KEBUKANSFERAAN LANGSUNG PERSEMBAHAN KUMPULAN RELATIF PANJANG LIMA

MAHATHIR BIN MOHAMAD

UNIVERSITI KEBANGSAAN MALAYSIA

KEBUKANSFERAAN LANGSUNG PERSEMBAHAN KUMPULAN RELATIF PANJANG LIMA

MAHATHIR BIN MOHAMAD

PROJEK PENYELIDIKAN INI DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI
SEBAHAGIAN DARIPADA SYARAT MEMPEROLEHI IJAZAH SARJANA
SAINS(MATEMATIK)

FAKULTI SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITI KEBANGSAAN MALAYSIA
BANGI

2003

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang tiap-tiap satunya telah saya jelaskan sumbernya.

31 Ogos 2003

MAHATHIR BIN MOHAMAD
P23779

PENGHARGAAN

Bismillahirrahmanirrahim

Syukur ke hadrat Ilahi kerana memberikan kekuatan kepada saya untuk menyiapkan projek penyelidikan saya walaupun saya tidak bersemangat pada mulanya.

Saya ingin merakamkan jutaan terima kasih tidak terhingga kepada Dr. Abdul Ghafur selaku penyelia saya yang sudi menerima saya, memberi tunjuk ajar dan bimbingan yang kuat. Beliau juga memberi sokongan, panduan dan saranan selaku penyelia saya di sepanjang tempoh saya menyiapkan projek ini. Terima kasih juga saya ucapkan kepada Prof. Dato' Dr. Abdul Razak bin Salleh yang banyak memberikan teguran, nasihat dan pandangan beliau terhadap mutu penulisan saya. Walaupun banyak kesilapan yang saya lakukan tetapi beliau tetap sabar memberi bimbingan kepada terhadap mutu penulisan saya. Jasa baik beliau tidak dapat saya lupakan.

Ucapan terima kasih dihulurkan juga kepada semua rakan yang memberi tunjuk ajar dan nasihat serta sokongan dan kepada ibu bapa serta keluarga yang tercinta, terima kasih banyak-banyak.

Akhir kata, semoga ilmu yang dipelajari dapat dimanfaat bersama dan diberkati oleh Allah.

Sekian terima kasih

Mahathir bin Mohamad (P23779)

ABSTRAK

Kajian ini membincangkan kebukansferaan langsung persembahan kumpulan relatif dengan panjang lima, $\mathcal{P} = < H, t;R >$, yang H suatu kumpulan dan R suatu penghubung berbentuk $th_1th_2th_3th_4t^{-1}h_5$ dengan h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 unsur berbeza bagi H. Terdapat beberapa kemungkinan bentuk bagi R yang dikumpulkan kepada beberapa bentuk: $th_1th_2th_3th_4t^{-1}h_5$ yang $h_1 \neq h_2 \neq h_3 \neq h_4 \neq h_5$, $th_1th_2th_3th_4t^{-1}h_5$ yang $h_1 = h_2 = h_3$ dan beberapa bentuk yang lain. Bentuk ini pula dibahagikan kepada kes-kes tertentu. Gambar sfera bagi $\mathcal{P}$ dilukis berdasarkan setiap kes, sementara kebukansferaan langsung bagi $\mathcal{P}$ dibuktikan dengan menggunakan ujian kebukansferaan langsung. Kes yang gambar sfera dan kebukansferaan langsung bagi $\mathcal{P}$ tidak dapat ditentukan disenaraikan berdasarkan bentuk R.

ABSTRACT

This study discusses the asphericity of one-relator relative group presentation of length five $\mathcal{P} = \langle H, t; R \rangle$ where H is a group and R is of the form $th_1th_2th_3th_4t^{-1}h_5$ where h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 are distinct elements of H. There are several possibilities of R ; grouped into several major forms. These forms are then divided into several cases. The asphericity of $\mathcal{P}$ is proved using the tests of asphericity. Cases for which spherical pictures of $\mathcal{P}$ cannot be produced and the asphericity of $\mathcal{P}$ cannot be determined are listed according to the form of R.

