

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT  
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

# Anisotrope elliptische partielle Differentialgleichungen

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität zu Köln  
vorgelegt von

**Olgierd Plura**

aus Ratibor

Köln 2008

Erster Berichterstatter: Prof. Dr. Bernd Kawohl

Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. Guido Sweers

Tag der mündlichen Prüfung: 24.06.2008

### **Kurzzusammenfassung**

Ich studiere einen Prototypen einer anisotropen elliptischen partiellen Differentialgleichung. Zu Beginn werden die zugrunde liegenden anisotropen Sobolevräume definiert und ihre wichtigsten Eigenschaften behandelt. Auch die entsprechenden Einbettungssätze werden angegeben. Es folgen dann einige Standardbeispiele von anisotropen Gleichungen samt einiger Existenz, Eindeutigkeits und Regularitätsaussagen. Danach widme ich mich den Maximumprinzipien für verallgemeinerte Lösungen, wobei sowohl schwache als auch Viskositätslösungen behandelt werden. Zum Abschluß wird die Harnacksche Ungleichung in  $\mathbb{R}^2$  bewiesen.

### **Abstract**

I consider a prototype of an anisotropic elliptic partial differential equation. At the beginning the necessary definitions and properties of anisotropic Sobolev spaces will be presented, followed by some main examples of anisotropic partial differential equations, together with statements about existence, uniqueness and regularity of its solutions. After this introduction to anisotropic problems some maximum principles will be proved, both for weak and viscosity solutions. Finally a Harnack inequality for positive solutions of anisotropic elliptic partial differential equations in  $\mathbb{R}^2$  will be proved.

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Einführung in anisotrope Sobolevräume</b>  | <b>7</b>  |
| 2.1      | Definitionen . . . . .  | 7         |
| 2.2      | Eigenschaften . . . . .   | 8         |
| 2.3      | Einbettungssätze . . . . .  | 11        |
| 2.4      | Existenz, Eindeutigkeit und Regularität für einige ausgewählte Beispiele . . . . .    | 19        |
| <b>3</b> | <b>Maximumprinzipien für elliptische anisotrope partielle Differentialgleichungen</b> | <b>30</b> |
| 3.1      | Schwaches Maximumprinzip für schwache Lösungen . . . . .                              | 31        |
| 3.2      | Maximumprinzipien für Viskositätslösungen . . . . .                                   | 34        |
| 3.3      | Das starke Maximumprinzip für schwache Lösungen . . . . .                             | 45        |
| 3.4      | Anwendung auf ein Beispiel . . . . .  | 50        |
| <b>4</b> | <b>Einführung in die Harnacksche Ungleichung</b>                                      | <b>52</b> |
| 4.1      | Definition der Ungleichung . . . . .  | 52        |
| 4.2      | Folgerungen aus der Harnackschen Ungleichung . . . . .                                | 54        |
| 4.3      | Geschichtlicher Hintergrund . . . . .   | 59        |
| <b>5</b> | <b>Harnacksche Ungleichung für den zweidimensionalen Fall</b>                         | <b>61</b> |
| 5.1      | Harnacksche Ungleichung für klassische Lösungen . . . . .                             | 61        |
| 5.2      | Harnacksche Ungleichung für schwache Lösungen . . . . .                               | 69        |

# Kapitel 1

## Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit sind anisotrope Sobolevräume und partielle Differentialgleichungen. Das Adjektiv anisotrop (griech. „anti“ gegen/nicht, „isos“ gleich, „tropos“ Drehung, Richtung) bedeutet, daß eine Eigenschaft oder ein Prozeß richtungsabhängig ist. Anisotrop ist also das Gegenteil von isotrop.

Der Prototyp einer isotropen partiellen Differentialgleichung ist die Laplacegleichung

$$\Delta u = 0 .$$

Betrachtet man z.B. eine eingespannte, elastische Membran, so lautet das zugehörige Energiefunktional bei kleinen Deformationen

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx .$$

Ein Minimierer dieses Funktionals unter der Nebenbedingung  $u = u_0$  auf  $\partial\Omega$  erfüllt dann das Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= u_0 && \text{auf } \partial\Omega . \end{aligned}$$

Ist das Gebiet  $\Omega$  eine Kugel mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $x_0$ , so ist die Energie invariant bezüglich einer Drehung um  $x_0$ , d.h. für die Funktion  $v(x) := u(A(x - x_0) + x_0)$  gilt  $E(v) = E(u)$ . Dabei stellt  $A$  eine Drehmatrix dar. Ist z.B.  $u$  harmonisch, so gilt dies auch für die Funktion  $v$ . Es handelt sich also um ein isotropes Problem.

Man kann sich aber auch vorstellen, daß die Membran aus senkrecht zueinander stehenden Strängen gefertigt ist, wobei die Stränge in jede Richtung aus einem anderen Material bestehen. Dies würde bedeuten, daß sich die Elastizität der Membran in jede Richtung der Koordinatenachsen anders verhält.

Das Energiefunktional hätte dann die Gestalt

$$E(u) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx .$$

Da das Energiefunktional nur für kleine Deformationen einen physikalisch realistischen Wert liefert, d.h. wenn die partiellen Ableitungen von  $u$  relativ klein ausfallen, werden die Deformationen in die  $x_i$ -Richtung mit kleinen Exponenten  $p_i$  besonders stark betont. Somit wählt man den Exponenten  $p_i$  klein wenn das Material in die  $x_i$ -Richtung besonders widerstandsfähig ist (d.h nur unter grossem Kraftaufwand verformbar).

Das Minimieren von  $E$  unter der Nebenbedingung  $u = u_0$  auf  $\partial\Omega$  führt diesmal auf die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u = u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega .$$

Es ist leicht sich davon zu überzeugen, daß bei diesem Problem eine Invarianz bezüglich einer Drehung nicht gegeben ist, das Problem ist somit nicht richtungsunabhängig und damit anisotrop. Die obige Gleichung gilt sogar als Prototyp einer anisotropen Differentialgleichung. Um dieses Problem studieren zu können, ist es darüberhinaus notwendig eine geeignete Funktionenklasse zu wählen. Da im Energiefunktional  $E$  die Ableitungen unterschiedlich stark gewichtet werden, betrachtet man dieses Problem in sogenannten anisotropen Sobolevräumen. Es handelt sich um Funktionenräume in denen die schwachen Ableitungen in verschiedenen  $L^{p_i}$ -Räumen liegen. Die Bezeichnung anisotrop ist bei diesen Räumen gerechtfertigt, da eine Funktion aus einem anisotropen Sobolevraum, die einer Drehung unterzogen wurde, im allgemeinen nicht mehr Element dieses Raumes ist.

Das zweite Kapitel dieser Arbeit soll einen Überblick über diese Räume bereitstellen. Angegeben werden die notwendigen Definitionen, wichtigste Eigenschaften und bekannte Einbettungssätze. Auf Unterschiede zu den isotropen Räumen wird in diesem Zusammenhang ebenfalls eingegangen. Anschließend werden wir uns mit einigen Beispielen von anisotropen partiellen Differentialgleichungen beschäftigen. Unter anderem soll die Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösungen studiert werden.

Von großem Interesse sind aber auch andere Eigenschaften der Lösungen. Es ist zum Beispiel bekannt, daß Lösungen der Gleichung  $\Delta u = 0$  oder allgemeiner der  $p$ -Laplacegleichung

$$\Delta_p u = 0$$

(wobei  $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ , für  $p = 2$  gilt also  $\Delta_p u = \Delta u$ ) Hölderstetig sind, der Harnackschen Ungleichung, dem starken Maximumprinzip und dem Vergleichsprinzip genügen. Von den aufgelisteten Eigenschaften ist die Harnacksche Ungleichung die stärkste, da sie in vielen Fällen alle anderen Eigenschaften impliziert (z.B. wenn die Gleichung linear ist). Die Harnacksche Ungleichung besagt dabei, daß auf Teilgebieten das Supremum jeder nichtnegativen Lösung nach oben durch das Infimum abgeschätzt werden kann, d.h.

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u$$

für jedes Teilgebiet  $\Omega' \subset\subset \Omega$  und jede nichtnegative Lösung  $u$ , mit einer von  $u$  unabhängigen Konstante  $c > 0$  gilt.

Die Harnacksche Ungleichung behält sogar für eine noch größere Klasse von Problemen ihre Gültigkeit, und zwar für Gleichungen mit sogenanntem  $p$ -Wachstum. Damit sind Gleichungen der Gestalt

$$\operatorname{div} A(x, u(x), \nabla u(x)) = B(x, u(x), \nabla u(x))$$

gemeint, bei denen  $A$  und  $B$  den Wachstumsbedingungen

$$|A(x, u, z)| \leq c_1 |z|^{p-1}, \quad z \cdot A(x, u, z) \geq c_2 |z|^p, \quad |B(x, u, z)| \leq c_3 |z|^{p-1}$$

genügen.

Für den Beweis der Harnackschen Ungleichung finden in den meisten Fällen zwei Standardmethoden Anwendung. Die erste Methode beruht auf Mittelwertformeln für die Lösungen der Gleichung, und wird vor allem bei linearen Gleichungen verwendet. Es ist z.B. bekannt, daß Lösungen der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

(also harmonische Funktionen) der Mittelwertformel

$$u(x) = \oint_{B_r(x)} u(y) dy$$

genügen, mit Hilfe deren die Harnacksche Ungleichung leicht bewiesen werden kann. Für allgemeine lineare Gleichungen hat man keine Mittelwertformel im klassischen Sinne wie oben, es können aber wie z.B. in [18] Integralformeln hergeleitet werden, die denselben Zweck erfüllen. Bei nichtlinearen Gleichungen (wie z.B. bei Gleichungen mit  $p$ -Wachstum) wird hingegen in den meisten Fällen das berühmte Mosersche Iterationsverfahren verwendet (siehe [14], [21]). Für eine positive Funktion  $u \in L^\infty(\Omega)$  gilt nämlich

$$\sup_{\Omega} |u| = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

beziehungsweise

$$\inf_{\Omega} |u| = \lim_{p \rightarrow -\infty} \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei es sich natürlich um das essentielle Supremum bzw. Infimum handelt. Für die gewünschte Harnacksche Ungleichung genügt es dann folglich

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega'} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \lim_{p \rightarrow -\infty} \left( \int_{\Omega'} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

zu beweisen. Um dies zu zeigen werden für die Lösungen Ungleichungen der Gestalt

$$\left( \int_{\Omega_1} |u|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq c \left( \int_{\Omega_2} |u|^{p_2} dx \right)^{\frac{1}{p_2}}$$

hergeleitet, wobei  $p_1 > p_2$  und  $\Omega_1 \subset \Omega_2$  ist, und dann iterativ angewendet. Diese Beweismethoden lassen sich jedoch nicht auf den anisotropen Fall übertragen.

Ein wichtiger Grund für die bei der Behandlung von anisotropen Gleichungen auftretende Schwierigkeiten ist die fehlende Homogenität des Operators

$$Lu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

wodurch ein Vielfaches einer Lösung von  $Lu = 0$  im allgemeinen keine Lösung mehr ist. Diese Schwierigkeit läßt sich zumindest beim starken Maximumprinzip umgehen, wie wir im dritten Kapitel sehen werden. Dort beweisen wir nämlich das starke Maximumprinzip für Viskositätslösungen von Gleichungen mit anisotropem Wachstum. Die Grundlage für das Maximumprinzip wird mit dem Beweis des Randwertlemmas von Hopf gelegt, aus dem sich das Maximumprinzip relativ einfach folgern läßt. Dabei wird auf ein bekanntes Resultat aus [2] für homogene Gleichungen zurückgegriffen, und der dort präsentierte Beweis entsprechend modifiziert, um die fehlende Homogenität zu kompensieren.

Der Bedeutung der Harnackschen Ungleichung wird das gesamte vierte Kapitel gewidmet. Um ihre Wichtigkeit zu verdeutlichen, leiten wir eine Reihe sich daraus ergebenden Folgerungen her (unter anderem das Maximumprinzip und die Hölderstetigkeit). Dabei werden wir die Harnacksche Ungleichung in einer sehr abstrakten Funktionenmenge studieren, um die Anwendbarkeit auf eine Vielzahl von konkreten Problemen offen zu halten.

Nach dieser recht abstrakten Abhandlung beweisen wir im fünften Kapitel die Harnacksche Ungleichung für Lösungen von

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0$$



in  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Es wird sich um einen geometrisch geführten Beweis handeln, der auf der Anwendung des Maximumprinzips und des Vergleichsprinzips basiert, und der nicht auf höhere Dimensionen übertragbar ist. Die Gültigkeit der Harnackschen Ungleichung für Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 3$  bleibt in dieser Arbeit ein offenes Problem.

# Kapitel 2

## Einführung in anisotrope Sobolevräume

### 2.1 Definitionen

Wir beginnen dieses Kapitel gleich mit der Definition der anisotropen Sobolevräume.

Seien dazu  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge,  $p_0, p_1, \dots, p_n \in [1, \infty]$ ,  
 $\vec{p} := (p_0, p_1, \dots, p_n)$ .

Analog zu [7] benutzen wir die folgenden beiden Definitionen.

#### Definition 2.1.1

Der Sobolevraum  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  ist definiert als

$$W^{1,\vec{p}}(\Omega) := \{u \in L^{p_0}(\Omega) \mid u \text{ schwach differenzierbar, } u_{x_i} \in L^{p_i}(\Omega)\}$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W^{1,\vec{p}}} := \|u\|_{L^{p_0}} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}} .$$

Eine völlig analoge Definition wäre es, den Raum  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  als die Vervollständigung von  $C^1(\Omega)$  bezüglich der oben angegebenen Norm zu betrachten (die Äquivalenz der beiden Definitionen zeigt man mittels Faltungen und Zerlegung der Eins).

#### Definition 2.1.2

Den Raum  $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  definieren wir als den Abschluß von  $C_0^\infty(\Omega)$  bezüglich der  $W^{1,\vec{p}}$  Norm.

## 2.2 Eigenschaften

### Vollständigkeit und Reflexivität

Die Räume  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  bzw.  $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  sind bezüglich der angegebenen Norm vollständig. Die Vollständigkeit folgt dabei aus der Vollständigkeit der  $L^p$ -Räume.

Sind die Exponenten  $p_0, p_1, \dots, p_n \in (1, \infty)$ , so sind diese Räume sogar reflexiv. Der Reflexivität wird dabei ebenfalls auf die Reflexivität der  $L^p$ -Räume zurückgeführt (siehe z.B. [15]). Dazu definieren wir einen linearen Operator

$$P : W^{1,\vec{p}}(\Omega) \longrightarrow L^{\vec{p}}(\Omega)$$

(wobei  $L^{\vec{p}}(\Omega) := (L^{p_0}(\Omega) \times L^{p_1}(\Omega) \times \dots \times L^{p_n}(\Omega))$ ) durch

$$P(u) := (u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) .$$

Der Operator  $P$  ist normerhaltend, d.h.  $\|P(u)\|_{L^{\vec{p}}} = \|u\|_{W^{1,\vec{p}}}$ , falls der Raum  $L^{\vec{p}}(\Omega)$  mit der Norm

$$\|u\|_{L^{\vec{p}}} := \sum_{i=0}^n \|u_i\|_{L^{p_i}}$$

versehen wird. Damit ist das Bild von  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  unter  $P$  ein abgeschlossener Unterraum von  $L^{\vec{p}}(\Omega)$ . Sind nun die Exponenten  $p_0, p_1, \dots, p_n \in (1, \infty)$ , so ist der Raum  $L^{\vec{p}}(\Omega)$  reflexiv. Dann ist aber auch  $P(W^{1,\vec{p}}(\Omega))$  als abgeschlossener Unterraum von  $L^{\vec{p}}(\Omega)$  ebenfalls reflexiv. Schließlich erhalten wir die Reflexivität von  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ , da dieser Raum isomorph zum Raum  $P(W^{1,\vec{p}}(\Omega))$  ist.

### Dualräume

Eine weitere interessante Frage im Zusammenhang mit anisotropen Sobolevräumen ist die nach der Gestalt der zugehörigen Dualräume. Mit Hilfe des Operators  $P$  haben wir bereits gesehen, daß  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  isomorph zu einem abgeschlossenem Unterraum von  $L^{\vec{p}}(\Omega)$  ist. Damit ist auch der Dualraum von  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ , den wir mit  $(W^{1,\vec{p}}(\Omega))^*$  bezeichnen, isomorph zum Dualraum eines abgeschlossenen Unterraumes von  $L^{\vec{p}}(\Omega)$ . Das Problem besteht jedoch darin, daß der Unterraum  $P(W^{1,\vec{p}}(\Omega))$  nicht leicht zu charakterisieren ist, weswegen man auch kaum eine Vorstellung hat wie dessen Dualraum aussehen könnte. Wir können jedoch den Dualraum von  $L^{\vec{p}}(\Omega)$  beschreiben, wenn  $p_0, p_1, \dots, p_n > 1$  ist. Dazu setzen wir  $\vec{q} := (q_0, q_1, \dots, q_n)$ , wobei die Komponenten des Vektors  $\vec{q}$  durch  $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$  definiert sind (dabei ist  $q_i = \infty$  für  $p_i = 1$ ). Dann ist der Dualraum von  $L^{\vec{p}}(\Omega)$  isomorph zum Raum  $L^{\vec{q}}(\Omega)$

durch die Zuordnung

$$T_v(u) := \sum_{i=0}^n \int_{\Omega} u_i v_i \, dx \quad \text{für } v \in L^{\vec{q}}(\Omega) \text{ und } u \in L^{\vec{p}}(\Omega) .$$

Sei jetzt  $\varphi$  ein beliebiges Element aus dem Dualraum von  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ . Dann stellt die Verknüpfung  $\varphi \circ P^{-1}$  ein beschränktes lineares Funktional auf dem Raum  $P(W^{1,\vec{p}}(\Omega))$  dar, das sich mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach zu einem beschränkten linearen Funktional  $\tilde{\varphi}$  auf dem ganzen Raum  $L^{\vec{p}}(\Omega)$  fortsetzen läßt. Das Funktional  $\tilde{\varphi}$  kann hingegen mit einem Element  $v \in L^{\vec{q}}(\Omega)$  im Sinne  $T_v = \tilde{\varphi}$  identifiziert werden. Damit erhalten wir

$$\varphi(u) = \tilde{\varphi}(u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = \int_{\Omega} uv_0 \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i} v_i \, dx$$

d.h. jedes beschränkte lineare Funktional auf  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  kann mit Hilfe von Funktionen  $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in L^{\vec{q}}(\Omega)$  dargestellt werden. Zu beachten ist jedoch, daß diese Funktionen nicht eindeutig bestimmt sind. Wir nehmen zum Beispiel eine beliebige Funktion  $g \in C_0^\infty(\Omega)$  und setzen

$$v_0 = \sum_{i=1}^n g_{x_i} \quad \text{und } v_i = g \quad \text{für } i = 1, \dots, n .$$

Mittels partieller Integration folgt, daß durch diese Wahl von  $v_0, v_1, \dots, v_n$  das Nullfunktional auf  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  beschrieben wird. Damit kann jedes beschränkte lineare Funktional durch unendlich viele Elemente  $v \in L^{\vec{q}}(\Omega)$  dargestellt werden. Wie wir nämlich gesehen haben ist der Dualraum von  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  isomorph zum Dualraum eines echten Unterrums von  $L^{\vec{p}}(\Omega)$ , nicht jedoch zum Dualraum von  $L^{\vec{p}}(\Omega)$  selbst, obwohl die beschränkten linearen Funktionale durch Elemente aus  $L^{\vec{q}}(\Omega)$  darstellbar sind.

Es gibt aber auch eine weitere Möglichkeit den Dualraum von  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  zu charakterisieren (siehe auch [1]). Zunächst stellen wir leicht fest, daß  $(W^{1,\vec{p}}(\Omega))^*$  den Raum  $L^{q_0}(\Omega)$  enthält, mit  $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1$ . In der Tat definiert für ein  $v_0 \in L^{q_0}(\Omega)$  die Abbildung

$$T_{v_0}(u) := \int_{\Omega} uv_0 \, dx$$

ein beschränktes lineares Funktional auf  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ . Wir können zeigen, daß der Raum  $L^{q_0}(\Omega)$  sogar dicht in  $(W^{1,\vec{p}}(\Omega))^*$  liegt. Um dies zu erreichen wählen wir ein Element  $\psi$  aus dem Bidualraum von  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ , das sich aufgrund der Reflexivität durch ein Element  $u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  darstellen läßt, d.h. es gilt

$$\psi(\varphi) = \varphi(u) \quad \text{für alle } \varphi \in (W^{1,\vec{p}}(\Omega))^* .$$

Nehmen wir jetzt an, daß  $\psi$  konstant Null auf dem Unterraum  $L^{q_0}(\Omega)$  von  $(W^{1,\vec{p}}(\Omega))^*$  ist, also gilt

$$\psi(T_{v_0}) = T_{v_0}(u) = \int_{\Omega} uv_0 \, dx = 0$$

für jedes  $v_0 \in L^{q_0}(\Omega)$ . Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung ist dann  $u \equiv 0$  und somit natürlich auch  $\psi \equiv 0$ . Dies bedeutet, daß das Nullfunktional auf  $L^{q_0}(\Omega)$  sich nicht zu einem nicht trivialen Funktional auf ganz  $(W^{1,\vec{p}}(\Omega))^*$  fortsetzen läßt. Damit aber dies der Fall ist, muß  $L^{q_0}(\Omega)$  bereits dicht in  $(W^{1,\vec{p}}(\Omega))^*$  liegen.

$$\mathbf{W}^{1,\vec{p}}(\mathbf{R}^n) = \mathbf{W}_0^{1,\vec{p}}(\mathbf{R}^n)$$

Dieses für isotrope Räume bekannte Resultat läßt sich auch auf den anisotropen Fall übertragen. Wir folgen dabei dem in [1] für isotrope Räume präsentierten Beweis. Dazu betrachten wir eine Funktion  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit folgenden Eigenschaften:

- i)  $f(x) = 1$  für  $|x| < 1$
- ii)  $f(x) = 0$  für  $|x| > 2$
- iii)  $|f(x)|, |f_{x_i}(x)| \leq M$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und alle  $i = 1, \dots, n$ .

