

---

# Ordonnancement d'atelier et ressources humaines : affectation des opérateurs dans un flowshop

**Alain Hait\*** — **Pierre Baptiste\*\***

*\* Institut National Polytechnique de Toulouse  
LGC-ENSIACET département de génie industriel  
118 route de Narbonne  
F-31077 Toulouse cedex 4*

*\*\* École Polytechnique de Montréal  
C.P. 5079 Succ. Centre-ville, Montréal (Québec)  
Canada H3C 3A7  
alain.hait@ensiacet.fr, pierre.baptiste@polymtl.ca*

---

*RÉSUMÉ. Cet article aborde le problème de l'ordonnancement d'un atelier de type flowshop, lorsque les durées opératoires varient suivant quel opérateur travaille sur quelle machine. La prise en compte de cette notion de performance ajoute l'affectation des opérateurs au problème d'ordonnancement, qui ne se résume plus à une recherche de séquence de passage des travaux sur les machines. Une heuristique basée sur une règle d'affectation « intuitive » généralement utilisée est évaluée, puis une borne inférieure du problème complet est présentée. Cette borne permet de faire apparaître certaines caractéristiques des règles d'affectation.*

*ABSTRACT. This paper deals with flow shop scheduling, when processing times vary according to which operator works on which machine. Scheduling is then not restricted to sequencing, but must also determine the assignment of the operators to the machines. A heuristic based on an "intuitive" assignment rule generally used in this case is assessed. Then a lower bound of the problem is presented. This bound reveals some characteristics of assignment rules.*

*MOTS-CLÉS : ordonnancement, affectation, ressources humaines.*

*KEYWORDS: scheduling, operator assignment, human resources.*

---

## 1. Introduction

A court terme, la gestion d'un système de production consiste à coordonner, le mieux possible par rapport aux objectifs choisis, l'action des différentes ressources et le flux de produits pour satisfaire la demande. C'est le domaine de l'ordonnancement. Selon Pinedo (Pinedo, 2002, chap.1), « Ordonnancer consiste à affecter dans le temps des ressources restreintes à des travaux. C'est un processus de prise de décision ayant pour but d'optimiser un ou plusieurs critères. »

Inspirés de la production manufacturière à une époque où l'objectif principal était la productivité, les travaux de recherche en ordonnancement d'atelier se sont concentrés sur les contraintes liées aux machines : disponibilité, séquence de passage des travaux. Les critères les plus communs sont liés aux délais : durée totale de réalisation, retards, etc. Par ailleurs, on considère généralement que les durées opératoires sont des constantes ou des variables aléatoires suivant une distribution donnée (voir (Pinedo, 2002)).

La complexité des problèmes d'ordonnancement a contribué au maintien de ces hypothèses simplificatrices, même s'il avait été souligné très tôt leur éloignement des situations réelles (Conway *et al.*, 1967, Introduction). Cependant, dans un contexte de variabilité de la demande, l'adaptation des entreprises passe par la flexibilité des systèmes de production. La saturation des machines n'étant plus une fin, il devient nécessaire de s'intéresser aux autres ressources qui participent à la production (Baptiste *et al.*, 2005). La prise en compte de ces ressources en ordonnancement a plusieurs effets :

- De nouvelles contraintes, liées à ces ressources, apparaissent : disponibilité, tâches réalisables. . .

- Les durées opératoires varient en fonction de ces ressources : caractéristiques, mode opératoire, disponibilité (Tchommo *et al.*, 2003).

C'est par exemple le cas pour les chariots de manutention automatiquement guidés dans les systèmes de production (Blazewicz *et al.*, 1991), ou les robots dans les cellules robotisées (Brauner *et al.*, 2001). C'est également le cas pour les ressources humaines.

Les horaires de travail des opérateurs sont régis par des contraintes légales : congés, durées des journées, pauses, etc. Issue du secteur des services (compagnies de transport, supermarchés, centres d'appels), la gestion des horaires consiste à organiser l'emploi du temps des opérateurs pour satisfaire une charge de travail souvent variable. Les problèmes d'horaires peuvent être décomposés en trois catégories : à court terme, l'ordonnancement des quarts de travail<sup>1</sup> (*shift scheduling*) (Dantzig, 1954, Thomson, 1996, Rekik *et al.*, 2002) qui détermine sur une journée le début des quarts, leurs durées et les positions des pauses ; à moyen terme, la planification des jours de congé

---

1. Journée de travail d'un employé qui est déterminée par une heure de début, une durée et des périodes de repos pour les pauses et les repas. Appelé aussi *service*.

sur un horizon donné (*day-off scheduling*) (Hung, 1994, Grabot *et al.*, 2000), et la planification des cycles de travail (*tour scheduling*) (Bartoldi, 1981, Vairaktarakis *et al.*, 2002) qui intègre les deux catégories précédentes dans un contexte cyclique ou non. L'affectation individuelle du calendrier et du travail à réaliser (*rostering*) (Ernst *et al.*, 2004), se fait en fonction du type de tâche, des compétences de la personne, de son ancienneté, etc. En revanche, les ressources sur lesquelles travaillent les opérateurs ne sont généralement pas considérées à ce niveau.

Nombreux sont les facteurs liés aux ressources humaines qui influent sur les durées opératoires. Avec les machines partiellement automatisées, un opérateur peut être affecté simultanément à plusieurs machines (Croci *et al.*, 2000). La durée sera cependant allongée car l'opérateur n'est pas toujours disponible devant la machine pour réaliser les tâches élémentaires (chargement, déchargement, réglage) qui constituent les opérations. Ceci dépend aussi des choix de priorité dans le traitement des tâches à réaliser (mode opératoire). De plus, deux opérateurs ne réalisent pas la même opération à la même vitesse. Cette notion de *performance* peut être reliée à l'apprentissage (Arditti *et al.*, 2001, Mosheiov, 2001), la fatigue des opérateurs (Dondeti *et al.*, 1998) ou encore la compétence (notion qui elle-même recouvre de nombreux développements). L'affectation individuelle des opérateurs aux machines et aux travaux a donc une influence sur les durées opératoires.

La prise en compte des ressources humaines dans l'ordonnancement doit ainsi se faire au niveau des horaires et au niveau de l'affectation des opérateurs aux postes de travail. L'approche traditionnelle consiste en une séparation en deux phases : l'ordonnancement d'atelier est réalisé d'abord, puis les ressources humaines sont affectées aux machines, modifiant localement si nécessaire le résultat initial. On trouve un exemple de cette démarche dans la gestion des équipages pour le transport aérien (*crew scheduling*) : la résolution du problème commence par la détermination des trajets des avions, puis les équipages sont affectés aux avions afin d'obtenir une alternance légale de vols et de périodes de repos qui débute et termine à la base d'attache de l'équipage (Desaulnier *et al.*, 1997).

L'intégration des ressources humaines et de l'ordonnancement d'atelier n'a pas été souvent étudiée. En 1994, Bourland et Carl (Bourland *et al.*, 1994) ont présenté une étude, basée sur l'exemple d'une unité de moulage par injection dans l'automobile, dans laquelle des opérateurs dirigent simultanément plusieurs machines (*fractional operator problem*). Un modèle de programmation dynamique est proposé pour l'ordonnancement, minimisant les temps de réglage et les coûts de possession, et respectant les contraintes sur la demande (variable) et le nombre d'opérateurs disponibles.

Grabot et Letouzey (Grabot *et al.*, 2000) proposent un système d'aide à la décision qui intègre les contraintes liées aux ressources humaines par une planification sur une période courte (*competence requirement planning*), puis réalise l'ordonnancement. La première étape permet une prise en compte des compétences des opérateurs ainsi que du temps de travail dans un contexte annualisé.

Mercier *et al.* (Mercier *et al.*, 2005) présentent une approche intégrée pour le problème du transport aérien évoqué ci-dessus. Connaissant le type d'avion requis sur chaque trajet, il s'agit de déterminer pour chaque avion une séquence de vols (*aircraft routing*) ainsi que les rotations des équipages (*crew scheduling*). L'affectation individuelle est ensuite réalisée, suivant les disponibilités (*crew rostering*) et les souhaits de chacun (*crew bidding*).

Le problème d'affectation a été étudié dans le cas général de ressources nécessaires à la réalisation d'un travail. La durée dépend de la quantité de ressource affectée. L'affectation peut être statique (déterminée une fois pour toutes) ou dynamique, avec des changements libres, périodiques ou sur événements (fin de tâche par exemple). Chen (Chen, 2004) propose une approche basée sur la génération de colonnes pour résoudre le problème dynamique dans le cas de machines parallèles. Daniels et Mazzola (Daniels *et al.*, 1994) présentent un algorithme optimal et une heuristique pour le cas du *flowshop* avec affectation dynamique. Ce travail est prolongé dans (Daniels *et al.*, 2004) en considérant que toutes les affectations ne sont pas réalisables. Enfin, le problème d'affectation des opérateurs sur plusieurs machines est présenté par Cheurfa *et al.* (Cheurfa *et al.*, 2004) dans le cas d'un *flowshop* cyclique avec changement d'affectation en fin d'opérations.

L'affectation des opérateurs est un problème quotidien pour les responsables d'atelier. La connaissance, entre autres, du système de production, des opérateurs, de leurs compétences, préférences, etc., sert à déterminer une affectation dont on espère qu'elle donnera les meilleurs résultats en fonction des objectifs pour la production en question (coût, délai, qualité, utilisation des machines...). Dans cet article, nous nous proposons d'évaluer la pertinence d'une règle d'affectation simple et traditionnelle : le fait d'affecter, dans le but de minimiser la durée des travaux, les opérateurs considérés comme les plus performants sur les postes les plus chargés, et les moins performants sur les postes les moins chargés. Pour cela, nous étudions le problème d'affectation statique des opérateurs pour un atelier de type *flowshop*. Cette étude, qui repose sur certaines hypothèses simplificatrices, utilise une quantification de la performance des opérateurs. Cette quantification est nécessaire pour modéliser et comparer le comportement des différentes règles d'affectation, en fonction des écarts de performance des opérateurs. Toutefois, nous ne cherchons pas à établir une procédure d'affectation automatique reposant sur une quelconque classification des opérateurs.