KANDUNGAN

Halaman

BAB 1

PENGENALAN

Andaikan H suatu kumpulan, $< t >$ kumpulan kitaran tak terhingga yang dijana oleh t dan $H* < t >$ adalah hasil darab bebas kumpulan H dengan $< t >$. Misalkan pula R unsur bagi $H* < t >$ yang berbentuk

$$t^{\varepsilon_1} h_1 t^{\varepsilon_2} h_2 \ldots t^{\varepsilon_n} h_n$$

dengan $\varepsilon_i = \pm 1$, $h_i \in H$, $i = 1,2,\ldots,n$. Maka kita memperoleh **persembahan kumpulan relatif**

$$\mathcal{P} = \langle H, t; R \rangle$$

yang R suatu hubungan. Persembahan $\mathcal{P}$ dikatakan mempunyai **panjang *n*** jika R mempunyai n bilangan t.

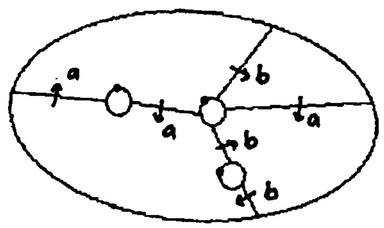
Kumpulan relatif yang ditakrifkan oleh $\mathcal{P}$ adalah kumpulan

$$G = \frac{H * \langle t \rangle}{<< R >>}$$

yang $<< R >>$ merupakan subkumpulan normal terkecil bagi $H* < t >$ yang mengandungi R (Bogley & Pride 1992).

1.1 Gambar bagi persembahan kumpulan relatif

Gambar P ialah pungutan terhingga pasangan cakera tak bercantum $\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m\}$ dalam pedalaman cakera D^2 dan pungutan terhingga pasangan lengkung ringkas tak bercantum $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ yang berada di dalam tutupan bagi $D^2 - \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i$. Sempadan bagi **P** ialah bulatan ∂D^2, dilambangkan sebagai ∂ **P**. Sudut bagi Δ_i ialah tutupan $\partial \Delta_i - \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i$ yang $\partial \Delta_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ adalah sempadan bagi Δ_i. Rantau bagi P adalah tutupan $D^2 - \left(\bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i \cup \bigcup_{j=1}^{n} \alpha_j \right)$. Rantau terkedalam P ialah rantau berkait P yang tidak menyentuh ∂ P. Suatu gambar P adalah tidak remeh jika $m \geq 1$, dan berkait jika $\bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i \cup \bigcup_{j=1}^{n} \alpha_j$ berkait. Gambar P disebut **gambar sfera** jika tidak ada satu pun lengkung dalam P yang menyentuh D^2. Contoh gambar bagi persembahan kumpulan $\mathcal{P} = \langle a, b; a^2, b^2, [a,b] \rangle$.



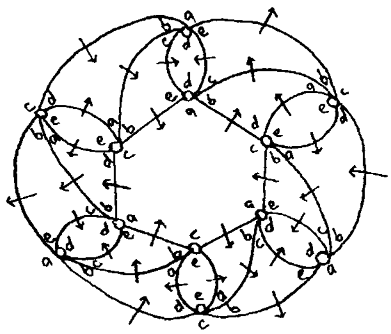
Seterusnya setiap lengkung α_i ialah gambar P dilengkapkan dengan anak panah merentasinya yang dilabelkan sebagai $t \cup t^{-1}$ (Edjvet 1994). Setiap sudut dalam P berorentasi mengikut arah jam dan dilabelkan dengan unsur H. Jika c sudut bagi Δ maka kita menulis $W(c)$ bagi mewakili perkataan yang diperoleh dengan membaca label pada lengkung dan pada sudut yang bertemu dengan lengkung dan pada sudut yang bertemu dengan $\partial \Delta$ bermula dengan sudut c, mengikut arah jam.

Gambar P disebut gambar bagi persembahan kumpulan relatif $\mathcal{P} = \langle H, t; R\rangle$ jika

i. untuk setiap sudut c, $W(c)$ pilih atur kitaran bagi R dan R^{-1},

ii. $h_1 h_2 \ldots h_m$ adalah urutan label sudut bagi sempadan rantau terkedalam P, maka $h_1 h_2 \ldots h_m = 1$ dalam H.

Contoh gambar sfera bagi persembahan kumpulan relatif $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbtctdt^{-1}e\rangle$ yang $e^2 = 1$, $d^2 = 1$ dan a, b, c, d dan e unsur-unsur tidak remeh yang berbeza dalam H:



Perhatikan bahawa untuk gambar sfera, cakera D^2 ditinggalkan. Dalam gambar di atas, $d^2 = 1$ dan $e^2 = 1$.

