

PEMODELAN GEOMETRI MENGUNAKAN TEORI SET KABUR

ABD. FATAH BIN WAHAB

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

2008

**PEMODELAN GEOMETRI
MENGUNAKAN TEORI SET KABUR**

oleh

ABD. FATAH BIN WAHAB

**Tesis yang diserahkan untuk
memenuhi keperluan bagi Ijazah
Doktor Falsafah**

Januari 2008

PENGHARGAAN

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah s.w.t. yang Maha Pemurah lagi Maha Penyayang serta selawat dan salam ke atas junjungan besar Nabi Muhammad s.a.w. kerana dengan taufik dan hidayat-Nya jualan tesis ini dapat disiapkan dalam tempoh masa yang ditetapkan. Saya ingin mengambil kesempatan ini untuk merakamkan setinggi-tinggi penghargaan dan jutaan terima kasih ditujukan khas kepada penyelia utama, Prof. Madya Dr. Jamaludin Md. Ali yang banyak memberikan idea yang bernas serta tunjuk ajar demi menghasilkan jalan kerja tesis yang efektif. Seterusnya jutaan terima kasih ditujukan kepada jawatan kuasa penyeliaan tesis, Prof. Dr. Abu Osman Md Tap yang memberi bimbingan dalam bidang matematik kabur dan Prof. Madya Dr. Ahmad Abd. Majid yang membantu dalam bidang komputasi dan analisis data.

Sekalung penghargaan kepada Universiti Malaysia Terengganu (UMT) yang telah memberi peluang serta bantuan kewangan sehingga tamat pengajian. Jutaan terima kasih juga ditujukan kepada Dekan PPSM dan Dekan IPS yang telah memberi kebenaran dan menyediakan kemudahan tempat penyelidikan. Tidak lupa juga, terima kasih ditujukan kepada rakan-rakan seakademik, Gobithasan Rudrusami dan Muhamad Safiih Lola yang membantu dalam menjayakan tesis ini.

Teristimewa kepada ibuku Maimunah dan Mek Mah yang sentiasa berdoa untuk kejayaan anaknya. Kepada isteriku tercinta Norsiah dan anakku yang tersayang W. Yusro, Musfirah dan Miqdam yang banyak memberikan dorongan semangat serta sanggup berkorban sehingga ke detik akhir pengajian saya. Tanpa kesefahaman dan doa daripada kalian, tak mungkin saya dapat menjalani tempoh pengajian yang agak panjang ini. Saya doakan kalian akan diberi rahmat serta perlindungan oleh Allah s.w.t.

SUSUNAN KANDUNGAN

	Muka surat
PENGHARGAAN	ii
JADUAL KANDUNGAN	iii
SENARAI RAJAH	vi
SENARAI PENERBITAN DAN SEMINAR	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
BAB 1 - PENGENALAN	
1.0 Pengenalan	1
1.1 Latar Belakang Kajian dan Sorotan Kepustakaan	5
1.2 Objektif Kajian	11
1.3 Implikasi Kajian	12
1.4 Pernyataan Masalah dan Masalah Kajian	12
1.5 Kandungan Tesis dan Pendekatan Pembinaan Model Kabur	13
BAB 2 - PEMODELAN GEOMETRI DAN TEORI SET KABUR	
2.0 Pengenalan	17
2.1 Pembinaan Model Lengkung Bezier Rangup	19
2.1.1 Konsep Asas	19
2.1.2 Lengkung Bezier Rangup	22
2.1.3 Keselajaran Lengkung Bezier Rangup	25
2.1.4 Contoh	26
2.1.5 Model Lengkung Interpolasi Bezier Rangup Kubik	28
2.1.6 Model Permukaan Bezier Rangup	30
2.2 Pemodelan Lengkung dan Permukaan Splin-B Rangup	34
2.2.1 Model Lengkung Splin-B Rangup	35
2.2.2 Model Permukaan Splin-B Rangup	40
2.2.3 Model Lengkung dan Permukaan “NURBS” Rangup	45
2.3 Teori Set Kabur	51
2.3.1 Takrif Set Kabur	52
2.3.2 Operasi Set Kabur	54
2.3.3 Set Aras- α dan Set Kecembungan Kabur	55

