Haar Wavelet Penyelesaian bagi Masalah Nilai Sempadan

[1]Phang Chang, [2]Phang Piau

[1] Jabatan Matematik, Pusat Pengajian Sains, Universiti Tun Hussein Onn Malaysia, UTHM.
[2] Jabatan Sains Komputan dan Matematik, Fakulti Sains Komputer dan Teknologi Maklumat, Universiti Malaysia Sarawak.
e-mel: pchang@uthm.edu.my, pphang@fit.unimas.my

Abstrak

Penyelesaian persamaan pembezaan biasa bagi masalah nilai sempadan dengan menggunakan kaedah beza terhingga seringkali menjanakan matriks yang mempunyai nombor suasana yang besar. Keadaan ini menimbulkan masalah kestabilan. Bagi menyelesaikan masalah ini, penyelesaian berdasarkan Haar wavelet dibincangkan. Dalam kertas kerja ini, kami menunjukkan penyelesaian menggunakan Haar wavelet bagi masalah nilai sempadan yang linear dan berperingkat tinggi. Keputusan menunjukkan bahawa penyelesaian berdasarkan Haar wavelet mempunyai ketepatan yang agak tinggi.

Kanta Kunci*: *Haar wavelet, masalah nilai sempadan, kaedah beza terhingga.

1. Pengenalan

Jelmaan wavelet atau analisis wavelet merupakan satu cabang ilmu matematik yang baru dibangunkan untuk pemprosesan imej. Sehingga hari ini, wavelet telah digunakan dalam pelbagai bidang seperti pemampatan data, pemampatan imej dan sebagainya[1]. Dalam analisis berangka, wavelet juga membentukkan basis Galerkin bagi tujuan menyelesaikan persamaan pembezaan separa. Algoritma yang berdasarkan wavelet ini menjadi penting disebabkan oleh ciri wavelet yang setempat dan juga kerana matrik yang dibentukkan mempunyai nombor suasana yang kecil. Hal ini baik dari segi kestabilan.

Salah satu keluarga wavelet yang popular ialah Haar wavelet. Haar wavelet merupakan keluarga wavelet yang paling mudah dan ia selalunya dijadikan sebagai contoh dalam artikel atau buku yang memberi pengenalan kepada analisis wavelet [2-4]. Disebabkan oleh ketidakrumitannya, Haar wavelet menjadi satu teknik yang berkesan untuk menyelesaikan banyak masalah, antaranya ialah persamaan pembezaan biasa, PPB dan persamaan pembezaan separa, PPS. Dalam kertas kerja ini, penggunaan Haar wavelet dalam menyelesaikan masalah nilai sempadan, MNS bagi PPB akan dibincangkan. Salah satu kebaikan menggunakan Haar wavelet dalam penyelesaian MNS kalau dibandingkan dengan kaedah beza terhingga ialah ia mampu menjanakan matriks yang mempunyai nombor suasana yang kecil. Dalam kerja ini, operator atau pewakilan matriks akan diperkembangkan dalam basis wavelet.

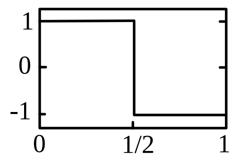
2. Kajian Literatur

Dalam menyelesaikan PPB dengan menggunakan kaedah yang berkaitan dengan Haar wavelet, Chen dan Hsiao [5-6] telah membangunkan matriks operasi yang berdasarkan pengamiran bagi Haar wavelet. Lepik [7] telah menyelesaikan PPB peringkat tinggi dengan kaedah Haar wavelet. Terdapat juga perbincangan oleh pengkaji yang lain [8-10]. Di sini, kami tidak berniat untuk membandingkan algoritma yang kami gunakan dengan pengkaji yang ternama ini, tetapi sebaliknya kami mencadangkan satu prosedur yang senang untuk menggunakan Haar wavelet bagi menyelesaikan masalah nilai sempadan, MNS bagi PPB. Diharapkan dengan prosedur ini, ia dapat mengurangkan kerumitan dalam analisis wavelet, lebih-lebih lagi dapat menggalakkan pelajar yang mengikut pengajian di peringkat sarjana muda di universiti menggunakan Haar wavelet atau wavelet dalam menyelesaikan pelbagai masalah tanpa menggunakan sebarang perisian yang canggih. Prosedur atau algoritma yang dicadangkan boleh dibuat dengan senang dengan menggunakan *computer algebra system* , CAS atau Excel. Melalui ini, kami harap ia selaras dengan kerja menggalakkan pembelajaran wavelet untuk pelajar sarjana muda [11-13].

