservi (voir figure 6). Ainsi en décrivant l'ensemble des paramètres dynamiques  $Q$  stables (noté  $\mathcal{Q}_{stab}$ ), on décrit l'ensemble des boucles fermées atteignables et stables  $\mathcal{H}_{stab}(P)$ . Afin de réaliser une telle investigation, on détermine une base  $\{Q_i(s)\}_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{Q}_{stab}$  et on écrit :  $Q \in \mathcal{Q}_{stab} \Leftrightarrow \exists \theta = \{\theta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tel que  $Q = \sum_i \theta_i Q_i$ . On peut alors exprimer l'interconnexion  $P * K$  comme une fonction affine en  $\theta_i$  :

$$T_{w \rightarrow z} = T_1 - T_2QT_3 = T_1 - \sum_i \theta_i T_2 Q_i T_3 \quad [5]$$

De par la relation [5], toute réponse temporelle ou fréquentielle de  $T_{w \rightarrow z}(s)$  est affine en  $\theta$ . Toute fonction convexe de  $T_{w \rightarrow z}(\omega)$  ou de  $z(t)$  peut alors s'écrire comme une fonction convexe de  $\theta_i$ . Ce sera le cas des normes  $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_2, l_\infty, \dots$  et de manière générale de toute spécification sur les performances nominales autant que sur la robustesse non structurée (petit gain et théorème de la positivité). Cependant ceci n'est malheureusement pas valable pour la valeur singulière structurée (VSS)  $\mu$ .

Considérons à présent que  $K(s)$  est fixé (et supposé stabilisant). Nous allons chercher à optimiser la partie précommande  $H(s)$ . Il est ici important de noter que le découplage séquentiel de l'optimisation des deux parties du correcteur (retour et précommande) est rendu possible par le fait qu'en l'absence d'incertitudes sur le modèle, les performances atteignables par la précommande sont indépendantes du retour stabilisant utilisé (Pernebo, 1981).

Soit  $T_{bf}(K)$  le transfert boucle fermée entre  $\delta_u$  (perturbation additive sur la commande) et  $z$  (sorties régulées), on obtient alors :  $T_{e \rightarrow z} = T_{bf}(K).H$ .



On cherchera alors à optimiser  $H(s)$ , pour satisfaire des spécifications sur  $T_{e \rightarrow z}$  en restreignant notre recherche à l'ensemble des  $H(s)$  fournissant  $T_{e \rightarrow z}$  stable. De manière triviale l'ensemble des transferts  $H(s)$  donnant  $T_{e \rightarrow z}$  stable est égal à l'ensemble des  $H(s)$  stables<sup>2</sup>. On peut alors paramétrer l'espace de recherche en écrivant  $H(s)$  par l'intermédiaire d'une base de filtres :  $H(s) = \sum_j \alpha_j H_j(s)$ .

$T_{e \rightarrow z}$  est ainsi affine en le paramètre d'optimisation  $\alpha$  et peut donc être traité de manière semblable à  $T_{w \rightarrow z}$  dans le cas du retour. La grande différence par rapport au cas du retour est ici la possibilité d'optimiser  $H(s)$  vis-à-vis de spécifications portant sur plusieurs modèles simultanément. En effet on peut envisager de disposer de plusieurs boucles fermées  $T_{b f_i}$  et de superposer les contraintes linéaires dans la résolution du problème d'optimisation convexe.

REMARQUE. — Ceci n'est pas possible dans le cas du retour. Une modification du modèle interne entraîne un séquençement du correcteur qui n'est alors, de fait, plus unique pour tous les cas considérés.

Finalement, on montre (Cf. (Boyd *et al.*, 1991)) qu'une part importante des problèmes de contrôle (retour et précommande) peut s'exprimer comme un problème d'optimisation convexe :  $\min_{\psi(\theta) \leq b} \phi(\theta)$  où  $\phi$  et  $\psi$  sont deux fonctions convexes qui représentent respectivement l'objectif à minimiser et les contraintes dures du problème. Du fait de la convexité du problème posé et de la paramétrisation qui nous permet de rechercher la solution parmi l'ensemble des correcteurs stabilisants, la méthode va nous permettre de répondre à la question de la faisabilité du cahier des charges sans contraintes d'ordre sur le correcteur. C'est là un des attraits principaux de cette méthode en plus de son multiformalisme.

### 3.1.2. Algorithme

Les algorithmes LMI peuvent être utilisés pour résoudre ce problème (hors spécifications temporelles), mais le temps de calcul est encore aujourd'hui un facteur limitant et ceci pour plusieurs raisons. Il y a tout d'abord le nombre  $n$  d'états du système à contrôler qui est dans notre cas important du fait des nombreux modes souples présents. Ensuite le nombre d'états  $n_Q$  associés au paramètre de Youla, qui augmente vite si l'on souhaite libérer le plus de degrés de liberté possibles pour résoudre le problème de faisabilité sur  $\mathcal{H}_{stab}$ . Si on prend l'exemple d'une spécification  $H_\infty$ , on aboutit à une LMI d'ordre  $2n + n_Q$  qui demande alors un temps de résolution très important. De plus il faut ajouter à cela l'intégration dans la forme standard d'une expression analytique des gabarits fréquentiels (toujours dans l'exemple d'une spécification  $H_\infty$ ). Ceci n'est à la fois pas aisé (car ces contraintes sont souvent exprimées numériquement dans le domaine fréquentiel), mais ajoute de plus de l'ordre à  $n$ , donc du temps dans la résolution.

---

2. NB :  $K$  stabilisant

Nous nous sommes donc tournés vers des solutions de type fréquentiel (et temporel) dans l'esprit de (Kao *et al.*, 2000), résolues grâce à la méthode des plans sécants. Les algorithmes de plans sécants sont aujourd'hui une alternative séduisante, spécialement celui développé par Kelley (Kelley, 1960). L'algorithme de (Kelley, 1960) estime la solution optimale  $\phi^*$  via un calcul itératif de bornes inférieure et supérieure. A l'itération  $k$  :

$$L_k \leq \underbrace{\min_{\psi(x) \leq b} \phi(x)}_{\phi^*} \leq U_k \quad [6]$$

La borne inférieure est calculée par résolution d'un problème de programmation linéaire ou quadratique (Cf. (Boyd *et al.*, 1991)), dont la convergence numérique peut être améliorée (Ferrerres, 2004). La borne supérieure est quant à elle obtenue par évaluation d'une solution faisable (Ferrerres *et al.*, 2006).

### 3.2. Application

Nous allons optimiser séquentiellement la partie retour  $K(s)$  puis la partie précommande  $H(s)$  afin de satisfaire le cahier des charges initial. La répartition des objectifs entre précommande et retour se fait suivant le principe suivant : le retour a pour vocation de régler le comportement du système asservi sur des entrées perturbatrices telles que le vent, tout en rendant le contrôle robuste aux erreurs de modèle, tandis que la précommande s'attache pour sa part à régler le comportement de l'avion sur des entrées pilotées (ici le manche). A noter que la majorité des outils utilisés ci-après sont disponibles dans la toolbox CCD (Ferrerres, 2004).

#### 3.2.1. Synthèse du retour

– *Problématique.* On récapitule dans le tableau 1 l'ensemble des contraintes et objectifs issu du cahier des charges, affecté au retour  $K(s)$ , ainsi que les transferts correspondants qui sont représentés sur la figure 7. On va dans le cas présent chercher à minimiser la norme  $H_2$  sur le confort en imposant les autres normes comme des contraintes.

Ainsi on imposera un niveau  $H_\infty$  sur le transfert confort divisé de moitié par rapport à la boucle ouverte ( $\|T_{W_z \rightarrow Nz_{avant}}\|_{\infty,0}$ ). De même sur la charge voilure on impose un niveau diminué de moitié par rapport à la boucle ouverte ( $\|T_{W_z \rightarrow Nz_{moteur}}\|_{2,0}$ ). Pour obtenir des marges de phases et de gains de 30° et 6 dB, on impose des marges de modules de 2 sur les fonctions de sensibilités  $S$  et  $T$ . On traduit la contrainte de *roll-off* en utilisant une filtre de Butterworth d'ordre 2 ayant une coupure à 4Hz et un gain statique de 10 dB. Concernant la robustesse paramétrique nous avons déjà précisé que la VSS n'était pas convexe. Il est néanmoins possible de gérer des contraintes supplémentaires sur la VSS en mettant en œuvre une méthode dite des

