Models of Equilibrium Economic Growth

Victor Polterovich

CEMI RAS

1976

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1976

ТОМ XII, вып. 3

English version: Models of Equilibrium Economic Growth, Matecon, 1977, 13(4), pp. 3-24

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

МОДЕЛИ РАВНОВЕСНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

В. М. ПОЛТЕРОВИЧ

(Москва)

1. ВВЕДЕНИЕ

Важной предпосылкой гармонического развития экономики является отыскание наряду с эффективным производственным планом таких цен, которые, во-первых, стимулировали бы производственную систему к выполнению этого плана и, во-вторых, обеспечивали бы равенство спроса и предложения потребительских благ. Решение этой задачи в рамках известных оптимизационных моделей связано с принципиальными трудностями.

Дело в том, что цены, пропорциональные оптимальным оценкам, могут сбалансировать спрос и предложение потребляемых товаров, если: а) максимизируемый динамический критерий особым образом связан с предпочтениями потребителей; б) динамика доходов населения согласована с производственным планом. Построить подходящий критерий можно в тех, по-видимому, редких случаях, когда функция совокупного спроса порождается единой целевой функцией потребления. В общей же ситуации не ясно, как обеспечить выполнение первого условия. Удовлетворить второму условию легче, если вначале планировать доходы населения, а потом составлять производственный план. Между тем, оптимизационные модели обычно предполагают обратную последовательность расчетов.

Отмеченные трудности могут быть в принципе преодолены с помощью динамических моделей экономического равновесия. Известен целый ряд подобных моделей (см., например, [1—3]), однако исследованы они сравнительно слабо. В частности, не изучено поведение равновесных траекторий при увеличении интервала планирования.

Аналогичная проблема является центральной в теории оптимального экономического роста. Для некоторых весьма специальных оптимизационных моделей ее решение получено в форме так называемых теорем о магистрали. Эти модели можно разбить на две большие группы. Первая (см., например, [2, 4]) характеризуется отсутствием явных ограничений на невоспроизводимые ресурсы и зависимостью целевой функции только от состояния экономики в конце планового периода. Вторая [4—7] предполагает наличие экзогенного фактора (скажем, трудовых ресурсов), растущего с заданным темпом, и зависимость целевой функции от потребления во все моменты времени.

В обоих случаях теоремы о магистрали (справедливые, конечно, лишь при дополнительных предположениях) утверждают, что для достаточно большого интервала планирования оптимальная траектория характеризуется определенными пропорциями производимых и потребляемых ресурсов. Эти пропорции остаются приблизительно постоянными для «почти всех» моментов времени, и на них не влияет начальное состояние экономики. Кроме того, в моделях первой группы магистральные пропорции и темп роста не зависят также и от вида целевой функции, а определяются только свойствами технологии. В моделях второй — каждой целевой функции соответствует своя магистраль, а темп роста экономики равен темпу роста экзогенного фактора.

Магистральные пропорции характеризуют целый класс оптимальных траекторий; в то же время магистраль находится из некоторой статической задачи, решить которую гораздо легче, нежели исходную динамическую. Благодаря этому появляется возможность путем сравнительно несложных вычислений получить важную информацию о целесообразных направлениях экономического развития.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы сформулировать и доказать теоремы о магистрали для равновесных траекторий. Рассмотрение ведется в рамках некоторой модели экономического равновесия, частным случаем которой является довольно общая оптимизационная модель второй группы.

2. ОСНОВНАЯ МОДЕЛЬ

Модель равновесия задается функцией (отображением) спроса $C(p)$, сопоставляющей n-мерному вектору цен p подмножество n-мерных векторов потребительских благ, и технологией $Z=\{(x, y)\}$, представляющей собой подмножество пар векторов затрат x и выпуска y. Кроме того, считается известным начальный вектор продуктов y_0.

В дальнейшем через R^n обозначается n-мерное векторное пространство, через $R_+{}^n$ — его замкнутый неотрицательный ортант. Последовательность x_t, $t=0,\ldots, T$, будем записывать так: $\{x_t\}_0{}^T$; последовательность пар векторов (x_t, y_t), $t=0,\ldots, T$, обозначим через $\{x_t, y_t\}_0{}^T$ и т. п.; если p и x — векторы из R^n, то px — их скалярное произведение, если α — скаляр, то αx означает произведение скаляра на вектор.

Определение 1. Последовательность $\{x_t', y_t'\}_0{}^T$ назовем допустимой на интервале времени T, если $(x_t', y_{t+1}')\in Z$, $t=0,\ldots, T-1$, $y_0'=y_0$, $x_T'\geqslant 0$.

Определение 2. Последовательность четверок векторов $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}_0{}^T$ называется равновесной траекторией на интервале времени T, если она удовлетворяет следующим условиям

$$c_t\in C(p_t), \qquad t=0,\ldots, T, \tag{1}$$

$$\{x_t, y_t\}_0{}^T \text{ допустима}, \tag{2}$$

$$\sum_0^T p_t(y_t-x_t)\geqslant\sum_0^T p_t(y_t'-x_t') \tag{3}$$

для любой допустимой последовательности $\{x_t', y_t'\}_0{}^T$,

$$c_t\leqslant y_t-x_t, \qquad t=0,\ldots, T, \tag{4}$$

$$p_tc_t=p_t(y_t-x_t), \qquad t=0,\ldots, T. \tag{5}$$

Согласно определениям 1 и 2, производственный блок выбирает в каждый момент времени t векторы затрат x_t и предложения y_t-x_t. Затраты, произведенные в момент t, при соответствующем выборе технологического режима обусловливают выпуск y_{t+1} в следующий момент времени и т. д. Если цены на весь плановый период T заданы, то производственная система стремится найти такую последовательность затрат и выпусков, чтобы максимизировать суммарную выручку от продажи потребительских благ.

Произвольная технологически допустимая последовательность, вообще говоря, «нереализуема» в том смысле, что затраты в некоторые моменты времени могут оказаться больше выпусков. Однако для равновесной траектории выпуски всех продуктов превосходят затраты по крайней мере на величину спроса, причем производимые в избытке продукты обязаны иметь нулевую цену (см. (4) и (5)).

Для того чтобы гарантировать существование равновесия, потребуем выполнения следующих предположений.