Dwikutub bagi gambar P terdiri daripada sepasang sudut c dan c' dengan suatu lengkung α yang menyambungkan kedua-dua sudut itu sehingga

i. c dan c' berada dalam rantau yang sama

ii. $W(c) = W(c')$ (Abdul Ghafur 1995)

Suatu persembahan kumpulan relatif $\mathcal{P}$ adalah **bukan sfera langsung** jika dan hanya jika gambar sferanya yang berkait mengandungi suatu dwikutub (Bogley & Pride 1992). Jika wujud suatu gambar sfera tanpa dwikutub maka persembahan $\mathcal{P}$ adalah **sfera**.

1.2 Latar belakang kajian

Kajian kebukansferaan langsung bagi kumpulan relatif dengan panjang dua dan panjang tiga telah dimulakan oleh Bogley & Pride (1992) dan Edjvet (1994). Bogley & Pride memberikan syarat kebukansferaan langsung bagi persembahan kumpulan relatif berbentuk $\langle H,t;tatbt^{-1}c\rangle$. Selepas itu, Baik (1997) memberikan syarat kebukansferaan langsung bagi persembahan kumpulan relatif panjang empat yang berbentuk $\langle H,t;tatbtctd\rangle$. Syarat kebukansferaan langsung bagi persembahan kumpulan relatif panjang empat yang berbentuk $\langle H,t;tatbt^{-1}ct^{-1}d\rangle$ diteruskan oleh Faieza (2000). Howie & Metaftsis (2001) pula melanjutkan syarat persembahan kumpulan relatif dengan panjang lima, iaitu berbentuk $\langle H,t;tatbtctdte\rangle$.

Berikut adalah syarat bagi kebukansferaan langsung bagi persembahan kumpulan relatif panjang lima $\mathcal{P} = \langle H,t;tatbtctdte\rangle$ yang diberikan oleh Howie & Metaftsis.

Teorem 1.1.1

Andaikan $a = b$ serta gantikan $x = ta$, $g_1 = a^{-1}c$, $g_2 = a^{-1}d$ dan $g_3 = a^{-1}e$. Maka persembahan relatif $\mathcal{L}$ membentuk

$$\mathcal{P} = \langle G,x;x^3g_1xg_2xg_3 = 1\rangle.$$

Jika semua g_1, g_2 dan g_3 adalah berbeza, maka $\mathcal{P}$ bukan sfera langsung

Teorem 1.1.2

Andaikan $\mathcal{L}$ membentuk $\mathcal{P}=\langle G,x;x^3g_1xg_2xg_3 = 1\rangle$ yang $x = ta$, $g_1 = a^{-1}c$, $g_2 = a^{-1}d$ dan $g_3 = a^{-1}e$. Jika $a = b = c = d$ dalam $\mathcal{L}$ maka persembahan relatif adalah bukan sfera langsung jika dan hanya jika peringkat $a^{-1}e$ tidak terhingga.

Teorem 1.1.3

Andaikan persembahan relatif $\mathcal{L}$ membentuk $\mathcal{P} = \langle G, x, s; xg_1xs^{-1} = 1 = sg_2sx \rangle$ yang $x = ta$, $g_1 = a^{-1}c$, $g_2 = a^{-1}d$, $g_3 = a^{-1}e$, $s = xg_1x$ dan $g_1 = g_3$. Persembahan relatif $\mathcal{L}$ adalah bukan sfera langsung jika tidak wujud kitaran yang dapat diterima dari panjang 3 atau 4 dalam $\mathcal{L}^{st}$ dengan $\mathcal{L}^{st}$ adalah pelengkap graf dari empat bucu.

Teorem 1.1.4

Andaikan $\mathcal{P} = \langle G, x, s; x^2s^{-1} = 1 = sg_1xsg_2 \rangle$ yang $x = ta$, $g_1 = a^{-1}c$, $g_2 = a^{-1}d$, $s = xg_1x$. Juga H subkumpulan bagi G dijana oleh $\{g_1, g_2\}$ dan andaikan bahawa $1 \neq g_1 \neq g_2^{\pm 1} \neq 1$. Jika satu daripada yang berikut dipatuhi, maka $\mathcal{P}$ adalah bukan sfera langsung.

(1) $g_1 = g_2^2$ atau $g_2 = g_1^2$.