D-Q itérations (Ferrerres *et al.*, 2006) qui résout un problème non plus convexe, mais biconvexe. Cependant, on ne dispose pas dans notre cas d'une modélisation LFT intégrant la masse et les taux de remplissage des réservoirs. On peut néanmoins construire une modélisation LFT sur la fréquence des modes (principal paramètre affecté par la variation du cas de masse et de remplissages) et imposer une contrainte de robustesse en stabilité par rapport à des variations de ces fréquences (notées  $\delta_i$ ). L'application du théorème du petit gain permet de traduire cette exigence en une série de contraintes  $H_\infty$  sur les transferts vus des incertitudes  $\delta_i$  et notés  $T_{w\delta_i \rightarrow z\delta_i}$ . On cherchera à rendre le contrôle robuste aux variations  $\delta_{i,0}$  observées en considérant un ensemble discret de cas d'inerties (cas utilisés ensuite pour la validation de la robustesse paramétrique). Le problème d'optimisation finalement posé est le suivant :

$$\begin{aligned}
& \min \quad \gamma \\
& \|T_{W_z \rightarrow Nz_{avant}}\|_2 \leq \gamma \\
& \|T_{W_z \rightarrow Nz_{avant}}\|_\infty \leq 0.5 \times \|T_{W_z \rightarrow Nz_{avant}}\|_{\infty,0} \\
& \|T_{W_z \rightarrow Nz_{moteur}}\|_2 \leq 0.5 \times \|T_{W_z \rightarrow Nz_{moteur}}\|_{2,0} \\
& \|T_{du \rightarrow u_r}\|_\infty \leq 2 \\
& \|T_{dy \rightarrow y}\|_\infty \leq 2 \\
& T_{dy \rightarrow u_r}(j\omega) \leq H_{\text{roll-off}}(j\omega) \quad \forall \omega \\
& \left\| T_{w\delta_i \rightarrow z\delta_i} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\delta_{i,0}} \\
& Nz(t) \geq Nz_{\text{équilibre}} \quad \forall t \text{ pour un échelon de } Wz > 0 \\
& -30^\circ \leq u_{r\delta p_i}(t) \leq +25^\circ \quad \forall t \\
& -30^\circ \leq u_{r\delta p_e}(t) \leq +25^\circ \quad \forall t \\
& -30^\circ \leq u_{r\delta q}(t) \leq +20^\circ \quad \forall t
\end{aligned} \tag{7}$$

Spécification	Objectif ou contrainte	Transfert
<b>QDV</b>	contrainte $l_\infty$	$T_{W_z \rightarrow Nz_{cg}}$
<b>Confort</b>	contrainte $H_\infty$	$T_{W_z \rightarrow Nz_{avant}}$
	objectif $H_2$	$T_{W_z \rightarrow Nz_{avant}}$
<b>Charges</b>	contrainte $H_2$	$T_{W_z \rightarrow Nz_{moteur}}$
<b>Robustesse</b>	Marges en entrée	contrainte $H_\infty$
	Marges en sortie	contrainte $H_\infty$
	Roll Off	contrainte $H_\infty$
	Robustesse paramétrique	contrainte $H_\infty$
<b>Actionneurs</b>	Saturation	contrainte $l_\infty$
		$T_{W_z \rightarrow u_r}$

**Tableau 1.** Cahier des charges, partie retour

– *Correcteur initial.* On utilise pour synthétiser le correcteur initial, la synthèse  $H_\infty$  par facteurs premiers (McFarlane *et al.*, 1989) présentée dans (Ferrerres *et al.*,

2006). Cette synthèse nous permet de recopier le comportement rigide (basse fréquence) d'un correcteur modal statique et d'obtenir *in fine* un correcteur sous forme estimation/commande d'ordre égal à l'ordre du système. On peut alors visualiser le comportement temporel de l'avion sur une sollicitation en créneaux du manche. Les résultats présentés figure 14 sont tout à fait satisfaisants sachant que la précommande n'a pas encore été optimisée.

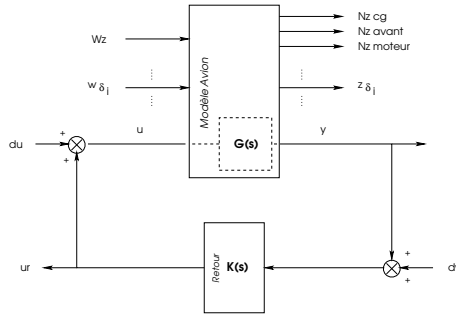


Figure 7. Schéma de synthèse du retour

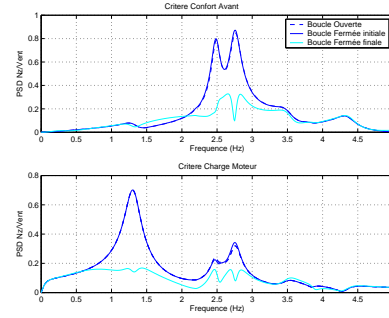


Figure 8. Confort et charges sur le cas nominal

– *Base de  $Q$* . L'étape précédente nous a permis d'écrire la boucle fermée sous la forme  $T_1 - T_2 Q_0 T_3$ . Nous allons maintenant modifier  $Q_0$  afin de parcourir l'ensemble  $\mathcal{H}_{stab}$ . Initialement  $Q = Q_0$ , on écrit alors  $Q = Q_0 + \sum_i \theta_i Q_i$ . Plusieurs méthodes sont disponibles pour construire une base. Deux critères ont guidé notre choix : le conditionnement numérique du problème d'optimisation posé, la capacité à prendre en compte une connaissance *a priori* du système dans le choix des éléments de la base. C'est ainsi que nous avons retenu une base orthonormale (dite de Laguerre généralisée) étudiée dans le cas continu par (Akçay *et al.*, 1998), générée par un ensemble de pôles fixés par l'utilisateur :

$$Q_i(s) \triangleq \frac{\sqrt{2\text{Re}\{a_i\}}}{s + a_i} \prod_{k=1}^{i-1} \frac{s - \bar{a}_k}{s + a_k} \quad Q_0(s) = 1, \{a_k\} \in \mathbb{C}^+ \quad [8]$$

Du fait de la taille de notre cahier des charges et des temps de calcul, il nous faut limiter le nombre de  $\theta_i$  à optimiser. Nous avons mené dans nos travaux (Puyou, 2005) diverses études sur le choix des modes générateurs de la base (fréquence, amortissement) maximisant l'efficacité d'une base pour un ordre donné. On choisit ainsi des pôles  $\{a_k\}$  amortis à 0,7 et situés dans la bande de fréquence où l'on souhaite améliorer les résultats du correcteur initial (ici de 1 à 3 Hz). Après avoir étudié la décroissance

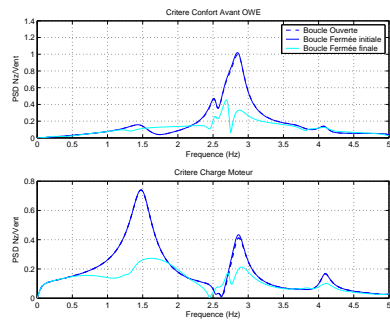
du critère minimisé en fonction du nombre de pôles introduit dans la base, on retient 3 paires de pôles complexes conjugués :  $\left\{ 1 \times 2\pi \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}} ; 2 \times 2\pi \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}} ; 3 \times 2\pi \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}} \right\}$ .  $Q(s)$  ayant la même dimension que  $K(s)$  (i.e. 4 entrées et 2 sorties), le paramètre de Youla est donc composé de 8 transferts SISO, ce qui fait 88 paramètres à optimiser.

– *Résultats.* Le comportement temporel basse fréquence de l’avion n’est pas modifié par l’optimisation. Le cahier des charges s’étant avéré faisable, l’ensemble des contraintes sont respectées par le correcteur fourni par la méthode. On peut en particulier visualiser le résultat sur le confort en pointe avant et la charge voilure (charge moteur) sur le tracé figure 8. On note en boucle fermée une réduction importante (environ 60 %) de l’amplitude des raies observées en boucle ouverte. La robustesse paramétrique ne peut être quantifiée numériquement, faute de modèle LFT sur les inerties. Néanmoins, on dispose d’un ensemble discret de modèles. L’évaluation de la performance (confort et charge) sur cet ensemble de modèles révèle une homogénéité qui valide l’exigence de robustesse paramétrique. A titre d’exemple on trace les cas extrêmes (avion vide et avion plein) sur les figures 9 et 10. Figure 11 on visualise les marges de gain et phase équivalentes aux marges S et T. En abscisses et en ordonnées on trace respectivement les marges de phase et de gain du correcteur synthétisé ; les ronds représentent les marges du correcteur initial et les croix les exigences du cahier des charges. On vérifie ainsi que le résultat de l’optimisation satisfait bien le cahier des charges. Enfin la figure 12 représente l’ensemble des transferts SISO du correcteur. On peut ainsi constater que la bande passante du contrôle est bien limitée et coupe au-delà de 4 Hz.

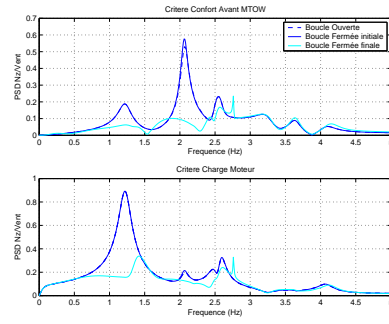
### 3.2.2. Synthèse de la précommande

– *Problématique.* On récapitule dans le tableau 2 l’ensemble des contraintes et objectifs affectés à la précommande ainsi que les transferts correspondants qui sont représentés sur la figure 13.

