

## FLAMBEMENT DE STRUCTURES COMPOSITES STABILISEES PAR UNE MOUSSE

### BUCKLING OF FOAM STABILIZED COMPOSITE STRUCTURES

S. Rivallant\*, J.F. Ferrero\*\* et J.J. Barrau\*\*

\* IGM - ENSAE - LMS  
10 av. E.Belin 31055 Toulouse Cedex  
e-mail : rivallan@supaero.fr

\*\* IGM - LGMT - UPS  
118 Rte de Narbonne, Bât 3R1 31062 Toulouse Cedex  
e-mail : ferrero@supaero.fr / barrau@cict.fr

#### RESUME

Cette étude a pour but d'améliorer la compréhension du phénomène de flambement local de peaux stabilisées par mousse, ainsi que la prédiction des forces et modes de flambage.

Une campagne d'essais a été menée sur des éprouvettes de diverses géométries, en compression pure. Une analyse par éléments finis menée parallèlement permet, par une modélisation fine, de retrouver les valeurs expérimentales avec une bonne précision.

Une modélisation analytique du wrinkling symétrique est également proposée. A partir d'hypothèses originales sur les déplacements au sein de la mousse, et d'une méthode de calcul fondée sur la minimisation des énergies, elle permet de prédire les forces critiques mieux que les modèles classiques, tout en distinguant l'influence de chaque constituant de la structure. Cette modélisation est également validée par une étude éléments finis, et donne des résultats plus précis que les modèles classiques.

#### ABSTRACT

The purpose of this study is to improve the comprehension of the local buckling phenomenon on foam stabilised composites structures, as well as the prediction of buckling critical loads and modes.

Compression tests were carried out on various sandwich structures, and a finite elements analysis was carried out in parallel : a fine modelling allows to find results close to experimental ones.

An analytical modelling of the symmetrical wrinkling is also proposed. From original assumptions on displacements within foam, and from a method of calculation based on energies minimisation, it is possible to predict critical loads better than traditional models do, and to distinguish the influence of each structure component. This modelling is also validated by a finite elements study, and gives results more precise than the existing models.

FLAMBEMENT LOCAL, WRINKLING, COMPOSITE, MOUSSE, ÉLÉMENTS FINIS, MODÉLISATION NUMÉRIQUE, MODÈLE ANALYTIQUE.

LOCAL BUCKLING, WRINKLING, COMPOSITE, FOAM, FINITE ELEMENTS, NUMERICAL MODELLING, ANALYTICAL MODEL.

## INTRODUCTION

Dans le domaine des constructions aéronautiques, l'emploi de structures sandwichs composites est très répandu, car il permet des gains de masse importants. L'utilisation de mousse plutôt que de Nida pour stabiliser les peaux de ces structures présente un avantage du point de vue économique, mais les caractéristiques mécaniques faibles de la mousse posent le problème du flambement local. Dès le dimensionnement, il est important de savoir estimer la tenue en compression de ces structures, sous sollicitation statique ou dynamique (crash), et donc d'évaluer les efforts critiques de flambement. Si de nombreuses études théoriques ont été réalisées pour des structures planes, il n'existe que peu de résultats expérimentaux et donc très peu de corrélations.

En premier lieu, une étude analytique du flambement local de peaux reposant sur un milieu élastique est effectuée. L'utilisation de nouvelles fonctions de forme au sein de milieu élastique permet de mieux appréhender sa déformation, d'analyser et mettre en évidence l'influence des divers composants de la structure, et d'améliorer la compréhension physique du phénomène.

Dans un second temps, des essais sont réalisés sur des structures de type poutre sandwich, avec mousse, et peaux en tissus de verre. Les résultats sont comparés au modèle analytique et à un calcul par éléments finis, qui montrent la nécessité de prendre en compte l'épaisseur du film de colle pour corrélérer les essais.

## MODELISATIONS EXISTANTES

Par raison de symétrie, l'étude du flambement local symétrique de structures de type sandwich revient à envisager l'instabilité d'une peau reposant sur une fondation élastique (figure 1). Les notations utilisées sont usuelles. Les indices m et p renvoient respectivement à l'âme (en mousse) et à la peau. La profondeur de la peau est b.