La section 2 présente une modélisation du problème et l'étude de complexité. Ensuite, des résultats de simulation permettent d'évaluer une heuristique traditionnellement utilisée (section 3). Une nouvelle règle d'affectation des opérateurs est également présentée. La section 4 propose une borne inférieure prenant en compte l'ordonnement et l'affectation des opérateurs. Une approche de résolution utilisant cette borne est proposée en section 5. Enfin, la section 6 présente des résultats obtenus avec cette approche.

## 2. Position du problème

Nous nous intéressons à un atelier de type *flowshop*, avec un nombre d'opérateurs égal au nombre de machines. Les différences de performance entre les opérateurs se traduisent par des variations des durées opératoires pour le même travail effectué sur la même machine, avec des opérateurs différents. Nous étudions l'impact de l'affectation des opérateurs aux machines sur le résultat de l'ordonnancement, dans le cas statique (l'affectation des opérateurs, une fois déterminée, est conservée durant toute la réalisation des travaux).

Avec le modèle présenté, nous recherchons l'affectation des opérateurs permettant de minimiser la durée totale de réalisation des travaux (*makespan*). Le problème d'ordonnancement consiste donc à déterminer à la fois l'affectation  $Af$  des opérateurs et la séquence  $S$  des travaux pour minimiser le critère (noté  $C_{max}$  par la suite).

Le modèle propose une vision théorique de la notion de performance. Tout opérateur  $e$  a une performance propre  $\rho_e$ , constante et indépendante de la tâche à réaliser ou de la machine sur laquelle l'opérateur travaille. Cette hypothèse ne se retrouve en réalité que dans quelques situations très particulières : pour un sous-ensemble de machines, réduisant ainsi le nombre d'affectations possibles, ou pour des catégories d'opérateurs bien marquées (*débutant - confirmé - expert* par exemple).

### 2.1. Modélisation

Dans cette section, nous proposons une formulation du problème inspirée du modèle en variables mixtes donné par Pinedo (Pinedo, 2002) pour le problème du *flowshop*. Ce modèle fait apparaître les temps d'inactivité des machines et les temps d'attente des travaux comme des variables continues.

Notations :

$N$  : ensemble des travaux ( $i$  indice des travaux,  $i = 1, 2, \dots, n$ )  
 $M$  : ensemble des machines ( $j$  indice des machines,  $j = 1, 2, \dots, m$ )  
 $O$  : ensemble des opérateurs ( $e$  indice des opérateurs,  $e = 1, 2, \dots, m$ )

#### 2.1.1. Détermination de la séquence des travaux

On se restreint au *flowshop de permutation*, c'est-à-dire que la séquence  $S$  de passage des travaux est la même sur toutes les machines. Il s'agit d'un problème d'affectation dans lequel on recherche pour chaque travail  $i$  sa position  $l$  dans la séquence. Les  $n^2$  variables de décision sont :  $x_{il} = 1$  si le travail  $i$  occupe la position  $l$ , 0 sinon. Les variables et contraintes liées au séquençement sont :

– Variables de décision binaires.

$$x_{il} \in \{0; 1\} \quad \forall i \in [1; n], \forall l \in [1; n] \quad [1]$$

– Un seul travail par position.

$$\sum_{i=1}^n x_{il} = 1 \quad \forall l \in [1; n] \quad [2]$$

– Une seule position par travail.

$$\sum_{l=1}^n x_{il} = 1 \quad \forall i \in [1; n] \quad [3]$$

### 2.1.2. Affectation des opérateurs

Il s'agit de déterminer sur quelle machine va travailler chaque opérateur. Les  $m^2$  variables de décision de ce problème d'affectation sont :  $y_{ej} = 1$  si l'opérateur  $e$  travaille sur la machine  $j$ , 0 sinon.

Les variables et contraintes liées à l'affectation sont :

– Variables de décision binaires.

$$y_{ej} \in [0; 1] \quad \forall j \in [1; m], \forall e \in [1; m] \quad [4]$$

– Une seule machine par opérateur.

$$\sum_{j=1}^m y_{ej} = 1 \quad \forall e \in [1; m] \quad [5]$$

– Un seul opérateur par machine.

$$\sum_{e=1}^m y_{ej} = 1 \quad \forall j \in [1; m] \quad [6]$$

Lorsque les valeurs de  $y_{ej}$  respectent les contraintes (4) à (6), on appelle *affectation Af* l'ensemble des couples  $(e, j)$  tels que  $y_{ej} = 1$ .

### 2.1.3. Durées opératoires réelles

La durée opératoire réelle  $p_{ij}$  d'un travail  $i$  sur une machine  $j$  est obtenue à partir de la durée moyenne  $\hat{p}_{ij}$ , indépendante des opérateurs, et de la performance  $\rho_e$  de l'opérateur  $e$  affecté à la machine  $j$  :

$$p_{ij} = \sum_{e=1}^m y_{ej} \cdot \rho_e \cdot \hat{p}_{ij} \quad \forall i \in [1; n], \forall j \in [1; m] \quad [7]$$

### 2.1.4. Respect de la séquence et contraintes disjonctives

$I_{lj}$  (*idle time*) représente le temps d'inactivité de la machine  $j$  après la fin de l'opération sur le travail situé en position  $l$  (attente de l'arrivée du travail situé en position  $l + 1$ ).

$W_{lj}$  (*waiting time*) représente le temps d'attente du travail situé en position  $l$  après la fin de l'opération sur la machine  $j$  (attente de libération de la machine  $j + 1$  par le travail situé en position  $l - 1$ ).  $I$  et  $W$  ne sont pas indépendants. En effet, on n'a pas simultanément une machine libre et un travail en attente devant elle.

Contraintes liées aux variables continues  $I$  et  $W$  :

- Pas d'inactivité pour la machine 1 (tous les travaux sont disponibles).

$$I_{l1} = 0 \quad \forall l \in [1; n - 1] \quad [8]$$

- Pas d'attente pour le premier travail (pas de prédécesseur occupant la machine  $j$ ).

$$W_{1j} = 0 \quad \forall j \in [1; m - 1] \quad [9]$$

$\Delta_{lj}$  représente l'intervalle de temps entre la fin de l'opération du travail situé en position  $l$  sur la machine  $j$  et le début du travail  $l + 1$  sur la machine  $j + 1$ .

Contraintes de respect de la séquence et contraintes disjonctives :

$$\underbrace{I_{lj} + \sum_{i=1}^n x_{i,l+1} \cdot p_{i,j}}_{\Delta_{lj}} + \underbrace{W_{l+1,j} - (W_{l,j} + \sum_{i=1}^n x_{i,l} \cdot p_{i,j+1} + I_{l,j+1})}_{\Delta_{lj}} = 0$$

$$\forall j \in [1; m - 1], \forall l \in [1; n - 1] \quad [10]$$

### 2.1.5. Fonction objectif

La valeur du critère  $C_{max}$  correspond à l'intervalle entre le début du premier travail sur la machine 1 et la fin du dernier travail sur la machine  $m$ .

$$\min C_{max} = \min \left( \underbrace{\sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^n x_{i1} \cdot p_{ij}}_{(a)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} I_{im} + \sum_{i=1}^n p_{im}}_{(b)} \right) \quad [11]$$

(a) : somme des durées opératoires du premier travail, pour les machines 1 à  $m - 1$  (la durée passée sur la machine  $m$  est comptée dans le terme (b)). Contrainte (9) : il n'y a pas d'attente pour ce travail.

(b) : somme des temps d'inactivité et des durées opératoires sur la dernière machine.

REMARQUE. — On note que le modèle n'est pas linéaire (équation (10) et fonction objectif), compte tenu du fait que les durées opératoires  $p_{ij}$  dépendent désormais des variables d'affectation  $y_{ej}$ .

## 2.2. Complexité du problème

### 2.2.1. Complexité et nombre de solutions

La démonstration de complexité est immédiate. Le problème appartient à la classe  $\mathcal{NP}$  car pour toute solution pour laquelle  $C_{max} \leq C$  est vrai, ceci peut être vérifié en un temps polynomial. De plus, si on considère une instance du problème pour laquelle  $\rho_e = k$ ,  $k$  constant, pour tout  $e \in [1; m]$ , on se ramène à un problème de flowshop de type  $Fm||C_{max}$ . Par conséquent, le problème est fortement NP-difficile lorsque le nombre de machines est supérieur à 2 (Garey *et al.*, 1976).

Pour les variables binaires, la combinatoire est la suivante : il y a  $n!$  solutions à chaque problème de séquençement (variables  $x_{il}$ ) et le problème d'affectation (variables  $y_{ej}$ ) a  $m!$  solutions. Le problème complet a donc  $m! \times n!$  solutions.

Lorsque plusieurs opérateurs ont la même performance, le nombre de solutions du problème d'affectation diminue. Les  $m$  opérateurs sont séparés en  $w$  catégories de même performance. On note :

$a$  : indice des catégories ( $a = 1, 2, \dots, w$ )

$\varphi_a$  : effectif de la catégorie  $a$ , tel que  $\sum_{a=1}^w \varphi_a = m$

A l'intérieur d'une catégorie, toutes les affectations sont interchangeables. Le nombre d'affectations du problème est donc :

$$C_m^{\varphi_1} \cdot C_{(m-\varphi_1)}^{\varphi_2} \cdot \dots \cdot C_{(m-\sum_{a=1}^{w-1} \varphi_a)}^{\varphi_w} = \frac{m!}{\prod_{a=1}^w (\varphi_a!)}$$

### 2.2.2. Heuristiques de résolution

Face à la complexité du problème, une approche heuristique, notée  $\tilde{\mathcal{H}}_1$ , consiste à considérer séparément le problème de séquençement des travaux et celui d'affectation des opérateurs :

– La séquence de passage des travaux est déterminée en se basant sur les durées opératoires moyennes  $\hat{p}_{ij}$ . A ce niveau, une méthode dédiée au problème du flowshop, comme *NEH* (Nawaz *et al.*, 1983), peut être utilisée. Le résultat est une séquence  $S(\hat{p}_{ij})$  qui ne tient pas compte de la performance et de l'affectation des opérateurs.

