
Forme Standard de Passage : une alternative à la synthèse multi-objectifs

Fabien Delmond * — Daniel Alazard ** — Christelle Cumer *

* ONERA

Département Commande des Systèmes et Dynamique du Vol
2, avenue Édouard Belin
F-31055 Toulouse Cedex 4
christelle.cumer@onera.fr

** SUPAERO

10, avenue Édouard Belin
F-31055 Toulouse Cedex 4
daniel.alazard@supaero.fr

RÉSUMÉ. Ce chapitre présente une généralisation de la forme standard de passage (CSF pour Cross Standard Form) pour un système et un correcteur d'ordre quelconque donnés (voire, un correcteur à deux degrés de liberté). La CSF est un problème standard de commande, dont l'unique solution optimale, au sens de la norme H_2 et/ou H_∞ , correspond à un correcteur préalablement donné. En d'autres termes, ce correcteur connu est solution d'un problème de commande optimale H_2 et/ou H_∞ inverse. D'un point de vue commande, l'idée générale est d'initialiser une procédure de synthèse H_2 et/ou H_∞ avec une CSF, construite à partir d'un correcteur existant, pour tenir compte de spécifications de robustesse ou de contraintes fréquentielles supplémentaires. Cette méthode est appliquée sur un exemple académique et sur un exemple industriel du domaine aéronautique.

ABSTRACT. This chapter presents a generalization of the Cross Standard Form (CSF) for a given plant and a given controller of arbitrary order (even, a two-degree of freedom compensator). The CSF is a canonical augmented standard plant whose H_∞ or H_2 unique optimal controller is a given controller, that is a solution to the general inverse optimal control problem. From the control design point of view, the general idea is to apply the CSF to a first controller in order to initialize an H_∞ design procedure to handle complementary frequency-domain constraints or robustness specifications. An academic example and an industrial application in the field of aeronautics engineering are given.

MOTS-CLÉS : synthèse multi-objectifs, problèmes inverses, synthèse H_∞ , synthèse H_2

KEYWORDS: multi-objective synthesis, inverse control problem, H_∞ design, H_2 design

1. Introduction

La procédure de synthèse d'une loi de commande, présentée dans ce chapitre, vise à minimiser itérativement plusieurs critères de type H_2 ou H_∞ . L'idée essentielle de cette méthode est d'enrichir un problème de commande standard avec de nouvelles spécifications H_2 et/ou H_∞ , tout en prenant en compte intrinsèquement le résultat d'une précédente synthèse.

Dans un souci de simplicité (sauf lorsque le contraire sera précisé) et sans perte de généralité, le nombre d'objectifs (ou de groupes d'objectifs) sera supposé égal à deux. Par contre, les objectifs considérés doivent pouvoir se mettre sous la forme de critères H_2 ou H_∞ , et ce de façon indépendante. Le problème général se schématise alors de la façon suivante :

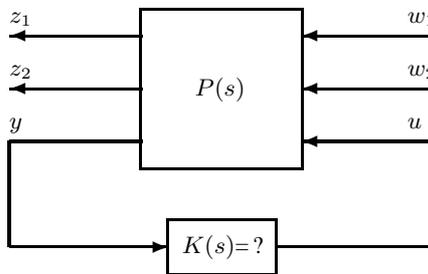


Figure 1. Présentation d'un problème standard.

et le but est de trouver le correcteur $K(s)$ qui minimise d'une part la norme (au sens H_2 ou H_∞) du transfert $w_1 \rightarrow z_1$ et d'autre part la norme (au sens H_2 ou H_∞ , mais indépendamment de la norme utilisée sur le premier transfert) du transfert $w_2 \rightarrow z_2$.

Bien entendu, la minimisation des deux critères qui font tous les deux appel à la même variable d'optimisation (ici $K(s)$) n'est pas compatible. On cherche alors à résoudre un problème voisin, ce problème étant souvent présenté sous une des deux formes suivantes :

– soit, on regroupe les deux transferts sous la même norme, à condition que les deux critères choisis soient de même nature (H_2 ou H_∞ tous les deux). Auquel cas, le problème se formalise de la sorte :

$$K^*(s) = \arg \min_{K(s)} (\|F_l(P(s), K(s))\|_{2 \text{ ou } \infty})$$

– soit, on se fixe un objectif minimal à atteindre pour un des deux critères, et on cherche à minimiser le second sous la contrainte que le premier objectif soit réalisé. Le problème se formalise cette fois-ci comme :

$$K^*(s) = \arg \min_{K(s)} (\|F_l(P(s), K(s))_{11}\|_{2 \text{ ou } \infty})$$

avec $\|F_l(P(s), K(s))_{22}\|_{2 \text{ ou } \infty} < \gamma$

Dans la première formulation, des pondérations sur les différentes entrées w_1, w_2 et les différentes sorties z_1, z_2 sont souvent introduites pour pondérer l'influence des deux critères dans le critère global. Mais, cette méthode présente deux inconvénients majeurs. D'une part, il est impossible de considérer deux critères de normes différentes. Et d'autre part, l'influence des transferts "croisés" ($w_1 \rightarrow z_2$ et $w_2 \rightarrow z_1$), dans le critère global, n'est pas maîtrisée de façon simple avec le jeu des pondérations, et entraîne une solution conservative.

La seconde formulation est en soi bien meilleure. Malheureusement, en pratique, la résolution du problème correspondant est difficile. Des solutions existent, notamment avec l'aide de LMIs¹; l'article de SCHERER, GAHINET et CHILALI [SHE 97] en donne un exemple.

La solution proposée dans ce chapitre conserve la "simplicité" de résolution de la première formulation et permet d'intégrer des critères de natures différentes. Cette méthode est basée sur un outil, nommé *Forme Standard de Passage* [CSF]², qui permet, à partir d'un correcteur existant³, de construire un problème standard H_2 ou H_∞ , dont l'unique solution est le correcteur en question. Cette CSF est donc une solution particulière des problèmes H_2/H_∞ inverses.

L'idée était déjà apparue dans [VOI 03, ALA 04]. Mais les différentes réalisations de la CSF y étaient données *a priori* et étaient décrites à partir de la forme estimation/retour d'état du correcteur initial. La CSF ne s'exprimait donc que dans les cas où le système est d'ordre inférieur à celui du correcteur. L'apport original de ce chapitre est la généralisation de l'outil. En effet, une formulation de la CSF qui permet de prendre en compte des correcteurs d'ordre quelconque (vis-à-vis de l'ordre du système) augmente considérablement le champ d'action de l'outil. En aéronautique en particulier, elle permet de prendre en compte, dans une procédure de synthèse optimale basée sur la forme standard, un correcteur d'ordre faible préalablement synthétisé selon un savoir-faire industriel pour satisfaire une partie du cahier des charges. Une telle utilisation de la CSF est présentée dans les exemples d'application en fin de chapitre. Une généralisation aux correcteurs à deux degrés de liberté est également menée.

Le chapitre est composé de la manière suivante. Le **paragraphe 2** rappelle la définition, bien précise, de la CSF.

À partir de sa définition, la CSF est ensuite établie, dans le **paragraphe 3**, pour un correcteur d'ordre inférieur ou égal à celui du système. Des conditions nécessaires pour que la Forme Standard de Passage existe (ou n'existe pas) y seront également posées. Puis, cette CSF est généralisée, dans le **paragraphe 4**, aux correcteurs d'ordre quelconque et aux correcteurs à deux degrés de liberté.

Le **paragraphe 5** précise alors comment l'outil CSF peut être utile pour la résolution du problème multi-objectifs. La démarche générale est la suivante :

-
1. "Linear Matrix Inequalities".
 2. de l'anglais "Cross Standard Form".
 3. préalablement synthétisé par une approche même quelconque

* un correcteur optimal est synthétisé pour le sous-problème faisant intervenir uniquement le transfert $w_1 \rightarrow z_1$,

* puis, un nouveau problème standard est construit grâce à la CSF, dont le correcteur obtenu au point précédent est la solution,

* enfin, ce problème est complété par le second transfert $w_2 \rightarrow z_2$ et c'est sur ce problème augmenté que s'effectue la synthèse finale.

Cette façon de procéder est illustrée dans le **paragraphe 6** sur un exemple simple, sur un système masses-ressort et dans le **paragraphe 7**, sur un exemple aéronautique dans lequel l'objectif est de modifier des lois de commande de vol existantes afin de réduire les charges dues à la turbulence.

2. Définitions

L'intérêt pratique des solutions des problèmes inverses H_2 ou H_∞ réside dans la possibilité de rassembler plusieurs approches différentes pour un problème et de pouvoir prendre en compte différentes spécifications [SUG 98, SHI 97]. La Forme Standard de Passage constitue une solution à la fois pour le problème inverse H_2 , et pour le problème inverse H_∞ . Cependant, l'approche sous laquelle est traité le problème inverse est différente des approches existantes.

Une solution du problème inverse H_∞ dans le cas général (entrées et sorties multiples, retour de sortie dynamique) a déjà été établie dans [SEB 01] : considérant une structure de pondérations $W(s)$ connue ainsi qu'un correcteur $K(s)$ également connu, le problème consistait à trouver le système correspondant $G(s)$ de sorte que :

$$\|F_l(F_l(W(s), G(s)), K(s))\|_\infty < \gamma$$

L'illustration se trouve figure 2. Cependant, le problème inverse auquel nous nous intéressons ici est différent : il s'agit en quelque sorte de trouver la structure des pondérations en connaissant le système $G(s)$ et le correcteur $K(s)$.

2.1. Notations

Avant de procéder à la construction de la Forme Standard de Passage, les notions qui seront utilisées ultérieurement vont être définies ici.

Considérons un système $G(s)$ d'ordre n , stabilisable et détectable, pourvu de m entrées et de p sorties, dont la réalisation d'état minimale s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad [1]$$

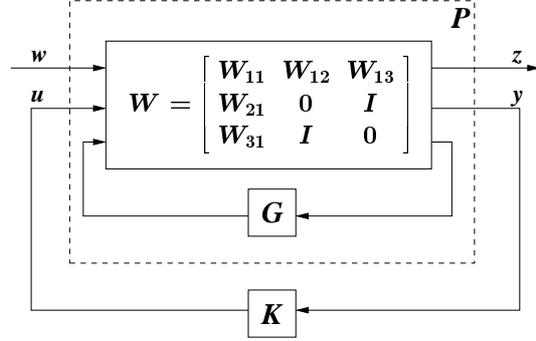


Figure 2. Schéma bloc d'une forme standard P et du correcteur K .

Considérons également un correcteur stabilisant $K_0(s)$ d'ordre n_k , pourvu de p entrées et m sorties, dont une réalisation d'état minimale s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_k \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y \end{bmatrix} \quad [2]$$

La forme standard générale entre les entrées exogènes w , les commandes u , les sorties exogènes z et les sorties contrôlées y est notée :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \quad [3]$$

avec la réalisation d'état correspondante :

$$P(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A_p & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad [4]$$

2.2. Problèmes inverses

Les problèmes H_2 et H_∞ inverses sont alors définis comme suit :

Définition 2.1 (Problème inverse H_2) Il s'agit de trouver une forme standard $P(s)$ qui vérifie les conditions suivantes :

- $P_{yu}(s) = G(s)$,
- K_0 stabilise $P(s)$,
- $K_0(s) = \arg \min_{K(s)} \|F_l(P(s), K(s))\|_2$,

Autrement dit : $K_0(s)$ minimise $\|F_l(P(s), K(s))\|_2$.