Dann setzen wir  $f_\varepsilon(x) := f(\varepsilon x)$ . Die Funktion  $f_\varepsilon$  erfüllt:

- i)  $f_\varepsilon(x) = 1$  für  $|x| < \varepsilon^{-1}$
- ii)  $f_\varepsilon(x) = 0$  falls  $|x| > 2\varepsilon^{-1}$
- iii)  $|f_\varepsilon(x)|, |(f_\varepsilon)_{x_i}(x)| \leq M$  falls  $\varepsilon \leq 1$ .

Schließlich definieren wir  $u_\varepsilon(x) := f_\varepsilon(x)u(x)$ . Die Funktion  $u_\varepsilon$  liegt offensichtlich in  $W^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  und hat kompakten Träger. Mit Hilfe von Faltungen läßt sich  $u_\varepsilon$  durch Elemente aus  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  approximieren, deswegen genügt es  $u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $W^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  nachzuweisen.

Es gilt:

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{W^{1,\vec{p}}(\{|x|>2\varepsilon^{-1}\})} + \|u_\varepsilon - u\|_{W^{1,\vec{p}}(\{\varepsilon^{-1}<|x|<2\varepsilon^{-1}\})}.$$

Wegen  $(u_\varepsilon)_{x_i} = (f_\varepsilon)_{x_i}u + f_\varepsilon u_{x_i}$  erhalten wir die

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W^{1,\vec{p}}(\{\varepsilon^{-1}<|x|<2\varepsilon^{-1}\})} \leq c \|u\|_{W^{1,\vec{p}}(\{\varepsilon^{-1}<|x|<2\varepsilon^{-1}\})}$$

Abschätzung. Also gilt schließlich

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{W^{1,\vec{p}}(\{|x|>2\varepsilon^{-1}\})},$$

wobei die rechte Seite gegen Null für  $\varepsilon \rightarrow 0$  strebt.

## Approximation durch glatte Funktionen

Wir haben den Raum  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  auf zwei unterschiedliche Arten definiert. Zum einen als Vervollständigung von  $C^1(\Omega)$  bezüglich der entsprechenden Integralnorm, und zum anderen über die Definition der schwachen Ableitungen. Den Nachweis der Äquivalenz dieser beiden Definitionen haben wir ausgelassen, da dabei genauso wie im isotropen Fall vorgegangen wird. Somit wissen wir, daß stetig differenzierbare Funktionen dicht in  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  liegen. Es stellt sich jetzt die Frage, unter welchen Zusatzvoraussetzungen an den Rand von  $\Omega$ , sich die Elemente aus  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  durch bis auf den Rand stetig fortsetzbare, glatte Funktionen approximieren lassen, d.h. wann  $C^1(\overline{\Omega})$  dicht in  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  ist, wobei

$$C^1(\overline{\Omega}) := \{ u \in C^1(\Omega) \mid u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n} \text{ gleichmäßig stetig auf } \Omega \} .$$

Bei der Behandlung dieser Frage ergeben sich keine Unterschiede zu den isotropen Sobolevräumen, d.h. es müssen die gleichen Voraussetzungen an den Rand gestellt werden (dies ist damit begründet, daß die Approximation mittels Faltungen bei anisotropen Räumen völlig analog funktioniert). Die Approximation durch  $C^1(\overline{\Omega})$  ist zum Beispiel möglich wenn  $\partial\Omega$  von der Klasse  $C^1$  ist. Diese Bedingung ist jedoch zu restriktiv. In [1] wurde die Approximierbarkeit für allgemeinere Gebiete, die einer sogenannten Segmentrandbedingung genügen, durch Funktionen aus  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  nachgewiesen (d.h. die Einschränkung aller Funktionen aus  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  auf  $\Omega$  liegt dicht in  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ ). Dasselbe Resultat wurde in [16] für sternförmige Gebiete gezeigt.

Analog zum isotropen Fall gibt es auch für die anisotropen Sobolevräume eine Reihe von Einbettungssätzen, über die jetzt eine Übersicht angegeben werden soll.

## 2.3 Einbettungssätze

### Einbettungssatz 1

Sei  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} > 1$ . Dann existiert eine Konstante  $c(n, p_1, \dots, p_n) > 0$ , so daß für alle  $u \in W^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  die Ungleichung

$$\|u\|_{L^q} \leq c \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}$$

gilt, wobei  $q := \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} - 1}$  ist.

Beweis:

Wir folgen dem in [20] präsentierten Beweis. Wie bei isotropen Sobolevräumen gilt auch hier  $W^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ , und aus diesem Grund genügt es die obige Ungleichung nur für  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  Funktionen nachzuweisen. Mit dem Dichtheitsargument folgt dann die Aussage für ein beliebiges  $u$ . Sei also  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Für positive Zahlen  $\sigma_1, \dots, \sigma_n > 0$  mit  $\sum \sigma_i = 1$  erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n |u|^{q\sigma_i} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \sup_{x_i \in \mathbb{R}} |u|^{q\sigma_i} dx .$$

Mittels Anwendung des Lemmas von Gagliardo (siehe [9]) folgt dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \sup_{x_i \in \mathbb{R}} |u|^{q\sigma_i} dx \leq \prod_{i=1}^n \left[ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sup_{x_i \in \mathbb{R}} |u|^{q\sigma_i(n-1)} dx^{(i)} \right]^{\frac{1}{n-1}}$$

wobei wir mit  $x^{(i)} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  bezeichnen. Wegen

$$|u(x)|^{q\sigma_i(n-1)} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (|u(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n)|^{q\sigma_i(n-1)}) \right| ds$$

folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx \leq \prod_{i=1}^n \left[ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (|u|^{q\sigma_i(n-1)}) \right| ds dx^{(i)} \right]^{\frac{1}{n-1}}$$

und somit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx \leq \prod_{i=1}^n \left[ \int_{\mathbb{R}^n} q\sigma_i(n-1) |u|^{q\sigma_i(n-1)-1} |u_{x_i}| dx \right]^{\frac{1}{n-1}} .$$

Jetzt wenden wir die Hölderungleichung an, und gelangen zu der Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx \leq \prod_{i=1}^n [q\sigma_i(n-1)] \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(q\sigma_i(n-1)-1) \frac{p_i}{p_i-1}} dx \right)^{\frac{p_i-1}{p_i}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u_{x_i}|^{p_i} dx \right)^{\frac{1}{p_i} \frac{1}{n-1}} .$$

Anschließend setzen wir

$$\sigma_i := \frac{1}{n(n-1)} \left( n-1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} - \frac{n}{p_i} \right)$$

wodurch  $\sum_{i=1}^n \sigma_i = 1$  und  $(q\sigma_i(n-1)-1) \frac{p_i}{p_i-1} = q$  gilt (an dieser Stelle kommt die Voraussetzung  $\sum \frac{1}{p_i} > 1$  ins Spiel, da dadurch  $\sigma_i > 0$  gewährleistet ist). Für unsere Ungleichung bedeutet dies:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx \leq c \prod_{i=1}^n \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx \right)^{\frac{p_i-1}{p_i}} \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}} \right]^{\frac{1}{n-1}}$$

also ist

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx\right)^{1-\mu} \leq c \prod_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}^{\frac{1}{n-1}}$$

mit  $\mu = \frac{1}{n-1} \sum \frac{p_i-1}{p_i}$ . Wegen  $1 - \mu = \frac{n}{q(n-1)}$  ergibt sich die Ungleichung

$$\|u\|_{L^q} \leq c \left(\prod_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Da das geometrische Mittel durch das arithmetische Mittel nach oben abgeschätzt werden kann, folgt dann damit die Ungleichung aus dem Einbettungssatz 1.

**Bemerkungen:**

- Die Bedingung  $\sum \frac{1}{p_i} > 1$  ist im isotropen Fall (d.h.  $p_1 = \dots = p_n = p$ ) äquivalent zu der dort bekannten Bedingung  $p < n$ .
- Für  $\bar{p} = n(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i})^{-1}$ , d.h.  $\bar{p}$  ist das sogenannte harmonische Mittel der Zahlen  $p_1, \dots, p_n$ , erhält man  $q = \frac{n\bar{p}}{n-\bar{p}}$ .

Anhand dieser beiden Bemerkungen ist ersichtlich, daß der Einbettungssatz 1 die natürliche Verallgemeinerung des bekannten Sobolevschen Einbettungssatzes für isotrope Räume ist.

Es ist auch leicht zu zeigen, daß zumindest die Abschätzung der  $L^q$  Norm von  $u$  durch das Produkt der Normen der partiellen Ableitungen nur für das angegebene  $q$  gelten kann. Dazu betrachten wir ein nicht triviales  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , und definieren für ein beliebiges  $\lambda > 0$  die Funktion  $u^\lambda(x) := u(\lambda x)$ , auf die wir diese Abschätzung anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \lambda^{-\frac{n}{q}} \|u\|_{L^q} &= \|u^\lambda\|_{L^q} \leq c \left(\prod_{i=1}^n \|(u^\lambda)_{x_i}\|_{L^{p_i}}\right)^{\frac{1}{n}} = c \left(\prod_{i=1}^n \lambda^{1-\frac{n}{p_i}} \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}\right)^{\frac{1}{n}} = \\ &= c \lambda^{1-\sum \frac{1}{p_i}} \left(\prod_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}\right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Damit diese Ungleichung für alle  $\lambda > 0$  gelten kann, müssen die Exponenten von  $\lambda$  auf beiden Seiten der Ungleichung übereinstimmen, d.h.  $q$  muss dem im Einbettungssatz angegebenen Wert entsprechen.

Eine einfache Folgerung ist der folgende Einbettungssatz für beliebige, nicht unbedingt beschränkte Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ .

**Einbettungssatz 2**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} > 1$ . Dann existiert eine



Konstante  $c(n, p_1, \dots, p_n) > 0$ , so daß für alle  $u \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$  die Ungleichung

$$\|u\|_{L^q} \leq c \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}$$

gilt, wobei  $q := \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} - 1}$  ist.

Beweis:

Man setze  $u \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$  außerhalb von  $\Omega$  mit Null fort, und wende Einbettungssatz 1 an.

Jetzt widmen wir uns Einbettungen für beschränkte Gebiete zu. An dieser Stelle kommt eine Besonderheit der anisotropen Räume ins Spiel. Im isotropen Fall ist nämlich der kritische Exponent  $\frac{np}{n-p}$ , sofern definiert (d.h.  $p < n$ ), stets größer als  $p$ . Analog dazu würde man erwarten, daß im anisotropen Fall  $q > \max\{p_1, \dots, p_n\}$  gilt, was jedoch im allgemeinen nicht der Fall ist. Sei o.B.d.A  $p_n = \max\{p_1, \dots, p_n\}$ . Dann ist  $q > \max\{p_1, \dots, p_n\}$  äquivalent zu der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i} - 1 \leq \frac{n-1}{p_n} .$$

Gilt bereits  $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i} > 1$  so kann  $p_n$  groß genug gewählt werden damit die Ungleichung verletzt ist. Für  $n = 2$  ist dies offensichtlich nicht möglich, jedoch kann für  $n \geq 3$  z.B.  $p_1 = p_2 = \frac{3}{2}, p_3 = 7$  gewählt werden. Dann ist  $q = 6.3 < \max\{p_1, \dots, p_n\}$ . Diese Eigenschaft zusammen mit dem folgendem Lemma zeigt, daß der kritische Exponent bei Einbettung für beschränkte Gebiete im anisotropen Fall größer ausfallen kann als  $q$  wie im Einbettungssatz 2 definiert.

### Lemma 2.3.1

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge die bezüglich der  $i$ -ten Komponente beschränkt ist, d.h. es existieren Zahlen  $-\infty < a < b < \infty$  mit  $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid a < x_i < b\}$ . Dann gilt für jedes  $u \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$  :

$$\|u\|_{L^{p_i}} \leq (b-a) \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}} .$$

Beweis:

Der Beweis ist für eine glatte Funktion  $u$  recht einfach. Dazu wird  $u$  zunächst mit Null außerhalb von  $\Omega$  fortgesetzt. Es gilt jetzt nämlich:

$$u(x) = u(x) - u(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$

$$= \int_a^{x_i} u_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n) ds$$

$$\text{und somit } |u(x)| \leq \int_a^b |u_{x_i}| ds.$$

Nun folgt mittels der Hölderungleichung

$$\begin{aligned} |u(x)|^{p_i} &\leq \left( \int_a^b |u_{x_i}| ds \right)^{p_i} \leq [(b-a)^{\frac{p_i-1}{p_i}} \left( \int_a^b |u_{x_i}|^{p_i} ds \right)^{\frac{1}{p_i}}]^{p_i} = \\ &= (b-a)^{p_i-1} \int_a^b |u_{x_i}|^{p_i} ds. \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$\int_{\Omega} |u|^{p_i} dx \leq (b-a)^{p_i} \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{p_i} dx$$

und somit ist die gewünschte Ungleichung bewiesen. Mit Dichtheitsargumenten erhalten wir diese Ungleichung für ein beliebiges  $u \in W_0^{1, \vec{p}}$  und der Beweis ist erbracht.

Besonders hervorzuheben ist die Tatsache, daß die Konstante linear von der Breite des Gebietes  $\Omega$  abhängt.

Mit Hilfe dieses Lemmas läßt sich der nächste Einbettungssatz aus [7] leicht beweisen

### Einbettungssatz 3

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte Teilmenge. Wir setzen

$$q^* = \max \left\{ \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} - 1}, p_1, \dots, p_n \right\}$$

falls  $\sum_{i=1}^n 1/p_i > 1$ , beziehungsweise wir wählen  $q^* \geq 1$  beliebig groß für den anderen Fall  $\sum_{i=1}^n 1/p_i \leq 1$ . Dann existiert für jedes  $q \leq q^*$  eine Konstante  $c(n, q, \Omega, p_1, \dots, p_n) > 0$  mit

$$\|u\|_{L^q} \leq c \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}$$

für alle  $u \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$ . Gilt  $q < q^*$ , so ist die Einbettung von  $W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$  nach  $L^q(\Omega)$  sogar kompakt.

Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} > 1$ . Die Funktionen aus  $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  werden wie gewohnt außerhalb von  $\Omega$  mit Null fortgesetzt. Anschließende Anwendung vom Einbettungssatz 2 liefert die Einbettung von  $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  nach  $L^q(\Omega)$  mit  $q = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} - 1}$ . Andererseits folgt aus dem Lemma 2.3.1 dieselbe Einbettung nur diesmal mit  $q = \max\{p_1, \dots, p_n\}$ . Insgesamt erhalten wir also eine stetige Einbettung von  $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  nach  $L^{q^*}$ . Aus der Beschränktheit der Teilmenge  $\Omega$  ergibt sich dann die gewünschte Ungleichung für alle  $q \leq q^*$ . Der Fall  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} > 1$  ist somit abgehandelt.

Ist nun  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \leq 1$ , so wählen wir Exponenten  $q_1, \dots, q_n \geq 1$  mit  $q_i \leq p_i$  und  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} > 1$ . Dies führt wegen Einbettungssatz 2 auf die Ungleichung

$$\|u\|_{L^q} \leq c \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{q_i}} \leq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}$$

mit  $q = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} - 1}$ . Dabei wird  $q$  bei geeigneter Wahl von  $q_1, \dots, q_n$  beliebig groß (es muß sichergestellt werden, daß der Term  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} - 1$  beliebig klein wird).

Für die Kompaktheit der Einbettung im Falle  $q < q^*$  siehe z.B. [6]. Dort wird zwar die Kompaktheit für isotrope Räume bewiesen, doch es bedarf keine grundlegenden Modifikation um den dort präsentierten Beweis auch auf den anisotropen Fall zu übertragen. Die Grundidee besteht darin, zunächst mit Hilfe von Faltungen die kompakte Einbettung nach  $L^1(\Omega)$  zu zeigen. Mittels der Interpolationsungleichung

$$\|u\|_{L^a} \leq \|u\|_{L^{b_1}}^\theta \|u\|_{L^{b_2}}^{1-\theta}$$

mit  $a \in [b_1, b_2]$  und  $\theta = \theta(a, b_1, b_2) \in [0, 1]$  ergibt sich dann die kompakte Einbettung für alle  $q < q^*$ .

Damit wäre der Beweis von Einbettungssatz 3 erbracht.

Ob  $\max\{p_1, \dots, p_n\}$  oder  $\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} - 1}$  den kritischen Exponenten für diese Einbettung darstellt, hängt ab von der Verteilung der Exponenten  $p_1, \dots, p_n$ . Liegen  $p_1, \dots, p_n$  weit auseinander, so stellt  $\max\{p_1, \dots, p_n\}$  den kritischen Exponenten dar, wenn hingegen die Exponenten dicht beieinander liegen, so kommt man dem isotropen Fall näher und es gilt  $q^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} - 1}$ .

Die bisher vorgestellten Einbettungssätze behandelten den Raum  $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ , d.h. den Abschluß von  $C_0^\infty$  bzgl. der  $W^{1,\vec{p}}$ -Norm. Wegen Nullranddaten war auch keine Voraussetzung an die Regularität des Randes von  $\Omega$  erforderlich,

was sich jedoch bei Einbettungen für die Räume  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  ändert. Bereits im isotropen Fall ist es zum Beispiel notwendig eine Kegelrandbedingung an den Rand von  $\Omega$  zu stellen. Im anisotropen Fall ist es nötig diese Bedingung nochmals zu verschärfen.

#### Einbettungssatz 4:

Sei  $\Omega = (0, 1)^n \subset \mathbb{R}^n$  und  $p_0 \geq \max\{p_1, \dots, p_n\}$ . Wir setzen

$$q^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} - 1}$$

falls  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} > 1$ , beziehungsweise wählen  $q^* \geq 1$  beliebig groß für den Fall  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \leq 1$ . Dann existiert für jedes  $q \leq q^*$  eine Konstante  $c(n, q, \Omega, p_1, \dots, p_n) > 0$  mit

$$\|u\|_{L^q} \leq c \|u\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega)}$$

für alle  $u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ . Gilt  $q < q^*$ , so ist diese Einbettung von  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  nach  $L^q(\Omega)$  sogar kompakt.

Für den Beweis siehe [16], [17]. Der Beweis verläuft dabei recht ähnlich zum Beweis von Einbettungssatz 1, auch hier steht das Lemma von Gagliardo im Mittelpunkt. Das Lemma von Gagliardo ist auch der Grund weshalb der Beweis für  $\Omega = (0, 1)^n$  erbracht wird, da nur für Gebiete solcher Gestalt das Lemma gültig ist.

Mit Hilfe einer Reskalierung läßt sich diese Einbettung natürlich auch für Würfel beliebiger Seitenlänge in  $\mathbb{R}^n$  übertragen. Mit einem Überdeckungsargument kann dieses Ergebnis dann für noch allgemeinere Gebiete gezeigt werden, und zwar für Gebiete  $\Omega$  die folgende Bedingungen erfüllen:

- i) es existieren Teilgebiete  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$  mit  $\Omega = \cup_{i=1}^k \Omega_i$
- ii) zu jedem Teilgebiet  $\Omega_i$  existiert ein Würfel  $Q_i$  der Seitenlänge  $h > 0$  mit dem Nullpunkt als eine Ecke, so daß für alle  $x \in \Omega_i$  die Inklusion  $x + Q_i \subset \Omega$  gilt.

Die Bedingung an das Gebiet  $\Omega$ , welche die Gültigkeit des Einbettungssatzes 4 sichert, stellt sich als relativ restriktiv heraus. Ein Standardbeispiel für ein Gebiet, welches der Bedingung nicht genügt ist zum Beispiel eine Kugel. Für die Einheitskugel  $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$  stellen zum Beispiel die Punkte  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$  ein Problem dar, da genau in diesen Punkten die geforderte Bedingung nicht erfüllt werden kann.

Mit Hilfe eines Gegenbeispiels möchten wir uns davon überzeugen, daß die

Einbettung für anisotrope Räume tatsächlich für eine Kugel nicht gelten kann. Sei also  $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$  und  $u(x, y) = (1 - x)^{-\frac{1}{3}}$  Dann gilt:

- i)  $u \in L^2(B_1(0))$
- ii)  $u_x \in L^1(B_1(0))$
- iii)  $u_y \in L^\infty(B_1(0))$  .