1. При любом $p\in R_+{}^n$ множество $C(p)$ является непустым выпуклым компактом в $R_+{}^n$.
2. Отображение $C(p)$ полунепрерывно сверху.
3. Существует число $\beta>0$ такое, что $pc\leqslant\beta$ для всех $p\in R_+{}^n$ и $c\in C(p)$.
4. Z — замкнутое выпуклое множество в $R_+{}^{2n}$; множество $\{y\mid(x, y)\in Z\}$ ограничено; $(0, 0)\in Z$.
5. Существует процесс $(\tilde{x}, \tilde{y})\in Z$ такой, что $\tilde{y}-\tilde{x}>0$.
6. $y_0>0$.

Теорема 1. *При выполнении предположений 1—6 на любом конечном интервале времени T существует равновесная траектория.*

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Описанная модель допускает многочисленные обобщения. Технология и функция спроса меняются во времени, критерий производственного блока может содержать дисконтирующие коэффициенты. Естественная переформулировка условий 1—6 обеспечивает существование равновесных траекторий и в этих случаях. Однако качественное исследование траекторий при этом усложняется, а при дисконтировании — представляет собой задачу, не решенную даже для сравнительно простых оптимизационных моделей. Поэтому в настоящей работе рассматривается «стационарная» модель без дисконта.

3. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Условиям 1—3 удовлетворяет широкий класс отображений. Два его подкласса, описываемые ниже, являются особенно важными.

Пусть B — выпуклый компакт в $R_+{}^n$, содержащий нулевой вектор; $u(c)$ — непрерывная вогнутая функция на B; β — положительный скаляр. Рассмотрим экстремальные задачи

$$u(c)-pc\to\max, \qquad c\in B, \tag{6}$$

$$u(c)\to\max, \qquad pc\leqslant\beta, \qquad c\in B. \tag{7}$$

Совокупность решений задачи (6) при фиксированном векторе цен p обозначим через $F(p)$, а (7) — через $\Phi(p)$. Каждая из них является естественной моделью спроса. В первом случае спрос предъявляется участником, который максимизирует разность между «ценностью» вектора потребительских благ и затратами на его приобретение; во втором участник отыскивает наиболее предпочтительный вектор потребления среди всех допустимых векторов, стоимость которых не превосходит его дохода.

Легко проверить, что каждое из отображений $F(p)$ и $\Phi(p)$ удовлетворяет требованиям 1—3. Непосредственно из определений следует, что условие 1 справедливо для $F(p)$ и $\Phi(p)$, 2 — для $F(p)$ и 3 — для $\Phi(p)$. Применяя к задаче (7) теорему Куна — Таккера (поскольку $0\in B$ и $\beta>0$, то условие Слейтера выполняется при любом p), нетрудно убедиться в замкнутости графика $\Phi(p)$, которая в данном случае влечет за собой полунепрерывность сверху. Справедливость допущения 3 для $F(p)$ вытекает из ограниченности $u(c)$ на B и соотношения

$$u(c)-pc\geqslant u(0)\ \forall c\in F(p). \tag{8}$$

Если условия 1–3 выполняются для каждого из нескольких отображений, то они верны и для их алгебраической суммы. Поэтому в качестве $C(p)$ можно взять, например, такое соответствие

$$\Psi(p)=\sum_{k=1}^{r-1}F_k(p)+\sum_{k=r}^{m}\Phi_k(p), \tag{9}$$

где

$$F_k(p)=\{c\mid c\in B_k,\ u_k(c)-pc\geqslant u_k(c')-pc'\ \forall c'\in B_k\}, \tag{10}$$

$$\Phi_k(p)=\{c\mid c\in B_k,\ pc\leqslant\beta_k,\ u_k(c)\geqslant u_k(c')\ \forall c'\in B_k,\ pc'\leqslant\beta_k\}, \tag{11}$$

а множества B_k, функции u_k и числа β_k удовлетворяют перечисленным выше требованиям. Таким образом, $\Psi(p)$ — это совокупный спрос, предъявляемый несколькими участниками, каждый из которых как бы решает задачу вида (6) или (7).

Опираясь на теорему 1, можно доказать, что при $C(p)=\Psi(p)$ равновесные траектории существуют и для неограниченных (замкнутых, выпуклых) множеств B_k.

В модели равновесия с функцией спроса $F(p)$ нетрудно узнать результат «разложения» следующей задачи математического программирования

$$\sum_{0}^{T}u(c_t')\to\max, \tag{12}$$

$$c_t'\leqslant y_t'-x_t',\quad t=0,\ldots,T, \tag{13}$$

$$c_t'\in B,\ t=0,\ldots,T,\ (x_t',y_{t+1}')\in Z,\ t=0,\ldots,T-1,\ y_0'=y_0,\ x_T'\geqslant 0. \tag{14}$$

Более точно, если $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}_0^T$ — равновесная траектория при $C(p)=F(p)$, то последовательность $\{c_t, x_t, y_t\}_0^T$ является решением задачи (12)–(14), а p_t, $t=0,\ldots,T$,— векторами множителей Лагранжа для ограничений (13). Обратно, если выполнены условия 4–6, B_k замкнуты, выпуклы, $0\in B_k$, $u_k(c)$ непрерывны и вогнуты на B_k, то решение $\{c_t, x_t, y_t\}_0^T$ задачи (12)–(14) вместе с векторами p_t множителей Лагранжа задает равновесную траекторию. Первая часть этого утверждения является непосредственным следствием определений равновесия (1)–(5) и отображения $F(p)$, а вторая вытекает из теоремы Куна — Таккера, примененной к задаче (12)–(14). Доказательство стандартно, и мы его опускаем.

Если $C(p)$ — сумма отображений вида (10), то модель равновесия также сводится к экстремальной задаче и, по существу, немногим труднее для исследования. Но если хотя бы один из участников описывается функцией спроса вида (11), то для получения содержательных утверждений о свойствах равновесных траекторий необходимы достаточно сильные дополнительные предположения.

Среди условий теоремы 1 наименее реалистичным является требование ограниченности множества выпусков при любых затратах (см. предположение 4); оно позволяет усомниться в том, способна ли предложенная модель отразить процесс долговременного развития. Поэтому целесообразно рассмотреть примеры моделей, в которых возможен неограниченный рост и которые заменой переменных сводятся к описанной выше.

