FUNGSI BALL TERITLAK NISBAH UNTUK LENGKUNG INTERPOLASI CEMBUNG DAN BEREKANADA

oleh

SAMSUL ARIFFIN BIN ABDUL KARIM

Tesis yang diserahkan untuk memenuhi keperluan bagi Ijazah Sarjana Sains

JULAI 2008

PENGHARGAAN

Saya ingin mengucapkan ribuan terima kasih kepada penyelia utama saya Prof. Madya Dr Abd. Rahni Mt. Piah di atas bimbingan, bantuan dan juga masa yang beliau luangkan untuk berbincang dengan saya disepanjang pengajian saya ini. Perbincangan dengan Prof. Madya Dr Jamaludin Md Ali dan Prof. Dr Ong Boon Hua berkenaan dengan pengekalan bentuk data cembung telah banyak membantu mengukuhkan pemahaman saya. Penyelidikan tesis ini telah dilengkapkan dengan mengadakan perbincangan dengan Dr Keith Unsworth daripada Universiti Lincoln, New Zealand.

Penghargaan juga saya tujukan kepada rakan-rakan kerana sentiasa memberikan sokongan dan dorongan kepada saya untuk menamatkan pengajian saya ini. Kepada semua staf di Pusat Pengajian Sains Matematik terutama Encik Syed dan Puan Azizah Abdul Rani terima kasih di atas pertolongan yang diberikan. Saya ingin merakamkan penghargaan kepada Universiti Sains Malaysia kerana membantu saya daripada segi kewangan di bawah skim geran penyelidikan fundamental (FRGS), nombor akaun 203/PMATHS/671040/11000 daripada Mac 2007 sehingga November 2007.

Saya juga ingin mengucapkan rasa terima kasih yang tak terhingga kepada ayah saya Haji Abdul Karim Mat Arif dan ahli keluarga saya Kamarzaman, Jamaludin, Jamaliah, Norezea, Zulkefly, Bakri, Megat Ghazali dan saudari Maisarah Bt Mustofa, yang sentiasa menyokong dan mendoakan kejayaan saya.

SUSUNAN KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

SENARAI RAJAH

SENARAI PENERBITAN

FUNGSI BALL TERITLAK NISBAH UNTUK LENGKUNG INTERPOLASI CEMBUNG DAN BEREKANADA

ABSTRAK

Tesis ini membincangkan skema interpolasi lengkung yang berasaskan fungsi asas Ball teritlak (Said-Ball) untuk menampakkan data saintifik. Skema menggunakan fungsi nisbah cebis demi cebis Ball teritlak dengan pengangka kuartik dan penyebut linear, yang melibatkan dua parameter bentuk. Penulis menggunakan penginterpolasi nisbah untuk mengekal bentuk data berekanada dengan darjah keselanjaran C^2 dan mengekal bentuk data cembung dengan darjah keselanjaran C^1. Motivasi utama penulis menggunakan skema kuartik/linear terbit daripada kertas kerja Wang & Tan (2004). Fungsi pengangka yang mereka gunakan adalah Bézier berdarjah kuartik. Kelebihan utama skema yang dicadangkan adalah dari aspek rantau keekanadaan yang lebih besar berbanding dengan rantau keekanadaan Wang & Tan (2004), yang membolehkan skema yang dicadangkan memberi hasil yang kelihatan lebih memuaskan. Algoritma yang penulis kemukakan untuk mendapat nilai parameter bentuk atau nilai terbitan adalah secara interaktif bagi mengekal bentuk data berekanada dan cembung. Perbandingan berangka di antara skema yang dicadangkan dengan skema yang telah dihasilkan oleh Wang & Tan (2004), Sarfraz (2000, 2002b, 2003) dan Duan et al. (2003) juga dikemukakan dalam tesis ini.

RATIONAL GENERALIZED BALL FUNCTIONS FOR MONOTONIC AND CONVEX INTERPOLATING CURVES

ABSTRACT

This thesis discusses a curve interpolation scheme based on the generalized Ball basis functions (Said-Ball) to visualize the scientific data. The scheme uses piecewise generalized Ball functions with quartic numerator and linear denominator involving two shape parameters. We use rational interpolant to preserve the monotonic data shape with C^2 continuity and preserve the convex data shape with C^1 continuity. The main motivation to use the quartic/linear scheme comes from the work of Wang & Tan (2004). The numerator function which they used is a quartic Bézier. The main advantage of our proposed scheme is a larger monotonic region as compared to the region of Wang & Tan (2004), which enables our proposed scheme to produce a better visually pleasing result. The proposed algorithm to obtain the shape parameter values or derivative values is done by interactively to preserve the monotonicity and convexity of the data. The numerical comparisons between the proposed scheme and the schemes of Wang & Tan (2004), Sarfraz (2000, 200b, 2003) and Duan et al. (2003) are presented in this thesis.

BAB 1
PENGENALAN

1.0 Pengenalan

Kaedah Bézier adalah kaedah asas yang digunakan secara meluas di dalam sistem Reka Bentuk Geometri Dibantu Komputer (CAGD) dan Reka Bentuk Dibantu Komputer/Pembuatan Dibantu Komputer (CAD/CAM) untuk tujuan memodel lengkung dan permukaan berparameter bentuk-bebas (Farin, 1996; Hoschek & Lasser, 1993). Ia telah diperkenalkan secara berasingan oleh Bézier pada tahun 1962 dan de Casteljau pada tahun 1959 (Boehm et al., 1984). Kaedah Bézier telah digunakan di dalam sistem UNISURF (Bézier, 1972) oleh syarikat pengeluar kereta Renault. Di samping itu juga terdapat banyak pakej grafik telah menggunakan lengkung Bézier di dalam sistem CAD mereka; antaranya adalah Adobe Illustrator, CorelDraw dan menjana fon untuk PostScript (Farin, 1996; Farin & Hansford, 2000).

Sejak beberapa dekad yang lalu kajian berkaitan dengan lengkung Ball teritlak adalah amat kurang sekali. Lengkung kubik Ball telah diperkenalkan oleh Ball untuk kegunaan dalam sistem CONSURF oleh “British Aircraft Corporation” di Warton (Ball, 1974, 1975, 1977). Manakala Said (1989), Wang (1987) dan Delgado & Pena (2003) telah mengitlakkan lengkung Ball berdarjah lebih tinggi daripada tiga, di mana fungsi asas ini diberikan nama sebagai fungsi asas Ball teritlak. Othman & Goldman (1997) pula membincangkan mengenai fungsi asas dual bagi fungsi asas Ball teritlak (berdarjah ganjil) yang dicadangkan oleh Said (1989).

Menurut Goodman & Said (1991a, 1991b) penggunaan fungsi asas Ball teritlak yang diperkenalkan oleh Said (1989) mempunyai beberapa kelebihan berbanding dengan kaedah Bézier yang merupakan intipati di dalam bidang CAGD dan CAD/CAM. Antara kelebihan kaedah Ball teritlak adalah daripada aspek pengiraan yakni penjanaan lengkung dan permukaan Ball teritlak adalah lebih pantas dan cekap berbanding dengan meggunakan algoritma de Casteljau bagi penjanaan lengkung dan permukaan Bézier. Di samping itu juga, proses peningkatan darjah dan penurunan darjah dengan menggunakan kaedah Ball teritlak ini adalah lebih pantas berbanding dengan kaedah Bézier (Goodman & Said, 1991b).