3. Haar Wavelet

Jelmaan Haar wavelet ialah wavelet yang pertamanya dikenali dan ia dicadangkan oleh Alfred Haar pada 1909 (walaupun perkataan wavelet wujud pada 1980-an). Fungsi Haar boleh digambarkan sebagai fungsi langkah $\psi(x)$ seperti dalam Rajah 1.

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 0.5 \\ -1 & 0.5 \le x \le 1 \\ 0 & \text{lain - lain} \end{cases} \tag{1}$$



Rajah 1 Fungsi Haar

Rajah 1 menunjukkan ibu wavelet bagi Haar. Haar wavelet dijanakan melalui proses translasi dan dilasi seperti berikut.

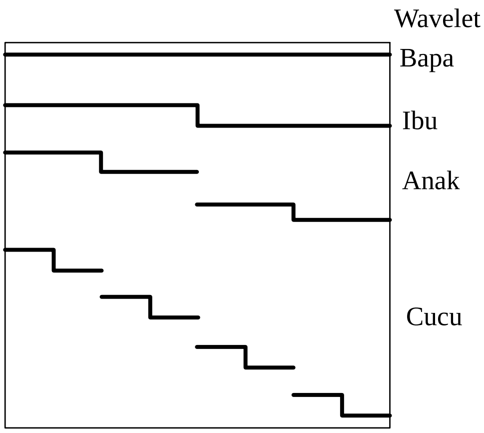
$$\psi(x) = \psi(2^j x - k) \tag{2}$$

$$\text{Translasi } \psi(x) = \psi(x - k)$$

$$\text{Dilasi } \psi(x) = \psi(2^j x)$$

dimana ini merupakan kerja yang asas untuk kembangan wavelet.

Dengan proses translasi dan dilasi seperti dalam (2), kita boleh mendapat bapa wavelet, anak wavelet, cucu wavelet seperti dalam Rajah 2.



Rajah 2 Haar Wavelet (sehingga 3 tahap)

Dalam bentuk matriks, matriks Haar sehingga 3 tahap ialah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Haar Wavelet dalam Persamaan Pembezaan Biasa

Untuk menyelesaikan persamaan pembezaan biasa dengan peringkat-*n*, katakan

$$A_1 y^{(n)}(x) + A_2 y^{(n-1)}(x) + \cdots + A_n y(x) = f(x),$$

di mana $x \in [A, B]$ dan keadaan sempadan diberikan seperti

$$y^{(n-1)}(A),\ y^{(n-2)}(A)\ \cdots, y(A) \text{ dan } y^{(n-1)}(B),\ y^{(n-2)}(B)\ \cdots, y(B)$$

Katakan kita hendak melakukan pengiraan sehingga tahap *j*, maka biarkan $m = 2^j$. Selang $[A, B]$ akan dibahagikan kepada m subselang, maka $\Delta x = \dfrac{B-A}{m}$ dan matriks itu mempunyai dimensi $m \times m$. Pengiraan seterusnya berdasarkan prosedur seperti di bawah.