Пусть технология задается конусом $K=\{(l, v, w)\}$, где l — число, указывающее величину затрат труда; v — n-мерный вектор материальных затрат; w — n-мерный вектор выпусков. Предполагаются заданными вектор начальных ресурсов w_0 и темп роста трудовых ресурсов $\lambda>0$ (учитывающий также увеличение производительности труда). Величину трудовых ресурсов в нулевой момент времени принимаем за единицу, так что $l_t=\lambda^t$. Назовем последовательность $\{v_t', w_t'\}_0^T$ допустимой, если $(\lambda^t, v_t', w_{t+1}')\in K$, $t=0,\ldots,T-1$, $w_0'=w_0$ и $v_T'\geqslant 0$.

Предположим, что зависимость структуры спроса от цен неизменна во времени, а его объем растет пропорционально трудовым ресурсам. Тогда функция спроса $D_t(p)$ имеет вид: $D_t(p)=l_tC(p)$, где $C(p)$ — спрос в нулевой момент. Последовательность $\{p_t, d_t, v_t, w_t\}_0^T$ назовем равновесной на интервале времени T, если выполнены следующие условия

$$d_t\in D_t(p_t),\quad t=0,\ldots,T, \tag{15}$$

$$\{v_t, w_t\}_0^T\ \text{допустима}, \tag{16}$$

$$\sum_{0}^{T}\lambda^{-t}p_t(w_t-v_t)\geqslant\sum_{0}^{T}\lambda^{-t}p_t(w_t'-v_t') \tag{17}$$

для любой допустимой последовательности $\{v_t', w_t'\}_0^T$,

$$d_t\leqslant w_t-v_t,\quad t=0,\ldots,T, \tag{18}$$

$$p_td_t=p_t(w_t-v_t),\quad t=0,\ldots,T. \tag{19}$$

Соотношение (17) можно понимать как условие максимизации суммарной выручки в расчете на одного работника, или как максимизацию выручки от продажи потребительских благ с дисконтом λ^{-1}. Все же выбор критерия в производственной задаче кажется произвольным. И действительно, довольно трудно найти для него априорные основания, тем более что равновесие (это можно доказать) существует при любых дисконтирующих коэффициентах. Однако тот факт, что именно такой выбор обеспечивает сходимость равновесных траекторий к магистрали, имеет определенное нормативное значение и является, на наш взгляд, аргументом в пользу критерия (17), поскольку магистраль во многих случаях естественно считать оптимальным состоянием системы.

Введем обозначения: $c_t=d_t/l_t$, $x_t=v_t/l_t$, $y_t=w_t/l_t$, $Z=\{(x, y)\mid(1, x, \lambda y)\in K\}$. После такой замены переменных условия (15)–(19) переходят соответственно в (1)–(5). Требования, которые нужно наложить на функции спроса $D_t(p)$ и конус K, чтобы для редуцированной модели выполнялись предположения 1–6, очевидны.

Рассмотрим другую модель, допускающую неограниченное развитие. Пусть технология по-прежнему задается конусом K, а функция спроса $D_t(p)$ является совокупностью решений следующей экстремальной задачи

$$u(d/l_t)-pd/l_t\to\max,\quad d\geqslant 0, \tag{20}$$

где функция u отражает общественную полезность удельного потребления благ. Определение равновесия остается без изменения. Та же самая замена переменных приводит эту модель к «стандартному виду» с функцией спроса типа $F(p)$ (см. (6)). Как было показано выше, в этом случае мы фактически имеем дело с экстремальной задачей (12)–(14). Теоремы о магистрали для такой модели получены в [4]; несколько ранее в [5] изучался ее линейный вариант.

4. СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Вернемся к изучению основной модели.

Определение 3. Четверку векторов (p^*, c^*, x^*, y^*) назовем стационарным состоянием, если $c^*\in C(p^*)$, $(x^*, y^*)\in Z$ и, кроме того, выполнены соотношения

$$p^*(y^*-x^*)\geqslant p^*(y-x) \quad \text{для всех} \quad (x, y)\in Z, \tag{21}$$

$$c^*\leqslant y^*-x^*, \tag{22}$$

$$p^*c^*=p^*(y^*-x^*). \tag{23}$$

Согласно определению 3, стационарный технологический режим (x^*, y^*) обеспечивает максимизацию выручки производственного блока, исчисленной в стационарных ценах p^*, при этом соблюдается баланс спроса и предложения в натуральном и ценностном выражениях.

Теорема 2. *Условия 1—5 гарантируют существование стационарного состояния.*

Обоснование этого утверждения тесно связано с доказательством теоремы 1 и здесь не приводится.

Стационарное состояние не зависит от начальных ресурсов, и его можно считать в определенном смысле оптимальным. Последнее особенно ясно для модели с функцией спроса $F(p)$; в этом случае, как легко показать, тройка векторов (c^*, x^*, y^*) является решением экстремальной задачи

$$u(c)\to\max, \quad c\leqslant y-x, \quad c\in B, \quad (x, y)\in Z. \tag{24}$$

Подобное утверждение справедливо и при $C(p)=\Phi(p)$ (см. (7)). Следует подчеркнуть, что динамическая модель равновесия в последнем случае не сводится к экстремальной задаче типа (12)—(14). Если спрос порождается несколькими участниками, так что $C(p)$ представляет собой сумму отображений вида (11), то стационарное состояние оказывается оптимальным по Парето [8].

Ниже будет показано, что при достаточно большом интервале планирования и выполнения ряда дополнительных предположений равновесные траектории большую часть времени близки к стационарному состоянию. Наиболее существенным является допущение монотонности функции спроса.

5. МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИИ СПРОСА

Обозначим через G график функции $C(p)$, $G=\{(p, c)\,|\,c\in C(p)\}$. Пусть $(q, c_q)\in G$. В дальнейшем к функции $C(p)$ будет предъявляться одно из следующих требований

$$(p-q)(c_p-c_q)\leqslant 0 \text{ для всех } (p, c_p)\in G, \tag{25}$$

$$(p-q)(c_p-c_q)<0 \text{ для всех } (p, c_p)\in G \text{ таких, что } c_p\neq c_q, \tag{26}$$

$$(p-q)(c_p-c_q)<0 \text{ для всех } (p, c_p)\in G \text{ таких, что } (p, c_p)\neq(q, c_q). \tag{27}$$

Из (27) следует (26), а (26) влечет за собой (25).