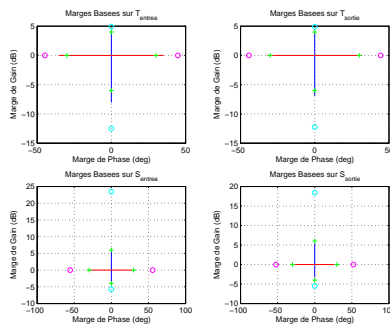
Afin d’uniformiser la réponse de l’avion sur un large spectre d’entrées et de réaliser les objectifs en termes de temps de réponse, nous avons choisi d’utiliser un modèle de référence comportemental et nous avons cherché à minimiser fréquemment l’erreur  $\epsilon$  sur la sortie régulée  $N_z$  entre le système asservi et le modèle de référence. Les contraintes temporelles de dépassement, précision, taux de réponse sur  $N_z$  et  $q$  sont traduites à travers des gabarits temporels minimum et maximum. De plus, ayant des exigences de robustesse en performance à des variations de masse, nous avons répété les contraintes sur un ensemble de modèles (ici modèles masse légère et masse lourde) indicés par  $i$ . Enfin les exigences sur l’APC sont traduites sous forme de gabarits fréquentiels. L’entrée considérée étant du facteur de charge commandé ( $N_{z_c}$ ) et non du manche, on introduit dans le critère haute fréquence le gain de la cinématique manche  $G_c$ . Le problème d’optimisation finalement posé est le suivant :



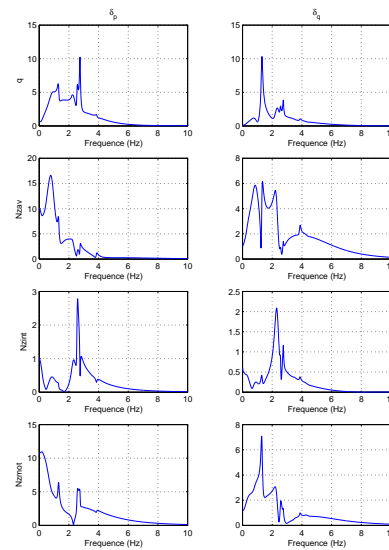
**Figure 9.** Confort et charges sur le cas vide



**Figure 10.** Confort et charges sur le cas plein



**Figure 11.** Marges finales



**Figure 12.** Transfert correcteur

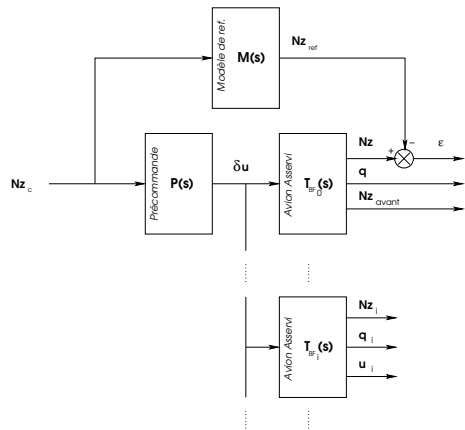
$$\begin{aligned}
& \min \quad \gamma \\
& T_{Nz_c \rightarrow \epsilon}(j\omega) \leq \gamma \forall \omega \\
& Nz_{min} \leq Nz_i(t) \leq Nz_{max} \forall t \text{ pour un échelon unitaire de } Nz_c \\
& q_{min} \leq q_i(t) \leq q_{max} \forall t \text{ pour un échelon unitaire de } Nz_c \\
& -30^\circ \leq u_{i\delta p_i}(t) \leq +25^\circ \forall t \\
& -30^\circ \leq u_{i\delta p_e}(t) \leq +25^\circ \forall t \\
& -30^\circ \leq u_{i\delta q}(t) \leq +20^\circ \forall t \\
& T_{Nz_c \rightarrow q}(j\omega) \leq H_{APC}(j\omega) \forall \omega \in [1, 2.5] \text{ rad.s}^{-1} \\
& T_{Nz_c \rightarrow Nz_{av}}(j\omega) \leq 0.2 \times G_c \forall \omega \geq 2\pi \text{ rad.s}^{-1}
\end{aligned} \tag{9}$$

Spécification		Objectif ou contrainte	Transfert
<b>QDV</b>	Réponses aux consignes	contrainte $l_\infty$	$T_{Nz_c \rightarrow Nz}$
	Suivi de modèle	objectif $H_\infty$	$T_{Nz_c \rightarrow q}$
	APC	contrainte $H_\infty$	$T_{Nz_c \rightarrow \epsilon}$
<b>Robustesse</b>		contrainte $H_\infty$	$T_{Nz_c \rightarrow q}$
	Réponses aux consignes de la i <sup>ème</sup> boucle fermée	contrainte $l_\infty$	$T_{Nz_c \rightarrow Nz_{av}}$
			$T_{Nz_c \rightarrow Nz_i}$
<b>Actionneurs</b>			$T_{Nz_c \rightarrow q_i}$
		contrainte $l_\infty$	$T_{Nz_c \rightarrow u_i}$
			$T_{Nz_c \rightarrow u}$

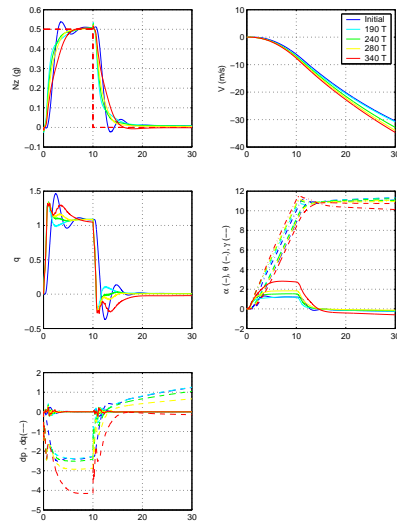
**Tableau 2.** Cahier des charges, partie précommande

– *Base de H.* Nous avons reporté sur la précommande le choix de la base de Laguerre généralisée. Puis nous avons également mené une étude paramétrique sur la sélection des pôles générateurs de la base, qui nous a conduit (Puyou, 2005) à sélectionner une dizaine de pôles complexes conjugués d’amortissement 0,7 et de pulsations uniformément réparties entre 0,1 Hz et 4 Hz.

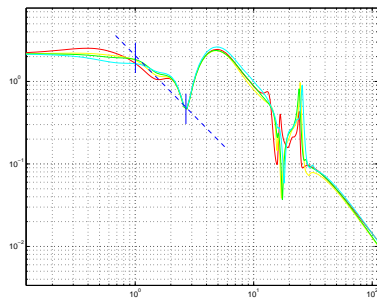
– *Résultats.* On visualise figure 14 le comportement temporel de l’avion sur une sollicitation en créneaux du manche pour différents cas de masse (190 T, 240 T, 280 T, 340 T). On voit une homogénéité des réponses sur le facteur de charge avec un temps de réponse de l’ordre de 5s et un dépassement nul. Sur la réponse en tangage  $q$ , on observe une réponse initiale rapide avec une forte pente qui permet une bonne sensation pilote. On constate sur cette même réponse un dépassement qui reste limité aux 20 % spécifiés. On satisfait donc les exigences de qualités de vol et de robustesse. Les figures 15 et 16 permettent de vérifier les exigences APC sur l’ensemble des cas de masse.



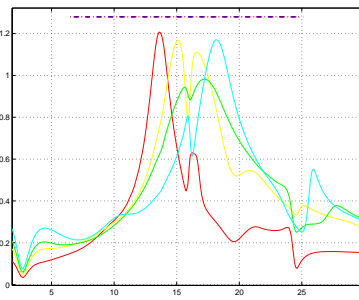
**Figure 13.** Schéma de synthèse de la précommande



**Figure 14.** Réponse temporelle (graduée en seconde) à un créneau de manche



**Figure 15.** Critère APC basse fréquence



**Figure 16.** Critère APC haute fréquence



## 4. Réduction

La phase d'optimisation nous a permis de trouver un correcteur satisfaisant le cahier des charges et minimisant le critère confort. Ce correcteur obtenu est cependant d'ordre 60. Ainsi il est nécessaire de procéder à une réduction de ce correcteur si l'on souhaite pouvoir envisager son implantation dans un calculateur embarqué. En suivant l'esprit de (Chiappa *et al.*, 2001), nous allons utiliser pour cette phase une technique issue des travaux sur la commande modale robuste (Magni, 2002) qui permet la réduction et la structuration de correcteurs tout en conservant (autant que faire se peut) la performance nominale de l'asservissement.

### 4.1. Démarche

#### 4.1.1. Notations et propositions

Considérons un système linéaire à  $n$  états,  $m$  entrées et  $p$  sorties :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad [10]$$

où  $x$  est le vecteur d'état,  $y$  le vecteur de mesures et  $u$  le vecteur d'entrées,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . On définit  $w_i$  et  $v_i$  comme les directions d'entrées et les vecteurs propres à droite associés à la valeur propre en boucle fermée  $\lambda_i$ .

Le retour est défini par :  $u(s) = K(s)y(s)$ , et  $K(s)$  est obtenu par placement de structure propre défini par la proposition 4.1.