Wenn wir nun annehmen, daß der Einbettungssatz 4 in diesem Fall gilt, so würde für  $(p_0, p_1, p_2) = (2, 1, 2)$   $q^* = 4$  folgen. Weitere Anwendung von Einbettungssatz 4 mit  $(p_0, p_1, p_2) = (4, 1, 4)$  ergibt dann  $q^* = 8$ . Mehrmalige iterative Anwendung würde dann  $u \in L^p(B_1(0))$  für alle  $p \geq 1$  implizieren. Dies ist jedoch nicht der Fall und es folgt ein Widerspruch.

Das Scheitern der Einbettung in diesem konkreten Fall ist damit begründet, daß die partielle Ableitung nach  $y$  im Punkte  $(1, 0)$  aufgrund der Geometrie der Einheitskugel keinen nennenswerten Beitrag zur höheren Integrierbarkeit von  $u$  leisten kann. Die Voraussetzung, daß jeder Punkt zugleich die Ecke eines in diesem Gebiet enthaltenen Würfels ist, wirkt genau dem entgegen.

Die Einbettungssätze 1, ..., 4 zeigen, daß die Existenz und Integrierbarkeit schwacher Ableitungen eine höhere Integrierbarkeit von der Funktion selbst zur Folge hat. Im isotropen Fall gibt es aber auch eine Einbettung in den Raum der Hölderstetigen Funktionen für den Fall  $p > n$ . Äquivalent dazu im anisotropen Fall ist die Bedingung  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} < 1$ , die jedoch nicht ausreicht um den Raum  $W^{1, \vec{p}}$  in den Raum der Hölderstetigen Funktionen einzubetten (die soeben behandelte Funktion  $u(x, y) = (1 - x)^{-\frac{1}{3}}$  stellt ein geeignetes Gegenbeispiel dar). Um dies zu erreichen muß (sehr restriktiv)  $p_1, \dots, p_n > n$  verlangt werden. Mit dieser Voraussetzung läßt sich einfach das folgende Resultat zeigen.

### Einbettungssatz 5:

*Sei  $\Omega$  ein glatt berandetes beschränktes Gebiet und  $p_0, p_1, \dots, p_n > n$ . Dann existiert eine Konstante  $c(n, \Omega, p_0, \dots, p_n) > 0$  mit*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega)}$$

*für alle  $u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ , wobei  $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$  mit  $p = \min\{p_0, \dots, p_n\}$  ist.*

Beweis:

Der Raum  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  ist stetig in  $W^{1,p}(\Omega)$  eingebettet. Dann folgt die Aussage aus dem entsprechenden Einbettungssatz für isotrope Räume.

## 2.4 Existenz, Eindeutigkeit und Regularität für einige ausgewählte Beispiele

Nachdem wir uns mit grundlegenden Definitionen und Sätzen vertraut gemacht haben, möchten wir zu einigen Standardbeispielen für anisotrope partielle Differentialgleichungen übergehen.

### Beispiel 1

Eines der einfachsten Beispiele ist das elliptische Dirichlet-Randwertproblem für ein beschränktes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) &= f(x, u) && \text{in } \Omega \\ u &= u_0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

wobei  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist, die

- i) der Wachstumsbedingung  $|f(x, y)| \leq c_1 |y|^{p_0-1} + c_2$  (mit  $c_1, c_2 > 0$ ) genügt,
- ii) und für die darüberhinaus  $\int_0^y f(x, s) ds \geq c_3$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \Omega$  gilt (mit  $c_3 \in \mathbb{R}$ ).

Jetzt definieren wir, was unter dem Begriff einer schwachen Lösung für (2.1) zu verstehen ist.

### Definition

Eine Funktion  $u \in W^{1, \vec{p}}(\Omega)$  heißt eine schwache Lösung von (2.1) falls folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- a)  $u - u_0 \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$
- b)  $\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(x, u) \varphi dx$  für alle  $\varphi \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$ .

Die Existenz einer schwachen Lösung dieses Randwertproblems läßt sich relativ einfach mit direkten Methoden der Variationsrechnung zeigen (siehe z.B. [15]). Dazu betrachtet man das auf  $W^{1, \vec{p}}(\Omega)$  definierte Funktional

$$E(u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} - F(x, u) dx$$

das unter der Randbedingung

$$u = u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

minimiert werden soll. Dabei ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  bezüglich  $y$ , d.h.  $F(x, y) := \int_0^y f(x, s) ds$ .

Die Bedingung ii) an  $f$  sichert die schwache Unterhalbstetigkeit von  $E$ , während der Einbettungssatz 3 hingegen die Koerzitivität von  $E$  liefert. Der dann existierende Minimierer von  $E$  löst das Randwertproblem (2.1). Ist ferner die Funktion  $f = f(x, y)$  monoton fallend in der  $y$ -Komponente (für fast alle  $x \in \Omega$ ), so ist die schwache Lösung von (2.1) sogar eindeutig.

### Beispiel 2

Als zweites Beispiel betrachten wir im Gegensatz zum vorangegangenen eine allgemeinere Version eines elliptischen anisotropen Randwertproblems:

$$-\sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = c(x)g(u) + f(x) \quad \text{in } \Omega \quad (2.2)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega .$$

Dieses Problem wurde sehr ausführlich in [19] behandelt, und von dort stammen auch alle hier angegebene Resultate.

Für dieses Problem wurde in [19] ein Lösungsbegriff in verschärfter Form eingeführt:

#### Definition

Eine Funktion  $u$  heißt eine verallgemeinerte Lösung (Originaltext: generalized solution) des Problems (2.2) falls  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ,  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$  und für alle  $\varphi \in W_0^{1,r}(\Omega)$  mit  $1 \leq r < \infty$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \mu_i \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} (c(x)g(u) + f(x))\varphi(x) dx$$

gilt.

Nach der Definition des Lösungsbegriffs listen wir eine Reihe von Voraussetzungen auf. Es wird  $\mu_i > 0, p_i \geq 2$  und  $c, f \in L^\infty(\Omega)$  vorausgesetzt. O.B.d.A wird

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in (-l_i, l_i), i = 1, \dots, n\}$$

angenommen. Die Funktion  $g$  soll Folgendes aufweisen:

$$g(0) = 0, \quad g(z) > 0 \text{ falls } z > 0, \quad |g(z)| \leq g(C) \text{ für } |z| \leq C$$

wobei  $C$  eine beliebige (aber feste) positive Zahl ist. Darüberhinaus wird die Existenz einer Konstanten  $M > 0$  angenommen, so daß

$$(c_0 g(M) + f_0) \left( \frac{3l^2 + 2l}{2} \right)^{p+1} < \mu(p+1)M^{p+1}$$

erfüllt ist. Dabei ist  $p = p_{i_0} - 2 = \max\{p_1, \dots, p_n\} - 2$ ,  $\mu = \mu_{i_0}$ ,  $l = l_{i_0}$ ,  $c_0 = \sup_{\Omega} |c(x)|$ ,  $f_0 = \sup_{\Omega} |f(x)|$ .

### Satz 2.4.1

Sind alle oben angegebenen Voraussetzungen erfüllt und ist zusätzlich die Funktion  $g$  Hölderstetig auf dem kompakten Intervall  $[-M, M]$ , sowie das Gebiet  $\Omega$  strikt konvex, dann besitzt das Problem (2.2) eine verallgemeinerte Lösung. Ist darüberhinaus die Funktion  $c \leq 0$  und die Funktion  $g$  monoton steigend, so ist diese Lösung sogar eindeutig.

Beweis:

Wir möchten die Vorgehensweise beim Beweis in [19] nur kurz skizzieren. Zunächst betrachtet man das regularisierte Problem

$$-\sum_{i=1}^n \mu_i ((u_{x_i}^\alpha + \varepsilon)^{p_i/\alpha} u_{x_i x_i})_{x_i} = c_\varepsilon(x)g(u) + f_\varepsilon(x)$$

mit  $\alpha \in (0, 1)$ , so daß  $(u_{x_i}^\alpha)^{p_i/\alpha} = |u_{x_i}|^{p_i}$  (z.B.  $\alpha = 2/3$ ). Die Funktionen  $c_\varepsilon, f_\varepsilon$  sind dabei Hölderstetig und konvergieren gegen  $c, f$  bzgl. der  $L^\infty$  Norm. Zu diesem regularisierten Problem betrachtet man klassische Lösungen, deren Existenz aus [10] folgt. Für die klassischen Lösungen  $u_\varepsilon$  lassen sich a priori Abschätzungen sowohl für die Funktionen  $u_\varepsilon$  selber als auch für die ersten Ableitungen herleiten. Mit Hilfe dieser Abschätzungen kann zum Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  übergegangen werden und man erhält eine verallgemeinerte Lösung von (2.2).

### Bemerkung

Die an die rechte Seite der Gleichung gestellten Voraussetzungen (d.h. an die Funktionen  $c, g, f$ ) erscheinen auf den ersten Blick recht unübersichtlich, werden jedoch von vielen Standardproblemen erfüllt. Die Voraussetzungen sind zum Beispiel erfüllt falls  $c \equiv 0$  und  $f \in L^\infty$  ist. Sie werden ebenfalls erfüllt wenn  $c \equiv 1, g(u) = u^q$  (oder  $g(u) = |u|^{q-1}u$ ),  $f \in L^\infty$  und  $\max\{p_1, \dots, p_n\} + 1 > q$  gilt.

### Beispiel 3

Jetzt kommen wir zu einem Beispiel für ein anisotropes Eigenwertproblem. Dazu erinnern wir uns zunächst an den Einbettungssatz 3. Die Existenz der Konstante  $c$  aus dem Einbettungssatz 3 ist offensichtlich äquivalent dazu, daß das Funktional

$$E : W_0^{1, \vec{p}}(\Omega) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$E(u) := \frac{\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}}{\|u\|_{L^q}}$$



nach unten durch eine positive Konstante beschränkt ist.

Sei  $u \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  ein Minimierer von  $E$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf  $u \geq 0$  angenommen werden, da mit  $u$  offensichtlich auch  $|u|$  das Funktional minimiert.

Dann ist natürlich die erste Variation für jedes  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  gleich Null, also

$$\frac{d}{dt}E(u + t\varphi)|_{t=0} = 0 .$$

Das Ausrechnen dieser Gleichung führt direkt zu der Identität

$$-\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}^{1-p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}) - \frac{|u|^{q-2} u}{\|u\|_{L^q}^q} \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}} = 0 .$$

Aus diesem Grunde ist es sinnvoll im Zusammenhang mit der anisotropen Einbettung das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}^{1-p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}) &= \lambda \|u\|_{L^q}^{1-q} u^{q-1} && \text{in } \Omega \\ u &\geq 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.3)$$

für  $q \leq q^*$  und  $\lambda > 0$  zu betrachten (mit  $q^*$  wie im Einbettungssatz 3).

Nun definieren wir den Begriff der schwachen Lösung für das Problem (2.3).

**Definition:**

Eine Funktion  $u \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  heißt eine schwache Lösung der Gleichung (2.3) genau dann wenn  $u \geq 0$  fast überall in  $\Omega$  ist, und

$$\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}^{1-p_i} \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} \varphi_{x_i} dx = \lambda \|u\|_{L^q}^{1-q} \int_{\Omega} u^{q-1} \varphi dx$$

für alle  $\varphi \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  gilt.

Bei der Gleichung (2.3) taucht mit der Norm der partiellen Ableitungen ein nicht lokaler Term auf. Aus diesem Grunde kann man eine schwache Lösung von (2.3) auch als eine schwache Lösung des Problems

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}) &= \lambda u^{q-1} && \text{in } \Omega \\ u &\geq 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

mit geeigneten positiven Konstanten  $c_1, \dots, c_n$  auffassen.

Das Problem (2.4) hingegen ist äquivalent zum Problem

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}) &= \lambda u^{q-1} && \text{in } \tilde{\Omega} \\ u &\geq 0 && \text{in } \tilde{\Omega} \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dies kann relativ einfach mittels Koordinatentransformation gezeigt werden. Man definiere  $\tilde{u}(x) := u(\tilde{c}_1 x_1, \dots, \tilde{c}_n x_n)$ , mit geeignet gewählten, positiven Konstanten  $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n$ , um eine schwache Lösung von (2.5) in eine schwache Lösung des Problems (2.4) zu überführen. Zu beachten ist lediglich, daß sich die Geometrie des Gebietes dabei ändert. Das Gebiet  $\Omega$  wird nämlich in Richtung der Koordinatenhauptachsen gestreckt.

Der Begriff der schwachen Lösung für (2.4),(2.5) wird analog zum Problem (2.3) definiert.

Die erste wichtige Frage ist die der Lösbarkeit des Problems (2.3). Dabei stellt sich die Frage für welche Werte  $\lambda > 0$  und welche Werte  $q \leq q^*$  dieses Problem eine Lösung besitzt.

### Satz 2.4.2

Sei  $q < q^*$  und  $p_0 \leq q^*$  ( $\vec{p} = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ ). Dann existiert ein  $\lambda > 0$  für das eine schwache Lösung des Problems (2.3) existiert.

Beweis:

Wir werden die Existenz eines Minimierers des Funktionals

$$E(u) := \frac{\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}}{\|u\|_{L^q}}$$

nachweisen. Dieser Minimierer, den wir mit  $v$  bezeichnen, erfüllt dann (2.3) für ein spezielles  $\lambda$ , und zwar für

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L^{p_i}}}{\|v\|_{L^q}} = E(v).$$

Sei  $(u_n)$  eine Minimalfolge für das Funktional  $E$ , d.h.

$$\inf_{W_0^{1,\vec{p}} \setminus \{0\}} E = \lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n).$$

Dabei kann o.B.d.A  $\|u_n\|_{L^q} = 1$  für alle  $n \in \mathbf{N}$  angenommen werden. Aus der Eigenschaft als Minimalfolge ergibt sich die Beschränktheit der Folge  $(u_n)$  in  $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  (da  $p_0 \leq q^*$ ), und somit die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge  $u_{n_k} \rightharpoonup v$  (da der Raum  $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  reflexiv ist). Wegen der kompakten Einbettung

$$W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

besitzt  $(u_{n_k})$  aber auch eine in  $L^q(\Omega)$  stark konvergente Teilfolge. O.B.d.A nehmen wir bereits die starke Konvergenz von  $(u_{n_k})$  gegen ein  $\tilde{v} \in L^q(\Omega)$  an. Offensichtlich ist  $\|\tilde{v}\|_{L^q} = 1$  wegen Stetigkeit der Norm. Die schwache Konvergenz in  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  impliziert insbesondere schwache Konvergenz in  $L^q(\Omega)$ , weswegen  $v = \tilde{v}$  ist. Unter Ausnutzung der Tatsache, daß eine Norm schwach unterhalbstetig ist, ergibt sich dann:

$$E(v) = \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L^{p_i}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|(u_{n_k})_{x_i}\|_{L^{p_i}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_{n_k}) = \inf E.$$

Damit ist  $v$  ein Minimierer von  $E$ , und somit eine Lösung des Problems (2.3) für

$$\lambda = \inf_{W_0^{1,\vec{p}}} E.$$

Dieses  $\lambda$ , das der Minimierer von  $E$  liefert, ist das kleinstmögliche  $\lambda$  für welches (2.3) eine nicht triviale Lösung besitzt, d.h.  $\lambda$  ist der erste Eigenwert des Operators in (2.3).

Sei z.B.  $\tilde{\lambda}$  ein weiterer Eigenwert und  $\tilde{u}$  die zugehörige Eigenfunktion. Das Testen von (2.3) mit  $\tilde{u}$  selbst liefert uns

$$\sum_{i=1}^n \|\tilde{u}_{x_i}\|_{L^{p_i}} = \tilde{\lambda} \|\tilde{u}\|_{L^q}$$

also ist

$$\tilde{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n \|\tilde{u}_{x_i}\|_{L^{p_i}}}{\|\tilde{u}\|_{L^q}} \geq \inf E$$

**Bemerkung:** zu beachten ist, daß sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung (2.3) homogen vom Grad Null ist, d.h ein Vielfaches einer Lösung ergibt eine neue Lösung. Dies unterscheidet das Problem (2.3) von (2.4),(2.5), bei denen diese Eigenschaft nicht zutreffend ist.

Ist  $\Omega$  eine sternförmige Menge, so läßt sich eine Beziehung zwischen den Normen der partiellen Ableitungen des Minimierers  $v$  und zugehörigen Exponenten  $p_1, \dots, p_n$  herstellen.

Zur Erinnerung: die Menge  $\Omega$  heißt sternförmig bezüglich eines Elementes  $x \in \Omega$ , falls für alle  $y \in \Omega$  und alle  $t \in (0, 1)$   $tx + (1 - t)y \in \Omega$  ist.

O.B.d.A. nehmen wir an, daß  $\Omega$  bezüglich des Nullpunktes sternförmig ist. Für  $\alpha > 0$  definieren wir  $v^\alpha(x) := u(\alpha x)$ , und es gilt  $v^\alpha \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  falls  $\alpha \geq 1$  ist.

Dann gilt die folgende Ungleichung:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \alpha^{1-\frac{1}{p_i}} \|v_{x_i}\|_{L^{p_i}}}{\alpha^{-\frac{n}{q}} \|v\|_{L^q}} = E(v^\alpha) \geq E(v) = \frac{\sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L^{p_i}}}{\|v\|_{L^q}}$$

oder äquivalent formuliert (unter der Annahme  $\|v\|_{L^q} = 1$ )

$$f(\alpha) := \sum_{i=1}^n (\alpha^{1-\frac{1}{p_i} + \frac{n}{q}} - 1) \|v_{x_i}\|_{L^{p_i}} \geq 0 ,$$

wobei  $f$  auf dem Intervall  $[1, \infty)$  definiert ist. Wegen  $f(1) = 0$  folgt dann  $f'(1) \geq 0$ , also

$$\sum_{i=1}^n (1 - \frac{1}{p_i} + \frac{n}{q}) \|v_{x_i}\|_{L^{p_i}} \geq 0 .$$

Gilt sogar  $\text{dist}(\text{supp } v, \partial\Omega) > 0$ , so können wir  $f$  auf einem Intervall  $(1-\varepsilon, \infty)$  betrachten und erhalten sogar die Gleichheit  $f'(1) = 0$ .

Wie sieht es mit Existenz einer Lösung bei (2.4),(2.5) aus ? Dazu sei der folgende Satz aus [7] präsentiert.

### Satz 2.4.3

*Zu jedem  $q < q^*$  existiert ein  $\lambda > 0$ , so daß (2.4) und (2.5) eine schwache Lösung besitzt.*

*Gilt sogar  $q^* > \max\{p_1, \dots, p_n\}$  so existiert für jedes  $\lambda > 0$  und jedes  $\max\{p_1, \dots, p_n\} < q < q^*$  eine schwache Lösung des Problems (2.4) bzw. (2.5).*

Beweis:

Die erste Aussage erhält man wie im Beweis des Satzes 2.2 mittels der kompakten Einbettung  $W_0^{1,\vec{p}} \hookrightarrow L^q$ . Um die Lösbarkeit zu einem beliebigen  $\lambda > 0$  zu erhalten, bedarf es der zusätzlichen Voraussetzung aus der zweiten Aussage des Satzes. Der Beweis beruht dann auf dem Mountain-Pass Theorem (für genaueres siehe [7]).

Nach dem Beweis der Existenz stellt sich die Frage der Regularität der Lösungen. Dazu verweisen wir auf ein Resultat aus [8].

### Satz 2.4.4

Sei  $\Omega$  glatt berandet,  $p_1, \dots, p_n > 2$  und  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} > 1$ . Dann liegt jede schwache Lösung von (2.5) mit  $q < q^*$  bzw.  $q = q^*$  falls  $\sum \frac{1}{p_i} > \max\{p_1, \dots, p_n\}$  in  $W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$ . Ist  $\Omega$  ein konvexes Gebiet so ist die Lösung sogar aus  $W^{1,\infty}(\Omega)$ .

**Bemerkung:**  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} > 1$  impliziert zusammen mit  $p_i > 2$ , daß die Raumdimension mindestens  $n = 3$  beträgt.

In [7] wurde dieses Resultat zwar für Lösungen der Gleichung (2.5) formuliert, läßt sich jedoch mittels einer Koordinatentransformation auch auf schwache Lösungen von (2.4) anwenden. Eine schwache Lösung von (2.3) stellt dann insbesondere eine schwache Lösung des Problems (2.4) dar mit Koeffizienten  $c_i = \|u_{x_i}\|^{1-p_i}$ .

Schließlich möchten wir noch zeigen, daß ein Minimierer von

$$E(u) := \frac{\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}}{\|u\|_{L^q}}$$

unter bestimmten Bedingungen nicht radialsymmetrisch sein kann (ein nicht überraschendes Ergebnis angesichts der Anisotropie des Problems).

Damit wäre auch gezeigt, daß (2.5) zumindest eine nicht radialsymmetrische Lösung besitzt.

Sei jetzt die Raumdimension  $n = 2$ ,  $\Omega = B_{\underline{R}} \setminus B_{\bar{R}}$  mit  $0 < \underline{R} < \bar{R}$  und zusätzlich gelte  $\max\{p_1, p_2\} < q \leq q^*$ . Zu beachten ist, daß im Falle  $n = 2$  stets  $\max\{p_1, p_2\} < q^*$  gilt.

Um die Behauptung nachzuweisen führen wir einen Widerspruchsbeweis.

Wir orientieren uns dabei am in [12] für den isotropen Fall präsentierten Beweis.