– L'affectation  $\tilde{A}f$  des opérateurs est déterminée à l'aide d'une règle intuitive qui consiste à affecter les opérateurs, pris dans l'ordre de performance décroissante, aux machines, prises dans l'ordre décroissant de leur charge  $\sum_i \hat{p}_{ij}$  : de l'opérateur le plus performant sur la machine la plus chargée jusqu'à l'opérateur le moins performant sur la machine la moins chargée.

Telles que décrites ci-dessus, les deux étapes de l'heuristique  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  sont indépendantes et peuvent donc être réalisées dans n'importe quel ordre. Outre sa simplicité, un avantage majeur de la règle d'affectation intuitive est qu'elle ne nécessite pas de quantification de la performance, action délicate qui peut être fortement subjective et sujette à variations.



Par la suite, nous supposerons que la performance des opérateurs est connue. L'approche  $\mathcal{H}_2$  consistera à déterminer d'abord une affectation des opérateurs, puis la séquence  $S(p_{ij})$  de passage des travaux avec  $NEH$ , en se basant sur les durées opératoires réelles  $p_{ij}$  obtenues *via* l'équation (7). Lorsque la règle d'affectation utilisée est la règle intuitive présentée ci-dessus, l'heuristique est notée  $\tilde{\mathcal{H}}_2$ .

### 3. Simulation

L'étude de simulation a plusieurs buts. Tout d'abord, elle permet de souligner l'intérêt de la recherche d'une bonne affectation en présentant les écarts de valeur du résultat de l'approche  $\mathcal{H}_2$  en fonction des affectations des opérateurs. Ensuite, elle évalue la pertinence de la règle intuitive en comparant les résultats des heuristiques  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  et  $\tilde{\mathcal{H}}_2$  à l'optimum. Enfin, l'étude nous permet de mettre en évidence une règle d'affectation des opérateurs ayant une influence sur la valeur du critère.

Dans les paragraphes suivants, les résultats sont présentés pour des instances de problèmes à 6 machines. Les durées  $\hat{p}_{ij}$  sont engendrées de façon aléatoire suivant une distribution uniforme, entre 10 et 100 unités de temps. La performance des opérateurs est définie par le rapport de performance  $R_\rho = \rho_{max}/\rho_{min}$ , où  $\rho_{max}$  et  $\rho_{min}$  sont respectivement le maximum et le minimum de  $\rho_e$ . Afin d'évaluer l'influence de la répartition de la performance parmi les opérateurs, plusieurs cas sont étudiés :

- Répartition *en deux catégories*, l'une ayant la performance  $\rho_{min}$  et l'autre  $\rho_{max}$ , en faisant varier les effectifs des catégories ;
- Répartition *en trois catégories* de performance ;
- Répartition *progressive* selon la fonction suivante :

$$\rho_e = \frac{1}{1 + \alpha \cdot \left(\frac{m+1}{2} - e\right)} \quad \text{avec } e \in [1; m] \text{ et } \alpha = \frac{R_\rho - 1}{R_\rho + 1} \cdot \frac{2}{m - 1}$$

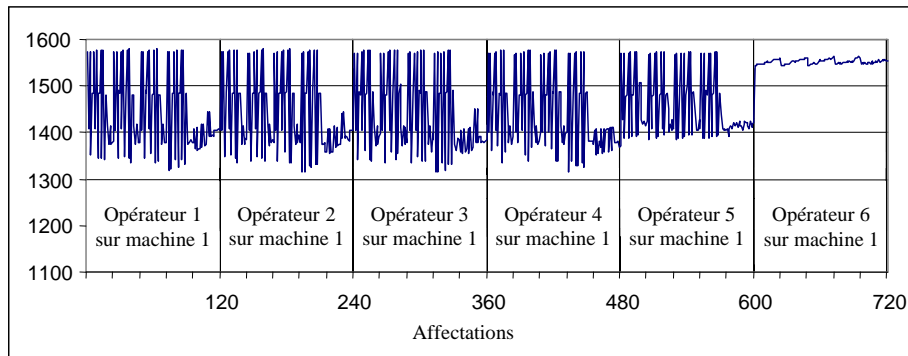
REMARQUE. — Pour une répartition donnée, le problème obtenu avec les performances  $\rho'_e$  telles que  $\rho'_e = \beta \cdot \rho_e$  pour tout  $e$ , avec  $\beta$  strictement positif, est équivalent au problème initial. Le rapport  $R_\rho$  est conservé.

#### 3.1. Premier exemple

Nous étudions les variations de  $C_{max}$  en fonction de l'affectation des opérateurs, avec l'approche  $\mathcal{H}_2$ . L'ensemble des affectations possibles est passé en revue. Pour une affectation donnée, l'algorithme  $NEH$  est utilisé pour déterminer la séquence des travaux  $S(p_{ij})$  avec les valeurs réelles des durées opératoires. La figure 1 présente l'évolution de la valeur de  $C_{max}$ , pour une instance du problème à 20 travaux et 6 machines<sup>2</sup>. La répartition progressive de la performance, présentée ci-dessus, a

2. Données fournies en Annexe 1.

été choisie et le rapport  $R_\rho$  vaut  $5/3$  (soit  $\alpha = 0,1$ ). Les opérateurs sont classés de 1 à 6, du plus performant au moins performant. Les  $m! = 720$  affectations sont classées par ensembles correspondant à l'affectation d'un opérateur à la première machine de l'atelier.



**Figure 1.**  $C_{max}$  suivant l'affectation des opérateurs sur la première machine

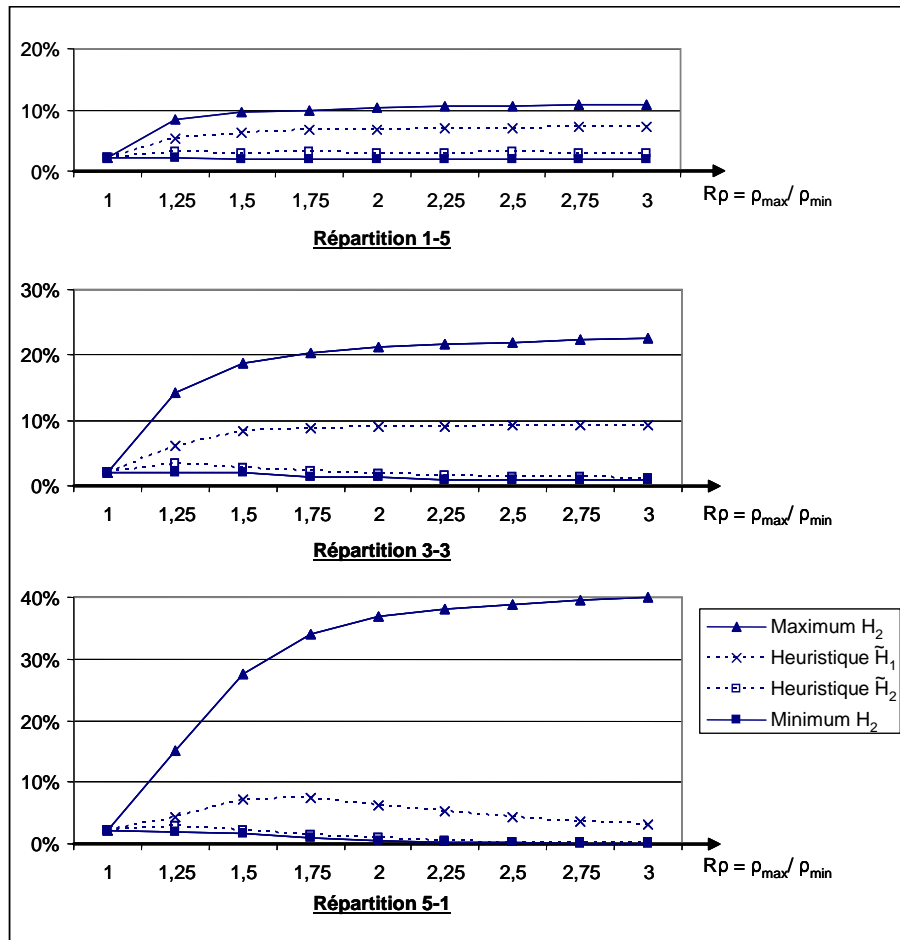
On note un écart d'environ 20 % entre les valeurs extrêmes du critère. On remarque également une certaine régularité dans le tracé : excepté pour le dernier, chacun des ensembles de 120 valeurs correspondant à des permutations définies par « l'opérateur  $e$  affecté à la machine 1 », est semblable (ensembles délimités par des lignes verticales sur la figure 1). Pour le dernier ensemble (opérateur le moins performant), les valeurs de  $C_{max}$  ne sont pas bonnes, mais il est difficile d'en tirer des conclusions à ce stade. La réorganisation des affectations permettra par la suite de mettre en évidence une règle d'affectation qui donne une allure croissante à la courbe (voir §3.4).

### 3.2. Influence de la performance

Pour étudier l'influence de la performance, la répartition en catégories de performance est utilisée. La figure 2 présente des exemples à deux catégories : répartitions 1-5 (un opérateur de performance  $\rho_{min}$  et cinq de performance  $\rho_{max}$ ), 3-3 et 5-1. La figure 3 présente des exemples à trois catégories : répartitions 1-4-1 et 2-2-2. Le rapport  $R_\rho$  varie de 1 à 3 (pas de 0,25) et 100 instances de problème à 6 machines et 12 travaux sont engendrées pour chaque combinaison.

Les figures 2 et 3 montrent (trait plein) l'évolution de l'écart entre l'optimum<sup>3</sup> et les résultats obtenus avec l'approche  $\mathcal{H}_2$  : écart minimum et maximum pour toutes les affectations possibles. Les valeurs indiquées correspondent à la moyenne sur les 100 instances des écarts en %. Elles sont données en fonction du rapport de performance  $R_\rho$ .

3. Optimum obtenu en déterminant, pour toute affectation, la séquence  $S(p_{ij})$  optimale à l'aide d'une méthode de séparation et évaluation, et en conservant la valeur minimale de  $C_{max}$ .