**Proposition 4.1** *Le triplet  $\mathcal{T}_i = (\lambda_i, v_i, w_i)$  satisfaisant*

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix} = 0 \quad [11]$$

*est placé par le gain dynamique  $K(s)$  si et seulement si*

$$K(\lambda_i) \begin{bmatrix} C v_i + D w_i \end{bmatrix} = w_i \quad [12]$$

La procédure de synthèse élémentaire associée à cette proposition est la suivante :

- Choisir les valeurs propres  $\lambda_i$  et déterminer l'espace des vecteurs propres admissibles sur la boucle fermée en utilisant [11]. Le triplet  $(\lambda_i, v_i, w_i)$  est alors défini.
- Calculer  $K(s)$  satisfaisant [12]. La démarche est détaillée dans la section 4.1.2.

#### 4.1.2. Résolution technique

La matrice de transferts  $K(s)$  est supposée avoir la forme suivante sur chacun des couples entrée-sortie :

$$K_{ij}(s) = \frac{b_{qij} s^q + \dots + b_{1ij} s + b_{0ij}}{a_{qij} s^q + \dots + a_{1ij} s + a_{0ij}} \quad [13]$$

Des dénominateurs communs ou différents sont fixés *a priori* pour la matrice  $K(s)$ . Pour choisir les coefficients  $a_{ijk}$ , il suffit de choisir les valeurs propres désirées pour chaque dénominateur (par exemple les pôles d'un correcteur initial) et d'identifier les coefficients correspondants. Les paramètres libres sont alors les coefficients des numérateurs  $b_{ijk}$ .

La structure du retour définie dans [13] offre en général un grand nombre de degrés de liberté. Pour cette raison, un critère quadratique  $J$  est utilisé ; par exemple garder le correcteur aussi proche que possible d'un correcteur initial  $K_{\text{ref}}$  :

$$J = \sum_{i=1, \dots, r} \|K_{\text{ref}}(j\omega_i) - K(j\omega_i)\|_F^2 \quad [14]$$

**Proposition 4.2** *Le problème de synthèse de  $K(s)$  satisfaisant l'équation [12] et minimisant le critère [14] revient à résoudre en  $\Xi$  un problème QP de la forme*

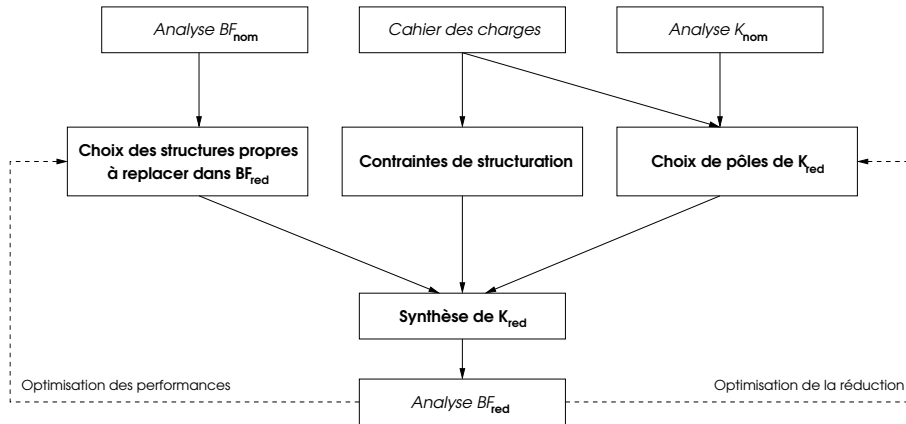
$$\Xi A_1 = b_1 \quad ; \quad J = \Xi H \Xi^T + 2\Xi c \quad [15]$$

$\Xi_k$ , représente les coefficients libres sur la  $k^{\text{ième}}$  ligne de [13] :  $\Xi_k = [b_{0k1} \dots b_{qk1} \dots \dots b_{0kp} \dots b_{qkp}]$ .

Les résultats associés se trouvent dans (Magni *et al.*, 1998) et dans (Magni, 2002) pour l'implémentation.

REMARQUE. — La contrainte de placement peut être spécifiée sur différents modèles, ce qui permet notamment une prise en compte des exigences de robustesse.

La figure 17 décrit comment combiner l'analyse modale avec le placement de structure propre pour réduire l'ordre d'un correcteur initial tout en conservant les performances de la boucle fermée. La méthode est basée sur le fait qu'un système est entièrement défini par l'ensemble de ses structures propres en boucle fermée. Ainsi en premier lieu la structure propre dominante est extraite en utilisant une analyse modale de la boucle fermée nominale  $BF_{nom}$  ; puis placée par un correcteur réduit  $K_{red}$  dont la structure est obtenue dans la première étape de la procédure par analyse modale du correcteur nominal  $K_{nom}$ . Un critère fréquentiel est minimisé pour optimiser l'efficacité de la réduction.



**Figure 17.** *Algorithme de réduction*

#### 4.2. Application

– *Problématique.* Nous allons chercher à recopier les performances du correcteur optimal issu de la synthèse convexe sur l’ensemble du cahier des charges (qualités de vol, confort, charges, robustesse) avec un correcteur :

– respectant les contraintes structurelles du cahier des charges qui sont dans le cas du longitudinal l’annulation du transfert de la mesure  $N_{z_{moteur}}$  vers la gouverne de profondeur,

– dont l’ordre approche au mieux l’ordre des lois existantes qui se situe (dans le cas longitudinal) entre 3 et 7 suivant les sous-transferts SISO (mono-entrée mono-sortie) du correcteur considérés<sup>3</sup>.

On s’attachera donc, dans un premier temps, à optimiser le choix de la structure propre boucle fermée remplacée afin de recopier à peu de choses près la performance observée sur le cas nominal, mais aussi sur l’ensemble des cas d’inerties (masses/remplissages). Puis nous chercherons, dans un second temps, à réduire itérativement l’ordre du correcteur final synthétisé, tout en conservant le niveau de performance robuste atteint.

– *Choix des contraintes.* L’analyse des résidus modaux sur les transferts caractérisant les trois principales spécifications du cahier des charges :

3. Les lois sont implantées sous forme de fonctions de transfert SISO et non sous forme de représentation d’état.

- contrôle rigide :  $Nz_{manche} \rightarrow Nz_{cg}$
- confort :  $Wz \rightarrow Nz_{avant}$
- charges :  $Wz \rightarrow Nz_{moteur}$

met en avant un certain nombre de modes de la boucle fermée, issus du modèle avion en boucle ouverte, récapitulés dans le tableau 3.

On cherchera donc à replacer dans le cas nominal les 5 modes avion selon le tableau 4. Pour ce qui est des modes du correcteur nominal à conserver dans le correcteur réduit, on identifie toujours sur les trois transferts majeurs un ensemble de modes dominants (Cf. tableau 5).

Critères		
QDV	Confort	Charges
–0	$-0.5 \pm 17.3i$	$-0.5 \pm 17.3i$
$-0.8 \pm 1.3i$	$-0.4 \pm 15.7i$	$-0.4 \pm 15.7i$
		$-0.8 \pm 8.2i$

**Tableau 3.** Modes avion dominants

Boucle Ouverte	Boucle fermée
–0	–0.8
$-0.8 \pm 1.3i$	$-1.1 \pm 1.1i$
$-0.8 \pm 8.2i$	$-1.8 \pm 8.4i$
$-0.4 \pm 15.7i$	$-0.8 \pm 16.2i$
$-0.5 \pm 17.3i$	$-2.2 \pm 18.0i$

**Tableau 4.** Placement des modes avion retenus

Critères			
	QDV	Confort	Charges
1	–1.0	$-1.4 \pm 27.0i$	$-6.6 \pm 27.8i$
2	–3.7	$-6.6 \pm 27.8i$	–1.0
3	$-1.4 \pm 27.0i$	$-21.2 \pm 32.2i$	$-21.2 \pm 32.2i$

**Tableau 5.** Classement des pôles correcteur par efficacité

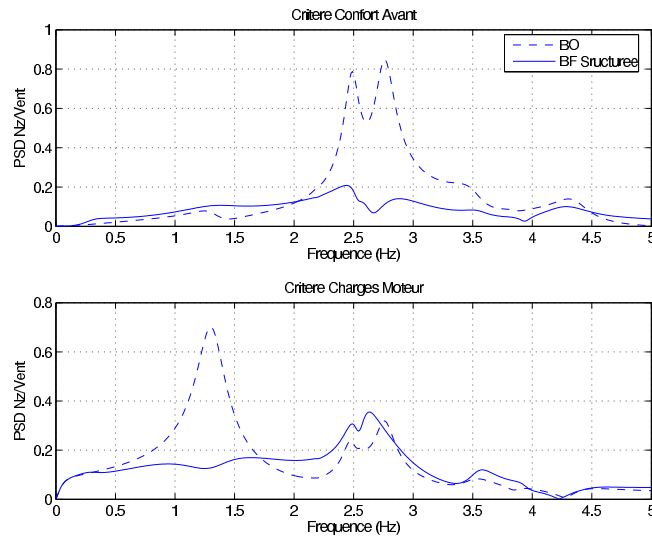
Après optimisation de l'ordre du correcteur parmi les différentes possibilités offertes par cette sélection de pôles, on retient 4 pôles :  $-1.0(\lambda_1)$ ,  $-3.7(\lambda_2)$ ,  $-6.6 \pm 27.8i(\lambda_3)$ ,  $-21.2 \pm 32.2i(\lambda_4)$ , que l'on répartit de la manière suivante dans la structure du correcteur réduit en fonction du cahier des charges :

– *Résultats.* Après résolution d'un problème de programmation quadratique [15] minimisant la différence fréquentielle entre le correcteur réduit et le correcteur nomi-

	$q$	$Nz$	$\int Nz$	$Nz_{mot}$
$\delta_p$	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$	$\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$
$\delta_q$	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$	$\emptyset$

**Tableau 6.** Structuration du correcteur : les pôles utilisés

nal entre 0 Hz et 5 Hz, on obtient un niveau de performance sur le confort comparable aux résultats issus de la synthèse convexe. On observe sur la figure 18 les résultats sur le cas nominal rebouclé par le correcteur réduit.