Prosedur :

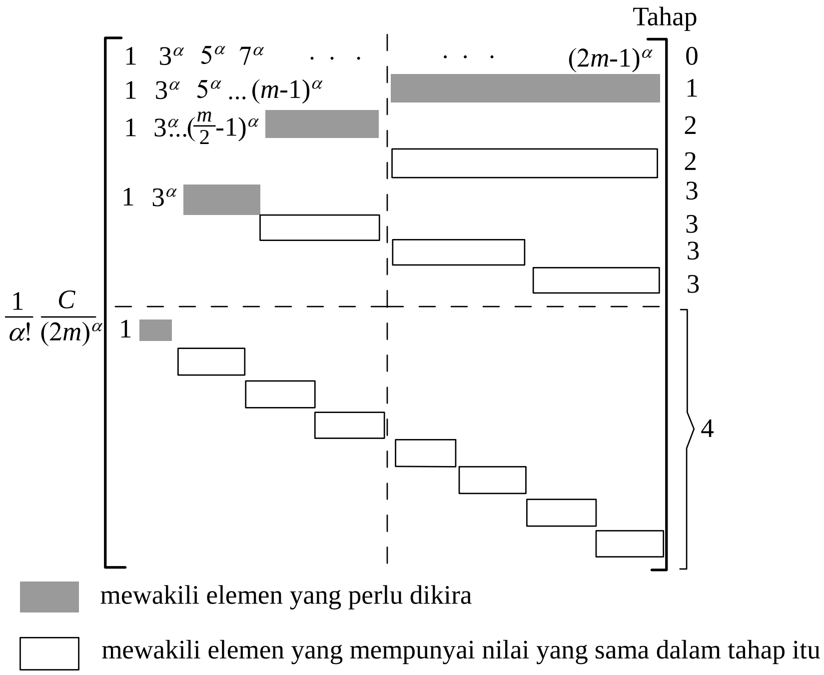
Langkah 1: Andaikan $y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i h_i(x)$ dimana h ialah matriks Haar dan a_i ialah pekali wavelet.

Langkah 2: Dapatkan peringkat v yang sepadan bagi $y(x)$ dengan menggunakan

$$y^{(v)}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i P_{n-v,i}(x) + \sum_{\sigma=0}^{n-v-1} \frac{1}{\sigma!}(x-A)^{\sigma}\, y_0^{(v+\sigma)}$$

Langkah 3: Gantikan $y^{(n)}(x)$ dan semua nilai $y^{(v)}(x)$ dalam masalah PPB. Keadaan sempadan yang tidak wujud perlu dicari dahulu.
Langkah 4: Kirakan pekali wavelet, a_i.
Langkah 5: Dapatkan penyelesaian berangka bagi $y(x)$.

Langkah 2 merupakan langkah yang penting dimana matriks $P_{n-v,i}(x)$ akan dikira. Kalau kita hendak pengiraan sehingga tahap j (katakan tahap 4), matriks $P_{n-v,i}(x)$ (biar $n-v=\alpha$) adalah seperti dalam Rajah 3 dimana $C = B - A$



Rajah 3. Matriks *P*

Dari segi bentuk, matriks *P* menyerupai Haar wavelet. Untuk pengiraan matriks *P*, kami mencadangkan penggunaan algoritma seperti berikut:
Algoritma :

$$\frac{1}{\alpha!}\frac{1}{(2m)^{\alpha}}\left[(C(\frac{m}{L}+2l-1))^{\alpha} - 2(C(2l-1))^{\alpha}\right]$$

$\alpha = n - v$

$L = 1, 2, \cdots, j$ (tahap Haar Wavelet)

$l = 1, 2, 3, \cdots, \frac{m}{2L}$

dan dimana $C = B - A$

5. Contoh Berangka

Dua contoh ditunjukkan. Semua pengiraan dilakukan dengan menggunakan Haar wavelet tahap 4.

Contoh 1:
Selesaikan $y''(x) + y(x) = \sin x + x\cos x$, dimana $x \in [0,1]$ dengan $y(0) = 1$, $y(1) = 1.667433$. (Penyelesaian tepat ialah $y(x) = \cos x + \frac{5}{4}\sin x + \frac{1}{4}(x^2 \sin x - x\cos x)$)

Dengan menggunakan prosedur yang dicadangkan di atas.