Определение 4. Отображение $C(p)$ назовем монотонным в точке (q, c_q), если справедливо (26). При выполнении условий (25) или (27) будем говорить соответственно о слабой или сильной монотонности отображения $C(p)$ в точке (q, c_q). Отображение (слабо, сильно) монотонно, если оно (слабо, сильно) монотонно во всех точках графика G. Отображение (слабо, сильно) монотонно на множестве $P\subset R^n$, если его сужение на P обладает соответствующим свойством *.

Если $C(p)$ однозначно, то можно говорить о его монотонности в точке $q\in R^n$, не указывая значения функции. Легко заметить, что монотонное отображение однозначно, а сильно монотонное — взаимно однозначно.

Опишем некоторые классы монотонных отображений.

Рассмотрим $F(p)$. По определению

$$F(p)=\{c\,|\,c\in B,\ u(c)-pc\geqslant u(c')-pc'\ \forall c'\in B\}. \tag{28}$$

Теорема 3. *Отображение $F(p)$ слабо монотонно; оно монотонно во всех точках (q, c_q) таких, что $F(q)$ содержит единственный вектор c_q; если, кроме того, функция $u(c)$ обладает градиентом при $c=c_q$ и c_q принадлежит внутренности B, то $F(p)$ сильно монотонно в точке (q, c_q).*

Доказательство. Пусть $c_q\in F(q)$ и $c_p\in F(p)$. Тогда

$$u(c_q)-qc_q\geqslant u(c_p)-qc_p, \tag{29}$$

$$u(c_p)-pc_p\geqslant u(c_q)-pc_q. \tag{30}$$

Складывая оба неравенства, получим (25). Если $F(q)$ содержит единственный вектор, то неравенство (29) выполняется как строгое, а следовательно, после сложения получим (26). Если c_q лежит внутри B и градиент $u'(c_q)$ существует, то при $c_p=c_q$, очевидно, $p=q=u'(c_q)$. Поэтому условие $(p, c_p)\neq(q, c_q)$ эквивалентно условию $c_p\neq c_q$, что и требовалось доказать.

Если каждое из нескольких отображений удовлетворяет предположению (25), (26) или (27), то и для их суммы выполняется то же самое предположение. Используя это замечание, легко распространить теорему 3 на сумму отображений вида (28).

Нижеследующая теорема устанавливает связь между монотонностью и обобщенной валовой заменимостью [4, стр. 392], означающей, что

$$C_{ij}+C_{ji}=\frac{\partial C_i(p)}{\partial p_j}+\frac{\partial C_j(p)}{\partial p_i}\geqslant 0, \quad i,j=1,\ldots,n, \quad i\neq j. \tag{31}$$

Теорема 4. *Пусть отображение $C(p)$ однозначно и непрерывно дифференцируемо на выпуклом подмножестве P положительных векторов. Предположим также, что для всех $p\in P$ выполнено условие (31) и, кроме того:* a) $C_i(p)\geqslant 0$, $i=1,\ldots,n$, b) $(\partial[pC(p)])/\partial p_i\leqslant 0$, $i=1,\ldots,n$, c) $(\partial C_i(\theta p))/\partial\theta|_{\theta=1}\leqslant 0$, $i=1,\ldots,n$. *Тогда $C(p)$ слабо монотонно на P. Если при некотором $p=q$ для каждого $i=1,\ldots,n$ хотя бы одно из неравенств a), b), c) выполняется как строгое, то $C(p)$ сильно монотонно на P в точке q.*

Неравенства b) выполняются, если доход совокупного потребителя $pC(p)$ не зависит от цен; условие c) означает, что при пропорциональном увеличении цен спрос на все продукты не увеличивается.

Доказательство теоремы 4 опирается на теорию P-матриц [4]. Здесь мы его не приводим.

Рассмотрим теперь отображение $\Phi(p)$ (см. (7)) при $B=R_+^n$

$$\Phi(p)=\{c\,|\,c\geqslant 0,\ pc\leqslant\beta,\ u(c)\geqslant u(c')\ \forall c'\geqslant 0,\ pc'\leqslant\beta\}. \tag{32}$$

В отличие от $F(p)$ оно далеко не всегда даже слабо монотонно. Общие и в то же время удобные для проверки условия, обеспечивающие монотонность в этом случае, автору неизвестны. Однако, используя теорему 4, нетрудно указать класс функций $u(c)$, для которых $\Phi(p)$ монотонно.

* Чаще монотонным называют отображение, удовлетворяющее неравенству: $(p-q)(c_p-c_q)\geqslant 0$ (см., например, [9]). Принятая здесь терминология удобнее для наших целей.

Именно, пусть $\beta>0$, $u(c)$ дважды непрерывно дифференцируема при $c>0$, причем $u^i>0$, $u^{ii}<0$, $u^{ij}=0$, $i=1,\ldots,n$, $i\neq j$, где u^i, u^{ij} — соответственно первые и вторые частные производные функции $u(c)$. Пусть, кроме того, $u^i(c)\to\infty$ при $c^i\to 0$, $c=(c^1,\ldots,c^i,\ldots,c^n)$. Тогда отображение $\Phi(p)$ определено для всех $p>0$, однозначно и удовлетворяет условию a) теоремы 4 как строгому неравенству; условие b) также выполняется, поскольку $p\Phi(p)=\beta$. Используя соотношения Слуцкого [10, стр. 262], легко показать справедливость неравенства c) для $\Phi(p)$. В данном случае оно означает, что с ростом доходов растет спрос на все продукты. Те же соотношения Слуцкого приводят к следующему условию, которое при наших допущениях необходимо и достаточно для выполнения (31)

$$\xi_i+\xi_j\leqslant 2,\quad i,j=1,\ldots,n,\quad i\neq j, \tag{33}$$

где

$$\xi_i=-u^{ii}c^i/u^i,\quad i=1,\ldots,n. \tag{34}$$

Неравенства (33) справедливы, например, для сепарабельной функции полезности, являющейся положительной линейной комбинацией n функций вида: $\ln(z_i^{\omega_i}+\nu_i)$ и $(z_i^{\omega_i}+\nu_i)^{\omega_i}$, где $z_i\in R_+^1$, $\nu_i\geqslant 0$, $0<\omega_i<1$, $i=1,\ldots,n$. В этом случае, согласно теореме 4, функция $u(c)$ порождает сильно монотонное отображение $\Phi(p)$.