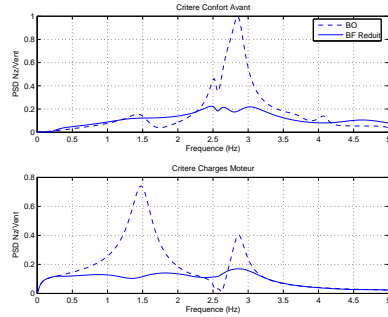


**Figure 18.** Confort et charges du correcteur structuré sur le cas nominal

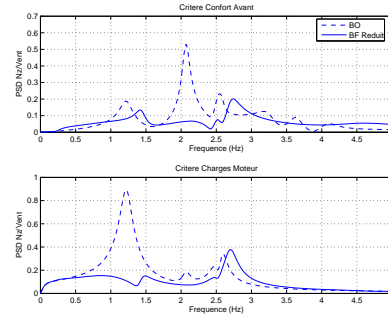
On peut enfin apprécier la robustesse en performance en appliquant le contrôle sur les cas d'inertie extrêmes (vide et plein) :

## 5. Séquencement

Il s'agit à présent de passer d'un correcteur valable sur un point de fonctionnement à un correcteur valable sur l'ensemble du domaine. Outre la robustesse obtenue vis-à-vis du cas d'inertie, il nous faut à présent séquencer le correcteur vis-à-vis des paramètres mesurés ( $V_c$ , Mach...). On distingue deux familles de techniques possibles : les méthodes de séquencement *a priori*, dites méthodes d'autoséquencement, et les méthodes de séquencement *a posteriori*, aussi appelées méthodes d'interpolation. On souhaite dans notre cas disposer de garanties *a priori* sur la



**Figure 19.** Confort sur le cas vide



**Figure 20.** Confort sur le cas plein

stabilité (voire la performance) de l'asservissement sur l'ensemble du domaine de fonctionnement. Les techniques LPV sont classiquement utilisées pour résoudre cette problématique, mais ces méthodes de type état sont difficiles à mettre en œuvre compte tenu de la taille de la modélisation avion (beaucoup de modes souples). On s'oriente donc vers des techniques de séquençement des correcteurs mis sous forme estimation/commande en reprenant les conditions suffisantes de stabilité de (Stilwell *et al.*, 1999).

REMARQUE. — Nous avons par ailleurs testé sur la même problématique des techniques d'autoséquençement à base de commande modale robuste. Les deux démarches et leurs applications sont présentées dans (Puyou, 2005).

### 5.1. Démarche

Considérons le système paramétré suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y = C(\theta)x + D(\theta)u \end{cases} \quad [16]$$

où  $\theta \in \Gamma \subset \mathbb{R}^l$  est la variable de séquençement. On écrit la boucle fermée sous forme estimation/commande en utilisant les travaux de (Alazard *et al.*, 1999, Bender *et al.*, 1985)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_Q \\ \dot{\epsilon}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c & BC_Q & BK_c + BD_Q C \\ 0 & A_Q & B_Q C \\ 0 & 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_Q \\ \epsilon_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e \quad [17]$$

Le correcteur est alors caractérisé par les gains d'état  $K_c$ , d'observation  $K_f$  et le paramètre de Youla dynamique  $Q(s)$  (dont la représentation d'état est donnée par les matrices  $(A_Q, B_Q, C_Q, D_Q)$ ). On cherche de là à générer une famille de correcteurs continûment variables  $K_c(\theta), K_f(\theta), Q(\theta)$  assurant la stabilité et la performance sur  $\Gamma$ .

De par le principe de séparation, l'ensemble des pôles de la boucle fermée est donné par l'union des valeurs propres du retour d'état  $(A(\theta) + B(\theta)K_c(\theta))$ , de l'observateur  $(A(\theta) + K_f(\theta)C(\theta))$  et du paramètre de Youla  $Q(\theta)(s)$ . Il suffit donc, pour assurer la stabilité de la boucle fermée, de garantir la stabilité de chacun de ses sous-systèmes indépendamment.

Dans le cas d'une variable de séquençement scalaire ( $l = 1$ ), (Stilwell *et al.*, 1999) proposent une méthode d'interpolation d'un ensemble de correcteurs initiaux. A condition que cet ensemble vérifie la condition de recouvrement de stabilité, la méthode permet de stabiliser le système sur l'ensemble du domaine paramétrique.

Nous allons à présent exposer des résultats qui permettent d'étendre l'approche de (Stilwell *et al.*, 1999) au cas de régions de stabilité LMI pour une variable de séquençement vectorielle (*i.e.*  $l$  quelconque). Définissons tout d'abord une région LMI.

**Définition 5.1** Soient  $P = P^T$  et  $Q$  deux matrices réelles. Une région LMI est définie par une région  $\mathcal{D}$  :

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} \mid P + Qs + Q^T \bar{s} < 0\}$$

On peut généraliser la notion de stabilité classique à celle de  $\mathcal{D}$ -stabilité.

**Définition 5.2 ( $\mathcal{D}$ -stabilité)** Soient  $A$  une matrice réelle et  $\mathcal{D}$  une région LMI.  $A$  est dite  $\mathcal{D}$ -stable si toutes ses valeurs propres sont contenues dans la région  $\mathcal{D}$ .

REMARQUE. — Des exemples de régions LMI sont donnés par : le demi-plan complexe gauche, le cône d'amortissement  $\{\frac{\text{Im}(s)}{\text{Re}(s)} < \tan \theta\}$ , le disque d'oscillation maximale  $\{|s| < r\}$ , la stabilité décalée  $\{\text{Re}(s) < -\alpha_{\min}\}$ .

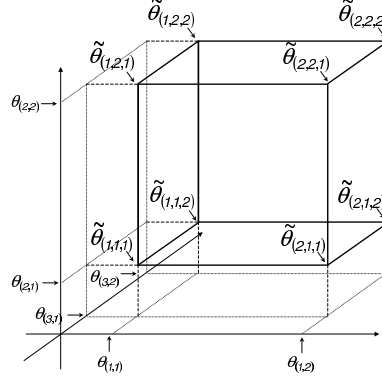
Il est alors possible d'étendre la condition de stabilité de Lyapunov au cas de la stabilité sur des régions LMI (Chilali *et al.*, 1996).

**Proposition 5.1** (Chilali *et al.*, 1996). Soient  $P = P^T, Q$  des matrices réelles définissant une région LMI  $\mathcal{D}$ . Soit  $A$  une matrice réelle,  $A$  est  $\mathcal{D}$ -stable si et seulement si il existe une matrice symétrique définie positive  $X$  telle que :

$$P \otimes X + Q \otimes (AX) + Q^T \otimes (XA^T) < 0 \quad [18]$$

REMARQUE. —  $\otimes$  représente le produit de Kronecker.

Soit  $\theta \in \Gamma \subset \mathbb{R}^l$ . Sur chaque coordonnée  $(\theta)_{k=1\dots l}$  du vecteur  $\theta$ , on définit  $r_k$  valeurs scalaires  $(\theta_{(k,i_k)})_{i_k=1\dots r_k}$  telles que  $\theta_{(k,1)} < \dots < \theta_{(k,r_k)}$ . On génère ainsi  $r_1 \times \dots \times r_k$  points  $\tilde{\theta}_{(i_1, \dots, i_l)} = [\theta_{(1,i_1)} \dots \theta_{(l,i_l)}] \in \Gamma$  pour  $i_k = 1 \dots r_k$  et  $k = 1 \dots l$  (voir figure 21 pour une illustration).



**Figure 21.** Illustration for  $l = 3$

Définissons à présent la condition de recouvrement de  $\mathcal{D}$ -stabilité.