2.3.4	Nombor Kabur dan Strukturnya	57
2.3.5	Sifat Aritmetik Nombor Kabur	60
2.3.6	Prinsip Perluasan	61
2.3.7	Data Rangup dan Data Kabur	63
2.4	Kesimpulan	65

BAB 3 - MODEL SPLIN KABUR

3.0	Pengenalan	66
3.1	Lengkung Splin Kabur dan Splin Penyahkaburan	67
3.2	Penginterpolasi Splin Kabur dan Splin Penyahkaburan Kubik	68
3.3	Masalah Data Ketakpastian	72
3.4	Permukaan Splin Kabur dan Splin Penyahkaburan	76
3.5	Kesimpulan	78

BAB 4 - PEMODELAN SPLIN BEZIER KABUR

4.0	Pengenalan	79
4.1	Titik Kawalan Kabur dan Titik Kawalan Penyahkaburan	80
4.2	Pembinaan Model Lengkung Bezier Kabur	83
4.2.1	Sifat Asas dan Contoh	85
4.3	Lengkung Bezier Penyahkaburan	86
4.4	Keselajaran Lengkung Bezier Kabur	86
4.5	Contoh Lengkung Bezier Kabur dan Penyahkaburan	87
4.6	Model Interpolasi Bezier Kabur Kubik	89
4.7	Model Permukaan Bezier Kabur dan Permukaan Bezier Penyahkaburan	91
4.7.1	Takrif	92
4.7.2	Contoh	93
4.8	Kesimpulan	95

BAB 5 - PEMODELAN SPLIN-B KABUR

5.0	Pengenalan	96
5.1	Model Lengkung Splin-B Kabur	98
5.1.1	Takrif	98
5.1.2	Contoh	100

5.2	Lengkung Splin-B Penyahkaburan	102
5.3	Masalah Pengkaburan Titik Data	106
5.3.1	Pengkaburan Titik Data Mengikut Paksi	106
5.3.2	Pengkaburan Titik Data Mengikut Pepenjuru	110
5.3.3	Titik Data Kabur Lengkap	111
5.4	Model Splin-B Data Berkomponen Kabur	112
5.4.1	Model Splin-B Data Komponen (x,y) Kabur	113
5.4.2	Model Splin-B Data Kabur Lengkap	117
5.5	Model Splin-B Knot Bernilai Kabur	119
5.5.1	Contoh	120
5.5.2	Model Splin-B Knot Penyahkaburan	124
5.6	Masalah Data Kompleks	128
5.7	Lengkung "NURBS" Kabur	129
5.8	Permukaan Splin-B Kabur	132
5.8.1	Takrif	133
5.8.2	Contoh	136
5.9	Model Permukaan "NURBS" Kabur	139
5.10	Kesimpulan	141

BAB 6 - PERMUKAAN DASAR TASIK KENYIR DATA ZON1

6.0	Pengenalan	143
6.1	Perihalan Data dan Permukaan Linear	144
6.2	Pelaksanaan Model Kabur	148
6.2.1	Langkah Pemodelan Data Zon1	148
6.2.2	Pengkaburan Data Zon1	149
6.2.3	Penyesuaian Model Kabur	151
6.3	Kesimpulan	157