**Figure 2.** Écart par rapport à l'optimum des valeurs de  $\mathcal{H}_2$  (min et max) et des heuristiques  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  et  $\tilde{\mathcal{H}}_2$ . Deux catégories de performance

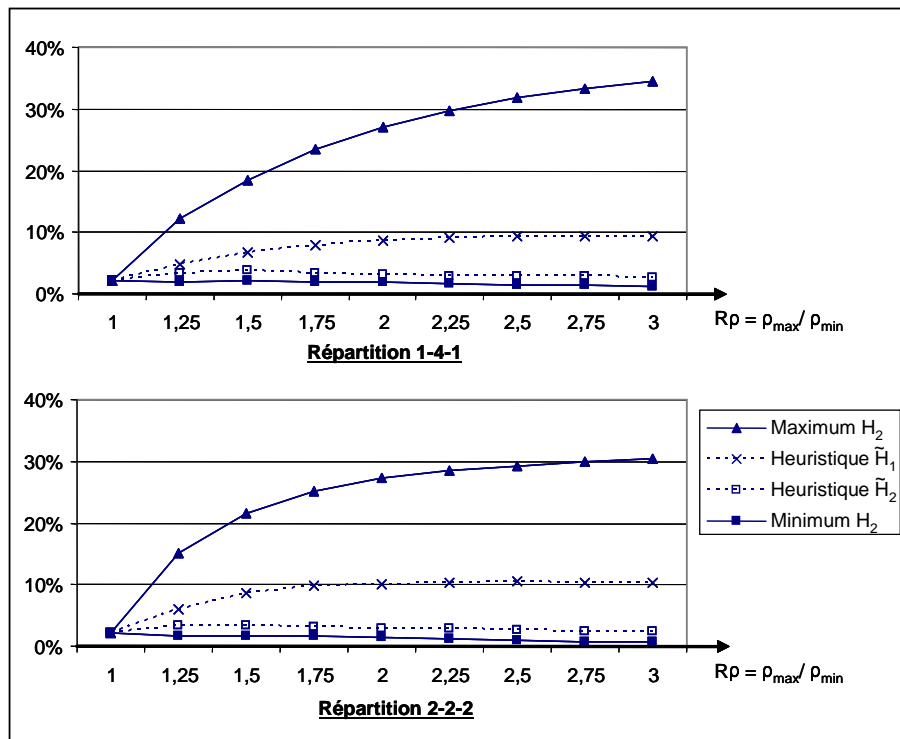
Pour les trois répartitions de la figure 2, on note que le rapport de performance a une influence directe sur les valeurs dans la partie « réaliste » du graphique, c'est-à-dire pour un rapport  $R_p$  inférieur à 2. Il est peu probable de rencontrer des cas où un opérateur réalise une opération en deux fois plus de temps qu'un autre. On remarque également l'influence de la répartition : si l'écart maximum dépasse à peine 10 % dans le pire des cas pour la répartition 1-5, cette valeur atteint 40 % pour la répartition 5-1.

Ces résultats se retrouvent sur la figure 3 pour les répartitions en trois catégories. Dans le cas 1-4-1, l'écart maximum atteint dans le pire cas 35 %. La stabilisation est ici un peu plus longue à obtenir. Dans le cas 2-2-2, l'écart reste aux alentours de

30 % pour la valeur maximale. Comme sur la figure 2, les valeurs de l'écart minimum restent autour de quelques pourcents.

### 3.3. Évaluation de la règle d'affectation intuitive

Les figures 2 et 3 présentent (trait pointillé) l'évolution de l'écart entre l'optimum et les valeurs données par les heuristiques  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  et  $\tilde{\mathcal{H}}_2$ . Comme précédemment, les valeurs indiquées correspondent à la moyenne sur les 100 instances des écarts en % et sont données en fonction du rapport de performance  $R_\rho$ .



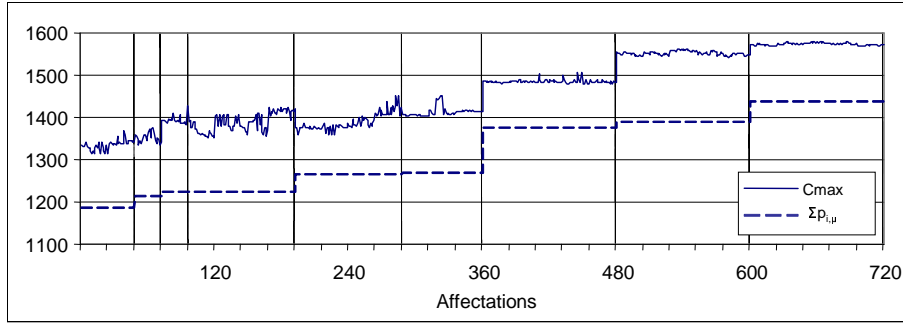
**Figure 3.** Écarts par rapport à l'optimum des valeurs de  $\mathcal{H}_2$  (min et max) et des heuristiques  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  et  $\tilde{\mathcal{H}}_2$ . Trois catégories de performance

Quelle que soit la répartition de performance, le résultat de  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  se situe en moyenne dans les 10 % au delà de l'optimum, ce qui montre la pertinence de cette heuristique. De plus, les valeurs de  $\tilde{\mathcal{H}}_2$  restent très proches du minimum de  $\mathcal{H}_2$ , ce qui confirme que la règle d'affectation intuitive donne d'excellents résultats.

### 3.4. Nouvelle règle d'affectation des opérateurs

En faisant varier l'ordre des affectations dans l'approche  $\mathcal{H}_2$ , on peut constater qu'un élément important pour l'évolution de  $C_{max}$  est la charge réelle maximale  $\max_j(\sum_i p_{ij})$ , compte tenu de l'affectation des opérateurs. Pour une affectation donnée, la machine ayant cette charge réelle maximale est appelée  $\mu$ , l'opérateur qui lui est affecté est  $e_\mu$ . La figure 4 présente les valeurs de l'exemple de la figure 1 classées suivant  $\sum_i p_{i\mu} = \max_j(\sum_i p_{ij})$  croissant. Le tracé du haut représente la valeur du critère, et celui du bas la charge réelle maximale  $\sum_i p_{i\mu}$ .

Les affectations se retrouvent groupées par ensembles de même valeur de  $\sum_i p_{i\mu}$ , appelés *paliers*, délimités par les lignes verticales sur la figure 4. Un palier  $\mathcal{P}_{e_\mu, \mu}$  est l'ensemble des affectations qui contiennent le même couple  $(e_\mu, \mu)$  et pour lesquelles  $\max_j(\sum_i p_{ij}) = \sum_i p_{i\mu}$ . On note que l'affectation  $\tilde{A}f$  suivant la règle intuitive donne un résultat qui se retrouve dans le palier de plus petite valeur.



**Figure 4.** Valeurs de  $C_{max}$  classées suivant  $\sum_i p_{i\mu}$

## 4. Borne inférieure

L'étude par simulation nous a permis d'identifier l'influence de la machine la plus chargée  $\mu$  sur la valeur du critère  $C_{max}$ . De manière analogue à (11), on peut exprimer le critère en fonction de cette machine :

$$C_{max} = \underbrace{\sum_{j=1}^{\mu-1} \sum_{i=1}^n x_{i1} \cdot p_{ij}}_{(a')} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} I_{i\mu} + \sum_{i=1}^n p_{i\mu}}_{(b')} + \underbrace{\sum_{j=\mu}^{m-1} W_{nj} + \sum_{j=\mu+1}^m \sum_{i=1}^n x_{in} \cdot p_{ij}}_{(c')} \quad [12]$$

(a') : somme des durées opératoires du premier travail, pour les machines 1 à  $\mu - 1$ .

(b') : somme des temps d'inactivité et des durées opératoires sur la machine la plus chargée  $\mu$ .

(c') : somme des temps d'attente et des durées opératoires du dernier travail, pour les machines  $\mu + 1$  à  $m$ .

Une borne inférieure du critère est alors obtenue en négligeant les temps d'attente  $W$  et d'inactivité  $I$  dans l'expression de  $C_{max}$  :

$$C_{max} = \underbrace{\sum_{j=1}^{\mu-1} \sum_{i=1}^n x_{i1} \cdot p_{ij}}_{(a')} + \underbrace{\sum_{i=1}^n p_{i\mu}}_{(b')} + \underbrace{\sum_{j=\mu+1}^m \sum_{i=1}^n x_{in} \cdot p_{ij}}_{(c')} \quad [13]$$

La suppression des variables continues  $I$  et  $W$  entraîne le retrait du modèle des contraintes associées (8) à (10). Par suite, le problème de séquençement se réduit au choix du premier et du dernier travail de la séquence (utilisés respectivement dans (a') et (c')). Le nombre de solutions à ce problème est  $n \times (n - 1)$ .

Le problème d'affectation des opérateurs est inchangé ( $m!$  solutions). Cependant nous allons exploiter la structure du problème afin de limiter le nombre de solutions à explorer. La borne inférieure sera calculée par palier d'affectations ayant la même valeur de  $\sum_i p_{ij}$  sur la machine la plus chargée.

#### 4.1. Calcul de (b')

Pour une affectation  $Af$  donnée des opérateurs aux machines, notons  $Sp_j$  la charge réelle de la machine  $j$ . Si l'opérateur  $e_j$  est affecté à  $j$ , on peut écrire la charge réelle en fonction de la charge moyenne  $S\hat{p}_j$  :

$$Sp_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} = \sum_{i=1}^n \rho_{e_j} \cdot \hat{p}_{ij} = \rho_{e_j} \cdot \sum_{i=1}^n \hat{p}_{ij} = \rho_{e_j} \cdot S\hat{p}_j$$

La charge réelle de la machine la plus chargée s'écrit alors :

$$(b') = Sp_\mu = \max_j (Sp_j) = \max_j (\rho_{e_j} \cdot S\hat{p}_j)$$

REMARQUE. — Le calcul de (b') est indépendant de la séquence des travaux. Seul reste le problème d'affectation des  $m$  opérateurs.