**Définition 5.3** Soient  $\mathcal{D}$  une région,  $A(\theta)$  et  $B(\theta)$  données par [16],  $\theta \in \Gamma \subset \mathbb{R}^l$ , supposons que le retour d'état  $K_{c(i_1, \dots, i_l)}$  est tel que  $(A(\tilde{\theta}_{(i_1, \dots, i_l)}) + B(\tilde{\theta}_{(i_1, \dots, i_l)})K_{c(i_1, \dots, i_l)})$  est stable pour tout  $\{i_k = 1 \dots r_k\}_{k=1\dots l}$ . Soit  $U_{(i_1, \dots, i_l)}$ , contenant  $\tilde{\theta}_{(i_1, \dots, i_l)}$ , un voisinage ouvert tel que  $A(\theta) + B(\theta)K_{c(i_1, \dots, i_l)}$  est  $\mathcal{D}$ -stable pour toutes valeurs  $\theta \in U_{(i_1, \dots, i_l)}$ . Si  $\Gamma \subset \bigcup_{\{i_k=1\dots r_k\}_{k=1\dots l}} U_{(i_1, \dots, i_l)}$  alors on dit que les gains de retour d'état vérifient la condition de recouvrement de  $\mathcal{D}$ -stabilité.

On peut ainsi reformuler les résultats préliminaires de (Stilwell *et al.*, 1999) sur l'interpolation à stabilité garantie de gains de retour d'état pour un modèle LTI donné.

**Lemme 5.1** Soient  $(l, r) \in \mathbb{N}^2$  et  $\mathcal{D}$  une région LMI. Supposons que  $K_{(i_1, \dots, i_l)}$   $\mathcal{D}$ -stabilise  $(A, B)$ , c'est-à-dire que chaque  $(A + BK_{(i_1, \dots, i_l)})$  est  $\mathcal{D}$ -stable. Alors, il existe un ensemble de matrices symétriques définies positives  $W_{(i_1, \dots, i_l)}$  pour tout  $\{i_k = 1 \dots r_k\}_{k=1\dots l}$ , telles que pour toutes constantes  $(\mu_{(k,i_k)})_{\{k=1\dots l, i_k=1\dots r_k\}} \geq 0$  non toutes nulles, le gain de retour d'état :

$$K = \left( \sum_{\{i_k=1\dots r_k\}_{k=1\dots l}} K_{(i_1, \dots, i_l)} W_{(i_1, \dots, i_l)} \prod_{h=1\dots l} \mu_{(h, i_h)} \right) \cdots \left( \sum_{\{i_k=1\dots r_k\}_{k=1\dots l}} W_{(i_1, \dots, i_l)} \prod_{h=1\dots l} \mu_{(h, i_h)} \right)^{-1} \quad [19]$$



$\mathcal{D}$ -stabilise  $(A,B)$ .

Preuve : (Puyou, 2005)

On peut alors proposer une formulation continue du gain de retour d'état qui assure la  $\mathcal{D}$ -stabilité sur  $\Gamma$ .

**Théorème 5.1** Soient  $P = P^T$  et  $Q$  deux matrices réelles définissant une région LMI  $\mathcal{D}$ . Etant donné  $A(\theta)$  et  $B(\theta)$  définis par [16],  $\theta \in \Gamma \subset \mathbb{R}^l$ , on suppose que les gains de retour d'état  $K_{c(i_1, \dots, i_l)}$  correspondant à  $\tilde{\theta}_{(i_1, \dots, i_l)} \in \Gamma$  avec  $i_k = 1 \dots r_k$  et  $k = 1 \dots l$ , satisfont la condition de recouvrement de stabilité. S'il existe  $\gamma > 1$  et un ensemble de matrices définies positives  $W_{(i_1, \dots, i_l)}$  telles que pour tout  $\{i_k = 1 \dots r_k\}_{k=1 \dots l}$

$$P \otimes W_{(i_1, \dots, i_l)} + Q \otimes (A - BK_{(i_1, \dots, i_l)})W_{(i_1, \dots, i_l)} + \dots \\ Q^T \otimes W_{(i_1, \dots, i_l)}(A - BK_{(i_1, \dots, i_l)})^T \leq -\gamma I$$

avec  $\theta \in U_{(i_1, \dots, i_l)}$ , alors il existe des intervalles

$$[b_{(i_1, \dots, i_l)}, c_{(i_1, \dots, i_l)}] \subset U_{(i_1, \dots, i_l)} \cap U_{(i_1+1, \dots, i_l+1)} \cap [\tilde{\theta}_{(i_1, \dots, i_l)}, \tilde{\theta}_{(i_1+1, \dots, i_l+1)}]$$

pour tout  $i_k = 1, \dots, r_k - 1$  et  $k = 1, \dots, l$ , tels que le gain de retour d'état

$$K_c(\theta) = \begin{cases} K_{c(i_1, \dots, i_l)}, \theta \in [\tilde{\theta}_{(i_1, \dots, i_l)}, b_{(i_1, \dots, i_l)}[ \\ \tilde{K}_{c(i_1, \dots, i_l)}(\theta)W(\theta)^{-1}, \theta \in [b_{(i_1, \dots, i_l)}, c_{(i_1, \dots, i_l)}] \\ K_{c(i_1+1, \dots, i_l+1)}, \theta \in ]c_{(i_1, \dots, i_l)}, \tilde{\theta}_{(i_1+1, \dots, i_l+1)}] \end{cases}$$

où

$$\tilde{K}_{c(i_1, \dots, i_l)}(\theta) = \sum_{\{j_k = i_k \dots i_k + 1\}_{k=1 \dots l}} K_{c(j_1, \dots, j_l)} W_{(j_1, \dots, j_l)} \dots \\ \prod_{h=1 \dots l} \left( \left( \frac{c_{(i_1, \dots, i_l)} - \theta}{c_{(i_1, \dots, i_l)} - b_{(i_1, \dots, i_l)}} \right)_h \delta_{i_h+1, j_h} + \left( \frac{\theta - b_{(i_1, \dots, i_l)}}{c_{(i_1, \dots, i_l)} - b_{(i_1, \dots, i_l)}} \right)_h \delta_{i_h, j_h} \right)$$

$$W(\theta) = \sum_{\{j_k = i_k \dots i_k + 1\}_{k=1 \dots l}} W_{(j_1, \dots, j_l)} \dots \\ \prod_{h=1 \dots l} \left( \left( \frac{c_{(i_1, \dots, i_l)} - \theta}{c_{(i_1, \dots, i_l)} - b_{(i_1, \dots, i_l)}} \right)_h \delta_{i_h+1, j_h} + \left( \frac{\theta - b_{(i_1, \dots, i_l)}}{c_{(i_1, \dots, i_l)} - b_{(i_1, \dots, i_l)}} \right)_h \delta_{i_h, j_h} \right)$$

garantit la  $\mathcal{D}$ -stabilité sur  $\Gamma$ .

REMARQUE. —  $\delta_{i,j}$  est défini par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La preuve est fournie par l'application du lemme 5.1 précédent.

Une méthode de construction d'un gain d'observation continu garantissant la  $\mathcal{D}$ -stabilité de  $A(\theta) - K_f(\theta)C(\theta)$  peut être également étendue des résultats de Stilwell and Rugh. Pour ce qui est du paramètre de Youla, une interpolation linéaire est alors suffisante pour assurer la stabilité.

## 5.2. Application

- *Problématique.* On cherche à séquencer les lois par rapport à deux paramètres :
- $V_c$  la vitesse conventionnelle qui varie entre 145 kt et 330 kt à nombre de mach fixé ( $m=0.5$ ).
- $\omega_{2NV}$  la fréquence du premier mode souple (mode 2 *nœuds voilure*) qui varie entre 1 Hz et 2 Hz.

REMARQUE. — La paramétrisation en  $\omega_{2NV}$  n'est pas aujourd'hui implémentée sur les avions de la gamme Airbus. Toutefois, afin d'augmenter la réduction des charges de flexion voilure pour gagner sur le poids de la structure, cette éventualité peut être envisagée en se basant sur des méthodes d'estimation temps réel des modes souples (Jeanneau *et al.*, 1998).

– *Identification des problèmes de mise en œuvre.* La première difficulté consiste lors de la mise sous forme estimation commande à assurer la continuité des sous-espaces invariants choisis entre les différents points. Cette problématique peut être résolue en utilisant les techniques de prolongement proposées par (Pellanda *et al.*, 2000).

La deuxième et principale difficulté réside dans la satisfaction de la condition de recouvrement. Il est en effet possible d'imposer à  $K_1(s)$  (synthétisé sur le point  $\theta_1$ ) d'assurer la stabilité sur le point  $\theta_2$ . Considérons à présent ce même correcteur mis sous forme estimation/commande. Lorsqu'on fait varier  $\omega_{2NV}$  dans le système uniquement, on retrouve les mêmes propriétés de stabilité. Ceci confirme alors l'équivalence des représentations (Cf. (Alazard *et al.*, 1999)). En revanche lorsqu'on fait varier  $\omega_{2NV}$  dans le système et dans l'observateur (la représentation  $(A, B, C, D)$  du système et de l'observateur doit être identique pour vérifier [17] et étudier la condition de recouvrement sur chaque sous-partie), la stabilité n'est plus garantie car le problème traité n'est plus équivalent.

– *Démarche de résolution.* Afin de résoudre ces différents problèmes nous avons cherché d’une part, à réduire la taille des états considérés, mais également à augmenter la cohérence entre les différents correcteurs synthétisés de manière indépendante. Pour cela nous avons tout d’abord imposé lors de la phase de réduction une structure commune de correcteur (Cf. tableau 6), puis nous avons construit la forme estimation/commande en utilisant une modélisation réduite du système (modes rigides et premiers modes souples) et cherché à reconstituer *via* l’observateur les modes physiques de l’avion.