Hu et al. (1996) telah membuat kajian berkenaan dua fungsi asas Ball teritlak yakni kaedah Said (1989) dan Wang (1987), dan mereka telah menamakan semula kedua-dua fungsi asas Ball teritlak ini sebagai fungsi asas Said-Ball dan fungsi asas Wang-Ball. Di dalam kertas kerja ini, mereka menunjukkan bahawa daripada aspek penjanaan lengkung berparameter dengan menggunakan kaedah Bézier, Said-Ball dan juga Wang-Ball; kaedah yang diperkenalkan oleh Wang (1987) adalah lebih cekap kerana ia mempunyai kekompleksan masa linear berbanding dengan kekompleksan masa kuadratik bagi kaedah Bézier dan Said-Ball. Namun begitu, sungguhpun kaedah Said-Ball mempunyai kekompleksan masa kuadratik seperti juga kaedah Bézier, adalah didapati bahawa bilangan operasi penambahan dan pendaraban bagi penjanaan lengkung Said-Ball adalah sentiasa kurang daripada bilangan operasi aritmetik bagi kaedah Bézier; yakni kaedah Said-Ball adalah lebih cekap daripada kaedah Bézier (Said, 1989; Hu et al., 1996).

Salah satu kriteria yang penting bagi penjanaan lengkung adalah sifat positif seluruh bagi suatu fungsi asas yang digunakan. Goodman & Said (1991a) telah membuktikan bahawa fungsi asas Ball teritlak (Said-Ball) adalah positif seluruh (TP) dan juga positif seluruh ternormal (NTP). Oleh kerana fungsi asas Said-Ball adalah bersifat NTP maka bentuk lengkung Said-Ball yang terhasil akan cuba untuk meniru bentuk poligon kawalan; yakni sifat pengekalan bentuk akan dikekalkan dengan mengunakan fungsi asas Said-Ball untuk lengkung Said-Ball (Goodman & Said, 1991a).

Sungguhpun kaedah Wang-Ball mempunyai kekompleksan masa linear, ia tidak memenuhi syarat sifat pengekalan bentuk yakni ia tidak memenuhi sifat TP dan NTP untuk lengkung Wang-Ball yang bedarjah lebih daripada tiga (Delgado & Pena, 2003). Dengan yang demikian penggunaan lengkung dan permukaan Wang-Ball untuk darjah kuartik dan bikuartik ke atas tidak akan menjamin sifat pengekalan bentuk poligon akan dikekalkan (Delgado & Pena, 2003). Sungguhpun begitu terdapat kajian berkenaan dengan penggunaan lengkung dan permukaan Wang-Ball samada bentuk nisbah mahupun bukan nisbah (sila lihat (Dejdumrong et al., 2000; Dejdumrong et al., 2001; Delgado & Pena, 2002, 2006; Wang & Cheng, 2001) untuk maklumat lanjut).

Delgado & Pena (2003) telah memperkenalkan fungsi pengadun Ball teritlak yang baru yang dikenali sebagai fungsi asas Delgado-Pena. Adalah didapati bahawa fungsi asas kubik bagi kaedah Delgado & Pena (2003) tidak sama dengan fungsi asas kubik Ball (1974). Dejdumrong (2007) telah menamakannya sebagai fungsi asas DP. Fungsi asas ini mempunyai beberapa kelebihan berbanding dengan fungsi asas Said-Ball dan Wang-Ball. Daripada aspek kekompleksan masa kaedah DP adalah linear yang setanding dengan kaedah Wang-Ball akan tetapi kaedah DP adalah memenuhi sifat TP dan NTP (Delgado & Pena, 2003). Motivasi daripada fakta bahawa fungsi asas DP ini mempunyai sifat-sifat pengekalan bentuk yang amat diperlukan dalam proses merekabentuk untuk sistem CAGD dan CAD/CAM, Jiang & Wang (2005) telah mengkaji proses pertukaran asas dan juga penjanaan permukaan berparameter antara dua permukaan yang dibina daripada asas NTP yakni kaedah Bézier dan kaedah DP. Dejdumrong (2006) pula telah membuat kajian berkenaan dengan lengkung nisbah DP. Di mana beliau telah menunjukkan bahawa proses penjanaan lengkung nisbah DP adalah lebih pantas berbanding dengan kaedah de Casteljau untuk penjanaan lengkung nisbah Bézier. Dejdumrong (2006) juga mencadangkan untuk menjana lengkung nisbah Bézier, kita perlu menukarkan terlebih dahulu asas Bézier kepada asas DP (darjah yang sama) dan kemudian gunakan algoritma penjanaan lengkung nisbah DP.

Merujuk kepada artikel yang terbaru daripada Dejdumrong (2007), adalah didapati bahawa polinomial DP tidak memenuhi syarat sifat pengekalan bentuk bagi suatu lengkung berparameter. Beliau mendapati bahawa polinomial Said-Ball mengekal bentuk bagi lengkung Said-Ball dengan lebih baik berbanding dengan pengekalan bentuk lengkung Wang-Ball dan lengkung DP dengan menggunakan polinomial Wang-Ball dan polinomial DP masing-masing. Dejdumrong (2007) telah membuat usulan bahawa polinomial Wang-Ball dan polinomial DP tidak memenuhi syarat sifat pengekalan bentuk kerana titik-titik kawalan kedua-dua lengkung Wang-Ball dan DP tidak dapat mengekal bentuk lengkung yang akan terhasil. Hal ini akan dapat kita lihat dengan jelas dalam Bab 2 nanti. Sila rujuk Dejdumrong (2007) untuk maklumat lanjut berkenaan dengan sifat pengekalan bentuk lengkung ini.

Salah satu kajian yang amat penting di dalam bidang CAGD adalah mengekal bentuk data. Pengekalan bentuk data merupakan satu kaedah bagaimana kita boleh mengekalkan sifat data yang hendak diinterpolasi ataupun mendapatkan penghampiran bagi set data dengan mengekalkan sifat-sifat geometri yang dimiliki oleh data itu.

Terdapat tiga sifat data yang amat diperlukan dalam aplikasi iaitu positif, berekanada dan cembung. Kajian dalam tesis ini akan memfokuskan berkenaan dengan interpolasi mengekal bentuk data skalar berekanada dan cembung menggunakan skema penginterpolasi splin nisbah dalam bentuk kuartik/linear (pengangka adalah fungsi Said-Ball berdarjah kuartik manakala penyebut adalah fungsi linear.)

Penjanaan pengekalan bentuk suatu lengkung dengan darjah keselanjaran tertentu yang melalui kesemua titik data merupakan masalah yang amat penting didalam bidang interpolasi. Penggambaran saintifik merupakan perwakilan secara grafik bagi sebarang data untuk membolehkan para pengguna dapat memahami dan mendapat gambaran berkenaan dengan corak data yang diberikan itu. Kajian seperti grafik komputer, pemprosesan imej, pengawalan data metereologi, pemetaan, plot data, lukisan dan banyak lagi merupakan intipati bidang penggambaran saintifik (Sarfraz, 2000, 2008).