6. МОНОТОННОСТЬ И ВЫЯВЛЕННОЕ ПРЕДПОЧТЕНИЕ

Ни одно из условий монотонности не имеет очевидного экономического обоснования. Можно, однако, предложить другие формулировки, эквивалентные прежним, но экономически более содержательные. Ограничимся рассмотрением условия сильной монотонности.

Напомним, что слабой аксиомой выявленного предпочтения для функции спроса $C(p)$ называется следующая импликация

$$pC(q)\leqslant pC(p)\Rightarrow qC(p)>qC(q)\ \forall p\neq q. \tag{35}$$

Эта аксиома формализует интуитивные представления о разумном поведении совокупного потребителя. Если потребитель при ценах p располагал доходом $pC(p)$ и мог выбрать набор продуктов $C(q)$, но не сделал этого, то, по-видимому, $C(p)$ лучше, чем $C(q)$, поэтому вектор $C(p)$ не может удовлетворять бюджетному ограничению при ценах q, иначе набор $C(q)$ был бы отвергнут.

Из сильной монотонности очевидным образом следует (35); обратное, вообще говоря, неверно.

Рассмотрим «двухпериодную» функцию спроса $C^*(p_1, p_2)=(C(p_1), C(p_2))$. Если p_1, p_2 — цены, действующие в два последовательных периода времени, то $C^*(p_1,p_2)$ — это $2n$-мерный вектор потребительских благ, причем одни и те же продукты, отнесенные к разным периодам, считаются различными.

Теорема 5. *Однозначное отображение $C(p)$ тогда и только тогда сильно монотонно, когда отображение $C^*(p_1,p_2)$ удовлетворяет аксиоме выявленного предпочтения.*

Доказательство. Импликация (35) для $C^*(p_1,p_2)$ имеет следующий вид

$$p_1C(q_1)+p_2C(q_2)\leqslant p_1C(p_1)+p_2C(p_2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow q_1C(p_1)+q_2C(p_2)>q_1C(q_1)+q_2C(q_2) \tag{36}$$

для всех $(p_1,p_2)\neq(q_1,q_2)$.

Пусть $C(p)$ сильно монотонно и выполнено неравенство в левой части (36). Тогда: $p_1(C(q_1)-C(p_1))+p_2(C(q_2)-C(p_2))\leqslant 0$, $p_1(C(p_1)-C(q_1))-q_1(C(p_1)-C(q_1))\leqslant 0$, $p_2(C(p_2)-C(q_2))-q_2(C(p_2)-C(q_2))\leqslant 0$.

Поскольку $(p_1,p_2)\neq(q_1,q_2)$, то хотя бы одно из двух последних неравенств — строгое. В результате сложения получим правое неравенство (36).

Пусть теперь выполнено «двухпериодное» условие выявленного предпочтения (36), а сильная монотонность нарушена в точках p, q, причем $p\neq q$ и

$$(p-q)(C(p)-C(q))\geqslant 0. \tag{37}$$

Положим: $p_1=q_2=p$, $p_2=q_1=q$. Перепишем неравенство (37) двумя способами

$$p_1C(p_1)+p_2C(p_2)\geqslant p_1C(q_1)+p_2C(q_2), \tag{38}$$

$$q_2C(q_2)+q_1C(q_1)\geqslant q_2C(p_2)+q_1C(p_1). \tag{39}$$

Но (38) и (39) в совокупности противоречат (36), что и требовалось доказать.

7. ТЕОРЕМЫ О МАГИСТРАЛИ

Всюду в дальнейшем $\{p_t,c_t,x_t,y_t\}_0^T$ — равновесная траектория на временно́м интервале T; (p^*,c^*,x^*,y^*) — некоторое фиксированное стационарное состояние; предполагаются выполненными условия 1—6.

Прежде чем сформулировать основные теоремы, сделаем одно простое замечание.

Лемма 1. *Существует константа α такая, что для любой равновесной траектории $\{p_t,c_t,x_t,y_t\}_0^T$ норма каждого из векторов c_t, x_t, y_t, $t=0,\ldots,T$, не превосходит α.*

Действительно, согласно (4), $c_t+x_t\leqslant y_t$, но c_t, x_t неотрицательны, а y_t равномерно ограничены в силу предположения 4.

Пусть $D=\{d\,|\,d\in R^n,\ \|d\|\leqslant\alpha\}$ и $P=\{p\,|\,C(p)\cap D\neq\emptyset\}$. Ниже по мере необходимости будут использоваться следующие предположения.

7. $C(p)$ слабо монотонно на P в точке (p^*,c^*).
8. $C(p)$ монотонно на P в точке (p^*,c^*).
9. $C(p)$ сильно монотонно на P в точке (p^*,c^*).
10. $p^*(y^*-x^*)>p^*(y-x)$ для всех $(x,y)\in Z$, $(x,y)\neq(x^*,y^*)$.
11. $c^*>0$.

Предположение 10 является усилением условия (21) в определении стационарного состояния. Оно означает, что пара векторов (x^*,y^*) — единственное решение производственной задачи при стационарных ценах p^*. Неравенство 11 вытекает из 9: если $p_j>p_j^*$, $p_i=p_i^*$, $i\neq j$, то в силу 9 $c_j^*>C_j(p)$.

Следующее утверждение непосредственно не используется в дальнейшем, но проясняет формулировки основных теорем.

Лемма 2. *Пусть (p^*,c^*,x^*,y^*) и (p,c,x,y) — два стационарных состояния. Тогда 1) из предположений 7 и 10 вытекает, что $x=x^*$, $y=y^*$; 2) из предположения 8 — что $c=c^*$; 3) из предположения 9, кроме того, следует равенство: $p=p^*$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Поскольку $p^*(y^*-x^*)=p^*c^*$, а $y-x\geqslant c$ (см. (23), (22)), то при $(x,y)\neq(x^*,y^*)$, согласно предположению 10, выполняется неравенство $p^*c^*>p^*c$; кроме того, $pc\geqslant pc^*$ (см. (21)), поэтому $(p-p^*)(c-c^*)>0$, что противоречит предположению 7. Два других утверждения доказываются аналогичным образом.