(2) H adalah kitaran dari 6 turutan yang dijana oleh g_1 atau g_2.

(3) H adalah kumpulan dwihedron tak terhingga.

(4) $1/o(g_1) + 1/o(g_2) + 1/o(gh^{-1}) > 1$.

Teorem 1.1.5

Andaikan H subkumpulan bagi G dijana oleh $\{g_1, g_2\}$ dan $\mathcal{P} = \langle G, x, s; x^2s^{-1} = 1 = sg_1xsg_2 \rangle$ yang $g_1 = a^{-1}c$ dan $g_2 = a^{-1}d$. Jika H adalah kumpulan dwihedron tidak terhingga, maka $\mathcal{P}$ bukan sfera langsung.

Teorem 1.1.6

Andaikan $\mathcal{P} = \langle G, x, s; x^2s^{-1} = 1 = sg_1xsg_2 \rangle$ yang $x = ta$, $g_1 = a^{-1}c$, $g_2 = a^{-1}d$, $s = xg_1x$. Jika $g_1 = g_2^{\pm 1}$ maka $\mathcal{P}_4$ adalah bukan sfera langsung jika dan jika g_1 terhingga.

Sekarang, kita lihat semua kemungkinan bentuk persembahan kumpulan relatif panjang lima :

(1) $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbtctdte \rangle$

(2) $\mathcal{P} = \langle H, t; t^{-1}atbtctdte \rangle$

(3) $\mathcal{P} = \langle H, t; t^{-1}at^{-1}btctdte \rangle$

(4) $\mathcal{P} = \langle H, t; t^{-1}atbt^{-1}ctdte \rangle$

(5) $\mathcal{P} = \langle H, t; t^{-1}atbtct^{-1}dte \rangle$

(6) $\mathcal{P} = \langle H, t; tat^{-1}btctdte \rangle$

(7) $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbt^{-1}ctdte \rangle$

(8) $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbtct^{-1}dte \rangle$

(9) $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbtctdt^{-1}e \rangle$

(10) $\mathcal{P} = \langle H, t; t^{-1}atbtctdt^{-1}e \rangle$

(11) $\mathcal{P} = \langle H, t; tat^{-1}bt^{-1}ctdte \rangle$

(12) $\mathcal{P} = \langle H, t; tat^{-1}btct^{-1}dte \rangle$

(13) $\mathcal{P} = \langle H, t; tat^{-1}btctdt^{-1}e \rangle$

(14) $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbt^{-1}ct^{-1}dte \rangle$

(15) $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbt^{-1}ctdt^{-1}e \rangle$

(16) $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbtct^{-1}dt^{-1}e \rangle$