Adalah menjadi suatu keperluan untuk ahli matematik dan pengguna CAD untuk menjana fungsi yang licin yang melalui kesemua titik data yang diberikan dengan mengekalkan sifat yang dimiliki oleh data itu iaitu kepositifan, keeekanadan dan kecembungan; yakni penginterpolasi mengekal bentuk yang licin dan selanjar (Cravero & Manni, 2003). Terdapat pelbagai kaedah yang efektif yang telah dibina untuk membentuk penginterpolasi bagi mengekal bentuk data yang memenuhi darjah keselanjaran C^1 atau C^2 (sebagai contoh, sila lihat Goodman (2002) dan senarai rujukan di dalamnya). Antara kaedah-kaedah itu adalah menggunakan polinomial dan juga menggunakan kaedah tegangan (antaranya adalah menggunakan fungsi nisbah dan splin pemberat dan juga splin-eksponen dalam tegangan) (Foley, 1986; Cravero & Manni, 2003; Kvasov, 2000; Goodman, 2002).

Kaedah yang biasa digunakan untuk menggambarkan data santifik adalah fungsi splin. Walaupun fungsi splin adalah licin kerana ia mempunyai darjah keselanjaran C^2, ia tidak banyak membantu di dalam menginterpolasi bentuk bagi data. Beberapa keputusan yang tak dijangkakan akan terhasil, antaranya ia tidak menepati bentuk data yang hendak diinterpolasi, juga akan wujud masalah ayunan atau “wiggles” dalam interpolasi lengkung yang dihasilkan kelak (Sarfraz, 2000, 2008; Kvasov, 2000). Dengan yang demikian skema pengekalan bentuk data sememangnya amat diperlukan bagi mengatasi masalah ini. Kita inginkan satu skema interpolasi yang akan menghapuskan kesemua sifat ayunan itu dan juga sifat geometri data mesti dikekalkan. Inilah objektif utama kajian berkenaan dengan pengekalan bentuk lengkung.

Masalah mengekal bentuk data telah banyak dikaji oleh penyelidik. Fristch & Carlson (1980) dan Fristch & Butland (1984) telah membincangkan pengekalan bentuk data berekanada dengan menggunakan polinomial kubik splin C^1 cebis-demi cebis. Kaedah yang diperkenalkan oleh Fristch & Carlson (1980) telah didokumentasikan di dalam Matlab yang dikenali sebagai fungsi PCHIP (Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial). Fristch & Carlson (1980) telah memberikan syarat cukup dan perlu bagi terbitan pertama d_i untuk membolehkan polinomial kubik menjadi berekanada. Untuk data yang menokok secara berekanada, rantau keekanadaan Fristch & Carlson (1980) meliputi elips dan juga segiempat $[0,3]\times[0,3]$. Hayman (1983) dan Huynh (1993) juga telah membincangkan pengekalan data berekanada dengan menggunakan polinomial kubik. Dougherty et al. (1989) pula telah membincangkan mengenai pengekalan bentuk data berekanada dan cembung dengan menggunakan fungsi Hermite berdarjah kubik dan kuintik. Passow & Roulier (1977) telah membuat kajian berkenaan dengan pengekalan bentuk data cembung dan berekanada menggunakan kaedah geometri (Lam, 1990). Algoritma untuk penjanaan interpolasi mengekal bentuk menggunakan polinomial kuadratik telah dibincangkan di dalam McAllister dan Roulier (1981) dan idea mereka telah dilanjutkan oleh Schumaker (1983), De Vore & Yan (1986), Lam (1990) dan Lahtinen (1996). Brodlie & Butt (1991) telah menggunakan polinomial kubik dengan menyelitkan knot tambahan untuk mengekal bentuk data cembung. Schumaker (1983) pula menggunakan polinomial kuadratik dengan menyelitkan knot tambahan untuk mengekal bentuk data cembung dan berekanada dengan darjah keselanjaran C^1.

Sebagai satu alternatif terhadap penggunaan polinomial untuk mengekal bentuk data, kaedah splin nisbah telah diperkenalkan. Terdapat pelbagai jenis skema penginterpolasi nisbah yang telah diperkenalkan untuk mengekal bentuk data berekanada dan cembung. Skema kuadratik/kuadratik telah diperkenalkan oleh Gregory dan Delbourgo (1982) untuk mengekal bentuk data berekanada dengan mencapai darjah keselanjaran C^1. Idea ini telah mereka kembangkan untuk mengekal bentuk data berekanada yang mencapai darjah keselanjaran C^2 (Delbourgo & Gregory, 1983). Skema kubik/kuadratik telah diperkenalkan oleh Delbourgo & Gregory (1985b) untuk mengekal bentuk data berekanada dan cembung yang mencapai darjah keselanjaran C^1. Parameter tegangan/bentuk r_i dalam penakrifan penginterpolasi splin nisbah mereka digunakan untuk mengekal bentuk data berekanada dan cembung. Skema ini juga akan terturun kepada skema kuadratik/kuadratik Gregory & Delbourgo (1982) dan Delbourgo & Gregory (1983) dengan memilih parameter tegangan/bentuk r_i yang sesuai. Skema ini juga telah digunakan oleh Gregory (1986) untuk mengekal bentuk data berekanada dan cembung yang mencapai darjah keselanjaran C^2. Gregory & Delbourgo (1985a) telah mencadangkan kaedah untuk menganggar nilai parameter terbitan bagi mengekal bentuk data berekanada dengan menggunakan skema yang telah mereka perkenalkan di dalam Gregory & Delbourgo (1982). Delbourgo (1989) pula telah mengekal bentuk data cembung dengan menggunakan skema penginterpolasi kuadratik/linear dengan darjah keselanjaran yang dicapai adalah C^1. Analisis pengekalan bentuk data cembung dengan darjah keselanjaran C^2 juga diberikan. Delbourgo (1989) telah menunjukkan bahawa penginterpolasi nisbah yang beliau gunakan adalah kes istimewa daripada skema kubik/kuadratik dalam Delbourgo & Gregory (1985b). Kelebihan utama skema penginterpolasi nisbah Gregory & Delbourgo (1982,1983,1985b) ini adalah kekangan ke atas terbitan pertama hanyalah $d_i > 0$ yang berbeza dengan skema Fristch & Carlson (1980). Tian et al. (2005) pula telah menggunakan skema kubik/kuadratik yang berbeza dengan skema yang dipelopori oleh Delbourgo & Gregory (1985b). Mereka mengekal bentuk data cembung dengan mengenakan kekangan terhadap dua parameter bentuk u_i, v_i. Idea mereka ini telah dilanjutkan oleh Hussain & Hussain (2007) untuk mengekal bentuk data berekanada bagi lengkung dan permukaan.