Langkah 1 : $y''(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i h_i(x)$

Langkah 2: $y(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i P_{2,i}(x) + \sum_{\sigma=0}^{2-0-1} \frac{1}{\sigma!}(x-0)^{\sigma} y_0^{(\sigma)}$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i P_{2,i}(x) + 1 + xy_0' \quad \text{dimana nilai } y_0' \text{ masih tidak diketahui.}$$

y_0' boleh dicari dengan mempertimbangkan keadaan sempadan $y(1) = 1.667433$.

$$y(1) = \sum_{i=1}^{m} a_i P_{2,i}(1) + 1 + (1)y_0' = 1.667433, \text{ seterusnya}$$

$$y_0' = -\sum_{i=1}^{m} a_i P_{2,i}(1) + 0.667433$$

Langkah 3 : Seterusnya,

$$y''(x) + y(x) = \sin x + x\cos x$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i h_i(x) + \sum_{i=1}^{m} a_i P_{2,i}(x) + 1 + x\left[-\sum_{i=1}^{m} a_i P_{2,i}(1) + 0.667433\right] = \sin x + x\cos x$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \left[h_i(x) + P_{2,i}(x) - xP_{2,i}(1)\right] = \sin x + x\cos x - 1 - 0.667433x$$

Matriks $P_{2,i}(x)$ seperti ditunjukkan.

$$\frac{1}{2!}\frac{1}{32^2}\begin{pmatrix}
1 & 3^2 & 5^2 & 7^2 & 9^2 & 11^2 & 13^2 & 15^2 & 17^2 & 19^2 & 21^2 & 23^2 & 25^2 & 27^2 & 29^2 & 31^2 \\
1 & 3^2 & 5^2 & 7^2 & 9^2 & 11^2 & 13^2 & 15^2 & 287 & 343 & 391 & 431 & 463 & 487 & 503 & 511 \\
1 & 3^2 & 5^2 & 7^2 & 79 & 103 & 119 & 127 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 3^2 & 5^2 & 7^2 & 79 & 103 & 119 & 127 \\
1 & 3^2 & 23 & 31 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 3^2 & 23 & 31 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 3^2 & 23 & 31 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & 3^2 & 23 & 31 \\
1 & 7 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 7 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 7 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 7 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 7 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & 7 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & 7 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 1 & 7
\end{pmatrix}$$

Langkah 4: Selesaikan sistem persamaan linear, pekali wavelet a_i diperolehi.

Langkah 5: Penyelesaian berangka $y(x)$ adalah seperti dalam Jadual 1.

Jadual 1 : Penyelesaian bagi Contoh 1

x (/32)	Penyelesaian	Penyelesaian tepat	Ralat mutlak
1	1.036301	1.030767	0.005534
3	1.101311	1.089496	0.011815
5	1.159368	1.144700	0.014668
7	1.209068	1.196643	0.012425
9	1.257571	1.245594	0.011977
11	1.298038	1.291819	0.006219
13	1.336772	1.335577	0.001195
15	1.372508	1.377118	0.004610
17	1.415362	1.416676	0.001314
19	1.449621	1.454467	0.004846
21	1.482400	1.490681	0.008281
23	1.516283	1.525485	0.009202
25	1.549619	1.559012	0.009393
27	1.583481	1.591364	0.007883
29	1.616938	1.622605	0.005667
31	1.650668	1.652763	0.002095

Contoh 2:

Selesaikan $y^{(4)}(x) + xy(x) = 16\sin 2x + x\sin 2x$, di mana $x \in [0,1]$ dengan $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$, $y(1) = 0.909297$ (Penyelesaian tepat ialah $y(x) = \sin 2x$)

Dengan menggunakan langkah 1 hingga 3, diperolehi

$$\sum_{i=1}^{2m} a_i \left[h_i(x) + xP_{4,i}(x) - x^4 P_{4,i}(1) \right] = 16\sin 2x + x\sin 2x - 2x^2 + 1.090703x^4$$

Seterusnya, keputusan pengiraan adalah seperti dalam Jadual 2.