(17) $\mathcal{P} = \langle H, t; t^{-1}at^{-1}bt^{-1}ctdte \rangle$

(18) $\mathcal{P} = \langle H, t; t^{-1}at^{-1}btct^{-1}dte \rangle$

(19) $\mathcal{P} = \langle H, t; t^{-1}at^{-1}btctdt^{-1}e \rangle$

(20) $\mathcal{P} = \langle H, t; t^{-1}atbt^{-1}ct^{-1}dte \rangle$

(21) $\mathcal{P} = \langle H,t;t^{-1}atbt^{-1}ctdt^{-1}e\rangle$

(22) $\mathcal{P} = \langle H,t;t^{-1}atbtct^{-1}dt^{-1}e\rangle$

(23) $\mathcal{P} = \langle H,t;tat^{-1}bt^{-1}ct^{-1}dte\rangle$

(24) $\mathcal{P} = \langle H,t;tat^{-1}bt^{-1}ctdt^{-1}e\rangle$

(25) $\mathcal{P} = \langle H,t;tat^{-1}btct^{-1}dt^{-1}e\rangle$

(26) $\mathcal{P} = \langle H,t;tatbt^{-1}ct^{-1}dt^{-1}e\rangle$

(27) $\mathcal{P} = \langle H,t;t^{-1}at^{-1}bt^{-1}ct^{-1}dte\rangle$

(28) $\mathcal{P} = \langle H,t;t^{-1}at^{-1}bt^{-1}ctdt^{-1}e\rangle$

(29) $\mathcal{P} = \langle H,t;t^{-1}at^{-1}btct^{-1}dt^{-1}e\rangle$

(30) $\mathcal{P} = \langle H,t;t^{-1}atbt^{-1}ct^{-1}dt^{-1}e\rangle$

(31) $\mathcal{P} = \langle H,t;tat^{-1}bt^{-1}ct^{-1}dt^{-1}e\rangle$

(32) $\mathcal{P} = \langle H,t;t^{-1}at^{-1}bt^{-1}ct^{-1}dt^{-1}e\rangle$

Dua bentuk R dan R' dikatakan setara jika satu daripada bentuk tersebut adalah songsangan atau kitaran bentuk yang satu lagi. Bentuk (1) setara dengan bentuk (32). Begitu juga, bentuk (2) setara dengan bentuk (6), (7), (8), (9), (27), (28), (29), (30) dan (31) sementara bentuk (3) setara dengan bentuk (10), (11), (14), (16), (17), (19), (22), (23) dan (26). Seterusnya, bentuk (4) setara dengan bentuk (12), (15), (18), (20), (21), (24) dan (25). Akhir sekali, bentuk (5) setara dengan bentuk (13). Oleh yang demikian, lima bentuk persembahan kumpulan relatif panjang lima yang berbeza ialah

(1) $\mathcal{P} = \langle H,t;tatbtctdte\rangle$

(2) $\mathcal{P} = \langle H,t;tatbtctdt^{-1}e\rangle$

(3) $\mathcal{P} = \langle H,t;t^{-1}at^{-1}btctdte\rangle$

(4) $\mathcal{P} = \langle H,t;t^{-1}atbt^{-1}ctdte\rangle$

(5) $\mathcal{P} = \langle H,t;t^{-1}atbtct^{-1}dte\rangle$

Daripada hasil-hasil yang disenaraikan, didapati bahawa bentuk (1) telah dikaji oleh Howie & Metaftsis (2001). Oleh itu bentuk $\mathcal{P}$ yang masih tinggal adalah (2), (3), (4) dan (5). Penulis memilih bentuk (2).

Dalam kajian ini, kita ingin menentukan kebukansferaan langsung bagi persembahan kumpulan relatif $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbtctdt^{-1}e \rangle$, a, b, c, d dan e dalam H yang $a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq 1$ dengan mencari gambar sfera bagi $\mathcal{P}$. Untuk itu, kita mempertimbangkan beberapa kemungkinan bentuk hubungan R bagi $\mathcal{P}$. Umumnya, R terbahagi kepada lima:

- Bentuk $tatbtctdt^{-1}e$ yang $a \neq b \neq c \neq d \neq e$
- Bentuk $tatbtctdt^{-1}e$ yang $a = b = c$
- Bentuk $tatbtctdt^{-1}e$ yang $d = e$
- Bentuk $tatbtctdt^{-1}e$ yang $a = c$
- Bentuk $tatbtctdt^{-1}e$ yang $b = c$

Kesferaan bagi $\mathcal{P}$ dengan $R = tatbtctdt^{-1}e$ yang $a \neq b \neq c \neq d \neq e$ dibincangkan dalam bab 3, manakala $\mathcal{P}$ dengan $R = tatbtctdt^{-1}e$ yang $a = b = c$ dan $R = tatbtctdt^{-1}e$ yang $d = e$ dibincangkan kesferaannya dalam bab 4. Kesferaan bagi $\mathcal{P}$ dengan $R = tatbtctdt^{-1}e$ yang $a = c$ dibincangkan dalam bab 5 dan akhir sekali kesferaan bagi $\mathcal{P}$ dengan $R = tatbtctdt^{-1}e$ yang $b = c$ dibincangkan dalam bab 6.

Dalam bab 3, kita akan membincangkan kesferaan bagi $\mathcal{P}$ dengan lima bentuk berbeza. Seterusnya, dalam bab 4, kita akan membincangkan kesferaan bagi $\mathcal{P}$ dengan mempertimbangkan lima bentuk yang berbeza dalam R. Kemudian, dalam bab 5 dan bab 6 kesferaan bagi $\mathcal{P}$ dengan lima bentuk yang berbeza R akan dibincangkan. Bagi menentukan kesferaan bagi setiap peringkat gambar bagi $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbtctdt^{-1}e \rangle$ dengan per(e) = 2, per(d) = 3 sama dengan gambar $\mathcal{P}$ dengan per(d) = 2, per(e) = 3 melainkan label d dalam rantau d^3 diubah kepada e dan label e dalam rantau e^2 diubah kepada d. Di sini peringkat bagi d diwakili dengan per(d).