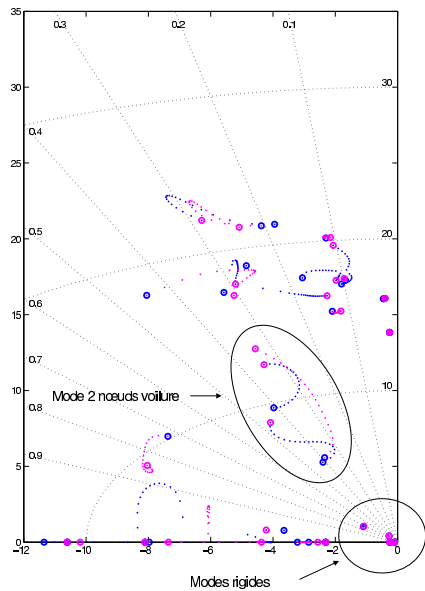
Malgré nos efforts et un maillage resserré de l’espace paramétrique, la condition de recouvrement reste difficile à satisfaire et la maîtrise des performances entre les points du maillage périlleuse. Ainsi il nous est apparu préférable de conserver un modèle d’observateur fixe (*i.e.* les matrices  $(A, B, C, D)$  de l’observateur sont fixes alors que les gains  $(K_c, K_f, Q)$  sont séquencés) afin de retrouver les propriétés de recouvrement initiales. On perd alors toute garantie formelle car [17] n’est plus vérifiée (le principe de séparation n’est plus valide), mais l’implémentation dans les calculateurs embarqués s’en trouve simplifiée car un séquençement de l’observateur n’est désormais plus nécessaire.

– *Résultats.* L’application de cette démarche simplifiée est tout à fait satisfaisante sur la problématique considérée et nous permet de n’utiliser que les coins du domaine comme points de synthèse initiaux. On peut tout d’abord valider la stabilité du système par  $\mu$ -analyse. Les figures 22 et 23 présentent une illustration des variations du paysage modal lorsqu’on parcourt les frontières du domaine paramétrique considéré.

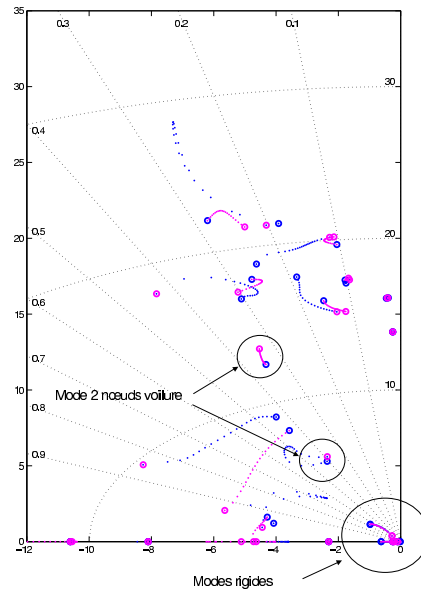
Afin de montrer l’apport du séquençement sur la réduction des charges nous avons étudié le placement boucle fermée du mode 2 *nœuds voilure* (principal contributeur à la norme  $H_2$ ). Pour un point de vitesse médian, nous avons synthétisé trois correcteurs  $K_{230kt,1Hz}$ ,  $K_{230kt,1.5Hz}$  et  $K_{230kt,2Hz}$  respectivement pour  $\omega_{2NV}$  valant 1Hz, 1.5Hz et 2Hz. On remarque sur le tableau 7 que l’application de ces correcteurs sur les cas non nominaux conduit à une forte perte d’amortissement sur le mode. En construisant un correcteur séquencé (avec les coins du domaine uniquement), on parvient à uniformiser l’amortissement, et à retrouver à peu de chose près la performance du correcteur nominal comme le montre la figure 24.

	$K_{230kt,1Hz}$	$K_{230kt,1.5Hz}$	$K_{230kt,2Hz}$	$K(V_c, \omega_{2NV})$
(230kt, 1Hz)	<b>4.9</b> rad.s <sup>-1</sup> , <b>0.42</b>	4.2 rad.s <sup>-1</sup> , 0.11	instable	<b>5.1</b> rad.s <sup>-1</sup> , <b>0.33</b>
(230kt, 1.5Hz)	11.1 rad.s <sup>-1</sup> , 0.25	<b>7.1</b> rad.s <sup>-1</sup> , <b>0.44</b>	7.1 rad.s <sup>-1</sup> , 0.01	<b>8.6</b> rad.s <sup>-1</sup> , <b>0.29</b>
(230kt, 2Hz)	13.7 rad.s <sup>-1</sup> , 0.06	14.7 rad.s <sup>-1</sup> , 0.19	<b>10.5</b> rad.s <sup>-1</sup> , <b>0.30</b>	<b>12.2</b> rad.s <sup>-1</sup> , <b>0.35</b>

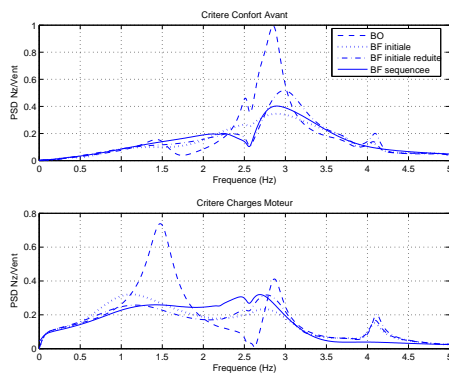
**Tableau 7.** Positionnement (fréquence, amortissement) boucle fermée du mode 2 *nœuds voilure*



**Figure 22.** Balayage sur la fréquence  $\omega_{2NV}$  pour  $V_c = 145kt$  et  $V_c = 330kt$



**Figure 23.** Balayage sur la vitesse  $V_c$  pour  $\omega_{2NV} = 2Hz$  et  $\omega_{2NV} = 1Hz$



**Figure 24.** Confort et charges sur le cas (230kt, 1.5Hz)

## 6. Eléments de retouche des correcteurs

La question de la retouche d'un correcteur séquencé est primordiale dans le choix de la forme d'implantation du correcteur. En effet dans les phases de réglage des

lois où les essais en vol se succèdent avec un cycle très court, il faut être capable de retoucher le comportement de l'avion sur un point de fonctionnement uniquement, tout en limitant le temps de mise en œuvre et de validation nécessaires avant la mise en vol de cette modification.

### 6.1. Démarche

On utilise la formulation estimation/commande du correcteur sur laquelle nous allons modifier le placement effectué par le retour d'état sur les modes "physiques" de la boucle fermée en reprenant l'idée proposée dans (Alazard, 2001) qui consiste à utiliser les gains du retour d'état comme potentiomètres de réglage. On va ici approfondir cette méthode en utilisant le lemme de variation au premier ordre des valeurs propres d'une boucle fermée (6.1).

**Lemme 6.1** (Magni, 2002). *Soit le système en boucle fermée d'équation dynamique  $\dot{x} = \hat{A}x$ . Soit  $\lambda_i$  les valeurs propres de  $\hat{A}$  et  $u_i, v_i$  les vecteurs propres correspondants à gauche et à droite. Considérons une variation paramétrique de la boucle fermée modélisée par  $\Delta\hat{A}$ , en supposant que  $u_i$  et  $v_i$  sont normalisés de telle sorte que  $u_i v_i = 1$ , la variation au premier ordre de la  $i^e$  valeur propre de  $\hat{A}$  est donnée par :*

$$\Delta\lambda_i = u_i \Delta\hat{A} v_i \quad [20]$$

Le lemme fournit  $\Delta\lambda_i = u_i \Delta\hat{A} v_i$ . Dans le cas d'un retour d'état sur un système propre décrit par la représentation d'état  $(A, B, C, 0)$ , on a  $\hat{A} = A - BK$ , c'est-à-dire  $\Delta\hat{A} = -B\Delta K$ .

$\Delta\lambda_i$  étant scalaire on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_i &= \text{trace}(-u_i B \Delta K v_i) \\ &= \text{trace}(-v_i u_i B \Delta K) \\ &= \text{trace}(M_i \Delta K) \text{ avec } M_i = -v_i u_i B \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{l=1}^{l=m} M_{i_{kl}} \Delta K_{lk} \text{ avec } M_i = -v_i u_i B \end{aligned}$$

On note  $\Delta K_i$  la  $i^e$  ligne de  $\Delta K$ .

$$\text{Ainsi } \Delta K = \begin{bmatrix} \Delta K_1 \\ \vdots \\ \Delta K_n \end{bmatrix}, \text{ on définit alors le vecteur colonne } \xi = \begin{bmatrix} \Delta K_1^T \\ \vdots \\ \Delta K_n^T \end{bmatrix}.$$

On peut par conséquent réécrire :

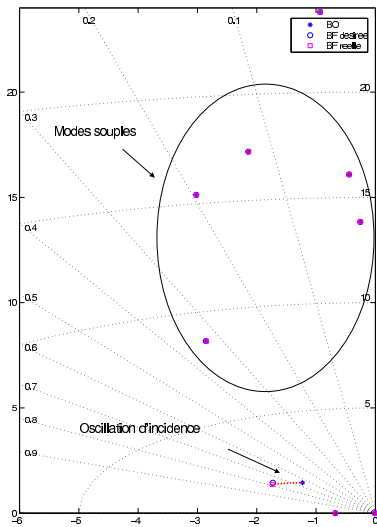
$$\Delta\lambda_i = N_i \xi$$

Le problème de retouche posé est alors le suivant : on choisit de déplacer les valeurs propres dont les indices appartiennent à  $I \subset [1; n]$  et de ne pas modifier les autres. Comme on dispose de  $n \times m$  degrés de liberté pour placer  $n$  valeurs propres, il y a  $n \times (m - 1)$  degrés de liberté surnuméraires à optimiser. On peut ainsi imposer que certains éléments de  $\xi$  (au plus  $n \times (m - 1)$ ) soient nuls et minimiser les degrés restants.