Skema kubik/kubik iaitu fungsi kubik untuk pengangka dan fungsi kubik untuk penyebut telah digunakan oleh Ismail (1992). Beliau telah mengekal bentuk berekanada dengan darjah keselanjaran C^2 dengan mengekang parameter bentuk $r_i \geq 2$ dan skema ini bersifat tempatan. Gregory & Sarfraz (1990) telah menggunakan skema kubik/kuadratik Delbourgo & Gregory (1985b) untuk mengekal bentuk data berparameter dengan darjah keselanjaran C^2. Sarfraz (1992) telah menggunakan skema kubik/kubik untuk mengekal bentuk data berparameter dengan mengambil dua parameter bentuk v_i, w_i. Sarfraz (2000) pula melanjutkan idea ini untuk mengekal data berekanada yang skalar dengan darjah keselanjaran C^2. Sarfraz et al. (2001) telah menggunakan skema Sarfraz (2000) untuk mengekal data positif dan berekanada dengan darjah keselanjaran C^1. Skema penginterpolasi nisbah yang mereka perkenalkan ini mempertimbangkan data skalar. Sarfraz (2003) telah menunjukkan bahawa skema kubik/kubik akan terturun kepada skema kuadratik/kuadratik dengan pemilihan parameter bentuk v_i, w_i yang sesuai. Sarfraz (2002b) pula telah menggunakan skema kubik/kubik daripada Sarfraz (2000) untuk mengekal bentuk data cembung dengan darjah keselanjaran C^1. Pengekalan bentuk data berekanada dan cembung akan dapat dicapai dengan menghitung nilai kedua-dua parameter bentuk ini yang membolehkan penginterpolasi splin nisbah menjadi berekanada atau cembung dalam setiap selang. Kemudian interpolasi lengkung akan dijana secara cebis-demi cebis dengan darjah keselanjaran tertentu.

Skema kubik/linear iaitu fungsi kubik untuk pengangka dan fungsi linear untuk penyebut telah diperkenalkan oleh Duan et al. (1999a, 1999b). Idea ini telah mereka lanjutkan untuk mengekal bentuk data cembung dan juga mengekal data di bawah syarat kekangan tertentu yang mencapai darjah keselanjaran C^1 atau C^2 (Duan et al., 2003). Analisis ralat untuk menginterpolasi set data daripada suatu fungsi dengan menggunakan skema kubik/linear pula telah dibincangkan di dalam Duan et al. (2007). Motivasi utama skema kubik/linear yang telah diperkenalkan oleh Duan et al. (1999a, 1999b) adalah sekiranya kita ingin menginterpolasi titik daripada suatu fungsi dan juga nilai terbitan tidak diketahui, bagaimanakah kita harus mengekal bentuk data itu? Mereka mencadangkan agar nilai terbitan itu dikira daripada terbitan pertama fungsi tersebut. Untuk mengekal bentuk data cembung pula mereka telah memberikan syarat cukup dan perlu bagi membolehkan lengkung penginterpolasi nisbah menjadi cembung dalam setiap selang.

Wang & Tan (2004) yang menjadi motivasi kepada penulis, pula telah memperkenalkan skema kuartik/linear iaitu fungsi kuartik untuk pengangka dan fungsi linear untuk penyebut bagi mengekal bentuk data berekanada yang mencapai darjah keselanjaran C^2. Dua parameter bentuk α_i, β_i dalam penakrifan penginterpolasi nisbah ini akan di kekang bagi mengekal bentuk data berekanada. Wang & Tan (2004) menyatakan bahawa lengkung interpolasi akan mencapai darjah keselanjaran C^2 dengan memilih nilai terbitan d_i yang betul. Akan dibincangkan kelak kaedah yang mereka perkenalkan ini mempunyai beberapa kekurangan. Pada dasarnya skema penginterpolasi nisbah dibina dengan mengambil bentuk kubik Hermite bagi pengangka. Sebagai contoh, skema kubik/kubik oleh Sarfraz et al. (2001) mengambil skema nisbah Bernstein-Bézier bedarjah kubik bagi pengangka dan penyebut, di mana fungsi pengangka adalah dalam bentuk Hermite. Begitulah juga skema kuartik/linear oleh Wang & Tan (2004) di mana mereka telah menakrifkan pengangka dalam bentuk Bézier berdarjah kuartik.

Motivasi daripada kaedah yang telah digunakan oleh Wang & Tan (2004), penulis akan menggunakan fungsi asas Ball teritlak kuartik untuk pengangka manakala fungsi linear untuk penyebut. Penulis juga akan mengatasi masalah dan juga kekurangan kaedah yang telah diperkenakan oleh Wang & Tan (2004) di dalam mengekal bentuk data berekanada yang mencapai darjah keselanjaran C^2. Dua parameter bentuk α_i, β_i dalam penakrifan penginterpolasi nisbah ini akan ditentukan bagi mengekal bentuk data berekanada. Daripada beberapa aspek yang akan dibincangkan kelak, skema kuartik/linear dengan menggunakan fungsi nisbah Ball teritlak yang penulis cadangkan ini adalah setanding dengan kaedah Sarfraz (2000, 2003) untuk mengekal bentuk data berekanada dengan darjah keselanjaran C^2. Penulis juga akan membincangkan pengekalan bentuk data cembung dengan menggunakan fungsi Ball teritlak nisbah iaitu skema kuartik/linear. Darjah keselanjaran yang dicapai adalah C^1. Pengekalan bentuk data cembung dicapai dengan mendapatkan nilai parameter bentuk α_i, β_i yang membolehkan penginterpolasi nisbah menjadi cembung dalam setiap selang dengan yang demikian sifat kecembungan data akan dikekalkan.

1.1 Objektif Kajian

Tujuan utama tesis ini adalah membuat kajian berkenaan dengan fungsi asas Ball teritlak dan menggunakannya untuk mengekal bentuk data berekanada dan cembung. Fungsi asas Ball teritlak ini telah diperkenalkan oleh Said (1989), Wang (1987) dan Delgado & Pena (2003). Sebagai permulaan kajian akan fokus kepada penakrifan lengkung kubik dan kuartik menggunakan fungsi asas Bézier dan Said-Ball, Wang-Ball dan DP masing-masing untuk fungsi asas Ball teritlak yang diperkenalkan oleh Said (1989), Wang (1987) dan Delgado & Pena (2003). Permukaan berparameter Bézier dan Ball teritlak juga akan dibincangkan Penulis juga akan menunjukkan contoh berangka bahawa lengkung DP tidak mengekal bentuk poligon kawalannya sebagaimana yang telah diusulkan oleh Dejdumrong (2007).

Kemudian penulis akan menggunakan fungsi asas Ball teritlak yakni Said-Ball untuk membentuk satu skema penginterpolasi nisbah yang berbentuk kuartik/linear bagi mengekal bentuk data berekanada dengan darjah keselanjaran C^2 dan mengekal bentuk data cembung dengan darjah keselanjaran C^1. Penulis akan menggunakan fungsi asas

Said-Ball berdarjah kuartik untuk pengangka manakala fungsi linear sebagai penyebut. Skema yang penulis perkenalkan ini adalah setanding dengan kaedah Sarfraz (2000, 2002b, 2003) dan Duan et al. (2003) serta memberikan hasil yang kelihatan lebih memuaskan berbanding dengan skema Wang & Tan (2004). Penulis menggunakan fungsi asas Ball teritlak (Said-Ball) untuk menakrifkan skema penginterpolasi nisbah kuartik/linear adalah kerana tiada kajian untuk mengekal bentuk data sama ada berekanada, cembung atau positif dengan menggunakan fungsi asas Ball teritlak. Pada kebiasaannya, kajian mengekal bentuk data hanya menggunakan fungsi kubik Hermite, kuintik Hermite, Bézier dan fungsi splin.