BAB 7 – KESIMPULAN DAN KAJIAN LANJUTAN

7.0	Kesimpulan Kajian	159
7.1	Dapatan dan Sumbangan Kajian	161
7.2	Cadangan Kajian Lanjutan	162

SENARAI RUJUKAN	164
------------------------	------------

SENARAI RAJAH

		Muka surat
Rajah 1.1	Penyusunan dan organisasi tesis.	15
Rajah 1.2	Ilustrasi proses dan konsep pemodelan geometri teknik kabur.	15
Rajah 1.3	Proses pemodelan lengkung kabur dan lengkung penyahkaburan.	16
Rajah 1.4	Proses pemodelan permukaan kabur dan penyahkaburan.	16
Rajah 2.1	Set cembung dan set tak cembung rangup.	20
Rajah 2.2	Rantau kecembungan hul titik P_1, P_2, \dots, P_n .	20
Rajah 2.3	Lengkung polinomial $B_i^1(t), B_i^2(t), B_i^3(t)$ dan $B_i^4(t)$ yang digunakan dalam penjanaan lengkung Bezier berdarjah $n = 1, 2, 3$ dan 4.	21
Rajah 2.4	Lengkung Bezier kubik dalam bentuk 2D dan 3D dengan titik kawalan rangup $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ dalam pelbagai kedudukan yang berbeza.	23
Rajah 2.5	Lengkung Bezier berperingkat lebih tinggi dalam 3D dengan titik kawalan yang lebih dari empat.	23
Rajah 2.6	Sifat perubahan terhadap lengkung Bezier rangup.	24
Rajah 2.7	Lengkung Bezier rangup yang terbuka dan tertutup.	27
Rajah 2.8	Penggubahan lengkung Bezier rangup.	27
Rajah 2.9(a)	Penggabungan di antara dua lengkung Bezier rangup terbuka menjadi lengkung rangup yang tertutup dengan menyamakan kedua-dua titik hujung.	27
Rajah2.9(b)	Lengkung Bezier rangup kubik yang selanjar secara C^0 dan C^1 pada titik kawalan rangup $P_0 = Q_0$ dan $P_3 = Q_3$.	28
Rajah 2.10	Lengkung Bezier rangup kubik G^1 selanjar menginterpolasi 3 titik data rangup.	29
Rajah 2.11	Lengkung Bezier rangup kubik menginterpolasi titik data P_0, P_3, P_6 dan P_9 secara cebis demi cebis dengan syarat keselantaran G^1 .	29

Rajah 2.12	Lengkung Bezier rangup kubik selanjar secara G^1 yang menginterpolasi 7 titik data dengan 12 titik kawalan rangup.	30
Rajah 2.13	Jaring kawalan rangup yang membentuk polihedron cirian bagi tampalan Bezier rangup.	31
Rajah 2.14	Permukaan Bezier rangup kuadratik dengan polihedron cirian rangupnya.	33
Rajah 2.15	Permukaan Bezier kuadratik dan kubik.	33
Rajah 2.16	Perubahan lengkungan permukaan Bezier rangup dalam jaring kawalannya.	34
Rajah 2.17	Permukaan Bezier rangup berperingkat lebih tinggi dengan jaring kawalan rangupnya yang berbeza.	34
Rajah 2.18	Fungsi asas splin- B rangup (a) nilai knot tak seragam, (b) nilai knot berulang, (c) nilai knot seragam dan (d) cantuman 4 nilai knot dalaman.	36
Rajah 2.19(a)	Lengkung splin- B rangup kuadratik dan kubik yang berubah dalam poligon kawalan rangupnya.	39
Rajah 2.19(b)	Fungsi asas splin- B rangup dan lengkung splin- B rangup dengan perubahan titik kawalan rangup.	39
Rajah 2.20	Lengkung splin- B rangup dengan dua nilai knot yang diubah.	40
Rajah 2.21	(a) Jaring kawalan splin- B rangup dan (b) Permukaan hasil darab tensor splin- B dan titik kawalannya.	42
Rajah 2.22(a)	Perihal permukaan splin- B rangup kubik. (a) Jaring kawalan rangup yang berubah. (b) Permukaan splin- B rangup berubah secara setempat. (c) Permukaan splin- B rangup kubik serta jaring kawalannya.	44
Rajah 2.22(b)	(a) Perihal perubahan tempatan permukaan splin- B dan (b) perubahan permukaan di bawah jaring kawalan rangupnya.	44
Rajah 2.23	Visual mengenai permukaan splin- B rangup, lengkung kontur dan permukaan rata yang diplot mengguna takrif permukaan splin- B rangup.	45
Rajah 2.24	Perbandingan permukaan splin- B rangup kubik. (a) titik kawalan rangup yang asal dan (b) titik kawalan rangup yang diubah.	45