Gambar bagi $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbtctdt^{-1}e \rangle$ dengan per(e) = 2, per(d) = 4 sama dengan gambar $\mathcal{P}$ dengan per(d) = 2, per(e) = 4 melainkan label d dalam rantau d^4 diubah kepada e dan label e dalam rantau e^2 diubah kepada d. Begitu juga gambar bagi $\mathcal{P}$ $\langle H, t; tatbtctdt^{-1}e \rangle$ dengan per(e) = 2, per(d) = 5 sama dengan gambar $\mathcal{P}$ dengan per(d) = 2, per(e) = 5. Seterusnya untuk gambar bagi $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbtctdt^{-1}e \rangle$ dengan per(e) = 3, per(d) = 4 sama dengan gambar $\mathcal{P}$ dengan per(d) = 3, per(e) = 4 manakala gambar bagi $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbtctdt^{-1}e \rangle$ dengan per(e) = 3, per(d) = 5 sama dengan gambar $\mathcal{P}$ dengan per(d) = 3, per(e) = 5.

Dalam bab ini, kita memberikan simbol '$\equiv$' untuk menunjukkan gambar yang diperoleh bagi kes sebelah kiri '$\equiv$' sama dengan gambar yang diperoleh bagi kes sebelah kanan '$\equiv$'. Sebagai contoh, $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbtctdte \rangle$ dengan $a \neq b \neq c \neq d \neq e$, [per($e$) =2, per($d$) = 3] $\equiv$ [per(d) = 2, per(e) = 3].

Seterusnya, dalam bab 4, kita akan membincangkan kesferaan $\mathcal{P}$ dengan mempertimbangkan lima bentuk yang berbeza bagi R. Kemudian dalam bab 5 dan bab 6 kesferaan bagi $\mathcal{P}$ dengan lima bentuk yang berbeza R akan dibincangkan. Bagi menentukan kesferaan bagi $\mathcal{P}$, keadaan yang $\mathcal{P}$ tidak mempunyai gambar sfera ditentukan dengan menggunakan ujian kebukansferaan langsung bagi $\mathcal{P}$ yang akan dibincangkan dalam bab 2.

BAB 2

UJIAN KEBUKANSFERAAN LANGSUNG

2.1 Teori Pemansuhan kecil

Graf $\mathbf{P}^{st}$

Graf $\mathbf{P}^{st}$ bagi $\mathcal{P}$ merupakan graf dua bucu, t^{-1} dan t yang setiap sisinya dilabelkan dengan unsur-unsur kumpulan H. Untuk setiap pilih atur kitaran yang bermula dengan t, katakan R^c, tulis $R^c = Sh$, yang $h \in H$ dan S bermula dan berakhir dengan t atau t^{-1}. Setiap Sh memberikan sisi bagi graf dengan bucu pertama adalah simbol pertama S, bucu kedua adalah songsangan bagi simbol terakhir S manakala sisi graf, $\lambda(R^c) = h$. Suatu lintasan dalam graf $\mathbf{P}^{st}$ dikatakan **teraku** jika ia mempunyai label yang bersamaan dengan identiti dalam H.

Contoh :

Misalkan $\mathcal{P} = < H, t, tatbt^{-1}ct^{-1}d >$ yang $a \neq b \neq c \neq d$.

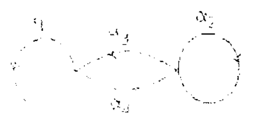
$R = tatbt^{-1}ct^{-1}d$

$R_1 = tbt^{-1}ct^{-1}dta$

$R_2 = t^{-1}ct^{-1}dtatb$

$R_3 = t^{-1}dtatbt^{-1}c$

Graf $\mathbf{P}^{st}$ bagi $\mathcal{P}$:



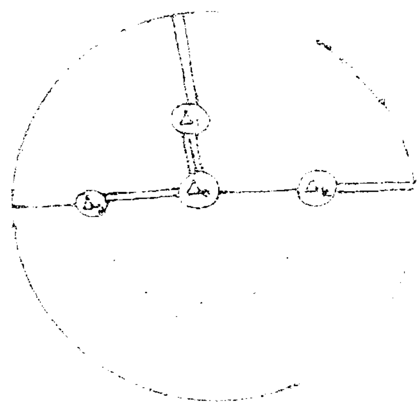
yang $\alpha_1 = b$, $\alpha_2 = d$, α_3 a, $\alpha_4 = c$. Jika $ac = d$, maka lintasan $\alpha_3\alpha_4\alpha_2^{-1}$ teraku.

