

Analysis und Numerik von singulären Lösungen der Minimalflächengleichung

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität zu Köln

vorgelegt von

Hans Günther Reschke

aus Heppendorf

Köln 2001

Berichterstatter: Prof. Dr. B. Kawohl
Prof. Dr. U. Trottenberg

Tag der mündlichen Prüfung: 13.06.2001

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung, Summary	5
Einleitung	7
Generelle Voraussetzungen, Bezeichnungen	11
1 Die Minimalflächenaufgabe	13
1.1 Die klassische Variationsaufgabe	13
1.2 Der Operator der mittleren Krümmung	16
1.3 Existenz klassischer Lösungen	17
1.4 Das radialsymmetrische Beispiel	19
2 Viskositätslösungen	24
2.1 Regularisierung am Beispiel des zweidimensionalen radial- symmetrischen Falls	24
2.2 Viskositätslösungen	30
3 Schwache Lösungen und Ritz-Galerkin-Approximation	38
3.1 Schwache Lösungen	38
3.2 Diskretisierung der Randwertaufgabe mit stückweise linearen Ansatzfunktionen	40
3.3 Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung, auch mit gemischten Randbedingungen	43
4 Numerische Ergebnisse	46
4.1 Newton-Verfahren zur Linearisierung des diskreten Problems	47
4.2 Beispiele von Konvergenzraten der Finite-Element-Approximationen	50
4.2.1 Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung mit beschränkter Lösung auf Rechteck	51
4.2.2 Kettenfläche auf Viertelkreisring	53
4.2.3 Minimalflächengleichung auf L-Profil	57

4.3	Das Konvergenzverhalten des Newtonverfahrens am Beispiel der Kettenfläche	61
4.4	Ein Vergleich der Rechenzeiten zwischen CG-Verfahren und algebraischem Mehrgitterverfahren	63
5	Anwendung des Ritz-Galerkin-Verfahrens im Eindimensionalen auf den radialsymmetrischen Fall	67
5.1	Approximation durch stückweise lineare Funktionen	67
5.2	Abschätzung des Fehlers und Konvergenzfragen	72
5.3	Zusammenhang mit Funktionen von beschränkter Variation	78
6	Die parabolische Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung	80
6.1	Semi-Diskretisierung nach der Zeit	81
6.2	Zur parabolischen Minimalflächengleichung	82
6.3	Die parabolische Gleichung konstanter mittlerer Krümmung	82
A	Anhang	90
	Abbildungsverzeichnis	95
	Tabellenverzeichnis	95
	Literatur	97

Zusammenfassung

Die Randwertaufgabe der nichtparametrischen Minimalflächengleichung ist bei nichtkonvexen Gebieten und inkompatiblen Randdaten im Allgemeinen nicht im klassischen Sinne lösbar. Es gibt jedoch verallgemeinerte Lösungen, welche wir als Viskositätslösungen identifizieren und numerisch berechnen. Für das Beispiel der Kettenfläche werden experimentelle Konvergenzraten zur diskreten Approximation nach der Methode von Ritz-Galerkin bei unterschiedlicher Schwankung der Randwerte bestimmt. Die bei der Linearisierung auftretenden Gleichungssysteme werden mit Hilfe eines gebräuchlichen Verfahrens und auch mit einem algebraischen Mehrgitterverfahren gelöst und die Rechenzeiten verglichen. Im radialsymmetrischen Fall erfolgt eine Abschätzung des Fehlers in der Maximumnorm.

Summary

Boundary value problems of nonparametric minimal surfaces do not in general have classical solutions in the case of non-convex domains and non-compatible boundary data. There exist, however, generalized solutions which we identify as viscosity solutions and calculate numerically. In examples of approximation by the method of Ritz and Galerkin, experimental rates of convergence are determined. Also, the systems of equations resulting from linearization are solved, using a common algorithm and an algebraic multigrid method and comparing computing times. For radially symmetric solutions, I give an estimate of the error in the maximum-norm.

Einleitung

Die nichtparametrische Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 0$$

bildet ein grundlegendes Beispiel einer nichtlinearen elliptischen Differentialgleichung, welche nicht gleichmäßig elliptisch ist. Es ist eine Fläche bei vorgegebener Berandung gesucht, deren mittlere Krümmung, das ist das arithmetische Mittel ihrer Hauptkrümmungen, in jedem ihrer Punkte verschwindet. Einen umfassenden Überblick zu dem Thema gibt die Monographie von J.C.C. Nitsche [28] aus dem Jahre 1975 und deren Ausgabe in englischer Sprache [29] aus dem Jahre 1989.

Während die Randwertaufgabe einer gleichmäßig elliptischen Differentialgleichung auf Gebieten mit stückweise glattem Rand bei hinreichend glatten, aber sonst beliebigen Randdaten eine klassische, d. h. bis zum Rand hin stetige Lösung hat, ist die Randwertaufgabe der Minimalflächengleichung nicht in jedem Fall im klassischen Sinne lösbar, wenn das Grundgebiet nicht konvexen Rand hat. Abschnitt 1 enthält Grundlagen zur Aufgabenstellung.

Es existieren jedoch Lösungen in einem verallgemeinerten Sinne, welche die Dirichletsche Randbedingung nicht auf dem ganzen Rand im strengen Sinne erfüllen müssen. Sie genügen stattdessen einer allgemeineren Bedingung, durch welche sie auch eindeutig charakterisiert sind, und besitzen keine gleichmäßigen Elliptizitätskonstanten. Hierbei handelt es sich um "Viskositätslösungen" der Randwertaufgabe nach Crandall, Ishii und Lions [6]. Die Existenz solcher Lösungen erhält man z. B. als Grenzwert einer Folge von Lösungen regularisierter Randwertaufgaben, welche durch Hinzunahme eines Terms der Form $-\varepsilon \Delta u$ zum Differentialoperator mit einem kleinen Parameter $\varepsilon > 0$ entstehen. Jede dieser Randwertaufgaben ist gleichmäßig elliptisch und besitzt somit eine klassische Lösung u_ε . Wenn ε gegen 0 strebt, so konvergieren die u_ε im Innern des Gebietes gegen eine Lösung u der ursprünglichen Differentialgleichung. Liegt das Grundgebiet im Raum \mathbb{R}^N und ist es im Falle $N = 2$ konvex oder im Falle $N > 2$ konvex im mittleren Sinne, dann ist die Randwertaufgabe eindeutig lösbar, und die Konvergenz der u_ε ist bis zum Rand hin gleichmäßig. Andernfalls stellt sich bei Vorlage gewisser Randbedingungen in einer Umgebung des nichtkonvexen Teils des Randes eine Grenzschicht ein, innerhalb derer die Gradienten der regularisierten Differentialgleichungen mit $\varepsilon \rightarrow 0$ zum Rand hin unbegrenzt anwachsen. Für die Grenzfunktion konvergiert die Normalenableitung bei Annäherung an Punkte dieses Randteils gegen Unendlich. Die Funktion selbst besitzt eine bis zum Rand hin stetige Fortsetzung. Die vorgeschriebenen Randwerte werden aber

nicht angenommen. Dies ist genauer in Abschnitt 2.1 ausgeführt. Abschnitt 2.2 enthält die Definitionen zum Begriff der Viskositätslösung.

Einen anderen allgemeinen Lösungsbegriff bilden die “schwachen” Lösungen. Diese sind charakterisiert durch das Verschwinden der 1. Variation des zugehörigen Variationsproblems, eben der Aufgabe, zu einer geschlossenen Randkurve eine Fläche kleinsten Inhalts zu finden. Abschnitt 3.1 enthält eine Zusammenstellung von Resultaten zu schwachen Lösungen. Auch in dem Sobolevraum $W^{1,1}(\Omega)$ der integrierbaren Funktionen mit integrierbarer schwacher Ableitung hat die Variationsaufgabe nicht in jedem Falle eine Lösung. In Ekeland-Temam [10] wird daher eine “verallgemeinerte” Lösung definiert, und zwar über ein duales Problem. Es handelt sich, allgemein gesagt, um Grenzwerte von Minimalfolgen. Die oben erwähnten Regularisierungen entsprechen solchen Folgen. Die verallgemeinerten Lösungen erhält man auch, wenn man das Variationsintegral durch ein geeignetes Randintegral ergänzt und das Minimum der Summe beider Integrale bestimmt. Im Fall der Existenz einer klassischen Lösung fällt diese mit der verallgemeinerten Lösung zusammen. Für eine moderne Darstellung und den Zusammenhang mit den Funktionen von beschränkter Variation sei auf das Buch von Giusti [15] verwiesen.

Schwache Lösungen werden durch den Ansatz nach Ritz-Galerkin („Methode der finiten Elemente“) numerisch approximiert. Die Grundbegriffe zur Diskretisierung sind in Abschnitt 3 notiert. Man vergleiche hierzu auch die deutsche [2] oder englische [3] Ausgabe des Buches von Braess. Der Einfachheit halber werden nur Triangulierungen mit linearem Verschiebungsansatz benutzt. Diese haben zwar nicht die Genauigkeit von Ansätzen höherer Ordnung, bieten aber auch einige Vorteile: Dreiecke sind konvex, Maxima und Minima werden in den Knotenpunkten angenommen, und die Gradienten sind elementweise konstant.

Die Lösung der diskreten Aufgabe wird mittels Linearisierung durch das Newton-Verfahren berechnet. Abschnitt 4.1 enthält eine Beschreibung des verwendeten Algorithmus. Eine ausführliche Behandlung findet man z. B. in dem Lehrbuch von Stoer [33], Kap. 5.

Im nicht-klassischen Fall beobachtet man bei der Approximation nach Ritz-Galerkin wie bei der oben erwähnten Regularisierung das Auftreten einer Grenzschicht in einer Umgebung des nichtkonvexen Teils des Randes. Diese hat Einfluss auf das Konvergenzverhalten. In Abschnitt 4.2 werden experimentell Konvergenzraten ermittelt. Während diese sich in der L^2 -Norm der schwachen Ableitung annähernd wie im klassischen Fall verhalten, wenn man die Einschränkung der Lösung auf ein Teilgebiet betrachtet, welches einen positiven Abstand vom nichtkonvexen Teil des Randes hat, wird die Konvergenzordnung auf dem vollen Gebiet reduziert. Für eine Verbesserung der Genauigkeit genügt es daher, wenn man eine Verfeinerung der Diskretisierung nur in einer Umgebung der Grenzschicht vornimmt.

Die im Newton-Verfahren zu lösenden linearen Gleichungssysteme haben schwach besetzte Matrizen. Daher wird ein iteratives Verfahren gewählt, und zwar die Methode des konjugierten Gradienten (CG-Verfahren). Der Rechenaufwand kann jedoch bedeutend verringert werden, wenn man ein Mehrgitterverfahren anwendet. Versuchsweise wird für einzelne Schritte des Newton-Verfahrens das lineare Gleichungssystem mit Hilfe des algebraischen Mehrgitterverfahrens (AMG) von Stüben/Trottenberg ([34] bzw. [36]) gelöst und die Rechenzeit mit der des CG-Verfahrens mit diagonaler Prädiktionierung verglichen (Abschnitt 4.4). Bei Verfeinerung der Diskretisierung kann beobachtet werden, dass die Rechenzeit des AMG annähernd proportional zur Anzahl der Unbekannten ansteigt, während sie beim CG-Verfahren stärker als linear wächst.

In Abschnitt 5 erfolgt eine ausführliche Behandlung des radialsymmetrischen Beispiels mit einer Fehlerabschätzung für die stückweise lineare Approximation in der Maximumnorm.

Als Beispiel für ein zeitabhängiges Problem wird eine parabolische Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung, die in der Arbeit [22] von Kawohl/Kutev behandelt ist, numerisch approximiert. Dies ist Inhalt von Abschnitt 6. Die Zeitdiskretisierung erfolgt mit dem impliziten Eulerverfahren. Es wird ein ähnlicher Finite-Element-Algorithmus verwendet, wie er für die Berechnung des mittlerem Krümmungsflusses in der Diplomarbeit von U. Wandtke [37] aus dem Jahre 1991 beschrieben ist. Nach der Vorlage des dort in der Programmiersprache FORTRAN implementierten Finite-Elementprogrammes wurde ein Programm in der Sprache C erstellt, welches sowohl den elliptischen Fall als auch Varianten der parabolischen Minimalflächengleichung umfaßt. Mit diesem wurden alle zweidimensionalen Finite-Elementrechnungen durchgeführt.

Ziel der Arbeit ist es, das Verhalten der Lösung der Minimalflächenaufgabe auch im nicht-klassischen Fall zu studieren. Es soll gezeigt werden, wie Methoden der Analysis und der Numerik sich hierbei ergänzen. Dabei werden sowohl neue Beiträge zur Theorie als auch zur numerischen Behandlung eingebracht. Der eigene Beitrag zur Analysis besteht in der Behandlung regularisierter Lösungen als Viskositätslösungen (Kap. 2) sowie einer Fehlerabschätzung bei Approximation durch lineare finite Elemente (Kap. 5). Auf der numerischen Seite wird nachgewiesen, dass ein gängiges Verfahren geeignet ist, Lösungen der Minimalflächenaufgabe auch auf nicht-konvexen Gebieten zu approximieren. Die bekannten Vorteile der Mehrgitterverfahren gegenüber klassischen CG-Verfahren habe ich versucht, bei dieser Problemstellung aufzuzeigen (Kap. 4).

An dieser Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. B. Kawohl am Mathematischen Institut der Universität zu Köln für die Betreuung dieser Arbeit, insbesondere des analytischen Teils.

Gleichzeitig danke ich Herrn Prof. Dr. U. Trottenberg für die weitere Förderung der Arbeit am Institut für Algorithmen und wissenschaftliches Rechnen (SCAI) der GMD-Forschungszentrum Informationstechnik GmbH, St. Augustin, und für die Betreuung des numerischen Teils.

Herrn Prof. Dr. G. Dziuk am Institut für angewandte Mathematik der Universität Freiburg danke ich für die freundliche Beratung.

Frau Dr. B. Steckel an der GMD danke ich für die Betreuung der Arbeit und für ihre Beratung in vielen Fragen.

Herrn Dr. A. Wagner, Mathematisches Institut, danke ich für zahlreiche Hinweise.

Generelle Voraussetzungen, Bezeichnungen

Bezeichne $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der *natürlichen Zahlen* und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ihre Erweiterung mit der Zahl 0.

Im Folgenden sei $N \in \mathbb{N}$. Seien $x = (x_j)_{j=1}^N$ und $y = (y_j)_{j=1}^N$ Vektoren des euklidischen Raumes \mathbb{R}^N . Bezeichne $(x, y) := \sum_{j=1}^N x_j y_j$ das Skalarprodukt von x und y und $|x| := (\sum_{j=1}^N x_j^2)^{1/2}$ die euklidische Norm des Vektors x , sofern nicht anders vermerkt.

Ist E topologischer Raum und $F \subset E$, so bezeichne \bar{F} die abgeschlossene Hülle von F in E und $\overset{\circ}{F}$ das Innere von F . Ist $G \subset F$, so schreiben wir $G \subset\subset F$, wenn \bar{G} kompakt ist und $\bar{G} \subset F$ gilt.

Ist E metrischer Raum mit der Metrik d und $F \subset E$, so bezeichne $\text{diam}(F) := \sup\{d(x, y) : x, y \in F\}$ den *Durchmesser* der Menge F .

Sei $S \subset \mathbb{R}^N$, $S \neq \emptyset$, und u eine reellwertige Funktion auf S . Ist $x \in \overset{\circ}{S}$, $j \in \{1, \dots, N\}$ und u in x nach x_j partiell differenzierbar, so schreiben wir für die partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$ auch $D_j u(x)$.

Existiert die zweite partielle Ableitung $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x)$ für ein Paar $(j, k) \in \{1, \dots, N\}^2$, so sei diese auch mit $D_{j,k} u(x)$ notiert.

Ist u in x differenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen $D_j u(x)$ für $j = 1, \dots, N$, und wir schreiben den Vektor der Ableitung von u in x als $Du(x) := (D_1 u(x), \dots, D_N u(x))$.

Die Differenzierbarkeit einer Funktion ist zunächst nur in inneren Punkten ihrer Definitionsmenge erklärt. Sei nun $\overset{\circ}{S} \neq \emptyset$, $\overset{\circ}{S} \neq S$, und u auf S stetig und in $\overset{\circ}{S}$ stetig differenzierbar. Wir sagen, u ist auf S stetig differenzierbar, wenn die Ableitung Du eine stetige Fortsetzung von $\overset{\circ}{S}$ nach S hat. Entsprechendes gelte für partielle Differenzierbarkeit.

Das Kroneckersymbol $\delta_{m,n}$ bezeichne den Wert 1, wenn $m = n$, und den Wert 0, wenn $m \neq n$.

Die Vorzeichenfunktion $\text{sign}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} -1, & \text{wenn } x < 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \\ 1, & \text{wenn } x > 0. \end{cases}$$

Sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^N$ und $f: S \rightarrow \mathbb{R}$. Die *Oszillation* ω_f von f in S ist definiert durch $\omega_f := \sup\{|u(y) - u(x)| : x, y \in S\}$.

Sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^N$. Als Durchmesser der Menge S bezeichnen wir $\text{diam}(S) := \sup\{|x - y| : x, y \in S\}$.

Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine Lebesgue-messbare Menge. Es bezeichne $\mathcal{L}^1(\Omega)$ den Vektorraum aller über Ω Lebesgue-integrierbaren reellwertigen Funktionen. Weiter bezeichne $\mathcal{L}^p(\Omega)$ für $p > 1$ den Vektorraum aller Funktionen f auf Ω , für die $|f|^p$ über Ω Lebesgue-integrierbar ist. Bezeichnet $\mathcal{N}(\Omega)$ die Menge der Funktionen auf Ω , deren Werte mit Ausnahme einer Teilmenge vom Maße Null verschwinden, so ist $\mathcal{N}(\Omega)$ Untervektorraum vom $\mathcal{L}^p(\Omega)$ für jedes $p \geq 1$. Auf dem Quotientenraum $L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega)$ definiert $\|f\|_{L^p(\Omega)} := (\int_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{1/p}$ eine Norm, unter der $L^p(\Omega)$ Banach-Raum (vollständiger normierter Vektorraum) ist. Wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind, identifizieren wir im Folgenden Äquivalenzklassen von $L^p(\Omega)$ und ihre jeweiligen Repräsentanten.

Sei $S \subset \mathbb{R}^N$. Wir sagen, eine Eigenschaft gilt fast überall („f.ü.“) auf S , wenn ihre Ausnahmemenge eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Weiter betrachten wir den Raum $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ aller mit Ausnahme auf Mengen vom Maß Null beschränkten Funktionen. Bezeichne $L^\infty(\Omega)$ ihre Äquivalenzklassen nach Nullmengen und $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ die durch $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{c > 0 : |f(x)| \leq c \text{ f.ü.}\}$ definierte Norm, mit der $L^\infty(\Omega)$ Banachraum ist. Falls Ω beschränkt und f auf $\bar{\Omega}$ stetig ist, fällt die L^∞ -Norm mit der Maximumnorm zusammen.

Sei f eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion. Sei $a \in \bar{I}$. Die einseitigen Grenzwerte (falls sie existieren) $\lim_{a < x \rightarrow a} f(x)$ bzw. $\lim_{a > x \rightarrow a} f(x)$ schreiben wir in der Form $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$.

1 Die Minimalflächenaufgabe

Die Minimalflächengleichung hat ihren Ursprung in der zugehörigen Variationsaufgabe. Im Folgenden behandeln wir nur den Fall nichtparametrischer Flächen. Diese sind als Graphen reellwertiger Funktionen definiert.

In diesem Kapitel sei $N \in \mathbb{N}$, und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet (offene, zusammenhängende Teilmenge) mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$.

1.1 Die klassische Variationsaufgabe

Gegeben sei eine auf dem Rand des Gebietes Ω stetige reellwertige Funktion $g \in C(\partial\Omega)$. Gesucht ist — falls es existiert — das Minimum von

$$(1) \quad A(u) := \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} \, dx$$

unter allen in Ω stetig differenzierbaren und einschließlich des Randes stetigen Funktionen $u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, welche der Randbedingung

$$(2) \quad u(x) = g(x) \quad \text{für } x \in \partial\Omega$$

genügen.

Die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit einer Funktion mit obigen Eigenschaften ist Gegenstand der “klassischen” Minimalflächenaufgabe. Schon diese ist, wie in Abschnitt 1.4 gezeigt wird, nicht einmal unter beliebigen analytischen Randdaten lösbar. Das Integral in (1) ist allgemeiner im *Sobolevraum* der mitsamt ihren schwachen Ableitungen 1. Ordnung im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktionen $W^{1,1}(\Omega)$, und ganz allgemein im Raum der Funktionen von beschränkter Variation $BV(\Omega)$ erklärt. Eine Definition dieser Räume ist im Anhang aufgeführt.

Im Rahmen dieser Arbeit betrachten wir das Variationsproblem im Raum $W^{1,1}(\Omega)$: Bestimme zu einer gegebenen Funktion $g \in L^1(\partial\Omega)$

$$(3) \quad \inf\{A(u) : u \in W^{1,1}(\Omega), u|_{\partial\Omega} = g\}.$$

Die Einschränkung $u|_{\partial\Omega}$ einer Funktion $u \in W^{1,1}(\Omega)$ auf den Rand ist im Sinne des *Spuroperators*, der für Gebiete mit Lipschitz-stetigem Rand definiert ist (vgl. Anhang), zu verstehen. Auch diese Aufgabe ist nicht immer lösbar.

Wir notieren die elementaren Eigenschaften der klassischen Lösungen gleich für den Raum $W^{1,1}(\Omega)$. Hierbei machen wir von der Lipschitz-Stetigkeit des Randes $\partial\Omega$ Gebrauch. Bezeichne $W_0^{1,1}(\Omega)$ die abgeschlossene Hülle des Teilraumes der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω , $C_0^\infty(\Omega)$, des Banachraumes $W^{1,1}(\Omega)$. Dann gilt:

Bemerkung 1.1 Sei auf dem Rand $\partial\Omega$ eine integrierbare Funktion $g \in L^1(\partial\Omega)$ gegeben. Dann gibt es (mindestens) eine Funktion $\psi \in W^{1,1}(\Omega)$, deren Spur auf $\partial\Omega$ mit g zusammenfällt (“Fortsetzung von g nach $W^{1,1}(\Omega)$ ”). Für jede solche Funktion ψ hat man:

$$\begin{aligned} & \inf\{A(u) : u \in W^{1,1}(\Omega), u|_{\partial\Omega} = g\} \\ &= \inf\{A(\psi + v) : v \in W_0^{1,1}(\Omega)\} = \inf\{A(\psi + v) : v \in C_0^\infty(\Omega)\} \end{aligned}$$

◇

Definition 1.2 Sei $u \in W^{1,1}(\Omega)$ und $\phi \in W_0^{1,1}(\Omega)$. Betrachte die Funktion

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow A_{u;\phi}(t) := A(u + t\phi) \in \mathbb{R}.$$

Dann heißt

$$\delta A(u; \phi) := \frac{d}{dt} A_{u;\phi}(t)|_{t=0} = \int_{\Omega} \frac{DuD\phi}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx$$

die erste Variation von A in u und

$$\delta^2 A(u; \phi) := \frac{d^2}{dt^2} A_{u;\phi}(t)|_{t=0} = \int_{\Omega} \frac{(1 + |Du|^2)|D\phi|^2 - (DuD\phi)^2}{(1 + |Du|^2)^{3/2}} dx$$

die zweite Variation von A in u .

Anmerkung: Genauer bezeichnet $\delta A(u; \phi)$ die *Richtungsableitung* von A an der Stelle u in Richtung von ϕ . Die Existenz der Grenzwerte in der vorangehenden Definition folgt nach den Regeln über das Differenzieren unter dem Integralzeichen.

Bemerkung 1.3

1. Die zweite Variation von A ist positiv definit: Es gilt

$$\delta^2 A(u, \phi) \geq \int_{\Omega} \frac{|D\phi|^2 dx}{(1 + |Du|^2)^{3/2}} > 0 \quad \text{für } \phi \in W_0^{1,1}(\Omega) \setminus \{0\}.$$

2. Das Funktional A ist strikt konvex in $\{u \in W^{1,1}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = g\}$.

◇

Beweis: Teil 1 folgt aus der Schwarzischen Ungleichung. Für Teil 2 genügt es zu zeigen, dass zu je zwei verschiedenen Funktionen $u_0, u_1 \in W^{1,1}(\Omega)$ mit $u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} = g \in L^1(\partial\Omega)$ das Funktional A auf ihrer Verbindungsstrecke strikt konvex ist. Betrachte dazu die Funktion $[0, 1] \ni t \rightarrow f(t) := A_{u_0; \phi}(t)$ mit $\phi := u_1 - u_0 \in W_0^{1,1}(\Omega)$. Diese erfüllt die hinreichende Bedingung $f''(t) = \delta^2(A(u_0 + t\phi; \phi)) > 0$. \square

Folgerung:

Die Minimalflächenaufgabe (3) hat in $W^{1,1}(\Omega)$ höchstens ein Minimum. \diamond

Notwendige Bedingung für ein Minimum ist das Verschwinden der 1. Variation:

Bemerkung 1.4 Sei $u \in W^{1,1}(\Omega)$ Minimum von (3). Dann gilt $\delta A(u; \phi) = 0$ für alle $\phi \in W_0^{1,1}(\Omega)$, das heißt

$$(4) \quad \int_{\Omega} \frac{DuD\phi}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx = 0$$

für alle $\phi \in W_0^{1,1}(\Omega)$. Hinreichend hierfür ist, wenn (4) für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt.

Der Beweis folgt aus Definition 1.2. Die zweite Aussage folgt daraus, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht liegt in $W_0^{1,1}(\Omega)$.

Definition 1.5 Eine Funktion $u \in W^{1,1}(\Omega)$, welche der Bedingung (4) genügt, wird als Extremale (des Funktionals A) bezeichnet. Eine Extremale, die den Randdaten (2) mit einer vorgegebenen Funktion $g \in L^1(\partial\Omega)$ (im Sinne des Spuroperators) genügt, heißt schwache Lösung der Minimalflächenaufgabe.

Satz 1.6 Gegeben sei eine Funktion $g \in L^1(\partial\Omega)$. Die Funktion $u \in W^{1,1}(\Omega)$ erfülle die Randbedingung (2). Wenn u Extremale des Funktionals A ist, dann ist u das strikte absolute Minimum der Minimalflächenaufgabe (3).

Der Beweis folgt aus der strikten Konvexität von A auf der Menge aller Funktionen, welche der Randbedingung genügen.

Aufgrund dieses Sachverhalts und wegen Bemerkung 1.4 wird in der Literatur (vgl. Fučík, Nečas, Souček, [12]) auch ein solches Minimum von A , sofern es existiert, als schwache Lösung der Variationsaufgabe bezeichnet.

Satz 1.7 Sei $u \in W^{1,1}(\Omega)$ Extremale des Funktionals A , und u sei in Ω zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$(5) \quad \operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Der *Beweis* folgt aus (4) durch partielle Integration und Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung A.1.

Definition 1.8 Die Differentialgleichung (5) heißt Minimalflächengleichung.

1.2 Der Operator der mittleren Krümmung

Wir rufen folgende Definition, hier nur für spezielle quasilineare Operatoren, in Erinnerung:

Definition 1.9 Der Differentialoperator M zweiter Ordnung sei definiert durch

$$M[u] = \sum_{m,n=1}^N a_{m,n}(Du) D_{m,n}(u),$$

für alle in Ω zweimal differenzierbaren Funktionen u , wobei für alle $p \in \mathbb{R}^N$ die Matrix $A(p) := (a_{m,n}(p))$ symmetrisch sei.

Der Operator M heißt *elliptisch*, wenn $A(p)$ positiv definit für jedes $p \in \mathbb{R}^N$ ist, und *gleichmäßig elliptisch*, wenn M elliptisch ist und für jedes $p \in \mathbb{R}^N$ der Quotient aus maximalem Eigenwert $\lambda_{\max}(p)$ und minimalem Eigenwert $\lambda_{\min}(p)$ der Matrix $A(p)$ nach oben und von Null weg beschränkt ist, d.h. wenn es von p unabhängige Konstanten $0 < c < C$ gibt, so dass

$$(6) \quad c < \frac{\lambda_{\max}(p)}{\lambda_{\min}(p)} < C$$

gilt.

Es kann der Fall sein, dass der Operator M zwar nicht gleichmäßig elliptisch ist, dass aber eine gleichmäßige Elliptizitätsbedingung (6) in den Punkten $p = Du(x)$ für alle $x \in \Omega$ gilt. In diesem Falle heiße die Funktion u *gleichmäßig elliptisch* (bezüglich des Operators M).

Definition 1.10 Der durch

$$(7) \quad H[u] := \operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}$$

auf $C^2(\Omega)$ definierte Differentialoperator heißt Operator der mittleren Krümmung.

Der Operator $H[u]$ beschreibt die Summe der Hauptkrümmungen des Graphen von u über jedem Punkt von Ω .