Une modélisation simple, dite de type Winkler revient à considérer le milieu élastique comme une succession de ressorts. Soit  $K_y$  la raideur linéique de la fondation, l'effort critique s'exprime alors par :

$$F_c = 2 \cdot \sqrt{K_y \cdot E_p \cdot I_z} \quad \text{avec} \quad K_y = \frac{b \cdot E_m}{h} \quad (\text{Timoshenko, 1966 ; Allen, 1969})$$

Les ressorts ne permettent de représenter qu'une évolution linéaire des déplacements dans l'âme, et le cisaillement transverse n'est pas pris en compte. Ce modèle n'est donc pas adapté aux cas de flambement à faible longueur d'onde. Il est possible d'améliorer la modélisation en ajoutant des ressorts  $K_{xy}$  pour prendre en compte le cisaillement, mais l'identification des raideurs devient alors difficile (Aiello et Ombres, 1997).

Hoff et Mautner (Hoff et Mautner, 1945), puis Allen (Allen, 1969), ont travaillé sur des modélisations avec représentation continue de la mousse. Ils utilisent des fonctions d'Airy pour représenter les contraintes. Ils aboutissent aux expressions classiques, encore largement utilisées aujourd'hui :

$$\sigma_{critique} = Q \cdot \sqrt[3]{E_p \cdot E_m \cdot G_m} + Q_1 \cdot G_m$$

Allen détermine Q et  $Q_1$  en fonction du coefficient de Poisson de l'âme : Q et  $Q_1$  varient respectivement entre 0.780 et 0.794, et entre 0.200 et 0.333.

Récemment, Léotoing (Léotoing, 2001) a proposé une méthode originale, formulée en déplacements, dans le cadre d'une étude sur le couplage flambement global-local. Il détermine les équations d'équilibres du problème à partir de l'écriture de l'énergie

potentielle du système, et du principe des travaux virtuels. Par linéarisation des équations d'équilibre, il aboutit à un problème aux valeurs propres. La force critique de flambement s'écrit alors :

$$F_{critique} = 2 \cdot \sqrt{\frac{E_m \cdot b \cdot E_p \cdot I_z}{h} + \frac{G_m \cdot b \cdot h}{3}}$$

Citons également des modèles plus spécifiques, prenant en compte l'orthotropie de l'âme (Starlinger, 1990); et les travaux de Niu et Talreja (Niu et Talreja, 1999), qui utilisent des fonctions d'Airy dans l'âme, sous forme de séries de Fourier.

L'ensemble de ces modèles trouve une limitation dans la représentativité des déplacements au sein de l'âme. De plus, ces modèles ne permettent pas de visualiser simplement l'influence des différents constituants de la structure dans le phénomène du flambement.

### MODELES ANALYTIQUES

La structure étudiée est une peau sur fondation élastique (figure 1).

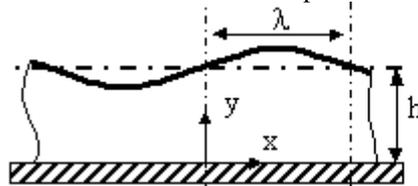


Figure 1 : Modèle de flambement  
*Buckling model*

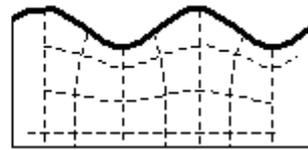


Figure 2 : Déplacements dans l'âme  
*Displacements in the core*

### Hypothèses

La structure est modélisée en 2D. Un effort F de compression est appliqué sur la poutre représentant la peau. La structure travaille en compression pure, jusqu'au flambement. Soient  $q_i$  les paramètres du système :  $q_i = q_i^0 + \delta q_i$ , où  $q_i^0$  sont les paramètres à l'équilibre, et  $\delta q_i$  les perturbations autour de l'équilibre.

Après flambement, la déformée de la peau est supposée sinusoïdale (figure 2). Soit  $\lambda$  la longueur d'onde de la déformée, le déplacement transverse de la peau s'écrit :

$$\delta v_p = \delta A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{\lambda}\right)$$

Les déformations au sein de l'âme sont complexes. Pour mettre en évidence les champs de déplacement dans la mousse, un calcul éléments finis est réalisé, qui permet d'observer l'allure des déplacements (figure 2), ainsi que la concentration des déformations dans une région limitée, sous la peau, pour des longueurs d'onde faibles devant l'épaisseur de l'âme.