Tesis ini dibahagikan kepada 6 bab. Bab 2 akan membincangkan mengenai lengkung dan permukaan berparameter bagi darjah kubik dan kuartik untuk kaedah Bézier, Said-Ball, Wang-Ball dan DP. Bab 3 akan membincangkan mengenai interpolasi mengekal bentuk data berekanada dan cembung. Bahagian 3.1 akan membincangkan takrif penginterpolasi nisbah. Takrifan data berekanada dan cembung akan dibincangkan dalam bahagian 3.2. Manakala pengganggaran nilai terbitan d_i akan dibincangkan dalam bahagian 3.3. Pengekalan bentuk data berekanada yang memenuhi darjah keselanjaran C^2 dengan menggunakan skema kubik/kubik oleh Sarfraz (2000, 2003) dan skema kuartik/linear oleh Wang & Tan (2004) akan dibincangkan dalam bahagian 3.4. Seterusnya pengekalan bentuk data cembung dengan darjah keselanjaran yang dicapai adalah C^1 akan dibincangkan dalam bahagian 3.5. Penulis akan membincangkan skema kubik/kubik oleh Sarfraz (2002b) dan skema kubik/linear oleh Duan et al. (2003). Beberapa contoh berangka akan diberikan.

Pengekalan bentuk data berekanada dan cembung dengan menggunakan fungsi nisbah Ball teritlak berbentuk kuartik/linear di mana pengangka adalah fungsi asas kuartik Said-Ball manakala penyebut adalah fungsi linear, akan dibincangkan dalam Bab 4. Dalam bahagian 4.1, penulis bermula dengan memberikan takrifan penginterpolasi nisbah berbentuk kuartik/linear yang akan digunakan untuk mengekal bentuk data berekanada dan cembung kelak. Kemudian penulis akan membincangkan mengenai analisis kawalan bentuk terhadap skema penginterpolasi nisbah yang dicadangkan ini. Analisis kawalan bentuk amat penting sekali kerana ia membolehkan kita menukar bentuk lengkung interpolasi seperti yang kita ingini dengan hanya memanipulasi nilai parameter bentuk α_i, β_i. Bahagian 4.2 pula akan membincangkan mengenai syarat cukup untuk membolehkan penginterpolasi nisbah ini mengekal bentuk data berekanada dan juga mendapatkan syarat bagi lengkung interpolasi mencapai darjah keselanjaran C^2. Penulis juga mencadangkan algoritma untuk penjanaan lengkung interpolasi yang mengekal bentuk data berekanada dengan darjah keselanjaran C^2. Akan ditunjukkan kelak bahawa skema yang penulis cadangkan ini adalah bersifat tempatan. Pengekalan bentuk data cembung pula akan dibincangkan dalam bahagian 4.3. Syarat cukup dan perlu untuk penginterpolasi nisbah menjadi cembung akan dibincangkan dahulu diikuti dengan mendapatkan kaedah automatik dan praktikal bagi menghitung nilai parameter bentuk α_i, β_i. Sifat kecembungan data yang hendak dinterpolasikan akan dapat dikekalkan dengan darjah keselanjaran C^1. Beberapa contoh berangka akan diberikan.

Bab 5 pula akan memfokuskan kepada perbandingan secara berangka bagi kesemua skema penginterpolasi nisbah yang telah dibincangkan dalam Bab 3 dan Bab 4. Daripada contoh berangka yang diperolehi dalam bahagian 5.1 dan bahagian 5.2, jelas sekali bahawa skema yang dicadangkan dalam tesis ini iaitu skema penginterpolasi nisbah berbentuk kuartik/linear dengan menggunakan fungsi Ball teritlak nisbah setanding dengan skema Sarfraz (2000, 2002b, 2003) dan Duan et al. (2003). Bab 6 pula akan membincangkan kesimpulan daripada dapatan hasil kajian dalam tesis ini dan juga penulis mencadangkan beberapa kajian lanjutan untuk mengekal bentuk data sama ada data cembung atau berekanada.

BAB 2
LENGKUNG DAN PERMUKAAN BERPARAMETER

2.0 Pengenalan

Bab ini akan menerangkan beberapa kaedah penjanaan lengkung berparameter dan permukaan berparameter dengan menggunakan kaedah Bézier, Said-Ball, Wang-Ball dan DP masing-masing.

Andaikan sistem fungsi asas $\{g_0, g_1, ..., g_n\}$ dengan titik kawalan $\{V_0, V_1, ..., V_n\}$ dalam $\Re^s$ untuk suatu integer positif yakni $s \geq 2$, maka suatu lengkung P ditakrifkan oleh persamaan yang berikut:

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} V_i g_i(u) \qquad (2.1)$$

dengan $0 \leq u \leq 1$. Lengkung ini dinamakan sebagai lengkung berparameter. Sekiranya fungsi asas $\{g_0, g_1, ..., g_n\}$ memenuhi syarat petak kesaan dan syarat kepositifan, yakni

$$\sum_{i=0}^{n} g_i = 1 \text{ dan } g_i(u) \geq 0 \qquad (2.2)$$

Maka fungsi asas ini dikenali sebagai fungsi pengadun. Kedua-dua sifat ini amat penting sekali kerana ia menjamin lengkung yang terhasil kelak akan terletak di dalam hul cembung poligon kawalan yang dibentuk daripada titik-titik kawalan $\{V_0, V_1, ..., V_n\}$. Iaitu bentuk lengkung yang terhasil akan lebih mudah diramal apabila fungsi asas bagi lengkung itu memenuhi sifat kedua-dua sifat ini (Farin, 1996; Hoschek & Lasser, 1993).

2.1 Lengkung Bézier dan Permukaan Bézier

Lengkung berparameter Bézier berdarjah n dengan $n+1$ titik kawalan $\{V_i\}_{i=0}^{n}$, adalah ditakrifkan sebagai (Farin, 1996)

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} V_i B_i^n\left(u\right), \quad u \in \left[0,1\right] \tag{2.3}$$

Fungsi asas Bézier adalah $\left\{B_i^n\left(u\right)\right\}_{i=0}^{n}$ iaitu polinomial Bernstein, yang ditakrifkan oleh:

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}, \quad u \in \left[0,1\right] \tag{2.4}$$

dengan pekali binomial ditakrifkan sebagai

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \dfrac{n!}{i!(n-i)!} & \text{, jika } 0 \le i \le n \\ 0 & \text{, lain-lain} \end{cases}$$

Titik $\left\{V_i\right\}_{i=0}^{n}$ dikenali sebagai titik kawalan lengkung Bézier atau ia juga disebut titik Bézier. Titik-titik kawalan ini akan membentuk poligon kawalan dengan menyambungkan garis lurus antara titik V_i ke V_{i+1} untuk $i = 0,1,...,n-1$ (Farin, 1996; Hoschek & Lasser, 1993) .