Bemerkung 1.11

1. In expliziter Schreibweise gilt für alle $u \in C^2(\Omega)$

$$H[u] = \sum_{m,n=1}^N a_{m,n}(Du) D_{m,n}(u),$$

wobei die Koeffizientenmatrix $((a_{m,n}(p)))_{m,n=1}^N$ für $p \in \mathbb{R}^N$ durch

$$a_{m,n}(p) = \frac{(1 + |p|^2)\delta_{m,n} - p_m p_n}{(1 + |p|^2)^{3/2}}, \quad m, n = 1, \dots, N$$

definiert ist.

2. Die Matrix $((a_{m,n}(p)))_{m,n=1}^N$ ist für alle $p \in \mathbb{R}^N$ symmetrisch und positiv definit mit den Eigenwerten

$$\begin{aligned} \lambda_1(p) &= \lambda_{\min}(p) = (1 + |p|^2)^{-3/2}, \\ \lambda_2(p) &= \dots = \lambda_N(p) = \lambda_{\max}(p) = (1 + |p|^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

◇

Da $\frac{\lambda_{\max}(p)}{\lambda_{\min}(p)} = 1 + |p|^2$ für alle $p \in \mathbb{R}^N$, gilt insbesondere:

Bemerkung 1.12 Der Operator H ist elliptisch; die Koeffizientenmatrix der zweiten Ableitung ist nach oben beschränkt, aber der Operator ist nicht gleichmäßig elliptisch. ◇

Der Operator der mittlerem Krümmung kann auch deswegen nicht gleichmäßig elliptisch sein, weil andernfalls (zu hinreichend glatten Randdaten) klassische Lösungen existieren würden. Dies trifft jedoch nicht zu, wie das in Abschnitt 1.4 behandelte Beispiel der Kettenfläche zeigt.

1.3 Existenz klassischer Lösungen

Definition 1.13 *Unter einer klassischen Lösung der Minimalflächenaufgabe versteht man eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ der Minimalflächengleichung (5), welche die Randbedingung (2) erfüllt.*

Die Bedingungen, unter denen eine klassische Lösung existiert, wurden in der Arbeit [19] von Jenkins und Serrin aus dem Jahre 1968 weitgehend geklärt:

Satz 1.14

Der Rand $\partial\Omega$ des Grundgebietes Ω sei zweimal stetig differenzierbar, und es gelte $g \in C^2(\partial\Omega)$.

Ist die mittlere Krümmung (das arithmetische Mittel der Hauptkrümmungen) des Randes $\partial\Omega$ in keinem Punkt negativ, dann hat die Minimalflächenaufgabe genau eine klassische Lösung.

Andernfalls gibt es eine Konstante $B = B(\Omega, \|g\|_1, \|g\|_2) > 0$, welche von Ω und den Normen der Maxima der ersten und zweiten Ableitung von g auf dem Rand abhängt, so dass die Minimalflächenaufgabe eine klassische Lösung hat, sofern die Oszillation ω_g von g auf $\partial\Omega$ der Bedingung $\omega_g < B$ genügt.

Weiter ist in [19] ausgeführt, dass es, falls die mittlere Krümmung von $\partial\Omega$ an einer Stelle negativ ist, stets glatte Randdaten mit beliebig kleiner Maximumnorm gibt, zu denen keine klassische Lösung der Randwertaufgabe existiert.

Im zweidimensionalen Fall $N = 2$ ist die Bedingung, dass die mittlere Krümmung des Randes $\partial\Omega$ nicht negativ ist, gleichbedeutend zur Konvexität des Gebietes Ω .

Beispiel 1.15 Sei $N = 2$. Auf dem Einheitskreis

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

ist eine Lösung der Minimalflächenaufgabe unter der Randbedingung

$$u(x, y) = x^3 \quad \text{für } x^2 + y^2 = 1$$

gesucht.

Diese Aufgabe hat genau eine klassische Lösung. Der Graph einer numerischen Approximation ist in Abbildung 1 gezeichnet. Die Gradienten sind beschränkt.

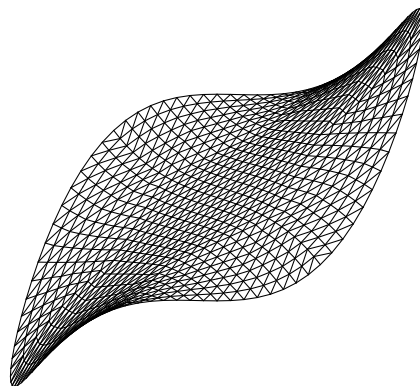


Abbildung 1: Minimalfläche über Einheitskreis, Randbed. $u(x, y) = x^3$

1.4 Das radialsymmetrische Beispiel

In diesem Abschnitt sei $N \geq 2$, und seien $r_1, r_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 < r_1 < r_2$. Hiermit sei Ω der „Kreisring“

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N : r_1 < |x| < r_2\}$$

und

$$g(x) := \begin{cases} B_1, & \text{falls } |x| = r_1 \\ B_2, & \text{falls } |x| = r_2 \end{cases}$$

Die Bedeutung der radialsymmetrischen Lösungen ergibt sich aus folgendem Sachverhalt:

Bemerkung 1.16 Ist die Funktion $u \in W^{1,1}(\Omega)$ eine Lösung der Minimalflächenaufgabe (3) unter radialsymmetrischen Randdaten, so ist u radialsymmetrisch in Ω . Als Funktion des Radius r aufgefasst, ist u im Intervall $(r_1, r_2]$ reell-analytisch und genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(8) \quad \left(\frac{r^{N-1} u'}{\sqrt{1 + (u')^2}} \right)' = 0$$

◇

Beweis: Sei u eine Lösung von (3). Ist T eine orthogonale $N \times N$ -Matrix, so ist der Wert des Flächeninhalts $A(u \circ T)$ des gemäß (1) definierten Funktionals A nach dem Transformationssatz für Lebesgue-Integrale gleich dem Wert von $A(u)$. Die Funktion $u \circ T$ erfüllt die gleichen Randbedingungen, ist daher ebenfalls Lösung von (3). Aufgrund der strikten Konvexität von A auf der Menge der zulässigen Funktionen ist dieses Minimum eindeutig, das heißt: $u \circ T = u$ in $W^{1,1}(\Omega)$. Da dies für alle orthogonalen linearen Abbildungen T gilt, muss die Funktion u in Ω f. ü. radialsymmetrisch sein.

Bezeichne allgemein für eine Funktion $v \in W^{1,1}(\Omega)$ in einer Parameterdarstellung $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$ die Funktion v_θ den $(N-1)$ -dimensionalen Vektor der tangentialen schwachen Ableitungen von v . Die Extremaleneigenschaft (4) bedeutet in Kugelkoordinaten

$$(9) \quad \int_{r_1}^{r_2} \left(\int_{|\theta|=1} \frac{u_r \varphi_r + u_\theta \varphi_\theta}{(1 + u_r^2 + |u_\theta|^2)^{1/2}} d^{(N-1)}\theta \right) r^{N-1} dr = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Aus der Radialsymmetrie von u folgt $u_\theta = 0$ und wegen der kanonischen Einbettung $C_0^\infty(r_1, r_2) \subset C_0^\infty(\Omega)$ die eindimensionale Variationsgleichung

$$(10) \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^{N-1} u' \varphi'}{(1 + (u')^2)^{1/2}} dr = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(r_1, r_2)$. Deshalb (vgl. Lemma A.2 des Anhangs) gibt es eine Konstante $c \geq 0$ derart, dass

$$(11) \quad \frac{r^{N-1}u'}{\sqrt{1+(u')^2}} = \text{sign}(B_2 - B_1) c^{N-1} \quad \text{f. ü. in } (r_1, r_2).$$

Wegen $r > 0$ hat die Ableitung u_r fast überall konstantes Vorzeichen, und dies ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gleich dem Vorzeichen von $B_2 - B_1$. Insbesondere gilt $c = 0$ genau dann, wenn die Funktion u konstant ist, was äquivalent ist zur Bedingung $B_1 = B_2$.

Gelte für das Weitere $c > 0$. Dann folgt aus (11) $c \leq r_1$ und

$$u'(r) = \frac{\text{sign}(B_2 - B_1)}{\sqrt{\left(\frac{r}{c}\right)^{2N-2} - 1}} \quad \text{f. ü. in } (r_1, r_2).$$

Nun ist für beliebiges $k = N - 1 \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^{2k} - 1}}$$

in jedem Intervall (a, b) mit $a \geq 1$ Lebesgue-integrierbar wegen

$$x^{2k} - 1 = (x^k + 1)(x^k - 1) = (x^k + 1)(x - 1) \sum_{j=0}^{k-1} x^j,$$

insbesondere auch im Fall $a = 1$. Durch Integration folgt daher

$$(12) \quad u(r) = B_1 + \text{sign}(B_2 - B_1) \int_{r_1}^r \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^{2N-2} - 1}}$$

für alle $r \in [r_1, r_2]$. Die Lösung ist also, wenn sie existiert, reell-analytisch im Intervall $(r_1, r_2]$, und genügt der Differentialgleichung (8). \square

Damit haben wir auch die folgende Aussage gezeigt:

Satz 1.17 *Existiert eine schwache radialsymmetrische Lösung $u = u(r)$ der Minimalflächenaufgabe, dann ist entweder u eine konstante Funktion, oder es gibt genau ein $c \in (0, r_1]$ derart, dass*

$$(13) \quad B_2 - B_1 = \pm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{r}{c}\right)^{2N-2} - 1}}$$

gilt. Die Lösung hat dann die Form (12).

Die Eindeutigkeit von c folgt aus der strengen Monotonie des Integrals in (13) als Funktion des Parameters c .

Folgerung: Es gibt eine schwache radialsymmetrische Lösung $u = u(r)$ der Minimalflächenaufgabe (3) genau dann, wenn

$$(14) \quad |B_2 - B_1| \leq r_1 \int_1^{r_2/r_1} \frac{dx}{\sqrt{x^{2N-2} - 1}}$$

gilt. Dann ist im Falle $B_1 = B_2$ die Funktion u konstant, oder es gibt genau ein $c \in (0, r_1]$ derart, dass u die Form

$$(15) \quad u(r) = B_1 + \text{sign}(B_2 - B_1) c \int_{r_1/c}^{r/c} \frac{dx}{\sqrt{x^{2N-2} - 1}}$$

für $r > r_1$ besitzt. ◇

Beweis: Falls es eine nicht konstante radialsymmetrische Lösung u gibt, so hat diese die Form (12) mit einem geeigneten $c \in (0, r_1]$. Durch Substitution folgt (15). Dann gilt auch (13), welches die Abschätzung

$$|B_2 - B_1| \leq \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_1}\right)^{2N-2} - 1}}$$

liefert. Durch Substitution erhält man (14).

Umgekehrt folgt aus der Bedingung (14) im Falle $B_1 \neq B_2$ die Existenz genau einer Zahl $c \in (0, r_1]$, derart dass Gleichung (12) und die Randbedingung $u(r_2) = B_2$ erfüllt sind. Die hierdurch definierte radialsymmetrische Funktion u gehört zum Raum $W^{1,1}(r_1, r_2)$, der eine kanonische Einbettung in $W^{1,1}(\Omega)$ besitzt, und ist Lösung von Gleichung (11) und damit auch der Variationsgleichung (10).

Sei $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Aus der Radialsymmetrie von u folgt $u_\theta = 0$ und damit

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} \left(\int_{|\theta|=1} \frac{u_r \varphi_r + u_\theta \varphi_\theta}{(1 + u_r^2 + |u_\theta|^2)^{1/2}} d^{(N-1)}\theta \right) r^{N-1} dr \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{u_r r^{N-1}}{(1 + u_r^2)^{1/2}} \left(\int_{|\theta|=1} \varphi d\theta \right)_r dr = 0, \end{aligned}$$

weil das letzte innere Integral eine Funktion in $C_0^\infty(r_1, r_2)$ ist. Damit ist Gleichung (9) erfüllt. Die Funktion u ist also Extremale des Funktionals A und nach Satz 1.6 die eindeutige Lösung der Minimalflächenaufgabe. □

Im zweidimensionalen Fall beschreiben die radialsymmetrischen Lösungen der Minimalflächenaufgabe Kettenflächen. Ihre radialen Profile sind Kettenlinien. Dieses Beispiel wird S. Bernstein (1912) zugeschrieben (vgl. [12]).

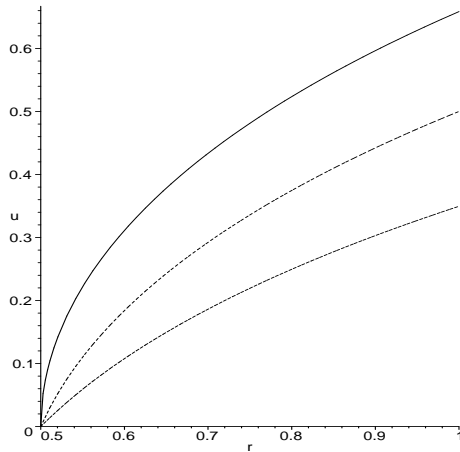


Abbildung 2: Klassische Lösungen u_c

Beispiel 1.18 Gelte $N = 2$. Im radialsymmetrischen Fall lautet die Minimalflächengleichung dann

$$\left(\frac{ru'}{\sqrt{1+(u')^2}} \right)' = 0.$$

Die zugehörige Randwertaufgabe hat eine nicht konstante schwache Lösung genau dann, wenn

$$0 < |B_2 - B_1| \leq r_1 \operatorname{arcosh}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

gilt. Die Lösung u ist radialsymmetrisch, stetig, möglicherweise mit Ausnahme von $r = r_1$ auf dem Intervall $[r_1, r_2]$ reell-analytisch und hat die Form

$$(16) \quad u(r) = u_c(r) := B_1 + \operatorname{sign}(B_2 - B_1) c \left[\operatorname{arcosh}(x) \right]_{x=r_1/c}^{x=r/c}$$

für $r \geq r_1$ mit einer durch die Randbedingungen eindeutig bestimmten Konstanten $c \in (0, r_1]$.

In den numerischen Beispielen verwenden wir $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 1$, da dies dem Kreisring im Raum \mathbb{R}^2 entspricht, der durch Ausschneiden eines Kreises vom Radius $\frac{1}{2}$ aus dem Einheitskreis entsteht.

Abbildung 2 zeigt die Graphen der Lösungen u_c zu $N = 2$ und $r_1 = 0.5$, $r_2 = 1$ mit Werten von $c = 0.4, 0.475, 0.5$. Die maximale klassische Lösung ist die mit $c = 0.5$.

Transformation: Für die Theorie genügt es, Lösungen auf dem Intervall $[1, 2]$ mit $B_1 = 0$, $B_2 := B > 0$ zu betrachten. Die Formeln werden dann besonders einfach. Bezeichnet u die Lösung in diesem Intervall, so lauten die Lösungen \tilde{u}

im Intervall $[r_1, r_2]$

$$(17) \quad \tilde{u}(r) = C \pm r_1 u\left(\frac{r}{r_1}\right),$$

wobei im Falle $r_2 > 2r_1$ die eindeutig existierende analytische Fortsetzung von u über die rechte Intervallgrenze hinaus zu wählen ist.

2 Viskositätslösungen

Im Fall, dass keine klassische Lösung der Minimalflächenaufgabe existiert, gibt es verallgemeinerte Lösungen der Randwertaufgabe, wenn man die Funktionswerte lediglich auf einem gewissen Teil des Randes vorschreibt (Relaxation). Verallgemeinerte Lösungen erhält man durch Regularisierung (Abschnitt 2.1) oder über Minimalfolgen (später in Abschnitt 3.1). In diesem Kapitel sei $N \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand.

2.1 Regularisierung am Beispiel des zweidimensionalen radialsymmetrischen Falls

Man betrachtet zu $\varepsilon > 0$ das regularisierte Problem

$$\begin{aligned} -H[u] - \varepsilon \Delta u &= 0 & \text{in } \Omega, \\ u(x) &= g(x) & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dies ist eine quasilineare, gleichmäßig elliptische Randwertaufgabe und hat für beliebige (hinreichend glatte) Randdaten eine klassische Lösung $u_\varepsilon \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (siehe [14]). Man betrachtet nun eine Schar $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ solcher Lösungen und findet für $\varepsilon \rightarrow 0$ durch einen geeigneten Grenzübergang eine Funktion $u \in C(\bar{\Omega})$, welche die Eigenschaften einer Viskositätslösung der Randwertaufgabe im Sinne von Crandall, Ishii und Lions (siehe [6], für den parabolischen Fall siehe auch: Kawohl/Kutev [22]) besitzt. Eine Viskositätslösung der Randwertaufgabe ist in der Regel eine Lösung der Differentialgleichung im Innern des Gebiets. Sie nimmt aber — im Falle des Dirichletproblems — auf dem Rand die vorgegebenen Daten zum Teil nicht mehr im klassischen Sinne an, sondern genügt dort einer allgemeineren Bedingung. Letztere hat zur Folge, dass ein Maximumprinzip anwendbar ist, aufgrund dessen man die Eindeutigkeit der Lösung erhält.

In diesem Abschnitt betrachten wir die Randwertaufgabe der Minimalflächengleichung im radialsymmetrischen Fall des \mathbb{R}^2

$$(18) \quad \left(\frac{xu'}{\sqrt{1+(u')^2}} \right)' = 0, \quad 0 < r_1 < x < r_2$$

mit den Randbedingungen

$$u(r_1) = B_1, \quad u(r_2) = B_2$$

für Konstanten $B_1, B_2 \in \mathbb{R}$. Zu einem kleinen Parameter $\varepsilon > 0$ betrachten wir die „regularisierte“ Gleichung

$$(19) \quad - \left(\frac{xu'_\varepsilon}{\sqrt{1+(u'_\varepsilon)^2}} \right)' - \varepsilon (xu'_\varepsilon)' = 0, \quad 0 < r_1 < x < r_2$$

mit den gleichen Randbedingungen

$$u_\varepsilon(r_1) = B_1, \quad u_\varepsilon(r_2) = B_2.$$

Die regularisierte Randwertaufgabe ist zu jedem $\varepsilon > 0$ aufgrund der gleichmäßigen Elliptizität der Gleichung eindeutig lösbar. Im Folgenden benutzen wir die in diesem Spezialfall gegebene Möglichkeit der direkten Integration.

Da in den Differentialgleichungen (18) und (19) nur Ableitungen der Funktion u auftreten, genügt es, die speziellen Randbedingungen

$$(20) \quad u(r_1) = 0, \quad u(r_2) = B$$

bzw.

$$(21) \quad u_\varepsilon(r_1) = 0, \quad u_\varepsilon(r_2) = B$$

mit einer fest gewählten Konstanten $B \in \mathbb{R}$ zu betrachten.

Durch Integration von (18) bzw. (19) erhält man die äquivalenten Gleichungen erster Ordnung:

Bemerkung 2.1

1. Die Funktion $u \in C([r_1, r_2])$ erfülle die Randbedingungen (20). Es ist genau dann $u \in C^2(r_1, r_2)$ und u Lösung von (18), wenn $u \in C^1(r_1, r_2)$ und es eine Konstante $c = c(r_1, r_2, B)$ gibt, derart dass

$$(22) \quad \frac{u'}{\sqrt{1 + (u')^2}} = \frac{c}{x} \quad \text{für } x \in (r_1, r_2)$$

gilt. Dann folgt $|c| \leq r_1$. Die beschriebene Lösung existiert genau dann, wenn $|B| \leq \operatorname{arcosh}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ gilt; sie hat dann die Form (16) mit $B_1 = 0$, $B_2 = B$.

2. Sei $\varepsilon > 0$, und die Funktion $u_\varepsilon \in C([r_1, r_2])$ erfülle die Randbedingungen (21). Es ist genau dann $u_\varepsilon \in C^2(r_1, r_2)$, und u_ε Lösung von (19), wenn $u_\varepsilon \in C^1(r_1, r_2)$ und es eine Konstante $c_\varepsilon = c(\varepsilon, r_1, r_2, B)$ gibt, derart dass u_ε Lösung der Gleichung

$$(23) \quad \frac{u'_\varepsilon}{\sqrt{1 + (u'_\varepsilon)^2}} + \varepsilon u'_\varepsilon = \frac{c_\varepsilon}{x} \quad \text{für } x \in (r_1, r_2)$$

ist. Es gibt zu beliebigem B genau eine Lösung u_ε mit den geforderten Eigenschaften. Diese ist durch die Konstante c_ε eindeutig bestimmt. Die Funktion u_ε ist reell-analytisch auf dem Intervall $[r_1, r_2]$.

3. Für die Lösungen u bzw. u_ε obiger Randwertaufgaben gelten für alle $x \in (r_1, r_2)$ die Beziehungen

$$(24) \quad \begin{aligned} \operatorname{sign}(u'(x)) &= \operatorname{sign}(u(x)) = \operatorname{sign}(c) = \operatorname{sign}(B) \\ &= \operatorname{sign}(u'_\varepsilon(x)) = \operatorname{sign}(u_\varepsilon(x)) = \operatorname{sign}(c_\varepsilon). \end{aligned}$$

◇

Beweis: Teil 1) folgt aus Beispiel (1.18), Teil 3) aus den Gleichungen 1. Ordnung. Teil 2) folgt aus elementarer Integration: Betrachte die Funktion

$$\mathbb{R} \ni p \rightarrow G_\varepsilon(p) := \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + \varepsilon p \in \mathbb{R}.$$

Diese ist streng monoton wachsend, surjektiv und reell-analytisch. Ihre Umkehrfunktion $G_\varepsilon^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat die gleichen Eigenschaften. Gleichung (23) lautet mit diesen Bezeichnungen

$$(25) \quad G_\varepsilon(u'_\varepsilon(x)) = \frac{c_\varepsilon}{x}, \quad x \in (r_1, r_2).$$

Damit gilt

$$u'_\varepsilon(x) = G_\varepsilon^{-1}\left(\frac{c_\varepsilon}{x}\right), \quad x \in (r_1, r_2)$$

und aufgrund der linksseitigen Randbedingung

$$(26) \quad u_\varepsilon(x) = \int_{r_1}^x G_\varepsilon^{-1}\left(\frac{c_\varepsilon}{y}\right) dy, \quad x \in (r_1, r_2).$$

Nun ist die Funktion

$$\mathbb{R} \ni c \rightarrow \int_{r_1}^{r_2} G_\varepsilon^{-1}\left(\frac{c}{y}\right) dy =: B_\varepsilon(c) \in \mathbb{R}$$

streng monoton wachsend, $B_\varepsilon(0) = 0$, und $B_\varepsilon(c) \rightarrow \pm\infty$ für $c \rightarrow \pm\infty$. Daher gibt es aus Stetigkeitsgründen genau ein $c =: c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ derart, dass $B_\varepsilon(c_\varepsilon) = B$ gilt. Die Funktion u_ε gemäß (26) zu diesem c_ε ist die Lösung von (23) mit (21).

Aufgrund dieser Bemerkung kann o. B. d. A. die Konstante $B \geq 0$ gewählt werden (andernfalls ersetze man u durch $-u$). Um die triviale Lösung auszuschließen, verlangen wir zusätzlich $B > 0$.

Folgerung: Ist $B > 0$, so ist für $\varepsilon > 0$ die Ableitung u'_ε der gemäß Bemerkung 2.1 definierten Funktion u_ε positiv und streng monoton fallend; insbesondere ist u_ε streng monoton wachsend. ◇

Beweis: Nach Aussage 3.) von Bemerkung 2.1 gilt $c_\varepsilon > 0$ und $u'_\varepsilon(x) > 0$ für $x \in [r_1, r_2]$. Daher ist die linke Seite von (25) eine streng monoton fallende Funktion der Variablen x . Da die Funktion G_ε streng monoton steigend ist, muss u'_ε streng monoton fallend sein.

Im Folgenden untersuchen wir den Grenzwert der Lösungen u_ε für $0 < \varepsilon \rightarrow 0$.

Lemma 2.2 *Es gelte $B > 0$. Seien $0 < \delta < \varepsilon$. Bezeichne u_δ, u_ε die zugehörigen Lösungen von (23), (21), und c_δ, c_ε die entsprechenden positiven Konstanten. Dann gilt $c_\delta < c_\varepsilon$.*

Beweis: Zunächst zeigen wir

$$G_\delta^{-1}(q) > G_\varepsilon^{-1}(q) \quad \text{für alle } q > 0.$$

Denn andernfalls gäbe es ein $q > 0$ mit

$$0 < p_\delta := G_\delta^{-1}(q) \leq G_\varepsilon^{-1}(q) =: p_\varepsilon,$$

woraus wegen der Monotonie von G_δ und wegen $p_\varepsilon > 0$ der Widerspruch

$$q = G_\delta(p_\delta) \leq G_\delta(p_\varepsilon) < G_\varepsilon(p_\varepsilon) = q$$

folgte.

Damit gilt

$$B = \int_{r_1}^{r_2} G_\delta^{-1}\left(\frac{c_\delta}{x}\right) dx > \int_{r_1}^{r_2} G_\varepsilon^{-1}\left(\frac{c_\delta}{x}\right) dx.$$

Aus $c_\delta \geq c_\varepsilon$ folgte nun der Widerspruch

$$B > \int_{r_1}^{r_2} G_\varepsilon^{-1}\left(\frac{c_\delta}{x}\right) dx \geq \int_{r_1}^{r_2} G_\varepsilon^{-1}\left(\frac{c_\varepsilon}{x}\right) dx = B.$$

Also gilt $c_\delta < c_\varepsilon$. □

Anmerkung: Obige Aussage gilt auch im Grenzfall „ $\delta = 0$ “, genauer: Falls $B > 0$ gilt und eine stetige Lösung u von (22), (20) mit $c > 0$ existiert, dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$, wenn u_ε Lösung von (23), (21) mit der Konstanten c_ε ist, $c < c_\varepsilon$. Der Beweis erfolgt wie oben.

Wir zeigen eine grobe Abschätzung für c_ε :

Bemerkung 2.3 *Es gelte $B > 0$. Dann gilt für $\varepsilon > 0$*

$$0 < c_\varepsilon < r_2 \left(1 + \frac{\varepsilon B}{r_2 - r_1}\right).$$

◇

Beweis: Es wurde schon $c_\varepsilon > 0$ gezeigt. Damit folgt aus

$$B = \int_{r_1}^{r_2} G_\varepsilon^{-1}\left(\frac{c_\varepsilon}{x}\right) dx > (r_2 - r_1)G_\varepsilon^{-1}\left(\frac{c_\varepsilon}{r_2}\right)$$

nach Definition von G_ε sofort

$$1 + \varepsilon \frac{B}{r_2 - r_1} > G_\varepsilon\left(\frac{B}{r_2 - r_1}\right) > \frac{c_\varepsilon}{r_2}.$$

Satz 2.4 *Es gelte $B > 0$. Bezeichne zu $\varepsilon > 0$ jeweils u_ε die Lösung von (23), (21) mit der Konstanten c_ε gemäß Bemerkung 2.1, Teil 2. Dann gibt es ein $c \in (0, r_1]$, so dass $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} c_\varepsilon = c$. Es gilt $c < r_1$ genau dann, wenn*

$$(27) \quad B < r_1 \operatorname{arcosh}\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Definiere für $x \in [r_1, r_2]$ die Funktion u durch $u(x) := c[\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{c}\right) - \operatorname{arcosh}\left(\frac{r_1}{c}\right)]$, falls (27) gilt, und andernfalls $u(x) := r_1 \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{r_1}\right) + B - r_1 \operatorname{arcosh}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

1. *Wenn (27) gilt, dann ist die Funktion u auf dem Intervall $[r_1, r_2]$ reell-analytische Lösung von (22), (20). Es gilt $u'_\varepsilon(x) \rightarrow u'(x)$ und $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, jeweils gleichmäßig im Intervall $[r_1, r_2]$.*
2. *Wenn (27) nicht gilt, dann ist u eine im abgeschlossenen Intervall $[r_1, r_2]$ stetige Funktion, die im halboffenen Intervall $(r_1, r_2]$ reell-analytische Lösung von (22) ist. Es gilt $u'_\varepsilon(x) \rightarrow u'(x)$ und $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$ für $\varepsilon \rightarrow 0+$, jeweils gleichmäßig in jedem Teilintervall $[r_1 + \delta, r_2]$ mit $0 < \delta < r_2 - r_1$. Die Funktion u erfüllt die Randbedingung $u(r_2) = B$; sie erfüllt die Randbedingung $u(r_1) = 0$ genau dann, wenn in (27) Gleichheit gilt.*

Zu $r_1 = 0.5$, $r_2 = 1$, $B = 1$ zeigt Abbildung 3 die Graphen der Funktionen u_ε für $\varepsilon = 0.02, 0.005, 0.0008$ und der Viskositätslösung u .