Définition 2.2 (Problème inverse H_∞) Il s'agit de trouver une forme standard $P(s)$ qui vérifie les conditions suivantes :

- $P_{yu}(s) = G(s)$,
- K_0 stabilise $P(s)$,
- $K_0(s) = \arg \min_{K(s)} \|F_l(P(s), K(s))\|_\infty$,

Autrement dit : $K_0(s)$ minimise $\|F_l(P(s), K(s))\|_\infty$.

On remarquera que ces deux définitions ne diffèrent que par la norme employée.

À noter, que si

$$\|F_l(P(s), K_0(s))\|_2 = 0$$

est vérifiée, alors,

$$\|F_l(P(s), K_0(s))\|_\infty = 0$$

est également vérifiée. La réciproque est également vraie. Ceci conduit à introduire la notion de Forme Standard de Passage.

2.3. Forme Standard de Passage

Définition 2.3 Si la forme standard $P(s)$ vérifie les conditions suivantes :

- $P_{yu}(s) = G(s)$,
- K_0 stabilise $P(s)$,
- $F_l(P(s), K_0(s)) = 0$,

alors $P(s)$ est une forme standard pour le problème inverse H_2 et le problème inverse H_∞ , associée au système $G(s)$ et au correcteur $K_0(s)$.

Par construction, cette forme standard est solution des problèmes H_2 et H_∞ inverses.

Cette définition a déjà été utilisée dans [ALA 04]. Cependant, avec une synthèse H_2 ou H_∞ sur la forme standard ainsi créée, nous aimerions obtenir le correcteur initial (et uniquement celui-ci) afin d'éviter des pertes d'informations (ou d'explorer un espace de solutions admissibles trop vaste). Or, la définition 2.3 ne garantit pas ce résultat. En effet, l'exemple trivial suivant soulève ce problème. Supposons $P(s)$ tel que :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad [5]$$

On peut facilement vérifier que cette forme standard remplit les conditions de la définition 2.3, quel que soit le correcteur stabilisant. Le problème perd alors une partie

conséquence des données initiales : l'intégralité des données du correcteur initial. Pour pallier ce problème, la définition 2.3 doit être complétée :

Définition 2.4 (Forme Standard de Passage) *Si la forme standard $P(s)$ vérifie les conditions suivantes :*

- **C1** $P_{yu}(s) = G(s)$,
- **C2** K_0 stabilise $P(s)$,
- **C3** $F_l(P(s), K_0(s)) = 0$,
- **C4** $K_0(s)$ est l'unique solution du problème H_2 ou H_∞ optimal $P(s)$,

alors $P(s)$ est appelée Forme Standard de Passage (CSF), associée au système $G(s)$ et au correcteur $K_0(s)$. Elle sera notée, par la suite, $P_{CSF}(s)$.

$K_0(s)$ devenant l'unique solution du problème, cette définition garantit la conservation de l'intégralité du problème (les données concernant $G(s)$ sont conservées grâce à la condition **C1**).

2.4. Compléments

Dans les paragraphes suivants, nous nous proposons d'établir des Formes Standards de Passage dans différents cas en s'appuyant sur les définitions précédentes. Ces constructions font appel à d'autres notions qui sont introduites ici.

Définition 2.5 (Problème d'optimisation H_2 régulier) *Un problème est dit H_2 régulier s'il fait référence à un problème standard pour lequel $P(s)$ satisfait :*

- D_{12} est de rang plein en colonnes (injective),
- D_{21} est de rang plein en lignes (surjective),
- Les systèmes (A_p, B_1, C_2, D_{21}) et (A_p, B_2, C_1, D_{12}) n'ont pas de zéros invariants sur l'axe imaginaire.

Cette définition est tirée de [CHE 92]. Elle sera utilisée pour l'établissement de la condition **C4** lors de la construction de la CSF. En particulier, cette définition est associée au lemme suivant (cf. [CHE 92] pour plus de détails) :

Lemme 2.6 *Si le système $P(s)$ satisfait les conditions d'un problème régulier, alors $P(s)$ a un unique correcteur H_2 -optimal si et seulement si :*

- (A_p, B_2) est stabilisable,
- (A_p, C_2) est détectable.

De plus, dans ce cas précis, l'unique correcteur H_2 -optimal pour le problème $P(s)$ est donné par les équations (6)⁴.

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= (A_p + B_2 F + L C_2) \xi - L y \\ u_\xi &= F \xi \end{cases} \quad [6]$$

avec :

$$\begin{aligned} F &= -(D_{12}^T D_{12})^{-1} (D_{12}^T C_1 + B_2^T R) \\ L &= -(Q C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1} \\ R, Q &\geq 0 \end{aligned}$$

Q et R correspondant aux solutions stabilisantes des équations de RICCATI :

$$0 = R A_p + A_p^T R + C_1^T C_1 - (R B_2 + C_1^T D_{12}) (D_{12}^T D_{12})^{-1} (R B_2 + C_1^T D_{12})^T \quad [7]$$

$$0 = Q A_p^T + A_p Q + B_1 B_1^T - (C_2 Q + D_{21} B_1^T)^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 Q + D_{21} B_1^T) \quad [8]$$

Le lecteur pourra remarquer que le correcteur donné à l'équation (6) correspond à une forme estimation/retour d'état.

3. Construction de la CSF dans le cas $n_k \leq n$

Traisons dans un premier temps le cas du correcteur d'ordre inférieur ou égal au système. Le premier objectif est de construire une forme standard vérifiant les conditions **C1**, **C2** et **C3** de façon la plus générale possible. Dans un second temps, des conditions supplémentaires sur la forme standard précédemment obtenue seront introduites afin de remplir la condition **C4**. Une CSF sera alors obtenue. L'existence de cette Forme Standard de Passage est soumise à certaines conditions sur le système $G(s)$ et son correcteur $K_0(s)$, ce qui fera l'objet d'un troisième point.

Dans le but de simplifier les démonstrations, la matrice de transmission directe D du système $G(s)$ sera considérée comme nulle.

3.1. Construction d'un problème $P_{CSF}(s)$ général

Pour satisfaire la condition **C1**, une forme standard $P(s)$, supposée minimale, s'écrit selon l'équation (4) et doit vérifier :

$$\begin{aligned} A_p &= A & B_2 &= B \\ C_2 &= C & D_{22} &= D (= 0) \end{aligned}$$

4. Il est important de noter qu'ici les matrices D_{11} et D_{22} sont considérées comme nulles, sans que cela ne soit préjudiciable pour le cas général comme cela sera vu ultérieurement.

Les matrices B_1, C_1, D_{11}, D_{12} et D_{21} restent inconnues. Le correcteur étant stabilisant, la condition **C2** est remplie par défaut.

Nous calculons alors une représentation de $F_l(P(s), K_0(s))$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_k \\ z \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A + BD_kC & BC_k & B_1 + BD_kD_{21} \\ B_kC & A_k & B_kD_{21} \\ \hline C_1 + D_{12}D_kC & D_{12}C_k & D_{11} + D_{12}D_kD_{21} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ x_k \\ w \end{bmatrix} \quad [9]$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $F_l(P(s), K_0(s)) = 0$ (**C3**) réside dans l'existence d'un changement de base M de sorte que la nouvelle représentation d'état soit une décomposition de KALMAN de transmission directe nulle et de la forme :

$$F_l(P(s), K_0(s)) := \left[\begin{array}{cc|c} a_1 & a_{12} & b \\ 0 & a_2 & 0 \\ \hline 0 & c & 0 \end{array} \right] \quad [10]$$

Le changement de base donne le système d'équations suivantes :

$$\begin{aligned} M \begin{bmatrix} A + BD_kC & BC_k \\ B_kC & A_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_{12} \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} M \\ M \begin{bmatrix} B_1 + BD_kD_{21} \\ B_kD_{21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_1 + D_{12}D_kC & D_{12}C_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & c \end{bmatrix} M \\ D_{11} + D_{12}D_kD_{21} &= 0 \end{aligned}$$

Afin d'explicitier les calculs, nous décomposons la matrice M de la façon suivante :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

où $m_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $m_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n_k}$, $m_{21} \in \mathbb{R}^{n_k \times n}$ et $m_{22} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$. De plus, dans un objectif de lisibilité, nous noterons $C'_1 = C_1 + D_{12}D_kC$, $B'_1 = BD_kD_{21} + B_1$ et $A' = A + BD_kC$.

Le système résultant est donné ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{11}A' + m_{12}B_kC = a_1m_{11} + a_{12}m_{21} \\ m_{11}BC_k + m_{12}A_k = a_1m_{12} + a_{12}m_{22} \\ m_{21}A' + m_{22}B_kC = a_2m_{21} \\ m_{21}BC_k + m_{22}A_k = a_2m_{22} \\ \\ m_{11}B'_1 + m_{12}B_kD_{21} = b \\ m_{21}B'_1 + m_{22}B_kD_{21} = 0 \\ \\ C'_1 = cm_{21} \\ D_{12}C_k = cm_{22} \\ D_{11} + D_{12}D_kD_{21} = 0 \end{array} \right. \quad [11]$$

Ce système comporte comme inconnues les 4 blocs de la matrice M , les 3 blocs de la matrice a , ainsi que $b, c, D_{11}, D_{12}, D_{21}, C'_1$ et B'_1 ; soit 14 inconnues pour seulement 9 équations. Il est donc largement sous-déterminé. Afin de réduire le nombre de variables et de simplifier certaines équations, nous posons $m_{12} = 0$. Nous démontrerons par la suite que ce choix n'est pas restrictif.

Comme la matrice M est une matrice de changement de base, elle est donc inversible. m_{12} étant nulle, il résulte que les deux matrices m_{11} et m_{22} sont inversibles. Ceci permet de donner l'expression des inconnues suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = m_{11}A'm_{11}^{-1} - m_{11}BC_k m_{22}^{-1} m_{21} m_{11}^{-1} \\ a_{12} = m_{11}BC_k m_{22}^{-1} \\ a_2 = m_{21}BC_k m_{22}^{-1} + m_{22}A_k m_{22}^{-1} \\ \\ b = m_{11}B'_1 \\ \\ c = D_{12}C_k m_{22}^{-1} \\ C'_1 = D_{12}C_k m_{22}^{-1} m_{21} \\ \\ D_{11} = -D_{12}D_k D_{21} \end{array} \right. \quad [12]$$

Pour résoudre l'équation en B'_1 de la sixième équation du système (11), nous sommes amenés à faire l'hypothèse que m_{21} est inversible à droite. Autrement dit, il existe $m_{21}^+ \in \mathbb{R}^{n \times n_k}$ telle que⁵ $m_{21}m_{21}^+ = I$. On utilise généralement la pseudo-inverse de MOORE-PENROSE pour calculer cette matrice : $m_{21}^+ = m_{21}^T(m_{21}m_{21}^T)^{-1}$. Nous obtenons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} B'_1 = m_{21}^+ B''_1 \\ B''_1 = -m_{22}B_k D_{21} \end{array} \right. \quad [13]$$

La troisième équation du système (11) s'écrit finalement :

$$m_{21}A' + m_{22}B_k C - (m_{21}BC_k m_{22}^{-1} + m_{22}A_k m_{22}^{-1})m_{21} = 0 \quad [14]$$

Remarques :

1) 8 des 9 équations du système (11) reviennent finalement à écrire les variables $a_1, a_{12}, a_2, b, c, B'_1, C'_1$ et D_{11} en fonction des autres variables $m_{11}, m_{21}, m_{22}, D_{12}$ et D_{21} , qui sont donc équivalents à un ensemble de paramètres.