Сформулируем теперь основные результаты настоящей работы.

Теорема 6. *Пусть выполнены предположения 7, 10 и 11. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что любая равновесная траектория $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}_0^T$ удовлетворяет условиям*

$$\|x_t-x^*\|\leqslant\varepsilon,\quad \|y_t-y^*\|\leqslant\varepsilon \tag{40}$$

при всех t в промежутке $N(\varepsilon)\leqslant t\leqslant T-N(\varepsilon)$.

Теорема 7. *Пусть справедливо предположение 9. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что любая равновесная траектория $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}_0^T$ удовлетворяет условиям*

$$\|p_t-p^*\|\leqslant\varepsilon,\quad \|c_t-c^*\|\leqslant\varepsilon,\quad N(\varepsilon)\leqslant t\leqslant T-N(\varepsilon). \tag{41}$$

Обе теоремы утверждают, что некоторые компоненты равновесных траекторий отличаются не более чем на ε от соответствующих компонент стационарного состояния во все моменты времени, кроме, быть может, фиксированного их числа в начале и конце планового периода. Теорема 6 не гарантирует близости вектора потребления к стационарному, однако, как легко видеть, отклонение может возникнуть лишь по тем продуктам, которые производятся в избытке и имеют нулевую цену. Если же такие продукты отсутствуют, то $c_t=y_t-x_t$, $c^*=y^*-x^*$ и, согласно (40), $\|c_t-c^*\|\leqslant\leqslant 2\varepsilon$. Когда технология Z удовлетворяет условию «свободного расходования», всегда существуют равновесные траектории и стационарные состояния, для которых спрос строго равен предложению; в этом случае из теоремы 6 следует близость равновесного потребления к стационарному.

Для модели (12)—(14) теорема 6 в основном совпадает с теоремой о магистрали в сильной форме, доказанной Никайдо [4] (см. также [5]).

Следствие 1. Если выполнены предположения 9, 10, то для всякого $\varepsilon>0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что при $N(\varepsilon)\leqslant t\leqslant T-N(\varepsilon)$ выполнены неравенства (40) и (41).

Во всех формулировках число $N(\varepsilon)$ не зависит от T. Кроме того, оно может быть выбрано одним и тем же для всех равновесных траекторий, начинающихся в заданном компактном множестве строго положительных векторов. Как будет показано ниже, предположение 11 позволяет доказать равномерную по t и T ограниченность равновесных цен. Любые другие условия, обеспечивающие ограниченность цен, могут быть использованы вместо него. Отметим также, что из предположений 7 и 10 следует теорема о магистрали в слабой форме, утверждающая, что неравенства (40) могут нарушаться лишь для конечного числа моментов времени, при этом их расположение не уточняется.

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Доказательства теорем 6 и 7 опираются на ряд лемм.

Лемма 3. *Существуют константы Γ_t, $t=0,\ldots,$ такие, что для любой равновесной траектории $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}_0^T$ выполняются неравенства*

$$\|p_t\|\leqslant\Gamma_t,\quad t=0,\ldots,T. \tag{42}$$

Доказательство. Согласно предположению 5, существует процесс $(\tilde{x},\tilde{y})\in Z$, $\tilde{y}-\tilde{x}>0$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\tilde{y}\leqslant y_0. \tag{43}$$

Действительно, в силу предположения 6 подобное неравенство заведомо выполняется для процесса $(\varepsilon\tilde{x},\varepsilon\tilde{y})$ при достаточно малом положительном ε; этот процесс допустим, поскольку Z выпукло и содержит $(0, 0)$.

Пусть вектор a таков, что $x_t\leqslant a$ для любой равновесной траектории (лемма 1). При некотором ν, $0<\nu<1$, выполняется неравенство

$$\tilde{y}-(1-\nu)a-\nu\tilde{x}\geqslant z, \tag{44}$$

где $z=\frac{1}{2}(\tilde{y}-\tilde{x})$. Рассмотрим последовательность $\{v_t, w_t\}_0^T$

$$v_t=(1-\varphi_t)x_t+\varphi_t\tilde{x},\quad t=0,\ldots,T-1,\ v_T=0,$$
$$w_{t+1}=(1-\varphi_t)y_{t+1}+\varphi_t\tilde{y},\quad t=0,\ldots,T-1,\quad w_0=y_0,$$

где $\varphi_t=\nu^{t+1}$, $t=0,\ldots,T-1$. В силу выпуклости Z последовательность $\{v_t, w_t\}_0^T$ допустима. Поэтому, согласно (3),

$$\sum_0^T p_t(y_t-x_t)\geqslant\sum_0^T p_t(w_t-v_t). \tag{45}$$

Но $w_t-v_t=(1-\varphi_{t-1})y_t+\varphi_{t-1}\tilde{y}-(1-\varphi_t)x_t-\varphi_t\tilde{x}=(1-\nu^t)(y_t-x_t)+\nu^t[\tilde{y}-(1-\nu)x_t-\nu\tilde{x}]$ при $T>t>0$. Поскольку $x_t\leqslant a$ и в силу (44), имеем: $w_t-v_t\geqslant(1-\nu^t)(y_t-x_t)+\nu^t z$, $T>t>0$. Учитывая, что $\tilde{y}\geqslant y_0$ и $v_T=0$, легко убедиться в справедливости этого неравенства и при $t=0$, T. Подставляя полученную оценку в (45), будем иметь

$$\sum_0^T p_t(y_t-x_t)\geqslant\sum_0^T(1-\nu^t)p_t(y_t-x_t)+\sum_0^T\nu^t p_t z,$$

или

$$\sum_0^T\nu^t p_t z\leqslant\sum_0^T\nu^t p_t(y_t-x_t)=\sum_0^T\nu^t p_t c_t\leqslant\beta/(1-\nu). \tag{46}$$

Здесь мы использовали (5) и предположение 3. Поскольку $p_t\geqslant 0$ и $z=(z_1,\ldots,z_n)>0$, из (46) следует (42) при $\Gamma_t=\beta\nu^{-t}(1-\nu)^{-1}/\min_i z_i$, что и требовалось доказать.