Beweis: Aus Lemma 2.2 folgt, dass die Funktion $(0, \infty) \ni \varepsilon \rightarrow c_\varepsilon \in (0, \infty)$ streng monoton wachsend ist. Daher existiert der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} c_\varepsilon = c$, und es

gilt $c \geq 0$. Aus der Annahme $c = 0$ würde mit Gleichung (23) wegen (24) folgen, dass $u'_\varepsilon(x)$ im Intervall (r_1, r_2) gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Dies hätte $B = 0$ zur Folge, weil dann $B = \int_{r_1}^{r_2} u'_\varepsilon(x) dx$ gegen 0 streben müsste für $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Sei nun angenommen, es gelte $c > r_1$. Wähle $\delta := \min\{\frac{1}{2}(c - r_1), r_2 - r_1\}$.

Für $r_1 < x < r_1 + \delta$ gilt mit einem $\alpha > 0$

$$\frac{c}{x} > \frac{c}{r_1 + \delta} \geq \frac{c}{\frac{1}{2}(r_1 + c)} =: 1 + \alpha.$$

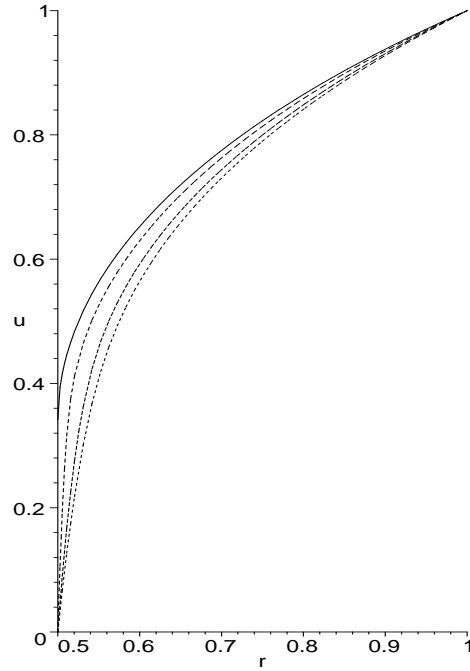


Abbildung 3: Lösungen u_ε und Viskositätslösung u

Dann folgt für $\varepsilon > 0$ und für obige x mit den Bezeichnungen von Bemerkung 2.1 über (23) die Ungleichung

$$1 + \varepsilon u'_\varepsilon(x) > G_\varepsilon(u'_\varepsilon(x)) = \frac{c_\varepsilon}{x} > \frac{c}{x} > 1 + \alpha.$$

Das bedeutet

$$u'_\varepsilon(x) > \frac{\alpha}{\varepsilon} \quad \text{für } r_1 < x < r_1 + \delta$$

in Widerspruch zu $\int_{r_1}^{r_1+\delta} u'_\varepsilon(x) dx < \int_{r_1}^{r_2} u'_\varepsilon(x) dx = B$.

Falls $c < r_1$, so definiere die Funktion u wie im 1. Fall der Behauptung. Bezeichne G die streng monoton wachsende Funktion

$$(0, \infty) \ni p \rightarrow \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \in (0, 1).$$

Sei $c < c' < r_1$. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $c_\varepsilon < c'$ für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Aus Gleichung (23) folgt die Ungleichung $G_\varepsilon(u'_\varepsilon(x)) \leq \frac{c'}{r_1} < 1$ für alle $x \in [r_1, r_2]$ und alle $\varepsilon < \varepsilon_0$. Daher sind die Ableitungen $u'_\varepsilon(x)$ auf dem Intervall $[r_1, r_2]$ gleichmäßig für alle obigen ε beschränkt. Wegen (23) und $c_\varepsilon \rightarrow c < r_1$ konvergieren sie gleichmäßig gegen die Lösung von (22). Dies ist gerade die Ableitung u' . Da $u(r_1) = u_\varepsilon(r_1) = 0$ für jedes ε , konvergieren die Funktionen u_ε im Intervall $[r_1, r_2]$ gleichmäßig gegen die Funktion u . Aus $u_\varepsilon(r_2) = B$ für jedes ε folgt nun $u(r_2) = B$.

Nun folgt (27) aus der Beziehung

$$B = u(r_2) = c \left[\operatorname{arcosh} \left(\frac{x}{c} \right) \right]_{r_1}^{r_2} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{c}\right)^2 - 1}} < \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{r_1}\right)^2 - 1}}.$$

Gelte umgekehrt (27). Angenommen, es sei $c = r_1$. Dann folgte $c_\varepsilon > r_1$ für jedes $\varepsilon > 0$, und es gälte

$$B = \int_{r_1}^{r_2} G_\varepsilon^{-1} \left(\frac{c_\varepsilon}{x} \right) dx > \int_{r_1}^{r_2} G_\varepsilon^{-1} \left(\frac{r_1}{x} \right) dx.$$

Für $0 < q < 1$ und $0 < \varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert nun $G_\varepsilon^{-1}(q)$ monoton steigend gegen $G^{-1}(q)$ (vgl. Beweis von Lemma 2.2). Hieraus folgte die Konvergenz von $\int_{r_1}^{r_2} G_\varepsilon^{-1} \left(\frac{r_1}{x} \right) dx$ für $0 < \varepsilon \rightarrow 0$ gegen $\int_{r_1}^{r_2} G^{-1} \left(\frac{r_1}{x} \right) dx = r_1 \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$, und damit der Widerspruch $B \geq r_1 \operatorname{arcosh} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$. Mit dem zuvor Gezeigten ist damit auch Aussage 1. bewiesen.

Zu 2.: Es gelte nicht (27). Dann folgt $c = r_1$. Sei $0 < \delta < r_2 - r_1$. Wähle $\eta > 0$ so, dass $c_\eta < r_1 + \delta$. Dann folgt für $x \in [r_1 + \delta, r_2]$ und $0 < \varepsilon < \eta$ aus (23) unter Beachtung von

$$\frac{c_\varepsilon}{x} < \frac{c_\eta}{x} \leq \frac{c_\eta}{r_1 + \delta} < 1$$

wie im ersten Teil des Beweises, dass die zugehörigen Werte der Ableitungen $u'_\varepsilon(x)$ gleichmäßig beschränkt sind, und damit die gleichmäßige Konvergenz von $u'_\varepsilon(x)$ und von $u_\varepsilon(x)$ im Intervall $[r_1 + \delta, r_2]$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

2.2 Viskositätslösungen

Im Folgenden sind die Definitionen nach Crandall, Ishii und Lions [6] aufgeführt. Eine Einführung in das Thema enthält der Artikel von Crandall [7], neuere Ergebnisse findet man in Arbeiten von Horstmann [18] und Kawohl/Kutev [23]. Sei $N \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Teilmenge. Es bezeichne \mathcal{S}_N die Menge der symmetrischen reellen $N \times N$ -Matrizen. Für $X, Y \in \mathcal{S}_N$ schreiben wir $X \leq Y$ genau dann, wenn $(Xz, z) \leq (Yz, z)$ für alle $z \in \mathbb{R}^N$ gilt.

Für eine $N \times N$ -Matrix X bezeichne $\operatorname{tr}(X)$ die *Spur* von X .

Wir betrachten Funktionen $u: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^N$, wobei im Allgemeinen $\Omega \subset \mathcal{O} \subset \bar{\Omega}$ gelte.

Definition 2.5 Sei $\emptyset \neq \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ lokal-kompakt, $u: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{O}$.

Für $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ gelte $(p, X) \in J_{\mathcal{O}}^{2,+} u(x) : \iff$

$$u(y) \leq u(x) + (p, y - x) + \frac{1}{2} (X(y - x), y - x) + o(|y - x|^2) \text{ für } \mathcal{O} \ni y \rightarrow x.$$

Die Menge $J_{\mathcal{O}}^{2,+}u(x)$ heißt Superjet (2. Ordnung) von u in x . Bezeichne

$$J_{\mathcal{O}}^{2,-}u(x) := -J_{\mathcal{O}}^{2,+}(-u)(x)$$

den Subjet (2. Ordnung) von u in x .

Bemerkung 2.6 Es gelten die Voraussetzungen von Definition 2.5. Sei x innerer Punkt von \mathcal{O} und u in x zweimal differenzierbar. Für $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ gilt dann:

$$\begin{aligned} (p, X) \in J_{\mathcal{O}}^{2,+}u(x) &\iff p = Du(x), X \geq D^2u(x), \\ (p, X) \in J_{\mathcal{O}}^{2,-}u(x) &\iff p = Du(x), X \leq D^2u(x). \end{aligned}$$

◇

Der *Beweis* folgt aus der Definition mit dem Satz von Taylor.

Die Funktion F , welche allgemein eine Differentialgleichung 2. Ordnung

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$$

beschreibt, habe (Forderung der „Elliptizität“) folgende Monotonieeigenschaften:

Definition 2.7 Sei $\emptyset \neq \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ lokal-kompakt und F eine Funktion

$$F : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N \rightarrow \mathbb{R}.$$

F heißt *proper genau dann*, wenn für alle $x \in \mathcal{O}$, $r, s \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^N$ und $X, Y \in \mathcal{S}_N$ gilt:

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, Y), \text{ wenn } r \leq s \text{ und } Y \leq X.$$

Definition 2.8 Sei $\emptyset \neq \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ lokal-kompakt, und sei

$$F : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N \rightarrow \mathbb{R}$$

proper und stetig. Sei $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ist die Funktion u oberhalbstetig, so heißt u Viskositätsunterlösung der Differentialgleichung $F = 0$ oder einfach Viskositätslösung von $F \leq 0$ genau dann, wenn

$$(28) \quad F(x, u(x), p, X) \leq 0$$

für alle $x \in \mathcal{O}$ mit $(p, X) \in J_{\mathcal{O}}^{2,+}u(x)$ gilt.

Ist die Funktion u unterhalbstetig, so heißt u Viskositätsüberlösung der Differentialgleichung $F = 0$ oder einfach Viskositätslösung von $F \geq 0$ genau dann, wenn

$$(29) \quad F(x, u(x), p, X) \geq 0$$

für alle $x \in \mathcal{O}$ mit $(p, X) \in J_{\mathcal{O}}^{2,-}u(x)$ gilt.

Ist die Funktion u stetig, so heißt u Viskositätslösung der Differentialgleichung $F = 0$ genau dann, wenn u Viskositätsunter- und Viskositätsüberlösung der Differentialgleichung $F = 0$ ist.

Bemerkung 2.9 Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und die Funktion

$$F: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N \rightarrow \mathbb{R}$$

proper und stetig. Ist die Funktion u in Ω zweimal differenzierbar und gilt

$$(30) \quad F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \text{ für alle } x \in \Omega,$$

dann ist u Viskositätslösung der Differentialgleichung $F = 0$. ◇

Der *Beweis* folgt aus Bemerkung 2.6 und der Eigenschaft, dass die Funktion F „proper“ ist.

Für die Definition schwacher Viskositätslösungen der Randwertaufgabe benötigt man eine Art „Abschluss“ von Super- und Subjet.

Definition 2.10 Sei $\emptyset \neq \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ lokal-kompakt, $u: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{O}$.

Für $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ gelte

$(p, X) \in \bar{J}_{\mathcal{O}}^{2,+}u(x) : \iff$ es gibt Folgeelemente $(x_n, p_n, X_n) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ derart, dass $(p_n, X_n) \in J_{\mathcal{O}}^{2,+}u(x_n)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, u(x_n), p_n, X_n) = (x, u(x), p, X)$.

Entsprechend sei definiert

$(p, X) \in \bar{J}_{\mathcal{O}}^{2,-}u(x) : \iff$ es gibt Folgeelemente $(x_n, p_n, X_n) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ derart, dass $(p_n, X_n) \in J_{\mathcal{O}}^{2,-}u(x_n)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, u(x_n), p_n, X_n) = (x, u(x), p, X)$.

Definition 2.11 Sei $\emptyset \neq \Omega$ offene Teilmenge des \mathbb{R}^N und die Funktion

$$F: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N \rightarrow \mathbb{R}$$

proper und stetig; ferner sei eine stetige Funktion

$$g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Eine oberhalbstetige Funktion u auf $\bar{\Omega}$ heißt schwache Viskositätsunterlösung der Randwertaufgabe

$$(31) \quad F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(32) \quad u(x) = g(x) \quad \text{in } \partial\Omega$$

genau dann, wenn (28) gilt für $x \in \Omega$, $(p, X) \in \bar{J}_{\Omega}^{2,+}u(x)$, und wenn u der verallgemeinerten Randbedingung

$$(33) \quad \min\{F(x, u(x), p, X), u(x) - g(x)\} \leq 0$$

für $x \in \partial\Omega$, $(p, X) \in \bar{J}_{\Omega}^{2,+}u(x)$ genügt.

Analog heißt eine unterhalbstetige Funktion u auf $\bar{\Omega}$ schwache Viskositätsüberlösung der Randwertaufgabe (31), (32) genau dann, wenn (29) gilt für $x \in \Omega$, $(p, X) \in \bar{J}_{\Omega}^{2,-}u(x)$, und wenn u der verallgemeinerten Randbedingung

$$(34) \quad \max\{F(x, u(x), p, X), u(x) - g(x)\} \geq 0$$

für $x \in \partial\Omega$, $(p, X) \in \bar{J}_{\Omega}^{2,-}u(x)$ genügt.

Eine stetige Funktion u auf $\bar{\Omega}$ heißt schwache Viskositätslösung der Randwertaufgabe (31), (32) genau dann, wenn u schwache Viskositätsunter- und -überlösung dieser Randwertaufgabe ist.

Im klassischen Fall stimmen Super- bzw. Subjet mit ihrem jeweiligen „Abschluss“ überein:

Bemerkung 2.12 Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ offene Menge und die Funktion u in Ω zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt für jedes $x \in \Omega$

$$\bar{J}_{\Omega}^{2,+}u(x) = J_{\Omega}^{2,+}u(x) \quad \text{und} \quad \bar{J}_{\Omega}^{2,-}u(x) = J_{\Omega}^{2,-}u(x).$$

◇

Beweis: Da Ω offene Menge ist, gilt $J_{\Omega}^{2,+}u(x) = \bar{J}_{\Omega}^{2,+}u(x)$ für jedes $x \in \Omega$.

Sei $x \in \Omega$. Wir zeigen o.B.d.A. $\bar{J}_{\Omega}^{2,+}u(x) = J_{\Omega}^{2,+}u(x)$.

Die Inklusion $J_{\Omega}^{2,+}u(x) \subset \bar{J}_{\Omega}^{2,+}u(x)$ ersieht man durch Betrachten konstanter Folgen. Sei nun $(p, X) \in \bar{J}_{\Omega}^{2,+}u(x)$. Dann gibt es eine Folge $(x_n, p_n, X_n) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ derart, dass $(p_n, X_n) \in J_{\Omega}^{2,+}u(x_n)$ gilt und $(x_n, u(x_n), p_n, X_n)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $(x, u(x), p, X)$ konvergiert. Da x innerer Punkt von Ω ist, dürfen wir, eventuell nach Übergang zu einer Teilfolge, $x_n \in \Omega$ für $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Dann

gilt auch $(p_n, X_n) \in J_{\Omega}^{2,+}u(x_n)$, und nach Bemerkung 2.6 folgt $p_n = Du(x_n)$, $X_n \geq D^2u(x_n)$. Mit der Stetigkeit der Ableitungen erhält man $p = Du(x)$ und $X \geq D^2u(x)$. Dies bedeutet wiederum nach obiger Bemerkung $(p, X) \in J_{\Omega}^{2,+}u(x)$. \square

Hieraus folgt sofort:

Satz 2.13 *Es gelten die Voraussetzungen von Definition 2.11. Die Funktion $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ sei klassische Lösung der Differentialgleichung (30). Dann ist u Viskositätsunterlösung (bzw. -oberlösung) der Randwertaufgabe (31), (32) genau dann, wenn für alle $x \in \partial\Omega$ und $(p, X) \in \bar{J}_{\Omega}^{2,+}u(x)$ (bzw. $(p, X) \in \bar{J}_{\Omega}^{2,-}u(x)$) Ungleichung (33) (bzw. (34)) erfüllt ist. Die Funktion u ist Viskositätslösung der Randwertaufgabe genau dann, wenn beide Ungleichungen gelten.*

Eine Funktion F zur Minimalflächengleichung wird in der folgenden Bemerkung eingeführt.

Bemerkung 2.14 Definiere für $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ die Funktion F durch

$$(35) \quad F(p, X) = -(1 + |p|^2) \operatorname{tr}(X) + (Xp, p).$$

Dann ist F proper und stetig. Die Minimalflächengleichung (5) lautet hiermit

$$F(Du(x), D^2u(x)) = 0.$$

\diamond

Beweis: Die Eigenschaft, dass F eine Funktion zur Minimalflächengleichung ist, ersieht man aus Bemerkung 1.11. Es bleibt zu zeigen, dass F „proper“ ist: Seien $p \in \mathbb{R}^N$, $X, Y \in \mathcal{S}_N$ mit $X \leq Y$. Es gilt

$$\begin{aligned} F(p, X) - F(p, Y) &= -(1 + |p|^2) \operatorname{tr}(X - Y) + ((X - Y)p, p) \\ &= \operatorname{tr}(Z) + |p|^2 \operatorname{tr}(Z) - (Zp, p), \end{aligned}$$

wobei $Z := Y - X \in \mathcal{S}_N$ mit $Z \geq 0$. Sei $\{e_j\}_{j=1}^N$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von Z . Bezeichne $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ die zugehörigen Eigenwerte. Dann gilt $\lambda_j \geq 0$ für $j = 1, \dots, N$. Entwickle p nach den Eigenvektoren:

$$p = \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j \quad \text{mit} \quad \alpha_j = (p, e_j).$$

Hiermit erhält man

$$\begin{aligned} |p|^2 \operatorname{tr}(Z) - (Zp, p) &= |p|^2 \sum_{j=1}^N \lambda_j - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \lambda_j e_j, \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^N (|p|^2 - (p, e_j)^2) \lambda_j \geq 0 \end{aligned}$$

nach Eigenschaft der e_j und λ_j . Da $\operatorname{tr}(Z) \geq 0$, folgt $F(p, Y) \leq F(p, X)$. \square

Sei $\mathbb{N} \ni N \geq 2$. Eine Funktion F für die radialsymmetrische Minimalflächengleichung findet man durch Ausdifferenzieren von (8). Es gilt offensichtlich:

Beispiel 2.15 *Bezeichne*

$$(36) \quad F(x, p, X) := -xX - (N-1)(1+p^2)p$$

für $x > 0$ und $p, X \in \mathbb{R}$ (die Koordinate x steht hier für den Radius, und p, X für die rein radialen Ableitungen 1. und 2. Ordnung). Die Funktion F ist proper und stetig. Die radialsymmetrische Form (8) der Minimalflächengleichung lautet damit

$$(37) \quad F(x, u', u'') = 0.$$

Wir betrachten den radialsymmetrischen Fall der Minimalflächengleichung aus Abschnitt 1.4 o.B.d.A. mit den Daten $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $B_1 = 0$, $B := B_2 > 0$. Es existiert genau dann eine schwache Lösung von (8), wenn $B \leq \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^{2N-2}-1}}$ gilt.

Diese ist dann auch klassische Lösung und sogar reell-analytisch zumindest im Intervall $(1, 2]$. Es existiert jedoch stets eine Viskositätslösung der Randwertaufgabe im schwachen Sinne:

Bemerkung 2.16 Sei $B > \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^{2N-2}-1}}$. Dann ist die Funktion

$$u(x) := B - \int_x^2 \frac{dy}{\sqrt{y^{2N-2}-1}}$$

im schwachen Sinne Viskositätslösung der Randwertaufgabe von Beispiel 2.15 unter den Randbedingungen $u(1) = 0$, $u(2) = B$. (Die linksseitige Randbedingung ist offenbar nicht im klassischen Sinne erfüllt). \diamond

Beweis: Da $u \in C([1, 2]) \cap C^2(1, 2)$ klassische Lösung der Differentialgleichung (37) ist, genügt laut Satz 2.13 die Verifizierung der Randbedingungen im schwachen Viskositätssinne. Im Einzelnen ist zu zeigen:

1. für alle $(p, X) \in \bar{J}_{[1,2]}^{2,+}u(1)$ gilt (33);
2. für alle $(p, X) \in \bar{J}_{[1,2]}^{2,-}u(1)$ gilt (34);
3. für alle $(p, X) \in \bar{J}_{[1,2]}^{2,+}u(2)$ gilt (33);
4. für alle $(p, X) \in \bar{J}_{[1,2]}^{2,-}u(2)$ gilt (34).

Zu 1): Es gilt $\bar{J}_{[1,2]}^{2,+}u(1) = \emptyset$ und damit die Teilbehauptung: Sei angenommen, es gebe $(p, X) \in \bar{J}_{[1,2]}^{2,+}u(1)$. Dann gibt es eine Folge $(x_n, p_n, X_n) \in [1, 2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, so dass $(p_n, X_n) \in J_{[1,2]}^{2,+}u(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, u(x_n), p_n, X_n) = (1, u(1), p, X)$ gilt. Zunächst zeigen wir, dass die Annahme $x_n > 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ zu einem Widerspruch führt:

Da die Funktion u im offenen Intervall $(1, 2)$ zweimal differenzierbar ist, folgt mit Bemerkung 2.6 insbesondere $p_n = u'(x_n)$ für diese Folgenglieder und damit für eine unendliche Teilfolge (n_k) die Aussage $\lim_{k \rightarrow \infty} u'(x_{n_k}) = p \in \mathbb{R}$. Dies steht in Widerspruch zu

$$(38) \quad \lim_{x \rightarrow 1+} u'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{\sqrt{x^{2N-2} - 1}} = \infty.$$

Also muss $x_n = 1$ für alle bis auf endlich viele, zumindest aber für ein $n \in \mathbb{N}$ gelten. Sei ein solches n gewählt. Dann gilt $(p_n, X_n) \in J_{[1,2]}^{2,+}u(1)$. Unter Vernachlässigung der Terme 2. Ordnung folgt

$$u(x) \leq u(1) + p_n(x - 1) + o(x - 1) \quad \text{für } x \rightarrow 1+.$$

Hieraus würde folgen, dass der Quotient $\frac{u(x) - u(1)}{x - 1}$ für $x > 1$ beschränkt bleibt. Dies steht aber in Widerspruch zu (38). Daher kann nur $\bar{J}_{[1,2]}^{2,+}u(1) = \emptyset$ gelten.

Zu 2): Wir zeigen: $\bar{J}_{[1,2]}^{2,-}u(1) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Hieraus folgt insbesondere $\bar{J}_{[1,2]}^{2,-}u(1) \neq \emptyset$. Für $(p, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt

$$\max\{F(1, p, X), u(1) - 0\} \geq u(1) = B - \int_1^2 \frac{dy}{\sqrt{y^{2N-2} - 1}} \geq 0$$

nach Eigenschaft von B , was (34) beinhaltet. Sei also $(p, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die geforderte Eigenschaft lautet

$$u(x) \geq u(1) + p(x - 1) + \frac{1}{2}X(x - 1)^2 + o((x - 1)^2) \quad \text{für } x \rightarrow 1+.$$

Aufgrund von (38) folgt dies aus

$$\frac{u(x) - u(1)}{x - 1} \geq p + \frac{1}{2}X(x - 1)$$

für alle x in einer hinreichend kleinen rechtsseitigen punktierten Umgebung von 1. Zu 3): Zunächst hat die Funktion u eine reell-analytische Fortsetzung über 2 hinaus (hier genügen die erste und die zweite linksseitige Ableitung). Es gilt

$(u'(2), u''(2)) \in J_{[1,2]}^{2,p}u(2) \subset \bar{J}_{[1,2]}^{2,+}u(2)$. Damit ist $\bar{J}_{[1,2]}^{2,+}u(2) \neq \emptyset$, und es folgt für beliebiges $(p, X) \in \bar{J}_{[1,2]}^{2,+}u(2)$ die behauptete Ungleichung wegen

$$\min\{F(2, p, X), u(2) - g(2)\} \leq u(2) - g(2) = B - B = 0.$$

Zu 4): Es gilt für $(p, X) \in \bar{J}_{[1,2]}^{2,-}u(2)$ die Ungleichung

$$\max\{F(2, p, X), u(2) - g(2)\} \geq u(2) - g(2) = B - B = 0.$$

Bemerkung 2.16 ist ein Spezialfall eines allgemeineren Sachverhalts. Der Begriff der schwachen Viskositätslösung (Unter-, -Oberlösung) einer Randwertaufgabe ist stabil gegenüber den folgenden Grenzwertbildungen:

Definition 2.17 Für eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oberhalbstetiger Funktionen auf $\bar{\mathcal{O}}$ und $z \in \bar{\mathcal{O}}$ bezeichne

$$\limsup_{n \rightarrow \infty}^* u_n(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{u_j(y) : j \geq n, y \in \mathcal{O}, 0 < |y - z| \leq \frac{1}{n}\};$$

für eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unterhalbstetiger Funktionen auf $\bar{\mathcal{O}}$ und $z \in \bar{\mathcal{O}}$ bezeichne

$$\liminf_{n \rightarrow \infty}^* u_n(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{u_j(y) : j \geq n, y \in \mathcal{O}, 0 < |y - z| \leq \frac{1}{n}\}.$$

Wir notieren ohne Beweis:

Bemerkung 2.18 Ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge schwacher Viskositätslösungen der Randwertaufgabe, und gilt in $\bar{\mathcal{O}}$ $\limsup_{n \rightarrow \infty}^* u_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty}^* u_n(x) =: u(x) \in \mathbb{R}$, so ist u schwache Viskositätslösung der Randwertaufgabe. \diamond

Damit folgt aus Satz 2.4 nochmals:

Satz 2.19 Sei $B > 0$. Dann existiert für positive Folgen $\varepsilon_n \rightarrow 0+$ der Grenzwert $u(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty}^* u_{\varepsilon_n}(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty}^* u_{\varepsilon_n}(x)$ und ist die eindeutig bestimmte Lösung der Randwertaufgabe

$$\left(\frac{x u'}{\sqrt{1 + u'^2}}\right)' = 0, \quad u(1) = 0, u(2) = B$$

im Sinne einer schwachen Viskositätslösung.

3 Schwache Lösungen und Ritz-Galerkin-Approximation

In diesem Abschnitt werden bekannte Resultate ohne Beweis zusammengestellt. Sei $N \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$. Ausgehend von den schwachen Lösungen, approximiert man das kontinuierliche Modell durch ein diskretes Modell, welches durch eine endliche Anzahl von Parametern beschrieben wird.

3.1 Schwache Lösungen

Satz 3.1 *Jede klassische Lösung der Minimalflächenaufgabe, d. h. jede Lösung von (5) mit (2) in $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ist schwache Lösung (d. h. Lösung von (4)).*

Zum *Beweis* ist zu zeigen, dass jede klassische Lösung in $W^{1,1}(\Omega)$ liegt. Dies trifft zu, da Ω Lipschitz-stetigen Rand hat (siehe Fučík, Nečas, Souček [12], Abschnitt 5.2).

Definition 3.2 *Unter einer Minimalfolge (der Variationsaufgabe (3)) versteht man eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $W^{1,1}(\Omega)$ derart, dass für jede Funktion u_n Gleichung (2) fast überall auf $\partial\Omega$ gilt und*

$$A(u_n) \rightarrow \inf\{A(u) : u \in W^{1,1}(\Omega), u|_{\partial\Omega} = g\} \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Werte auf dem Rand $\partial\Omega$ sind hierbei im Sinne des Spurooperators zu verstehen.

Während eine klassische Lösung nicht in jedem Fall existiert, gibt es stets eine Minimalfolge, welche gegen eine “verallgemeinerte” Lösung konvergiert. Hierzu seien einige Resultate aus Ekeland/Temam ([10]) angeführt:

Lemma 3.3 *(Lemma 1.2, Kap. V, in [10])*

Es existiert eine Minimalfolge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $W^{1,1}(\Omega)$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|v_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \text{const}, \quad \|v_n\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq \text{const}.$$

Anmerkung: Die Forderung in [10], dass die Funktion g eine Fortsetzung in $W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ besitzt, ist aufgrund der generellen Voraussetzung der Lipschitz-Stetigkeit des Randes $\partial\Omega$ erfüllt.

Der folgende Satz betrifft die Existenz verallgemeinerter Lösungen.

Satz 3.4 (Theorem 2.1, Kap. V, in [10])

Es gibt eine in Ω analytische Lösung $u \in L^\infty(\Omega)$ der Minimalflächengleichung derart, dass für jede Minimalfolge gilt:

1. $u_n \rightarrow u$ in $L^1(\Omega)/\mathbb{R}$.
2. $Du_n \rightarrow Du$ in $L^1(\Omega')$ für jede offene Menge $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Definition 3.5 Eine Funktion mit den Eigenschaften 1., 2. aus Satz 3.4 heißt verallgemeinerte Lösung der Minimalflächenaufgabe.

Ist zusätzlich eine Bedingung an die Randwerte erfüllt, so erhält man auch Eindeutigkeit der verallgemeinerten Lösung.