Pour déterminer la borne inférieure, il peut être intéressant de chercher l'affectation telle que (b') est minimal.

PROPOSITION. — L'affectation  $\tilde{A}f$  suivant la règle intuitive présentée au §2.2.2 permet d'obtenir la valeur minimale de  $(b') = Sp_\mu$ .

PREUVE. — Soient deux opérateurs  $e_1, e_2$  tels que  $\rho_{e_1} < \rho_{e_2}$  ( $e_1$  plus performant que  $e_2$ ), et deux machines  $j_1, j_2$  telles que  $Sp_{j_1} > Sp_{j_2}$  ( $j_1$  plus chargée que  $j_2$ ).

Pour les deux affectations possibles des opérateurs aux machines, calculons  $Sp'_\mu$  :

– Affectation  $Af_1((e_1, j_1), (e_2, j_2))$  :

$$Sp_\mu = \max(\rho_{e_1} \cdot S\hat{p}_{j_1}, \rho_{e_2} \cdot S\hat{p}_{j_2}) < \rho_{e_2} \cdot S\hat{p}_{j_1}$$

– Affectation  $Af_2((e_1, j_2), (e_2, j_1))$  :

$$Sp_\mu = \max(\rho_{e_1} \cdot S\hat{p}_{j_2}, \rho_{e_2} \cdot S\hat{p}_{j_1}) = \rho_{e_2} \cdot S\hat{p}_{j_1}$$

Par conséquent, l'affectation  $Af_1$  est toujours meilleure que l'affectation  $Af_2$ .

Dans le problème complet, si l'on classe les opérateurs par ordre de performance décroissante ( $\rho_e$  croissant), une affectation donnant  $Sp_\mu$  minimum<sup>4</sup> s'obtient donc en classant les machines par ordre décroissant des valeurs de  $S\hat{p}_j$ . Il s'agit de la règle intuitive, qui affecte l'opérateur le plus performant à la machine la plus chargée, et ainsi de suite jusqu'au moins performant à la moins chargée.

#### 4.1.1. Matrice des charges réelles

Notons  $SP$  la matrice des charges réelles des machines en fonction de l'opérateur affecté :

$$SP[f, k] = \rho_{e_f} \cdot S\hat{p}_{j_k} \quad f \in [1; m], k \in [1; m]$$

Une affectation  $A_f$  correspond à  $m$  cases  $SP[f, k]$  dans la matrice, telles que les couples  $(e_f, j_k)$  respectent les contraintes (4) à (6).

Dans  $SP$ , les opérateurs  $e_f$  sont rangés par ordre décroissant de performance, et les machines  $j_k$  par ordre décroissant de charge moyenne :

$$\rho_{e_{f+1}} \geq \rho_{e_f} \quad \forall f \in [1; m-1]$$

$$S\hat{p}_{j_{k+1}} \leq S\hat{p}_{j_k} \quad \forall k \in [1; m-1]$$

L'affectation  $\tilde{A}f$  suivant la règle intuitive correspond donc aux cases de  $SP$  telles que  $f = k$  (diagonale de la matrice). La valeur de  $S\tilde{p}_\mu$  est donnée par le couple  $(e_\mu, \mu)$  de  $\tilde{A}f$  tel que

$$\rho_{e_\mu} \cdot S\hat{p}_\mu = \max_f (\rho_{e_f} \cdot S\hat{p}_{j_f}),$$

c'est-à-dire la case de la diagonale ayant la plus grande valeur.

#### 4.1.2. Paliers

DÉFINITION. — Un palier  $\mathcal{P}_{e_\mu, \mu}$  est l'ensemble des affectations  $Af$  telles que :

1) La machine  $\mu$  est la plus chargée. L'opérateur  $e_\mu$  lui est affecté :

$$(e_\mu, \mu) \in Af \quad \text{avec } Sp_\mu = \rho_{e_\mu} \cdot S\hat{p}_\mu \quad [14]$$

---

4. Notée  $S\tilde{p}_\mu$  par la suite.

2) Les autres machines sont moins chargées que  $\mu$  :

$$(e_f, j_k) \in Af \text{ avec } \rho_{e_f} \cdot S\hat{p}_{j_k} \leq Sp_\mu \quad \forall f \in [1; m], \forall k \in [1; m], j_k \neq \mu \quad [15]$$

La connaissance du couple  $(e_\mu, \mu)$  suffit à définir le palier  $\mathcal{P}_{e_\mu, \mu}$ . Pour toute machine  $j_k \neq \mu$ , l'équation (15) détermine une borne  $f_{max}(j_k)$  sur les opérateurs affectés, plus grande valeur de  $f$  telle que  $\rho_{e_f} \cdot S\hat{p}_{j_k} \leq Sp_\mu$ . Un palier correspond donc à une affectation pour la machine la plus chargée, et des bornes sur l'affectation des opérateurs pour les autres machines.

REMARQUE. — Puisqu'on fixe un couple (opérateur, machine), le nombre maximal d'affectations dans un palier est  $(m - 1)!$ .

Lorsqu'un couple  $(e_f, j_k)$ ,  $j_k \neq \mu$ , est tel que  $\rho_{e_f} \cdot S\hat{p}_{j_k} = Sp_\mu$ , deux paliers  $\mathcal{P}_{e_\mu, \mu}$  et  $\mathcal{P}_{e_f, j_k}$  sont créés. En effet, le calcul de  $(a')$  et  $(c')$  risque de donner des valeurs différentes, donc des bornes inférieures différentes sur ces deux paliers. Pour ne pas augmenter le nombre de solutions du problème, les affectations contenant à la fois  $(e_\mu, \mu)$  et  $(e_f, j_k)$  ne doivent apparaître que dans un seul de ces palier.

Lorsqu'un opérateur  $e_f$  a la même performance que  $e_\mu$ , les affectations de ces opérateurs sont équivalentes (ils appartiennent à la même catégorie, voir §2.2.1). Un seul palier est donc défini pour la machine  $\mu$  avec cette valeur de performance.

L'ensemble des affectations telles que  $Sp_\mu = S\tilde{p}_\mu$  correspond au palier  $\tilde{\mathcal{P}}$  de plus petites valeurs de  $(b')$  pour le problème considéré. Cela confirme le fait que  $\tilde{A}f$  se trouve toujours dans le palier de plus petite valeurs de  $\sum_i p_{ij}$  sur la machine la plus chargée, comme nous l'avions noté au §3.4.

Plus généralement, à tout palier  $\mathcal{P}$  correspond une valeur de  $(b')$  commune à ses affectations. Pour obtenir une borne inférieure du critère sur le palier, on doit déterminer le minimum de  $((a') + (c'))$  pour cet ensemble d'affectations. La détermination de la borne palier par palier permettra par la suite de limiter l'énumération des affectations en excluant des paliers dont la borne inférieure serait supérieure à une solution connue.

#### 4.1.3. Nombre de paliers

Tout palier comprend un couple unique  $(e_\mu, \mu)$ . Par conséquent, le nombre de paliers est limité au nombre de couples (opérateur, machine) possibles, soit  $m^2$ . De plus, pour toute affectation  $Af$ , la somme des durées opératoires sur la machine la plus chargée est supérieure ou égale à  $S\tilde{p}_\mu$ . Tout couple  $(e_f, j_k)$  tel que  $\rho_{e_f} \cdot S\hat{p}_{j_k} < S\tilde{p}_\mu$  ne peut donc pas définir un palier. Cela correspond aux cases de la matrice  $SP$  situées sous la diagonale définie par  $\tilde{A}f$ . Le nombre maximal de couples susceptibles de définir un palier est donc  $m(m + 1)/2$ . Enfin, dans le cas où une seule case de la diagonale définit un palier (pas plusieurs cases de valeur égale à  $S\tilde{p}_\mu$  sur la diagonale), cette valeur devient  $m(m - 1)/2 + 1$ .



Inversement, quelle que soit la valeur de  $S\tilde{p}_\mu$ , il y a au moins  $m$  couples tels que  $\rho_e \cdot S\hat{p}_j \geq S\tilde{p}_\mu$ . Le nombre de paliers est donc compris dans l'intervalle  $[m; m(m+1)/2]$ . Le calcul de la borne inférieure s'effectue un nombre limité de fois, en comparaison avec le nombre de solutions du problème d'affectation.

#### 4.2. Calcul de $(a')$ et $(c')$

Le calcul de  $(a')$  et  $(c')$  consiste à déterminer le premier et le dernier travail de la séquence, ainsi que les affectations des opérateurs aux machines  $j \neq \mu$ . Ces deux calculs ne sont pas indépendants. Le problème de séquençement est ici réduit à un choix de deux travaux parmi  $n$ . Le problème d'affectation se pose maintenant pour  $m-1$  opérateurs.

Soient  $i_1$  le premier et  $i_n$  le dernier travail de la séquence.  $\mu$  est la machine la plus chargée pour les affectations du palier  $\mathcal{P}_{\mu, e_\mu}$ . La valeur minimale de  $(a') + (c')$  correspond à l'affectation  $Af \in \mathcal{P}_{\mu, e_\mu}$  telle que

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} p_{i_1 j} + \sum_{j=\mu+1}^m p_{i_n j} \text{ est minimum.}$$

Soient deux opérateurs  $e_1, e_2$  tels que  $\rho_{e_1} < \rho_{e_2}$ , et deux machines  $j_1, j_2$  telles que  $\hat{p}_{i j_1} > \hat{p}_{i j_2}$ . Ces deux inégalités permettent d'écrire

$$\begin{aligned} (\rho_{e_2} - \rho_{e_1}) \cdot \hat{p}_{i j_1} &> (\rho_{e_2} - \rho_{e_1}) \cdot \hat{p}_{i j_2} \\ \Leftrightarrow \rho_{e_1} \cdot \hat{p}_{i j_1} + \rho_{e_2} \cdot \hat{p}_{i j_2} &< \rho_{e_1} \cdot \hat{p}_{i j_2} + \rho_{e_2} \cdot \hat{p}_{i j_1} \end{aligned}$$

L'affectation  $((e_1, j_1), (e_2, j_2))$  est donc meilleure que  $((e_1, j_2), (e_2, j_1))$ . Pour déterminer l'affectation complète, de manière similaire au calcul de  $(b')$ , les opérateurs  $e_f$  sont rangés par ordre décroissant de performance, et les machines  $j_k$  par ordre décroissant de durée opératoire moyenne  $\hat{p}_{i j}$  :

$$\begin{aligned} \rho_{e_{f+1}} &\geq \rho_{e_f} \quad \forall f \in [1; m-1] \\ \hat{p}_{i j_{k+1}} &\leq \hat{p}_{i j_k} \quad \forall k \in [1; m-1] \end{aligned}$$

Pour  $i_1$  et  $i_n$  donnés, et si toutes les affectations étaient acceptables, comme précédemment, l'affectation suivant la règle intuitive, appliquée au classement des machines par durées  $\hat{p}_{i j}$ , donnerait le résultat optimal. Il faut cependant se restreindre aux affectations du palier  $\mathcal{P}_{\mu, e_\mu}$ , c'est-à-dire respecter les bornes  $f_{max}(j_k)$ . L'algorithme glouton présenté page suivante donne l'optimum parmi les affectations admissibles, en respectant les bornes d'affectation du palier.