Proposer des déplacements transverses linéaires dans l'âme ne permet pas de représenter la réalité, sauf en ajustant les raideurs en fonction de la longueur d'onde. Il est donc nécessaire de les représenter par des fonctions permettant une décroissance rapide en y. Dans cette étude, nous avons choisi de considérer soit des polynômes de degré supérieur à 3, soit des polynômes par morceaux.

D'autre part, il est important de ne pas imposer, suivant x, un champ de déplacement nul, pour ne pas rigidifier l'âme en cisaillement.

Des considérations de symétrie sur la structure, supposée de longueur infinie, permettent de démontrer la périodicité des déplacements  $\delta v_m$  et  $\delta u_m$  suivant  $x$ . D'autre part,  $\delta v_m$  et  $\delta u_m$  augmentent avec  $\delta A$ , ce qui permet d'écrire l'hypothèse suivante :

$$\delta v_m = \delta A \cdot P(y) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{\lambda}\right), \quad \delta u_m = \delta A \cdot Q(y) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{\lambda}\right)$$

$$\text{avec } P(y) = \sum a_i \cdot x^i \quad \text{et} \quad Q(y) = \sum b_i \cdot x^i$$

et  $P(0) = 0$ ,  $P(h) = 1$ , pour être cinématiquement admissible;  $Q(h) = 0$ .

(P et Q peuvent éventuellement être des polynômes par morceaux).

La loi de comportement utilisée est la loi suivante :

$$\sigma_x = E_m \cdot \varepsilon_x, \quad \sigma_y = E_m \cdot \varepsilon_y, \quad \sigma_{xy} = 2 \cdot G_m \cdot \varepsilon_{xy}$$

### Approche énergétique

L'énergie potentielle totale de la structure est la somme de l'énergie potentielle de déformation et de l'énergie potentielle des efforts extérieurs. Le calcul est effectué pour une longueur d'onde  $\lambda$  :

$$E_T = U_{def} + V$$

Une configuration d'équilibre stable correspond à un minimum de l'énergie potentielle totale :  $\delta E_T = 0$ ,  $\delta^2 E_T > 0$ . Le flambement apparaît lorsque l'équilibre devient instable :  $\delta^2 E_T = 0$ .

Les énergies sont exprimées ci-après (Barrau, 1987) :

Energie élastique dans la peau, en négligeant le cisaillement transverse :

$$W_{peau} = W_{normal} + W_{flexion} = \int_0^\lambda \frac{1}{2} \cdot A_{11} \cdot (e_1^\circ)^2 \cdot dx + \int_0^\lambda \frac{1}{2} \cdot C_{11} \cdot (k_1^\circ)^2 \cdot dx$$

$$\text{avec: } e_1^\circ = \varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dv}{dx}\right)^2, \quad k_1^\circ = -\frac{d^2 v}{dx^2}, \quad u = u^\circ + \delta u, \quad v = v^\circ + \delta v$$

Energie élastique dans la mousse :

$$W_{mousse} = \iint_{mousse} \frac{1}{2} \cdot A_{mij} \cdot e_i \cdot e_j \cdot dx \cdot dy, \quad \text{où} \quad \begin{cases} e_1 = \varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2, & e_2 = \varepsilon_y = \frac{dv}{dy} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \\ e_3 = 2 \cdot \varepsilon_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}, & u = u^\circ + \delta u, \quad v = v^\circ + \delta v \end{cases}$$

Travail des forces extérieures (F, effort ponctuel) :

$$V = \int_{peau} F \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx$$

L'énergie potentielle totale est développée en série de Taylor, jusqu'au second ordre. La nullité de  $\delta^2 E_T$  conduit à l'équation suivante, exprimée en fonction des paramètres du problème.