Введем обозначения

$$\delta_t=p^*(y^*-x^*)-p^*(y_{t+1}-x_t),\quad t=0,\ldots,T-1, \tag{47}$$

$$\Delta_t=-(p_t-p^*)(c_t-c^*),\quad t=0,\ldots,T. \tag{48}$$

Лемма 4. *Для любой равновесной траектории $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}_0^T$ и любого стационарного состояния (p^*, c^*, x^*, y^*) имеет место неравенство*

$$\sum_r^{s-1}\delta_t+\sum_r\Delta_t\leqslant(p^*-p_r)(y_r-y^*)+(p^*-p_s)(x^*-x_s), \tag{49}$$

где $0\leqslant r\leqslant s-1<T$.

Доказательство. Последовательно учитывая, что $p^*c^*=p^*(y^*-x^*)$, $p_tc_t=p_t(y_t-x_t)$, $c_t\leqslant y_t-x_t$ и $c^*\leqslant y^*-x^*$, получаем цепочку соотношений

$$\sum_r^{s-1}\delta_t+\sum_r^s\Delta_t=p^*(c_s-c^*)+\sum_r^{s-1}p^*(c_t-y_{t+1}+x_t)-\sum_r^s p_t(c_t-c^*)\leqslant$$

$$\leqslant p^*(y_r-y^*)+p^*(x^*-x_s)-\sum_r^s p_t(y_t-x_t-y^*+x^*). \tag{50}$$

Заметим теперь, что из условия равновесия (3) следует неравенство

$$p_{t+1}y_{t+1}-p_tx_t \geqslant p_{t+1}y-p_tx \tag{51}$$

для всех $(x, y) \in Z$, где $t=0, \ldots, T-1$. Поэтому

$$\sum_r^s p_t(y_t-x_t-y^*+x^*)=p_r(y_r-y^*)+p_s(x^*-x_s)+$$

$$+\sum_r^{s-1}(p_{t+1}y_{t+1}-p_tx_t-p_{t+1}y^*+p_tx^*) \geqslant p_r(y_r-y^*)+p_s(x^*-x_s). \tag{52}$$

Из (50) и (52) вытекает (49), что и требовалось доказать.

Лемма 5. *Существует константа γ_1 такая, что равновесная траектория на любом интервале времени T удовлетворяет неравенству*

$$\sum_0^{T-1}\delta_t+\sum_0^T\Delta_t \leqslant \gamma_1. \tag{53}$$

Доказательство. Из (49) получим: $\sum_0^{T-1}\delta_t+\sum_0^T\Delta_t \leqslant (p^*-p_0)\cdot$ $\cdot(y_0-y^*)+(p^*-p_T)(x^*-x_T) \leqslant (\|p^*\|+\|p_0\|)(\|y_0\|+\|y^*\|)+p^*x^*$, ибо p_Tx^*+ $+p^*x_T \geqslant 0$ и, в соответствии с условием равновесия (3), $p_Tx_T=0$. Согласно лемме 3, вектор p_0 ограничен по норме константой, не зависящей от траектории. Отсюда немедленно следует доказываемое утверждение.

Лемма 6. *Пусть выполнено предположение* 10. *Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что из соотношения*

$$\max\{\|x-x^*\|, \|y-y^*\|\}>\varepsilon \tag{54}$$

следует неравенство

$$p^*(y^*-x^*)-p^*(y-x) \geqslant \delta(\varepsilon), \tag{55}$$

как только $(x, y) \in Z$ и $\|x\| \leqslant \alpha$.

Действительно, если это не так, то в силу предположения 4 нашлась бы точка $(x', y') \in Z$, $(x', y') \neq (x^*, y^*)$, удовлетворяющая неравенству $p^*(y^*-x^*)-p^*(y-x) \leqslant 0$, что противоречит предположению 10.

Лемма 7 (теорема о магистрали в слабой форме). *Пусть выполнены предположения* 7 *и* 10. *Тогда для каждого $\varepsilon>0$ найдется $K(\varepsilon)$ такое, что любая равновесная траектория $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}_0^T$ удовлетворяет условиям*

$$\|x_t-x^*\| \leqslant \varepsilon, \ \|y_{t+1}-y^*\| \leqslant \varepsilon \tag{56}$$

всюду, за возможным исключением не более чем $K(\varepsilon)$ моментов времени.

Доказательство. В силу предположения 7 и по определению стационарного состояния имеем: $\Delta_t \geqslant 0$, $t=0, \ldots, T$, $\delta_t \geqslant 0$, $t=0, \ldots, T-1$. Пусть K — число моментов времени, для которых не выполняется хотя бы одно из неравенств (56). Согласно лемме 6, для этих моментов $\delta_t \geqslant \delta(\varepsilon)$, причем $\delta(\varepsilon)$ не зависит от траектории. Поэтому из (53) получим: $K\delta(\varepsilon) \leqslant \gamma_1$, так что можно взять $K(\varepsilon)=\gamma_1/\delta(\varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Лемма 8. *Если выполнены предположения* 7 *и* 11, *то существует константа γ_2 такая, что для любой равновесной траектории $\|p_t\| \leqslant \gamma_2$, $t=0, \ldots$ $\ldots, T$.*

Доказательство. Поскольку $\delta_t \geqslant 0$, $\Delta_t \geqslant 0$, то из (53) имеем: $\Delta_t=$ $=-(p_t-p^*)(c_t-c^*) \leqslant \gamma_1$. Поэтому $p_tc^* \leqslant \gamma_1+p_tc_t-p^*(c_t-c^*) \leqslant \gamma_1+\beta+2\alpha\|p^*\|$ (см. предположение 3 и лемму 1). Теперь доказываемое утверждение следует из предположения 11 (вместо 7 и 11 можно использовать 9).