Angenommen es existiert ein radialsymmetrischer Minimierer  $u \in W_0^{1,\vec{p}}$ . Dann gilt für jedes  $\varphi \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u + t\varphi)_{t=0} &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} E(u + t\varphi)_{t=0} &\leq 0. \end{aligned}$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$Z(u) := \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}$$

$$N(u) := \|u\|_{L^q}$$

$$Z'' := \frac{d^2}{dt^2} Z(u + t\varphi)_{t=0}$$

Analog definiert man  $E''$  und  $N''$ .

Für die zweite Variation gilt nun

$$E'' = \frac{Z'' - EN''}{N}.$$

Bei der Herleitung dieser Identität wird bereits die Identität  $\frac{d}{dt} E(u + t\varphi)_{t=0} = 0$  ausgenutzt.

Jetzt definieren wir eine spezielle Testfunktion

$$\varphi(x, y) := u(r) \cos \theta,$$

wobei  $\theta$  den Winkel des Vektors  $(x, y)$  mit der  $x$ -Achse bezeichnet.

Für die partiellen Ableitungen von  $\varphi$  gilt:

$$\varphi_x = \frac{x}{r} u_r \cos \theta + \frac{y}{r} u \sin \theta$$

$$\varphi_y = \frac{y}{r} u_r \cos \theta - \frac{x}{r} u \sin \theta.$$

Mit dieser Hilfsfunktion erhalten wir folgende Integralswerte:

$$\int_{\Omega} |u_x|^{p_1-1} u_x \varphi_x d(x, y) = 0 = \int_{\Omega} |u_y|^{p_2-1} u_y \varphi_y d(x, y)$$

$$\int_{\Omega} |u|^{q-2} u \varphi d(x, y) = 0$$

$$\int_{\Omega} |u|^{q-2} \varphi^2 d(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 d(x, y)$$

$$\int_{\Omega} |u_x|^{p_1-2} u u_r \frac{xy}{r^3} \sin \theta \cos \theta d(x, z) = 0 = \int_{\Omega} |u_y|^{p_2-2} u u_r \frac{xy}{r^3} \sin \theta \cos \theta d(x, y)$$

und somit

$$\int_{\Omega} |u_x|^{p_1-2} \varphi_x^2 dz = \int_{\Omega} |u_x|^{p_1-2} u_r^2 \frac{x^2}{r^2} \cos^2 \theta dz +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_{\Omega} |u_x|^{p_1-2} u u_r \frac{xy}{r^3} \sin \theta \cos \theta dz + \int_{\Omega} |u_x|^{p_1-2} u^2 \frac{y}{r^4} \sin^2 \theta dz \leq \\
& \leq \int_{\Omega} |u_x|^{p_1-2} \cos^2 \theta dz + \int_{\Omega} |u_x|^{p_1-2} \frac{u^2}{r^2} dz \leq \frac{1}{2} \|u_x\|_{L^{p_1}}^{p_1} + \frac{1}{\underline{R}^2} \|u_x\|_{L^{p_1}}^{p_1-2} \|u\|_{L^{p_1}}^2 \leq \\
& \leq \frac{1}{2} \|u_y\|_{L^{p_1}}^{p_1} + \frac{C}{\underline{R}^2} \|u_x\|_{L^{p_1}}^{p_1}.
\end{aligned}$$

Analog

$$\int_{\Omega} |u_y|^{p_2-2} \varphi_y^2 dz \leq \frac{1}{2} \|u_y\|_{L^{p_2}}^{p_2} + \frac{C}{\underline{R}^2} \|u_y\|_{L^{p_2}}^{p_2}.$$

Die Terme  $Z''$  und  $N''$  schauen wir uns nun etwas genauer an (an dieser Stelle kommt die Voraussetzung  $p_1, p_2 \geq 2$  ins Spiel, da sonst die Terme  $Z''$  bzw.  $N''$  eventuell nicht wohldefiniert sind, siehe auch [12]).

Das Berechnen der zweiten Variation führt auf die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}
Z'' &= \sum_{i=1}^2 (p_i - 1) \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}^{1-2p_i} \left[ \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}^{p_i} \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{p_i-2} \varphi_{x_i}^2 dz - \left( \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} \varphi_{x_i} dz \right)^2 \right] = \\
&= \sum_{i=1}^2 \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}^{1-p_i} \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{p_i-2} \varphi_{x_i}^2 dz \\
N'' &= (q - 1) \|u\|_{L^q}^{1-2q} \left[ \int_{\Omega} |u|^{q-2} \varphi^2 dz \int_{\Omega} |u|^q dz - \left( \int_{\Omega} |u|^{q-2} u \varphi dz \right)^2 \right] = \\
&= \frac{1}{2} (q - 1) \|u\|_{L^q} .
\end{aligned}$$

Nun können wir das Vorzeichen der zweiten Variation von  $E$  bestimmen:

$$\begin{aligned}
Z'' - EN'' &\leq (p_1 - 1) \|u_x\|_{L^{p_1}}^{1-p_1} \left[ \frac{1}{2} \|u_x\|_{L^{p_1}}^{p_1} + \frac{c}{\underline{E}^2} \|u_x\|_{L^{p_1}}^{p_1} \right] + \\
&+ \|u_y\|_{L^{p_2}}^{1-p_2} \left[ \frac{1}{2} \|u_y\|_{L^{p_2}}^{p_2} + \frac{c}{\underline{E}^2} \|u_y\|_{L^{p_2}}^{p_2} \right] - \frac{1}{2} (q - 1) (\|u_x\|_{L^{p_1}} + \|u_y\|_{L^{p_2}}) = \\
&= \|u_x\|_{L^{p_1}} \left[ \frac{1}{2} (p_1 - q) + (p_1 - 1) \frac{c}{\underline{E}^2} \right] + \|u_y\|_{L^{p_2}} \left[ \frac{1}{2} (p_2 - q) + (p_2 - 1) \frac{c}{\underline{E}^2} \right].
\end{aligned}$$

Bei der Konstante  $c$  handelt es sich um die Konstante aus dem Lemma 2.3.1, und wie dem Beweis des Lemmas entnommen werden kann, hängt sie linear von der Breite des Gebietes ab. Dies und die Tatsache  $p_1, p_2 < q$  impliziert, daß der Ausdruck  $Z'' - EN''$  für großes  $\underline{E}$  negativ wird, und damit folgt ein Widerspruch.

**Schlußbemerkung:** Den groben Überblick über den anisotropen Raum  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  beenden wir mit der Bemerkung, daß dieser Raum nicht den allgemeinen anisotropen Sobolevraum darstellt, sondern als eine Art Prototyp angesehen werden kann. Um anisotrope Räume in größter Allgemeinheit zu studieren, ist es notwendig sich mit der Theorie der Orlicz-Sobolev Räume zu befassen (siehe z.B [5]). Ein Einbettungssatz für allgemeine, also voll anisotrope Sobolevräume wird zum Beispiel in [4] behandelt.



# Kapitel 3

## Maximumprinzipien für elliptische anisotrope partielle Differentialgleichungen

Nach dem groben Überblick über anisotrope Sobolevräume und anisotrope elliptische Differentialgleichungen im vorigen Kapitel werden wir jetzt der Frage nachgehen ob das schwache, oder vielleicht sogar das starke Maximumprinzip für Lösungen von elliptischen, anisotropen Gleichungen gelten kann. Dabei möchten wir uns nicht nur auf klassische Lösungen beschränken, sondern auch verallgemeinerte Lösungsbegriffe zulassen. Die beiden bekanntesten verallgemeinerten Lösungsbegriffe sind der Begriff der schwachen Lösung beziehungsweise der Begriff der Viskositätslösung, die wir beide in diesem Kapitel behandeln werden.

Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht der Prototyp eines auf dem Raum  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  definierten elliptischen anisotropen Operators

$$Lu := - \sum_{i=1}^n c_i |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i x_i} = - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p_i - 1} \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i})$$

mit  $c_1, \dots, c_n > 0$ .

Für den Raum  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  nehmen wir für den gesamten Verlauf des Kapitels an, daß die Exponenten  $p_1, \dots, p_n \geq 2$  sind, und  $\Omega$  eine offene und beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist. Die Annahme  $p_i \geq 2$  ist im Hinblick auf die Definition einer Viskositätslösung sinnvoll.

### 3.1 Schwaches Maximumprinzip für schwache Lösungen

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht die Gleichung

$$Lu = f(x, u) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

für die wir Lösungen im schwachen Sinne betrachten.

An die Funktion  $f$  stellen wir folgende Voraussetzungen:

- (i)  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und monoton fallend in der  $u$ -Komponente
- (ii) es existieren Konstanten  $\alpha, \beta > 0$  mit  $|f(x, u)| \leq \alpha + \beta|u|^{p_0}$ .

Jetzt definieren wir den Begriff der schwachen Lösung.

#### Definition 3.1.1

- Ein  $u \in W^{1, \vec{p}}(\Omega)$  heißt eine schwache Unterlösung der Gleichung (3.1) (Bezeichnung  $Lu \leq f$ ) falls

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} \varphi_{x_i} - f(x, u) \varphi \, dx \leq 0$$

für alle  $\varphi \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$  fast überall gilt.

- Ein  $u \in W^{1, \vec{p}}(\Omega)$  nennen wir eine schwache Oberlösung der Gleichung (3.1) (Bezeichnung  $Lu \geq f$ ) falls

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} \varphi_{x_i} - f(x, u) \varphi \, dx \geq 0$$

für alle  $\varphi \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$  fast überall gilt.

- Schließlich bezeichnen wir ein  $u \in W^{1, \vec{p}}(\Omega)$  als schwache Lösung von (3.1) falls es sich sowohl um eine Unter- als auch Oberlösung handelt, d.h. wenn

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} \varphi_{x_i} - f(x, u) \varphi \, dx = 0$$

für jedes  $\varphi \in W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$  gilt.

**Bemerkung:** falls  $u \in C^2(\Omega)$  ist, so sind die Begriffe der schwachen und starken Unterlösung äquivalent, also ist die Bezeichnung  $Lu \leq f$  für eine schwache Unterlösung gerechtfertigt (das gleiche gilt für den Begriff der

Oberlösung).

Das Ziel dieses Abschnitts wird es sein das schwache Maximumprinzip für Unterlösungen nachzuweisen. Um dies zu erreichen beweisen wir zunächst das Vergleichsprinzip für den Operator  $L$ , aus dem sich dann für spezielle rechte Seiten  $f$  das schwache Maximumprinzip einfach folgern läßt. Das Vergleichsprinzip besagt dabei, daß eine Ungleichung  $u \leq v$  auf  $\partial\Omega$  sich in das Innere des Gebietes  $\Omega$  fortsetzt, falls  $v$  eine Ober- und  $u$  eine Unterlösung ist. Ein Problem besteht jedoch darin, daß es sich bei den Elementen aus dem Raum  $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  um Äquivalenzklassen handelt, deren Repräsentanten lediglich fast überall eindeutig sind. Aus diesem Grund muss der Relation  $u \leq v$  auf  $\partial\Omega$  für  $u, v \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  erst einmal ein Sinn verliehen werden. Dies tun wir mit folgender Definition.

### Definition 3.1.2

Seien  $u, v \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ . Dann sagen wir  $u \leq v$  auf  $\partial\Omega$  falls  $(u - v)^+ \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  ist (dabei ist  $(u - v)^+ := \frac{1}{2}(|u - v| + u - v)$  der positive Anteil von  $u - v$ ).

Mit Hilfe dieser Definition können wir jetzt das Vergleichsprinzip für den Operator  $L$  formulieren.

### Satz 3.1.3 (Vergleichsprinzip)

Seien  $u, v \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  mit  $Lu \leq f \leq Lv$  und  $u \leq v$  auf dem Rand von  $\Omega$  (die Relationen sind dabei im Sinne der Definitionen 3.1.1 bzw. 3.1.2 zu verstehen, d.h.  $u$  ist eine Unterlösung, während  $v$  eine Oberlösung darstellt). Dann ist  $u \leq v$  fast überall in  $\Omega$ .

Beweis:

Da  $(u - v)^+ \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  gilt, so ist diese Funktion als Testfunktion zugelassen. Wegen  $Lu \leq f$  und  $Lv \geq f$  erhalten wir somit

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} ((u - v)^+)_{x_i} - f(x, u)(u - v)^+ dx \leq 0$$

beziehungsweise

$$- \sum_{i=1}^n c_i \int_{\Omega} |v_{x_i}|^{p_i-2} v_{x_i} ((u - v)^+)_{x_i} + f(x, v)(u - v)^+ dx \leq 0 .$$

Addition dieser beiden Ungleichungen liefert uns dann

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_{\Omega} (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p_i-2} v_{x_i}) ((u - v)^+)_{x_i} +$$

$$+ (f(x, v) - f(x, u))(u - v)^+ dx \leq 0 .$$

Bei der Integration genügt es sich auf die Menge  $\{u > v\}$  zu beschränken, d.h. es folgt dann

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_{\{u>v\}} (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p_i-2} v_{x_i})(u_{x_i} - v_{x_i}) + (f(x, v) - f(x, u))(u - v) + dx \leq 0 .$$

Es ist leicht zu zeigen (z.B. in [15]), daß ein Ausdruck der Gestalt

$$(|a|^{p_i-2} a - |b|^{p_i-2} b)(a - b)$$

für  $a \neq b$  und  $p_i > 1$  positiv ist. Dies zusammen mit der Tatsache, daß die Funktion  $f$  monoton fallend in der  $u$  Komponente ist, impliziert die Nichtnegativität des Integranden auf der Menge  $\{u > v\}$ . Da das Integral selbst jedoch nicht positiv ist, folgt

$$(|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p_i-2} v_{x_i})(u_{x_i} - v_{x_i}) = 0 \quad \text{fast überall auf } \{u > v\}$$

und damit  $u_{x_i} = v_{x_i}$  fast überall in  $\{u > v\}$ . Damit ist aber  $(u - v)^+$  gleich Null fast überall in  $\Omega$ . Dies ist aber nur dann möglich wenn  $\{u > v\}$  selbst eine Nullmenge ist, also wenn  $u \leq v$  fast überall in  $\Omega$  gilt.

Wie schon erwähnt wurde, ist das Vergleichsprinzip stärker als das schwache Maximumprinzip. Dies ist Gegenstand des nächsten Satzes.

### Satz 3.1.4 (Schwaches Maximumprinzip)

Sei  $f \leq 0$  in  $\Omega \times \mathbb{R}$  und  $u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  eine stetige Unterlösung der Gleichung (3.1), die sich darüberhinaus stetig auf den Rand von  $\Omega$  fortsetzen läßt. Dann gilt:

$$\sup_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u .$$

Beweis:

Wir betrachten die konstante Funktion  $v := \max_{\partial\Omega} u$ . Offensichtlich gilt dann  $Lv \geq f$  und  $u \leq v$  auf  $\partial\Omega$ . Anwendung des Vergleichsprinzips ergibt dann  $u \leq \max_{\partial\Omega} u$  in ganz  $\Omega$ . Das Maximum von  $u$  wird also auf dem Rand angenommen. Die Voraussetzung der Stetigkeit der schwachen Unterlösung ist dabei notwendig damit der Ausdruck  $\max_{\partial\Omega} u$  einen Sinn ergibt. Dies ist automatisch der Fall wenn z.B.  $p_1, \dots, p_n > n$  ist.

Es stellt sich auch die Frage ob ein schwaches Minimumprinzip für die Gleichung (3.1) vorliegt, d.h. ob vielleicht auch das Minimum auf dem Rand

angenommen wird. Diese Frage können wir für Oberlösungen von (3.1) positiv beantworten.

### Satz 3.1.5 (Schwachtes Minimumprinzip)

Sei  $f \geq 0$  in  $\Omega \times \mathbb{R}$  und  $u \in W^{1,\bar{p}}(\Omega)$  eine stetige Oberlösung von (3.1), die sich stetig auf den Rand von  $\Omega$  fortsetzen läßt. Dann nimmt  $u$  das Minimum auf  $\partial\Omega$  an, d.h. es gilt

$$\inf_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u$$

Beweis: Wir setzen  $v := \min_{\partial\Omega} u$ . Dann ist  $Lv \leq f$  und  $v \leq u$  auf  $\partial\Omega$ . Anwendung des Vergleichsprinzips liefert dann  $v \leq u$  in ganz  $\Omega$ .

## 3.2 Maximumprinzipien für Viskositätslösungen

Nach dem Begriff der schwachen Lösung möchten wir in diesem Abschnitt den Begriff der Viskositätslösung abhandeln.

Zu Beginn stellen wir eine Reihe von Voraussetzungen auf.

Sei

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, wobei mit  $S(n)$  der Raum der symmetrischen  $n \times n$  Matrizen bezeichnet wird. Diese Funktion soll nun folgende Bedingungen erfüllen:

$$(A1) \quad \forall x \in \Omega, q \in \mathbb{R}^n, X \in S(n) : \quad s \leq r \Rightarrow F(x, s, q, X) \leq F(x, r, q, X)$$

$$(A2) \quad \forall x \in \Omega, s \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^n : \quad X \leq Y \Rightarrow F(x, s, q, Y) \leq F(x, s, q, X)$$

(Hierbei handelt es sich um die klassische Relation auf der Menge der symmetrischen Matrizen, d.h.  $X \leq Y \Leftrightarrow X - Y$  negativ semidefinit).

Die Bedingungen (A1) und (A2) sind notwendig um den Begriff der Viskositätslösung einführen zu können. Die eigentliche, für die Herleitung der Aussagen notwendige Strukturbedingung an  $F$  wird jetzt präsentiert:

(A3) Es existieren Konstanten  $c_1 \dots c_n > 0$ , und  $p_1 \dots p_n \geq 2$ , so daß für alle  $x \in \Omega, s \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^n, X \in S(n)$  die Ungleichung

$$F(x, s, q, X) \geq - \sum_{i=1}^n c_i |q_i|^{p_i-2} x_{ii}$$

erfüllt ist (d.h.  $F$  hat ein stärkeres anisotropes Wachstum als der Operator  $L$  aus Abschnitt 3.1).

Unter den angegebenen Voraussetzungen (A1),(A2),(A3) betrachten wir die Gleichung

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega . \quad (3.2)$$

Als Erinnerung sei an dieser Stelle die Definition einer Viskositätslösung aufgeführt.

### Definition 3.2.1

- Eine oberhalbstetige Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Viskositätsunterlösung der Gleichung (3.2), falls für jedes  $\varphi \in C^2(\Omega)$  mit der Eigenschaft, daß  $u - \varphi$  in  $x_0 \in \Omega$  ein lokales Maximum annimmt, die Ungleichung

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0$$

erfüllt ist.

- Eine unterhalbstetige Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Viskositätsoberlösung falls für jedes  $\varphi \in C^2(\Omega)$  mit der Eigenschaft, daß  $u - \varphi$  in  $x_0 \in \Omega$  ein lokales Minimum annimmt, die Ungleichung

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$$

gilt.

- Schließlich bezeichnen wir ein stetiges  $u$  als eine Lösung von (3.2), wenn es sich sowohl um eine Unter- als auch um eine Oberlösung handelt.

Die wichtigsten Werkzeuge für den Beweis des Maximumprinzips für Viskositätslösungen sind das Randwertlemma von Hopf und das sogenannte Propagationslemma, denen wir uns jetzt widmen. Diese beiden Lemmas wurden in [2] für homogene Operatoren bewiesen. Wir werden uns an den dort präsentierten Beweisen orientieren, allerdings sind in unserem Fall wegen fehlender Homogenität einige Modifikationen erforderlich.

### Lemma 3.2.2 (Das Randwertlemma von Hopf)

Sei  $u$  eine Viskositätsunterlösung der Gleichung (3.2). Ferner existiert ein Punkt  $x_0 \in \partial\Omega$  mit folgenden Eigenschaften:

(i)  $u(x_0) > u(x)$  für alle  $x \in \Omega$  (insbesondere läßt sich  $u$  in  $x_0$  stetig fortsetzen)

(ii) es existiert eine Kugel  $B_R(y) \subset \Omega$  mit  $\partial B_R(y) \cap \partial\Omega = \{x_0\}$ .

Dann gilt:

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [u(x_0 + t(y - x_0)) - u(x_0)] < 0 .$$

Bemerkung: existieren die Richtungsableitungen im Punkt  $x_0$ , so gilt sogar

$$\frac{\partial u}{\partial w}(x_0) < 0 \quad \text{mit } w = y - x_0 .$$

Beweis:

Im Mittelpunkt des Beweises steht die folgende Hilfsfunktion:

$$v(x) := \exp(-\gamma R^2) - \exp(-\gamma \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2) .$$

Diese Hilfsfunktion weist folgende Eigenschaften auf:

- (a)  $v = 0$  auf  $\partial B_R(y)$
- (b)  $v(x) \in (-1, 0)$  für jedes  $x \in B_R(y)$
- (c)  $v_{x_i}(x) = 2\gamma \exp(-\gamma \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2)(x_i - y_i)$
- (d)  $v_{x_i x_i}(x) = 2\gamma \exp(-\gamma \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2)(1 - 2\gamma(x_i - y_i)^2)$  .