2) La dernière équation (14) relie entre eux les paramètres du système. Notons que nous pouvons résoudre le système sans avoir à déterminer les paramètres m_{11}, D_{12} et D_{21} , qui pourront donc être fixés ultérieurement.

3) Un changement de variable peut être effectué sur la matrice m_{21} : on pose T telle que $T = -m_{22}^{-1}m_{21}$. L'équation (14), après multiplication à gauche par m_{22}^{-1} se résume à :

$$T(A + BD_k C) - B_k C + TBC_k T - A_k T = 0 \quad [15]$$

5. Ceci est tout à fait compatible avec le fait que $n_k \leq n$.

C'est une équation de RICCATI généralisée, qui ne dépend que de T . Ce qui est cohérent avec le fait que nous ayons considéré m_{22} comme un paramètre du système.

Parmi cet ensemble de solutions, nous choisissons la solution particulière suivante :

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ T & -I \end{bmatrix} \quad [16]$$

Ce qui donne la forme standard suivante :

$$P(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & (T^+ B_k - B D_k) D_{21} & B \\ \hline -D_{12}(C_k T + D_k C) & -D_{12} D_k D_{21} & D_{12} \\ C & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad [17]$$

De par sa construction, cette forme standard vérifie la condition **C3** : $F_l(P(s), K_0(s)) = 0$ sous la condition que T vérifie l'équation de RICCATI (15). Il s'agit à présent de remplir la condition **C4** pour que $P(s)$ soit une Forme Standard de Passage.

3.2. Conditions sur l'unicité de la solution $K_0(s)$

En général, il n'est pas possible de déterminer un correcteur par synthèse H_2 sur le problème (17), puisqu'il y a une transmission directe ($-D_{12} D_k D_{21}$) entre les entrées exogènes w et les sorties exogènes z . Mais un simple changement de variables ($u \leftarrow u - D_k y$) permet de transformer ce problème en un problème régularisé $\bar{P}(s)$:

$$\left[\begin{array}{c|cc} A + B D_k C & T^+ B_k D_{21} & B \\ \hline -D_{12} C_k T & 0 & D_{12} \\ C & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad [18]$$

et donc :

$$\begin{aligned} F_l(P(s), K(s)) &= F_l(\bar{P}(s), K(s) - D_k) , \\ \arg \min_{K(s)} \|F_l(P(s), K(s))\| &= \arg \min_{K(s)} \|F_l(\bar{P}(s), K(s))\| + D_k . \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.6, le fait de démontrer que le problème $\bar{P}(s)$ est régulier garantira alors l'unicité de la solution du problème H_2 -optimal correspondant. $K_0(s)$, étant solution du problème, sera donc l'unique solution.

Par hypothèse, le problème $\bar{P}(s)$ vérifie les deux propositions suivantes (cf. sous-paragraphe 2.1, page 4) :

- (A, B) est détectable,
- (A, C) est stabilisable.

Nous allons montrer qu'il suffit d'avoir $D_{12} = I_m$ and $D_{21} = I_p$ pour que $\bar{P}(s)$ soit régulier.

Démonstration : Il est évident que $D_{12} = I_m$ et $D_{21} = I_p$ sont de rang plein respectivement, en colonne et en ligne. Considérons un zéro λ de $P_{21}(s)$. Alors il existe une direction d'état v et une direction d'entrée v' telles que :

$$\begin{cases} (A + BD_k C - \lambda I)v + T^+ B_k v' = 0 \\ C v + v' = 0 . \end{cases}$$

En substituant v' dans la première équation par sa valeur issue de la seconde équation, puis en multipliant par T à gauche, nous obtenons :

$$[T(A + BD_k C) - B_k C]v = \lambda T v$$

L'équation de RICCATI généralisée (15) implique :

$$(A_k - T B C_k) T v = \lambda T v . \quad [19]$$

Or, d'après l'équation (10), λ est une valeur propre de la boucle fermée (donc, stable par hypothèse). **$P_{21}(s)$ ne peut donc pas avoir de zéros invariants sur l'axe imaginaire.**

Une démonstration analogue permet de prouver que **$P_{12}(s)$ également, ne peut pas avoir de zéros invariants sur l'axe imaginaire** (voir [DEL 06] pour plus de détails).

Le choix $D_{12} = I_m$ et $D_{21} = I_p$ assure que $P(s)$ est un problème régulier. Le correcteur $K_0(s)$ correspond à son unique solution. La forme standard :

$$P_{CSF}(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & (T^+ B_k - B D_k) & B \\ \hline -(C_k T + D_k C) & -D_k & I \\ C & I & 0 \end{array} \right] \quad [20]$$

est donc bien une Forme Standard de Passage.

REMARQUE. — Si la solution du problème $P_{CSF}(s)$ est unique, il n'en va pas de même avec la forme standard elle-même ; en effet la CSF qui a été obtenue ici est dépendante à la fois du choix de M et des choix de D_{12} et D_{21} .

REMARQUE. — Comme indiqué précédemment, la présence d'une transmission directe entre les entrées exogènes w et les sorties exogènes z pose des problèmes pour

la résolution du problème H_2 ou H_∞ . Cet écueil est contournable par le changement de variable $u \leftarrow u + D_k y$ (voir équation (18)) qui aboutit à un problème régularisé $\overline{P_{CSF}}(s)$.

3.3. Existence d'une CSF pour un couple donné $\{G(s), K_0(s)\}$

La construction de la CSF établie dans le sous-paragraphe 3.1 repose sur l'existence d'une matrice T vérifiant l'équation de RICCATI (15) page 10. Si l'équation de RICCATI a une solution, nous sommes donc assurés de pouvoir trouver une Forme Standard de Passage. Avant de démontrer la réciproque en raisonnant par l'absurde, nous allons rappeler les conditions sur l'existence des solutions de l'équation de RICCATI généralisée (15).

3.3.1. Conditions sur l'existence de T , solution de (15)

La construction de $P_{CSF}(s)$ est basée sur l'existence d'une matrice T de rang plein en lignes (solution de l'équation de RICCATI généralisée (15)). Cette équation de RICCATI peut également se formuler sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} -T & I \end{bmatrix} A_{cl} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = 0 \quad [21]$$

où la matrice associée à l'équation de RICCATI, A_{cl} , correspond à la matrice d'évolution de la boucle fermée construite sur le vecteur d'état $[x^T \ x_k^T]$:

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + BD_k C & BC_k \\ B_k C & A_k \end{bmatrix}$$

Cette équation peut être résolue par la technique des sous-espaces invariants, à savoir :

- trouver un sous-espace $S = \text{Im}(U)$ de dimension n de la matrice A_{cl} :

$$A_{cl} U = U \Lambda \quad [22]$$

Ce sous-espace est associé à un ensemble de n valeurs propres de A_{cl} parmi les $n + n_k$ disponibles :

$$\text{spec}(\Lambda) \in \text{spec}(A_{cl})$$

- puis, partitionner la matrice U des vecteurs qui engendrent ce sous-espace de la façon suivante :

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, U_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- enfin, calculer la solution :

$$T = U_2 U_1^{-1}.$$

L'existence d'une solution T satisfaisant (15) est démontrée lorsque les valeurs propres de la matrice A_{cl} sont distinctes ([NAR 77]). Dans le cas général, il existe plusieurs sous-espaces admissibles U et donc, plusieurs solutions. Chaque solution correspond à un choix particulier de n valeurs propres parmi l'ensemble des valeurs propres de la boucle fermée. Mais, ce choix devra tout de même tenir compte que T doit être inversible à droite : *i.e.* U_2 doit être de rang plein en lignes.

Des conditions nécessaires pour que U_2 soit de rang plein en lignes existent (voir [ALA 99a]) :

- S'il existe une valeur propre λ ingouvernable par la paire (A, B) , alors U doit être choisi de telle sorte que $\lambda \in \text{spec}(\Lambda)$.
- S'il existe une valeur propre λ inobservable par la paire (A, C) , alors U doit être choisi de telle sorte que $\lambda \notin \text{spec}(\Lambda)$.

REMARQUE. — D'un point de vue pratique, les conditions de non-existence de T (par exemple, la présence d'une valeur propre à la fois ingouvernable **et** inobservable) ne sont pas très restrictives.

À noter aussi qu'en règle générale, l'ensemble des solutions T de l'équation de RICCATI généralisée est restreint au sous-espace des matrices réelles. Une condition nécessaire pour que T soit réelle est : U doit être auto-conjugué et $\text{spec}(A_{cl})$ doit au moins contenir une valeur propre réelle si n est impair.

REMARQUE. — Si $K_0(s)$ n'est pas un correcteur stabilisant (et ne vérifie donc pas les hypothèses énoncées dans la définition 2.4 de la CSF), il est tout de même possible de résoudre en T l'équation de RICCATI généralisée. Mais une synthèse H_2 ou H_∞ sur la CSF ((20) ou plus exactement (18)) impliquant T , donnera un correcteur stabilisant $\hat{K}(s) \neq K_0(s)$. Il peut être prouvé ([ALA 99b]) que les valeurs propres de la boucle fermée $F_l(P_{CSF}, \hat{K})$ seront alors placées sur les valeurs propres stables et sur les valeurs opposées des valeurs propres instables de $F_l(P_{CSF}, K_0)$. Cette propriété est utilisée dans l'exemple présenté au paragraphe 6.

Dans le même ordre d'idée, le cas étudié ici, où $n_k \leq n$, conduit toujours à une CSF d'ordre n . Certaines routines de synthèse H_2 ou H_∞ appliquées au problème standard correspondant aboutiront alors à un correcteur d'ordre n , non minimal.

3.3.2. Existence d'une CSF

Maintenant, nous allons prouver (par un raisonnement par l'absurde) que la non-existence d'une solution T de rang plein en lignes de l'équation de RICCATI généralisée (15) implique la non-existence d'une CSF (et, par là-même, que le choix de m_{12} nul n'était pas restrictif).

Supposons donc

– qu’une CSF régulière (avec $D_{11} = 0$) existe pour le correcteur stabilisant $K_0(s) - D_k$ et pour le système modifié, stabilisable et détectable $\overline{G}(s)$ (ce changement de variables n’est pas restrictif) :

$$\overline{G}(s) := \left[\begin{array}{c|c} A + BD_kC & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right].$$

Pour rappel :

$$P_{CSF}(s) := \left[\begin{array}{cc|cc} A + BD_kC & & B_1 & B \\ & C_1 & 0 & D_{12} \\ & C & D_{21} & D = 0 \end{array} \right]$$

– mais que l’équation de RICCATI n’a pas de solution, et donc que T n’existe pas.