Satz 3.6 (Proposition 2.2, Kap. V, in [10])

Eine der Funktionen u gemäß Satz 3.4 habe die Eigenschaft: es existiert ein $x_0 \in \partial\Omega$, so dass

$$\limsup_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} |Du(x)| < \infty.$$

Dann ist u durch die Bedingung $u(x) = g(x)$ auf der Menge

$$\{x \in \partial\Omega : \limsup_{\partial\Omega \ni y \rightarrow x} |Du(y)| < \infty\}$$

eindeutig bestimmt. Die obige Menge hat positives Maß in $\partial\Omega$.

Jede Minimalfolge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $W^{1,1}(\Omega)$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen u in folgendem Sinne:

1. $u_n \rightarrow u$ in $L^1(\Omega)$.
2. $Du_n \rightarrow Du$ in $L^1(\Omega')$ für jede offene Menge $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Es besteht folgender Zusammenhang mit der auf de Giorgi zurückgehenden allgemeineren Variationsaufgabe:

Satz 3.7 (Proposition 2.4, Kap. V, in [10])

Das Infimum der Variationsaufgabe

$$(39) \quad \inf \left\{ \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du(x)|^2} dx + \int_{\partial\Omega} |u(s) - g(s)| ds : u \in W^{1,1}(\Omega) \right\}$$

ist gleich dem Infimum der ursprünglichen Minimalflächenaufgabe (3). Wenn das Minimalflächenproblem (3) eine Lösung in $W^{1,1}(\Omega)$ hat, dann ist diese auch das Minimum von (39). Wenn der Ausdruck (39) ein Minimum hat, dann ist dies bis auf eine Konstante eine (im Sinne von Definition 3.5) verallgemeinerte Lösung.

Den Beweis findet man in der aktualisierten englischen Übersetzung [11] von [10].

3.2 Diskretisierung der Randwertaufgabe mit stückweise linearen Ansatzfunktionen

Wir betrachten, im Hinblick auf die später folgenden numerischen Experimente, Gebiete in der Ebene: Sei für das Weitere $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$.

Eine gebräuchliche Art der Diskretisierung besteht darin, eine Triangulierung des Grundgebietes Ω vorzunehmen und aus bestimmten “Ansatzfunktionen” die Lösung der (diskreten) Randwertaufgabe zu kombinieren. Dabei können z.B. solche Funktionen gewählt werden, welche auf jedem Teildreieck mit einem Polynom eines fest gewählten maximalen Grades übereinstimmen (“Methode der finiten Elemente”). Das Ritzsche Verfahren beinhaltet die Bestimmung der Koeffizienten für eine bestmögliche Approximation der (exakten) Lösung in dem von diesen Ansatzfunktionen erzeugten endlichdimensionalen affinen Teilraum in der L^2 -Norm. Bei hinreichend kleiner Gitterweite erzielt man in der Regel Näherungen der geforderten Genauigkeit. Im Rahmen dieser Arbeit wird nur der einfache Fall stückweise linearer Ansatzfunktionen behandelt.

Definition 3.8 Sei \mathcal{T} eine endliche Menge abgeschlossener Dreiecke in \mathbb{R}^2 .

Bezeichne $h := h(\mathcal{T}) := \max\{\text{diam}(T) : T \in \mathcal{T}\}$ die Feinheit von \mathcal{T} und (unter Missbrauch der Notation) $\Omega_h := \left(\bigcup T : T \in \mathcal{T}\right)^\circ$. Statt \mathcal{T} schreibt man auch \mathcal{T}_h .

\mathcal{T} heißt Triangulierung von Ω , wenn gilt:

1. Ω_h ist zusammenhängend und approximiert Ω “hinreichend genau”.
2. Das Innere jedes Dreiecks aus \mathcal{T} ist nicht leer.
3. Der Durchschnitt je zweier Dreiecke aus \mathcal{T} ist entweder leer oder besteht aus einer gemeinsamen Ecke oder einer gemeinsamen Kante.
4. Die Ecken der Dreieckskanten, welche auf $\partial\Omega_h$ liegen, gehören zu $\partial\Omega$.

Forderung 1. ist speziell für den Fall krummlinig begrenzter Gebiete zu präzisieren.

Bezeichnungen für Unterabschnitt 3.2:

- Für Triangulierungen \mathcal{T} mit Feinheit h gemäß Definition 3.8: \mathcal{T}_h
- Für die Räume der Ansatzfunktionen:

$$U_h := \{u : \bar{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R} : u|_T \text{ affin-linear für jedes } T \in \mathcal{T}_h\},$$

$$V_h := \{v \in U_h : v|_{\partial\Omega_h} = 0\}.$$

- Für das Funktional des Flächeninhalts:

$$A_h(u) := \int_{\Omega_h} \sqrt{1 + |Du(x)|^2} dx, \quad u \in U_h.$$

- Weiter bezeichne $\bar{N} := \bar{N}_h \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Knotenpunkte von $\bar{\Omega}_h$ und $N := N_h \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Knotenpunkte von Ω_h (innere Knoten).

Bemerkung 3.9

1. Zu jedem Vektorraum $W^{1,p}(\Omega_h)$ mit $p \geq 1$ ist U_h linearer Teilraum der Dimension \bar{N}_h .
2. Zu jedem Vektorraum $W_0^{1,p}(\Omega_h)$ mit $p \geq 1$ ist V_h linearer Teilraum der Dimension N_h .
3. Der Vektorraum U_h ist linearer Teilraum von $C(\bar{\Omega}_h)$
4. Der Vektorraum V_h ist Teilraum von $\overline{C_0^\infty(\Omega_h)}$ in der Norm von $W^{1,1}(\Omega_h)$ (“Testfunktionen” im diskreten Fall).

◇

Bemerkung 3.10 Seien eine auf dem Rand von Ω stetige Funktion $g \in C(\partial\Omega)$ und eine Triangulierung \mathcal{T}_h von Ω gegeben. Dann gilt:

1. Es gibt genau eine auf $\partial\Omega_h$ stückweise lineare Funktion $g_h \in C(\partial\Omega_h)$, welche in den Knotenpunkten von $\partial\Omega_h$ mit g übereinstimmt.
2. Es gibt eine (im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmte) Fortsetzung ψ_h von g_h auf U_h derart, dass für jedes $u \in U_h$ gilt

$$u = \psi_h + v$$

mit einem $v \in V_h$.

◇

Das Variationsproblem zur Minimalflächenaufgabe für eine gegebene Funktion $g \in C(\partial\Omega)$ auf einer Triangulierung \mathcal{T}_h lautet dann: Bestimme

$$(40) \quad \min\{A_h(u) : u \in U_h \text{ und } u|_{\partial\Omega_h} = g_h\}.$$

Bemerkung 3.11 Zu einer Triangulierung \mathcal{T}_h sei eine Funktion $\psi_h \in U_h$ gemäß Bemerkung 3.10 gewählt. Dann ist die Aufgabe (40) äquivalent zu: Bestimme

$$\min\{A_h(\psi_h + v) : v \in V_h\}.$$

◇

Satz 3.12 *Zu jeder Randfunktion $g \in C(\partial\Omega)$ und zu jeder Triangulierung \mathcal{T}_h von Ω hat die diskrete Aufgabe (40), wobei g_h gemäß Bemerkung (3.10) gewählt sei, eine eindeutig bestimmte Lösung $u_h \in U_h$.*

Der Beweis benutzt die endliche Dimension von V_h und beruht darauf, dass das gemäß Bemerkung (3.11) zu minimierende Funktional

$$V_h \ni v \rightarrow A_h(\psi_h + v) \in \mathbb{R}$$

strikt konvex und koerzitiv ist (vgl. Anhang, siehe auch Ciarlet [5], Theorem 5.2.1).

Die Frage ist nun, ob für eine Folge von Triangulierungen (\mathcal{T}_h) die Folge der Minima (u_h) konvergiert, wenn das Feinheitsmaß h gegen 0 strebt. Unter zusätzlichen Voraussetzungen ist dies der Fall.

Definition 3.13 *Eine Familie von Triangulierungen (\mathcal{T}_h) heißt regulär, wenn der kleinste Winkel eines jeden Dreiecks, das in irgend einem Element dieser Familie liegt, größer als eine feste positive Konstante ist.*

Falls das Grundgebiet konvex ist, existiert gemäß Satz 1.14 eine klassische Lösung. Die Methode der finiten Elemente konvergiert dann auch gegen diese.

Satz 3.14 (Ciarlet [5], Theorem 5.2.2)

Sei Ω konvex, g sei die Spur einer Fortsetzung aus $W^{2,2}(\Omega)$, und es existiere ein Minimum der Variationsaufgabe $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$. Ist (\mathcal{T}_h) eine Familie regulärer Triangulierungen über Ω , dann gibt es eine Konstante $C(u)$ derart, dass für jedes Ω_h gilt:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega_h} \leq C(u)h.$$

In einer Arbeit aus dem Jahre 1975 zeigte Jouron ([21]), dass im allgemeinen Falle für eine Familie regulärer Triangulierungen die diskreten Lösungen mit $h \rightarrow 0$ im Sinne von Abschnitt 3.1 gegen eine verallgemeinerte Lösung konvergieren.

Das Folgende bildet den Ausgangspunkt für die numerische Berechnung.

Definition 3.15 Bezeichne $(x_n)_{n=1}^N$ eine Abzählung der (inneren) Knoten von Ω_h . Zu $n = 1, \dots, N$ sei ϕ_n die durch $\phi_n(x_m) = \delta_{n,m}$ für $m = 1, \dots, N$ eindeutig bestimmte Funktion $\phi_n \in V_h$ (die “nodale Basis” der linearen Lagrangeschen Dreiecksfunktionen, vgl. [4], Kap. 3.1, 3.2).

Bemerkung 3.16

1. Die Menge $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ bildet eine Basis des Vektorraums V_h der diskreten Testfunktionen.
2. Das gemäß Satz 3.12 existierende Minimum u_h von (40) ist eindeutig bestimmt durch die Gleichungen

$$\delta A_h(u_h, \phi_n) = \int_{\Omega_h} \frac{Du_h D\phi_n}{\sqrt{1 + |Du_h|^2}} dx = 0 \quad \text{für } n = 1, \dots, N.$$

3. Ist $\psi_h \in U_h$ gemäß Bemerkung 3.10 gewählt, dann gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_n \in \mathbb{R}$ für $n = 1, \dots, N$, so dass

$$u_h = \psi_h + \sum_{n=1}^N c_n \phi_n$$

gilt.

◇

Die Zerlegung in 3. wird nach Ritz und Galerkin benannt, womit die Approximation in einem endlich-dimensionalen Unterraum gemeint ist. Die Gleichungen in 2. ergeben damit für die unbekanntenen Koeffizienten c_n das nichtlineare Gleichungssystem

$$\int_{\Omega_h} \frac{(D\psi_h + \sum_{m=1}^N c_m D\phi_m) D\phi_n}{\sqrt{1 + |D\psi_h + \sum_{m=1}^N c_m D\phi_m|^2}} dx = 0, \quad n = 1, \dots, N.$$

3.3 Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung, auch mit gemischten Randbedingungen

Der oben beschriebene Ansatz ist für allgemeinere Situationen geeignet, insbesondere auch zur Approximation schwacher Lösungen der Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung.

Definition 3.17 Sei $f \in C(\Omega)$. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt klassische Lösung der Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung f , wenn

$$(41) \quad -H[u] = f \text{ in } \Omega$$

mit dem in (7) definierten Operator H der mittleren Krümmung gilt.

Sei $\Gamma \subset \partial\Omega$, $\Gamma \neq \partial\Omega$, und Γ sei entweder die leere Menge oder endliche Vereinigung offener glatter Kurvenstücke. Sei $g_0 \in C(\partial\Omega \setminus \Gamma)$, und falls $\Gamma \neq \emptyset$, $g_1 \in C(\Gamma)$. Dann heißt eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma) \cap C(\bar{\Omega})$ Lösung der Randwertaufgabe vorgeschriebener mittlerer Krümmung f , wenn (41) gilt sowie

$$u(x, y) = g_0(x, y) \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma$$

und gegebenenfalls

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, y)}{\sqrt{1 + |Du(x, y)|^2}} = g_1(x, y) \quad \text{auf } \Gamma.$$

Die Methode der finiten Elemente approximiert schwache Lösungen.

Definition 3.18 Sei $f \in L^1(\Omega)$, und sei $\Gamma \subset \partial\Omega$ gemäß Definition 3.17. Sei $g_0 \in L^1(\partial\Omega \setminus \Gamma)$ und, wenn $\Gamma \neq \emptyset$, $g_1 \in L^1(\Gamma)$. Dann heißt eine Funktion $u \in W^{1,1}(\Omega)$ schwache Lösung der Randwertaufgabe vorgeschriebener mittlerer Krümmung f , wenn

$$(42) \quad \int_{\Omega} \frac{DuD\phi}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx = \int_{\Omega} f\phi dx + \int_{\Gamma} g_1\phi ds$$

gilt für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, die im Sinne des Spuroperators auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$ verschwinden.

Auch die obige Gleichung stammt von einem Variationsproblem:

Definition 3.19 Das Funktional F sei für $u \in W^{1,1}(\Omega)$ durch den Wert

$$F(u) := \int_{\Omega} (\sqrt{1 + |Du|^2} - f u) dx - \int_{\Gamma} g_1 u ds$$

definiert.

Bemerkung 3.20 Die schwache Lösung der Randwertaufgabe vorgeschriebener mittlerer Krümmung — sofern sie existiert — ist stationärer Punkt des in Definition 3.19 erklärten Funktionals F unter allen Funktionen $u \in W^{1,1}(\Omega)$, deren Spur auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$ gleich g_0 ist. \diamond

Durch partielle Integration findet man:

Bemerkung 3.21 Jede klassische Lösung u einer Randwertaufgabe vorgeschriebener mittlerer Krümmung ist auch schwache Lösung der Randwertaufgabe. \diamond

Definition 3.22 *Bezeichne*

$$W_{\Gamma}^{1,1}(\Omega) := \{u \in W^{1,1}(\Omega) : u|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = 0\}.$$

(Die Einschränkung ist wieder im Sinne des Spurooperators zu verstehen.)

Bemerkung 3.23 Gegeben sei eine Funktion $g \in L^1(\partial\Omega \setminus \Gamma)$. Dann gibt es (mindestens) eine Funktion $\psi \in W^{1,1}(\Omega)$, deren Spur auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$ gleich g ist (Fortsetzung von g in $W^{1,1}(\Omega)$). Jedes $u \in W^{1,1}(\Omega)$ hat eine Zerlegung

$$u = \psi + v$$

mit einem $v \in W_{\Gamma}^{1,1}(\Omega)$. \diamond

Mit einer Funktion $\psi \in W^{1,1}(\Omega)$ gemäß Bemerkung 3.23 ist eine schwache Lösung nach Bemerkung 3.20 stationärer Punkt des Funktionals $F_{\psi}(v) := F(\psi + v)$ für $v \in W_{\Gamma}^{1,1}(\Omega)$.

Zur Diskretisierung:

Die Diskretisierung \mathcal{T}_h sei so gewählt, dass die Grenzen des Randteiles Γ von Ω auf Knotenpunkten von Ω_h liegen. Es bezeichne Γ_h den (relativ offenen) Teil des Randes von Ω_h , der Γ entspricht. Weiter bezeichne $\mathcal{N} := \{x_n\}_{n=1}^N$ die Menge aller Knoten aus $\bar{\Omega}_h$, die nicht zu Γ_h gehören ($N \geq 1$). Setze

$$\begin{aligned} U_h &:= \{u: \bar{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R} : u|_T \text{ affin-linear für jedes } T \in \mathcal{T}_h\}, \\ V_h &:= \{v \in U_h : v|_{\partial\Omega_h \setminus \Gamma_h} = 0\}. \end{aligned}$$

Die Basis $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ des Vektorraumes V_h sei definiert durch $\phi_n(x_m) = \delta_{n,m}$ für $m, n = 1, \dots, N$. Seien g_0, g_1 und f wie in Definition 3.18 erklärt und stetig. Bezeichne $g_{0,h}, g_{1,h}$ und f_h diskrete Approximationen von g_0, g_1 und f auf $\partial\Omega_h \setminus \Gamma_h, \Gamma_h$ und Ω_h . Sei $\psi_h \in U_h$ eine Fortsetzung von $g_{0,h}$ auf $\bar{\Omega}_h$. Dann führt der Ansatz von Ritz-Galerkin

$$(43) \quad u_h = \psi_h + \sum_{n=1}^N c_n \phi_n$$

auf die zu Gleichung (42) entsprechende Formulierung der schwachen Gleichungen

$$(44) \quad \int_{\Omega_h} \frac{(D\psi_h + \sum_{m=1}^N c_m D\phi_m) D\phi_n}{\sqrt{1 + |D\psi_h + \sum_{m=1}^N c_m D\phi_m|^2}} dx = \int_{\Omega_h} f_h \phi_n dx + \int_{\Gamma_h} g_{1,h} \phi_n ds$$

für $n = 1, \dots, N$.

4 Numerische Ergebnisse

Die Lösung von Gleichung (42) approximieren wir numerisch durch den Diskretisierungsansatz (43) mit stückweise linearen Funktionen. Die Koeffizienten dieses Ansatzes bestimmt man durch Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems (44). Hierzu verwenden wir das Newton-Verfahren (Abschnitt 4.1). Eine ausführliche Behandlung dieses Verfahrens und weiterführende Hinweise findet der interessierte Leser in den Lehrbüchern von Stoer [33] und Deuffhard-Hohmann [9].

Unabhängig vom Linearisierungsverfahren ist die Konvergenzordnung der Finite-Element-Approximationen bereits im Fall linearer Differentialgleichungen durch den gewählten Raum der Ansatzfunktionen bestimmt. Im nichtlinearen Fall tritt darüber hinaus eine grundsätzliche Abhängigkeit von der Wahl der Randbedingungen (und des hierdurch bestimmten Typs der Lösung) auf. In Abschnitt 4.2 bestimmen wir experimentell Konvergenzraten zur Minimalflächengleichung bzw. zur Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung, wenn das Grundgebiet die Form eines Quadrats, eines Kreisrings oder eines L-Profiles hat. Für den radial-symmetrischen Fall zeigen wir später in Abschnitt 5.2 eine Abschätzung zur Konvergenzordnung.

Das Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens im Beispiel der Kettenfläche zeigt Abschnitt 4.3. Hier wird die Notwendigkeit der Schrittweitensteuerung (oder eines anderen Hilfsmittels) zur Erzielung von Konvergenz im nicht-klassischen Fall ersichtlich.

Der Rechenaufwand des Newton-Verfahrens läßt sich stark verbessern, wenn man bei der Lösung der linearen Gleichungssysteme schnellere Methoden benutzt. Traditionell verwendet man beim hier vorliegenden Fall schwach besetzter Matrizen ein iteratives Verfahren, etwa das CG-Verfahren. Abschnitt 4.4 enthält für einen Schritt des Newton-Verfahrens einen Vergleich der Rechenzeiten des CG-Verfahrens und des algebraischen Mehrgitterverfahrens von Trottenberg-Stüben, einer Verallgemeinerung des Mehrgitterverfahrens für Gleichungssysteme zu unstrukturierten Gittern (welche bei Anwendung der Methode der finiten Elemente auftreten).

Die numerische Lösung der Minimalflächenaufgabe wurde bereits im Jahre 1975 in der Arbeit von Jouron [21] behandelt. Bei der praktischen Lösung verwendet Jouron speziell angepaßte Methoden, während es ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist, eine Kombination von Standardkomponenten zu untersuchen.

In diesem Kapitel sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$.

4.1 Newton-Verfahren zur Linearisierung des diskreten Problems

Es gelten die Annahmen und Bezeichnungen aus 3.3. Wir fassen die linken Seiten der Gleichungen (44) als Funktionen der Variablen $(c_1, \dots, c_n)^t$ auf.

Bezeichnungen:

Sei $Y = (y_n)_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N$ durch die rechte Seite von (44) definiert, $y_n := \int_{\Omega_h} f \phi \, dx + \int_{\Gamma_h} g_{1,h} \phi_n \, ds$ für $n = 1, \dots, N$. Sei $C = (c_n)_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N$ und bezeichne $F_n(C)$ die linke Seite von (44),

$$(45) \quad F_n(C) := \int_{\Omega_h} \left(\frac{(D\psi_h + \sum_{m=1}^N c_m D\phi_m) D\phi_n}{\sqrt{1 + |D\psi_h + \sum_{m=1}^N c_m D\phi_m|^2}} \right) dx.$$

Die Abbildung $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ sei definiert durch $C \rightarrow (F_n(C))_{n=1}^N$. Dann ist $C = (c_n)_{n=1}^N$ Lösung von Gleichung (44) genau dann, wenn

$$(46) \quad F(C) = Y \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

Das Verfahren der globalen Linearisierung besteht darin, zu einer Näherung C einer Lösung C^* von (46) eine bessere Näherung $C + \delta C$ zu finden, indem man die Gleichung $F(C + \delta C) = Y$ an der Stelle C linearisiert und nach δC auflöst:

$$Y = F(C + \delta C) \approx F(C) + DF(C) \delta C.$$

Man erhält also das lineare Gleichungssystem

$$(47) \quad DF(C) \delta C = Y - F(C)$$

Indem man sukzessive C durch $C + \delta C$ ersetzt und das Verfahren wiederholt, erhält man eine Folge von Näherungswerten, die unter geeigneten Voraussetzungen gegen die exakte Lösung C^* konvergieren (“Newtonsches Iterationsverfahren”).

Bemerkung 4.1 Die Jacobi-Matrix des Newton-Verfahrens $J(C) := DF(C) = \left(\frac{\partial F_n}{\partial c_m}(C) \right)_{n,m=1}^N$ an einer Stelle $C = (c_n)_{n=1}^N$ lautet mit $u := u_h = \psi_h + \sum_{n=1}^N c_n \phi_n$

$$\frac{\partial F_n}{\partial c_m}(C) = \int_{\Omega_h} \frac{(1 + |Du|^2) D\phi_n D\phi_m - (Du D\phi_n)(Du D\phi_m)}{(1 + |Du|^2)^{3/2}} dx.$$

Sie ist symmetrisch und positiv definit. ◇

Beweis: Die positive Definitheit von $J(C)$ erkennt man daran, dass die durch den Integranden definierte $N \times N$ -Matrix aus der durch

$$q_{n,m}(p) = \frac{(1 + |p|^2)\delta_{n,m} - p_n p_m}{(1 + |p|^2)^{3/2}}$$

definierten Matrix $Q(x) := (q_{n,m}(p))_{n,m=1}^N$ mit $p := Du(x)$ und der Matrix $\Psi(x) := (D\phi_1(x)^t, \dots, D\phi_N(x)^t)$ aus der Transformation $\Psi(x)^t Q(x) \Psi(x)$ hervorgeht. Die $N \times N$ -Matrix $Q(x)$ ist von der gleichen Bauart wie die in Bemerkung 1.11 beschriebene Matrix $(a_{m,n}(p))_{m,n=1}^2$ zum Operator der mittleren Krümmung. Sie hat mit den dortigen Bezeichnungen λ_{\min} als einfachen und λ_{\max} als $(N - 1)$ -fachen Eigenwert und ist daher positiv definit.

In jedem Newton-Schritt ist das lineare Gleichungssystem deshalb eindeutig lösbar.

Da uns die Konvergenz im Raum V_h interessiert, wählen wir im Raum \mathbb{R}^N die L^2 -Norm des äquivalenten Raumes V_h :

$$\|C\| := \|v\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega_h} v^2 dx \right)^{1/2}, \quad C = (c_n)_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N, \quad v = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n.$$

Anmerkung: In der numerischen Rechnung wurde diese Norm auch für Elemente des Bildraumes von F verwendet. Möglicherweise wäre es sinnvoller, für den Bildraum die euklidische Norm des \mathbb{R}^N zu wählen.

Newton-Verfahren mit Schrittweitensteuerung:

In manchen Fällen — und dies trifft für die nicht-klassischen Lösungen unseres Beispiels zu — konvergiert das oben beschriebene Verfahren nicht für den gewählten Startvektor. Die Theorie garantiert Konvergenz nur dann, wenn der Startvektor in einer hinreichend kleinen Umgebung der Lösung oder zumindest in deren “Einzugsbereich” liegt. Oft ist Konvergenz dabei noch durch eine Steuerung der Schrittweite zu erreichen:

Ausgehend von der jeweiligen Näherung C berechnet man gemäß (47) den Inkrementvektor δC . Man vergleicht die Norm des alten Residuums $Y - F(C)$ mit der Norm des Residuums, das man beim Ersetzen von C durch $C + \delta C$ erhält. Ist dessen Norm kleiner, so verfähre man weiter wie bisher. Andernfalls wiederhole man den Vergleich mit dem Residuum von $C + \lambda \delta C$ für Werte von $\lambda = 1/2, 1/4, \dots, \lambda_{\min}$. Wenn dabei die Norm des neuen Residuums kleiner als die des alten wird, akzeptiert man $C + \lambda \delta C$ als neue Näherung und setzt mit diesem Wert das Verfahren fort. Wenn hierbei $\lambda < 1$ gilt und λ im neuen Iterationsschritt noch nicht halbiert wurde, ersetze man λ durch 2λ .

Das hiermit skizzierte Verfahren ist eine vereinfachte Version der in [33] beschriebenen Methode und genügt für unser Modell.

Ein Algorithmus zum Newton-Verfahren mit Schrittweitensteuerung

Gegeben:

$Y \in \mathbb{R}^N$	Vektor der rechten Seite
$C \in \mathbb{R}^N$	Startvektor (Eingabe), Lösungsvektor (Ausgabe)
$\varepsilon > 0$	Fehlerschranke
$\lambda_0 = 2^{-k_0}$	Anfangsfaktor für Schrittweite, $k_0 \in \mathbb{N}_0$
$\lambda_1 = 2^{-k_1}$	kleinstmöglicher Faktor für Schrittweite, $k_0 \leq k_1 \in \mathbb{N}_0$
n_{\max}	maximal erlaubte Anzahl der Iterationen
n_λ	Schritt, in dem λ zuletzt halbiert wurde
n_{it}	aktueller Iterationsschritt

Algorithmus:

1. Setze $n_{it} := 1$, $\lambda := \lambda_0$.
2. Berechne $r := \|Y - F(C)\|$.
3. Löse $J(C) \delta C = Y - F(C)$.
4. Setze $C' := C + \lambda \delta C$; berechne $r' := \|Y - F(C')\|$.
5. Falls $r' > r$:
 setze $\lambda := \lambda/2$;
 falls $\lambda < \lambda_1$: Fehlerabbruch.
 sonst: setze $n_\lambda := n_{it}$; gehe zu 4.
6. Falls konvergent:
 Setze $C := C'$; fertig;
 sonst: Falls $n_{it} \geq n_{\max}$: Fehlerabbruch
 Falls $n_\lambda < n_{it}$ und $\lambda < 1$: Setze $\lambda := 2 * \lambda$.
 Setze $n_{it} := n_{it} + 1$; $C := C'$; $r := r'$; gehe zu 3.

Als Bedingung "konvergent" ist entweder a) oder b) wählbar:

- a) $\|\delta C\| \leq \varepsilon \|C'\|$
- b) $\|\delta C\| \leq \varepsilon$.

Anmerkung: Im Allgemeinen genügt das Abbruchkriterium a) (relativer Fehler). Im Falle, dass die Norm von C sehr klein wird, wähle man das Abbruchkriterium b) (absoluter Fehler), mit einer geeigneten Fehlerschranke ε .

4.2 Beispiele von Konvergenzraten der Finite-Element-Approximationen

Den oben beschriebenen Algorithmus implementierte ich in einem Computerprogramm und führte damit die numerischen Experimente durch. Die Zeichnungen worden mit dem Programmsystem „GRAPE“ [32] erstellt.

Das Beispiel von Rechteck und Kreisring gestattet die einfache Berechnung des Fehlers $e_h := \|u_h - h\|$ in der jeweiligen Norm aufgrund der Kenntnis der exakten Lösungen. Für das L-Profil bestimmen wir eine erste Näherung des Fehlers durch $\|u_{2h} - u_h\|$. Die Konvergenzordnung in der Norm $\|\cdot\|$, d.h. das minimale $k > 0$ derart, dass $\|u_h - u\| \leq C(u)h^k$ gilt, erhält man näherungsweise aus für verschiedene Gitterweiten $e_h, e_{2h}, e_{4h}, \dots, e_H$ empirisch bestimmten Fehlern.

Wenn das Grundgebiet Ω konvex ist, ist die Konvergenzordnung bei Verwendung linearer finiter Elemente in der Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ des Hilbertraumes $H^2(\Omega)$ der Funktionen mit quadratisch integrierbarer schwacher Ableitung gleich 1 und in der Norm $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ der quadratisch integrierbaren Funktionen gleich 2. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die schwache Lösung u im Hilbertraum $H^2(\Omega)$ der Funktionen mit quadratisch integrierbaren schwachen Ableitungen bis zu zweiter Ordnung enthalten ist.