La valeur minimale de  $(a') + (c')$  pour le palier est obtenue en calculant  $(a') + (c')$  avec l'affectation optimale pour chacune des  $n \cdot (n-1)$  possibilités de choix de deux travaux parmi  $n$ .

```

Pour  $k$  de  $m$  à 1 faire
  placé  $\leftarrow$  Faux ;
   $f \leftarrow f_{max}(j_k)$  ;
  Tant que (placé = Faux) faire
    Si (DéjàAffecté ( $e_f$ ) = Faux) Alors
      Affecte ( $e_f, j_k$ ) ;
      placé  $\leftarrow$  Vrai ;
    Sinon
       $f \leftarrow f - 1$ 
    Fin Si
  Fait
Fin Pour

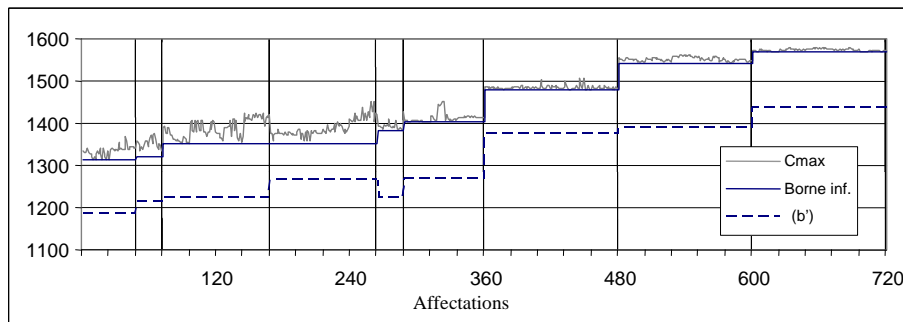
```

**Algorithme 1:** Affectation des opérateurs pour minimiser  $(a') + (c')$

Le calcul de la borne inférieure pour les différents paliers peut donc s'effectuer en un nombre réduit de calculs. La combinatoire liée au problème d'affectation des opérateurs est résolue, et seul demeure le choix du premier et du dernier travail de la séquence. La complexité du calcul de la borne inférieure est  $O(m^2 n^3 \log n)$ .

### 4.3. Exemple

La figure 5 présente les valeurs de l'exemple de la figure 1 (courbe grise) classées dans l'ordre croissant de la borne inférieure (en trait plein). On note que cet ordre ne correspond pas nécessairement avec l'ordre suivant  $(b')$  (en tirets sur la figure).



**Figure 5.** Valeurs de  $C_{max}$  classées suivant la borne inférieure

## 5. Approche de résolution

Les paliers sont créés dans l'ordre croissant de  $(b')$ , commençant par le palier tel que  $(b') = \tilde{S}p_\mu$ . Pour chaque palier, la borne inférieure est calculée. La recherche de la solution s'effectue dans les paliers pris dans l'ordre croissant des valeurs de la borne

inférieure. Pour le palier courant, la valeur minimale sur le palier est déterminée par un balayage systématique des affectations du palier. Tous les paliers non visités dont la borne inférieure pourrait être supérieure à cette valeur sont éliminés de la recherche, puis on passe au palier suivant.

Conformément à l'approche  $\mathcal{H}_2$ , pour une affectation donnée, la séquence  $S(p_{ij})$  des travaux est obtenue avec l'algorithme *NEH*. La valeur obtenue constitue donc une borne supérieure du critère  $C_{max}$ . Toutefois, lorsque cette valeur est égale à la borne inférieure du palier considéré, on a atteint l'optimum parmi les affectations du palier, et le balayage des solutions sur ce palier peut être interrompu.

## 6. Résultats expérimentaux

La détermination des valeurs de la borne inférieure prend en compte à la fois les aspects liés à l'affectation des opérateurs, et une partie de ceux liés à la séquence des opérations. Cependant, l'approche de résolution reste basée sur la répétition de la construction de la séquence des travaux pour un ensemble de solutions au problème d'affectation. Cette approche présente l'avantage de limiter le nombre de solutions à explorer en excluant de la recherche les paliers inintéressants.

Étant donné que la séquence des travaux est obtenue avec l'algorithme *NEH*, le résultat n'est pas nécessairement optimal. Les interprétations faites par la suite sur la qualité de la borne inférieure sont donc sous-estimées, compte tenu de la qualité des solutions données par *NEH*.

Les résultats présentés ci-dessous visent à mesurer le gain obtenu (pourcentage de solutions évaluées) par rapport à une exploration systématique. Les données du problème sont : nombre de machines, nombre de travaux, rapport de performance  $R_\rho$ , type de répartition de la performance, présence d'une machine-goulot. Le nombre de solutions évaluées est lié au nombre de paliers visités (donc à la qualité de la borne inférieure), et au nombre de solutions présentes dans ces paliers. Ces résultats sont également présentés en fonction des données du problème.

### 6.1. Problème à 6 machines

Ce paragraphe présente les résultats en fonction du nombre de travaux et du rapport de performance  $R_\rho$  pour 100 instances de problème à 6 machines, avec une répartition *progressive* de la performance des opérateurs (voir §3). Les durées opératoires moyennes  $\hat{p}_{ij}$  sont engendrées de façon aléatoire suivant une distribution uniforme, entre 10 et 100 unités de temps. Les valeurs présentées sont des moyennes sur les résultats des 100 instances.

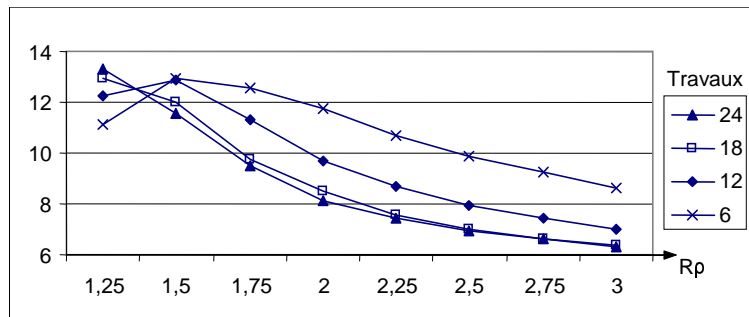
#### 6.1.1. Paliers

Nous avons vu au §4.1.3 que le nombre de paliers est compris dans l'intervalle  $[m; m(m+1)/2]$ , soit entre 6 et 21 dans le cas à 6 machines. De plus, lorsqu'un seul palier est présent sur la diagonale (c'est le cas le plus probable), la borne supérieure

de l'intervalle passe à  $m(m - 1)/2 + 1$ , soit 16. La figure 6 présente l'évolution du nombre de paliers.

Globalement, le nombre de paliers diminue avec l'augmentation de  $R_\rho$ , tendant vers la limite inférieure 6. Ceci s'explique par le fait que lorsque  $R_\rho$  devient grand, les paliers sont définis par l'opérateur le moins performant ( $\rho$  le plus grand), dont l'affectation désigne la machine la plus chargée. Cela est d'autant plus vrai que les durées sont obtenues avec une distribution uniforme<sup>5</sup> : lorsque le nombre de travaux devient important, les valeurs  $Sp_j$  des charges des machines s'équilibrent. La performance  $\rho$  est alors l'élément déterminant pour la définition des paliers.

Cet effet s'inverse lorsque  $R_\rho$  est faible. Les variations de  $Sp_j$  pour les cas où  $n$  est faible sont plus importantes. Leur nombre de paliers diminue. Ceux-ci sont alors déterminés par les valeurs de  $Sp_j$  et non plus par les valeurs de  $\rho$ .



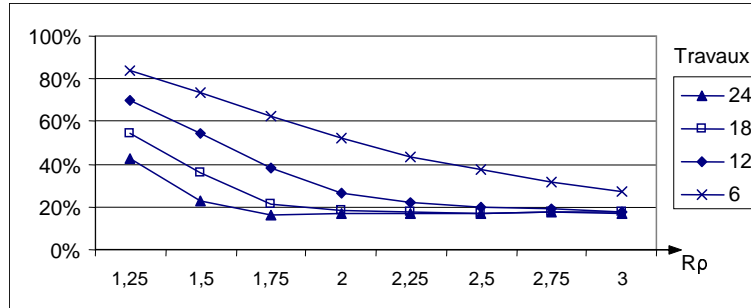
**Figure 6.** Problème à 6 machines : nombre de paliers

La figure 7 présente le pourcentage de paliers visités. Ce résultat constitue une mesure de la qualité de la borne inférieure. Il dépend aussi (ainsi que les résultats suivants : nombre de solutions évaluées et temps d'exécution) de la qualité de la solution donnée par  $NEH$ .