D’après le lemme 2.6, l’unique solution \widehat{K}_{H_2} du problème H_2 -optimal correspondant s’exprime en fonction d’une matrice gain de retour d’état F et d’une matrice gain d’estimation d’état L . La représentation d’état d’ordre n de ce correcteur associée au vecteur d’état \hat{x} s’écrit :

$$\widehat{K}_{H_2} := \left[\begin{array}{c|c} A + BD_kC + FB + LC & -L \\ \hline F & 0 \end{array} \right]. \quad [23]$$

Puisque la solution est unique : $\widehat{K}_{H_2}(s) = K_0(s) - D_k$. Or, la représentation d’état (23) est non-minimale si $n_K < n$. Donc, il existe une matrice de projection $S_{n_K \times n}$ (de rang plein en lignes) telle que : $x_k = S\hat{x}$ et

$$\begin{aligned} S(A + BD_kC + BF + LC) &= A_k S \\ -SL &= B_k \\ F &= C_k S. \end{aligned}$$

Ce qui implique que S est solution de l’équation suivante :

$$S(A + BD_kC) + SBC_kS - B_kC - A_kS = 0. \quad [24]$$

Ce qui est incohérent avec les hypothèses de départ, car cette équation est identique à l’équation de RICCATI (15). En d’autres termes, **si T (ou S) n’existe pas, alors la Forme Standard de Passage pour un $\overline{G}(s)$ et $K_0(s) - D_k$ donnés (ou $G(s)$ et $K_0(s)$) n’existe pas.**

Il y a équivalence entre les deux propositions ci-après.

– Il existe une Forme Standard de Passage régulière relative au couple $\{G(s), K_0(s)\}$.

– L’équation de RICCATI en T :

$$T(A + BD_kC) - B_kC + TBC_kT - A_kT = 0$$

possède au moins une solution surjective.

4. Généralisation

La Forme Standard de Passage a été établie dans le cas particulier d'un correcteur d'ordre inférieur ou égal au système, avec une transmission directe D nulle. Ce résultat est maintenant généralisé sous plusieurs points de vue :

- 1) La transmission directe D est réintroduite. Un schéma bloc est établi.
- 2) La CSF est donnée dans le cas $n_k > n$.
- 3) Est enfin examiné le cas d'un correcteur à deux degrés de liberté par ajout d'entrées et/ou de sorties.

4.1. Système avec transmission directe

Pour revenir au cas précédent, il faut définir une sortie y' telle que $y = y' + Du$. Vis-à-vis de cette nouvelle sortie, l'ensemble $\{G(s), K_0(s)\}$ est identique à l'ensemble $\{\overline{G}(s), \overline{K}_0(s)\}$ où :

- $\overline{G}(s)$ est le système dépourvu de sa transmission directe,
- $\overline{K}_0(s)$ est le correcteur sur lequel a été effectué un retour de sortie égal à D .

Ceci est illustré par la figure 3.

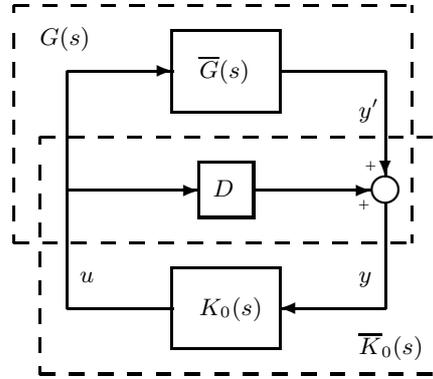


Figure 3. Normalisation de $G(s)$ et de $K_0(s)$

La représentation d'état du nouveau correcteur s'écrit :

$$\overline{K}_0(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_k + B_k D (I - D_k D)^{-1} C_k & B_k (I - D D_k)^{-1} \\ \hline (I - D_k D)^{-1} C_k & (I - D_k D)^{-1} D_k \end{array} \right] \quad [25]$$

Pour ce calcul, l'identité matricielle $D(I - D_k D)^{-1} = (I - D D_k)^{-1} D$ a été utilisée.

La Forme Standard de Passage qui est associée au couple $\{\overline{G}(s), \overline{K}_0(s)\}$ s'écrit alors (d'après le résultat de la page 12) :

$$\overline{P_{CSF}}(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & (T^+ B_k - B D_k)(I - D D_k)^{-1} & B \\ \hline -(I - D_k D)^{-1}(C_k T + D_k C) & -(I - D_k D)^{-1} D_k & I \\ C & I & 0 \end{array} \right] [26]$$

Les changements de variables $\bar{z} = (I - D_k D)^{-1} z$, $w = (I - D D_k)^{-1} \bar{w}$ (ces changements de variable ne modifient pas le problème puisque le transfert $w \rightarrow z$ est nul en boucle fermée) et $y = y' + D u$ permettent de revenir à la Forme Standard de Passage P_{CSF} correspondant au couple $\{G(s), K_0(s)\}$. Finalement, la représentation d'état de $P_{CSF}(s)$ est donnée par :

$$P_{CSF}(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & (T^+ B_k - B D_k) & B \\ \hline -(C_k T + D_k C) & D_k D D_k - D_k & I - D_k D \\ C & I - D D_k & D \end{array} \right] [27]$$

Rappelons que T reste solution de l'équation de RICCATI généralisée qui fait intervenir la matrice de la boucle fermée :

$$\begin{bmatrix} -T & I \end{bmatrix} A_{cl} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = 0 [28]$$

où

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B(I - D_k D)^{-1} D_k C & B(I - D_k D)^{-1} C_k \\ B_k(I - D D_k)^{-1} C & A_k + B_k D(I - D_k D)^{-1} C_k \end{bmatrix}$$

Le schéma bloc général associé à $P_{CSF}(s)$ est donné figure 4.

4.2. Cas du correcteur d'ordre supérieur ($n_k > n$)

Supposons maintenant que le correcteur $K_0(s)$ soit minimal, et que $n_k > n$. Nous prendrons dans un premier temps $D = 0$.

La matrice T , de dimension $n_k \times n$, ne peut pas être inversible à droite lorsque $n_k > n$. La construction présentée en 3.1 n'est donc plus valable. D'autre part, il est facile de démontrer que la CSF doit être d'ordre n_k (et non plus d'ordre n).

Supposons, en effet, qu'il existe une Forme Standard de Passage d'ordre q où $q < n_k$. Alors, d'après le lemme 2.6, le correcteur H_2 -optimal est d'ordre q et est unique. Le correcteur initial $K_0(s)$, qui est minimal, ne peut donc pas être la solution du problème $P_{CSF}(s)$. La CSF est donc d'ordre n_k .

À partir de la première équation, afin de réobtenir l'équation de RICCATI pour T , on pose l'équation suivante :

$$0 = V[A_{21} + B_{22}(D_k C + C_k T)]$$

La matrice V , qui est de dimension $n_k \times n_q$ est choisie de sorte que $[T \ V]$ soit une matrice inversible. Ce qui suppose que T est de rang plein (en colonnes cette fois-ci) et que V est le noyau de T^T . Nous noterons T^+ et V^+ les inverses à gauche de T et V soit :

$$\begin{bmatrix} T^+ \\ V^+ \end{bmatrix} [T \ V] = I \quad \text{et} \quad [T \ V] \begin{bmatrix} T^+ \\ V^+ \end{bmatrix} = I$$

Les équations du système (32) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} 0 &= T(A + BD_k C) - B_k C + TBC_k T - A_k T \\ 0 &= V[A_{21} + B_{22}(C_k T + D_k C)] \\ 0 &= [T \ V] \begin{bmatrix} A_{12} + BD_k C_{22} + BC_k V \\ A_{22} + B_{22}D_k C_{22} + B_{22}C_k V \end{bmatrix} - B_k C_{22} - A_k V \\ 0 &= [T \ V] \begin{bmatrix} B_{11} + BD_k D_{21} \\ B_{21} + B_{22}D_k D_{21} \end{bmatrix} - B_k D_{21} \\ 0 &= (C_{11} + D_{12}D_k C) + D_{12}C_k T \\ 0 &= (C_{12} + D_{12}D_k C_{22}) + D_{12}C_k V \end{aligned} \quad [33]$$

Parmi l'ensemble des solutions possibles, on choisit de prendre $B_{22} = 0$, $C_{22} = 0$, $D_{12} = I$ et $D_{21} = I$. Ce qui donne le système (34).

$$\begin{aligned} 0 &= VA_{21} \\ 0 &= [T \ V] \begin{bmatrix} A_{12} + BC_k V \\ A_{22} \end{bmatrix} - A_k V \\ 0 &= [T \ V] \begin{bmatrix} B_{11} + BD_k \\ B_{21} \end{bmatrix} - B_k \\ 0 &= C_{11} + D_k C + C_k T \\ 0 &= C_{12} + C_k V \end{aligned} \quad [34]$$

Une fois ce système résolu (on inverse la matrice $[T \ V]$), on arrive au problème $P(s)$ défini en (35). On peut remarquer que les choix pris pour la résolution du système ne sont pas uniques, comme c'était le cas pour $n_k \leq n$.

$$P(s) := \left[\begin{array}{cc|cc} A & (T^+A_k - BC_k)V & T^+B_k - BD_k & B \\ 0 & V^+A_kV & V^+B_k & 0 \\ \hline -C_kT - D_kC & -C_kV & -D_k & I \\ C & 0 & I & 0 \end{array} \right] \quad [35]$$

La condition **C3** vient d'être remplie, il reste à vérifier que la solution particulière choisie pour résoudre l'équation (33) aboutit à un problème régulier afin de valider la condition **C4**, de la définition 2.4.

4.2.2. Régularité du problème $P(s)$

Considérons un zéro λ de $P_{12}(s)$:

$$P_{12}(s) := \left[\begin{array}{cc|c} A & (T^+A_k - BC_k)V & T^+B_k - BD_k \\ 0 & V^+A_kV & V^+B_k \\ \hline C & 0 & I \end{array} \right]$$

Il existe alors une direction d'état v et une direction d'entrée v' telles que :

$$\begin{cases} 0 &= \begin{bmatrix} A - \lambda I_n & T^+A_kV - BC_kV \\ 0 & V^+A_kV - \lambda I_{n_q} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} T^+B_k - BD_k \\ V^+B_k \end{bmatrix} v' \\ 0 &= [C \ 0]v + v' \end{cases} \quad [36]$$

En substituant dans la première équation v' par son expression dans la seconde, on arrive à :

$$\begin{bmatrix} A + BD_kC - T^+B_kC & T^+A_kV - BC_kV \\ -V^+B_kC & V^+A_kV \end{bmatrix} v = \lambda I v \quad [37]$$

Or en effectuant un changement de base avec la matrice $[T \ V]$, on aboutit à l'équation (38).

$$[A_k - TBC_k][T \ V]v = \lambda [T \ V]v \quad [38]$$

On déduit alors que λ est aussi une valeur propre de la boucle fermée du système. Le correcteur étant stable par hypothèse, λ ne peut pas être située sur l'axe imaginaire. Une démonstration analogue conduit à la conclusion que $P_{21}(s)$ n'a pas non plus de zéros sur l'axe imaginaire. La condition **C4** est donc validée d'après le lemme 2.6. Le problème $P(s)$ défini en (35) constitue donc une Forme Standard de Passage lorsque le correcteur est d'ordre supérieur au système (sans transmission directe).