Andererseits gehört, wenn das Grundgebiet Ω nicht konvex ist, die schwache Lösung u der Randwertaufgabe, sofern sie existiert, im Allgemeinen nicht zum Raum $H^1(\Omega)$. Dies zeigt das Beispiel der Kettenfläche aus Abschnitt 1.4: im dort betrachteten Grenzfall ist deren schwache Ableitung nicht quadratisch integrierbar, sondern nur dem Betrage nach (und ist damit im Sobolevraum $W^{1,1}(\Omega)$ enthalten). Ursache ist die Singularität der Lösung auf dem nicht-konvexen Teil des Randes $\partial\Omega$. Mit anderen Worten kommt es auf die Wachstumsordnung der Lösung in Umgebung des nicht-konvexen Teils des Randes $\partial\Omega$ an. Bei gegebenem Grad der (lokalen) Interpolationspolynome hat diese Einfluss auf die Ordnung des Fehlers und damit der Konvergenz. Satz 3.6 legt es nahe, die Konvergenz in Teilgebieten zu untersuchen, welche einen gewissen Abstand vom nicht-konvexen Teil des Randes haben.

Experimentell bestimmen wir die Konvergenzordnung durch Halbierung der Gitterweite: Bezeichne jeweils $e_h := u_h - u$ den Fehler zur Diskretisierung \mathcal{T}_h . Dann folgt für die Konvergenzordnung k in der Norm $\|\cdot\|$ aus

$$\|e_h\| \approx C(u)h^k \text{ und } \|e_{2h}\| \approx C(u)(2h)^k$$

die Relation

$$2^k \approx \frac{\|e_{2h}\|}{\|e_h\|}.$$

Wir notieren im Einzelnen:

Definition 4.2 Sei \mathcal{T}_h eine Diskretisierung von Ω und Ω_h das zugehörige Gebiet. Bezeichne u die (knotenweise) Projektion der exakten Lösung der Randwertaufgabe auf Ω_h und u_h die diskrete Lösung sowie

$$e_h := u_h - u$$

den Approximationsfehler. Für dessen (Halb-)Normen auf Ω_h verwenden wir die Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} e_{0,\infty,h} &:= \|e_h\|_{L^\infty(\Omega_h)}, & e_{1,\infty,h} &:= \|De_h\|_{L^\infty(\Omega_h)}, \\ e_{0,2,h} &:= \|e_h\|_{L^2(\Omega_h)}, & e_{1,2,h} &:= \|De_h\|_{L^2(\Omega_h)}, \\ e_{0,1,h} &:= \|e_h\|_{L^1(\Omega_h)}, & e_{1,1,h} &:= \|De_h\|_{L^1(\Omega_h)}. \end{aligned}$$

Seien \mathcal{T}_{2h} und \mathcal{T}_h zwei Triangulierungen von Ω derart, dass die Kanten der Dreiecke von \mathcal{T}_h näherungsweise durch Halbieren der Kanten aller Dreiecke von \mathcal{T}_{2h} entstehen. Bezeichne hierzu

$$q_{j,l,h} := \frac{e_{j,l,2h}}{e_{j,l,h}}$$

die experimentellen Konvergenzraten in den jeweiligen (Halb-)Normen für die betrachteten Indizes j, l .

Im folgenden untersuchen wir empirisch ermittelte Konvergenzraten in diesen Normen zu drei Beispielen:

4.2.1 Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung mit beschränkter Lösung auf Rechteck

Sei $\Omega = (0, 1)^2$. Um Trivialfälle auszuschließen, betrachten wir anstelle eines Beispiels zur Minimalflächengleichung folgendes Beispiel:

Zur Funktion $u(x, y) := \exp(-x)$ erhält man eine Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung (41) nach Wahl von

$$f(x, y) := -\exp(-x) (1 + \exp(-2x))^{-3/2}$$

für die rechte Seite der Gleichung. Setzt man

$$\Gamma := ([0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{1\}),$$

$$g_0(x, y) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \exp(-1), & x = 1, \end{cases}$$

$$g_1(x, y) := 0 \quad \text{für } (x, y) \in \Gamma,$$

so genügt u den hierdurch definierten Randbedingungen. Eine geeignete Ansatzfunktion gemäß Bemerkung 3.23 ist

$$\psi(x, y) := 1 - x(1 - \exp(-1)).$$

Zu einer Folge von Triangulierungen \mathcal{T}_h des Einheitsquadrats, welches in kongruente Dreiecke aufgeteilt werde, enthält Tabelle 1 die Approximationsfehler und Tabelle 2 die Konvergenzraten für $h = 1/2, 1/4, 1/8, \dots, 1/128$.

h	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128
$e_{0,\infty,h}$	1.39e-2	4.54e-3	1.38e-3	4.02e-4	1.15e-4	3.24e-5	9.04e-6
$e_{1,\infty,h}$	8.19e-2	5.27e-2	2.89e-2	1.50e-2	5.64e-3	3.87e-3	1.94e-3
$e_{0,2,h}$	5.46e-3	1.58e-3	4.16e-4	1.06e-4	2.66e-5	6.68e-6	1.70e-6
$e_{1,2,h}$	5.74e-2	2.94e-2	1.48e-2	7.42e-3	3.71e-3	1.86e-3	9.28e-4
$e_{1,1,h}$	5.26e-2	2.61e-2	1.30e-2	6.52e-3	3.26e-3	1.63e-3	8.15e-4

Tabelle 1: Approximationsfehler auf dem Quadrat

h	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128
$q_{0,\infty,h}$	3.1	3.3	3.4	3.5	3.6	3.6
$q_{1,\infty,h}$	1.6	1.8	1.9	2.0	2.0	2.0
$q_{0,2,h}$	3.4	3.8	3.9	4.0	4.0	3.9
$q_{1,2,h}$	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
$q_{1,1,h}$	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0

Tabelle 2: Konvergenzraten auf dem Quadrat

Man ersieht daraus, dass die Konvergenzraten in den (Halb-)Normen der Ableitung des Fehlers gegen 2 und in den Normen des Fehlers annähernd gegen 4 streben. Da die Gradienten der Lösung beschränkt bleiben, ist diese gleichmäßig elliptisch. Die Ergebnisse entsprechen dem Fall einer linearen gleichmäßig elliptischen Differentialgleichung.

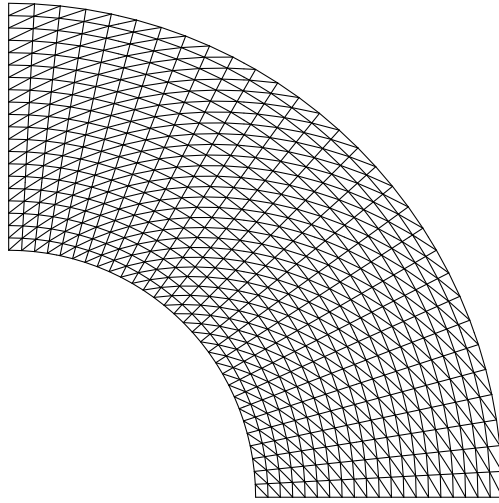


Abbildung 4: Diskretisierung zur Kettenfläche auf Viertelkreisring

4.2.2 Kettenfläche auf Viertelkreisring

Wir wählen Beispiel 1.18 mit $r_1 := \frac{1}{2}$, $r_2 := 1$, und reduzieren die Berechnung auf den Viertelkreisring

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\},$$

wobei die radiale Symmetrie der Lösungen das Verschwinden der Normalenableitung in den geraden Randstücken bedeutet. Wir setzen

$$\Gamma := \left(\left(\frac{1}{2}, 1 \right) \times \{0\} \right) \cup \left(\{0\} \times \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \right)$$

und fordern die Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } \Gamma,$$

$$u(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x^2 + y^2 = 1 \\ B, & \text{wenn } x^2 + y^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Hierbei sei $B > 0$ fest gewählt.

Die Knotenpunkte für die Triangulierung des Ringsegments sind bezüglich Polarkoordinaten äquidistant angeordnet. Das grösste Gitter ($h = 0.057$, siehe Abbildung 4) besteht in radialer Richtung aus 20 und in tangentialer Richtung aus 30 topologischen Rechtecken.

Wir untersuchen Approximationen zu den radialsymmetrischen Lösungen aus Beispiel 1.18 mit $B_1 = B$, $B_2 = 0$. Nicht konstante klassische Lösungen existieren

genau dann, wenn $B \leq \frac{1}{2} \operatorname{arcosh}(2)$, d. h. $B = c(\operatorname{arcosh}(1/c) - \operatorname{arcosh}(1/(2c)))$ für ein $c \in (0, 1/2]$. Der kritische Wert ist $c = 1/2$. Es wurden 3 typische Fälle berechnet:

1. Für $B = 0.26677$ (d.h. $c = \frac{1}{3}$) gehört die Lösung zu $C^2(\bar{\Omega})$.
2. Für $B = 0.65848$ (d.h. $c = \frac{1}{2}$) gehört die Lösung zu $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Es ist die maximale klassische Lösung, die auf dem Außenrand verschwindet. Bei Annäherung an den Innenrand wird die radiale Ableitung beliebig groß.
3. Für $B = 1$ existiert keine klassische Lösung, wohl aber eine Lösung der Randwertaufgabe im schwachen Viskositätssinne (vgl. Abschnitt 2.2).

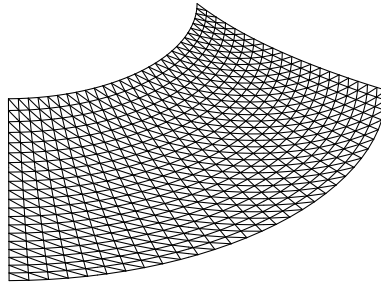


Abbildung 5: Kettenfläche, gleichmäßig elliptischer Fall

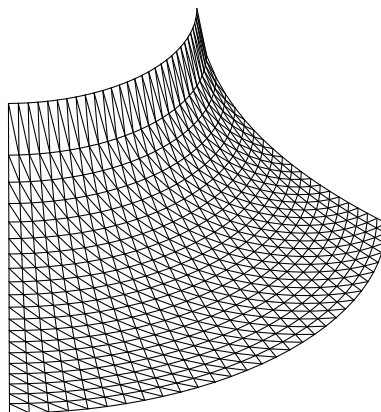


Abbildung 6: Kettenfläche, Grenzfall

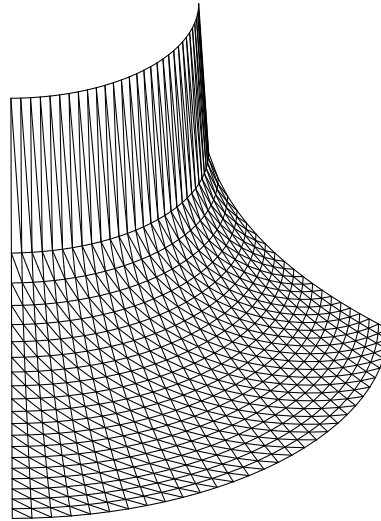


Abbildung 7: Kettenfläche, Viskositätslösung

Die Abbildungen 5, 6, 7 zeigen jeweils den Graphen der diskreten Lösung auf dem größten Gitter.

Ausgehend vom größten Gitter mit $h = 0.057$, wurden die Rechnungen auf drei feineren Gittern mit jeweils halber Seitenlänge der Dreiecke ($h = 0.029, 0.014, 0.007$) wiederholt. Die folgenden Tabellen zeigen den Approximationsfehler in den verschiedenen (Halb-)Normen sowie die daraus bestimmten experimentellen Konvergenzraten.

h	0.057	0.029	0.014	0.007
$e_{0,\infty,h}$	5.5e-05	1.4e-05	3.5e-06	8.8e-07
$e_{1,\infty,h}$	1.3e-02	6.8e-03	3.4e-03	1.7e-03
$e_{0,2,h}$	1.8e-05	4.5e-06	1.1e-06	2.9e-07
$e_{1,2,h}$	3.8e-03	1.9e-03	9.5e-04	4.7e-04
$e_{1,1,h}$	2.5e-03	1.2e-03	6.2e-04	3.1e-04

Fehler zu 1. in Ω

h	0.057	0.029	0.014
$q_{0,\infty,h}$	4.0	4.0	4.0
$q_{1,\infty,h}$	2.0	2.0	2.0
$q_{0,2,h}$	4.0	4.0	3.9
$q_{1,2,h}$	2.0	2.0	2.0
$q_{1,1,h}$	2.0	2.0	2.0

Konvergenzraten zu 1. in Ω

h	0.057	0.029	0.014	0.007
$e_{0,\infty,h}$	1.5e-02	1.0e-02	7.3e-03	5.2e-03
$e_{1,\infty,h}$	1.9e+00	2.7e+00	3.7e+00	5.3e+00
$e_{0,2,h}$	3.4e-03	1.9e-03	1.0e-03	5.8e-04
$e_{1,2,h}$	2.0e-01	1.9e-01	1.9e-01	1.9e-01
$e_{1,1,h}$	3.7e-02	2.6e-02	1.8e-02	1.2e-02

Fehler zu 2. in Ω

h	0.057	0.029	0.014
$q_{0,\infty,h}$	1.4	1.4	1.4
$q_{1,\infty,h}$	0.7	0.7	0.7
$q_{0,2,h}$	1.8	1.8	1.8
$q_{1,2,h}$	1.0	1.0	1.0
$q_{1,1,h}$	1.5	1.4	1.4

Konvergenzraten zu 2. in Ω

h	0.057	0.029	0.014	0.007
$e_{0,\infty,h}$	3.4e-01	3.4e-01	3.4e-01	3.4e-01
$e_{1,\infty,h}$	1.5e+01	2.8e+01	5.6e+01	1.1e+02
$e_{0,2,h}$	3.1e-02	2.1e-02	1.5e-02	1.0e-02
$e_{1,2,h}$	1.9e+00	2.7e+00	3.8e+00	5.4e+00
$e_{1,1,h}$	3.2e-01	3.0e-01	2.9e-01	2.8e-01

Fehler zu 3. in Ω

h	0.057	0.029	0.014
$q_{0,\infty,h}$	1.0	1.0	1.0
$q_{1,\infty,h}$	0.5	0.5	0.5
$q_{0,2,h}$	1.5	1.4	1.4
$q_{1,2,h}$	0.7	0.7	0.7
$q_{1,1,h}$	1.1	1.0	1.0

Konvergenzraten zu 3. in Ω

Daneben betrachten wir den Fehler auf den Teilgebieten Ω'_h von Ω_h , welche einen Abstand gegebener Breite $\varepsilon > 0$ vom Innenrand besitzen. Bezeichne $e'_{j,l,h}$ jeweils den Fehler auf dem Teilgebiet und $q'_{j,l,h}$ die entsprechende experimentelle Konvergenzrate. Im Folgenden sind die Ergebnisse zu $\varepsilon = 0.025$ im Grenzfall 2) einer klassischen Lösung und im Fall einer Viskositätslösung 3) angegeben.

h	0.057	0.029	0.014	0.007
$e'_{0,\infty,h}$	1.5e-02	7.5e-03	3.8e-03	1.9e-03
$e'_{1,\infty,h}$	3.4e-01	2.2e-01	1.3e-01	6.9e-02
$e'_{0,2,h}$	3.2e-03	1.6e-03	7.9e-04	4.0e-04
$e'_{1,2,h}$	4.3e-02	2.3e-02	1.1e-02	5.7e-03
$e'_{1,1,h}$	1.6e-02	7.9e-03	4.0e-03	2.0e-03

Fehler zu 2. in Ω'

h	0.057	0.029	0.014
$q'_{0,\infty,h}$	2.0	2.0	2.0
$q'_{1,\infty,h}$	1.5	1.7	1.8
$q'_{0,2,h}$	2.0	2.0	2.0
$q'_{1,2,h}$	1.9	2.0	2.0
$q'_{1,1,h}$	2.0	2.0	2.0

Konvergenzraten zu 2. in Ω'

h	0.057	0.029	0.014	0.007
$e'_{0,\infty,h}$	4.1e-02	2.0e-02	9.9e-03	4.9e-03
$e'_{1,\infty,h}$	7.2e-01	4.4e-01	2.4e-01	1.3e-01
$e'_{0,2,h}$	8.2e-03	4.0e-03	2.0e-03	1.0e-03
$e'_{1,2,h}$	1.0e-01	5.0e-02	2.5e-02	1.2e-02
$e'_{1,1,h}$	4.1e-02	2.0e-02	1.0e-02	5.0e-03

Fehler zu 3. in Ω'

h	0.057	0.029	0.014
$q'_{0,\infty,h}$	2.1	2.0	2.0
$q'_{1,\infty,h}$	1.7	1.8	1.9
$q'_{0,2,h}$	2.0	2.0	2.0
$q'_{1,2,h}$	2.0	2.0	2.0
$q'_{1,1,h}$	2.0	2.0	2.0

Konvergenzraten zu 3. in Ω'

Bemerkungen zu den Fehlern und Konvergenzraten

Im 1. Fall ist das Konvergenzverhalten wie im gleichmäßig elliptischen Fall: linear in den Halbnormen der Ableitungen, quadratisch in den Normen der Funktion. Im 2. Fall nähern die experimentellen Konvergenzraten der Maximumnorm und der Halbnorm des Sobolevraumes $W^{1,1}(\Omega)$ sich der Zahl $\sqrt{2}$. In der Norm von $L^2(\Omega)$ streben die Konvergenzraten einem Wert zu, der zwischen $\sqrt{2}$ und 2 liegt. In der Maximum-Halbnorm divergieren die Ableitungen des Fehlers, während sie in der Halbnorm des Hilbertraumes $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ beschränkt bleiben. Im 3. Fall hat man nur noch in der Norm von $L^2(\Omega)$ Konvergenz, in der die Konvergenzraten gegen $\sqrt{2}$ streben. In der Maximumnorm und in der Halbnorm von $W^{1,1}(\Omega)$ bleiben die Näherungslösungen beschränkt, während sie in der Maximum-Halbnorm der Ableitung und in der Halbnorm von $W^{1,1}(\Omega)$ divergieren: die zugehörigen Konvergenzraten streben gegen $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Numerische Experimente mit verschiedenen Breiten $\varepsilon > 0$ des Randstreifens $\Omega \setminus \Omega'$ zeigten, dass die Konvergenzraten gegen den gleichen Wert streben, wenn ε mindestens die Breite der Elementschicht des inneren Randteils der größten Diskretisierung von Ω , das ist hier $0.5/20 = 0.025$, besitzt. (Der Wert von h berechnet sich jeweils aus der längsten Seite aller Teildreiecke.) Wir betrachten die Fälle 2) und 3) in Ω' . Die Konvergenzraten in den Normen der Ableitung streben hier annähernd gegen 2, aber auch die Konvergenzraten der Maximumnorm und der L^2 -Norm der Funktion selbst. Diese beobachtete Reduktion der Konvergenzordnung im Vergleich zum streng elliptischen Fall ist vergleichbar mit dem Effekt der „Verschmutzung“ (englisch: „pollution“) von Lösungen, wie er auch bei der Diskretisierung der Poissongleichung in Gebieten mit einspringenden Ecken zu beobachten ist.

Auf Ω' und im 1. Fall auch auf Ω bleiben die Gradienten beschränkt. In den übrigen Fällen strebt die radiale Ableitung bei Annäherung an den Innenrand gegen ∞ , wie aus den Graphen der Näherungslösungen ersichtlich ist.

4.2.3 Minimalflächengleichung auf L-Profil

Wir betrachten Lösungen der Minimalflächengleichung (5) zu einem L-Profil Ω . Die Randwerte seien Null an den Seiten, welche die einspringende Ecke begrenzen, und gleich einer Konstanten c an den gegenüberliegenden Seiten. Längs der Verbindungskanten verlaufe die Randfunktion linear.

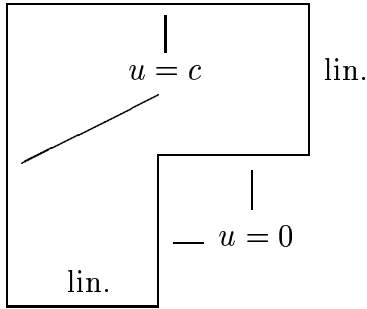


Abbildung 8: L-Profil,
Randbedingungen

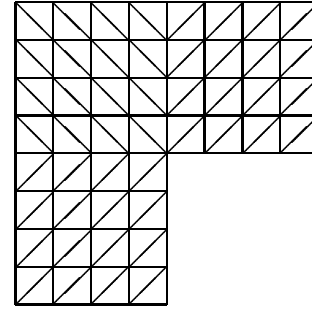


Abbildung 9: L-Profil,
grobes Gitter

Der Einfachheit halber wurde ein symmetrisches L-Profil mit äußerer Kantenlänge 1 und innerer Kantenlänge $1/2$ diskretisiert. Geometrie und Randbedingungen sind in Abbildung 8 gezeichnet, ein grobes Gitter in Abbildung 9. Ausgegangen wurde von einem groben Gitter mit 65 Knoten und 96 kongruenten Teildreiecken, welches die Gitterweite $h = \sqrt{2}/8 \approx 0.1768$ hat. Durch fortgesetzte Unterteilung jedes Teildreiecks in 4 kongruente Dreiecke wurden 6 feinere Gitter mit jeweils der halben Gitterweite erzeugt. Die folgende Tabelle zeigt die Daten der Gitter, deren kurze Seite in $1/2^m$ Abschnitte aufgeteilt sei.

m	2	3	4	5	6	7
$h = \sqrt{2}/2^{m+1}$	0.17678	0.08839	0.04419	0.02210	0.01105	0.00552
Anzahl Knoten	65	225	833	3201	12545	49665
Anzahl Dreiecke	96	384	1536	6144	24576	98304

Es wurden jeweils die Ergebnisse des gröberen Gitters mit denen des nächstfeineren Gitters verglichen. Die Differenzen wurden in den Knotenpunkten des groben Gitters (welche im feinen Gitter enthalten sind) berechnet. Bezeichne N die Anzahl der Knoten und $e_{0,l,h}$ für $l = 1, 2$ gemäß Definition 4.2 den Fehler der Lösung zum groben Gitter gegenüber der Lösung zum feinen Gitter in der Norm von $L^1(\Omega_h)$ bzw. $L^2(\Omega_h)$. Ferner betrachten wir zu einem $\varepsilon > 0$ das Teilgebiet $\Omega' := \Omega_\varepsilon$ von Ω , das man durch Weglassen von Streifen der Breite ε an den beiden Randkanten erhält, welche die einspringende Ecke begrenzen. Bezeichne $e'_{0,l,h}$ für $l = 1, 2$ die zugehörigen Fehler in den Räumen $L^l(\Omega')$. Damit betrachten wir die entsprechenden experimentellen „Konvergenzraten“ $q_{0,l,h}$ in Ω_h bzw. $q'_{0,l,h}$ in Ω'_h für $l = 1, 2$. Um den Einfluss der Singularität auf das globale Verhalten deutlich zu machen, wurde mit einer Streifenbreite $\varepsilon = 0.25$ gerechnet. Tabelle 3 und Tabelle 4 zeigen die Fehler und Konvergenzraten auf dem vollen Gebiet und dem Teilgebiet für Randwerte von $c = \frac{1}{2}$ und $c = 1$.

m	2	3	4	5	6
$e_{0,1,h}$	1.65e-3	9.85e-4	5.74e-4	3.23e-4	1.75e-4
$e_{0,2,h}$	2.98e-3	1.91e-3	1.24e-3	7.81e-4	4.68e-4
$e'_{0,1,h}$	5.81e-4	2.60e-4	1.33e-4	7.00e-5	3.69e-5
$e'_{0,2,h}$	1.32e-3	5.87e-4	2.97e-4	1.55e-4	8.11e-5
$q_{0,1,h}$		1.67	1.72	1.78	1.84
$q_{0,2,h}$		1.56	1.53	1.60	1.67
$q'_{0,1,h}$		2.24	1.96	1.89	1.90
$q'_{0,2,h}$		2.25	1.97	1.91	1.92

Tabelle 3: L-Profil, Fehler und Konvergenzraten zu $c = 1/2$

m	2	3	4	5	6
$e_{0,1,h}$	5.43e-3	3.93e-3	2.36e-3	1.30e-3	6.84e-4
$e_{0,2,h}$	9.52e-3	7.89e-3	5.46e-3	3.42e-3	2.02e-3
$e'_{0,1,h}$	1.90e-3	9.06e-4	4.40e-4	2.20e-4	1.10e-4
$e'_{0,2,h}$	3.88e-3	1.87e-3	9.02e-4	4.48e-4	2.26e-4
$q_{0,1,h}$		1.38	1.67	1.82	1.90
$q_{0,2,h}$		1.21	1.44	1.60	1.69
$q'_{0,1,h}$		2.09	2.06	2.01	1.98
$q'_{0,2,h}$		2.08	2.06	2.01	1.99

Tabelle 4: L-Profil, Fehler und Konvergenzraten zu $c = 1$

Die Konvergenzraten in obigen Normen streben auf dem Teilgebiet gegen 2, auf dem vollen Gebiet, insbesondere in der L^2 -Norm, vermutlich gegen einen kleineren Wert. Dies zeigt deutlich den Effekt der „Verschmutzung“ durch die Singularität in Abstand vom kritischen Teil des Randes. Für dieses Beispiel habe ich Dirichletsche Randbedingungen gewählt, um die Analogie zum bekannten Beispiel der Laplace-Gleichung bei einspringender Ecke zu betonen. Wenn man an den Übergangskanten anstelle der linearen Randbedingung das Verschwinden der Normalenableitung fordert, wird man vermutlich (wie im vorherigen Beispiel der Kettenfläche) einen stärkeren Einfluss der Singularität auf den gesamten nicht-konvexen Teil des Randes beobachten. Die Dirichletsche Randbedingung an den Übergangskanten verhindert dort die Ausbildung einer Grenzschicht.

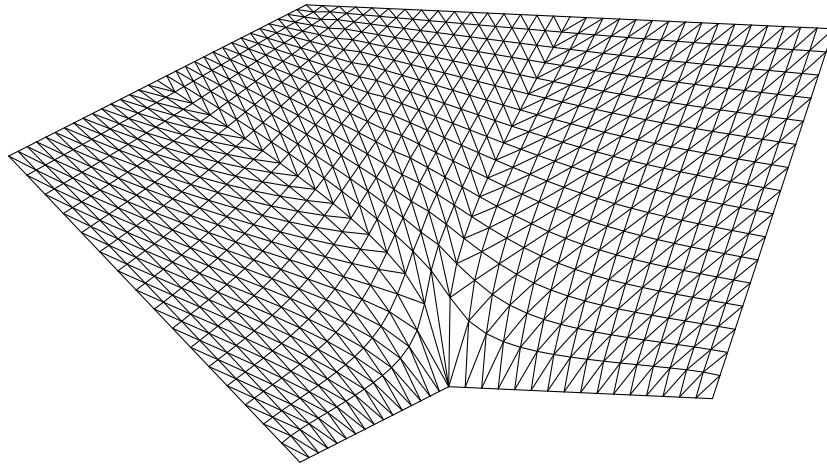


Abbildung 10: L-Profil, $c = 1/2$

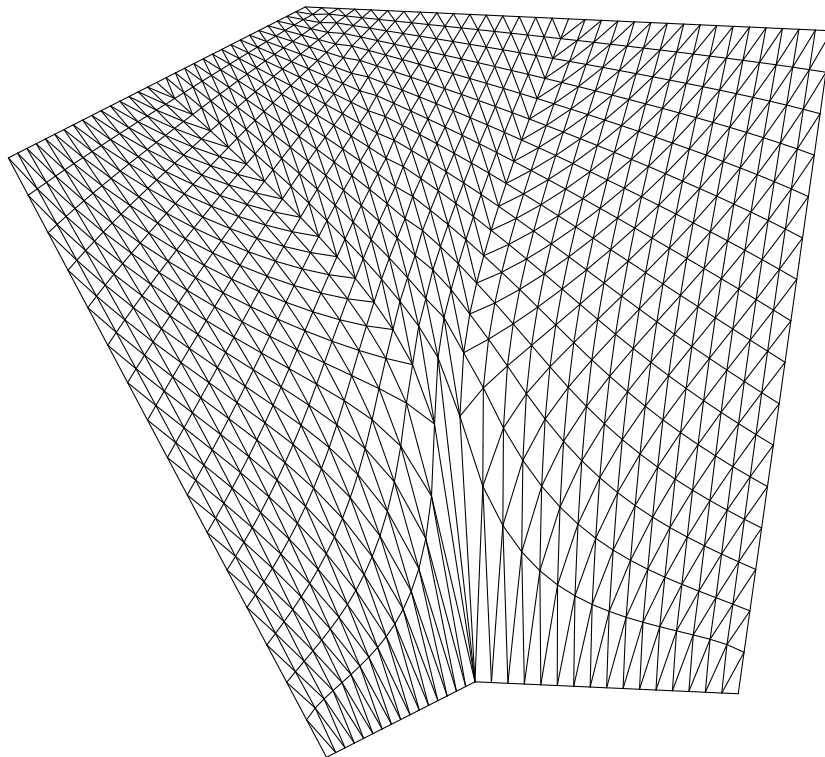


Abbildung 11: L-Profil, $c = 1$

Abbildung 10 und Abbildung 11 zeigen die Graphen der Näherungslösungen zu den Randwerten $c = \frac{1}{2}$ und $c = 1$ in perspektivischer Darstellung.