Bei  $v$  kann also  $\gamma > 0$  so gewählt werden, daß

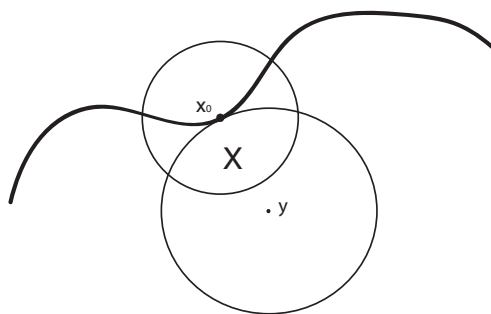
$$Lv(x_0) = - \sum_{i=1}^n c_i |v_{x_i}(x_0)|^{p_i-2} v_{x_i x_i}(x_0) > 0$$

gilt. Aus Stetigkeitsgründen existiert dann ein  $r > 0$  mit  $r < R$  und

$$Lv(x) = - \sum_{i=1}^n c_i |v_{x_i}(x)|^{p_i-2} v_{x_i x_i}(x) > 0 \tag{3.3}$$

für jedes  $x \in B_r(x_0)$ .

Wir definieren die Menge  $X := B_r(x_0) \cap B_R(y)$ .



Aufgrund fehlender Homogenität ist jetzt im Gegensatz zum in [2] präsentierten Beweis eine Fallunterscheidung notwendig.

**1. Fall:**  $(x_0)_i \neq y_i$  für jedes  $i = 1, \dots, n$  ( $(x_0)_i = i$ -te Komponente des Vektors  $x_0$ ).

In diesem Fall können wir  $r > 0$  klein genug wählen damit

$$x_i \neq y_i \quad \text{für jedes } x \in B_r(x_0)$$

ist. Jetzt sind wir in der Lage  $\gamma > 0$  groß genug zu wählen um

$$v_{x_i x_i}(x) > 0 \quad \text{auf } B_r(x_0)$$

zu erreichen. Dann können wir von der Funktion  $v$  zu  $\varepsilon v$  übergehen, und trotz fehlender Homogenität gilt dann die Ungleichung (3.3) auch für  $\varepsilon v$ , d.h.

$$L(\varepsilon v)(x) = - \sum_{i=1}^n \varepsilon^{p_i-1} c_i |v_{x_i}(x)|^{p_i-2} v_{x_i x_i}(x) > 0 \quad (3.4)$$

für alle  $x \in B_r(x_0)$ . Wir wählen  $\varepsilon > 0$  klein genug damit

$$\varepsilon v \geq u - u(x_0) \quad \text{auf } \partial X \quad (3.5)$$

gilt. Dies ist möglich, da einerseits  $\varepsilon v$  auf  $\partial X \cap B_R(y)$  verschwindet (und  $u - u(x_0)$  dort negativ ist), andererseits  $u - u(x_0)$  auf  $\partial X \setminus \partial B_R(y)$  ein negatives Maximum annimmt (da  $u - u(x_0)$  oberhalbstetig ist und somit auf kompakten Mengen ihr Maximum annimmt).

Wir können jetzt zeigen, daß die Ungleichung (3.5) sogar für alle  $x \in X$  ihre Gültigkeit hat. Angenommen dies wäre nicht der Fall. Dann existiert ein  $\bar{x} \in X$  mit

$$u(\bar{x}) - u(x_0) - \varepsilon v(\bar{x}) = \max_X (u - u(x_0) - \varepsilon v) > 0$$

d.h.  $u(x_0) + \varepsilon v$  kann als Testfunktion für die Unterlösung  $u$  an der Stelle  $\bar{x}$  genommen werden. Daraus ergibt sich zusammen mit der anisotropen Wachstumsbedingung (A3) an  $F$ :

$$- \sum_{i=1}^n c_i |\varepsilon v_{x_i}(\bar{x})|^{p_i-2} \varepsilon v_{x_i x_i}(\bar{x}) \leq F(\bar{x}, u(\bar{x}), D\varepsilon v(\bar{x}), D^2\varepsilon v(\bar{x})) \leq 0 .$$

Dies widerspricht jedoch der Ungleichung (3.4) für  $\varepsilon v$ , also ist die Relation (3.5) tatsächlich für alle  $x \in X$  gültig.



Für  $w := y - x_0$  führt diese Relation nun auf die Ungleichung

$$\frac{1}{t}(u(x_0 + tw) - u(x_0)) \leq \varepsilon \frac{1}{t}v(x_0 + tw) \quad \text{für } t > 0 \text{ klein genug .}$$

Auf der rechten Seite erhalten wir für  $t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon \frac{1}{t}v(x_0 + tw) &= \varepsilon \frac{\partial v}{\partial w}(x_0) = \\ &= -2\varepsilon\gamma \sum_{i=1}^n \exp(-\gamma \sum_{k=1}^n ((x_0)_k - y_k)^2) ((x_0)_i - y_i)^2 < 0. \end{aligned}$$

Dies impliziert die zu beweisende Ungleichung.

**2. Fall:**  $\min\{p_1, \dots, p_n\} < \min\{p_i \mid (x_0)_i = y_i\}$

Hier lassen wir die Übereinstimmung einiger Komponenten von  $x_0$  und  $y$  zu, allerdings mit der Einschränkung, daß die zugehörigen Exponenten  $p_i$  nicht zu klein sind. Wir wissen, daß die Ungleichung (3.3) auf der Kugel  $B_r(x_0)$  gilt, im Gegensatz zum Fall 1 kann diese Umgebung aber nicht so gewählt werden, daß alle Summanden dort negativ sind. Für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $(x_0)_i = y_i$  nimmt nämlich der Ausdruck  $|v_{x_i}|^{p_i-2}v_{x_i x_i}$  in jeder, auch beliebig kleiner, Umgebung von  $x_0$  auch positive Werte an. Aus diesem Grund ist es nicht möglich ohne weitere Überlegungen von der Funktion  $v$  zu  $\varepsilon v$  überzugehen. Wir beobachten jedoch, daß alle Summanden in (3.3) auf  $B_r(x_0)$  betragsmäßig beschränkt sind, und für  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $(x_0)_i \neq y_i$  ebenfalls

$$\sup_{B_r(x_0)} |v_{x_i}|^{p_i-2}v_{x_i x_i} < 0$$

gilt (falls  $r$  klein und  $\gamma$  groß genug ist). Nach Voraussetzung existiert ein Index  $j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $(x_0)_j \neq y_j$ , so daß  $p_j < p_i$  falls  $(x_0)_i = y_i$  ist. Für  $\varepsilon > 0$  klein genug dominiert dann  $\varepsilon^{p_j-1}$  den Term  $\varepsilon^{p_i-1}$ . Somit gilt

$$L(\varepsilon v) = - \sum_{i=1}^n c_i \varepsilon^{p_i-1} |v_{x_i}(x)|^{p_i-2} v_{x_i x_i}(x) > 0$$

in  $B_r(x_0)$  falls  $\varepsilon$  klein genug gewählt ist (da der Summand mit  $i = j$  das richtige Vorzeichen hat und die anderen Summanden dominiert). Analog zum Fall 1 soll dann  $\varepsilon v \geq u - u(x_0)$  auf  $\partial X$  gelten, und wir können dann genauso wie im Fall 1 weiter verfahren.

**3 Fall:**  $\min\{p_1, \dots, p_n\} = \min\{p_i \mid (x_0)_i \neq y_i\}$

Dies ist genau der Fall, wo die fehlende Homogenität des Operator  $L$  große Schwierigkeiten bereitet. Es ist nämlich nicht möglich eine Lösung (bzw. eine Unterlösung) einer anisotropen Gleichung unter Beibehaltung dieser Eigenschaft mit einer beliebigen (möglichst kleinen) Konstanten zu skalieren.

Dieses Problem läßt sich jedoch teilweise umgehen indem die Komponenten einer Lösung mitskaliert werden. Sei  $w$  eine Funktion auf  $\Omega$  mit  $Lw = 0$  (oder allgemeiner  $Lw \leq 0$ ). Für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$  definieren wir

$$w^\lambda(x) := \lambda w(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) \quad \text{auf } \Omega^\lambda$$

mit

$$\Omega^\lambda := \{(\lambda_1^{-1} x_1, \dots, \lambda_n^{-1} x_n) \mid x \in \Omega\}.$$

Dann gilt

$$Lw^\lambda = - \sum_{i=1}^n c_i \lambda^{p_i-1} \lambda_i^{p_i} |w_{x_i}(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)|^{p_i-2} w_{x_i x_i}(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n).$$

Es ist also möglich für ein vorgegebenes  $\lambda \in \mathbb{R}$  die Konstanten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$  so zu wählen, daß

$$\lambda^{p_1-1} \lambda_1^{p_1} = \dots = \lambda^{p_n-1} \lambda_n^{p_n}$$

gilt (z.B. indem man  $\lambda_i = \lambda^{-1}$  setzt) und damit

$$Lw^\lambda = 0 \quad (\text{bzw. } Lw^\lambda \leq 0) \quad \text{auf } \Omega^\lambda$$

ist (d.h. die fehlende Homogenität läßt sich nur teilweise kompensieren, da beim Skalieren von  $v$  sich das Gebiet ebenfalls ändert).

Mit Hilfe dieser Skalierung können wir den Beweis des Lemmas zu Ende bringen. Dabei kann o.B.d.A.  $x_0 = 0$  angenommen werden.

Zu einem  $\varepsilon > 0$  definieren wir  $v_\varepsilon := \varepsilon v$ . Für ein  $x \in \partial X \setminus \partial B_R(y)$  ist dann die Richtungsableitung:

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}(0) = -2\gamma\varepsilon \exp(-\gamma \sum_{k=1}^n y_k^2) \sum_{k=1}^n y_k x_k < 0$$

(zu beachten ist, daß das Skalarprodukt von  $x$  und  $y$  positiv ist). Wir wählen jetzt  $\varepsilon > 0$  klein genug, so daß

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}(0) > u(x) - u(0) \quad \text{für jedes } x \in \partial X \setminus \partial B_R(y)$$

ist.

Es ist jetzt nicht klar ob  $Lv_\varepsilon > 0$  in  $B_r(0)$  gilt. Auf jeden Fall existiert aus Stetigkeitsgründen ein  $r' > 0$  mit  $Lv_\varepsilon > 0$  auf der Kugel  $B_{r'}(0)$  (da  $(Lv_\varepsilon)(0) > 0$  ist).

Wir definieren jetzt

$$v_\varepsilon^\lambda(x) := \lambda v_\varepsilon(\lambda^{-1} x)$$

und erhalten für  $\lambda > \frac{r}{r'}$

$$Lv_\varepsilon^\lambda > 0 \quad \text{in } B_r(0) .$$

Ferner gilt für ein festes  $x \in \partial X \setminus \partial B_R(y)$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} v_\varepsilon^\lambda(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{v_\varepsilon(\lambda^{-1}x) - v_\varepsilon(0)}{\lambda} = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}(0) > u(x) - u(0) .$$

Somit erhalten wir für ein hinreichend grosses  $\lambda$  eine Funktion  $v_\varepsilon^\lambda$  mit  $Lv_\varepsilon^\lambda > 0$  in  $B_r(0)$  und  $v_\varepsilon^\lambda \geq u - u(0)$  auf  $\partial X$ . Nun kann der Beweis analog zum Fall 1 zu Ende gebracht werden, d.h. analog zum Fall 1 kann mittels Widerspruchannahme gezeigt werden, daß diese Ungleichung sogar in ganz  $X$  gilt, woraus sich die Abschätzung für die Richtungsableitung von  $u$  im Punkte  $x_0$  leicht folgern läßt.

Im nächsten Schritt möchten wir das starke Maximumprinzip für Sublösungen nachweisen. Für den Fall, daß uns eine klassische Sublösung vorliegt, d.h.  $u \in C^2(\Omega)$ , ist der Beweis recht einfach. Es ist nämlich eine einfache Folgerung aus dem gerade bewiesenen Randwertlemma. Doch der allgemeine Fall läßt sich leider daraus nicht ableiten. Dafür benötigen wir zunächst folgendes Lemma.

### Lemma 3.2.3 (Propagationslemma)

*Sei  $u$  eine Viskositätsunterlösung der Gleichung (3.2), die in einem Punkt  $x_0 \in \Omega$  ein Maximum annimmt. Dann enthält jede Kugel  $B_R(x_0 + Rw) \subset \Omega$  mit  $\|w\| = 1$  ein Element  $x_R \neq x_0$  mit  $u(x_R) = u(x_0)$ , d.h. das Maximum setzt sich im Inneren von  $\Omega$  fort, weswegen die Bezeichnung Propagationslemma gerechtfertigt ist.*

Beweis:

Wir führen wieder einen Widerspruchsbeweis durch, und nehmen an, daß eine Kugel  $B_R(x_0 + Rw) \subset \Omega$  existiert, so daß die Ungleichung  $u(x) < u(x_0)$  für alle  $x \in B_R(x_0 + Rw)$  erfüllt ist (zu beachten:  $x_0 \in \partial B_R(x_0 + Rw)$ ).

Jetzt betrachten wir wieder die Hilfsfunktion

$$v(x) := \exp(-\gamma R^2) - \exp(-\gamma \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)$$

mit  $y := x_0 + Rw$ . Analog zum Beweis des Randwertlemmas von Hopf wählen wir  $\gamma > 0$  hinreichend groß damit

$$Lv(x_0) = - \sum_{i=1}^n c_i |v_{x_i}(x_0)|^{p_i-2} v_{x_i x_i}(x_0) > 0$$

gilt. Aus Stetigkeitsgründen existiert ein  $r > 0$  mit  $r < R$  und

$$Lv = - \sum_{i=1}^n c_i |v_{x_i}(x)|^{p_i-2} v_{x_i x_i}(x) > 0$$

für jedes  $x \in B_r(x_0)$ .

Analog zum Randwertlemma von Hopf definieren wir die Menge  $X := B_r(x_0) \cap B_R(y)$ .

Diesmal nehmen wir jedoch ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß bereits

$$v \geq u - u(x_0) \quad \text{auf } \partial X$$

gilt, da sonst wie im Beweis des Randwertlemmas von Hopf die Funktion  $v$  entsprechend modifiziert werden kann um diese Relation zu erhalten. Auf  $\partial X \setminus \partial B_r(x_0)$  gilt dies trivialerweise, da dort  $v$  verschwindet. Es bleibt also analog zum Lemma 3.2.2 diese Ungleichung auf  $\partial X \cap \partial B_r(x_0)$  sicherzustellen. Dann zeigt man (wie im Lemma 3.2.2), daß diese Ungleichung sich in das Innere von  $X$  überträgt. Aus der Tatsache, daß die Funktion  $v$  außerhalb von  $B_R(y)$  positiv ist, kann man sofort entnehmen, daß die in  $B_r(x_0)$  definierte Funktion

$$\Phi(x) := u(x) - v(x)$$

in  $x_0$  ein Maximum annimmt, also kann  $v$  als Testfunktion für die Unterlösung  $u$  im Punkte  $x_0$  verwendet werden.

Unter Ausnutzung der Tatsache, daß es sich bei  $u$  um eine Unterlösung der Gleichung (3.2) handelt, erhalten wir die Ungleichung

$$Lv(x_0) = - \sum_{i=1}^n c_i |v_{x_i}(x_0)|^{p_i-2} v_{x_i x_i}(x_0) \leq F(x_0, u(x_0), Dv(x_0), D^2v(x_0)) \leq 0$$

die der Wahl der Funktion  $v$  widerspricht.

Somit ist dieses Lemma bewiesen.

Mit Hilfe dieses Hilfslemmas läßt sich das starke Maximumprinzip problemlos nachweisen.

### Satz 3.2.4 (Das starke Maximumprinzip)

Sei  $u$  eine oberhalbstetige Viskositätsunterlösung der partiellen Differentialgleichung (3.2), mit der Eigenschaft, daß ein  $x_0 \in \Omega$  existiert mit

$$u(x_0) = \max_{\Omega} u.$$

Dann ist  $u$  konstant.

Beweis:

Der Beweis erfolgt wieder über eine Widerspruchsargumentation, also nehmen wir an, daß die Menge

$$M := \{x \in \Omega \mid u(x) = u(x_0)\}$$

eine echte Teilmenge von  $\Omega$  ist (d.h.  $u$  ist nicht auf ganz  $\Omega$  konstant).

Die Funktion  $u$  ist oberhalbstetig, also ist die Menge  $\Omega \setminus M$  offen, und wir nehmen einen Punkt  $y \in \Omega \setminus M$  mit der Eigenschaft

$$\text{dist}(y, M) < \text{dist}(y, \partial\Omega).$$

Somit existiert eine Kugel  $B_R(y) \subset \Omega \setminus M$ , mit dem Radius  $R > 0$  so gewählt, daß sie die Menge  $M$  berührt, d.h.  $\partial B_R(y) \cap \partial M \neq \emptyset$ .

Für ein  $x_0 \in \partial B_R(y) \cap \partial M$  gilt dann offensichtlich:

$$u(x_0) > u(x) \quad \text{für alle } x \in B_R(y).$$

Nach dem zuvor bewiesenen Propagationslemma existiert jetzt ein Element  $x_R \in B_R(y)$  mit  $u(x_R) = u(x_0)$ , woraus sich  $x_R \in M$  ergibt. Dies ist aber offensichtlich ein Widerspruch zu  $B_R(y) \cap M = \emptyset$ .

#### Bemerkung:

Wie bereits erwähnt wurde ist der Beweis des starken Maximumprinzips sehr einfach wenn es sich bei  $u$  um eine klassische Unterlösung handelt. Man betrachtet nämlich dieselbe Menge  $M$  (echt in  $\Omega$  enthalten) und dieselbe Kugel  $B_R(y)$  wie im Beweis zuvor, und erhält mittels des Hopfschen Randwertlemmas die Existenz von negativen Richtungsableitungen im Punkt  $x_0$ . Andererseits ist der Gradient der Funktion  $u$  in  $x_0$  offensichtlich gleich Null und wir bekommen einen Widerspruch. Wir haben also das Maximumprinzip nachgewiesen ohne auf das Lemma 3.2.4 zurückgreifen zu müssen. Das Randwertlemma ist somit für klassische Sublösungen stärker als das Maximumprinzip.

Aus dem bewiesenen starken Maximumprinzip läßt sich leicht das schwache Maximumprinzip ableiten.

### **Satz 3.2.5 (Das schwache Maximumprinzip)**

*Sei  $u$  eine oberhalbstetige Viskositätsunterlösung der partiellen Differentialgleichung (3.2), die auf den Rand von  $\Omega$  fortsetzbar ist. Dann wird das Maximum von  $u$  am Rand angenommen, d.h.*

$$\sup_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u .$$

Beweis:

Die Lösung  $u$  nimmt als eine oberhalbstetige Funktion auf der kompakten Menge  $\bar{\Omega}$  ihr Maximum an. Falls das Maximum im Inneren von  $\Omega$  angenommen wird, so ist  $u$  wegen dem starkem Maximumprinzip konstant, also wird in diesem Fall das Maximum auch auf dem Rand angenommen.

Nachdem wir das starke Maximumprinzip abgehandelt haben, stellt sich die Frage nach dem Minimumprinzip, d.h. können wir folgern, daß eine Lösung konstant ist falls sie im Inneren des Gebietes ein Minimum annimmt.

Bevor wir uns jedoch dieser Fragestellung widmen, stellen wir einige Vorüberlegungen an.

#### **Beobachtung**

Sei  $u$  eine Viskositätsüberlösung der Gleichung

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$$

wobei  $F$  stetig ist und den Strukturbedingungen (A1) und (A2) genügt. Dann ist die Funktion  $-u$  eine Viskositätsunterlösung der Gleichung

$$\tilde{F}(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$$

mit

$$\tilde{F}(x, s, q, X) := -F(x, -s, -q, -X).$$

Davon möchten wir uns kurz überzeugen.

Sei also  $u$  eine Viskositätsüberlösung der ersten Gleichung und  $\varphi \in C^2(\Omega)$ ,

so daß  $-u - \varphi$  im Punkt  $x_0$  ein lokales Maximum annimmt. Dann nimmt offensichtlich die Funktion  $u + \varphi$  dort ein Minimum an, womit die Funktion  $-\varphi$  als eine Testfunktion für die Viskositätsüberlösung  $u$  in  $x_0$  in Frage kommt, und wir erhalten auf Grund dessen die Ungleichung

$$F(x_0, u(x_0), -D\varphi(x_0), -D^2\varphi(x_0)) \geq 0 .$$

Aus der Definition von  $\tilde{F}$  folgt dann

$$\tilde{F}(x_0, -u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0$$

und somit ist die Funktion  $-u$  eine Viskositätsunterlösung der Gleichung  $\tilde{F} = 0$ .

Jetzt können wir uns dem starken Minimumprinzip widmen. Um dies nachweisen zu können muß jedoch die Strukturbedingung (A3) abgeändert werden.

Wir betrachten wieder ein stetiges  $F$  mit den Eigenschaften (A1) und (A2), aber statt (A3) wird jetzt die folgende Eigenschaft vorausgesetzt:

**(A4)** Es existieren Konstanten  $c_1 \dots c_n \geq 0$ ,  $\sum c_i > 0$  und  $p_1 \dots p_n \geq 2$ , so daß für alle  $x \in \Omega$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $X \in S(n)$  die Ungleichung

$$F(x, s, q, X) \leq - \sum_{i=1}^n c_i |q_i|^{p_i-2} x_{ii}$$

erfüllt ist.