4.2.3. Transmission directe D

En passant par le correcteur $\overline{K}_0(s)$ et le système $\overline{G}(s)$, puis en faisant un changement de variable sur z et w , comme dans le cas $n_k \leq n$, la CSF s'écrit :

$$P_{CSF}(s) := \left[\begin{array}{cc|cc} A & T^+A_kV + (T^+B_kD - B)(I - D_kD)^{-1}C_kV & T^+B_k - BD_k & B \\ 0 & V^+[A_k + B_kD(I - D_kD)^{-1}C_k]V & V^+B_k & 0 \\ \hline -C_kT - D_kC & -C_kV & D_kDD_k - D_k & I - D_kD \\ C & 0 & I - DD_k & D \end{array} \right] \quad [39]$$

Rappelons, que dans ce cas, la matrice d'évolution de la boucle fermée s'écrit :

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B(I - D_kD)^{-1}D_kC & B(I - D_kD)^{-1}C_k \\ B_k(I - DD_k)^{-1}C & A_k + B_kD(I - D_kD)^{-1}C_k \end{bmatrix}$$

et que T est solution de l'équation de RICCATI généralisée :

$$\begin{bmatrix} -T & I \end{bmatrix} A_{cl} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = 0$$

On peut vérifier comme précédemment que les conditions **C3** et **C4** sont validées⁶.

Remarque : cette CSF, équation (39), englobe la précédente formulation proposée par Alazard et Voinot [ALA 04] qui faisait intervenir les gains K_c , K_f et le paramètre de YOULA $Q(s)$ de la réalisation estimation-retour d'état du correcteur $K_0(s)$ et qui s'écrit :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A & 0 & K_f & B \\ 0 & A_q & B_q & 0 \\ \hline K_c & -C_q & -D_q & I \\ C & 0 & I & 0 \end{array} \right] \quad [40]$$

4.3. Correcteur à deux degrés de liberté

La forme générale de la connection entre un système $G(s)$ et un correcteur à deux degrés de liberté est donnée par la figure 5.

La réalisation d'état d'un tel correcteur s'écrit :

$$K_0(s) := \begin{bmatrix} \dot{x}_k \\ u \\ z_c \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A_k & B_{k1} & B_{k2} \\ \hline C_{k1} & D_{k11} & D_{k12} \\ C_{k2} & D_{k21} & D_{k22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_k \\ y \\ e \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_k \\ u \\ z_c \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_k \\ y \\ e \end{bmatrix}$$

6. Le calcul n'est pas fait ici, mais il est analogue aux calculs menés en 4.1.

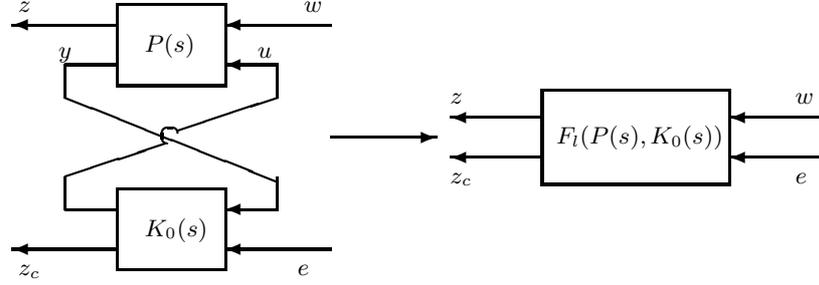


Figure 5. Correcteur à deux degrés de liberté

On peut alors écrire la CSF comme il a été fait dans le cas du correcteur à un seul degré de liberté. Ce qui donne, avec $D = 0$ et $n_k \leq n$:

$$P_{CSF}(s) := \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ z_2 \\ y \\ e \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} A & (T^+ B_{k_1} - B D_{k_{11}}) & (T^+ B_{k_2} - B D_{k_{12}}) & B & 0 \\ \hline -(C_{k_1} T + D_{k_{11}} C) & -D_{k_{11}} & -D_{k_{12}} & I & 0 \\ -(C_{k_2} T + D_{k_{21}} C) & -D_{k_{21}} & -D_{k_{22}} & 0 & I \\ C & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ u \\ z_c \end{bmatrix} \quad [41]$$

Le résultat revient à considérer qu'à la fois le correcteur et le système sont augmentés, avec :

$$G'(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B & 0 \\ \hline C & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

L'équation de RICCATI qui donne la matrice T reste valable à condition d'utiliser les matrices augmentées.

$$\begin{bmatrix} -T & I \end{bmatrix} A_{cl} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = 0$$

où

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + \mathcal{B}(I - \mathcal{D}_k \mathcal{D})^{-1} \mathcal{D}_k C & \mathcal{B}(I - \mathcal{D}_k \mathcal{D})^{-1} C_k \\ \mathcal{B}_k (I - \mathcal{D} \mathcal{D}_k)^{-1} C & A_k + \mathcal{B}_k \mathcal{D} (I - \mathcal{D}_k \mathcal{D})^{-1} C_k \end{bmatrix}$$

En développant les calculs, on remarque que la matrice A_{cl} ne dépend en réalité que de la partie "feedback" du correcteur.

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B(I - D_{k_{11}} D)^{-1} D_{k_{11}} C & B(I - D_{k_{11}} D)^{-1} C_{k_1} \\ B_{k_1} (I - D D_{k_{11}})^{-1} C & A_k + B_{k_1} D (I - D_{k_{11}} D)^{-1} C_{k_1} \end{bmatrix}$$

Ceci peut facilement être généralisé au cas $n_k > n$ avec ou sans transmission directe. Par exemple, il est facile de prouver que la Forme Standard de Passage dans ce cas présent, sans transmission directe, s'écrit :

$$P_{CSF}(s) := \left[\begin{array}{cc|cc} A & (T^+ A_k - BC_{k_1})V & T^+ B_{k_1} - BD_{k_{11}} & T^+ B_{k_2} - BD_{k_{12}} & B & 0 \\ 0 & V^+ A_k V & V^+ B_{k_1} & V^+ B_{k_2} & 0 & 0 \\ \hline -C_{k_1} T + D_{k_{11}} C & -C_{k_1} V & -D_{k_{11}} & -D_{k_{12}} & I & 0 \\ -C_{k_2} T + D_{k_{21}} C & -C_{k_2} V & -D_{k_{21}} & -D_{k_{22}} & 0 & I \\ C & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{array} \right] \quad [42]$$

5. Procédure de synthèse multi-objectifs

Comme expliqué précédemment, l'outil CSF peut convenir à la résolution d'un problème multi-objectifs. Le correcteur se synthétise alors en trois phases :

- 1) un correcteur initial est synthétisé de manière à répondre aux spécifications d'un premier objectif ;
- 2) la CSF est utilisée pour obtenir un problème standard à partir du correcteur créé en 1 ; puis des spécifications sont ajoutées sur le problème standard obtenu (dans le cas le plus classique, la première étape effectue une synthèse en performances et la seconde vise à robustifier le correcteur) ;
- 3) une seconde synthèse est enfin effectuée sur ce problème augmenté.

Pour mieux comprendre, considérons ici un problème de commande à deux canaux décrit par la réalisation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 & B \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} & D_{1.} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} & D_{2.} \\ C & D_{.1} & D_{.2} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix} \quad [43]$$

Le problème en performance correspond à la minimisation de la norme H_2 (ou H_∞) du premier transfert, entre l'entrée exogène w_1 et la sortie exogène z_1 . Le second transfert, entre l'entrée exogène w_2 et la sortie exogène z_2 , correspond, quant à lui, à un problème de robustesse⁷.

La solution qui consiste à minimiser directement la norme H_2 (ou la norme H_∞) du transfert $F_l(P(s), K(s))$ est conservative. En effet, elle conduit à minimiser en même temps les transferts $w_1 \rightarrow z_1$, $w_2 \rightarrow z_2$, mais également les transferts croisés $w_2 \rightarrow z_1$ et $w_1 \rightarrow z_2$. L'objectif est donc de réduire l'influence des termes croisés dans la synthèse.

⁷. Le problème rencontré peut être indifféremment un problème de robustesse dans un domaine fréquentiel incertain ou un problème de robustesse paramétrique.

Là encore, pour des raisons de simplicité, les matrices D_{12} et D_{21} seront supposées nulles.

5.1. Synthèse en performances

Dans un premier temps, une synthèse H_2 ou H_∞ est effectuée sur le sous-système donné par le modèle d'état suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B \\ C_1 & D_{11} & D_{1.} \\ C & D_{.1} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ u \end{bmatrix} \quad [44]$$

Cette synthèse conduit à un correcteur d'ordre n (taille de la matrice A), que l'on note $K_1(s)$. Ce correcteur est optimal pour ce qui est de la minimisation de la norme du transfert $w_1 \rightarrow z_1$.

5.2. Utilisation de la Forme Standard de Passage

Le correcteur précédent $K_1(s)$ constitue le point de départ pour la construction d'une CSF. Dans le cas où nous nous sommes placés, l'ordre du correcteur et celui du système sont identiques. Les résultats énoncés au paragraphe précédent conduisent à la Forme Standard de Passage $P(s)$ définie par l'équation (45) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z'_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & T^+B_{k_1} - BD_{k_1} & B \\ -C_{k_1}T - D_{k_1}C & D_{k_1}DD_{k_1} - D_{k_1} & I - D_{k_1}D \\ C & I - DD_{k_1} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w'_1 \\ u \end{bmatrix} \quad [45]$$

où T est solution de l'équation de RICCATI généralisée :

$$\begin{bmatrix} -T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + B(I - D_{k_1}D)^{-1}D_{k_1}C & B(I - D_{k_1}D)^{-1}C_{k_1} \\ B_{k_1}(I - DD_{k_1})^{-1}C & A_{k_1} + B_{k_1}D(I - D_{k_1}D)^{-1}C_{k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = 0$$

D'après la construction de la Forme Standard de Passage, le correcteur $K_1(s)$ est bien la solution du problème H_2/H_∞ correspondant.

À partir de ce nouveau problème (45) ainsi constitué, qui est une reformulation du problème (44), le second canal, écarté lors de la synthèse en performance, est remplacé. D'où la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z'_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & T^+B_{k_1} - BD_{k_1} & B_2 & B \\ -C_{k_1}T - D_{k_1}C & D_{k_1}DD_{k_1} - D_{k_1} & 0 & I - D_{k_1}D \\ C_2 & 0 & D_{22} & D_{2.} \\ C & I - DD_{k_1} & D_{.2} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w'_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix}$$

D'un point de vue des transferts directs $w'_1 \rightarrow z'_1$ et $w_2 \rightarrow z_2$, le problème exposé ci-dessus est strictement équivalent au problème initial.

5.3. Synthèse finale

Il ne reste plus qu'à effectuer une synthèse H_2 ou H_∞ sur le nouveau problème. Puisque la solution optimale du problème lié au canal 1 est par construction le correcteur $K_1(s)$ ⁸, la solution du problème à deux canaux sera "attirée" vers la solution $K_1(s)$. On a donc finalement robustifié le correcteur $K_1(s)$ issu de la synthèse en performances.

Il est difficile de prédire de façon certaine si le correcteur final $K(s)$ issu de la seconde synthèse sur le problème modifié (lorsqu'on ajoute le second canal à la Forme Standard de Passage déduite du correcteur $K_1(s)$) sera meilleur qu'un correcteur $K_0(s)$ qui aurait été synthétisé directement sur le problème nominal (43) (noté P_{nom}). Cependant, en pratique, on observe souvent une amélioration des normes des deux transferts $F_l(P_{\text{nom}}(s), K(s))_{11}$ et $F_l(P_{\text{nom}}(s), K(s))_{22}$ par rapport aux transferts qui font intervenir la solution $K_0(s)$: $F_l(P_{\text{nom}}(s), K_0(s))_{11}$ et $F_l(P_{\text{nom}}(s), K_0(s))_{22}$.