Farin (1996) telah memberikan dengan lengkap sekali sifat-sifat yang dimiliki oleh lengkung Bézier. Berikut disenaraikan beberapa ciri yang dipunyai oleh lengkung Bézier (untuk maklumat yang lengkap, sila rujuk Farin (1996)):

- tak varians dibawah suatu transformasi afin
- hul cembung kerana $\sum_{i=0}^{n} B_i^n\left(u\right) = 1$ dan $B_i^n\left(u\right) \ge 0$, $u \in \left[0,1\right]$
- interpolasi titik-titik hujung yakni $P\left(0\right) = V_0$ and $P\left(1\right) = V_n$
- simetri iaitu $\sum_{i=0}^{n} V_i B_i^n\left(u\right) = \sum_{i=0}^{n} V_{n-i} B_i^n\left(1-u\right)$

- kejituan linear. Katakan bucu poligon V_i adalah diagihkan disepanjang garis lurus yang menghubungkan titik p dan titik q, maka

$$V_i = \left(1 - \frac{i}{n}\right)p + \frac{i}{n}q; \quad i = 0, \ldots, n$$

Permukaan Bézier ditakrifkan dengan menggunakan hasil darab tensor. Ia diberikan oleh

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} V_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v), \qquad u,v \in [0,1] \tag{2.5}$$

dengan $B_i^m(u), B_j^n(v) : i = 0, \ldots, m;\ j = 0, \ldots, n$ merupakan polinomial Bernstein berdarjah m dan n masing-masing. Manakala $\{V_{i,j}\}_{i,j=0}^{m,n}$ adalah titik-titik kawalan bagi permukan Bézier. Titik-titik kawalan ini akan membentuk polihedron kawalan bagi permukaan Bézier. Permukaan Bézier yang terjana akan cuba untuk meniru bentuk polihedron kawalan ini dengan yang demikian kita peroleh suatu permukaan penghampiran kepada polihedron kawalan itu. Untuk tujuan tesis ini, kita akan hanya menggunakan lengkung Bézier berdarjah tiga (kubik) dan berdarjah empat (kuartik).

Fungsi asas kubik Bézier diberikan sebagai:

$$\left.\begin{array}{l} B_0^3(u) = (1-u)^3, B_1^3(u) = 3(1-u)^2 u \\ B_2^3(u) = 3(1-u)u^2, B_3^3(u) = u^3 \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

Manakala lengkung kubik Bézier dan permukaan bikubik Bézier masing-masing ditakrifkan oleh

$$P(u) = \sum_{i=0}^{3} V_i B_i^3(u) \tag{2.7}$$

dan

$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}V_{i,j}B_i^3(u)B_j^3(v) \tag{2.8}$$

dengan cara yang sama kita akan peroleh lengkung kuartik Bézier dengan fungsi asas Bézier ditakrifkan sebagai:

$$\left.\begin{array}{l} B_0^4(u)=(1-u)^4,\, B_1^4(u)=4(1-u)^3u,\, B_2^4(u)=6(1-u)^2u^2 \\ B_3^4(u)=4(1-u)u^3,\, B_4^4(u)=u^4 \end{array}\right\}$$

Algoritma de Casteljau digunakan untuk menjana lengkung Bézier dan permukaan Bézier. Berikut dinyatakan algoritma de Casteljau bagi menjana lengkung Bézier berdarjah n.

Algoritma 2.1. [Algoritma de Casteljau, Farin (1996)]