(d.h. im Vergleich zur Bedingung (A3) hat sich die Relation umgedreht)

### **Satz 3.2.6 (Das starke Minimumprinzip)**

*Sei  $u$  eine unterhalbstetige Viskositätsüberlösung der partiellen Differentialgleichung*

$$F(x, u(x), Du(x), D^2(x)) = 0$$

*wobei  $F$  die Voraussetzungen (A1), (A2), (A4) erfüllt. Ferner existiert ein  $x_0 \in \Omega$  mit*

$$u(x_0) = \min_{\Omega} u.$$

*Dann ist  $u$  konstant.*

Beweis:

Wir beweisen diese Behauptung indem wir sie auf das starke Maximumprinzip zurückführen.

Es wurde gezeigt daß  $-u$  eine Unterlösung der Gleichung

$$\tilde{F}(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$$

darstellt, die im Punkt  $x_0$  ein Maximum annimmt.

Wegen der Bedingung (A4) ist

$$F(x, -s, -q, -X) \leq \sum_{i=1}^n c_i |q_i|^{p_i-2} x_{ii} .$$

Daraus folgt

$$\tilde{F}(x, s, q, X) = -F(x, -s, -q, -X) \geq -\sum_{i=1}^n c_i |q_i|^{p_i-2} x_{ii} .$$

Somit erfüllt  $\tilde{F}$  die Strukturbedingung (A3), also ist das starke Maximumprinzip anwendbar. Dies liefert uns daß  $-u$  und damit  $u$  konstant ist.

Wie bei den Maximumprinzipien läßt sich auch hier aus dem starken das schwache Minimumprinzip herleiten.

### Satz 3.2.7 (Das schwache Minimumprinzip)

*Sei  $u$  eine unterhalbstetige Viskositätsoberrösung der partiellen Differentialgleichung (3.2), die auf den Rand von  $\Omega$  fortsetzbar ist. Dann wird das Minimum von  $u$  am Rand angenommen, d.h.*

$$\inf_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} .$$

Beweis:

Die Oberlösung  $u$  nimmt als eine unterhalbstetige Funktion auf der kompakten Menge  $\bar{\Omega}$  ihr Minimum an. Falls das Minimum im Inneren von  $\Omega$  angenommen wird, so ist  $u$  wegen starkem Minimumprinzip konstant, also wird das Minimum auch auf dem Rand angenommen.

## 3.3 Das starke Maximumprinzip für schwache Lösungen

Im ersten Abschnitt des Kapitels haben wir das schwache Maximumprinzip für schwache Lösungen bewiesen. Im zweiten Abschnitt waren wir in der



Lage dieses Resultat sogar zu verbessern, indem wir das starke Maximumprinzip hergeleitet haben, allerdings für Viskositätslösungen. Es bleibt also noch die Gültigkeit des starken Maximumprinzips für schwache Lösungen zu klären, also ob das für Viskositätslösungen bewiesene Resultat sich auch auf schwache Lösungen übertragen läßt. Dazu muss geklärt werden unter welchen Umständen eine schwache Lösung insbesondere eine Viskositätslösung darstellt. Diese Fragestellung möchten wir für eine Klasse von Problemen klären.

Dazu betrachten wir eine stetige Funktion  $F : \mathbb{R}^n \times S(n) \rightarrow \mathbb{R}$  die der Elliptizitätsbedingung

$$F(q, X) - F(q, Y) \leq 0 \quad \text{falls } X \geq Y$$

genügt.

Ferner sei  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf dem ganzen Definitionsbereich stetige Funktion, die der Wachstumsbedingung  $|f(x, u)| \leq \alpha + \beta|u|^{p_0}$  (mit  $\alpha, \beta > 0$ ) genügt, und monoton fallend in der zweiten Komponente ist.

Wir nehmen nun an, daß zu der Funktion  $F$  eine differenzierbare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  existiert mit der Eigenschaft, daß für jedes  $u \in C^2(\Omega)$

$$-\operatorname{div} A(Du) = F(Du, D^2u)$$

gilt d.h. es ist

$$F(q, X) = \sum_{i,j=1}^n (A_i)_{x_j} x_{ij}$$

(zur Erinnerung:  $X = (x_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ ).

Nun können wir sowohl den Begriff der schwachen als auch den Begriff der Viskositätslösung für die Gleichung

$$F(Du, D^2u) = f(x, u) \quad \text{in } \Omega \tag{3.6}$$

definieren.

### Definition 3.3.1

-Ein  $u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  heißt eine schwache Unterlösung von (3.6) falls

$$\int_{\Omega} A(Du) D\varphi - f(x, u)\varphi \, dx \leq 0$$

für alle  $\varphi \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$  fast überall gilt.

-Ein  $u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  nennen wir eine schwache Oberlösung von (3.6) falls

$$\int_{\Omega} A(Du)D\varphi - f(x,u)\varphi \, dx \geq 0$$

für alle  $\varphi \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$  fast überall gilt.

-Schließlich bezeichnen wir ein  $u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  als eine schwache Lösung der Gleichung (3.6), falls es sich bei  $u$  sowohl um eine Unter- als auch um eine Oberlösung handelt.

Damit die obigen Begriffe der schwachen Lösung wohldefiniert sind, müssen Wachstumsbedingungen an  $A$  und  $f$  gestellt werden, etwa:

- i)  $|A(x) * x| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i|^{p_i} + \beta_i$  mit positiven Konstanten  $\alpha_i, \beta_i$
- ii)  $|f(x, u)| \leq \alpha |u|^{p_0} + \beta$  mit  $\alpha, \beta > 0$ .

(mit  $*$  bezeichnen wir das euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ )

Die Begriffe der Viskositätsunter- beziehungsweise Oberlösung von (3.6) werden wie zu Beginn des Kapitels definiert für Die Funktion

$$\tilde{F}(x, u, q, X) := F(q, X) - f(x, u)$$

Nun sind wir in der Lage unter einer Zusatzforderung an  $A$  nachzuweisen, daß der Begriff der schwachen Lösung stärker als der Begriff der Viskositätslösung ist.

### Satz 3.3.2

Ist die Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  monoton, d.h.

$$(A(x) - A(y)) * (x - y) \geq 0 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n ,$$

so ist eine stetige schwache Unterlösung  $u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  von (3.6) insbesondere eine Viskositätsunterlösung desselben Problems (beziehungsweise eine stetige schwache Oberlösung von (3.6) ist insbesondere eine Viskositätsüberlösung).

Beweis:

Wir folgen dem in [3] präsentierten Beweis. Zuerst zeigen wir, daß eine schwache Unterlösung  $u$  insbesondere eine Viskositätsunterlösung ist. Sei dazu  $\varphi \in C^2(\Omega)$ ,  $x_0 \in \Omega$  mit der Eigenschaft, daß  $u - \varphi$  in  $x_0$  ein lokales Maximum annimmt, d.h.

$$(u - \varphi)(x_0) = \max_{B_r(x_0)} (u - \varphi) .$$

Jetzt wählen wir eine Funktion  $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$  für die gilt:

- a)  $\psi(x_0) = 0$
  - b)  $\psi > 0$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$
  - c)  $(D\psi)(x_0) = (D^2\psi)(x_0) = 0$
- (z.B. man setze  $\psi = |x - x_0|^4$ ).

Mit Hilfe von  $\psi$  wird dann die Funktion

$$\tilde{\varphi} := \varphi + \psi + \max_{\partial B_r(x_0)} (u - \varphi - \psi) .$$

definiert. Damit ist sichergestellt, daß  $u - \tilde{\varphi}$  in  $x_0$  ein striktes Maximum annimmt,  $(u - \tilde{\varphi})(x_0) > 0$  und  $u - \tilde{\varphi} \leq 0$  auf dem Rand von  $B_r(x_0)$  gilt. Wegen der letzten Eigenschaft liegt dann  $(u - \tilde{\varphi})^+$  in  $W_0^{1,\bar{p}}(B_r(x_0))$ .

Bemerkung:  $(u - \tilde{\varphi})^+$  bezeichnet den positiven Anteil von  $u - \tilde{\varphi}$ , d.h.

$$2(u - \tilde{\varphi})^+ := |u - \tilde{\varphi}| + u - \tilde{\varphi} .$$

Um die Behauptung zu zeigen, daß  $u$  eine Viskositätsunterlösung ist, führen wir jetzt einen Widerspruchsbeweis und nehmen

$$F(D\tilde{\varphi}(x_0), D^2\tilde{\varphi}(x_0)) - f(x_0, u(x_0)) = F(D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) - f(x_0, u(x_0)) > 0$$

an. Aus Gründen der Stetigkeit gilt diese Ungleichung auch auf einer entsprechend kleinen Umgebung des Punktes  $x_0$ . O.B.d.A können wir

$$F(D\tilde{\varphi}(x), D^2\tilde{\varphi}(x)) - f(x, u(x)) > 0 \quad \text{für jedes } x \in B_r(x_0)$$

annehmen (da sonst  $r$  kleiner gewählt werden kann). Dann gilt mit Sicherheit auch

$$\int_{B_r(x_0)} [F(D\tilde{\varphi}, D^2\tilde{\varphi}) - f(x, u)](u - \tilde{\varphi})^+ dx > 0$$

da  $(u - \tilde{\varphi})^+$  nicht konstant Null ist, und mittels partieller Integration schließlich

$$\int_{B_r(x_0)} A(D\tilde{\varphi})D((u - \tilde{\varphi})^+) - f(x, u)(u - \tilde{\varphi})^+ dx > 0 .$$

Andererseits stellt  $u$  auch eine schwache Unterlösung des Problems (3.6) dar, womit auch

$$\int_{B_r(x_0)} A(Du)D((u - \tilde{\varphi})^+) - f(x, u)(u - \tilde{\varphi})^+ dx \leq 0$$

gilt (die Testfunktion  $(u - \tilde{\varphi})^+$  kann mit Null außerhalb von  $B_r(x_0)$  fortgesetzt werden). Die Differenz der beiden Integrale ergibt dann

$$\int_{\{u > \tilde{\varphi}\}} [A(D\tilde{\varphi}) - A(Du)](Du - D\tilde{\varphi}) dx > 0 .$$

Der Operator  $A$  ist jedoch als monoton vorausgesetzt worden, womit der Integrand kleiner oder gleich Null ist und wir erhalten einen Widerspruch. Damit ist gezeigt, daß eine schwache Unterlösung insbesondere eine Viskositätsunterlösung ist.

Um nachzuweisen, daß es eine schwache Oberlösung auch eine Viskositäts- oberlösung darstellt, gehen wir genauso vor wie bisher.

Wenn  $u - \varphi$  in  $\Omega$  ein lokales Minimum (für  $\varphi \in C^2(\Omega)$ ) annimmt, d.h.

$$(u - \varphi)(x_0) = \min_{B_r(x_0)} (u - \varphi)$$

so können wir mit ähnlichen Überlegungen wie bisher  $(u - \varphi)(x_0) < 0$  und  $u - \varphi \geq 0$  auf dem Rand von  $B_r(x_0)$  annehmen. Dann ist  $(\varphi - u)^+$  eine nicht negative, zulässige Testfunktion, die nicht konstant Null ist.

Die Annahme

$$F(D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) - f(x_0, u(x_0)) < 0$$

führt dann auf

$$\int_{B_r(x_0)} [F(D\varphi, D^2\varphi) - f(x, u)](\varphi - u)^+ dx < 0$$

für  $r$  hinreichend klein.

Da  $(\varphi - u)^+$  eine zulässige Testfunktion für die schwache Oberlösung  $u$  ist, folgt

$$\int_{B_r(x_0)} A(Du)D((\varphi - u)^+) - f(x, u)(\varphi - u)^+ dx \geq 0$$

und die Differenz dieser beiden Integrale liefert

$$\int_{\{u > \varphi\}} [A(D\varphi) - A(Du)](D\varphi - Du) dx < 0 .$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur Monotonie der Abbildung  $A$ , und der Beweis von Satz 3.3.2 ist damit vollständig.

Die im Satz 3.3.2 wesentliche Voraussetzung der Monotonie wird zum Beispiel vom Operator

$$Lu := - \sum_{i=1}^n c_i |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i x_i} = - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p_i - 1} \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i})$$

erfüllt, den wir im ersten Abschnitt des Kapitels behandelt haben.

In der Tat gilt nämlich in diesem Fall für die Abbildung  $A$ :

$$A(q) = \left( \frac{c_1}{p_1 - 1} |q_1|^{p_1-2} q_1, \dots, \frac{c_n}{p_n - 1} |q_n|^{p_n-2} q_n \right).$$

Also ist

$$(A(x) - A(y)) * (x - y) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p_i - 1} (|x_i|^{p_i-2} x_i - |y_i|^{p_i-2} y_i) (x_i - y_i) > 0$$

für  $x \neq y$ .

Damit können wir das Resultat aus dem dem Abschnitt 3.1 verbessern und nicht nur das schwache, sondern sogar das starke Maximumprinzip für schwache Lösungen beweisen.

### Satz 3.3.3 (Das starke Maximumprinzip für schwache Lösungen)

Sei  $u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  eine stetige schwache Unterlösung der Gleichung (3.1) mit rechter Seite  $f \leq 0$  auf  $\Omega \times \mathbb{R}$  (siehe Abschnitt 3.1), die im Inneren von  $\Omega$  ein Maximum annimmt. Dann ist  $u$  konstant.

Beweis:

Die schwache Unterlösung  $u$  ist nach Satz 3.3.2 insbesondere eine Viskositätsunterlösung. Wegen der Voraussetzung  $f = f(x) \leq 0$  ist auch die Bedingung (A3) erfüllt, d.h. wir wenden Satz 3.2.6 für Viskositätslösungen an.

**Bemerkung:** Analog wird auch das starke Minimumprinzip für stetige schwache Oberlösungen der Gleichung (3.1) mit  $f \geq 0$  auf  $\Omega \times \mathbb{R}$  gezeigt, d.h. eine schwache Oberlösung ist konstant, falls sie im Inneren des Gebietes ihr Minimum annimmt.

## 3.4 Anwendung auf ein Beispiel

Wir können das starke Minimumprinzip auf schwache Lösungen des Eigenwertproblems

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}^{1-p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}) &= \lambda \|u\|_{L^q}^{1-q} u^{q-1} && \text{in } \Omega \\ u &\geq 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

anwenden (siehe dazu Abschnitt 2.4, Beispiel 3). Dies liefert uns die Erkenntnis, daß eine schwache Lösung  $u$  überall in  $\Omega$  positiv ist (konstant Null kann

sie wegen des Terms  $\|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}^{1-p_i}$  und  $p_i \geq 2$  nicht sein).

Mit Hilfe des Maximumprinzips läßt sich auch eine Aussage über die erste Eigenfunktion des Operators

$$Lu := - \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}^{1-p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i})$$

mit Dirichlet-Randdaten machen.

Das Minimieren des Funktionals

$$E(u) := \frac{\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}}}{\|u\|_{L^q}}$$

im Kapitel 2 hat ergeben, daß der erste Eigenwert

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \|\tilde{u}_{x_i}\|_{L^{p_i}}}{\|\tilde{u}\|_{L^q}}$$

ist, wobei  $\tilde{u}$  einen Minimierer von  $E$  bezeichnet (und somit insbesondere eine Eigenfunktion von  $L$  ist).

Wir betrachten jetzt eine beliebige Eigenfunktion  $u$  zum ersten Eigenwert  $\lambda_1$ .

Das Testen der Gleichung

$$Lu = \lambda_1 \|u\|_{L^q} |u|^{q-2} u$$

mit der Funktion  $u$  selbst ergibt

$$E(u) = \lambda_1 = \inf_{W_0^{1,\vec{p}}} E$$

weswegen  $u$  ebenfalls das Funktional  $E$  minimiert.

Jetzt behaupten wir, daß die Eigenfunktion  $u$  auf  $\Omega$  das Vorzeichen nicht wechseln kann, d.h.  $u$  ist entweder auf ganz  $\Omega$  positiv oder negativ.

Angenommen  $u$  hätte einen Vorzeichenwechsel. Mit  $u$  ist  $|u|$  ebenfalls ein Minimierer von  $E$ , der wegen des Vorzeichenwechsels von  $u$  eine Nullstelle besitzt. Das Maximumprinzip impliziert dann aber sofort, daß es sich bei  $u$  um die triviale Funktion  $u \equiv 0$  handeln muß, also erhalten wir einen Widerspruch.

# Kapitel 4

## Einführung in die Harnacksche Ungleichung

### 4.1 Definition der Ungleichung

Sei  $u$  eine in  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  harmonische Funktion. Dann ist allgemein bekannt, daß zu jedem relativ kompakten Teilgebiet  $\Omega' \subset\subset \Omega$  eine nur von diesem Teilgebiet abhängende Konstante  $c$  existiert mit

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u .$$

Abschätzung dieser Art wird als Harnacksche Ungleichung bezeichnet und ist nicht nur auf Lösungen der Laplace-Gleichung beschränkt. Sie gilt z.B. auch für  $p$ -harmonische Funktionen, d.h. für Lösungen der  $p$ -Laplace Gleichung

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0 .$$

Der  $p$ -Laplace Operator läßt sich wiederum zum sogenannten pseudo- $p$ -Laplace Operator modifizieren

$$Lu := \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) .$$

Auch für diesen Operator behält die Harnacksche Ungleichung ihre Gültigkeit. Allgemeiner läßt sich zeigen, daß die Harnacksche Ungleichung für Lösungen von Gleichungen mit sogenanntem  $p$ -Wachstum erhalten bleibt. Damit sind Gleichungen der Gestalt

$$\operatorname{div} A(x, u(x), \nabla u(x)) = B(x, u(x), \nabla u(x))$$

gemeint, wobei  $A$  bzw.  $B$  im folgenden Sinne einer Wachstumsbedingung genügen:

$$|A(x, u, z)| \leq c_1 |z|^{p-1} \quad z \cdot A(x, u, z) \geq c_2 |z|^p \quad |B(x, u, z)| \leq c_3 |z|^p .$$

Die Harnacksche Ungleichung ist von immenser Bedeutung, da sich aus ihr eine ganze Reihe von interessanten Ergebnissen ableiten läßt. Dies zu untersuchen ist das Ziel dieses Kapitels. Da die Harnacksche Ungleichung, wie wir gesehen haben, für eine große Zahl von Problemen gilt, werden wir versuchen dies für eine möglichst abstrakte Klassen von Funktionen zu tun.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  zusammenhängend und offen. Die von uns zu untersuchende Funktionenklasse bezeichnen wir mit  $X$ , und definieren sie als eine Menge von reellwertigen Funktionen, welche die folgenden Eigenschaften aufweist:

- (a) die Nullfunktion liegt in  $X$
- (b)  $u \in X \implies (u + \lambda) \in X$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$
- (c)  $u \in X \implies \lambda u \in X$  für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$
- (d) für alle  $u \in X$  und jede Kugel  $B_r(x) \subset\subset \Omega$  gilt:

$$\sup_{B_r(x)} u < \infty \quad \text{und} \quad \inf_{B_r(x)} u > -\infty .$$

### Definition 4.1.1

*Wir sagen die Funktionenklasse  $X$  erfüllt die Harnacksche Ungleichung genau dann wenn für alle offenen Mengen  $\Omega', \Omega'' \subset \Omega$ , mit  $\Omega' \subset\subset \Omega''$ , eine Konstante  $c = c(\Omega', \Omega'') > 0$  existiert, so daß für jede auf  $\Omega''$  nicht negative Funktion  $u \in X$  die Ungleichung*

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega''} u$$

*gilt.*

Es existiert auch eine andere, völlig analoge Definition.

### Definition 4.1.2

*Die Menge  $X$  genügt der Harnackschen Ungleichung, falls für alle offenen Mengen  $\Omega', \Omega'' \subset \Omega$  mit  $\Omega' \subset\subset \Omega''$  eine Konstante  $c(\Omega', \Omega'') > 0$  existiert, so daß für jede auf  $\Omega''$  nicht negative Funktion  $u \in X$ , für die ein  $x_0 \in \Omega'$  mit  $u(x_0) = 1$  existiert, folgende Ungleichung gilt:*

$$c^{-1} \leq u(x) \leq c \quad \forall x \in \Omega' .$$



Man sieht relativ leicht, daß die beiden aufgeführten Definitionen äquivalent sind. Erfüllt z.B. die Klasse  $X$  die Harnacksche Ungleichung aus der Definition 4.1.1, so erhalten wir:

$$1 = u(x_0) \leq \sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u \leq c u(x) ,$$

und dies impliziert  $c^{-1} \leq u(x)$  .

Andererseits gilt aber auch:

$$u(x) \leq \sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u \leq c .$$

Somit erfüllt die Menge  $X$  die Ungleichung aus der Definition 4.1.2.

Wenn wir hingegen von der Gültigkeit der Ungleichung aus der Definition 4.1.2 ausgehen, so betrachten wir ein  $u \geq 0$  in  $\Omega''$ ,  $x_0 \in \Omega'$  mit  $u(x_0) > 0$  (für  $u \equiv 0$  ist nämlich nichts zu zeigen). Die Harnacksche Ungleichung aus der Definition 4.1.2 können wir auf die Funktion  $\frac{u}{u(x_0)}$  anwenden.

Daraus ergibt sich

$$c^{-1} \leq \frac{u}{u(x_0)} \leq c$$

oder äquivalent

$$c^{-1} u(x_0) \leq u \leq c u(x_0) ,$$

und schließlich

$$\sup_{\Omega'} u \leq c u(x_0) \leq c^2 \inf_{\Omega'} u .$$

Dies ist die Ungleichung aus Definition 4.1.1 mit der Konstante  $c^2$ .