Par contre, il faut remarquer que lorsqu'on utilise la CSF pour obtenir le problème modifié et que l'on effectue la synthèse finale, on ne regarde pas de quelle manière le correcteur a été synthétisé lors de la synthèse en performances. En effet, indépendamment de la synthèse finale qui peut être une synthèse H_2 ou H_∞ , la synthèse en performances peut être indifféremment une synthèse H_2 , H_∞ ou un autre type de synthèse (on peut utiliser un correcteur déjà existant, synthétisé d'une façon qui nous est inconnue).

5.4. Utilisations de la procédure

La procédure exposée ci-dessus peut être généralisée pour d'autres types de synthèses. À titre d'exemple, on cite quelques possibilités de cette façon de faire :

– on dispose d'un problème à deux canaux (H_2 ou H_∞) et l'on souhaite réduire l'influence des transferts croisés lors de la synthèse. Il se peut que cette synthèse en trois étapes permette d'obtenir de meilleurs résultats (voir [ALA 04] pour un exemple académique).

– on dispose d'un problème à deux canaux mais les critères correspondants sont de deux types différents : un est H_2 , l'autre H_∞ . L'utilisation s'adapte assez bien à ce problème, l'ajout de gains sur les canaux 1' ou 2 lors de la synthèse finale permet de réaliser le compromis entre les deux objectifs. Notons tout de même que la synthèse reste conservative car l'influence des transferts croisés n'est pas totalement annulée. Notons également que les solutions offertes *via* les LMI's⁹ traduisent également d'un certain conservatisme.

– on dispose d'un correcteur initial, déjà synthétisé, et l'on souhaite le robustifier. Cette solution est alors tout à fait adaptée.

8. Rappelons aussi que $F_l(P(s), K_1(s))_{11} = 0$.

9. "Linear Matrix Inequalities".

– en outre, la reformulation du problème par la Forme Standard de Passage peut se réitérer plusieurs fois pour prendre en compte plusieurs spécifications différentes afin d’appréhender des structures d’incertitudes plus complexes.

6. Exemple académique

Cet exemple académique permet d’illustrer une manière d’exploiter la CSF pour inclure un correcteur d’ordre réduit, synthétisé par une approche classique, dans un problème de commande standard, enrichi d’une spécification de robustesse paramétrique supplémentaire.

La démarche est la suivante. Le correcteur initial $K_0(s)$ est tout simplement un correcteur proportionnel-dérivé, conçu sur un modèle simplifié $G_0(s)$, pour placer la dynamique dominante désirée. Or, il s’avère que $K_0(s)$ ne stabilise pas le modèle complet $G(s)$. La CSF est alors utilisée pour trouver un correcteur stabilisant $K(s)$ pour le modèle complet (ou détaillé) $G(s)$, qui retrouve la dynamique dominante obtenue avec $K_0(s)$ en tenant compte de la spécification de robustesse paramétrique sur le modèle complet $G(s)$.

Le système considéré est le système masses-ressort présenté figure 6. L’équation (46)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{f}{m_1} & \frac{f}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{f}{m_2} & -\frac{f}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad [46]$$

$$y = [0 \ 1 \ 0 \ 0] X$$

est le modèle détaillé $G(s)$ d’un système de positionnement en translation dans lequel on a modélisé la raideur de transmission entre l’actionneur et la charge.

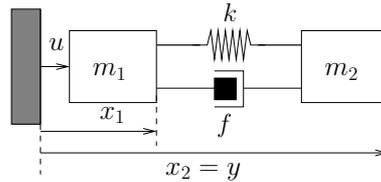


Figure 6. *Système masses-ressort.*

Par la suite, la valeur numérique de m_1 sera supposée égale à celle de m_2 .

Un changement de variables fait apparaître le mode commun $x_{mc} = x_1 + x_2$, représentatif du mode rigide, et le mode différentiel $x_d = x_2 - x_1$, représentatif du mode flexible.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{mc} \\ \ddot{x}_{mc} \\ \dot{x}_d \\ \ddot{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2\frac{k}{m_1} & -2\frac{f}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{mc} \\ \dot{x}_{mc} \\ x_d \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_1} \end{bmatrix} u \quad [47]$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} X$$

Si l'on suppose le système rigide, le modèle de base entre l'effort u et la position y de la charge est réduit au mode commun. Ce modèle très grossier s'écrit :

$$G_0(s) = \frac{1}{m s^2},$$

où $m = 2m_1$ ($= 1 Kg$ pour l'application numérique) représente la masse totale du système de positionnement (actionneur + charge). Il est alors bien connu qu'une commande proportionnelle dérivée permet d'obtenir la dynamique désirée (par exemple, un second ordre de pulsation $\omega_0 = 1 rad.s^{-1}$ et d'amortissement $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Cette loi de commande, où l'on introduit un pôle rapide à $-10\omega_0$ pour rendre le correcteur propre, s'écrit :

$$K_0(s) = -m \frac{\omega_0^2 + 2\xi \omega_0 s}{1 + \frac{s}{10\omega_0}}.$$

Une réalisation d'état de $K_0(s)$ est :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -10\omega_0 & 20\xi - 1 \\ \hline 20\omega_0^3 m & -40\xi\omega_0^2 m \end{array} \right] \quad [48]$$

La dynamique du modèle rigide obtenue en boucle fermée est représentée par le lieu des racines (en clair sur la figure 7) du transfert en boucle ouverte $-K_0(s)G_0(s)$. Elle satisfait bien la spécification modale sur la dynamique dominante.

On souhaite maintenant satisfaire les autres spécifications du cahier des charges (robustesse paramétrique) tout en gardant le comportement dynamique du mode commun obtenu avec le correcteur K_0 . On ne s'intéressera ici qu'à des correcteurs à 1 degré de liberté et on évaluera les solutions obtenues sur la position des modes dans le plan complexe. De même, seules les incertitudes sur la raideur k seront considérées ici. On peut montrer [ALA 99b, ARZ 00] que le modèle incertain peut être représenté par la forme $M(s) - \Delta$ suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \frac{z_{\Delta_k}}{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B_{\Delta} & B \\ \hline C_{\Delta} & D_{\Delta} & D_{\Delta} \\ \hline C & D_{\Delta} & D \end{bmatrix}}_{:= M(s)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \frac{w_{\Delta_k}}{u} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \in [-1, +1] \quad / \quad w_{\Delta_k} = \Delta z_{\Delta_k}$$

avec :

$$M(s) := \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{k}}{m_1} & \frac{\bar{k}}{m_1} & -\frac{f}{m_1} & \frac{f}{m_1} & -\frac{\sqrt{\delta}}{m_1} & \frac{1}{m_1} \\ \frac{\bar{k}}{m_2} & -\frac{\bar{k}}{m_2} & \frac{f}{m_2} & -\frac{f}{m_2} & \frac{\sqrt{\delta}}{m_2} & 0 \\ \hline \sqrt{\delta}\bar{k} & -\sqrt{\delta}\bar{k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

où $\delta = 0.3$ (30%) est la plage d'incertitude sur k . On peut alors écrire : $G(s) = F_u(M(s), 0) = D + C(sI - A)^{-1}B$.

Il est bien connu qu'une commande proportionnelle dérivée ne peut pas stabiliser un tel système flexible où l'action n'est pas colocalisée à la mesure. En effet, la dynamique en boucle fermée de $F_l(M, K_0)$ est :

$$\{0.68 \pm 2.02i, -0.71 \pm 0.61i, -9.95\}.$$

Nous sommes donc dans un cas où le correcteur initial ne stabilise pas le modèle. D'après la remarque de la page 3.3.1, il est toujours possible de résoudre en T l'équation de RICCATI généralisée 28. Mais les valeurs propres de la boucle fermée seront alors placées sur les valeurs propres stables et sur les valeurs opposées des valeurs instables de $F_l(PC_{SF}, K_0)$. Le placement stable rigide sera donc restitué sur la forme standard de passage construite à partir de ce correcteur non stabilisant.

Pour résoudre l'équation de RICCATI par la méthode des sous-espaces invariants, nous avons choisi le sous-espace associé aux 4 valeurs propres complexes. La solution est :

$$T = [0.0311, 1.5683, -0.0030, -0.1577].$$

S'en déduit alors le problème à 2 canaux $P(s)$:

$$\left[\begin{array}{c|cc|c} A & B_\Delta & T^+B_K - BD_K & B \\ \hline C_\Delta & D_\Delta & 0 & D_\Delta \\ -C_K T - D_K C & 0 & -D_K + D_K D D_K & I_m - D_K D \\ \hline C & D_\Delta & I_p - D D_K & D \end{array} \right] \quad [49]$$

Le premier canal correspond à la spécification de robustesse sur k . Une condition suffisante pour assurer la stabilité robuste est : la norme H_∞ de ce canal doit être inférieure à 1. Le second canal correspond à la forme standard de passage. Le correcteur du troisième ordre obtenu alors par synthèse H_∞ (macro-fonction `hinf1mi`) s'écrit :

$$\begin{aligned} \widehat{K}(s) &= \arg \min_{K(s)} \|F_l(P(s), K(s))\|_\infty \\ &= \frac{-73.62s^3 + 63.66s^2 - 170.4s - 57.16}{s^3 + 19.07s^2 + 118.4s + 305.8} \end{aligned}$$

et la norme H_∞ du premier canal est 1.02. On peut vérifier sur le lieu des racines de $-\widehat{K}(s)G(s)$ (en noir sur la figure 7) que la dynamique du mode commun est correctement placée, à proximité de la dynamique obtenue avec $K_0(s)$. La figure 8, qui

présente le lieu des racines autour de l'incertitude sur la raideur, met en évidence la stabilité de la boucle fermée pour toutes les valeurs du paramètre incertain k . On remarque également que l'incertitude sur k a très peu d'influence sur le placement du mode rigide (mode commun).

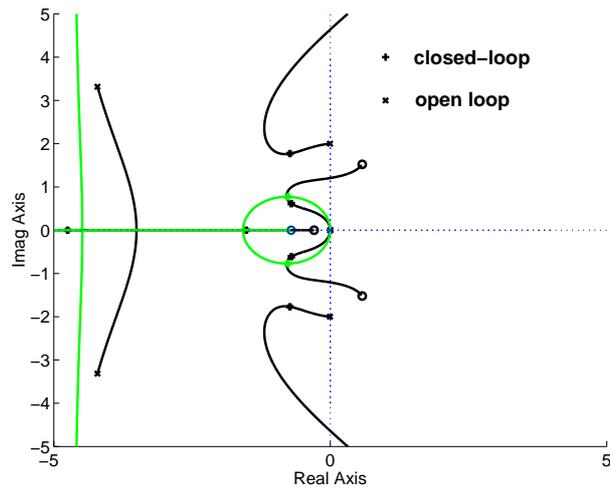


Figure 7. Lieux des racines : $-K_0G_0$ (clair), $-\hat{K}G$ (noir).