$$0 = \int_0^\lambda \frac{E \cdot S}{2} \cdot \left( \frac{d\delta u_p}{dx} \right)^2 \cdot dx + \int_0^\lambda \frac{E \cdot I_z}{2} \cdot \left( \frac{d^2 \delta v_p}{dx^2} \right)^2 \cdot dx - \int_0^\lambda F \cdot \left( \frac{d\delta u_p}{dx} \right) \cdot dx$$

$$+ \iint_{mousse} \left\{ \frac{E_m}{2} \cdot \left[ \left( \frac{d\delta u_m}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\delta v_m}{dy} \right)^2 \right] + G_m \cdot \left( \frac{d\delta u_m}{dy} + \frac{d\delta v_m}{dx} \right)^2 \right\} \cdot dx \cdot dy$$

L'effort critique vaut alors, pour une longueur d'onde donnée :

$$F = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{\lambda^2} + \frac{4 \cdot \lambda}{\pi^2} \cdot \iint_{mousse} \left\{ \frac{E_m}{2} \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi \cdot x}{\lambda} \right) \left[ \left( \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 Q(y)^2 + \left( \frac{dP(y)}{dy} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + G_m \cdot \cos^2 \left( \frac{\pi \cdot x}{\lambda} \right) \left[ \left( \frac{dQ(y)}{dy} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 P(y)^2 \right] \right\} \cdot dx \cdot dy$$

La force critique et le mode sont obtenus par minimisation de la force en fonction de  $\lambda$ .

### Calcul des fonctions de forme

Le calcul précédent est effectué pour une longueur d'onde et des fonctions de forme données. L'effort critique obtenu doit être minimal, donc il est possible de déterminer les coefficients des polynômes des fonctions de forme par minimisation de l'énergie dans l'âme, à longueur d'onde  $\lambda$  donnée.

Pour le calcul, une écriture matricielle de l'énergie, quadratique en fonction du vecteur des coefficients inconnus est utilisée. Elle permet d'obtenir une expression simple de l'énergie, et du vecteur qui atteint le minimum (Kelley, 1999) :

$$W_{mousse} = {}^t [Coef] \cdot [Quad] \cdot [Coef] + [Lin] \cdot [Coef] + Cste$$

$$[Coef]_{\min i} = -\frac{1}{2} \cdot [Quad]^{-1} \cdot [Lin]$$

Dans tous les cas, il est possible d'exprimer de manière analytique les fonctions de forme choisies.

Il est à noter qu'aucune restriction n'est donnée sur les matériaux : l'âme, en mousse, peut être isotrope ou orthotrope; et la peau peut être en composite, l'expression de l'énergie de flexion étant exprimées en fonction de la rigidité de flexion  $I_z$ .

### Comparaison avec un calcul éléments finis

Pour valider les hypothèses retenues, un calcul éléments finis a été réalisé sur le logiciel Nastran, en flambement linéaire, avec un modèle 2D. Les peaux sont modélisées par des poutres, l'âme par des éléments de membrane. Les conditions limites étant peu influentes sur l'aspect local du wrinkling, l'effort est introduit par un corps rigide, en extrémité du modèle. Le maillage doit être suffisamment fin pour qu'une longueur d'onde contienne une dizaine de maille; la longueur du modèle suffisamment grande pour s'affranchir des conditions aux limites (5 longueurs d'onde).

Le tableau 1 donne l'effort critique pour différents modèles, avec différentes configurations de la structure. La configuration de référence est la suivante :  $E_m=50$  MPa,  $E_p=50000$  MPa,  $h=20$ mm,  $ep=1$ mm,  $\nu_m=0.3$ ,  $b=30$ mm. Les autres configurations présentent une variation d'un des paramètres autour de la configuration de référence. Les résultats sont donnés pour différentes fonctions de forme dans l'âme : polynôme linéaire,

cubique, cubique par morceaux, et cubique par morceaux avec prise en compte du déplacement longitudinal par un polynôme de degré 3.