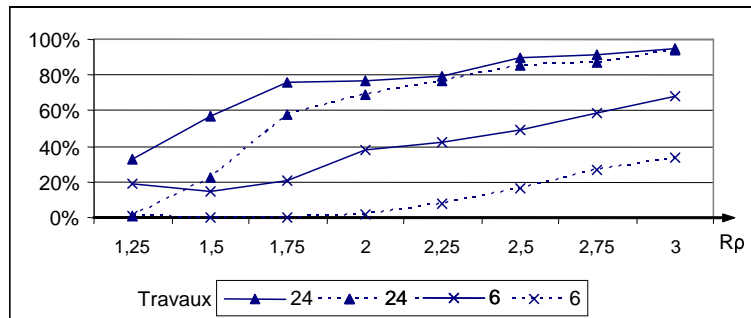
Il apparaît nettement que la borne inférieure est d'autant meilleure que le nombre de travaux est grand. Lorsque le rapport  $R_\rho$  augmente, l'écart entre les bornes inférieures des différents paliers s'accroît, permettant plus fréquemment de supprimer certains paliers de la recherche de solution. Ceci va de pair avec la diminution du nombre de paliers notée ci-dessus.

La figure 8 présente, pour les cas à 6 et 24 machines, le pourcentage de cas où la solution s'est trouvée dans le premier palier (trait plein), et celui où un seul palier a été exploré (trait pointillé). Conformément aux résultats précédents, lorsque  $R_\rho$  est grand, on trouve une majorité de cas pour lesquels la solution se trouve dans le premier palier. On note également que dès que  $R_\rho$  atteint 1,75, ce pourcentage est déjà à 76 % dans le cas à 24 machines, et que dans 58 % des cas, un seul palier est exploré. Pour le cas à 6 machines, ces valeurs restent faibles.

5. Pour comparaison, voir le cas avec machine goulot au §6.2



**Figure 7.** Problème à 6 machines : pourcentage de paliers visités



**Figure 8.** Solution dans le premier palier et un seul palier visité

Lorsque  $R_p$  devient grand, la performance des opérateurs devient prépondérante. Cela se traduit dans la matrice des charges réelles  $SP$  par  $m$  cases définissant un palier : les cases de la colonne correspondant à l'opérateur le moins performant. Le premier palier (plus faible valeur de la borne) est défini par la case située sur la diagonale, c'est-à-dire l'affectation de l'opérateur le moins performant à la machine la moins chargée. C'est donc, dans ce cas, l'affectation importante parmi celles de la règle intuitive. Le cas inverse (prépondérance de la charge des machines) est présenté au §6.2 sur un problème avec machine goulot.

#### 6.1.2. Solutions évaluées et temps d'exécution

La figure 9 présente l'évolution du pourcentage de solutions évaluées en fonction de  $R_p$  et pour un nombre de travaux variant de 6 à 24. Le nombre total de solutions est  $m! = 720$ .

Lorsque  $R_\rho$  est faible, les solutions ont des valeurs proches, et les bornes inférieures des paliers également, ce qui peut mener à visiter plus de paliers, donc évaluer plus de solutions (jusqu'à 78 % pour le cas à 6 travaux). Lorsque  $R_\rho$  devient important, cette valeur se stabilise autour de 16,6 %, ce qui correspond au cas où 6 paliers existent, chacun ayant  $(m - 1)!$  solutions, et un seul est visité : une solution sur  $m$  est évaluée.

L'influence du nombre de travaux est nette. Cela montre à nouveau que l'approche est d'autant plus efficace que le nombre de travaux est important, c'est-à-dire que la borne est d'autant meilleure que la partie ( $b'$ ) est importante par rapport à ( $a'$ ) et ( $c'$ ).

Le temps de calcul est lié au nombre de solutions évaluées. Il dépend fortement aussi du nombre de travaux : le calcul des parties ( $a'$ ) et ( $c'$ ) est répété  $n \cdot (n - 1)$  fois, et l'algorithme *NEH* insère incrémentalement chacun des  $n$  travaux dans la séquence, en déterminant à chaque fois la meilleure position parmi les travaux déjà placés. On retrouve nettement sur la figure 10 l'influence de ces deux facteurs. Pour chaque cas, l'allure de la courbe du temps de calcul est semblable à celle du pourcentage de solutions évaluées. En revanche, le temps de calcul croît rapidement avec le nombre de travaux.

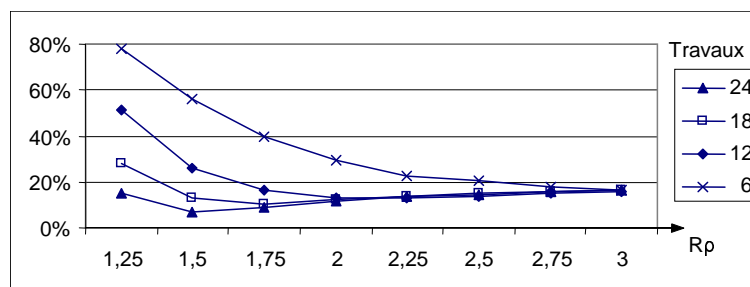


Figure 9. Problème à 6 machines : pourcentage de solutions évaluées

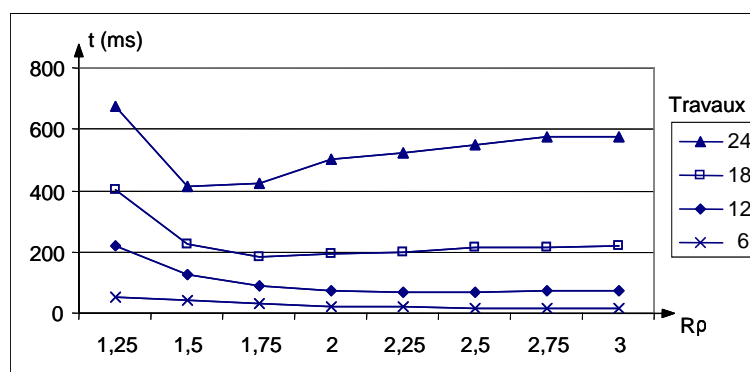


Figure 10. Problème à 6 machines : temps de calcul

## 6.2. Problème avec machine goulot

La figure 11 présente une comparaison entre le problème précédent (6 machines, 6 et 12 travaux), avec un problème semblable à 12 travaux, pour lequel les durées opératoires de la première machine sont prises entre 10 et 150 (au lieu de 100). Les tests ont montré que pour cet exemple, la position du goulot n'avait pas d'importance avec le critère utilisé.

La présence du goulot crée une disparité entre les valeurs des charges des machines. Cela influe sur le nombre de paliers. Comme noté au paragraphe 6.1.1, le nombre de paliers diminue alors quand  $R_\rho$  devient faible (voir figure 6). On tend vers une matrice  $SP$  dans laquelle seules les  $m$  cases de la ligne correspondant à la machine la plus chargée définissent un palier. L'affectation importante est alors celle de l'opérateur le plus performant à cette machine. Lorsque  $R_\rho$  devient grand, le nombre de paliers reste supérieur au cas sans goulot, mais tend vers  $m$  (performance des opérateurs prépondérante). Les gains en temps d'exécution sont significatifs lorsque  $R_\rho$  est faible (moins de solutions évaluées). Ils sont équivalents au cas sans goulot quand  $R_\rho$  devient grand.

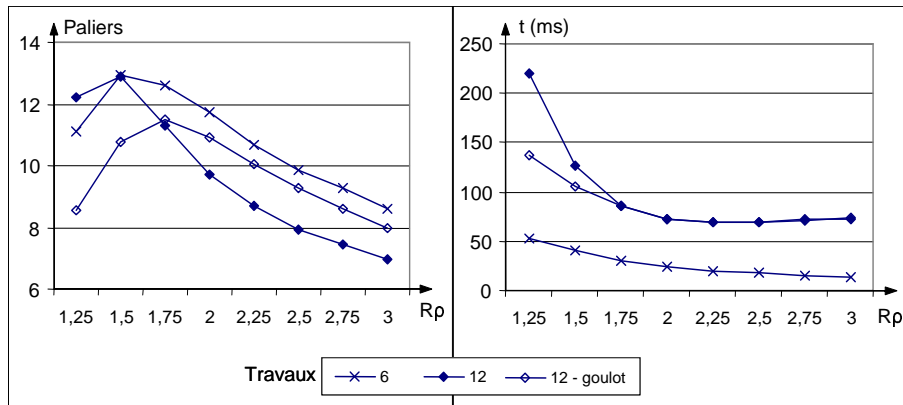
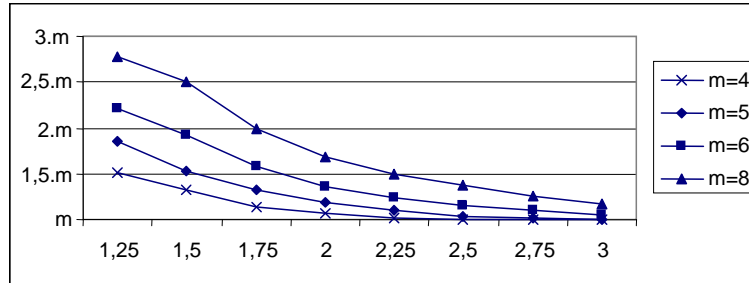


Figure 11. Problème avec goulot : nombre de paliers et temps de calcul

## 6.3. Variation du nombre de machines

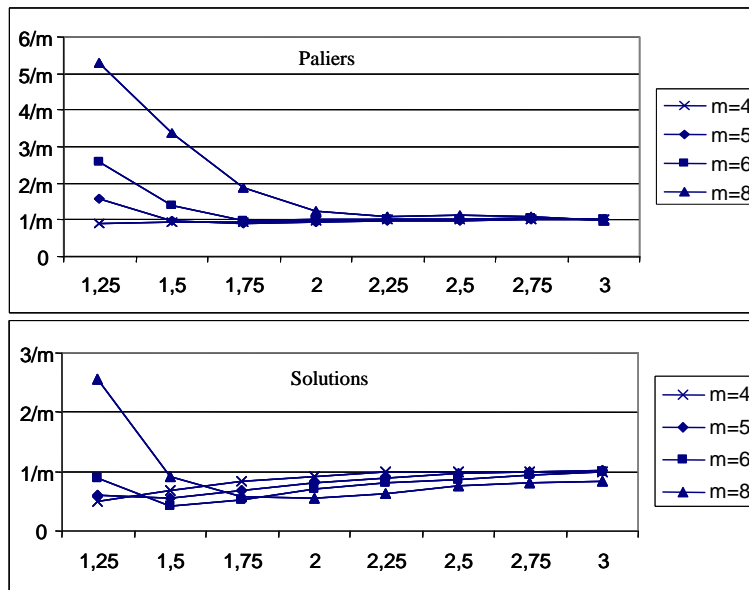
Le nombre de solutions du problème d'affectation est directement lié au nombre de machines ( $m!$  solutions quand les opérateurs ont des performances différentes). Les figures suivantes présentent un cas à 24 travaux pour des ateliers à 4, 5, 6 et 8 machines.