## 4.2 Folgerungen aus der Harnackschen Ungleichung

Nun widmen wir uns den aus der Harnackschen Ungleichung resultierenden Konsequenzen. Die erste davon ist die lokale Hölderstetigkeit der Elemente aus der Menge  $X$ . Bevor wir jedoch zur eigentlichen Aussage kommen, betrachten wir ein für den späteren Beweis notwendiges Lemma.

### Definition 4.2.1

Für eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und eine in  $\Omega$  relativ kompakte Kugel  $B_r(x) \subset\subset \Omega$  definieren wir die Oszillation von  $u$  auf  $B_r(x)$  als

$$\omega(x, r) := \sup_{y_1, y_2 \in B_r(x)} |u(y_1) - u(y_2)| .$$

### Lemma 4.2.2

Sei  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion mit folgender Eigenschaft:  
 $\forall x_0 \in \Omega \exists r, c > 0, \alpha \in (0, 1) \forall x \in B_r(x_0) \forall s \leq r :$

$$\omega(x, s) \leq cs^\alpha.$$

Dann ist  $u$  lokal Hölderstetig mit Exponent  $\alpha$  (insbesondere soll natürlich  $B_{2r}(x_0)$  in  $\Omega$  liegen damit der Ausdruck  $\omega(x, x)$  definiert ist).

Beweis:

Seien  $y_1, y_2 \in B_r(x_0)$  beliebig. Dann gilt

$$y_1, y_2 \in B_s\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right) \quad \text{mit } s := \frac{1}{2}|y_1 - y_2| < r.$$

Daraus leiten wir ab:

$$|u(y_1) - u(y_2)| \leq \omega\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), s\right) \leq cs^\alpha \leq c|y_1 - y_2|^\alpha.$$

Somit ist  $u \in C^\alpha(B_r(x_0))$ .

Die Hölderstetigkeit bedeutet also nichts anderes, als daß die Oszillation auf einer Kugel  $B_r(x)$  sich wie eine Potenz vom Radius verhält.

Mit Hilfe des Lemmas 4.2.2 läßt sich jetzt der folgende, in [14] präsentierte Satz beweisen.

### Satz 4.2.3 (Lokale Hölderstetigkeit)

*Unter der Voraussetzung, daß die Funktionenklasse  $X$  die Harnacksche Ungleichung erfüllt, sind alle Elemente aus  $X$  lokal Hölderstetig.*

Beweis:

Sei  $u \in X$  und  $B_{2r}(x_0)$  eine in  $\Omega$  relativ kompakte Kugel. Wir wählen ein  $x \in B_{2r}(x_0)$  (also ist insbesondere  $B_r(x) \subset B_{2r}(x_0)$ ) und definieren folgende Größen:

$$M(s) := \sup_{B_s(x)} u \quad \mu(s) := \inf_{B_s(x)} u$$

Nach den Eigenschaften (b) und (c) für die Menge  $X$  wissen wir, daß die Funktionen  $M(r) - u$  und  $u - \mu(r)$  auf  $B_r(x)$  nicht negative Elemente aus  $X$  darstellen.

Somit sind wir in der Lage die Harnacksche Ungleichung auf die Kugel

$B(r/2)(x)$  anzuwenden. Dies resultiert in folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} M(r) - \mu(r/2) &= \sup_{B_{r/2}(x_0)} (M(r) - u) \leq c \inf_{B_{r/2}(x)} (M(r) - u) = \\ &= c (M(r) - M(r/2)) \end{aligned}$$

und

$$M(r/2) - \mu(r) = \sup_{B_{r/2}(x)} (u - \mu(r)) \leq c \inf_{B_{r/2}(x)} (u - \mu(r)) = c (\mu(r/2) - \mu(r)).$$

Addition der beiden Ungleichungen mit anschließender Umordnung ergibt:

$$M(r/2) - \mu(r/2) \leq \frac{c-1}{c+1} (M(r) - \mu(r)).$$

Mit der Notation aus der Definition 4.2.1 ist

$$\omega(x, r/2) \leq \theta \omega(x, r)$$

mit  $\theta = (c-1)/(c+1) < 1$  eine äquivalente Formulierung.

Iterative Anwendung dieser Ungleichung impliziert:

$$\omega(x, 2^{-k}r) \leq \theta^k \omega(x, r) \quad (k \in \mathbf{N}).$$

Seien jetzt  $0 < s < r$  und  $k \in \mathbf{N}$  mit  $2^{-k-1} \leq s/r \leq 2^{-k}$ . Wegen  $\theta < 1$  existiert ein  $\alpha > 0$  mit  $\theta = 2^{-\alpha}$ .

Dann gilt:

$$\omega(x, s) = \omega(x, r(s/r)) \leq \omega(x, 2^{-k}r) \leq 2^{-k\alpha} \omega(x, r) \leq \theta^{-1} \left(\frac{s}{r}\right)^\alpha \omega(x, r).$$

Insgesamt erhalten wir also eine Ungleichung von der Gestalt:

$$\omega(x, s) \leq \tilde{c} s^\alpha.$$

für alle  $s < r$  mit  $\tilde{c} = \theta r^{-\alpha} \omega(x, r)$ .

Wir können nun  $\omega(x, r)$  durch  $\omega(x_0, 2r)$  nach oben abschätzen, und die Konstante  $\theta$  als unabhängig von der Kugel  $B_r(x)$  betrachten (da  $\theta$  nur von der Konstante  $c$  aus der Harnackschen Ungleichung abhängt).

Damit folgt

$$\omega(x, s) \leq \hat{c} s^\alpha$$

für alle  $x \in B_r(x_0)$  und alle  $s < r$ .

Damit ist das Lemma 4.2.2 anwendbar, und wir erhalten die gewünschte Hölderstetigkeit.

Für den weiteren Verlauf des Kapitels nehmen wir an, daß die Funktionenklasse  $X$  stets der Harnackschen Ungleichung genügt.

**Satz 4.2.4 (Starkes Maximumprinzip)**

Sei  $u \in X$  eine Funktion, die im Inneren von  $\Omega$  ein Maximum annimmt, d.h. es existiert ein  $x_0 \in \Omega$  mit

$$u(x_0) = \max_{\Omega} u .$$

Dann ist  $u$  konstant.

Beweis:

Sei  $\Omega'$  eine beliebige, in  $\Omega$  relativ kompakte Menge die den Punkt  $x_0$  enthält. Wir betrachten die nicht negative Funktion  $(u(x_0) - u) \in X$ , auf die wir die Harnacksche Ungleichung anwenden. Dies liefert

$$\sup_{\Omega'} (u(x_0) - u) \leq c \inf_{\Omega'} (u(x_0) - u) = 0$$

also ist  $u \equiv u(x_0)$  auf dem Teilgebiet  $\Omega'$ . Da  $\Omega$  zusammenhängend und  $\Omega'$  eine beliebige Teilmenge ist, folgt daß  $u$  sogar auf ganz  $\Omega$  konstant ist.

Neben dem starken gibt es auch das sogenannte schwache Maximumprinzip.

**Satz 4.2.5 (Schwachtes Maximumprinzip)**

Sei  $u \in X$  mit der Eigenschaft, daß es sich stetig auf den Rand von  $\Omega$  fortsetzen läßt. Dann gilt:

$$\sup_{\Omega} = \max_{\partial\Omega} u$$

Beweis:

Es wurde im Satz 4.2.3 die Stetigkeit von  $u$  bewiesen. Nach Voraussetzung läßt sich dann  $u$  stetig auf den Rand von  $\Omega$  fortsetzen, also nimmt es in  $\bar{\Omega}$  in einem Punkt  $x_0$  das Maximum an. Liegt  $x_0$  im Inneren von  $\bar{\Omega}$ , so ist  $u$  nach Satz 4.2.4 konstant. In jedem Fall wird also das Maximum auch auf dem Rand von  $\Omega$  angenommen.

**Bemerkung:**

Analog läßt sich auch das starke, bzw. schwache Minimumprinzip formulieren und beweisen, d.h. auch das Minimum wird stets auf dem Rand von  $\Omega$

angenommen. Der Beweis läßt sich auf das Maximumprinzip zurückführen, indem statt  $u$  die Funktion  $-u$  betrachtet wird.

Die letzten beiden Resultate des Kapitels behandeln den Spezialfall  $\Omega = \mathbb{R}^n$ .

### Satz von Liouville 4.2.6

Sei  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , und die Harnacksche Ungleichung in einer verschärften Form gültig, d.h. die Konstante  $c$  aus der Ungleichung soll unabhängig vom betrachteten Teilgebiet wählbar sein. Dann ist jedes nach oben bzw. nach unten beschränkte  $u \in X$  konstant.

Beweis:

Wir nehmen o.B.d.A an, daß  $u$  nach oben beschränkt ist. Sei  $M := \sup_{\mathbb{R}^n} u$ , dann ist die Funktion  $M - u$  auf jeder Kugel  $B_r(0)$  nicht negativ. Auf diese Kugel wenden wir die Harnacksche Ungleichung an und erhalten

$$\sup_{B_r(0)} (M - u) \leq c \inf_{B_r(0)} (M - u.)$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert offensichtlich gegen Null für  $r \rightarrow \infty$ , woraus sofort  $u \equiv M$  folgt.

Selbst wenn die Funktion  $u$  nicht beschränkt ist, so erlaubt uns die Harnacksche Ungleichung eine Aussage über das Verhalten von  $u$  nahe  $\infty$  zu machen.

### Satz 4.2.7

Analog zum Satz 4.8 nehmen wir an, daß die Konstante aus der Harnackschen Ungleichung unabhängig vom betrachteten Teilgebiet gewählt werden kann. Für ein  $u \in X$  mit  $\Omega = \mathbb{R}^n$  definieren wir

$$M(r) = \max_{|x|=r} u \quad \mu(r) = \min_{|x|=r} u .$$

Dann gilt:  $M(r) - \mu(r)$  strebt gegen  $\infty$  für  $r \rightarrow \infty$  falls  $u$  nicht konstant ist.

Beweis:

Wir folgen dem in [14] präsentierten Beweis. Aus dem Maximumprinzip läßt sich ableiten, daß  $M(r)$  monoton wachsend und  $\mu(r)$  monoton fallend in  $r$  ist. Um zeigen zu können, daß die Differenz beliebig groß wird betrachten wir die auf der Menge  $|x| = r$  nicht negativen Funktionen  $M(2r) - u$  und  $u - \mu(2r)$ . Anwendung der Harnackschen Ungleichung auf die Funktion  $M(2r) - u$  ergibt dann

$$(M(2r) - \mu(2r)) \leq c (M(2r) - M(r))$$

(da  $M(2r) - \mu(r) = \sup(M(2r) - u)$  und  $M(2r) - M(r) = \inf(M(2r) - u)$  auf der Menge  $|x| = r$  ist).

Anschließend wenden wir die Harnacksche Ungleichung auf  $u - \mu(2r)$  und erhalten

$$M(r) - \mu(2r) \leq c (\mu(r) - \mu(2r))$$

(wegen  $M(r) - \mu(2r) = \sup(u - \mu(2r))$ , bzw.  $\mu(r) - \mu(2r) = \inf(u - \mu(2r))$  auf  $|x| = r$ ).

Addition dieser beiden Ungleichungen liefert

$$M(2r) - \mu(2r) \geq \frac{c+1}{c-1} (M(r) - \mu(r)) ,$$

oder mit der Notation aus der Definition 4.2.1

$$\omega(0, 2r) \geq \frac{c+1}{c-1} \omega(0, r)$$

mit  $\omega(0, r) = M(r) - \mu(r)$ . Iterativ folgt nun

$$\omega(0, 2^n r) \geq \left(\frac{c+1}{c-1}\right)^n \omega(0, r).$$

Ist  $u$  eine nicht konstante Funktion, so ist  $\omega(0, r) \neq 0$  für  $r$  hinreichend gross. Da  $\frac{c+1}{c-1} > 1$  ist, folgt dann  $M(r) - \mu(r) \rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow \infty$ .

### 4.3 Geschichtlicher Hintergrund

Zum Abschluß des Kapitels werfen wir noch einen kurzen Blick auf die Geschichte der Harnackschen Ungleichung, die nach dem deutschen Mathematiker Carl Gustav Axel von Harnack benannt ist (für einen ausführlichen Bericht siehe [11], von dort stammen auch alle hier angegebenen Informationen). Die Zwillinge Carl Gustav Adolf von Harnack und Carl Gustav Axel von Harnack kamen am 7. Mai 1851 in der estonischen Stadt Tortu zur Welt. Nach dem Abschluß seines Studiums an der Universität in Tortu im Jahre 1872 zieht Axel von Harnack nach Erlangen um, wo er Schüler von Felix Klein wird und im Jahre 1875 promoviert. Weitere Stationen seiner wissenschaftlichen Laufbahn sind die Technische Universität Darmstadt und schließlich die Technische Universität Dresden. Seine Forschungsinteressen lagen im Bereich der Analysis. Er arbeitete auf den Gebieten der Funktionentheorie, Fourier-Reihen und der Mengenlehre. Seit 1882 leidet er an gesundheitlichen Problemen, die ihn immer wieder zu längeren Kuraufenthalten zwingen. Axel von Harnack verstirbt im Jahre 1888. Sein Bruder Carl Gustav Adolf von

Harnack wird ein berühmter Theologe und wurde erster Präsident der im Jahre 1911 gegründeten Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft, aus der 1948 die Max-Planck-Gesellschaft hervorging.

Axel von Harnack formulierte die nach ihm benannte Ungleichung zunächst nur für harmonische Funktionen in  $\mathbb{R}^2$ . Diese Formulierung hatte auch noch nicht die allgemeine Form wie in Definition 4.1 angegeben, sondern wurde auf folgende Art und Weise präsentiert:

*Für eine nichtnegative harmonische Funktion  $u$  auf  $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^2$  gilt*

$$\frac{R-r}{R+r}u(x) \leq u(x_0) \leq \frac{R+r}{R-r}u(x)$$

*für jeden beliebigen Punkt  $x \in B_R(x_0)$ .*

Der Beweis dieser Ungleichung ergibt sich aus der Poissonschen Darstellungsformel für harmonische Funktionen.

Im Laufe der Zeit wurde dann die Harnacksche Ungleichung auf immer allgemeinere Probleme und höhere Dimensionen formuliert. Erst mit der Zeit entwickelte sich auch die bekannte Formulierung aus der Definition 4.1

# Kapitel 5

## Harnacksche Ungleichung für den zweidimensionalen Fall

### 5.1 Harnacksche Ungleichung für klassische Lösungen

In diesem Kapitel beweisen wir die Harnacksche Ungleichung für klassische Lösungen einer anisotropen Gleichung in  $\mathbb{R}^2$ . Es handelt sich um einen geometrisch geführten Beweis, der eine Modifizierung des Beweises aus der Arbeit von James Serrin [18] darstellt, in der die Harnacksche Ungleichung für lineare Operatoren hergeleitet wurde. Die Modifizierung besteht darin, die jeweiligen Beweisschritte an die fehlende Linearität anzupassen.

Auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  betrachten wir wieder die bekannte Differentialgleichung

$$-Lu := c_1|u_x|^{p_1-2}u_{xx} + c_2|u_y|^{p_2-2}u_{yy} = 0 \quad (5.1)$$

mit  $p_1, p_2 \geq 2$  und  $c_1, c_2 > 0$ .

Der Operator  $L$  läßt sich auch schreiben als

$$-Lu = \frac{c_1}{p_1 - 1} \frac{\partial}{\partial x} (|u_x|^{p_1-2}u_x) + \frac{c_2}{p_2 - 1} \frac{\partial}{\partial y} (|u_y|^{p_2-2}u_y) .$$

Das wichtigste Werkzeug beim Beweis wird das im Kapitel 3 bewiesene Vergleichsprinzip (Satz 3.1.3) sein, das im Beweis mehrfach angewendet wird.

Das Resultat dieses Kapitels lautet dann:

#### Satz 5.1.1

*Die Menge der positiven, klassischen Lösungen von (5.1) genügt der Harnackschen Ungleichung, d.h. für jedes Teilgebiet  $\Omega' \subset\subset \Omega$  existiert eine Konstante*



$c > 0$ , die nur von  $\Omega$  und  $\Omega'$  abhängt, mit

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u$$

für jede nicht negative klassische Lösung  $u$  von (5.1).

Beweis:

Für die Harnacksche Ungleichung genügt es für jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in \Omega$  die Existenz einer Umgebung  $U_\varepsilon(x_0, y_0)$  (die nicht zwingend eine Kugel sein muß) und einer Konstante  $c > 0$  (die nur von der Umgebung  $U_\varepsilon(x_0, y_0)$  abhängt) nachzuweisen, so daß

$$u(x, y) \leq c u(\tilde{x}, \tilde{y})$$

für alle  $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in U_\varepsilon(x_0, y_0)$  und für jede nicht negative Lösung  $u$  gilt.

Eine relativ kompakte Teilmenge  $\Omega' \subset\subset \Omega$  kann dann von endlich vielen solchen Umgebungen überdeckt werden.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf  $U_\varepsilon(x_0, y_0) = B_1(0)$  angenommen werden, da man sonst eine lineare Transformation der Gestalt

$$(x, y) \mapsto (a_1(x - x_0), a_2(y - y_0))$$

anwenden kann.

Der Operator  $L$  ist nicht homogen, von daher ist es notwendig die beiden Komponenten unterschiedlich stark zu skalieren, damit die Gleichung (5.1) erhalten bleibt. Dazu muß  $a_2 = a_1^{(p_1-1)/(p_2-1)}$  gelten. Mit dieser Transformation läßt sich eine Ellipse in die Kugel  $B_1(0)$  transformieren.

Der Beweis von Satz 5.1.1 wird darauf beruhen mit einer geschickt gewählten Vergleichsfunktion zu arbeiten. Dazu betrachten wir die Ellipse

$$\sigma^2 := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

wobei o.B.d.A  $a > b$  angenommen ist, und die Funktion

$$\tilde{v}(x, y) := \exp(-\gamma\sigma^2) - \exp(-\gamma) \quad \text{mit } \gamma > 0.$$

Wir betrachten  $\tilde{v}$  jedoch nicht auf der ganzen Ellipse, sondern lediglich auf der Menge

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma^2 \leq 1 \text{ und } x \geq \frac{1}{2}a \}$$

die eine bei  $x = \frac{1}{2}a$  senkrecht abgeschnittene Ellipse beschreibt.

Offensichtlich ist  $\tilde{v}$  gleich Null auf dem gekrümmten Teil des Randes von  $R$ ,

und zwischen Null und Eins im Inneren.

Für die partiellen Ableitungen gilt jeweils

$$\begin{aligned}\tilde{v}_x &= -2x \frac{\gamma}{a^2} \exp(-\gamma\sigma^2) \\ \tilde{v}_y &= -2y \frac{\gamma}{b^2} \exp(-\gamma\sigma^2) \\ \tilde{v}_{xx} &= 2 \frac{\gamma}{a^2} \exp(-\gamma\sigma^2) (2x^2 \frac{\gamma}{a^2} - 1) \\ \tilde{v}_{yy} &= 2 \frac{\gamma}{b^2} \exp(-\gamma\sigma^2) (2y^2 \frac{\gamma}{b^2} - 1) .\end{aligned}$$

Somit:

$$\begin{aligned}-L\tilde{v} &= c_1 |\tilde{v}_x|^{p_1-2} \tilde{v}_{xx} + c_2 |\tilde{v}_y|^{p_2-2} \tilde{v}_{yy} = \\ &= c_1 \left| \frac{2\gamma}{a^2} \right|^{p_1-1} |x|^{p_1-2} \exp[-\gamma\sigma^2(p_1-1)] (2x^2 \frac{\gamma}{a^2} - 1) + \\ &c_2 \left| \frac{2\gamma}{b^2} \right|^{p_2-1} |y|^{p_2-2} \exp[-\gamma\sigma^2(p_2-1)] (2y^2 \frac{\gamma}{b^2} - 1) .\end{aligned}$$

Der erste Summand ist auf  $R$  wegen der Bedingung  $x \geq \frac{1}{2}a$  durch ein  $\varepsilon > 0$  nach unten beschränkt sofern  $\gamma$  groß genug ist, d.h. es gilt dann

$$c_1 |\tilde{v}_x|^{p_1-2} \tilde{v}_{xx} \geq \varepsilon > 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in R.$$

Dies trifft jedoch nicht auf den zweiten Summanden zu, weswegen die Funktion  $\tilde{v}$  im allgemeinen keine Unterlösung auf  $R$  darstellt (Wir nennen eine Funktion  $\tilde{v}$  Unterlösung falls  $L\tilde{v} \leq 0$  ist).

Der zweite Summand ist jedoch betragsmäßig beschränkt. Um dies auszunutzen definieren wir die Funktion

$$v := \lambda \tilde{v} \quad \text{mit } \lambda > 0 .$$

Jetzt erhalten wir

$$-Lv = \lambda^{p_1-1} c_1 |\tilde{v}_x|^{p_1-2} \tilde{v}_{xx} + \lambda^{p_2-1} c_2 |\tilde{v}_y|^{p_2-2} \tilde{v}_{yy}.$$

Nun kann man durch entsprechende Wahl der Konstante  $\lambda$  die Gültigkeit von  $Lv \leq 0$  auf  $R$  sicherstellen (für  $p_1 > p_2$  wählt man z.B.  $\lambda$  groß genug, im Falle  $p_1 < p_2$  wählt man  $\lambda$  hingegen sehr klein, d.h. es wird mittels  $\lambda$  dafür gesorgt, daß der erste Summand den zweiten dominiert).