Modèle	Ref.	$E_m=$ 10	$E_m=$ 200	$E_p=$ 10000	$E_p=$ 100000	$ep=$ 0.25	$ep=$ 5	$h=$ 50
Linéaire	13%	7%	21%	23%	10%	103%	3%	50%
Cubique	5%	5%	0%	-2%	5%	3%	3%	1%
2 fonctions cubiques	5%	5%	0%	-2%	5%	-1%	3%	0%
2 fonctions cubiques + $\delta u_m$	1%	1%	-3%	-4%	2%	-1%	0%	-1%
Classique	-2%	-10%	-3%	-5%	-4%	-5%	-38%	-3%
Leotoing	13%	7%	21%	23%	10%	103%	3%	50%

Tableau 1 : Effort critique : erreur entre le modèle analytique et EF  
Critical load : difference between analytical model and FE

Dans le cas de fonctions de forme simples, il est possible d'exprimer la force critique de manière analytique. C'est le cas du modèle linéaire, qui permet de retrouver les expressions de l'effort et de la longueur d'onde données par le modèle de flambage symétrique développé par Léotoing. Dans les autres cas, il faut résoudre numériquement le problème de minimisation.

D'après le tableau 1, il apparaît que le modèle linéaire peut amener à des erreurs de plus de 100% sur les résultats. L'hypothèse de linéarité n'est valable que dans une plage dans laquelle les longueurs d'onde sont grandes devant l'épaisseur de l'âme ( $\lambda > 2.h$ ).

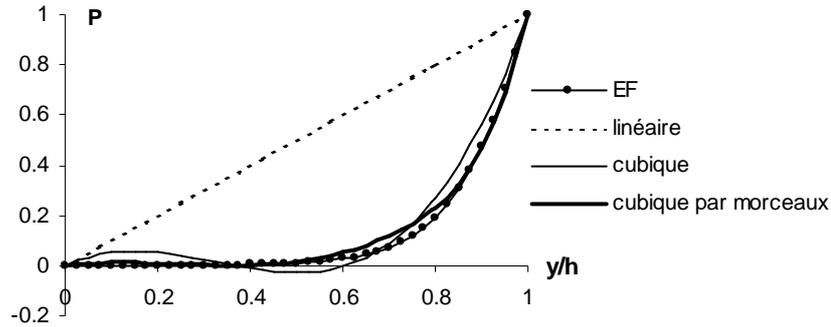


Figure 3 : fonction de forme du déplacement  $\delta v_m$  dans la mousse ( $\lambda=5\text{mm}$ ,  $h=20\text{mm}$ )  
 $\delta v_m$  displacement function in the foam ( $\lambda=5\text{mm}$ ,  $h=20\text{mm}$ )

Le modèle cubique, bien que ne représentant pas parfaitement le champ des déplacements (figure 3), permet d'obtenir une bonne précision (5% dans le domaine étudié). Il est simple à utiliser, et peut être implémenté aisément dans un logiciel comme Excel. L'effort critique s'obtient par minimisation de l'effort :

$$F = \frac{\pi^2 EI_z}{\lambda^2} + \frac{b \pi^6 G_m^3 h^6 + 135\pi^4 G_m^2 h^4 \lambda^2 E_m + 2880\pi^2 G_m h^2 \lambda^4 E_m^2 + 6300\lambda^6 E_m^3}{h\pi(420\lambda^4 E_m^2 + 52\lambda^2 E_m \pi^2 G_m h^2 + \pi^4 G_m^2 h^4)}$$

Pour des valeurs très petites de  $\lambda/h$ , il est nécessaire d'envisager une fonction de forme plus complexe, par exemple, une fonction par morceaux, formée de deux fonctions de degré 3. Le calcul des polynômes et de l'effort critique s'en trouve complexifié, mais les déplacements transverses sont mieux estimés (Figure 3).

La prise en compte du déplacement longitudinal dans l'âme ( $\delta_{u_m}$ ) permet de retrouver l'allure des déplacements  $\delta_{u_m}$  donnés par les éléments finis, et donne globalement une meilleure prévision de la force critique.

### Influence des constituants de la structure

A partir de l'approche énergétique, il est possible de déterminer précisément l'influence des constituants de la structure en analysant, en fonction de  $\lambda$ , l'énergie emmagasinée par les différents constituants.

La figure 4a montre la répartition des énergies dans l'âme : l'énergie due aux contraintes normales devient grande face à l'énergie de cisaillement pour des grandes longueurs d'ondes. Pour  $\lambda$  plus faible, il est nécessaire de considérer le cisaillement dans l'âme.

La figure 4b montre la répartition des énergies entre la peau et l'âme, ainsi que leur évolution lorsque  $E_p$  augmente.

