Abstract

This thesis is divided into two parts.

In the first part we investigate arithmetic properties of two so-called mock theta functions ω and $\mathcal{C}$. By work of Bringmann and Ono, it is known that the Fourier coefficients of these functions should satisfy congruences of a very particular shape. For almost any prime p, there exists an arithmetic progression (indeed there are infinitely many different ones), such that the Fourier coefficients indexed by this progression are all congruent to 0 modulo p. Garthwaite and Penniston have shown this in the case of ω and one should expect a similar theorem to hold for $\mathcal{C}$. However, the proof that these congruences exist is non-constructive. In this work we give the first explicit examples of congruences for ω and $\mathcal{C}$.

In the second part we investigate the asymptotic behavior of moments of certain statistics arising in the theory of partitions. Bringmann, Mahlburg, and Rhoades have already studied the asymptotic behavior of moments of the classical "rank"-statistic and also the "crank"-statistic. Garvan has introduced a more general partition statistic with a parameter T, which is a positive odd integer. The case $T = 1$ then corresponds to the "crank"-statistic, whereas $T = 3$ corresponds to the "rank"-statistic. Extending the results of Bringmann, Mahlburg, and Rhoades, in this work, we determine the asymptotic behavior of moments of the "T-rank"-statistic for all odd $T < 24$. Furthermore, we explain how to find the asymptotic behavior also for $T > 24$.

Kurzzusammenfassung

Diese Arbeit ist in zwei Teile gegliedert.

Im ersten Teil betrachten wir arithmetische Eigenschaften von zwei sogenannten Mock Theta Funktionen ω und $\mathcal{C}$. Aus Ergebnissen von Bringmann und Ono ist bereits bekannt, dass die Fourierkoeffizienten von Mock Theta Funktionen Kongruenzen einer speziellen Form genügen sollten: Zu fast jeder Primzahl p gibt es eine arithmetische Progression (in der Tat sogar unendlich viele unterschiedliche), so dass alle Fourierkoeffizienten, die mit dieser Progression indiziert sind, kongruent zu 0 modulo p sind. Für ω wurde dies von Garthwaite und Penniston gezeigt und ein ähnliches Resultat sollte auch für $\mathcal{C}$ gelten. Der Beweis, dass es solche Kongruenzen gibt, ist aber nicht konstruktiv. In dieser Arbeit geben wir die ersten expliziten Beispiele für Kongruenzen von ω und $\mathcal{C}$.

Im zweiten Teil untersuchen wir das asymptotische Verhalten von sogenannten Momenten gewisser Statistiken aus der Theorie der Partitionen. Bringmann, Mahlburg und Rhoades haben dieses asymptotische Verhalten für die Momente der klassischen „rank“-Statistik, sowie der „crank“-Statistik untersucht. Später hat Garvan entdeckt, dass diese Statistiken ein Spezialfall einer verallgemeinerten Statistik mit Parameter T sind. Der Fall $T = 1$ entspricht dabei der „crank“-Statistik und der Fall $T = 3$ der „rank“-Statistik. In dieser Arbeit erweitern wir die Ergebnisse von Bringmann, Mahlburg und Rhoades über das asymptotische Verhalten der Momente der „T-rank“-Statistik für alle ungeraden $T < 24$ und zeigen auch, wie man die analogen Aussagen für beliebiges ungerades T erhalten kann.