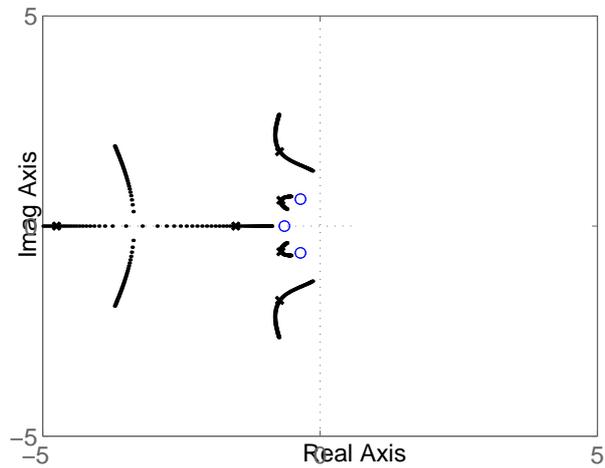


Figure 8. Lieu des racines de $F_u(F_l(M, \hat{K}), \Delta)$ pour $\Delta \in [-1, 1]$.

7. Application aux commandes de vol longitudinal

7.1. Modèle et contrôleur initial

Le schéma d'interconnexion entre les différentes données initiales (le modèle et le correcteur) est décrit sur la figure 9. $P_0(s)$ représente le modèle d'ordre 29 d'un avion en vol longitudinal, linéarisé autour d'une configuration de vol nominale. La dynamique de ce modèle peut être détaillée de la façon suivante :

- 1 mode rigide : l'oscillation d'incidence,
- 8 modes flexibles représentatifs de la déformation de la structure,
- 11 pôles (rapides et bien amortis par rapport aux modes précédents représentatifs des retards aérodynamiques et de la dynamique des actionneurs).

Ce modèle a 5 signaux de commande (5 surfaces de contrôle) : les 2 gouvernes de profondeur (intérieure et extérieure) et les 3 paires d'ailerons (intérieurs, moyens et extérieurs) qui peuvent être utilisés de façon symétrique dans le cadre de cette étude pour accroître les performances des commandes de vol. 5 mesures sont disponibles : la vitesse de tangage, le facteur de charge vertical au niveau du cockpit et 3 mesures du facteur de charges au niveau des ailes et sur le fuselage au droit des ailes afin d'observer, par comparaison relative, le premier mode flexible de la voilure.

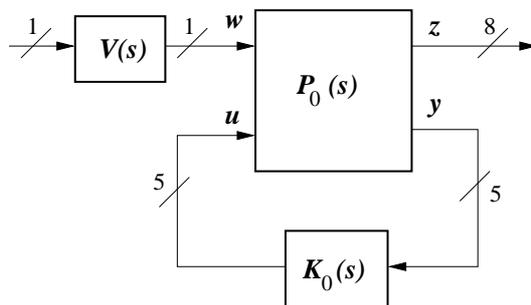


Figure 9. Connection du modèle P_0 et du correcteur initial K_0 .

Le correcteur initial $K_0(s)$ a été conçu pour accélérer l'oscillation d'incidence (qui est naturellement assez amorti) et pour amortir le premier mode flexible voilure. Cette synthèse, fondée sur un savoir faire industriel, utilise les différentes mesures et surfaces de contrôle ainsi que des filtres passe-bande judicieusement choisis pour atteindre ces objectifs malgré les incertitudes paramétriques. L'ordre de la réalisation minimale de ce contrôleur 5×5 est 11. Ce comportement dynamique peut être interprété sur le lieu des racines présenté figure 10. Ce lieu présente la dynamique en boucle ouverte (la dynamique du modèle P_0 est représentée par des \times noires, la dynamique du correcteur K_0 est représentée par des \times vertes) et la dynamique en boucle fermée (représentée par des $+$ noires). Les branches partant des \times vers les $+$ représentent

donc les trajectoires des pôles lorsque le gain de boucle varie de 0 à 1 simultanément sur les 5 chaînes de commande.

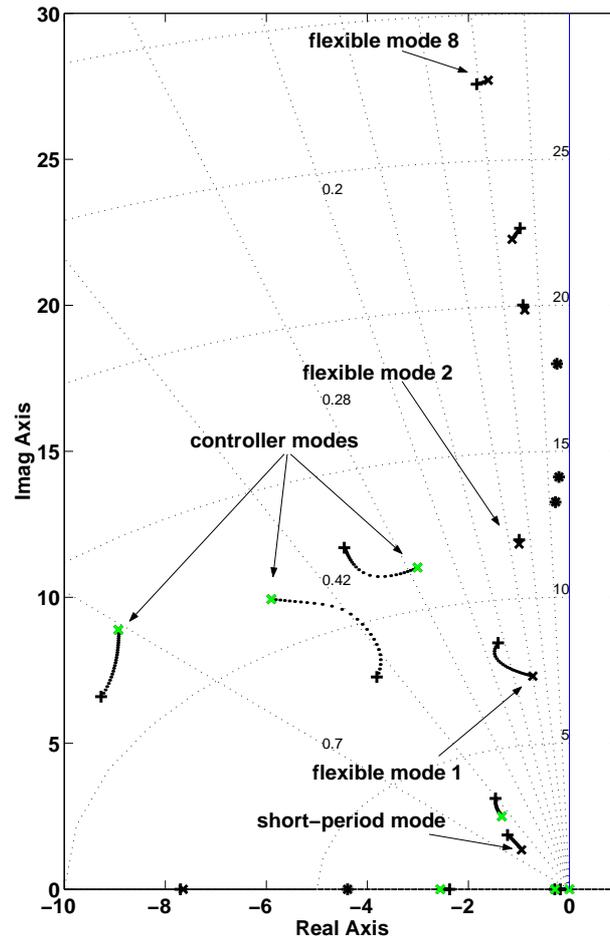


Figure 10. Lieu des racines de $P_0(s)$ avec $K_0(s)$.

Le modèle P_0 est également pourvu de l'entrée w représentant le vent vertical et de 8 sorties z représentant les charges en différents points de la structure (4 moments fléchissants : BM_i et 4 efforts tranchants : SF_i , $i = 1, \dots, 4$). $V(s)$ (voir figure 9) est un filtre passe-bas du second ordre permettant de prendre en compte la réponse fréquentielle de la turbulence (filtre de DRYDEN). Les réponses fréquentielles en boucle ouverte et en boucle fermée (sur le correcteur initial $K_0(s)$) du transfert des charges entre w et z sont représentées sur la figure 11. On notera que la première sortie $z(1)$ représente le moment fléchissant de la voilure au niveau de son encastrement sur le

fuselage et est la charge la plus importante lors du vol longitudinal en turbulence verticale. Le critère de performance des charges est la norme H_2 de ce transfert 1×8 . Les valeurs de ce critère en boucle ouverte et en boucle fermée (avec le contrôleur initial $K_0(s)$) sont respectivement :

$$\|P_0(1 : 8, 1)V\|_2 = 2.05 \cdot 10^7 ,$$

$$\|F_l(P_0, K_0)V\|_2 = 1.91 \cdot 10^7 .$$

La représentation d'état $P_0(s)$ est notée :

$$P_0(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C & D_{21} & D \end{array} \right] . \quad [50]$$

7.2. Nouvelle synthèse pour la réduction de charges

La première étape pour la construction de la CSF à partir des 4 matrices (A, B, C, D) de $P_{0,yu}(s)$ et des 4 matrices (A_k, B_k, C_k, D_k) de $K_0(s)$ consiste à résoudre en T l'équation de RICCATI généralisée (28). Il existe un ensemble combinatoire de solutions T selon le choix des 29 valeurs propres, parmi les 40 valeurs propres de la boucle fermée, associées au sous-espace invariant. Nous proposons de choisir les 29 valeurs propres de la boucle fermée qui sont situées sur les branches issues des 29 valeurs propres de $P_0(s)$ en boucle ouverte (\times noires), sur le lieu des racines de la figure 10. Un tel choix peut être automatisé systématiquement. À partir de la solution T , le problème augmenté suivant (P_a) est construit :

$$P_a(s) := \left[\begin{array}{c|ccc} A & B_1 & T^+ B_k - B D_k & B \\ \hline C_1 & 0 & 0 & D_{12} \\ -C_k T - D_k C & 0 & -D_k + D_k D D_k & I_m - D_k D \\ C & D_{21} & I_p - D D_k & D \end{array} \right] .$$

Le schéma fonctionnel associé à ce problème est décrit figure 12. On peut reconnaître entre w_{CSF} et z_{CSF} le canal associé à la Forme Standard de Passage et entre w et z , le canal pour la réduction des charges pondéré par des gains statiques s sur l'entrée et $S_{8 \times 8}$ sur les sorties (matrice diagonale). Il est facile de vérifier qu'une synthèse H_2 ou H_∞ sur le problème P_a avec le réglage $s = 0$, $S = 0_{8 \times 8}$ conduit à un correcteur d'ordre 29 qui est non-minimal (18 états non-minimaux) et qui est exactement égal au correcteur initial K_0 du point de vue du comportement entrée/sortie. Sur le plan méthodologique, l'intérêt de cette forme standard réside dans le fait que l'on peut facilement augmenter les poids statiques s et S pour atteindre un compromis

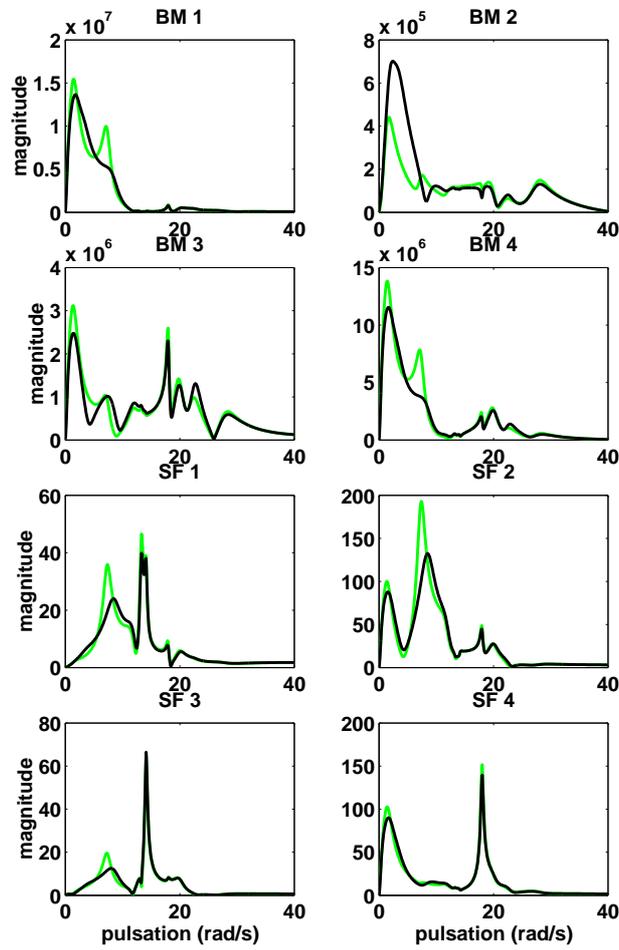


Figure 11. Réponses fréquentielles en charge : boucle ouverte (gris), boucle fermée sur K_0 (noir).

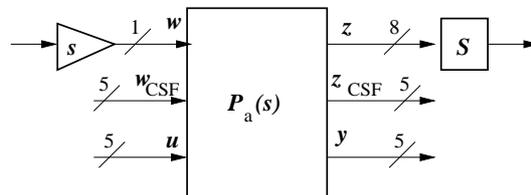


Figure 12. Problème standard final pour la réduction des charges $P_a(s)$.

entre la réduction des charges et le respect du comportement dynamique obtenu avec le correcteur initial. Ici, le réglage obtenu est : $s = 0.03$ et

$$S = \text{diag}([10^{-7}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]) .$$

C'est-à-dire que seul le premier moment fléchissant est pondéré.