De manière générale, il apparaît que l'énergie des peaux diminue lorsque  $\lambda$  augmente.

Pour l'âme, c'est l'inverse : si  $\lambda$  est petit, seule une couche d'épaisseur faible sous la peau est concernée par la perturbation. Lorsque  $\lambda$  augmente, la perturbation s'étend sur une zone plus importante, et l'énergie augmente.

Une évolution de  $E_p$  provoque une évolution dans le même sens de  $\lambda$ , et de l'effort critique. L'évolution de  $\lambda$  est significative, alors que celle de l'effort peut être faible.

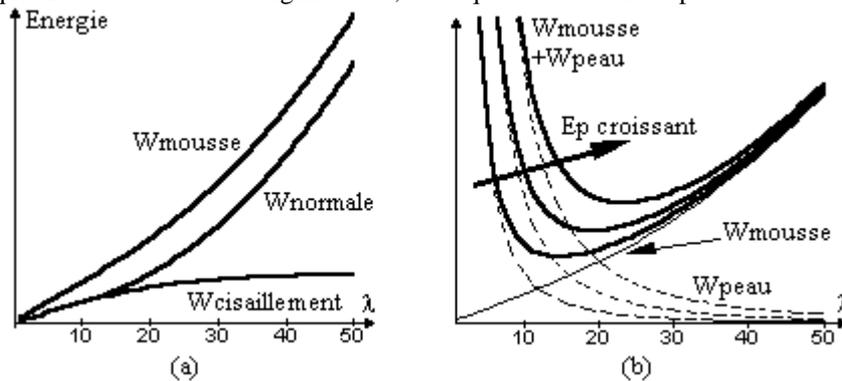


Figure 4 : (a) Répartition de l'énergie élastique dans l'âme

(b) Evolution des énergies dans la structure avec  $E_p$

(a) Elastic energy repartition in the core

(b) Energy evolution with  $E_p$

Si l'épaisseur ( $h$ ) de l'âme est très importante, il est possible de montrer, avec le modèle à deux polynômes de degré 3, que l'énergie dans l'âme est linéaire en  $\lambda$ , d'où une contrainte dans la peau indépendante de son épaisseur (pour peaux métalliques, ou homogènes dans l'épaisseur). Contrairement aux résultats du modèle classique, pour des épaisseurs de l'âme plus faibles, la contrainte peut varier fortement avec l'épaisseur de la peau (figure 5).

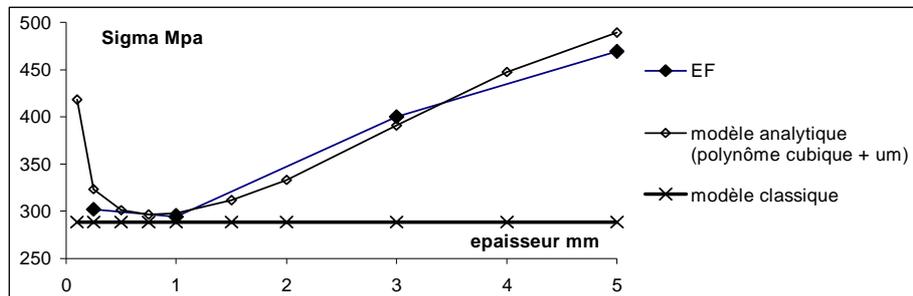


Figure 5 : Influence de l'épaisseur des peaux sur la contrainte critique  
*Skin thickness influence on critical stress*

### ETUDE EXPERIMENTALE

Des essais ont été réalisés sur des structures simples, pour corréler expériences, modèle analytique et méthode numérique (éléments finis).

La structure choisie est représentée sur la figure 6. Il s'agit d'une poutre sandwich épaisse et courte, formée d'une âme en mousse polyuréthane, recouverte de peaux en fibres de verre et résine époxy. L'introduction des efforts de compression se fait par des renforts, en acier.

#### Caractérisation des matériaux

La mousse est légèrement anisotrope :  $E_{mx}=10$  Mpa,  $E_{my}=12$  Mpa,  $G_m=6$  Mpa. Les caractéristiques du tissu de verre-époxy sont :  $E_p=20000$  Mpa,  $G_p=3000$  Mpa, pour une épaisseur théorique de 0.16 mm. Le tissu de verre est imprégné manuellement, avec de la résine époxy.