La figure 12 présente l'évolution du nombre de paliers en fonction de  $R_\rho$ . Les valeurs sont données en fonction de  $m$ . Dans tous les cas, le nombre de paliers diminue quand  $R_\rho$  augmente, et tend vers  $m$ . Toutefois, le nombre reste d'autant plus important que  $m$  est grand.



**Figure 12.** *Problème à 24 travaux : nombre de paliers*

La figure 13 montre la proportion du nombre de paliers visitée durant la recherche de solution, et la proportion du nombre de solutions évaluée. On constate à nouveau que le nombre de paliers visités tend vers 1 ( $1/m^e$  de  $m$  paliers), avec  $1/m^e$  des solutions du problème d'affectation évaluées, soit  $(m - 1)!$  solutions. Lorsque  $R_\rho$  est faible, la qualité de la borne reste liée au rapport entre le nombre de travaux et le nombre de machines (importance de la partie ( $b'$ )). Le temps d'exécution suit cette tendance.



**Figure 13.** *Problème à 24 travaux : proportions des paliers et des solutions visitées*



## 7. Conclusion

Dans cet article, nous avons étudié le problème d'ordonnancement d'un *flowshop* pour lequel les opérateurs ont une performance qui influe sur les durées opératoires.

L'étude de simulation a montré que la règle d'affectation intuitive utilisée dans les heuristiques  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  et  $\tilde{\mathcal{H}}_2$  permet d'obtenir des résultats assez proches de l'optimum.

Cette étude a également permis d'identifier une règle d'affectation des opérateurs, sur laquelle nous nous sommes basés pour établir une borne inférieure du critère. Cette règle repose à la fois sur la performance des opérateurs et sur la charge des machines. La détermination des paliers permet d'identifier les affectations d'opérateurs importantes pour le critère. Le calcul de la borne par palier est utilisé pour limiter le nombre de solutions à évaluer lors de la recherche d'une solution minimale. Au-delà de cette recherche de solution, la démarche montre qu'il est possible d'identifier ce qui est important dans une affectation pour obtenir une bonne valeur du critère.

Nombreuses sont les évolutions possibles de ce travail. Une première possibilité serait la mise en œuvre d'une méthode exacte de résolution, intégrant affectation et séquençement, *via* une méthode par séparation et évaluation. Cependant, l'intérêt d'une telle méthode est limité, compte tenu du caractère peu réaliste de la quantification exacte de la performance. Une autre direction de travail serait d'étudier l'impact des variations de performance et de durées opératoires sur les résultats. Enfin, on peut envisager le problème dynamique, avec changement d'affectation libre, périodique ou en fin d'opérations, l'étude d'autres structures d'ateliers et la prise en compte de modèles plus fins de la performance (performance associée à une machine, une tâche, performance évolutive, etc.).

## 8. Bibliographie

- Baptiste P., Giard V., Haït A., Soumis F. (eds), *Gestion de production et ressources humaines. Méthodes de planification dans les systèmes productifs*, Presses Internationales Polytechniques, Montréal, 2005.
- Arditti D., Todkemir O., Suh K., « Effect of learning on line balancing scheduling », *International Journal of Project Management*, vol. 19, n° 5, p. 265-277, juillet, 2001.
- Bartoldi J., « Guaranteed-accuracy round-off algorithm for cyclic scheduling and set covering », *Operation Research*, vol. 29, p. 501-510, 1981.
- Blazewicz J., Eiselt H., Finke G., Laporte G., Weglarz J., « Scheduling tasks and vehicles in a flexible manufacturing system », *Journal of Flexible Manufacturing Systems*, vol. 4, n° 1, p. 5-16, 1991.
- Bourland K., Carl L., « Parallel-machine scheduling with fractional operator requirements », *IIE Transactions*, vol. 26, n° 5, p. 56-65, 1994.
- Brauner N., Finke G., « Cycles and permutations in robotic cells », *Mathematical and computer modelling*, vol. 34, p. 565-591, 2001.
- Chen Z., « Simultaneous job scheduling and resource allocation on parallel machines », *Annals of Operations Research*, vol. 129, p. 135-153, 2004.

- Cheurfa M., Baptiste P., Campagne J.-P., Grimaud F., « Affectation des ressources humaines en ordonnancement cyclique : cas de réaffectation en fin de tâches », *actes de 5<sup>e</sup> Conférence Francophone de MODélisation et SIMulation, MOSIM'04, Nantes, France*, p. 815-822, 2004.
- Conway R., Maxwell W., Miller L., *Theory of Scheduling*, Addison-Wesley, 1967.
- Croci F., Perona M., Pozzetti A., « Work-force management in automated assembly systems », *International Journal of Production Economics*, vol. 64, n° 1-3, p. 243-255, 2000.
- Daniels R., Mazzola J., « Flow shop scheduling with ressource flexibility », *Operations Research*, vol. 42, n° 3, p. 504-522, 1994.
- Daniels R., Mazzola J., Shi D., « Flow shop scheduling with partial resource flexibility », *Management Science*, vol. 50, n° 5, p. 658-669, 2004.
- Dantzig G., « A comment on Edie's traffic delays at toll booths », *Operations Research*, vol. 2, p. 339-341, 1954.
- Desaulnier G., Desrosiers J., Gamache M., Soumis F., Crew scheduling in air transportation, Rapport n° G-97-26, Les cahiers du GERAD, 1997.
- Dondeti V. R., Mohanty B., « Impact of learning and fatigue factor on single machine scheduling with penalties for tardy jobs », *European Journal of Operational Research*, vol. 105, n° 3, p. 509-524, mars, 1998.
- Ernst A., Jiang H., M. Krishnamoorthy D. S., « Staff scheduling and rostering : a review of applications, methods and models », *European Journal of Operational Research*, vol. 153, n° 1, p. 3-27, février, 2004.
- Garey M. R., Johnson D. S., Sethi R., « The complexity of flowshop and jobshop scheduling », *Mathematics of operations research*, vol. 1, n° 2, p. 117-129, May, 1976.
- Grabot B., Letouzey A., « Short-term management in manufacturing systems : new requirements and DSS prototyping », *Computers in Industry*, vol. 43, n° 1, p. 11-29, août, 2000.
- Hung R., « Single-shift off-day scheduling of a hierarchical workforce with variable demand », *European Journal of Operational Research*, vol. 78, n° 1, p. 49-57, octobre, 1994.
- Mercier A., Cordeau J.-F., Soumis F., « A computational study of benders decomposition for the integrated aircraft routing and crew scheduling problem », *Computers and Operations Research*, vol. 32, n° 6, p. 1451-1476, 2005.
- Mosheiov G., « Scheduling problem with a learning effect », *European Journal of Operational Research*, vol. 132, n° 3, p. 687-693, août, 2001.
- Nawaz M., Enscore E., Ham L., « A heuristic algorithm for the m machine, n job flow shop sequence problem », *Omega*, vol. 11, n° 1, p. 91-95, 1983.
- Pinedo M., *Scheduling. Theory, Algorithms, and Systems*, 2<sup>e</sup> edn, Prentice Hall, 2002.
- Rekik M., Cordeau J.-F., Soumis F., Implicit shift scheduling with multiple breaks and Pre- and Post-break restrictions, Rapport n° G-2002-32, Les cahiers du GERAD, 2002.
- Tchommo L., Baptiste P., Soumis F., « Étude bibliographique de l'ordonnancement simultané des moyens de production et des ressources humaines », *actes du 5<sup>e</sup> Congrès International de Génie Industriel, GI2003, Québec, Canada*, 2003.
- Thomson G., « Optimal scheduling of shifts and breaks using employees having limited time-availability », *International Journal of Service Industry Management*, vol. 7, n° 1, 1996.
- Vairaktarakis G., Cai X., Lee C., « Workforce planning in synchronous production systems », *European Journal of Operational Research*, vol. 136, n° 3, p. 551-572, février, 2002.

### Annexe A : Données de l'exemple

Le tableau 1 donne les valeurs des durées opératoires moyennes  $\hat{p}_{ij}$  pour le cas présenté dans les sections 3.1, 3.4 et 4.3 (figures 1, 4 et 5). Le tableau 2 donne les valeurs de performance des opérateurs. La répartition est progressive, avec  $\alpha = 0, 1$ .

**Tableau 1.** Cas à 20 travaux et 6 machines : durées opératoires moyennes  $\hat{p}_{ij}$  et charges moyennes des machines  $S\hat{p}_j$

Travaux $i$	Machines $j$					
	1	2	3	4	5	6
1	23	80	25	71	25	40
2	91	56	68	45	92	87
3	11	30	32	52	24	38
4	50	41	59	33	22	15
5	79	83	46	78	31	73
6	72	38	40	40	86	50
7	34	83	78	27	24	33
8	79	46	17	68	26	59
9	94	78	31	93	38	40
10	55	38	49	60	42	100
11	66	45	55	80	44	54
12	12	12	88	19	49	51
13	12	37	69	16	51	66
14	33	48	64	37	26	14
15	52	36	24	54	98	35
16	57	45	81	47	56	91
17	18	30	42	30	19	83
18	46	20	11	64	43	85
19	90	63	10	92	44	38
20	67	10	61	27	50	27
Charge $S\hat{p}_j$	1041	919	950	1033	890	1079

**Tableau 2.** Cas à 20 travaux et 6 machines : performance des opérateurs

Opérateurs $e$					
1	2	3	4	5	6
0,800	0,869	0,952	1,053	1,176	1,333