Доказательство теоремы 6. Пусть $\delta(\varepsilon)>0$ таково, что $\delta_t \geqslant$ $\geqslant \delta(\varepsilon)$ как только хотя бы одно из неравенств (56) не выполняется (лемма 6). Положим: $\varepsilon_1=\min\{\varepsilon; \delta(\varepsilon)/8\gamma_2\}$, где γ_2 — константа из леммы 8. Согласно лемме 7, найдем $K(\varepsilon_1)$ такое, что

$$\|x_t-x^*\| \leqslant \varepsilon_1, \quad \|y_{t+1}-y^*\| \leqslant \varepsilon_1 \tag{57}$$

для всех t, кроме, быть может, $K(\varepsilon_1)$ моментов времени. Пусть второе из неравенств (57) впервые выполняется при $t=r-1$, а s — наибольший номер, для которого справедливо первое из неравенств (57). Тогда $s-1 \geqslant r$, если только $T \geqslant K(\varepsilon_1)+3$.

Покажем, что для всех номеров t, $r \leqslant t \leqslant s-1$, имеет место (56). Действительно, пусть K — число моментов в этом промежутке, для которых (56) неверно. Тогда из (49) получим

$$K\delta(\varepsilon) \leqslant (p^*-p_r)(y_r-y^*)+(p^*-p_s)(x^*-x_s) \leqslant 4\varepsilon_1\gamma_2. \tag{58}$$

Здесь использованы лемма 8 и неравенства (57) при $t=r-1$ и $t=s$. Учитывая зависимость ε_1 от ε, получим из (58): $K \leqslant 4\varepsilon_1\gamma_2/\delta(\varepsilon)<1$. Итак, (56) может не выполняться не более чем для $K(\varepsilon_1)$ моментов в начале и в конце планового периода; но тогда выполняются и неравенства (40) при $N(\varepsilon) \leqslant t \leqslant T-N(\varepsilon)$, если $N(\varepsilon)=K(\varepsilon_1)+1$. Теорема доказана.

Лемма 9. *Пусть справедливы предположения* 8 *и* 11. *Тогда для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\Delta(\varepsilon)>0$ такое, что из соотношения*

$$\|c-c^*\|>\varepsilon \tag{59}$$

следует неравенство

$$-(p-p^*)(c-c^*) \geqslant \Delta(\varepsilon) \tag{60}$$

для любых p, c таких, что $c \in C(p)$, $\|c\| \leqslant \alpha$, $\|p\| \leqslant \gamma_2$. Если, кроме того, выполнено предположение 9, *то неравенство* (60) *следует также из соотношения*

$$\|p-p^*\|>\varepsilon. \tag{61}$$

Действительно, в противном случае найдется пара p', c' такая, что $c' \in$ $\in C(p')$, $c' \neq c^*$ (или $p' \neq p^*$), причем $(p'-p^*)(c'-c^*) \geqslant 0$, что противоречит предположению 8 (или 9).

Лемма 10 (вторая теорема о магистрали в слабой форме). *Пусть выполнены предположения* 8 *и* 11. *Тогда для всякого $\varepsilon>0$ найдется $K(\varepsilon)$ такое, что любая равновесная траектория $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}_0^T$ удовлетворяет условию*

$$\|c_t-c^*\| \leqslant \varepsilon \tag{62}$$

всюду, за возможным исключением не более чем $K(\varepsilon)$ моментов времени. Если же сверх того выполняется предположение 9, *то $K(\varepsilon)$ можно выбрать так, чтобы вместе с* (62) *имели место неравенства*

$$\|p_t-p^*\| \leqslant \varepsilon. \tag{63}$$

Доказательство. Пусть K — число моментов, для которых не выполняется (62) (или (63)). Согласно лемме 9, для этих моментов $\Delta_t \geqslant$ $\geqslant \Delta(\varepsilon)>0$, где $\Delta(\varepsilon)$ не зависит от траектории. Из (53), как и раньше, получаем: $K \leqslant \gamma_1/\Delta(\varepsilon)=K(\varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 7 использует тот же порядок рассуждений, что и доказательство теоремы 6. По лемме 9 найдем $\Delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\Delta_t \geqslant \Delta(\varepsilon)$, если хотя бы одно из неравенств (62), (63) не выполняется. Положим: $\varepsilon_1=\min\{\varepsilon; \Delta(\varepsilon)/8\alpha\}$, где α — константа из леммы 1.

Воспользовавшись леммой 10, найдем $K(\varepsilon_1)$ такое, что

$$\|p_t-p^*\|\leqslant\varepsilon_1, \quad \|c_t-c^*\|\leqslant\varepsilon_1 \tag{64}$$

для всех t, кроме, быть может, $K(\varepsilon_1)$ моментов времени.

Пусть r и s — соответственно первый и последний номера, для которых выполняется первое из неравенств (64), и K — число моментов времени t $r\leqslant t\leqslant s$, для которых (62) или (63) неверно. Учитывая, что $\|p^*-p_r\|\leqslant\varepsilon_1$, $\|p^*-p_s\|\leqslant\varepsilon_1$, получим из (49): $K\leqslant 4\varepsilon_1\alpha/\Delta(\varepsilon)<1$. Следовательно, при $N(\varepsilon)=K(\varepsilon_1)$ справедливы неравенства (41), что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Волконский*. Принципы оптимального планирования. М., «Экономика», 1973.
2. *В. Л. Макаров, А. М. Рубинов*. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М., «Наука», 1973.
3. *K. J. Arrow, F. H. Hahn*. General Competitive Analysis. Holden-Day, Inc., San-Francisco, 1971.
4. *Х. Никайдо*. Выпуклые структуры и математическая экономика. М., «Мир», 1972.
5. *J. Tsukui*. The Consumption and the Output Turnpike Theorems in a von Neuman Type Model. A. Finite Term Problem. Rev. of Econ. Stud., 1967, v. 34, N 1.
6. *D. Gale*. On Optimal Development in a Multisector Economy. Rev. of Econ. Stud., 1967, v. 34, N 1.
7. *W. A. Brock*. On Existence of Weakly Maximal Programs in a Multisector Economy. Rev. of Econ. Stud., 1970, v. 37, N 2.
8. *В. М. Полтерович*. Экономическое равновесие и оптимум. Экономика и матем. методы, 1973, т. IX, вып. 5.
9. *Р. Рокафеллар*. Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.
10. *Е. Е. Слуцкий*. К теории сбалансированного бюджета потребителя. В сб. Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления. М., Изд-во АН СССР, 1963.

Поступила в редакцию
2 VI 1975