Ce réglage fournit un correcteur optimal H_2 d'ordre 29 ($\widehat{K}(s)$) qui peut être réduit à l'ordre 12 (on note alors le contrôleur réduit $K_r(s)$) en utilisant la réduction équilibrée. Les résultats obtenus avec $K_r(s)$ sont présentés Figures 13 et 14. Sur le lieu des racines, on peut vérifier que l'oscillation d'incidence est toujours accélérée et que le premier mode flexible est toujours amorti. Le placement en boucle fermée des modes du système P_0 , est quasiment le même que celui obtenu avec le correcteur initial (voir figure 10), sauf sur le second mode flexible qui est maintenant amorti. On peut également constater que la dynamique du contrôle a changé. La figure 14 met en évidence que ce correcteur permet de réduire toutes les charges (sauf BM2) par rapport au correcteur initial. Le critère de performance charges est :

$$\|F_l(P_0, K_r)V\|_2 = 1.57 \cdot 10^7 .$$

C'est-à-dire un gain de 18% sur le critère de performance des charges.

8. Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de définir un outil, nommé la **Forme Standard de Passage [CSF]**, qui permette de bâtir un problème standard de commande H_2/H_∞ à partir d'un système donné et dont la solution optimale unique est un correcteur connu préalablement. À l'issue de ce chapitre, on est donc capable de préciser la solution d'un problème inverse pour :

- un système $G(s)$ d'ordre n , avec ou sans transmission directe,
- et un correcteur $K_0(s)$ d'ordre n_k , inférieur, supérieur ou égal à n , qui peut présenter deux degrés de liberté.

L'autre résultat démontré est que cette Forme Standard de Passage existe si et seulement si l'équation de RICCATI généralisée :

$$\begin{bmatrix} -T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + B(I - D_{k_{11}}D)^{-1}D_{k_{11}}C & B(I - D_{k_{11}}D)^{-1}C_{k_1} \\ B_{k_1}(I - DD_{k_{11}})^{-1}C & A_k + B_{k_1}D(I - D_{k_{11}}D)^{-1}C_{k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = 0$$

admet une solution $T \in \mathbb{R}^{n_k \times n}$ de rang plein.

Suite à ces constats, il s'est révélé intéressant d'exploiter la CSF, en enrichissant ce problème standard par ajouts successifs d'une nouvelle spécification H_2 ou H_∞ . Sur le plan méthodologique, la CSF est d'une utilisation très souple, comme en témoignent les exemples applicatifs, très représentatifs des préoccupations industrielles. Le premier exemple montre comment prendre en compte une loi de commande proportionnelle-dérivée classique, qui satisfait la spécification de performance, dans

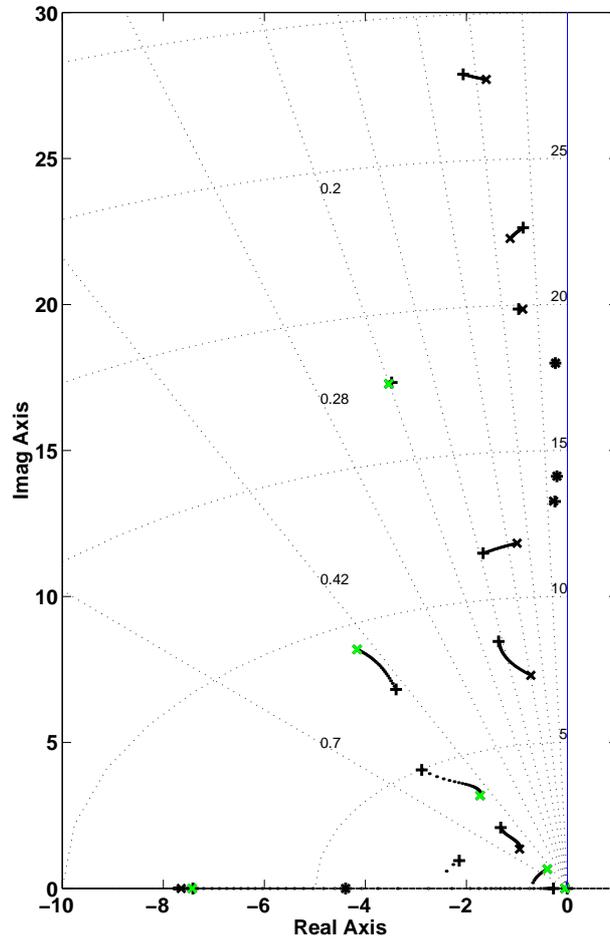


Figure 13. Lieu des racines de $P_0(s)$ avec $K_r(s)$.

une forme standard qui permet ensuite de traiter le problème de la robustesse paramétrique. Dans le second exemple, la CSF a permis d'ajuster une loi de commande de vol en faisant un compromis entre les qualités de vol de la loi initiale et une performance H_2 traduisant les charges en turbulence. D'autres applications de la CSF sont présentées dans [DEL 05].

La CSF apporte donc certaines possibilités. D'un point de vue méthodologique, elle offre une possibilité nouvelle pour la synthèse de lois de commande multi-objectifs. D'un point de vue pratique, elle permet la prise en compte d'un correcteur préalablement synthétisé lors de modifications ou d'ajout de spécifications H_2 ou H_∞ .

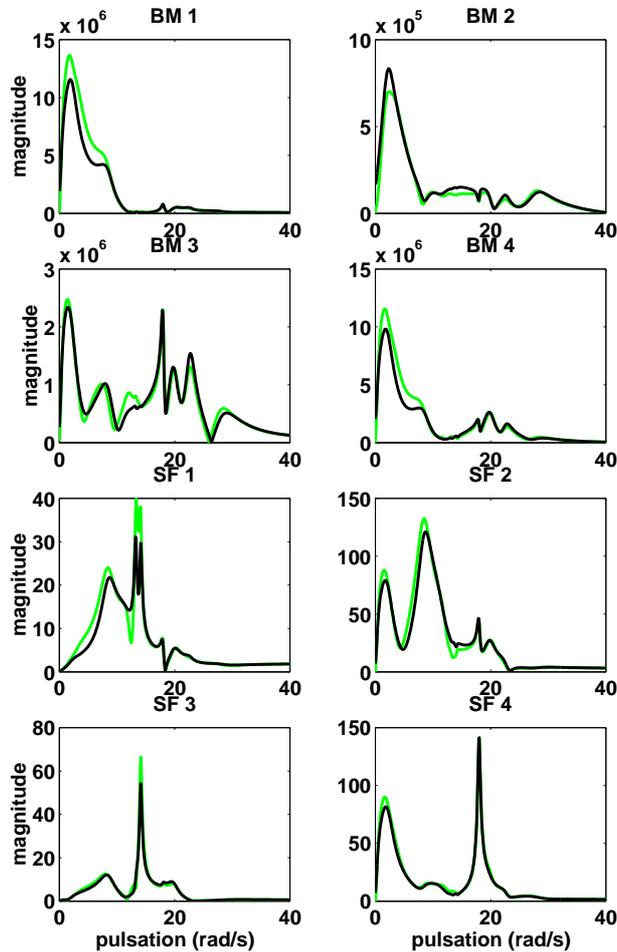


Figure 14. Réponses fréquentielles en charges : boucle fermée avec K_0 (gris), avec K_r (noir).

9. Bibliographie

- [ALA 99a] ALAZARD D., APKARIAN P., « Exact observer-based structures for arbitrary compensators », *International Journal of Robust and Non-Linear Control*, vol. 9, 1999, p. 101-118.
- [ALA 99b] ALAZARD D., CUMER C., APKARIAN P., GAUVRIT M., FERRERES G., *Robustesse et Commande Optimale*, CEPADUES Edition, 1999.
- [ALA 04] ALAZARD D., VOINOT O., APKARIAN P., « A new approach to multiobjective control design from the viewpoint of the inverse optimal control problem », *Proceedings*

of the IFAC Symposium on System, Structure and Control, Oaxaca, December 2004.

- [ARZ 00] ARZELIER D., PEAUCELLE D., « Quadratic guaranteed cost control for uncertain dissipative models: a Riccati equation approach », *International Journal of Control*, vol. 73, 2000, p. 762-775.
- [CHE 92] CHEN B. M., SABERI A., « Necessary and sufficient conditions under which an \mathcal{H}_2 -optimal control problem has a unique solution », *Proceedings of the 31th Conference on Decision and Control*, Tucson (Arizona), december 1992, IEEE, p. 1105-1110.
- [DEL 05] DELMOND F., « Alternatives à la synthèse multi-objectifs : forme standard de passage et ajustements de loi de commande », PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2005.
- [DEL 06] DELMOND F., ALAZARD D., CUMER C., « Cross standard form: a solution to improve a given controller with H_2 and H_∞ specifications », *International Journal of Control*, vol. 79, No. 4, 2006, p. 279-287.
- [NAR 77] NARASIMHAMURTHI N., WU F., « On the Riccati equation arising from the study of singularly perturbed systems », *Proceedings of the IEEE Joint Automatic Control Conference*, New-York, June 1977.
- [SEB 01] SEBE N., « A characterization of solutions to the inverse \mathcal{H}_∞ optimal control problem », *Proceedings of the 40th Conference on Decision and Control*, Orlando (Florida), december 2001, IEEE, p. 273-278.
- [SHE 97] SHERER C., GAHINET P., CHILALI M., « Multiobjective output-feedback control via LMI optimization », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, n° 7, 1997, p. 896-911.
- [SHI 97] SHIMOMURA T., FUJII T., « Strictly positive real \mathcal{H}_2 controller synthesis from the viewpoint of the inverse problem », *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, San Diego (California), december 1997, IEEE, p. 1014-1019.
- [SUG 98] SUGIMOTO K., « Partial pole-placement by LQ regulator : An inverse problem approach », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. vol. 43., No. 5., 1998, p. 706-708.
- [VOI 03] VOINOT O., D.ALAZARD, APKARIAN P., MAUFFREY S., CLÉMENT B., « Launcher attitude control : Discrete-time robust design and gain-scheduling », *IFAC Control Engineering Practice*, vol. 11, 2003, p. 1243-1252.

Annexe pour le service de fabrication

Article pour la revue :

APII - JESA

Auteurs :

*Fabien Delmond ** — *Daniel Alazard *** — *Christelle Cumer **

Titre de l'article :

Forme Standard de Passage :
une alternative à la synthèse multi-objectifs

Titre abrégé :

Forme Standard de Passage

Traduction du titre :

Cross Standard Form : an alternative to multi-objective synthesis

Date de cette version :

22 juin 2006

Coordonnées des auteurs :

- téléphone : +33 5 62 17 80 94 - +33 5 62 25 27 75
- télécopie : +33 5 62 17 83 45 - +33 5 62 25 25 64
- Email : daniel.alazard@supaero.fr - christelle.cumer@onera.fr

Logiciel utilisé pour la préparation de cet article :

L^AT_EX, avec le fichier de style `article-hermes.cls`,
version 1.10 du 17/09/2001.

Formulaire de copyright :

Joindre le formulaire de copyright signé, récupéré sur le web à l'adresse
<http://www.hermes-science.com>