Jadual 2 : Penyelesaian bagi Contoh 2

x (/32)	Penyelesaian	Penyelesaian tepat	Ralat mutlak
1	0.062465	0.062459	0.000006
3	0.186518	0.186403	0.000115
5	0.307800	0.307439	0.000361
7	0.424312	0.423676	0.000636
9	0.534272	0.533303	0.000969
11	0.635777	0.634607	0.001170
13	0.727246	0.726009	0.001237
15	0.807353	0.806081	0.001272
17	0.874845	0.873575	0.001270
19	0.929273	0.927437	0.001836
21	0.969213	0.966827	0.002386
23	0.993995	0.991129	0.002866
25	1.002852	0.999966	0.002886
27	0.995959	0.993198	0.002761
29	0.973073	0.970932	0.002141
31	0.934409	0.933514	0.000895

Contoh 2 menunjukkan penyelesaian bagi MNS bagi PPB yang berperingkat tinggi dengan menggunakan kaedah Haar Wavelet. Keputusan menunjukkan bahawa kaedah Haar Wavelet mempunyai kejituan yang agak tinggi untuk PPB berperingkat tinggi. Tambahan pula, ia boleh digunapakai untuk pekali pembolehubah.

6. Kesimpulan

Penyelesaian berdasarkan Haar wavelet digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai sempadan yang linear dan berperingkat tinggi. Keputusan menunjukkan bahawa penyelesaian berdasarkan Haar wavelet mempunyai ketepatan yang agak tinggi apabila dibandingkan dengan penyelesaian tepat. Prosedur atau algoritma yang mudah untuk matriks *P* juga ditunjukkan.

Rujukan

[1] A.W. Galli, G.T. Heydt, & P.F. Ribeiro (1996). Exploring the power of wavelet analysis. IEEE Computer Application in Power. pp.37 – 41.

[2] M.N.O. Sadiku, C.M. Akujuobi, & R.C. Garcia (2005). An introduction to wavelets in electromagnetics. Microwave Magazine. IEEE , vol. 6(2). pp. 63 – 72.

[3]G.P. Nason (1999). A little introduction to wavelets. Applied Statistical Pattern Recognition, IEEE Colloquium on 20 April 1999. pp.1 – 6.

[4]E. Aboufadel & S. Schlicker (1999). Discovering Wavelets. New York : John Wiley & sons. pp. 12-18.

[5]Chen, C.F. & Hsiao C.H. (1997). Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems. IEE Proc. Control Theory Appl. Vol 144. pp. 87-94.

[6]Chen, C.F. & Hsiao C.H. (1999). Wavelet approach to optimizing dynamic systems. IEE Proc. Control Theory Appl. Vol 146. pp. 213-219.

[7]Ülo Lepik (2007). Haar wavelet method for solving higher order differential equations. Tidak diterbitkan.

[8]Ülo Lepik (2005). Numerical solution of differential equations using Haar wavelets. Mathematics and Computers in Simulation vol 68. pp. 127-143.

[9]Haydar Akca et.al., “Survey on wavelet transform and application in ODE and wavelet networks.” Unpublished

[10]Hsiao C.H., “Haar wavelet approach to linear stiff systems.” Mathematics and Computers in Simulation vol 64, 2004, pp. 561-567.

[11]M.C. Potter, J.L. Goldberg, E.F. Aboufadel (2007) Advanced Engineering Mathematics. 3rd Ed. New York : Oxford University Press. pp. 670-699.

[12]E. Aboufadel, S. Schlicker (2003). Wavelets : Wavelets for undergraduates. Retrieved Dec 28, 2007, from http://www.gvsu.edu/math/wavelets/undergrad.htm

[13]P.V. O'Neil (2003) Advanced Engineering Mathematics. 5th Ed. Thomson Brooks/Cole, 2003. pp. 841-854.