Roda-*k*

Misalkan k integer positif. Roda-k bagi P adalah gambar berkait W yang mengandungi cakera-cakera { $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ } dengan

1. setiap lengkung menyentuh cakera Δ_j untuk setiap j = 1, 2, ..., k.
2. setiap lengkung sama ada menyentuh cakera Δ_0 atau sempadan ∂W.
3. setiap cakera mempunyai satu sudut yang berada di dalam rantau yang menyeluruh ∂W.

Gambaran kasar bagi roda-k :



Takrif 2.1.1

Misalkan q integer positif. Maka P dikatakan memenuhi T(q) jika tiada lintasan teraku dalam $\mathbf{P}^{st}$ yang panjangnya m dengan $3 \leq m < q$.

Takrif 2.1.2

Andaikan p integer positif. Jika tiada roda-k terturunkan bagi $\mathcal{P}$ dengan $k < p$, maka $\mathcal{P}$ dikatakan memenuhi C(p).

Teorem 2.1.1 (Bogley & Pride 1992)

Jika $\mathcal{P}$ memenuhi C(p) dan T(q) dengan $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$, maka $\mathcal{P}$ bukan sfera langsung.

2.2 Ujian pemberat

Fungsi pemberat θ pada $\mathbf{P}^{st}$ adalah suatu fungsi bernilai nyata yang ditakrif pada sisi graf $\mathbf{P}^{st}$ sehingga $\theta(Sh) = \theta(S^{-1}h^{-1})$ untuk setiap sisi $R^c = Sh$. Pemberat bagi lintasan adalah hasil tambah pemberat bagi setiap sisi. Sebagai contoh, pemberat bagi lintasan $\alpha_1\alpha_4\,\alpha_3$ pada graf $\mathbf{P}^{st}$ yang $\theta(\alpha_1) = \theta(\alpha_2) = 0$ dan $\theta(\alpha_3) = \theta(\alpha_4) = 1$ ialah $\theta(\alpha_1) + \theta(\alpha_4) + \theta(\alpha_3) = 2$.

Fungsi pemberat θ adalah bukan sfera langsung jika syarat-syarat berikut dipenuhi :

i. Jika $R = t^{\varepsilon_1}h_1 \ldots t^{\varepsilon_n}h_n$, maka $\sum_{i=1}^{n}\left(1-\theta\left(t^{\varepsilon_1}h_1 \ldots t^{\varepsilon_{i-1}}h_{i-1}\right)\right) \geq 2$.

ii. Setiap lintasan teraku dalam graf $\mathbf{P}^{st}$ mempunyai pemberat sekurang-kurangnya dua.

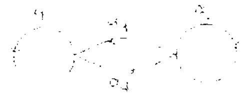
iii. Setiap sisi graf $\mathbf{P}^{st}$ mempunyai pemberat tidak negatif.

Teorem 2.2.1 (Bogley & Pride 1992)

Jika fungsi pemberat $\mathbf{P}^{st}$ bukan sfera langsung, maka P bukan sfera langsung.

Berikut adalah contoh menentukan kebukansferaan langsung bagi P menggunakan ujian pemberat. Misalkan $\mathcal{P} = \langle H, t; t^2at^{-2}b \rangle$ yang $a \neq b$ dan peringkat bagi b tidak terhingga.

Pertimbangkan graf $\mathbf{P}^{st}$ bagi $\mathcal{P}$:



yang $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 1$ dan nilai pemberat

$$\theta(\alpha_1) = \frac{1}{2},\ \theta(\alpha_2) = 1,\ \theta(\alpha_3) = \theta(\alpha_4) = 0.$$

Daripada nilai pemberat yang diberikan jelas bahawa syarat ketiga untuk θ bukan sfera langsung dipenuhi. Kita akan mengira $\sum_{i=1}^{4} 1 - \theta(\alpha_i)$.

$$1 - \theta(\alpha_1) + 1 - \theta(\alpha_2) + 1 - \theta(\alpha_3) + 1 - \theta(\alpha_4) = 4 - \frac{1}{2} - 1 - 0 - 0$$

$$= 2\frac{1}{2}.$$

Didapati bahawa $\sum_{i=1}^{4} 1 - \theta(\alpha_i) \geq 2$. Jadi syarat yang pertama untuk ujian kebukansferaan langsung dipenuhi. Syarat yang kedua juga dipenuhi kerana tiada lintasan teraku dalam graf $\mathbf{P}^{st}$ yang mempunyai pemberat kurang daripada dua. Dengan Teorem 2.2.1, maka $\mathcal{P}$ bukan sfera langsung.