4.3 Das Konvergenzverhalten des Newtonverfahrens am Beispiel der Kettenfläche

Das Konvergenzverhalten der globalen Linearisierungsmethode sei anhand zweier Fälle des Beispiels aus Abschnitt 4.2.2 veranschaulicht. Wir betrachten den Fall der maximalen klassischen Lösung und den Fall der Viskositätslösung, welche auf dem nichtkonvexen Teil des Randes die vorgegebenen Randwerte übertrifft.

Bei unterschiedlich feinen Diskretisierungen wurde das gleiche Konvergenzverhalten beobachtet. Es seien hier die Ergebnisse zur Diskretisierung des viertelkreisringförmigen Gebietes für $h = 0.029$ mit 2501 Unbekannten bei 4800 Dreiecken tabellarisch notiert. Als Abbruchkriterien wurden $\varepsilon_{newt} = 10^{-6}$ und $\varepsilon_{cg} = 10^{-8}$ gewählt.

It.	$r(C)$	λ	rel. Fehler	CG-It.
1	2.39e-04	1.0	1.00e+00	93
	9.20e-05	0.5	2.00e+00	93
2	5.35e-05	0.5	6.93e-01	113
3	2.40e-05	1.0	3.05e-01	97
4	6.90e-06	1.0	6.50e-02	120
5	5.38e-07	1.0	1.53e-02	104
6	3.09e-09	1.0	6.84e-04	66
7	1.71e-10	1.0	1.41e-06	51
8	1.07e-10	1.0	1.17e-09	1

Tabelle 5: Newton-Verfahren zu Fall 2 aus Abschnitt 4.2.2

Tabelle 5 zeigt das Verhalten des Newton-Verfahrens für die maximale klassische Lösung. Es bedeutet “It.” die Nummer der Newtoniteration, $r(C)$ die Norm des Residuums $Y - F(C)$ in $L^2(\Omega_h)$ und “CG-It.” die Anzahl der CG -Iterationen bis zur Erreichung des obigen Kriteriums zu ε_{cg} .

Als “relativer Fehler” wurde die Änderungsrate $\|\delta C\|/\|C'\|$ ausgegeben (vgl. den Algorithmus in Abschnitt 4.1). Die Werte in der ersten Iteration entstehen durch Verwendung des Startvektors $(0)_{n=1}^N$ für den homogenen Teil der Ansatzfunktion.

Tabelle 6 zeigt die entsprechenden Werte für eine Viskositätslösung (Fall 3). Hier wird die Schrittweitensteuerung benötigt. Bei einem Versuch ohne Reduzierung der Schrittweite trat in der Jacobi-Matrix ein zu kleines Diagonalelement auf.

It.	$r(C)$	λ	rel. Fehler	CG-It.
1	1.06e-03	1.00	1.00e+00	135
	1.85e-04	0.50	2.00e+00	135
2	9.41e-05	0.50	7.25e-01	142
3	3.85e-04	1.00	3.43e-01	154
	4.87e-05	0.50	3.99e-01	154
4	1.03e-04	0.50	1.90e-01	147
	3.50e-05	0.25	1.97e-01	147
5	2.58e-05	0.25	1.09e-01	137
6	1.21e-05	0.50	7.30e-02	133
7	7.57e-07	1.00	3.12e-02	122
8	7.36e-09	1.00	1.02e-03	83
9	6.57e-11	1.00	3.72e-06	61
10	2.10e-11	1.00	2.12e-10	1

Tabelle 6: Newton-Verfahren zu Fall 3 aus Abschnitt 4.2.2

Bei der hier benutzten Methode wird der größte Teil der Rechenzeit für die Auflösung des linearen Gleichungssystems in jeder Iteration benötigt. In dieser Arbeit soll gezeigt werden, wie weit man den Rechenaufwand durch Anwendung eines schnellen Verfahrens zur Lösung dieser Gleichungssysteme verringern kann.

Bemerkungen zur Lösung der linearen Gleichungssysteme

In jeder Iteration des Newton-Verfahrens erhält man in unserem Falle eine symmetrische, positiv-definite und schwach besetzte Jacobi-Matrix. Eine gebräuchliche Methode zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer solchen Matrix ist das Verfahren der konjugierten Gradienten (“CG-Verfahren”). Hier wurde eine Variante mit diagonalen Vorkonditionierung nach Deuffhard-Hohmann ([9], Algorithmus 8.21) benutzt. Diese enthält gegenüber dem Verfahren ohne Vorkonditionierung auch ein brauchbares Abbruchkriterium: Bezeichnet $(r_n)_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N$ jeweils den Residuenvektor nach einer CG-Iteration und $(d_n)_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N$ den Vektor der Diagonalelemente der Koeffizientenmatrix $J(C)$, so wird die letzte CG-Iteration als Lösung des linearen Gleichungssystems akzeptiert, wenn mit einer vorgegebenen Fehlerschranke $\varepsilon_{cg} > 0$ gilt: $\sum_{n=1}^N r_n^2/d_n < \varepsilon_{cg}$.

Bezeichnet M einen Mittelwert für die Bandbreite der Koeffizientenmatrix zu den N Unbekannten, so beträgt in oben genanntem Algorithmus die Anzahl

der Gleitkommaoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) für den Start des Verfahrens ungefähr $(2M + 4)N$ und für jeden CG-Iterationsschritt etwa $(2M + 12)N$ (unter der Annahme, dass jede der elementaren Operationen annähernd gleiche Rechenzeit benötigt). Mit steigender Anzahl der Unbekannten steigt jedoch auch die Anzahl der CG-Iterationen (vgl. Tabellen 7 bis 9 im nächsten Abschnitt).

Effizienter arbeitet bei größeren Gleichungssystemen das algebraische Mehrgitterverfahren, dessen Rechenaufwand asymptotisch proportional zur Anzahl der Unbekannten ist.

4.4 Ein Vergleich der Rechenzeiten zwischen CG-Verfahren und algebraischem Mehrgitterverfahren

In den vorliegenden Berechnungen wurde, wie bei Anwendungen der Methode der finiten Elemente meist üblich, das Gleichungssystem zu einem unstrukturierten Gitter mit kompakter Speicherung der Matrix aufgestellt. Die Lösung erfolgte, wie bereits erwähnt, mit Hilfe des CG-Verfahrens.

Besonders geeignet für die Lösung von Gleichungssystemen, die bei der Diskretisierung elliptischer Randwertaufgaben auf solchen Gittern entstehen, ist das von Stüben/Trottenberg entwickelte "Algebraische Mehrgitterverfahren" (kurz: "AMG", vgl. [34], siehe auch [36]). Versuchsweise wurde zu einer Folge von Diskretisierungen, die aus dem größten Gitter des Beispiels aus Abschnitt 4.2.2 durch fortgesetzte Halbierung der Gitterweite entsteht, in einem einzelnen Schritt des Newton-Verfahrens das lineare Gleichungssystem mit AMG gelöst und die Rechenzeiten gemessen. Sie wurden mit den Rechenzeiten des CG-Verfahrens mit diagonalen Vorkonditionierung verglichen. Der Vergleich wurde auf einem Rechner der GMD des Typs RS/6000 der Marke IBM mit Prozessor 604e und 332 MHz Taktfrequenz durchgeführt. Es erfolgten keine besonderen Maßnahmen zur Optimierung der Rechenleistung.

Die Feinheit des größten Gitters beträgt $h_0 = 0.057$. Durch Unterteilung in Dreiecke etwa halber Seitenlänge (die Kanten der Dreiecke an Außen- und Innenrand werden nicht exakt halbiert, weil die Teilungspunkte auf den Kreisbogenstücken des Randes liegen), wurden Verfeinerungen erzeugt, welche in etwa die Feinheit $h = \frac{h_0}{2^m}$ für $m = 1, \dots, 5$ haben. Einen Vergleich der Rechenzeiten von CG- und AMG-Verfahren für die drei Fälle des Beispiels aus Abschnitt 4.2.2 zeigen die Tabellen 7, 8 und 9.

m	N	it_a / it_{ges}	it_{CG}	Lev / Cyc	t_{CG}	t_{AMG}
0	651	1 / 4	50	3 / 4	0.04	0.10
1	2501	1 / 4	95	4 / 4	0.38	0.53
2	9801	1 / 4	128	5 / 4	2.32	2.34
3	38801	1 / 4	201	6 / 4	14.64	9.97
4	154401	1 / 4	400	7 / 4	116.7	40.69
5	616001	1 / 4	797	8 / 4	927.4	166.1

Tabelle 7: Rechenzeiten CG – AMG, Fall 1 aus Abschnitt 4.2.2

m	N	it_a / it_{ges}	it_{CG}	Lev / Cyc	t_{CG}	t_{AMG}
0	651	3 / 7	31	3 / 4	0.02	0.11
1	2501	4 / 8	120	4 / 4	0.48	0.52
2	9801	5 / 8	182	5 / 4	3.28	2.32
3	38801	4 / 8	266	6 / 4	19.31	9.81
4	154401	4 / 9	531	7 / 4	154.6	40.32
5	616001	4 / 9	1059	8 / 4	1232.0	164.5

Tabelle 8: Rechenzeiten CG – AMG, Fall 2 aus Abschnitt 4.2.2

m	N	it_a / it_{ges}	it_{CG}	Lev / Cyc	t_{CG}	t_{AMG}
0	651	3 / 8	78	3 / 4	0.06	0.11
1	2501	4 / 10	147	4 / 4	0.59	0.50
2	9801	5 / 10	269	5 / 4	4.84	2.30
3	38801	4 / 12	490	6 / 4	35.53	9.54
4	154401	4 / 12	700	7 / 4	204.0	40.15
5	616001	4 / 14	1416	8 / 4	1646.5	163.6

Tabelle 9: Rechenzeiten CG – AMG, Fall 3 aus Abschnitt 4.2.2

Legende:

- m : Verfeinerungsstufe: $h \approx \frac{h_0}{2^m}$
- N : Anzahl der Unbekannten
- it_a / it_{ges} : ausgewählte Newton-Iteration it_a von insgesamt it_{ges}
- it_{CG} : Anzahl der CG-Iterationen
- Lev / Cyc : Anzahl Levels und Anzahl Zyklen des AMG-Verfahrens
- t_{CG} : Rechenzeit des CG-Verfahrens in sec
- t_{AMG} : Rechenzeit des AMG-Verfahrens in sec

Beim Mehrgitterverfahren bezeichnet “Lev” die Schachtelungstiefe eines Mehrgitterzyklus und “Cyc” die Gesamtzahl dieser Zyklen bis zur Erreichung des Konvergenzkriteriums.

Es wurde mit Version 15b des Programms AMG von Stüben gerechnet. Bild 12 zeigt die Rechenzeiten des Grenzfalls 2 (Tabelle 8) von AMG (durchgezogene Linie) und CG-Verfahren (unterbrochene Linie) im logarithmischen Maßstab in Abhängigkeit von der Verfeinerungsstufe m des Gitters.

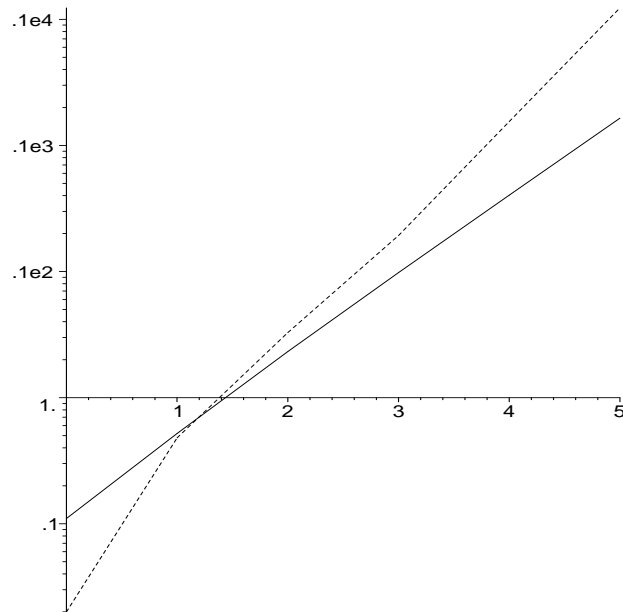


Abbildung 12: Rechenzeiten von AMG- und CG-Verfahren

Interpretation der Ergebnisse

Der Aufwand an Rechenleistung für die Lösung der linearen Gleichungssysteme wird bestimmt durch die Anzahl der Unbekannten und durch die Bandbreite der Matrix. Beim Übergang vom gröberen zum nächstfeineren Gitter wächst die Anzahl der Unbekannten auf ungefähr das Vierfache. Es sei hier Rechenleistung mit Rechenzeit gleichgesetzt. Die Rechenzeiten des AMG steigen im gleichen Verhältnis, während die Rechenzeiten des CG-Verfahrens mit Vorkonditionierung jeweils ungefähr mit Faktor 8 größer werden. Da die Anzahl der Iterationen des CG-Verfahrens sich bei einem Verfeinerungsschritt etwa verdoppelt, steht dies in Einklang mit der Bemerkung über den Rechenaufwand für eine CG-Iteration am Ende von Abschnitt 4.3, da die Bandbreite der Koeffizientenmatrix hier konstant bleibt.

Zusammenfassung

Der Rechenaufwand des CG-Verfahrens ist etwa proportional zu $N^{\frac{3}{2}}$, während der Rechenaufwand des AMG sich proportional zu N verhält, wenn N die Anzahl der Unbekannten bezeichnet und die Bandbreite der Matrix konstant bleibt.

5 Anwendung des Ritz-Galerkin-Verfahrens im Eindimensionalen auf den radialsymmetrischen Fall

Wir betrachten den Fall der Dimension $N = 2$ aus Abschnitt 1.4. Die Intervallenden seien hier mit $0 < a < b$ bezeichnet. Das zu minimierende Funktional A als Funktion der radialsymmetrischen Funktion $u \in W^{1,1}(a, b)$ lautet in Polarkoordinaten nach Ausführen der Integration über den Winkel

$$A(u) = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + u'(x)^2} dx.$$

Die Randbedingungen schreiben wir o.B.d.A. in der Form

$$(48) \quad u(a) = 0, \quad u(b) = B.$$

Die Extremalen, welche der linken Randbedingung genügen, lauten dann

$$(49) \quad \Phi(x; c) := \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{c}\right)^2 - 1}}$$

mit $c \in (0, a]$. Das Minimum ist durch die Gleichung $\Phi(b; c) = B$ bestimmt.

Das Funktional A ist unter den Extremalen eine streng monoton wachsende Funktion des Parameters c ; nach Eigenschaft von c folgt für festes c mit $u(x) := \Phi(x, c)$

$$\frac{A(u)}{2\pi} = \int_a^b \sqrt{1 + u'(x)^2} x dx = \frac{1}{c} \int_a^b x^2 u'(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - c^2}} dx.$$

Nach Ausführen der Integration erhält man

$$A(u) = \pi c^2 \left[\frac{x}{c} \sqrt{\left(\frac{x}{c}\right)^2 - 1} + \operatorname{arcosh} \left(\frac{x}{c}\right) \right]_{x=a}^{x=b}.$$

5.1 Approximation durch stückweise lineare Funktionen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$. (Die Bedingung $a > 0$ wird hier nur mit Rücksicht auf den radialsymmetrischen Fall gefordert.)

Definition 5.1 *Bezeichne $U_s[a, b]$ den Vektorraum aller im Intervall $[a, b]$ stetigen, stückweise affin-linearen Funktionen und $C_s^1[a, b]$ den Vektorraum aller*

im Intervall $[a, b]$ stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Funktionen mit der Norm

$$(50) \quad \|u\|_{C_s^1[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} \{|u(x)|, |u'_+(x)|, |u'_-(x)|\},$$

wobei u'_+ und u'_- die rechts- bzw. linksseitig stetigen einseitigen Ableitungen von u bezeichne.

Im Folgenden stellen wir einige bekannte Ergebnisse ohne Beweis zusammen.

Bemerkung 5.2

1. Der Vektorraum $U_s[a, b]$ ist Untervektorraum von $C_s^1[a, b]$.
2. Der Vektorraum $C_s^1[a, b]$ ist Untervektorraum von $W^{1,1}(a, b)$.
3. Der Vektorraum $C^\infty[a, b]$ ist dichter Untervektorraum von $W^{1,1}(a, b)$.
4. Der Vektorraum $C^\infty[a, b]$ ist dichter Untervektorraum von $U_s[a, b]$ in der Norm (50).
5. Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $u \in C_s^1[a, b]$ gilt:

$$\|u\|_{W^{1,1}(a,b)} \leq C \|u\|_{C_s^1[a,b]}$$

◇

Folgerung: Der Untervektorraum $U_s[a, b]$ liegt dicht in $W^{1,1}(a, b)$.

◇

Beispiel 5.3 Die im Falle $b > a \geq 1$ definierte Funktion $\operatorname{arcosh}|_{[a,b]}$ gehört zu $W^{1,1}(a, b)$. Wegen der Unbeschränktheit der Ableitung an der Stelle $x = 1$ gehört diese Funktion jedoch nur im Falle $a > 1$ zum Raum $C^\infty[a, b]$.

Die im Folgenden betrachtete Approximation durch lineare finite Elemente besteht aus einer speziellen Folge von Näherungen aus dem Untervektorraum $U_s[a, b]$.

Diskretisierungen im Eindimensionalen beschreiben wir mittels Zerlegungen von Intervallen. Wir spezialisieren jetzt die Definitionen und erste Eigenschaften entsprechend Abschnitt 4 auf den radialsymmetrischen Fall.

Definition 5.4 Unter einer Diskretisierung des Intervalls (a, b) versteht man eine Zerlegung $\mathcal{Z} = (x_n)_{n=0}^N$ von Punkten x_n , wobei $N \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Bezeichne $h_n := x_{n+1} - x_n$ für $0 \leq n < N$ die Längen der Teilintervalle und $|h| := \max\{h_n : 0 \leq n < N\}$ die Feinheit der Diskretisierung.

Bezeichne $U_s^h := \{u \in C[a, b] : u|_{[x_n, x_{n+1}]}$ linear für $n = 0, \dots, N-1\}$, und $V_s^h := \{u \in U_s^h : u(a) = u(b) = 0\}$.

Bezeichne $U_s^h(B) := \{u \in U_s^h : u(a) = 0, u(b) = B\}$ den affinen Unterraum aller Funktionen aus U_s^h , welche die Randbedingung erfüllen.

Definiere für $n, m = 1, \dots, N$ die Funktionen $\phi_n \in U_h$ durch

$$\phi_n(x_m) := \delta_{m,n} := \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n). \end{cases}$$

Für das Weitere in Abschnitt 5 definiere das Funktional A durch

$$A(u) := \int_a^b \sqrt{1 + u'(x)^2} x \, dx \quad \text{für } u \in W^{1,1}(\Omega)$$

und A_h als die Einschränkung von A auf U_s^h .

Bemerkung 5.5

1. Der Vektorraum U_s^h ist Untervektorraum von $C_s^1[a, b]$ und damit auch für jedes $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ von $W^{1,p}(a, b)$.
2. Der Vektorraum V_s^h ist für jedes $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, Untervektorraum von $W_0^{1,p}(a, b)$.
3. Die Menge $\{\phi_n\}_{n=0}^N$ ist Basis des Vektorraums U_s^h .
4. Die Menge $\{\phi_n\}_{n=1}^{N-1}$ ist Basis des Vektorraums V_s^h .
5. Die Basisfunktionen haben die Trägermengen $\text{supp } \phi_0 = [a, x_1]$, $\text{supp } \phi_N = [x_{N-1}, b]$, und $\text{supp } \phi_n = [x_{n-1}, x_{n+1}]$ für $n = 1, \dots, N-1$.
6. Die Ableitungen der Basisfunktionen in den Trägermengen lauten $\phi'_0(x) = -1/h_0$ für $x \in (a, x_1)$, $\phi'_N(x) = 1/h_{N-1}$ für $x \in (x_{N-1}, b)$, und

$$\phi'_n(x) = \begin{cases} 1/h_{n-1} & \text{für } x_{n-1} < x < x_n \\ -1/h_n & \text{für } x_n < x < x_{n+1} \end{cases}$$

für $n = 1, \dots, N-1$.

7. Das Funktional A_h ist konvex und auf dem affinen Raum $U_s^h(B)$ strikt konvex.

8. Das Funktional A_h ist auf dem affinen Raum $U_s^h(B)$ koerzitiv.

◇

Satz 5.6 *Zu jeder Diskretisierung \mathcal{Z}_h des Intervalls (a, b) gibt es genau ein Minimum u_h von A_h in $U_s^h(B)$. Dieses ist eindeutig bestimmt durch die Gleichungen*

$$(51) \quad \int_a^b \frac{u'_h \phi'_n x \, dx}{\sqrt{1 + |u'_h|^2}} = 0, \quad n = 1, \dots, N - 1.$$

Beweis: Da das Funktional A_h koerzitiv und der affine Unterraum $U_s^h(B)$ endlichdimensional ist, folgt die Existenz eines Minimums u_h in $U_s^h(B)$. Dessen Eindeutigkeit folgt aus der strikten Konvexität des Funktionals auf dem affin-linearen Teilraum. Aus dem gleichen Grunde ist das Verschwinden der Ableitung des Funktionals $V_s^h \ni v \rightarrow A_h(u_h + v) \in \mathbb{R}$ notwendige und hinreichende Bedingung für ein striktes absolutes Minimum. Wegen der endlichen Dimension des Vektorraumes V_s^h genügt dies für eine Basis. Formel (51) ist die entsprechende Aussage für die Basis $(\phi_n)_{n=1}^{N-1}$.

Definition 5.7

1. Zu einer Zerlegung $\mathcal{Z} = (x_n)_{n=0}^N$ des Intervalls (a, b) bezeichne $z_n := 1/2(x_n + x_{n+1})$, $n = 0, \dots, N - 1$, die Mittelpunkte der Teilintervalle.
2. Zur Funktion $u_h \in U_s^h$ gemäß Satz 5.6 bezeichne $p_n := u'_h(z_n)$ für $n \in 0, \dots, N - 1$.

Bemerkung 5.8 Mit den Bezeichnungen aus Definition 5.7 gilt: Eine Funktion $u_h \in U_s^h$ ist genau dann Lösung von (51), wenn gilt:

$$(52) \quad \frac{p_{n-1}}{\sqrt{1 + p_{n-1}^2}} z_{n-1} - \frac{p_n}{\sqrt{1 + p_n^2}} z_n = 0 \quad \text{für } n = 1, \dots, N - 1.$$

◇

Dies folgt durch Ausführen der Integration in (51). Aus diesen $N - 1$ Gleichungen kann man die Unbekannten p_n für $n = 0, \dots, N - 1$ bestimmen, wenn man die

durch Integration von u'_h über dem Intervall $[a, b]$ aus den Randbedingungen $u_h(a) = 0$, $u_h(b) = B$ gewonnene Gleichung

$$(53) \quad \sum_{n=0}^{N-1} h_n p_n = B$$

hinzunimmt. Das gesuchte Funktional u_h läßt sich aus $(p_n)_{n=0}^{N-1}$ elementar berechnen: Zu $x \in (a, b]$ wähle $n \in \{0, \dots, N-1\}$ derart, dass $x \in (x_n, x_{n+1}]$. Dann gilt $u_h(x) = \sum_{j=0}^{n-1} h_j p_j + (x - x_n) p_n$.

Ein Standardverfahren zur numerischen Berechnung von u_h

Es bezeichne $G: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ die streng monoton wachsende Funktion

$$(54) \quad G(p) := \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

sowie $U = (u_n)_{n=1}^{N-1}$ einen Vektor in \mathbb{R}^{N-1} , und $u_0 := 0$, $u_N := B$. Betrachte die durch

$$F_n(U) := G\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{h_{n-1}}\right) z_{n-1} - G\left(\frac{u_{n+1} - u_n}{h_n}\right) z_n = 0, \quad n = 1 \dots N-1$$

definierte Abbildung $F := (F_n)_{n=1}^{N-1}: \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$. Dann gilt aufgrund von (52) die Gleichung $F(U) = 0$ genau dann, wenn $u_n = u_h(x_n)$ für $n = 1, \dots, N-1$ mit der Funktion u_h gemäß Satz 5.6. Hieraus bestimmen wir U und damit u_h wie im zweidimensionalen Fall durch das Newton-Verfahren.

Bemerkung 5.9 Die Jacobi-Matrix $J(U) = \left(\frac{\partial F_n}{\partial u_m}(U)\right)_{n,m=1}^{N-1}$ des Newton-Verfahrens hat Tridiagonalform und ist symmetrische, positiv definite M-Matrix. \diamond

Beweis: Die Matrix $J(U)$ hat die Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_n}{\partial u_n} &= a_{n-1} + a_n, & \frac{\partial F_n}{\partial u_{n-1}} &= -a_{n-1}, & \frac{\partial F_n}{\partial u_{n+1}} &= -a_n, \text{ und} \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_m} &= 0, \text{ falls } |n - m| > 1, \text{ wobei} \\ a_n &:= \frac{z_n}{h_n} G'\left(\frac{u_{n+1} - u_n}{h_n}\right) \text{ und } G'(p) = \frac{1}{(1+p^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Es gilt $a_n > 0$. Die positive Definitheit ersieht man für $y = (y_n)_{n=1}^{N-1} \in \mathbb{R}^{N-1}$ aus

$$(J(U) y, y) = \sum_{n,m=1}^{N-1} \frac{\partial F_n}{\partial u_m} y_n y_m = a_0 y_1^2 + \sum_{n=1}^{N-2} a_n (y_{n+1} - y_n)^2 + a_{N-1} y_{N-1}^2.$$

Numerische Experimente wurden für verschiedene Werte von $B > 0$ durchgeführt. Dabei konnten die Ergebnisse der Rechnungen in \mathbb{R}^2 aus Abschnitt 4.2, Beispiel 2, bestätigt werden. Es zeigte sich, dass als Startvektor für das Newton-Verfahren die Werte der Verbindungsstrecke der Punkte $(1, 0)$ und $(2, B)$ dienen können. Das herkömmliche Verfahren konvergiert damit für jedes $0 < B < \operatorname{arcosh}(2)$. Für größere Werte von B ist Konvergenz noch bei Verwendung der oben beschriebenen Dämpfungsstrategie zur Steuerung der Schrittweite zu erreichen. Die erforderliche Anzahl der Iterationen liegt in der Größenordnung von 10.

5.2 Abschätzung des Fehlers und Konvergenzfragen

In diesem Teilabschnitt gelte o.B.d.A. $a = 1$ und $b = 2$. Bezeichne $c \rightarrow \Phi(\cdot, c)$ die zu $a = 1$ gehörige vom Parameter $c \leq 1$ abhängige Extremalenschar gemäß (49). Die Variationsgleichungen des diskreten Falls kann man auch so interpretieren: Ist $u_h \in U_s^h(B)$ schwache Lösung der diskreten Randwertaufgabe, d.h. Lösung von (51), und hierzu z_n, p_n gemäß Definition 5.7 erklärt, dann bedeutet Gleichung (52): Es gibt eine Konstante $c_h \in \mathbb{R}$ derart, dass mit der in (54) definierten Funktion G gilt:

$$(55) \quad z_n G(p_n) = \frac{z_n p_n}{\sqrt{1 + p_n^2}} = c_h \quad \text{für } 0 \leq n < N.$$

Aufgrund von Gleichung (53) ist c_h nur von \mathcal{Z} und von B abhängig, $c_h = c(B, \mathcal{Z})$. Gleichung (55) ist das Analogon zum kontinuierlichen Fall. Kennt man c_h , so sind über die Umkehrfunktion $G^{-1}(q) = \frac{q}{\sqrt{1 - q^2}}$ die Ableitungen der Näherung explizit angebar:

$$(56) \quad p_n = G^{-1}\left(\frac{c_h}{z_n}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z_n}{c_h}\right)^2 - 1}}.$$

Die Konstante c_h genügt folgender elementarer Abschätzung:

Lemma 5.10

Sei $B > 0$. Dann gilt $0 < c_h < 1 + h_0/2$ und $p_n = \Phi'(z_n; c_h)$ für $n = 0, \dots, N - 1$. Wenn $B \geq \operatorname{arcosh}(2)$, dann gilt $c_h > 1$. Wenn $B < \operatorname{arcosh}(2)$, dann gibt es ein $\delta = \delta(B) > 0$ derart, dass $c_h < 1$ gilt, wenn $|h| < \delta$.

Beweis: Aus den Gleichungen (55) folgt, dass alle p_n das gleiche Vorzeichen wie c_h haben. Wegen $0 < B = u_h(2) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n p_n$ gilt $p_n > 0$ für $n = 0, \dots, N - 1$. Damit folgt $0 < c_h = z_0 G(p_0) < z_0 = 1 + \frac{h_0}{2}$.

Die Funktion $x \rightarrow \Phi(x; c_h)$ ist für $x > c_h$ beliebig oft differenzierbar. Ihre Ableitung $\Phi'(x; c_h) = \left(\left(\frac{x}{c_h} \right)^2 - 1 \right)^{-1/2}$ muss wegen (56) in den Punkten $x = z_n$ mit p_n übereinstimmen.