Mit der Funktion  $v$  erhält man also eine Unterlösung auf  $R$ , die gleich Null auf dem gekrümmten Rand von  $R$  ist, und  $0 \leq v \leq k$  für ein festes  $k > 0$  im Inneren.

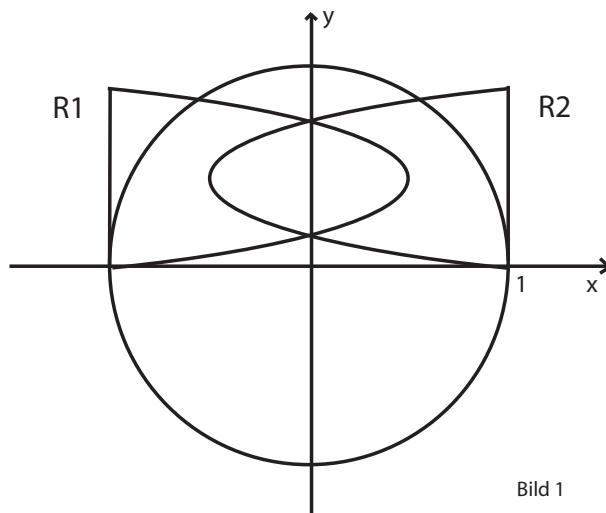
Nun wählen wir  $a = 3$ ,  $b = \frac{1}{2}$  und setzen

$$R_1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x + \frac{5}{2})^2}{a^2} + \frac{(y - \frac{1}{4}\sqrt{3})^2}{b^2} \leq 1, x \geq -1 \right\}$$

bzw.

$$R_2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x - \frac{5}{2})^2}{a^2} + \frac{(y - \frac{1}{4}\sqrt{3})^2}{b^2} \leq 1, x \leq 1 \right\}$$

d.h. die Ellipse  $R$  wird um den Vektor  $(-\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\sqrt{3})$  verschoben um  $R_1$  zu bekommen, und anschließend für  $R_2$  noch zusätzlich an der  $y$ -Achse gespiegelt.



Zu diesen beiden Gebieten  $R_1, R_2$  betrachten wir die zugehörigen Vergleichsfunktionen

$$v_1(x, y) := v\left(x + \frac{5}{2}, y - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right) \quad v_2(x, y) := v\left(\frac{5}{2} - x, y - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right).$$

Durch diese Verschiebung bzw. Spiegelung ändert sich natürlich nichts an der Tatsache, daß es sich in beiden Fällen um Unterlösungen auf  $R_1$  bzw.  $R_2$  handelt.

Schließlich wählen wir noch für  $b = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ,  $a = \frac{1}{2}$  ein drittes Gebiet

$$R_3 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}))^2}{b^2} \leq 1, y \leq \frac{1}{4}\sqrt{3} \right\}.$$

$R_3$  beschreibt ebenfalls eine abgeschnittene ellipse, mit der eigenschaft, daß der gerade Rand von  $R_3$  im Durchschnitt der Gebiete  $R_1$  und  $R_2$  verläuft.

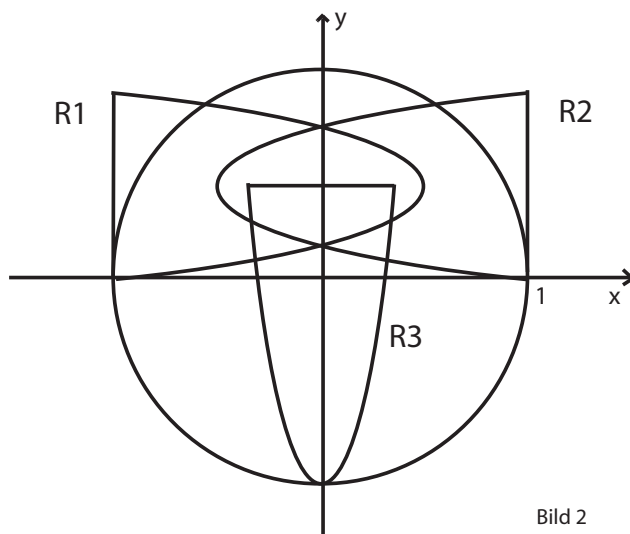


Bild 2

Auch für dieses Gebiet möchten wir eine Vergleichsfunktion  $v_3$  definieren. Dabei ist jedoch eine Fallunterscheidung notwendig.

Wie gewohnt setzen wir zunächst

$$\tilde{v}_3 := v(x, y - (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}))$$

und anschließend

$$v_3 := \lambda \tilde{v}_3$$

um mit Hilfe der Skalierung mit  $\lambda > 0$  die Funktion  $v_3$  zu einer Unterlösung auf  $R_3$  zu machen. Dies funktioniert genauso wie bei  $v_1$  bzw.  $v_2$ , d.h. in Abhängigkeit davon, ob  $p_1 < p_2$  oder  $p_2 < p_1$  gilt, wählt man  $\lambda$  groß bzw. klein genug.

Falls  $p_2 < p_1$  zutrifft, so kann  $\lambda$  außerdem klein genug gewählt werden um

$$v_3 \leq \min\{v_1, v_2\} \tag{5.2}$$

auf dem geraden Rand von  $R_3$  zu erhalten.

Gilt jedoch  $p_1 < p_2$  (d.h.  $\lambda$  muß groß gewählt werden), so ist die obige Ungleichung eventuell verletzt. Dieses Problem läßt sich umgehen indem die Funktionen  $v_1, v_2$  ihrerseits mit einer hinreichend großen Konstante multipliziert werden damit (5.2) gilt.

Dies kann jedoch zu Folge haben, daß die Eigenschaft von  $v_1, v_2$  als Unterlösung verloren geht. Um dies zu verhindern kann jedoch bei  $v_1, v_2$  der Exponent  $\gamma$  groß genug gewählt werden.

Zusammenfassung:

wir haben drei Vergleichsfunktionen  $v_1, v_2, v_3$  auf drei Gebieten  $R_1, R_2, R_3$ , wobei die Funktion  $v_3$  auf dem geraden Rand von  $R_3$  unterhalb der Funktionen  $v_2, v_3$  liegt.

Sei jetzt  $u$  eine beliebige positive Lösung von (5.1). Wir zeigen, daß  $u$  im Nullpunkt normiert werden kann, indem wir mittels einer Fallunterscheidung eine Funktion  $\tilde{u}$  definieren.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf an dieser Stelle  $p_1 < p_2$  angenommen werden, da sonst zu einer Funktion  $w(x, y) := u(y, x)$  übergegangen werden kann, bei der sich die Rolle von  $p_1$  und  $p_2$  vertauscht.

**1. Fall:**  $u(0) \geq 2k$

Dann setzen wir:

$$\tilde{u}(x, y) := \lambda_1 u(x, \lambda_2 y) .$$

Für  $\tilde{u}$  gilt dann

$$-L\tilde{u} = \lambda_1^{p_1-1} c_1 |u_x(\lambda_1 x, y)|^{p_1-2} u_{xx}(\lambda_1 x, y) + \lambda_1^{p_2-1} \lambda_2^{p_2} c_2 |u_y(\lambda_2 x, y)|^{p_2-2} u_{yy}(\lambda_2 x, y)$$

und  $\tilde{u}$  ist ebenfalls eine Lösung von (5.1) wenn

$$\lambda_2 := \lambda_1^{\frac{p_1-p_2}{p_2}} .$$

gilt.

**2. Fall:**  $u(0) < 2k$

Dann definieren wir

$$\tilde{u}(x, y) := \lambda_1 u(\lambda_2 x, y)$$

und erhalten

$$-L\tilde{u} = \lambda_1^{p_1-1} \lambda_2^{p_1} c_1 |u_x(\lambda_2 x, y)|^{p_1-2} u_{xx}(\lambda_2 x, y) + \lambda_1^{p_2-1} c_2 |u_y(\lambda_2 x, y)|^{p_2-2} u_{yy}(\lambda_2 x, y) .$$

Nun ist  $\tilde{u}$  ebenfalls eine Lösung ist, falls man

$$\lambda_2 := \lambda_1^{\frac{p_2-p_1}{p_1}}$$

setzt.

Jetzt ist es möglich die Funktion  $\tilde{u}$  mittels der Konstante  $\lambda_1$  nach Belieben zu skalieren.

Wir wählen einfach  $\lambda_1 := \frac{2k}{u(0)}$  um die Normierung  $\tilde{u}(0) = 2k$  zu erreichen.

Durch die Fallunterscheidung haben wir erreicht, daß die Skalierung der jeweiligen Komponente mit einer Zahl  $\lambda_2 \geq 1$  geschieht.

Die Skalierung wie soeben vorgenommen scheint etwas kompliziert zu sein. Das Problem besteht darin, daß der Operator  $L$  nicht homogen ist, und dies veranlaßt uns dazu die Komponenten mitzuskalieren um die Gleichheit  $L\tilde{u} = 0$  zu erhalten.

Ein bei Skalierung dieser Art auftretendes Problem ist die Tatsache, daß  $\lambda_2$  eventuell zu groß wird, d.h.  $(\lambda_2 x, y)$  bzw.  $(x, \lambda_2 y)$  nicht mehr in  $\Omega$  liegt. Dies läßt sich jedoch umgehen, indem vor der Skalierung zu einer Funktion  $w(x, y) := u(\alpha x, \beta y)$  übergegangen wird. Für  $\alpha = \beta^{\frac{p_2}{p_1}}$  ist dann  $w$  ebenfalls eine Lösung von (5.1) auf einem größeren Gebiet, wenn  $\alpha, \beta \leq 1$  gewählt werden.

Sei jetzt

$$G := \{(x, y) \in B_1(0) \mid \tilde{u}(x, y) > k\}$$

Aus dem im dritten Kapitel bewiesenen Maximumprinzip folgt, daß eine stetig differenzierbare, sich nicht schneidende Raumkurve  $\Gamma$  existiert, die den Nullpunkt mit einem Randpunkt der Kugel  $B_1(0)$  verbindet (da sich sonst ein Widerspruch zum schwachen Maximumprinzip ergibt).

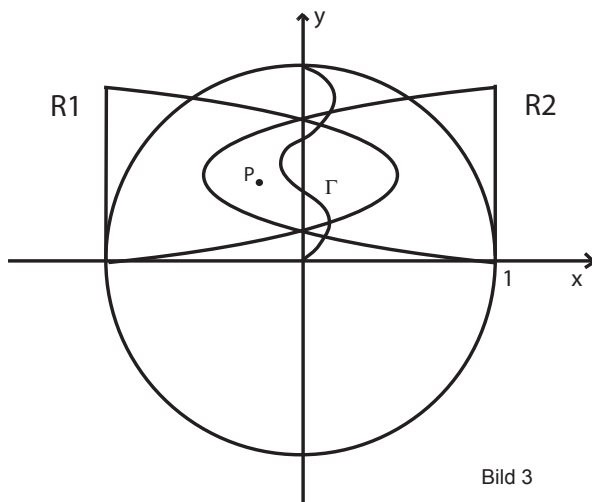


Bild 3

O.B.d.A. kann hier angenommen werden, daß es sich um den Punkt  $(0,1)$  handelt.

Dies ist möglich da es lediglich darauf ankommt, daß der Randpunkt weder in  $R_1$  noch in  $R_2$  liegt. Dies zusammen mit der Tatsache, daß die Gebiete  $R_1, R_2, R_3$  genauso gut um 90 Grad gedreht angeordnet werden können, erlaubt uns diese vereinfachende Annahme.

Sei jetzt  $P$  ein beliebiger Punkt im Durchschnitt der Gebiete  $R_1$  und  $R_2$ . Es

tritt jetzt einer der beiden Fälle auf:

- der Punkt  $P$  wird vom gekrümmten Rand von  $R_1$  und der Kurve  $\Gamma$  eingeschlossen

-  $P$  liegt in einem Gebiet, das vom gekrümmten Rand von  $R_2$  und  $\Gamma$  berandet ist.

O.B.d.A. nehmen wir an, daß der erste Fall auftritt und bezeichnen das entsprechende Gebiet mit  $D$ .

Auf dem gekrümmten Rand von  $R_1$  gilt trivialerweise  $\tilde{u} \geq v_1$ , da dort  $v_1$  konstant Null ist. Auch auf  $\Gamma \cap R_1$  haben wir ebenfalls diese Ungleichheit, weil da

$$\tilde{u} \geq k \geq v_1$$

gilt.

Anwendung des Vergleichsprinzips liefert dann

$$\tilde{u} \geq v_1 \quad \text{auf ganz } D$$

und somit insbesondere

$$\tilde{u}(P) \geq \min\{v_1(P), v_2(P)\}.$$

Da  $P$  ein beliebiger Punkt im Durchschnitt der Gebiete  $R_1, R_2$  ist, erhalten wir

$$\tilde{u} \geq \min\{v_1, v_2\} \geq v_3$$

auf dem geraden Rand von  $R_3$  (nach Konstruktion von  $v_3$ ).

Da natürlich  $\tilde{u} \geq v_3$  auf dem gekrümmten Teil des Randes von  $R_3$  gilt ( $v_3$  ist dort konstant Null), ist das Vergleichsprinzip jetzt auch auf das Gebiet  $R_3$  anwendbar.

Daraus folgt

$$\tilde{u} \geq \min_{B_{\frac{1}{3}}(0)} v_3 = d > 0 \quad \text{da } B_{\frac{1}{3}}(0) \subset\subset R_3$$

und damit

$$\tilde{u}(x, y) \geq d = \frac{d}{2k} \tilde{u}(0) \quad \text{für jedes } (x, y) \in B_{\frac{1}{3}}(0).$$

Die Funktion  $\tilde{u}$  geht aus  $u$  durch Multiplikation mit  $\lambda_1$  und lineare Transformation  $T(x, y) = (a_1x, a_2y)$  hervor, wobei die Konstanten  $a_1, a_2$  im Intervall  $[1, \infty]$  liegen.

Daraus leiten wir ab:

$$u(T(x, y)) = \lambda_1^{-1} \tilde{u}(x, y) = \frac{u(0)}{2k} \tilde{u}(x, y) \geq \frac{d}{2k} u(0)$$

für alle  $(x, y) \in B_{\frac{1}{3}}(0)$ .

Wegen  $B_{\frac{1}{3}}(0) \subset T(B_{\frac{1}{3}}(0))$  folgt dann

$$u(x, y) \geq \frac{d}{2k}u(0) \quad \text{für alle } (x, y) \in B_{\frac{1}{3}}(0) .$$

Um den Beweis zu vervollständigen bleibt jetzt noch die umgekehrte Ungleichung zu zeigen.

Sei  $(x_0, y_0)$  ein beliebiger Punkt in  $B_{1/4}(0)$ . Die gleiche Argumentation läßt sich jetzt auf die Kugel  $B_{3/4}((x_0, y_0)) \subset B_1(0)$  anwenden, woraus die Ungleichung

$$u(x, y) \geq \frac{d}{2k}u(x_0, y_0)$$

für alle  $(x, y) \in B_r((x_0, y_0))$  mit  $r = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$  folgt.

Insbesondere also

$$\frac{d}{2k}u(x_0, y_0) \leq u(0).$$

Schließlich gilt

$$u(x, y) \leq \frac{4k^2}{d^2}u(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad \text{für alle } (x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in B_{\frac{1}{4}}(0)$$

und die Harnacksche Ungleichung ist damit bewiesen.

## 5.2 Harnacksche Ungleichung für schwache Lösungen

Die zuvor bewiesene Harnacksche Ungleichung gilt zunächst nur für klassische Lösungen von (5.1). Zum Abschluß des Kapitels möchten wir der Frage nachgehen, ob dieses Resultat auch für schwache Lösungen seine Gültigkeit behält.

Die Definition einer schwachen Lösung von (5.1) wurde bereits im Kapitel 3 angegeben. Zur Erinnerung:

### Definition

Unter einer schwachen Lösung von (5.1) verstehen wir ein  $u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} |u_x|^{p_1-2} u_x \varphi_x + |u_y|^{p_2-2} u_y \varphi_y \, dx dy$$



für alle  $\varphi \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ .

Entscheidende Hilfe beim Beweis der Ungleichung für klassische Lösungen lieferte das im Satz 3.1.3 (Kapitel 3) bewiesene Vergleichsprinzip, das bereits für schwache Lösungen formuliert worden ist (d.h. an dieser Stelle kann auf die Glattheit der Lösungen verzichtet werden). Eine weitere wichtige Eigenschaft, die in dem Beweis der Harnackschen Ungleichung eine Rolle spielte war die Stetigkeit der Lösung  $u$ , zum Beispiel sind wir davon ausgegangen, daß die im Verlauf des Beweises definierte Menge  $G$  offen ist. Die Stetigkeit der Lösung kann durch die Zusatzvoraussetzung  $p_1, p_2 > 2$  sichergestellt werden. Unter dieser Zusatzvoraussetzung können sämtliche Schritte des Beweises auch für schwache Lösungen vollzogen werden, d.h. in diesem Fall gilt die Harnacksche Ungleichung auch für schwache Lösungen.

# Literaturverzeichnis

- [1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, New York Academic Press, 1975
- [2] M. Bardi, F. Da Lio, *On the strong maximum principle for fully nonlinear degenerate elliptic equations*, Arch. Math. (Basel) 73, 1999, 276-285
- [3] M. Belloni, B. Kawohl, *The pseudo- $p$ -Laplace eigenvalue problem and viscosity solutions as  $p \rightarrow \infty$* , ESAIM Control Optim. Calc. Var. 10 , 2004, 28-52
- [4] A. Cianchi, *A fully anisotropic Sobolev inequality*, Pacific J. Math. 196, 2000, 283-295
- [5] T.K. Donaldson, *Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems*, J. Functional Analysis 8, 1971, 52-
- [6] L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 19
- [7] I. Fragala, F. Gazzola, B. Kawohl, *Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 21, 2004, 71
- [8] I. Fragala, F. Gazzola, G. Lieberman, *Regularity and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations in convex domains*, Discrete Contin. Dyn. Syst., suppl., 2005, 280-286
- [9] E. Gagliardo, *Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili*, Ricerche Mat. 7, 1958, 102-137
- [10] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order (2nd. ed.)*, Grundlehren Math. Wiss., Springer-Verlag 1983
- [11] M. Kassmann, *Harnack Inequalities: An Introduction*, Boundary Value Problems 2007, Hindawi Publishing Corporation

- [12] B. Kawohl, *Symmetry results for functions yielding best constants in Sobolev-type inequalities*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 6, 2000, 638-690, siehe auch *Erratum*, ibid. 17, 2007, 690
- [13] P. Marcellini, *Regularity and existence of solutions of elliptic equations with  $p, q$ -growth conditions*, J. Differential Equations 90, 1991, 1-30
- [14] J. Moser, *On Harnacks theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 14, 1961, 577-591
- [15] O. Plura, *Variationsprobleme in anisotropen Sobolevräumen*, Diplomarbeit, angefertigt am mathematischen Institut der Universität zu Köln, 2003
- [16] J. Rakosnik, *Some remarks to anisotropic Sobolev spaces I*, Beiträge zur Analysis 13, 1979, 55-68
- [17] J. Rakosnik, *Some remarks to anisotropic Sobolev spaces II*, Beiträge zur Analysis 15, 1981, 127-140
- [18] J. Serrin, *On the Harnack inequality for linear elliptic equations*, J. Analyse Math. 4, 1955/56, 292-308
- [19] Alkis S. Tersenov, Aris S. Tersenov, *The problem of Dirichlet for anisotropic quasilinear degenerate elliptic equations*, J. Differential Equations 235, 2007, 376-396
- [20] M. Troisi, *Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi*, Ricerche Mat. 18, 1969, 3-24
- [21] N. S. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 20, 1967, 721-747

Ich versichere, daß ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit - einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen -, die anderen Werkzeuge im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Fall als Entlehnung kenntlich gemacht habe, daß diese Dissertation noch keiner anderen Universität zur Prüfung vorgelegen hat, daß sie noch nicht veröffentlicht worden ist sowie, daß ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluß des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen dieser Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Prof. Dr. Bernd Kawohl betreut worden.

---

Olgierd Plura

## Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Bernd Kawohl für das Überlassen dieses interessanten Themas, für alle Anregungen und Ratschläge beim Erstellen dieser Dissertation bedanken.

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name: Plura  
Vorname: Olgierd  
Geburtsdatum: 02.09.1974  
Nationalität: deutsch

## Bildung

1981-1987 Volksschule in Schammerau  
1987-1988 Volksschule in Groß Peterwitz  
1989-1994 Gymnasium Fühlinger Weg in Köln  
1996-1999 Wirtschaftsinformatikstudium an der Universität zu Köln  
1999-2003 Mathematikstudium an der Universität zu Köln  
26.11.2003 Abschluß des Studiums mit dem Grad  
Diplom-Mathematiker

## Berufliche Tätigkeiten

1994-1995 Zivildienst beim DRK  
10.2002-11.2003 Studentische Hilfskraft am Mathematischen Institut  
der Universität zu Köln  
12.2003-09.2005 Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut  
der Universität zu Köln  
10.2005-7.2008 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut  
der Universität zu Köln