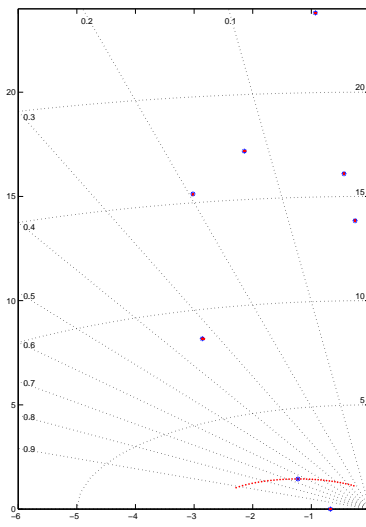
Le problème d'optimisation alors posé se met sous la forme d'un problème de programmation quadratique :

$$\begin{aligned} \min & \quad \frac{1}{2} \xi^T \xi & [21] \\ N_i \xi &= \epsilon_i \quad \forall i \in I \\ N_j \xi &= 0 \quad \forall j \notin I \\ e_k \xi &= 0 \quad \forall k \in K \subset [1; n \times m] \end{aligned}$$

## 6.2. Application



**Figure 25.** Validation de l'approximation au 1<sup>er</sup> ordre



**Figure 26.** Utilisation du potentiel

Nous allons maintenant montrer un exemple de mise en œuvre de cette méthode sur un correcteur, mis sous forme estimation/commande, utilisé précédemment pour le séquencement. Nous allons chercher à augmenter l'amortissement boucle fermée de l'oscillation d'incidence sans imposer d'annulation de gains.

On visualise sur la figure 25 le placement désiré (*i.e.* boucle ouverte modifiée par  $\{\Delta\lambda_i\}$ ) et le placement effectivement réalisé en boucle fermée par le correcteur retouché (*BF Réelle*). On constate que la réalité est proche de la demande et que les autres modes (autres que l'oscillation d'incidence) ne sont pas modifiés. On utilise la combinaison de gain  $\Delta K$  comme une direction de déplacement dans l'espace des correcteurs en écrivant  $K = K_0 + k\Delta K$ . On fait ensuite varier le gain scalaire  $k$  et on voit figure 26 qu'on a ainsi dégagé un potentiomètre permettant de modifier le placement de l'oscillation d'incidence sans modifier les autres modes (jusqu'à un certain point).

## 7. Conclusion

Nous avons proposé une méthodologie relativement complète, permettant, à partir d'un cahier des charges multiformal, de délivrer un correcteur séquencé d'ordre réduit performant sur l'ensemble du domaine de fonctionnement.

Reprenant les travaux précédents sur la synthèse convexe, nous nous sommes attachés à développer un choix de base qui améliore les propriétés numériques et maximise l'efficacité de l'optimisation pour un nombre réduit de filtres. Cependant le problème résolu sur une base finie reste sous-optimal et des travaux complémentaires (Puyou, 2005) nous ont permis, moyennant quelques hypothèses de restriction de l'espace de recherche, de borner l'erreur d'approximation par rapport au problème sur une base infinie. Une méthode alternative a été également proposée dans (Ferrerres *et al.*, 2005) afin de résoudre le problème sur une base infinie dans le cadre d'un cahier des charges  $H_\infty$ .

Dans la section consacrée au séquençement nous avons apporté des extensions aux garanties de stabilité offertes par les méthodes d'interpolation des correcteurs mis sous forme estimation/commande. Cependant l'application sur notre problématique c'est révélée complexe à moins de réduire les exigences formelles de stabilité. Dans l'optique d'une méthodologie simplifiée, une technique alternative d'autoséquencement a également été testée dans (Puyou, 2005).

Enfin si l'ensemble de la méthodologie a été illustré sur le cas du contrôle longitudinal de l'avion, le cas du contrôle latéral a également été testé (Puyou, 2005, Puyou *et al.*, 2004, Puyou *et al.*, 2005, Ferrerres *et al.*, 2006) et nous a permis d'éprouver la portabilité de la méthodologie.

## 8. Bibliographie

- Akcaay H., Ninness B., « Rational Basis Functions for Robust Identification from Frequency and Time Domain Measurements », *Automatica*, vol. 34, n° 9, p. 1101-1117, 1998.
- Alazard D., « Extracting physical tunign potentiometers from a complex control law : application to flexible aircraft flight control », *Proceedings of the AIAA GNC Conference*.

- Alazard D., Apkarian P., « Observer-based Structures of Arbitrary compensators. », *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 9, n° 2, p. 101-118, february, 1999.
- Bender D., Fowell R., « Computing the estimator-controller from a compensator », *Int. J. Control*, vol. 41, n° 6, p. 1565-1575, 1985.
- Boiffier J., *The Dynamics of flight : The equations*, Wiley, 1998.
- Boyd S., Barrat C., *Linear Control Design, Limits of performance*, Prentice Hall, 1991.
- Chiappa C., Magni J., Le Gorrec Y., « Méthodologie de synthèse de commandes de vol d'un avion souple - partie 2 : structuration de correcteur », *APII-JESA*, vol. Commandes Robustes, p. 191-208, 2001.
- Chilali M., Gahinet P., «  $H_\infty$  design with pole placement constraints : an LMI approach », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 3, n° 41, p. 358-367, 1996.
- Dardenne I., Développement de méthodologies pour la synthèse de lois de commande d'un avion de transport souple, PhD thesis, ENSAE, 1998.
- Doyle J., Matrix interpolation theory and optimal control, PhD thesis, Univ. Calif. Bekerley, 1984.
- Ferreres G., « A Convex Control Design (CCD) Toolbox with frequency-domain specifications », <http://www.cert.fr/dcsd/idco/perso/Ferreres/index.html>.
- Ferreres G., Dardenne I., « LP synthesis of a lateral flight control system for a transport aircraft », *Proc. of the AIAA GNC Conference*, vol. 1, p. 155-164, 1997.
- Ferreres G., Puyou G., « Feasibility of  $H_\infty$  design specifications : an interpolation method », *Int. J. Control*, vol. 78, n° 12, p. 927-936, August, 2005.
- Ferreres G., Puyou G., « Flight control law design of flexible aircraft : limits of performances », *Accepted by the Journal of Guidance, Control, and Dynamics*.
- Jeanneau M., Mouyon P., Pendaries C., « SINTRACK Analysis. Application to detection and estimation of flutter for flexible aircraft », *EUSIPCO98*.
- Kao C., Megretski A., Jonsson U., « An algorithm for solving optimization problems involving special frequency dependent LMIs », *Proceedings of the American Control Conference*.
- Kelley J., « The cutting-plane method for solving convex programs », *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, vol. 8, n° 4, p. 703-712, 1960.
- Kubica F., Livet T., « Flight control law synthesis for a flexible aircraft », *Proceedings of the AIAA GNC Conference*.
- Magni J., *Robust Modal Control with a Toolbox for use with Matlab*, Kluwer Academic/Plenum publishers, 2002.
- Magni J., Le Gorrec Y., Chiappa C., « A multimodel-based approach to robust and self-scheduled control design », *In Proc. 37th IEEE Conf. Decision Contr., Tampa, Florida*.
- McFarlane D., Glover K., « Robust Controller Design using Normalised Coprime Factor Plant Descriptions », *Lecture Notes in Control and Information Sciences*.
- Pellanda P., Apkarian P., Alazard D., « A smooth gain-scheduling interpolation method of observer-based structures for  $H_\infty$  and  $\mu$ -controllers », *Proceedings of the IEEE CDC*.
- Pernebo L., « An algebraic theory for the design of controller for linear multivariable systems », *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Puyou G., Conception multiobjectifs de lois de pilotage pour un avion de transport civil, PhD thesis, ENSAE, 2005.



Puyou G., Ferreres G., « Faisabilité d'un cahier des charges multiobjectifs », *Actes des JD-MACS*.

Puyou G., Ferreres G., Chiappa C., Menard P., « A multiobjective method for flight control law design », *Proceedings of the AIAA GNC Conference*.

Stilwell D., Rugh W., « Interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, n° 6, p. 1225-1229, 1999.