Sei $B \geq \operatorname{arcosh}(2)$. Die Funktion $(1, 2) \ni x \rightarrow \Phi'(x; 1)$ ist strikt konvex: man hat $\Phi''(x; 1) = -\frac{x}{(x^2-1)^{3/2}}$, $\Phi'''(x; 1) = \frac{2x^2+1}{(x^2-1)^{5/2}} > 0$. Damit folgt aus dem Anhang, Bemerkung zu (63), durch Summation

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} h_n \Phi'(z_n; 1) &< \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Phi'(x; 1) dx = \Phi(2; 1) = \operatorname{arcosh}(2) \\ &\leq B = \sum_{n=0}^{N-1} h_n p_n = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \Phi'(z_n; c_h). \end{aligned}$$

Da die Funktionen $(0, z_0) \ni \gamma \rightarrow \Phi'(z_n; \gamma)$ für $n = 0, \dots, N-1$ streng monoton wachsend sind, ist nur $c_h > 1$ möglich.

Sei nun $0 < B < \operatorname{arcosh}(2)$. Nach Abschnitt 1.4 gibt es ein $0 < c_0 < 1$ derart, dass $u_0(x) := \Phi(x; c_0)$ Lösung der Randwertaufgabe im kontinuierlichen Fall ist.

Es konvergiert $\Phi'(x; c) = \left(\left(\frac{x}{c} \right)^2 - 1 \right)^{-1/2}$ bezüglich

$x \in [1, 2]$ gleichmäßig gegen $\Phi'(x; c_0)$ für $c \rightarrow c_0$. Hieraus folgt mit $u'_h(z_0) = \Phi'(z_0; c_h)$ aufgrund von

$$c_h = \frac{(1 + \frac{h_0}{2}) u'_h(1 + \frac{h_0}{2})}{\sqrt{1 + (u'_h(1 + \frac{h_0}{2}))^2}} \rightarrow \frac{u'_0(1)}{\sqrt{1 + u'_0(1)^2}} = c_0 \text{ für } |h| \rightarrow 0,$$

dass $c_h < 1$, wenn $|h|$ hinreichend klein. □

Es folgen Hilfsmittel für eine Fehlerabschätzung.

Lemma 5.11

Sei $x \geq 1$. Dann gilt für $h > 0$

$$\frac{h}{\sqrt{(x + \frac{h}{2})^2 - 1}} < \int_x^{x+h} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} < \frac{h}{\sqrt{(x + \frac{h}{4})^2 - 1}}.$$

Beweis: Die linke Ungleichung folgt aus der Formel (63) des Anhangs. Zum Nachweis der rechten Ungleichung wird gezeigt: Die Funktion

$$\phi(h) := \int_x^{x+h} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} - \frac{h}{\sqrt{(x + \frac{h}{4})^2 - 1}}$$

ist für $h > 0$ streng monoton fallend (die Behauptung folgt dann aus $\phi(h) < \phi(0) = 0$). Es ist nämlich

$$\phi'(h) = \frac{1}{\sqrt{(x+h)^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{(x+h/4)^2-1}} + \frac{h/4(x+h/4)}{((x+h/4)^2-1)^{3/2}}.$$

Die für die Monotonie hinreichende Bedingung $\phi'(h) < 0$ ist äquivalent zu

$$\frac{1}{\sqrt{(x+h)^2-1}} < \frac{(x+h/4)^2-1-h/4(x+h/4)}{((x+h/4)^2-1)^{3/2}},$$

und dies ist für die genannten x und h gleichbedeutend mit

$$((x+h/4)^2-1)^3 < ((x+h)^2-1)(x(x+h/4)-1)^2.$$

Für die Differenz rechnet man

$$\begin{aligned} & ((x+h)^2-1)\left(x\left(x+\frac{h}{4}\right)-1\right)^2 - \left(\left(x+\frac{h}{4}\right)^2-1\right)^3 \\ &= (x^2-1+2xh+h^2)\left(x^4+\frac{x^3}{2}h+\frac{x^2}{16}h^2-2x^2-\frac{x}{2}h+1\right) \\ & \quad - \left\{\left(x+\frac{h}{4}\right)^6-3\left(x+\frac{h}{4}\right)^4+3\left(x+\frac{h}{4}\right)^2-1\right\} \\ &= x^6-3x^4+3x^2-1+\frac{5}{2}x(x^2-1)^2h+\left(\frac{33}{16}x^4-\frac{49}{16}x^2+1\right)h^2 \\ & \quad + x\left(\frac{5}{8}x^2-\frac{1}{2}\right)h^3+\frac{1}{16}x^2h^4 \\ & \quad - \left\{x^6-3x^4+3x^2-1+\frac{3}{2}x(x^2-1)^2h+\left(\frac{15}{16}x^4-\frac{9}{8}x^2+\frac{3}{16}\right)h^2\right. \\ & \quad \left.+x\left(\frac{5}{16}x^2-\frac{3}{16}\right)h^3+\left(\frac{15}{256}x^2+\frac{3}{256}\right)h^4+\frac{3x}{512}h^5+\frac{1}{4096}h^6\right\} \\ &= x(x^2-1)^2h+\left(\frac{18}{16}x^4-\frac{31}{16}x^2+\frac{13}{16}\right)h^2+x\left(\frac{5}{16}x^2-\frac{5}{16}\right)h^3 \\ & \quad +\frac{1}{256}(x^2+3)h^4-\frac{3x}{512}h^5-\frac{1}{4096}h^6 \\ &= x(x^2-1)^2h+\frac{9}{8}(x^2-1)\left(x^2-\frac{13}{18}\right)h^2+\frac{5}{16}x(x^2-1)h^3 \\ & \quad +\frac{h^4}{256}\left(x^2+3-\frac{3}{2}xh-\frac{1}{16}h^2\right). \end{aligned}$$

Für $1 \leq x \leq 2$ und $0 < h \leq 1$ ist diese sicher positiv. \square

Bemerkung 5.12

Sei $B = \operatorname{arcosh}(2)$. Bezeichne $\varepsilon_0 := \max\{\frac{h_n/4}{x_n+h_n/4} : 0 \leq n < N\}$. Dann gibt es ein $\varepsilon_h \in (0, \varepsilon_0)$ derart, dass $c_h = 1 + \varepsilon_h$ gilt. \diamond

Beweis: Wegen Lemma 5.10 gilt $c_h > 1$. Nach Lemma 5.11 gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} h_n \Phi'(z_n; c_h) &= B = \operatorname{arcosh}(2) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &< \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h_n}{\sqrt{(x_n + \frac{h_n}{4})^2 - 1}} \leq \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h_n}{\sqrt{(\frac{z_n}{1+\varepsilon_0})^2 - 1}} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \Phi'(z_n; 1 + \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung folgt aus $x_n + h_n/4 \geq \frac{x_n + h_n/2}{1+\varepsilon_0}$, was für $\varepsilon_0 \geq \frac{h_n/4}{x_n + h_n/4}$ gilt. Aus der strikten Monotonie von $\gamma \rightarrow \Phi'(x; \gamma)$ für $x = z_0, \dots, z_{N-1}$ folgt $c_h < 1 + \varepsilon_0$. \square

Lemma 5.13 Seien $1 < \xi < \zeta < 2$. Dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} < \frac{2}{5} \frac{1}{(\eta - 1)^{\frac{3}{2}}} (\zeta - \xi)$$

mit einem geeigneten $\eta \in (\xi, \zeta)$.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein $\eta \in (\xi, \zeta)$ derart, dass gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{\eta}{(\eta^2 - 1)^{3/2}} (\zeta - \xi) = \frac{\eta}{(\eta + 1)^{3/2}} \frac{1}{(\eta - 1)^{3/2}} (\zeta - \xi).$$

Nun ist die Funktion

$$x \rightarrow \frac{x}{(x + 1)^{3/2}}$$

im Intervall $(1, 2)$ streng monoton wachsend. Ihr Maximum beträgt $\frac{2}{3^{3/2}} < \frac{2}{5}$. \square

Es folgt eine Abschätzung des Fehlers in der Maximumnorm für den Grenzfall $B = \operatorname{arcosh}(2)$ im Fall einer äquidistanten Diskretisierung.

Satz 5.14 Gelte $B = \operatorname{arcosh}(2)$ und $h_0 = h_1 = \dots = h_{N-1} =: h$. Bezeichne u die exakte und u_h die diskrete Lösung der Randwertaufgabe. Dann gilt für den Fehler in der Maximumnorm

$$\|u - u_h\|_\infty < \sqrt{2} \sqrt{h}.$$

Beweis: Seien $x \in [1, 2]$ und $0 \leq n < N$ derart, dass $x \in (x_n, x_{n+1}]$. Dann folgt

$$e_h(x) := |u_h(x) - u(x)| = \left| \int_1^x (u'_h(y) - u'(y)) dy \right| = \left| \sum_{j=0}^{n-1} s_j(x_{j+1}) + s_n(x) \right|,$$

wobei für $j \in \{0, \dots, N-1\}$ und $\xi \in (x_j, x_{j+1}]$

$$s_j(\xi) = (\xi - x_j)u'_h(z_j) - \int_{x_j}^{\xi} u'(y) dy$$

gesetzt sei. Wähle $0 < \varepsilon_h < \varepsilon_0$ gemäß Bemerkung 5.12. Dann gilt $u'_h(z_j) = u'(\frac{z_j}{1+\varepsilon_h})$ für alle $j \in \{0, \dots, N-1\}$. Aus der Äquidistanz der Zerlegung folgt $\varepsilon_0 = \frac{h/4}{1+h/4}$.

Sei zunächst $1 < x \leq 1+h$, d.h. $n = 0$. Infolge der strengen Monotonie der Funktion u' gibt es nach Wahl von ε_h und ε_0 ein $\frac{1}{4} < \theta_1 < \frac{1}{2}$ derart, dass

$$u'_h(z_0) = u'\left(\frac{1+\frac{h}{2}}{1+\varepsilon}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1+\theta_1 h)^2 - 1}}$$

gilt. Aufgrund von Lemma 5.11 gibt es andererseits $\frac{1}{4} < \theta_2 < \frac{1}{2}$ derart, dass

$$\int_1^x \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{x-1}{\sqrt{(1+\theta_2(x-1))^2 - 1}}$$

gilt. Insgesamt folgt

$$e_h(x) = |s_0(x)| = (x-1) \left| \frac{1}{\sqrt{(1+\theta_1 h)^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{(1+\theta_2(x-1))^2 - 1}} \right|.$$

Nun gilt nach Eigenschaft von θ_1

$$\frac{1}{\sqrt{(1+\theta_1 h)^2 - 1}} < \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{1}{4}h)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}h(2+\frac{1}{4}h)}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h}}.$$

Ebenso erhält man für den Term mit θ_2

$$\frac{1}{\sqrt{(1+\theta_2(x-1))^2 - 1}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}.$$

Da $s_0(x)$ Differenz zweier positiver Zahlen ist, folgt

$$e_h(x) = |s_0(x)| < \sqrt{2} \max\left(\frac{x-1}{\sqrt{h}}, \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\right) \leq \sqrt{2}\sqrt{h}.$$

Sei nun $x > 1+h$, d. h. $n > 1$. Zuerst schätzen wir $|s_0(x_1)|$ ab:

Mit dem gleichen Argument wie oben erhält man

$$|s_0(x_1)| = |hu'\left(\frac{z_0}{1+\varepsilon}\right) - \int_1^{1+h} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}| = h \left| \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right|$$

mit geeigneten Zwischenwerten $1 + \frac{h}{4} < \xi, \zeta < 1 + \frac{h}{2}$. Für die Differenz folgt dann aus Lemma 5.13 mit einem geeigneten $1 + \frac{1}{4}h < \eta < 1 + \frac{1}{2}h$ die Abschätzung

$$|s_0(x_1)| < \frac{2}{5} \frac{h}{(\eta - 1)^{3/2}} |\zeta - \xi| < \frac{2}{5} \frac{h}{\left(\frac{h}{4}\right)^{3/2}} \frac{h}{4} = \frac{4}{5} \sqrt{h}.$$

Sei nun $j \in \{1, \dots, N - 1\}$ und $\xi \in (x_j, x_{j+1}]$. Wir schätzen $|s_j(\xi)|$ ab: Bezeichne $\zeta_j := \frac{z_j}{1 + \varepsilon_h}$. Dann gilt nach Eigenschaft von ε_h

$$z_j > \zeta_j > \frac{x_j + \frac{h}{2}}{1 + \varepsilon_0} = \frac{(x_j + \frac{h}{2})(1 + \frac{h}{4})}{1 + \frac{h}{2}} > x_j.$$

Wiederum aus Lemma 5.11 folgt

$$\int_{x_j}^{\xi} u'(y) dy = (\xi - x_j) u'(\eta)$$

mit $x_j < \eta < z_j$. Hiermit erhalten wir

$$s_j(\xi) = (\xi - x_j)(u'(\zeta_j) - u'(\eta)) = (\xi - x_j) \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta_j^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \right).$$

Nach Lemma 5.13 gibt es daher ein $x_j < y < z_j$ derart, dass

$$|s_j(\xi)| < \frac{2}{5} \frac{\xi - x_j}{(y - 1)^{3/2}} |\zeta_j - \eta| < \frac{2}{5} \frac{h}{(x_j - 1)^{3/2}} \frac{h}{2} = \frac{1}{5} \frac{1}{j^{3/2}} \sqrt{h}$$

gilt.

Insgesamt folgt für $n \in \{1, \dots, N - 1\}$ aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |e_h(x)| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |s_j(x_{j+1})| + |s_n(x)| \leq \frac{4}{5} \sqrt{h} + \frac{1}{5} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{3/2}} \sqrt{h} \\ &< \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5} \left(1 + \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^{3/2}} \right) \right) \sqrt{h} \\ &= \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5} \left(1 + (-2) [y^{-1/2}]_1^{\infty} \right) \right) \sqrt{h} = \frac{7}{5} \sqrt{h}. \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhält man für $x \in [1, 2]$ die Abschätzung

$$|u_h(x) - u(x)| = |e_h(x)| < \sqrt{2} \sqrt{h}.$$

□

Das Ergebnis entspricht der in Abschnitt 4.2 empirisch ermittelten Konvergenzrate für die Maximumnorm.

5.3 Zusammenhang mit Funktionen von beschränkter Variation

Wenn die Randwertaufgabe des kontinuierlichen Modells eine nicht-klassische Lösung hat, konvergieren ihre Approximationen durch lineare finite Elemente zwar in $L^1(a, b)$, nicht aber in $W^{1,1}(a, b)$. Das folgende Beispiel zeigt, dass auch in der Halbnorm des Raumes der Funktionen von beschränkter Variation $BV(a, b)$ keine Konvergenz zu erwarten ist.

Beispiel 5.15 Seien für $0 < \delta < 1$ die Funktionen u_δ definiert durch

$$u_\delta(x) := \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1 - \delta) \\ \frac{1}{\delta}(x - (1 - \delta)) & (1 - \delta < x \leq 1). \end{cases}$$

Jede dieser Funktionen ist stückweise stetig differenzierbar und gehört damit zu $W^{1,1}(0, 1)$ und erst recht zu $BV(0, 1)$. Für $\delta \rightarrow 0$ konvergieren die u_δ punktweise gegen die Funktion u_0 , welche an der Stelle 1 den Wert 1 und sonst den Wert 0 annimmt. u_0 gehört zur Äquivalenzklasse der Nullfunktion im Raum $BV(0, 1)$. Es gilt für $\delta \rightarrow 0$:

1. $\lim u_\delta = 0$ in $L^1(0, 1)$
2. (u_δ) nicht konvergent in $W^{1,1}(0, 1)$
3. (u_δ) nicht konvergent in $BV(0, 1)$

Beweis: Zu 1.: für $\delta > 0$ gilt: $\int_0^1 |u_\delta(x)| dx = \delta/2$.

Zu 2.: für $0 < \delta' < \delta$ gilt:

$$\int_0^1 |u'_\delta(x) - u'_{\delta'}(x)| dx = \int_{1-\delta}^{1-\delta'} \frac{1}{\delta} dx + \int_{1-\delta'}^1 \left(\frac{1}{\delta'} - \frac{1}{\delta} \right) dx = 2 \left(1 - \frac{\delta'}{\delta} \right).$$

(u_δ) ist also nicht Cauchy-konvergent im Banachraum $W^{1,1}(0, 1)$.

Zu 3.: Annahme: Es existiert ein $u \in BV(0, 1)$ mit $|u_\delta - u|_{BV(0,1)} \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$.

Sei $g \in C_0^\infty(0, 1)$ mit $|g|_{L^\infty} \leq 1$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Annahme gibt es ein $\delta_0 > 0$ derart, dass für alle $0 < \delta < \delta_0$ gilt $|u_\delta - u|_{BV(0,1)} < \varepsilon$ und insbesondere $\int_0^1 (u_\delta(x) - u(x))g'(x) dx < \varepsilon$. Wegen 1. konvergiert für $\delta \rightarrow 0$ die Funktion $(u_\delta - u)g'$ nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz—eine Majorante in $L^1(0, 1)$ ist $(1 + |u(\cdot)|) \max\{|g'(x)| : x \in (0, 1)\}$ —gegen die Funktion $-ug'$ in $L^1(0, 1)$, also gilt: $-\int_0^1 u(x)g'(x) dx \leq \varepsilon$. Da dies für beliebig kleines ε gilt, folgt: $\int_0^1 u(x)g'(x) dx \geq 0$. Ersetzen von g durch $-g$ liefert

$\int_0^1 u(x)g'(x) dx = 0$. Dies gilt dann auch für jedes $g \in C_0^\infty(0,1)$, woraus folgt: $u(x) = \text{const.}$ f.ü. im Intervall $(0,1)$. Dann gilt aber

$$|u_\delta - u|_{BV(0,1)} = |u_\delta|_{BV(0,1)} = \int_0^1 |u'_\delta(x)| dx = 1$$

im Widerspruch zur Annahme. □

Das Verhalten der Funktionen u_δ in der Nähe des Randpunktes $x = 1$ für kleine Werte von δ ist ähnlich dem Verhalten der Approximationen bei Vorliegen einer Lösung mit Ausartung am nicht-konvexen Teil des Randes, sowohl bei Näherung durch Regularisierung (Abschnitt 2.1) als auch bei Näherung durch finite Elementfunktionen.

6 Die parabolische Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung

Die parabolische Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung lautet

$$(57) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = f(x).$$

Hierbei ist die Funktion

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Die gesuchte Lösung

$$u: \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

genüge den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g_0(x) \quad (x \in \partial\Omega \setminus \Gamma), \\ \frac{\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t)}{\sqrt{1 + |Du(x, t)|^2}} &= g_1(x) \quad (x \in \Gamma) \end{aligned}$$

und der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in \Omega).$$

Hierbei sei entweder $\Gamma = \emptyset$ (rein Dirichletsche Randbedingungen) oder Γ endliche Vereinigung offener Kurvenabschnitte von $\partial\Omega$, mit $\emptyset \neq \Gamma \subset \partial\Omega$, $\Gamma \neq \partial\Omega$ (Neumannsche Randbedingungen auf einem Teil des Randes). Alle gegebenen Funktionen seien auf den betreffenden Mengen hinreichend glatt.

Das Verfahren von Ritz-Galerkin beruht auf der schwachen Form der Gleichungen (57):

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - f \right) \phi + \frac{Du D\phi}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right] dx - \int_{\Gamma} g_1 \phi ds = 0,$$

welche für alle $t > 0$ gilt und für alle $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, die auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$ verschwinden.

Bei der Diskretisierung verwenden wir einen Algorithmus, welcher in der Arbeit von Wandtke [37] zur Berechnung des mittleren Krümmungsflusses

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sqrt{1 + |Du|^2} \operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 0$$

beschrieben ist. Hierbei approximiert man die parabolische Anfangswertaufgabe durch eine Folge elliptischer Randwertaufgaben, welche bei Diskretisierung nach der Zeit entstehen. Für die Zeitdiskretisierung wird aufgrund seiner Stabilität das implizite Eulerverfahren eingesetzt. Die Ortsdiskretisierung erfolgt nach dem in Abschnitt 3 beschriebenen Galerkin-Verfahren.

6.1 Semi-Diskretisierung nach der Zeit

Beim impliziten Euler-Verfahren approximiert man für eine Folge von Zeitschritten

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n < \dots$$

den Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_n)$ durch den Rückwärtsdifferenzenquotienten

$$\frac{u(x, t_n) - u(x, t_{n-1})}{\tau_n}, \quad \text{wobei } \tau_n = t_n - t_{n-1}.$$

Für $u(x, t_n)$ erhält man nun eine Näherung $u_n(x)$, welche der elliptischen Gleichung

$$-\operatorname{div} \frac{Du_n}{\sqrt{1 + |Du_n|^2}} + \frac{1}{\tau_n} u_n = f_n \quad \text{mit} \quad f_n = f + \frac{1}{\tau_n} u_{n-1}$$

genügt. Die Randbedingungen gelten unverändert ($n \geq 1$):

$$u_n(x) = g_0(x) \quad (x \in \partial\Omega \setminus \Gamma), \quad \frac{\frac{\partial u_n}{\partial \nu}(x)}{\sqrt{1 + |Du_n(x)|^2}} = g_1(x) \quad (x \in \Gamma).$$

Damit können die Gleichungen für $n = 1, 2, \dots$ rekursiv gelöst werden. Ihre schwache Formulierung lautet

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{\tau_n} - f \right) \phi + \frac{Du_n D\phi}{\sqrt{1 + |Du_n|^2}} \right] dx - \int_{\Gamma} g_1 \phi ds = 0.$$

Der Beweis der Konvergenz dieser Methode im linearen Fall geht auf das Verfahren von Rothe zurück, welches in Ladyshenskaja, Solonnikov, Uralceva [24] beschrieben ist.

6.2 Zur parabolischen Minimalflächengleichung

Gleichung (57) wird für $f \equiv 0$ zur parabolischen Minimalflächengleichung

$$(58) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 0.$$

Zu obigen Anfangs- und Randbedingungen hat Gleichung (58) nach Lichnewsky-Temam [25] in $\Omega \times (0, \infty)$ eine verallgemeinerte Lösung, welche für $t \rightarrow \infty$ gegen eine verallgemeinerte Lösung der Minimalflächengleichung konvergiert. Die Konvergenz ist stark in der Norm von $L^1(\Omega)$ und schwach in der Norm $L^2(\Omega)$. Die Konstruktion dieser Lösung erfolgt über die wie in Abschnitt 2.1 regularisierte Differentialgleichung

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_\varepsilon - \operatorname{div} \frac{Du_\varepsilon}{\sqrt{1 + |Du_\varepsilon|^2}} = 0,$$

die für beliebig große Werte von t eine klassische Lösung besitzt, und Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$. Die verallgemeinerten Lösungen sind Viskositätslösungen. Es liegt die Vermutung nahe, dass die Näherungslösungen der parabolischen Minimalflächengleichung nach obigem Ansatz von Ritz-Galerkin gegen die Viskositätslösung konvergieren und dass diese auch im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ die stationäre Lösung approximieren. Beim Beispiel der Kettenfläche konnte dies numerisch bestätigt werden. Wenn die Lösung der Minimalflächengleichung klassisch ist, gilt dies auch für die stationäre Lösung der zeitabhängigen Gleichung.

6.3 Die parabolische Gleichung konstanter mittlerer Krümmung

In ihrer Arbeit [22] untersuchen Kawohl und Kutev die spezielle parabolische Gleichung des Typs konstanter mittlerer Krümmung (57) mit $f \equiv 1$, d. h.

$$(59) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 1$$

unter homogenen Anfangs- und Randbedingungen:

$$(60) \quad u(x, t) = 0 \quad \text{für } t = 0,$$

$$(61) \quad u(x, t) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega.$$

Hier geben wir ihre Ergebnisse nur im zweidimensionalen Fall an: Sie betrachten Lösungen im Raum \mathbb{R}^N auf dem Kreis mit Radius R und im Raum \mathbb{R}^2 auf dem Quadrat der Seitenlänge a . Für $R > N$ oder $a > 2 + \sqrt{\pi}$, zeigen sie, dass Lösungen im klassischen Sinne nur in einem anfänglichen Zeitintervall existieren. Bei

größeren Zeitwerten erfüllen diese (eindeutig bestimmten) Lösungen die Randbedingungen nur noch im Sinne einer schwachen Viskositätslösung der Anfangs-Randwertaufgabe.

Marcellini und Miller [27] zeigen hierzu numerische Beispiele. Mit der in Abschnitt 6.1 beschriebenen Methode gelangen wir zu den gleichen Ergebnissen, wie im Folgenden ersichtlich.

Bei der Berechnung des diskreten Modells transformieren wir das Grundgebiet auf den Einheitskreis oder das Einheitsquadrat. Als Differentialgleichung des äquivalenten Problems erhält man Gleichung (57) mit $f \equiv R$ (Kreis) bzw. $f \equiv a$ (Quadrat). Im Folgenden geben wir die Transformation an und notieren die betreffenden Ergebnisse aus [22] für die transformierte Gleichung vom parabolischen Typ konstanter mittlerer Krümmung

$$(62) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} - \operatorname{div} \frac{D\tilde{u}}{\sqrt{1 + |D\tilde{u}|^2}} = c.$$

Bemerkung 6.1 Sei u Lösung von (59) in $\Omega \times (0, \infty)$, und sei $c > 0$. Durch die Transformation

$$x = c\xi, \quad t = c^2\tau, \quad \tilde{u}(\xi, \tau) := \frac{1}{c}u(x, t)$$

erhält man eine äquivalente Lösung $(\xi, \tau) \rightarrow \tilde{u}(\xi, \tau)$ von (62) in $(1/c)\Omega \times (0, \infty)$. \diamond

Im Folgenden notieren wir zwei Ergebnisse für Gleichung (62) im Raum \mathbb{R}^2 und schreiben hierbei u statt \tilde{u} . Theorem 2.3 aus [22] für den Kreis lautet in dieser Fassung:

Satz 6.2 *Sei Ω der Einheitskreis in \mathbb{R}^2 und $c > 2$. Dann hat die Anfangsrandwertaufgabe (62), (60), (61) eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^\infty(\Omega \times (0, \infty)) \cap C(\bar{\Omega}) \times [0, \infty)$, welche die Dirichletsche Randbedingung (61) im schwachen Viskositätssinne erfüllt. Überdies werden die Gradienten von u bezüglich der Ortsvariablen auf dem Rand in endlicher Zeit T_* beliebig groß. Für $t < T_*$ wird die Randbedingung im klassischen Sinne erfüllt. Die Funktion $u_t(x, t)$ konvergiert für $t \rightarrow \infty$ gegen den konstanten Wert $c - 2$ in ganz Ω .*

Mit der in Abschnitt 6.1 beschriebenen Methode wurde für Gleichung (62) auf dem Einheitskreis mit $c = 4$ eine diskrete Lösung für ein Gitter aus 1728 Dreiecken ($h \approx 0.089$) berechnet. Es wurde eine feste Zeitschrittweite von 0.01 verwendet.

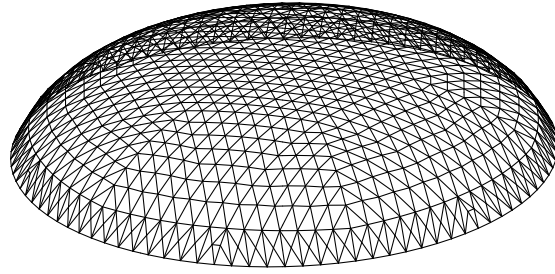


Abbildung 13: u_h für $t = 0.1$

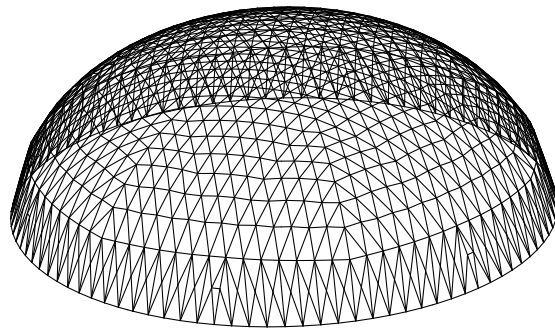


Abbildung 14: u_h für $t = 0.2$

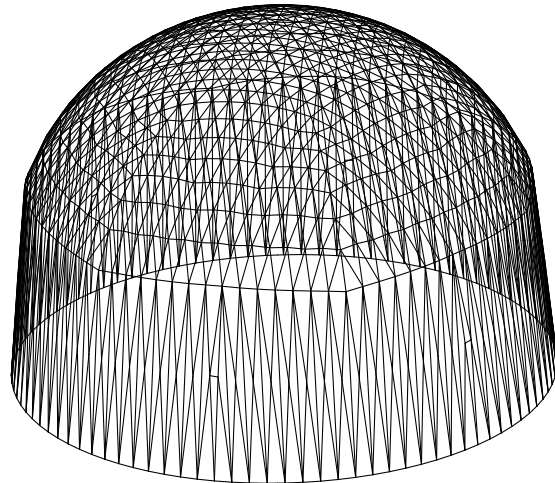


Abbildung 15: u_h für $t = 0.5$

Abbildung 13 bis 15 zeigen den Graphen der diskreten Lösung in verschiedenen Zeitpunkten.