Step 1. Diberikan titik-titik kawalan $\{V_i\}_{i=0}^{n}$

Step 2. Untuk $i=0,1,.,n$, set $V_i^0=V_i$

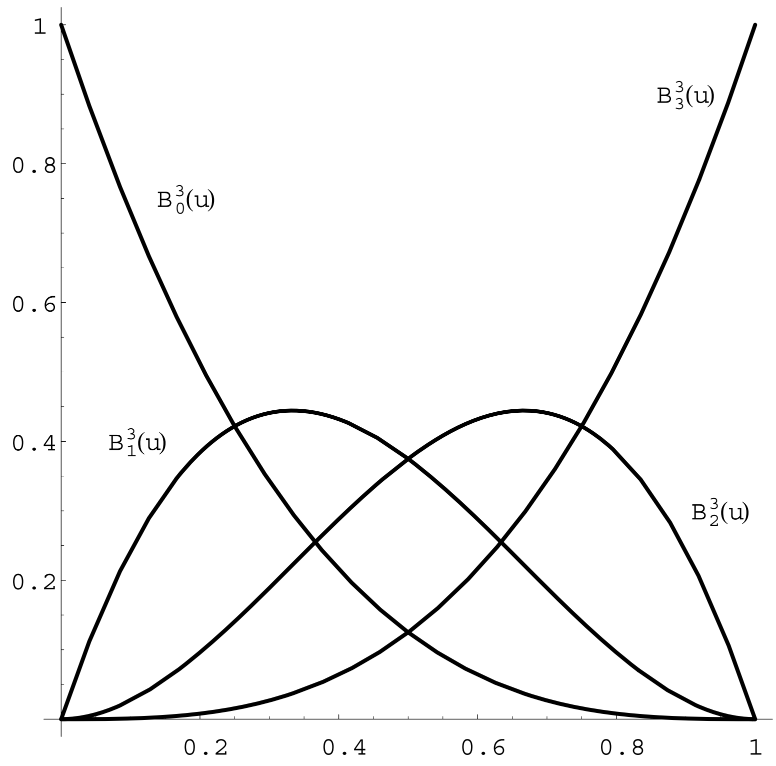
Step 3. Untuk $i=1,.,n$

Untuk $j=0,1,.,n-i$

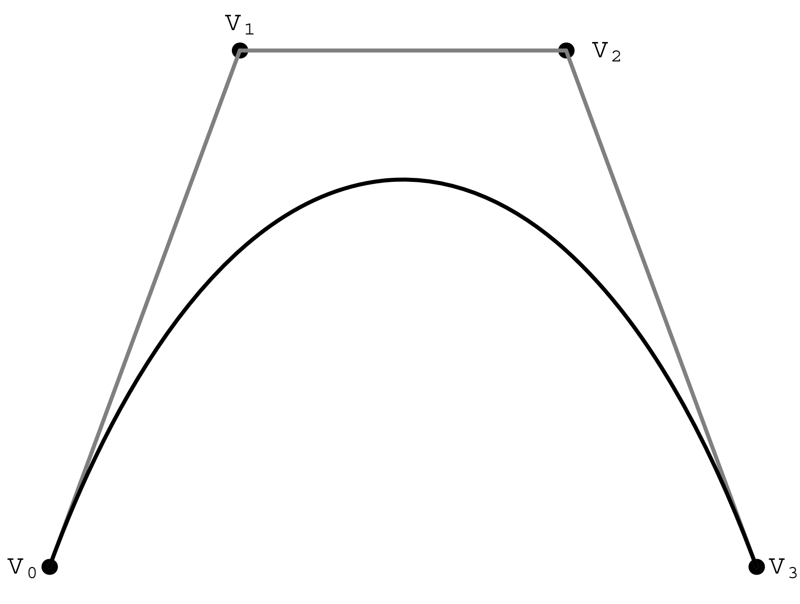
$V_j^i=(1-u)V_j^{i-1}+uV_{j+1}^{i-1}$

Step 4. Titik yang dikehendaki adalah diberikan oleh $P(u)=V_0^n$

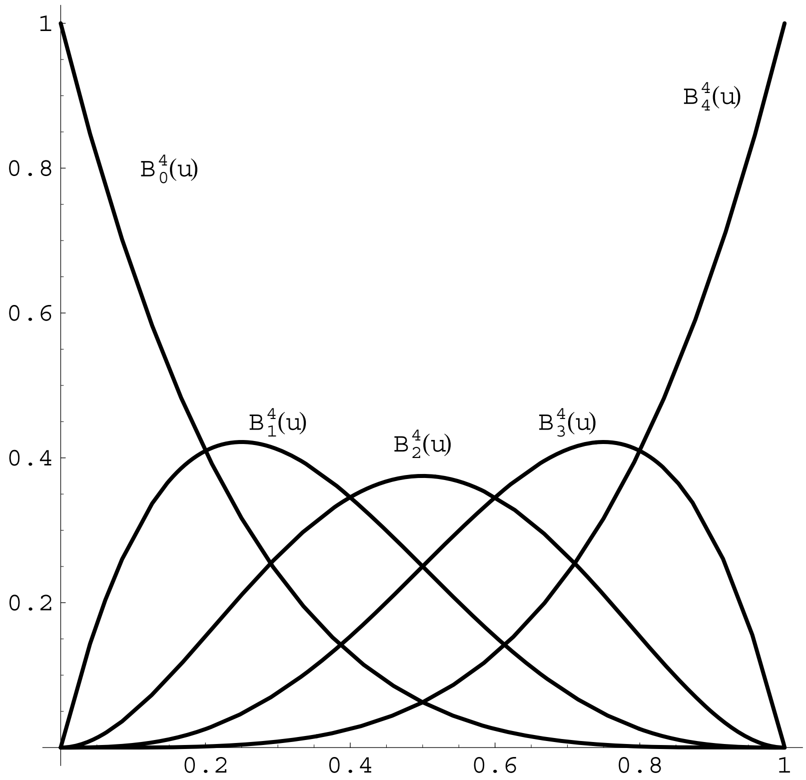
Rajah 2.1 menunjukkan fungsi asas kubik Bézier, Rajah 2.2 menunjukkan lengkung kubik Bézier manakala Rajah 2.3 menunjukkan fungsi asas kuartik bagi Bézier dan Rajah 2.4 menunjukkan lengkung kuartik Bézier.



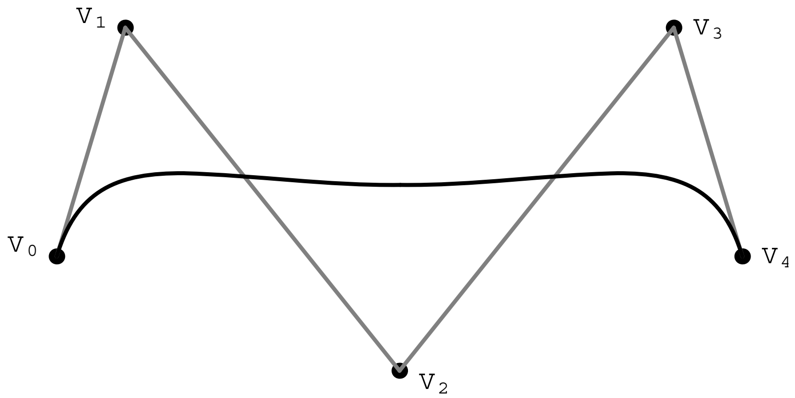
Rajah 2.1: Fungsi asas kubik Bernstein-Bézier



Rajah 2.2: Lengkung kubik Bézier



Rajah 2.3: Fungsi asas kuartik Bernstein-Bézier



Rajah 2.4: Lengkung kuartik Bézier

2.2 Lengkung Kubik Ball dan Permukaan Bikubik Ball

Ball (1974,1975,1977) telah menggunakan fungsi asas yang berlainan sama sekali dengan kaedah yang dipelopori oleh Bézier untuk sistem UNISURF di Renault. Ball telah menggunakan fungsi asas kubik beliau di dalam sistem CONSURF yang telah digunakan oleh bekas syarikat Penerbangan British di Warton. Fungsi asas yang Ball gunakan adalah polinomial kubik yang berbeza dengan polinomial kubik Bernstein yang digunakan dalam penakrifan kaedah Bézier. Namun begitu, fungsi asas kubik Ball ini masih memiliki sifat pengekalan bentuk yang sama dengan polinomial Bernstein (Goodman & Said, 1991b). Satu kelebihan fungsi asas kubik Ball berbanding dengan fumgsi asas kubik Bézier adalah apabila titik kawalan pedalaman bagi lengkung kubik Ball bertindih, maka fungsi kubik Ball akan terturun kepada bentuk kuadratik yakni bentuk kuadratik Bézier. Sifat inilah yang memberikan Said (1989) motivasi untuk menerbitkan rumus fungsi asas Ball teritlak untuk sebarang darjah ganjil yang akan kita bincang pada bahagian yang berikut.

Diberikan titik-titik kawalan $V_i, i = 0,1,2,3$ pada satah, lengkung kubik Ball ditakrifkan oleh:

$$B_3(u) = \sum_{i=0}^{3} V_i \beta_i(u), \quad 0 \le u \le 1 \tag{2.9}$$

dengan fungsi asas kubik Ball diberikan sebagai

$$\left.\begin{aligned} &\beta_0(u) = (1-u)^2, \beta_1(u) = 2u(1-u)^2 \\ &\beta_2(u) = 2u^2(1-u), \beta_3(u) = u^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Lengkung $B_3(u)$ akan memberi penghampiran kepada poligon kawalan yang dibentuk daripada menyambungkan garis lurus antara titik V_i ke V_{i+1} untuk $i = 0,1,2$. Fungs asas Ball, $\beta_i(u): i = 0,1,2,3$ mempunyai sifat-sifat yang berikut:

i) $\beta_i(u) \geq 0$, $i = 0,1,2,3$ (sifat kepositifan)