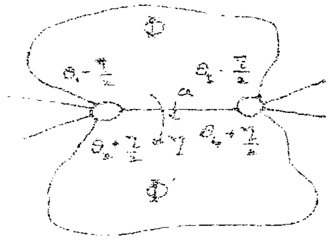
2.3 Ujian kelengkungan

Misalkan **P** gambar sfera tegas bagi $\mathcal{P}$. Takrifkan fungsi kelengkungan pada cakera Δ sebagai $\gamma(\Delta) = 2\pi - \sum_{c \subseteq \partial\Delta} \theta(c)$ yang c merupakan sudut dalam rantau Φ dalam P. Manakala $\gamma(\Phi) = 2\pi - \sum_{c \in \partial\Phi} (\pi - \theta(c))$ yang c merupakan sudut dalam rantau Φ dengan θ fungsi sudut bernilai nyata yang tertakrif pada set sudut dalam **P**.

Teorem 3.3.1
Untuk sebarang fungsi sudut pada sebarang gambar sfera berkait, wujud suatu cakera atau rantau yang mempunyai nilai kelengkungan positif.

Bukti: (Rujuk Edjvet 1994)

2.4 Ujian taburan
Pertimbangkan gambar berikut:



Misalkan rantau Φ dan rantau Φ' dipisahkan oleh suatu lengkung α. Andaikan η suatu skalar. Tolak $\frac{\eta}{2}$ daripada setiap sudut dalam rantau Φ yang menyentuh α dan tambah $\frac{\eta}{2}$ kepada setiap sudut yang bertentangan dengannya dalam rantau Φ'.

Ini bermakna kita memberikan fungsi sudut yang baru $\Phi *$ kepada **P** dan oleh itu, kita mendapat fungsi kelengkungan yang baru, $\gamma *$. Di sini, $\gamma *(\Delta) = \gamma(\Delta)$ untuk semua cakera Δ dalam **P,** $\gamma *(\Phi) = \gamma(\Phi) - \eta$ dan $\gamma *(\Phi') = \gamma(\Phi) + \eta$. Dalam hal ini, kita mengatakan yang kelengkungan η telah diagihkan daripada Φ kepada Φ'. (Edjvet 1994 dan Abdul Ghafur 1995).

BAB 3

BENTUK $th_1th_2th_3th_4t^{-1}h_5\ (h_1 \neq h_2 \neq h_3 \neq h_4 \neq h_5)$

Pada mulanya kita membincangkan kesferaan bagi persembahan kumpulan relatif $\mathcal{P}$ $\langle H, t; R\rangle$ dengan $R = tatbtctdt^{-1}e\ (a \neq b \neq c \neq d \neq e)$.

Misalkan $\mathcal{P} = \langle H, t; tatbtctdt^{-1}e\rangle$, $(a \neq b \neq c \neq d \neq e)$. Dalam bahagian ini kita membincangkan kesferaan bagi $\mathcal{P}$.

3.1 Bentuk $tatbtctdt^{-1}e$

Kes yang tidak dapat ditentukan:

A3.1.1 per(e) = 3, per(d) = 3, per$(a^{-1}c) = 3$, $b = da$, $b = ec$.

A3.1.2 per(e) = 3, per(d) = 4, per$(a^{-1}c) = 3$, $b = da$, $b = ec$.

A3.1.3 per(e) = 3, per(d) = 5, per$(a^{-1}c) = 3$, $b = da$, $b = ec$.

Untuk itu kita mempertimbangkan dua kes, iaitu:

1. Peringkat bagi d sama dengan peringkat bagi e.
2. Peringkat bagi d tidak sama dengan peringkat bagi e.

3.1.1 per(d) = per(e)

- per(e) = per(d) = 2

3.1.2 per(d) $\neq$ per(e)

- per(e) = 2, per(d) = n, $n > 2$
- per(e) = 3, per(d) = n, $n > 3$
- per(e) = 4, per(d) = n, $n > 4$