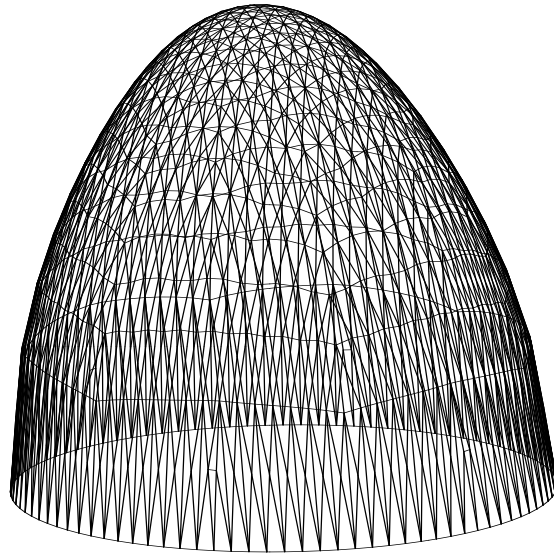


Abbildung 16: $\frac{\partial u_h}{\partial t}$ für $t = 0.1$

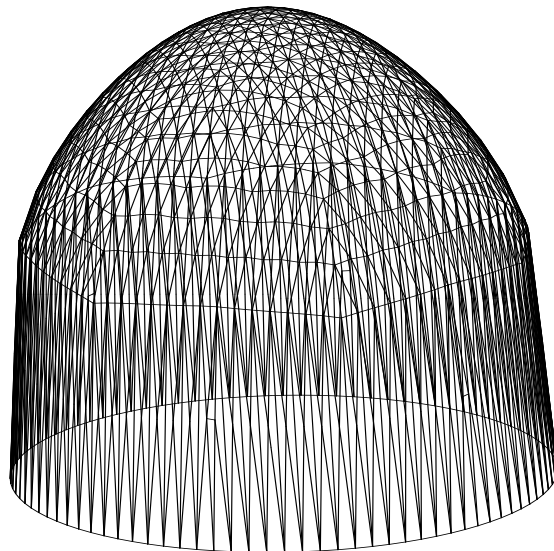


Abbildung 17: $\frac{\partial u_h}{\partial t}$ für $t = 0.2$

Abbildung 16 bis 18 zeigen den Graphen der zeitlichen Ableitung $\frac{\partial u_h}{\partial t}$ in verschiedenen Zeitpunkten (nicht maßstabsgerecht).

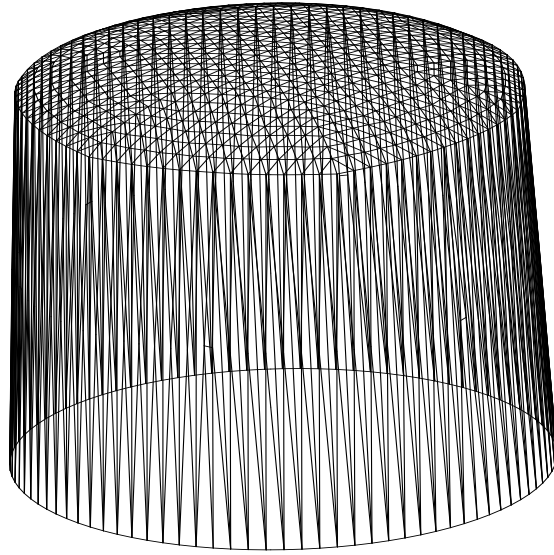


Abbildung 18: $\frac{\partial u_h}{\partial t}$ für $t = 0.5$

Man bemerkt, dass für $t \geq 0.5$ die zeitliche Ableitung der Lösung in den inneren Punkten stationär wird. Dies bedeutet, dass der Graph der Lösung unter Beibehaltung seiner Form mit konstanter Geschwindigkeit ansteigt.

Entsprechend lautet Theorem 2.5 aus [23] für das Quadrat hier:

Satz 6.3 Seien $\Omega = (0, 1)^2$, $c > 2 + \sqrt{\pi}$, und bezeichne Ω_ρ das aus Ω durch Abrunden der Ecken mit Kreisbogenstücken vom Radius ρ entstehende Gebiet. Dann hat die Anfangs-Randwertaufgabe (62), (60), (61) eine Viskositätslösung $u \in C^\infty(\Omega \times (0, \infty)) \cap C(\bar{\Omega}) \times [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. u erfüllt die Dirichletschen Randbedingungen im schwachen Viskositätssinne. Die Spur von u ist auf dem (parabolischen) Rand Lipschitz-stetig.
2. u wächst auf $\partial\Omega_{1/c} \cap \partial\Omega$ nach endlicher Zeit $T^*(x)$ über alle Grenzen: Für $t < T^*(x)$ gelten die Randbedingungen im klassischen Sinne; für $t > T^*$ hebt die Lösung auf $\partial\Omega_{1/c} \cap \partial\Omega$ von den Randdaten (mit unendlicher Steigung) ab.
3. Für $\rho \in [1/c, 1/(2 + \sqrt{\pi})]$ gelten die folgenden für große Zeitwerte scharfen Abschätzungen:

$$u(x, t) \geq (c - 1/\rho)t + \underline{w}_\rho(x) \quad \text{für } x \in \Omega_\rho, \quad t \gg 0,$$

$$u(x, t) \leq (c - 1/\rho)t + \bar{w}_\rho(x) \quad \text{für } x \in \Omega \setminus \Omega_\rho, \quad t \gg 0,$$

wobei \underline{w}_ρ und \bar{w}_ρ von t unabhängig und lokal endlich sind.

Wieder mit der oben beschriebenen Methode wurde für Gleichung (62) auf dem Einheitsquadrat mit $c = 4$ eine diskrete Lösung u_h berechnet. Das Gitter besteht aus 1832 Dreiecken ($h = 0.0625$), die Zeitschrittweite beträgt 0.02. Das Gitter wurde am Rand verfeinert. Die Abbildungen 19 bis 21 zeigen die Graphen von u_h in verschiedenen Zeitpunkten, Abbildungen 22 bis 24 die Graphen der zeitlichen Ableitung $\frac{\partial u_h}{\partial t}$.

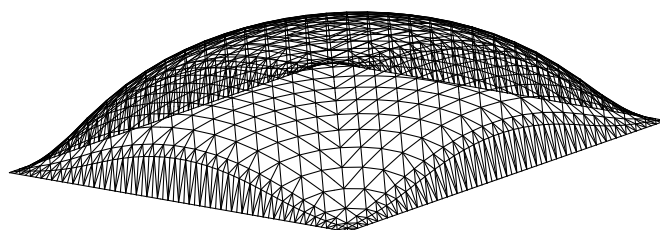


Abbildung 19: Lösung von (62), u_h für $t = 0.25$

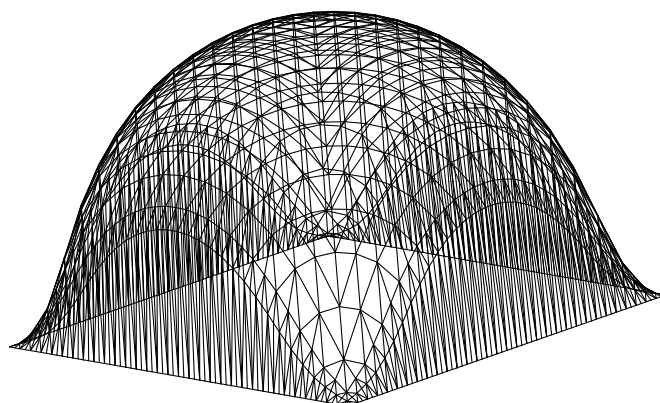


Abbildung 20: Lösung von (62), u_h für $t = 1.0$

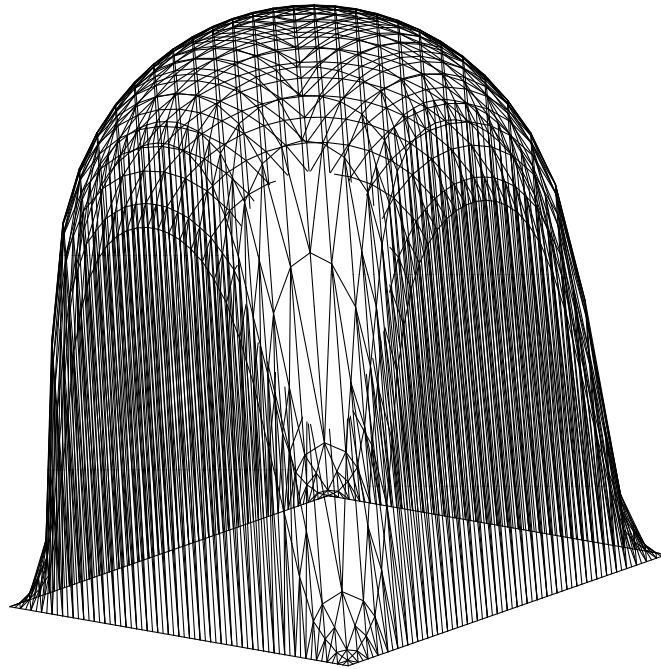


Abbildung 21: Lösung von (62), u_h für $t = 4.0$

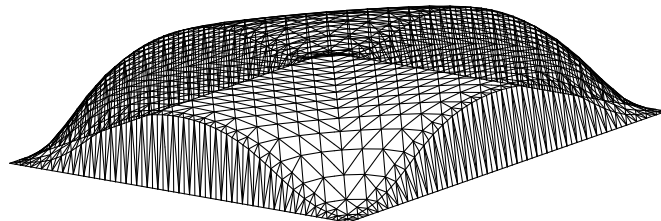


Abbildung 22: Lösung von (62), $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 0.25$

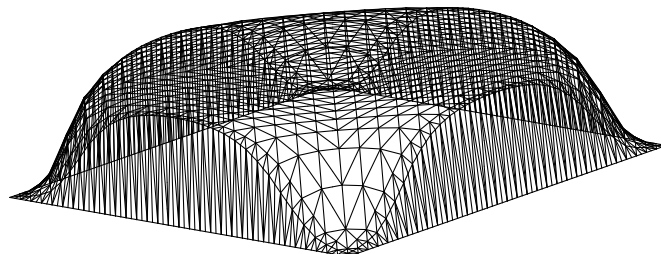


Abbildung 23: Lösung von (62), $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 1.0$

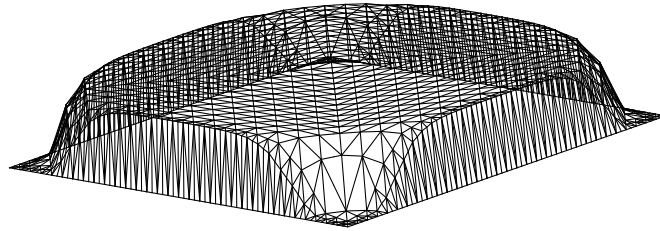


Abbildung 24: Lösung von (62), $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 4.0$

A Anhang

Im Folgenden sind einige in dieser Arbeit benutzte, zumeist bekannte, Grundtatsachen zusammengestellt.

Umkehrfunktion zu cosh:

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \int_1^x \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad \text{für } x \geq 1$$

Integrationsformel:

Sei $h > 0$ und $f \in L^1(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$ im Intervall $(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$ zweimal differenzierbar. Dann gilt

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x) dx = hf(0) + \frac{h^3}{24} f''(\xi)$$

mit einem $\xi \in (-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$.

Integral einer konvexen Funktion:

Sei $a < b$ und $f \in L^1(a, b)$. Wenn f konvex in (a, b) , dann gilt

$$(63) \quad (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Im Falle strikter Konvexität gilt die Ungleichung im strengen Sinne.

Beweis: Sei o.B.d.A. $a = -1$, $b = 1$. Wegen der Konvexität von f folgt für alle $x \in (0, 1)$:

$$f(0) = f\left(\frac{1}{2}(x + (-x))\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)),$$

Integration ergibt:

$$2f(0) \leq \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(-x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Im Falle der strikten Konvexität gilt die Ungleichung im strengen Sinne aufgrund der Stetigkeit von f .

Koerzitivität:

Sei $(E, |\cdot|)$ normierter Vektorraum, und sei

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Funktion f heißt *koerzitiv*, wenn $f(x) \rightarrow \infty$ für $|x| \rightarrow \infty$ gilt.

Ist E endlichdimensional, f strikt konvex und koerzitiv, dann hat f genau ein Minimum in E .

Lemma A.1 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

Sei $u \in C(\Omega)$. Gilt für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u(x)\phi(x) dx = 0,$$

dann folgt $u = 0$.

Der *Beweis* ist bekannt.

Die Sobolevräume $W^{k,p}(\Omega)$

Bezeichne für $N \in \mathbb{N}$ und eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$$L_{loc}^1(\Omega) := \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \forall K \subset \Omega \text{ } K \text{ kompakt} \Rightarrow u|_K \in L^1(K)\}$$

die Menge der in Ω *lokal-integrierbaren* Funktionen.

Zu $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N \in \mathbb{N}_0^N$ bezeichne $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_N$, wenn es sich um den Grad einer Ableitung handelt.

Sei $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Eine Funktion $v \in L_{loc}^1(\Omega)$ heißt α -te *schwache Ableitung von u* , wenn gilt:

$$\int_{\Omega} v(x) \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) \partial^\alpha \phi(x) dx \quad \text{für alle } \phi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega).$$

Man schreibt $v =: \partial^\alpha u$ und bemerkt, dass $\partial^\alpha u$ bis auf Mengen vom Maß Null eindeutig bestimmt ist. Eine Funktion heißt *schwach differenzierbar*, wenn all ihre schwachen Ableitungen erster Ordnung $\partial_j u := \partial^{e_j} u$ existieren, und k -mal *schwach differenzierbar*, wenn all ihre schwachen Ableitungen der Ordnung $|\alpha| \leq k$ existieren. Bezeichne

$$W^k(\Omega) := \{u \in L_{loc}^1(\Omega) : u \text{ } k\text{-mal schwach-differenzierbar}\}.$$

$W^k(\Omega)$ ist Vektorraum und enthält $C^k(\Omega)$.

Die folgende Variante des Fundamentallemmas der Variationsrechnung wird oft als *Lemma von Du Bois-Reymond* bezeichnet.

Lemma A.2

Sei Ω Gebiet in \mathbb{R}^N und $u \in W^1(\Omega)$. Gilt für die schwachen Ableitungen $\partial_j u = 0$, $j = 1, \dots, N$, dann folgt $u(x) = \text{const}$ f. ü. in Ω .

Der *Beweis* erfolgt ähnlich wie in [13]: Sei $x_0 \in \Omega$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass $K := K_\epsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \epsilon\} \subset \Omega$. Da K kompakte Teilmenge ist,

folgt $\delta := \text{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, K) > 0$. Betrachte zu h mit $0 < h < \delta$ die *Friedrichsche Glättung* u_h von u , definiert durch

$$u_h(x) := \frac{1}{h^N} \int_{|y-x| \leq h} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) \, dy,$$

wobei

$$\rho(x) := \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & (|x| < 1) \\ 0, & (|x| \geq 1) \end{cases}$$

und $c > 0$ so gewählt sei, dass $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) \, dx = 1$.

Nach dem Satz über die Vertauschbarkeit von Glättung und schwacher Ableitung (vgl. [14], Lemma 7.3) gilt

$$\partial_j u_h = (\partial_j u)_h = 0 \quad \text{in einer Umgebung von } K.$$

Da u_h im klassischen Sinne differenzierbar ist, gibt es eine Konstante c_h derart, dass $u_h(x) = c_h$ für $x \in K$, und zwar zu jedem wie oben angegebenen h . Da für $h \rightarrow 0$ die Funktionen u_h auf K in der Norm von $L^1(K)$ gegen $u|_K$ konvergieren und $\int_K dx \neq 0$, muss c_h gegen ein $c \in \mathbb{R}$ konvergieren. Damit folgt $\int_K |c - u(x)| \, dx = 0$, also $u(x) = c$ f.ü.

Man überdecke Ω durch eine abzählbare Folge kompakter Kugeln, welche ganz in Ω liegen. Auf diesen ist u jeweils konstant. Da Ω zusammenhängend, folgt, dass $u(x)$ mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null gleich derselben Konstanten ist. \square

Sei $N \in \mathbb{N}$, Ω beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^N , $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$. Der "Sobolevraum" $W^{k,p}(\Omega)$ ist definiert durch

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in W^p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^N, |\alpha| \leq k\}.$$

Durch

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

wird auf $W^{k,p}(\Omega)$ eine Halbnorm definiert und durch

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

eine Norm, unter der $W^{k,p}(\Omega)$ Banachraum ist.

Die Testfunktionen bei Dirichletschen Randwertaufgaben sind im Allgemeinen Elemente des Untervektorraums $W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ von $W^{k,p}(\Omega)$.

Im Falle $p = 2$ sind $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ und der Untervektorraum $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx$$

bzw. seiner Einschränkung auf $H_0^k(\Omega)$ Hilberträume. Das Skalarprodukt erzeugt die Hilbertraumnorm $\|u\|_{H^k(\Omega)} := \langle u, u \rangle_{H^k(\Omega)} = \|u\|_{W^{k,2}(\Omega)}$.

Zum Spuroperator

Da der Rand eines Gebietes im Raum \mathbb{R}^N im Sinne des N -dimensionalen Lebesgue-Maßes eine Nullmenge ist, ist es im Allgemeinen nicht sinnvoll, von Randwerten einer Lebesgue-integrierbaren Funktion zu sprechen. Existieren jedoch die schwachen Ableitungen und ist der Rand des Gebietes "gutartig", so gibt es einen "Spuroperator", der den Begriff der Restriktion einer auf Ω stetigen Funktion auf den Rand verallgemeinert.

Lemma A.3

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand. Dann gibt es eine stetige lineare Abbildung

$$T: W^{1,1}(\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega)$$

derart, dass für alle $u \in C^1(\bar{\Omega})$ gilt:

$$T(u) = u|_{\partial\Omega}.$$

Die Funktion $T(u)$ heißt Spur von u (auf $\partial\Omega$) und wird in diesem Sinne mit $u|_{\partial\Omega}$ bezeichnet.

Funktionen von beschränkter Variation (nach Giusti [15]):

Sei $N \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $u \in L^1(\Omega)$. Bezeichne

$$|u|_{BV(\Omega)} := \sup \left\{ \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \Phi(x) dx : \Phi \in C_0^1(\Omega), |\Phi(x)| \leq 1 (x \in \Omega) \right\} \in [0, \infty].$$

Die Funktion u heißt von beschränkter Variation in Ω , in Zeichen: $u \in BV(\Omega)$, wenn $|u|_{BV(\Omega)} < \infty$. $|\cdot|_{BV(\Omega)}$ ist Halbnorm auf $BV(\Omega)$. Mit der Definition $\|u\|_{BV(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + |u|_{BV(\Omega)}$ wird $BV(\Omega)$ zu einem vollständigen normierten Vektorraum.

Bemerkung:

Es gilt $W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$. Wenn $u \in W^{1,1}(\Omega)$, dann gilt

$$|u|_{BV(\Omega)} = \int_{\Omega} |Du(x)| dx.$$

Für Funktionen einer Variablen gilt folgender Zusammenhang mit der Totalvariation von u :

Bemerkung:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u \in BV(a, b)$. Ist u in jedem Punkt von (a, b) rechts- oder linksseitig stetig, dann gilt:

$$\begin{aligned} & |u|_{BV(a,b)} + \limsup_{x \rightarrow a+0} |u(x) - u(a)| + \limsup_{x \rightarrow b-0} |u(b) - u(x)| \\ &= \sup \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} |u(x_{n+1}) - u(x_n)| : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \right\} < \infty \end{aligned}$$

Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals:

Bezeichne μ das Lebesgue-Maß in \mathbb{R}^N , $N \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ messbar und $f \in L^1(\Omega)$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für jede messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^N$ gilt:

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f| d\mu < \epsilon.$$

Der *Beweis* ist eine Folgerung aus dem Satz von Levi, siehe [17], Theorem 12.34.

Definition einer M-Matrix: (vgl. [16])

Sei $N \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{n,m})_{n,m=1}^N$. A heißt *M-Matrix*, wenn gilt:

1. $a_{n,n} > 0$ für $n = 1, \dots, N$
2. $a_{n,m} \leq 0$ für $n, m = 1, \dots, N$, $n \neq m$
3. A regulär
4. Bezeichnet $A^{-1} = (b_{n,m})_{n,m=1}^N$, dann gilt $b_{n,m} \geq 0$ für $n, m = 1, \dots, N$

Abbildungsverzeichnis

1	Minimalfläche über Einheitskreis, Randbed. $u(x, y) = x^3$	18
2	Klassische Lösungen u_c	22
3	Lösungen u_ϵ und Viskositätslösung u	29
4	Diskretisierung zur Kettenfläche auf Viertelkreisring	53
5	Kettenfläche, gleichmäßig elliptischer Fall	54
6	Kettenfläche, Grenzfall	54
7	Kettenfläche, Viskositätslösung	55
8	L-Profil, Randbedingungen	58
9	L-Profil, grobes Gitter	58
10	L-Profil, $c = 1/2$	60
11	L-Profil, $c = 1$	60
12	Rechenzeiten von AMG- und CG-Verfahren	65
13	u_h für $t = 0.1$	84
14	u_h für $t = 0.2$	84
15	u_h für $t = 0.5$	84
16	$\frac{\partial u_h}{\partial t}$ für $t = 0.1$	85
17	$\frac{\partial u_h}{\partial t}$ für $t = 0.2$	85
18	$\frac{\partial u_h}{\partial t}$ für $t = 0.5$	86
19	Lösung von (62), u_h für $t = 0.25$	87
20	Lösung von (62), u_h für $t = 1.0$	87
21	Lösung von (62), u_h für $t = 4.0$	88
22	Lösung von (62), $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 0.25$	88
23	Lösung von (62), $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 1.0$	88
24	Lösung von (62), $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 4.0$	89

Tabellenverzeichnis

1	Approximationsfehler auf dem Quadrat	52
2	Konvergenzraten auf dem Quadrat	52
3	L-Profil, Fehler und Konvergenzraten zu $c = 1/2$	59
4	L-Profil, Fehler und Konvergenzraten zu $c = 1$	59
5	Newton-Verfahren zu Fall 2 aus Abschnitt 4.2.2	61
6	Newton-Verfahren zu Fall 3 aus Abschnitt 4.2.2	62
7	Rechenzeiten CG – AMG, Fall 1 aus Abschnitt 4.2.2	64
8	Rechenzeiten CG – AMG, Fall 2 aus Abschnitt 4.2.2	64
9	Rechenzeiten CG – AMG, Fall 3 aus Abschnitt 4.2.2	64

Literatur

- [1] Barles, G., Perthame, B.: Comparison Principle for Dirichlet-Type Hamilton-Jacobi Equations and Singular Perturbations of Degenerated Elliptic Equations; *Appl. Math. Optim.* **21** (1990), 21–44
- [2] Braess, D.: *Finite Elemente*; 2. Aufl., Springer, Berlin (1997)
- [3] Braess, D.: *Finite elements*; Cambridge University Press, Cambridge (1997)
- [4] Brenner, S.C., Scott, L.R.: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*; Springer, New York (1994)
- [5] Ciarlet, P. G.: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*; North-Holland, New York (1978)
- [6] Crandall, M. G. , Ishii, H., Lions, P. L.: User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations; *Bull. Amer. Math. Soc.* **27** (1992), 1–67
- [7] Crandall, M. G.: *Viscosity Solutions: A Primer*; in: *Viscosity Solutions and Applications*; Editors: I. Capuzzo Dolcetta, P. L. Lions; Springer Lecture Notes 1660, Berlin (1997)
- [8] Deckelnick, K., Dziuk, G.: *Discrete anisotropic curvature flow of graphs* (Preprint); Mathemat. Fakultät der Universität Freiburg, Freiburg (1996)
- [9] Deuffhard, P., Hohmann, A.: *Numerische Mathematik I*; 2. Auflage, W. de Gruyter, Berlin, New York (1993)
- [10] Ekeland, I., Temam, R.: *Analyse convexe et problemes variationnels*; Dunod Gauthier Villars, Paris (1974)
- [11] Ekeland, I., Temam, R.: *Convex analysis and variational problems*; North-Holland, Amsterdam (1976)
- [12] Fučík, S., Nečas, J., Souček, V.: *Einführung in die Variationsrechnung*; Teubner, Leipzig (1977)
- [13] Giaquinta, M., Hildebrandt, S.: *Calculus of Variations I: The Lagrangian Formalism*; Springer, Berlin (1996)
- [14] Gilbarg, D., Trudinger, N. S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*; Second Edition, Springer, Berlin (1983)
- [15] Giusti, E.: *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*; Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart (1984)

- [16] Hackbusch, W.: Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen; Teubner, Stuttgart (1986)
- [17] Hewitt, E., Stromberg, K.: Real and Abstract Analysis; Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1969)
- [18] Horstmann, D.: A note on comparison principles for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations; Hokkaido Math. Journal, **28** (1999), 315–331
- [19] Jenkins, H., Serrin, J.: The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions; J. Reine u. Angew. Mathematik **229** (1968), 170–187
- [20] Johnson, C., Thomee, V.: Error estimates for a finite element approximation of a minimal surface; Mathematics of Computation, **29** (1975), 343–349
- [21] Jouron, C.: Resolution numérique du problème des surfaces minima; Arch. Ration. Mech. Anal. **59** (1975), 311–341
- [22] Kawohl, B., Kutev, N.: Global behaviour of solutions to a parabolic mean curvature equation; Diff. and Int. Equations **8** (1995), 1923–1946
- [23] Kawohl, B., Kutev, N.: Strong maximum principle for semicontinuous viscosity solutions of nonlinear partial differential equations; Arch. Math. **70** (1998), 470–478
- [24] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A., Uralceva, N.N.: Linear and quasi-linear equations of parabolic type; American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1968), Chap. III, Par. 16: Rothe’s method and the method of finite differences
- [25] Lichnerowsky, Al., Temam, R.: Pseudosolutions of the time-dependent minimal surface problem; J. Differential Equations **30** (1978), 340–364
- [26] Marcellini, P., Miller, K.: Asymptotic Growth for the Parabolic Equation of Prescribed Mean Curvature; J. Differential Equations **51** (1984), 326–358
- [27] Marcellini, P., Miller, K.: Elliptic versus Parabolic Regularization for the Equation of Prescribed Mean Curvature; J. Differential Equations **137** (1997), 1–53
- [28] Nitsche, J.C.C.: Vorlesungen über Minimalflächen; Springer, Berlin (1975)
- [29] Nitsche, J.C.C.: Lectures on Minimal Surfaces, Vol.1; Cambridge University Press, Cambridge (1989)

- [30] Oliker, V. I., Uraltseva, N.N.: Evolution of nonparametric surfaces with speed depending on curvature II: The mean curvature case; *Comm. Pure Appl. Math.* **46** (1993), 97–135
- [31] Rannacher, R.: Some asymptotic error estimates for finite element approximation of minimal surfaces; *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle, Ser. Rouge Anal. Numérique* **11** (1977), 181–196
- [32] Rumpf, M., Schmidt, A., et al.: GRAPE, Graphics Applications and Programming Environment, Report 8, Sonderforschungsbereich 256, Bonn (1990)
- [33] Stoer, J.: *Numerische Mathematik I*; 6. Auflage; Springer, Berlin (1993)
- [34] Stüben, K.: *Algebraic Multigrid (AMG): An Introduction with Applications*; GMD Report 53 (März 1999); auch als Beitrag in [36] erschienen
- [35] Temam, R.: Solutions généralisées de certaines équations du type hypersurfaces minima; *Arch. Rat. Mech. Anal.* **44** (1971), 121–156
- [36] Trottenberg, U., Oosterlee, C., Schüller, A.: *Multigrid*; Academic Press, London (2001)
- [37] Wandtke, U.: *Ein Finite-Element-Algorithmus für den mittleren Krümmungsfluß (Diplomarbeit)*; Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn, Bonn (1991)

Erklärung

Ich versichere, dass ich die von mir vorgelegte Dissertation selbständig angefertigt, die benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben und die Stellen der Arbeit – einschließlich Tabellen und Abbildungen – die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem Einzelfall als Entlehnung kenntlich gemacht habe, dass diese Dissertation noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegen hat, dass sie – abgesehen von meinen angegebenen Teilpublikationen – noch nicht veröffentlicht worden ist, sowie, dass ich eine solche Veröffentlichung vor Abschluss des Promotionsverfahrens nicht vornehmen werde. Die Bestimmungen dieser Promotionsordnung sind mir bekannt. Die von mir vorgelegte Dissertation ist von Herrn Prof. Dr. B. Kawohl betreut worden.

Köln, im April 2001

Hans Günther Reschke

Teilpublikationen: keine