#### Essais

Les essais ont été réalisés sur une machine de traction-compression, à partir d'un dispositif adapté : un ensemble de cylindres coulissant dans un tube permet d'assurer la direction de l'effort appliqué.

La figure 6 montrent les éprouvettes testées, ainsi que le montage d'essais.

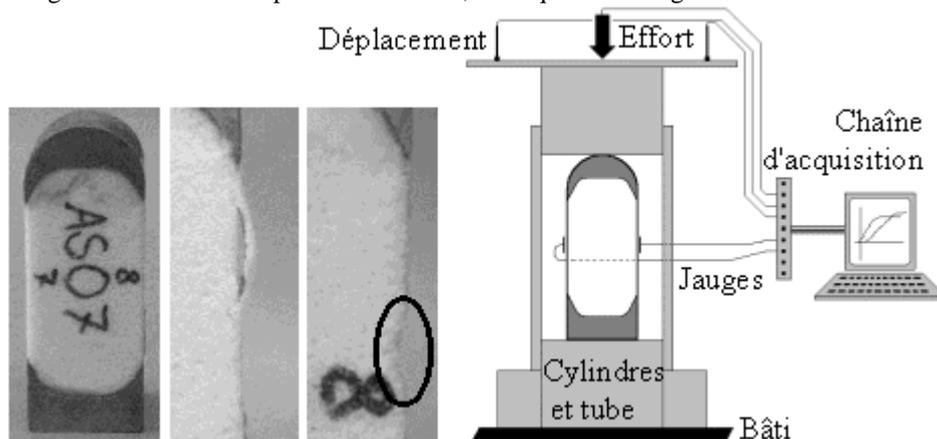


Figure 6 : Eprouvettes et montage d'essais  
*Test specimen and testing setup*

Les essais se font à déplacement imposé (0.5mm/min). Les acquisitions permettent d'obtenir l'effort appliqué, le déplacement au niveau du point d'application de l'effort, et les déformations au centre de chacune des peaux.

Des éprouvettes dont la peau est formée d'un ou deux plis de verre ont été testées.

L'observation des éprouvettes après rupture (figure 6) semble indiquer que la rupture apparaît effectivement par flambage local. Selon les essais, on observe des décollements localisés de la peau, ou sur toute la longueur. Le flambement peut également provoquer un enfoncement de la peau dans la mousse (figure 6).

La dispersion des valeurs d'effort à rupture est d'environ 20%, ce qui est raisonnable, étant donnée la méthode de fabrication des éprouvettes.

## COMPARAISON ESSAIS - ANALYTIQUE

### Comparaison essais/analytique/EF

Le calcul de l'effort critique, par le modèle analytique, en représentant la peau uniquement par le tissu de verre et résine époxy donne des résultats bien plus faibles que les expériences. En effet, lorsque les peaux sont minces, la contribution de la rigidité de l'interface de résine entre la peau et la mousse est non négligeable, puisqu'elle augmente de manière significative la rigidité en flexion.

Des observation au MEB (microscope à balayage électronique) ont permis de révéler l'état de l'interface à prendre en compte (figure 7). Le tissu de verre est imprégné manuellement, ce qui empêche le contrôle de la quantité de résine déposée . De plus, la mousse présente en son volume des cellules et alvéoles, qui se retrouvent en surface. La colle ou la résine n'a donc pas une épaisseur uniforme, mais présente une géographie en picots, dont il est difficile de représenter la rigidité.

Les modélisation numérique et analytique (modèle cubique) sont donc réalisées pour des épaisseurs de peau minimale et maximale, afin d'encadrer la valeur de l'effort de flambement. Le tableau 2 montre quelques uns de ces résultats.