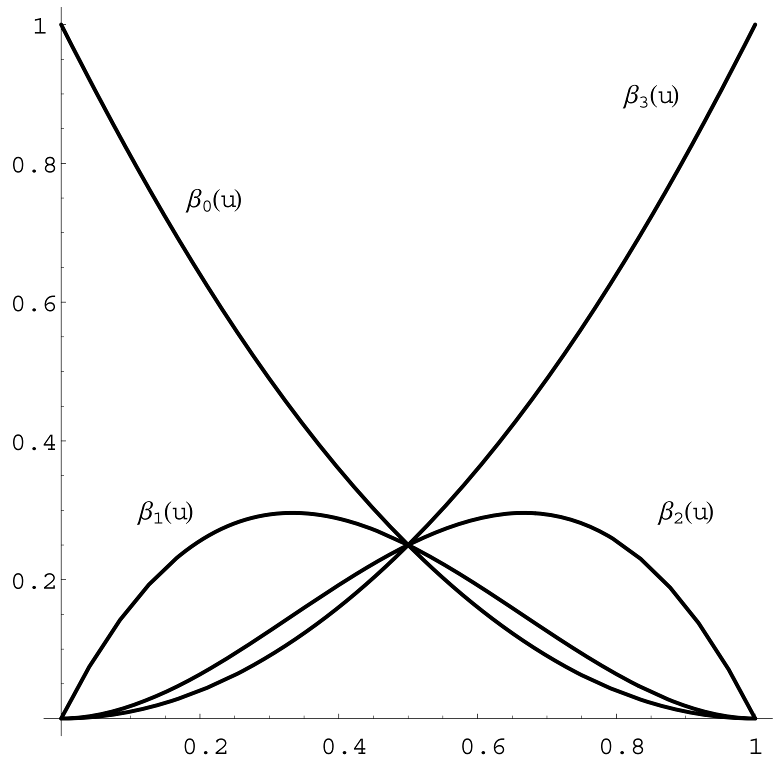
ii) $\sum_{i=0}^{3} \beta_i(u) = 1$ (petak kesaan)

iii) $\beta_i^3(1-u) = \beta_{3-i}^3(u)$, $i = 0,1,...3$ (simetri)

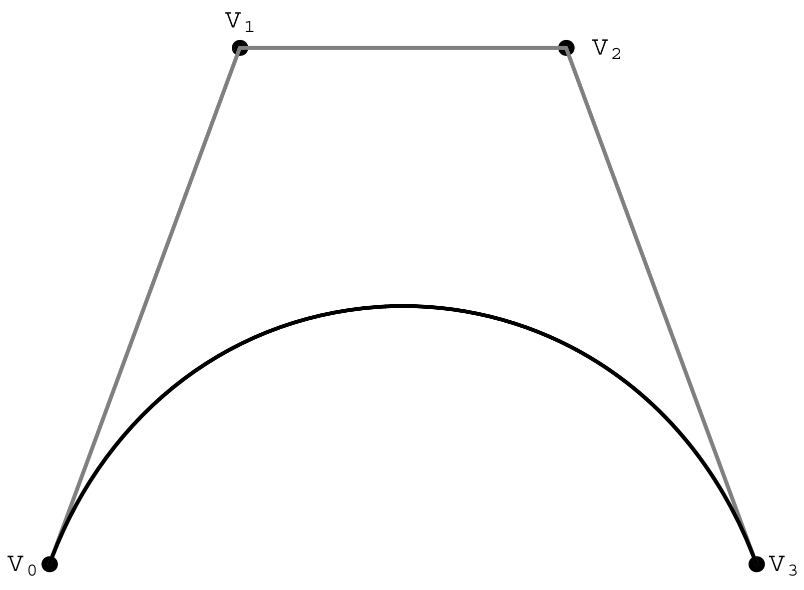
untuk $0 \leq u \leq 1$. Sifat-sifat di atas menunjukkan bahawa $B_3(u)$ adalah kombinasi cembng bagi titik kawalan V_i , yakni lengkung kubi Ball akan terletak di dalam hul cembung poligon kawalan Ball. Jika $V_1 = V_2$, maka lengkung kubik Ball aan terturun kepada lengkung kuadratik Bézier (Said, 1989). Rajah 2.5 menunjukkan fungsi asas kubik Ball. Rajah 2.6 menunjukkan lengkung kubik Ball manakala Rajah 2.7 menunjukan lengkung kuadratik Bézier yang tehasil apabila kita meletakkan $V_1 = V_2$ pada Rajah 2.6. Permukaan bikubik Ball ditakrifkan dengan mengunakan hasil darab tensor yang sama dengan penakrifan permukaan bikubik Bézier. Permukan bikubik Ball diberikan sebagai:

$$B_{3,3}(u,v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} V_{i,j} \beta_i(u) \beta_j(v) \qquad u,v \in [0,1] \tag{2.11}$$

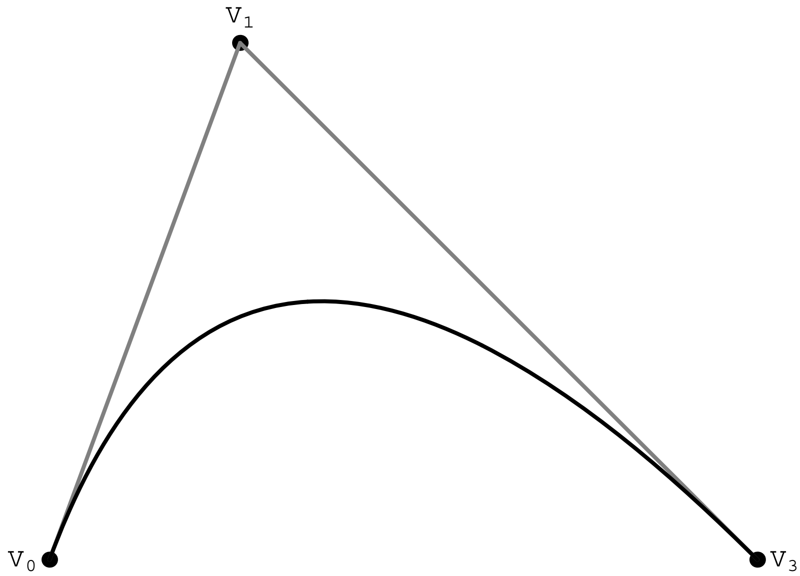
dengan $\beta_i(u), \beta_j(u) : i = 0,...,3;\ j = 0,...,3$ masing-masing merupakan polinomial kubik Ball dan $\{V_{i,j}\}_{i,j=0}^{3}$ merupakan titik kawalan bagi permukan bikubik Ball. Titik-titik kawalan ini akan membentuk polihedron kawalan. Pemukaan bikubik Ball akan memberikan penghampiran kepada bentuk polihedron kawalan itu.



Rajah 2.5: Fungsi asas kubik Ball



Rajah 2.6: Lengkung kubik Ball



Rajah 2.7: Lengkung kuadratik Bézier yang terhasil apabila $V_1 = V_2$ bagi Rajah 2.6

2.3 Lengkung Said-Ball dan Permukan Said-Ball

Di dalam kertas kerja Said (1989), fungsi asas Ball telah diitlakkan kepada polinomial sebarang darjah n yang ganjil dengan meggunakan perwakilan tak tersirat interpolasi Hermite (Said, 1989). Sungguhpun Said (1989) menakrifkan fungsi asas Ball teritlak berdarjah ganjil, akan tetapi fungsi asas Ball teritlak berdarjah genap akan diperoleh daripada fungsi asas Ball teritlak bedarjah ganjil dengan mengunakan konsep yang sama seperti kes fungsi asas kubik Ball yang lalu, iaitu kita samakan dua titik kawalan pedalaman (Said, 1989). Untuk tujuan kajian tesis ini, kami akan menggunakan takrifan fungsi asas Ball teritlak daripada kertas kerja Hu et al. (1996) yang berbeza dengan penakrifan oleh Said (1989), akan tetapi kedua-dua susunan rumus memberikan fungsi asas yang sama.