	1 peau		2 peaux	
	F mini	F max	F mini	F max
Essais	1200	1500	2550	3250
Analytique	1200	1900	2400	3000

Tableau 2: efforts de flambement  
*buckling load*

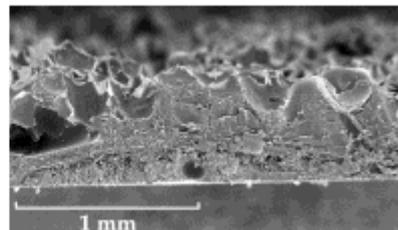


Figure 7 : analyse de la peau  
*skin analysis*

Une modélisation par éléments finis des éprouvettes permet de confirmer que mode de ruine est bien le flambement. Les peaux se décolent par rupture locale de la mousse, en traction-cisaillement, sous une concentration de contrainte due au flambement. D'autre part, les résultats éléments finis sont légèrement supérieurs à ceux du modèle analytique, car ce dernier ne prend pas en compte les conditions aux limites. Le modèle analytique est donc conservatif.

### Limitations

Le modèle analytique ne prend en compte que le flambement symétrique. Il est donc nécessaire de vérifier que le mode n'est pas antisymétrique, auquel cas les efforts critiques peuvent être plus faibles.

La rigidité de la peau est un facteur dominant dans le calcul du flambement. Pour des peaux minces, il est donc important d'estimer l'influence de l'interface de colle, et de la prendre en compte si nécessaire.

Enfin, les structures réelles ont une dimension finie et des conditions aux limites que le modèle analytique ne prend pas en compte. Pour estimer cette influence, des calculs éléments finis ont été effectués avec des structures de longueurs différentes. La plus courte flambe pour un effort supérieur de 5 à 10%. Dans tous les cas, la prise en compte des conditions limites rigidifie la structure, donc le modèle analytique reste conservatif.

## CONCLUSION

Le modèle analytique proposé, basé sur une méthode énergétique et des fonctions de forme originales, apporte une meilleure estimation des efforts de flambement, des déformations et des contraintes dans l'âme que les modèles classiques, et permet notamment de montrer la localisation de ces déformations pour des longueurs d'onde faibles ( $\lambda < h$ ). Il est utilisable avec un matériau orthotrope pour l'âme, et une peau en composite. Il permet de visualiser l'influence des différents constituants de la structure, et d'appréhender le phénomène physique de manière simple.

Les calculs éléments finis et les essais valident le modèle, et ont permis de souligner la nécessité de prendre en compte l'interface de colle ou de résine entre la peau et la mousse pour pouvoir faire une estimation valide des efforts de flambement, dans le cas de peau minces.

Le modèle présente bien sûr des limitations. Les conditions aux limites n'étant pas prises en compte dans le modèle analytique, il n'est valable que pour des configurations où la longueur de la structure est grande devant la longueur d'onde de flambement ( $L > 5\lambda$ ). Il est cependant intéressant de noter que dans le cas contraire, les valeurs données par le calcul analytique sont conservatives.

Des essais sont actuellement en cours sur des éprouvettes bombées, c'est à dire dont la peau présente une légère courbure vers l'extérieure, et seront poursuivis par des essais en dynamique, sous impact.

## BIBLIOGRAPHIE

- Aiello M.A. et Ombres L., 1997. "Local buckling loads of sandwich panels made with laminated faces". *Composite Structures*, 38, pp.191-201.
- Allen H.G., 1969. *Analysis and design of structural sandwich panels*, Robert Maxwell, M.C., M.P.
- Barrau J.J., Laroze S., 1987. *Mécanique des structures, tome 4 : Calcul des structures en matériaux composites*. Cours de l'ENSAE.
- Hoff N.J. et Mautner S.E., 1945. "Buckling of sandwich type panels", *Journal of the Aeronautical Sciences*, 12(3), pp.285-297.
- Kelley C.T., 1999. *Iterative methods for optimization*, Frontiers in Applied Mathematics.
- Léotoing L., 2001. *Modélisation du flambage global, local et interactif dans les structures sandwich en compression*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne et Université Jean Monnet.

- Niu K. et Talreja R., 1999. "Modelling of wrinkling in sandwich panels under compression", *Journal of Engineering Mechanics*, 125(8) :875-883.
- Starlinger A., 1990. *Development of efficient finite shell elements for the analysis of sandwich structures under large deformations and global as well as local instabilities*, Thèse de Doctorat, Vienna University of Technology.
- Timoshenko S.P., 1966. *Théorie de la stabilité élastique*, Dunod.
- Thomson J.M.T. et Hunt G.W., 1973. *A general theory of elastic stability*, John Wiley & Sons.