Rajah 2.25	Lengkung <i>NURBS</i> rangup (a) kuadratik dan (b) kubik dengan 13 titik kawalan dan knot seragam.	47
Rajah 2.26	Lengkung <i>NURBS</i> rangup nilai knot seragam dengan 13 titik kawalan rangup (a) kuadratik dan (b) kubik.	48
Rajah 2.27	Permukaan <i>NURBS</i> kubik yang melalui 4 bucu jaring kawalan rangup.	49
Rajah 2.28	Permukaan <i>NURBS</i> rangup kubik dan sifat kawalan permukaan secara setempat yang unik.	50
Rajah 2.29	Visual mengenai idea tentang set kabur dalam suatu set wacana semesta dengan pemetaan darjah keahlian ke dalam selang tertutup $[0,1]$.	52
Rajah 2.30	Set kabur dengan fungsi keahlian dalam bentuk linear dan tak linear.	53
Rajah 2.31	Fungsi keahlian nombor nyata “ <i>sekitar 10</i> ” yang diskret dan selanjar.	53
Rajah 2.32	Struktur dan komponen asas set kabur A dalam set semesta X .	54
Rajah 2.33	Set kabur normal, tak normal dan global.	54
Rajah 2.34	Kesatuan, persilangan dan pelengkap bagi set kabur.	55
Rajah 2.35	Perbandingan di antara dua set kabur (a) tak cembung dengan (b) yang cembung.	56
Rajah 2.36	Nombor kabur yang ditakrif oleh fungsi keahlian f dan g yang normal dan selanjar.	58
Rajah 2.37	Struktur nombor kabur, set rangup, set aras- α dan selang nombor kabur.	59
Rajah 2.38	Prinsip perluasan nombor kabur.	63
Rajah 3.1	Prosedur pemodelan splin teknik kabur.	67
Rajah 3.2	(a) Fungsi kabur dan (b) fungsi splin kabur dengan titik $\tilde{D}_i = (\tilde{t}_i, \tilde{y}_i)$.	69
Rajah 3.3	(a) Lengkung splin kabur dan (b) perbandingan splin rangup dengan splin penyahkaburan.	71
Rajah 3.4	Splin kabur dalam 3D data yang ke-3 dan ke-4 adalah kabur.	71

Rajah 3.5	Lengkung splin kabur kubik yang menginterpolasi titik data berkompunen kabur. (a) data x kabur, (b) data y kabur dan (c) data (x,y) kabur.	73
Rajah 3.6	Lengkung splin kabur kubik. (a) Lengkung interpolasi titik data komponen dan berpepenjuru kabur, (b) lengkung perbandingan dan (c) sifat perubahan lengkung secara setempat.	75
Rajah 3.7	Splin kabur kubik menginterpolasi titik data $\{\tilde{D}_i\}_{i=0}^{11}$ dengan data ke-2, ke-3 dan ke-9 adalah ketakpastian berlaku pada komponen x dan y . Lengkung penyahkaburan dibanding dengan splin interpolasi kubik biasa.	76
Rajah 3.8	Permukaan splin kabur dan splin penyahkaburan kubik dalam pelbagai kedudukan.	77
Rajah 3.9	(a) Permukaan splin rangup dan (b) splin penyahkaburan.	78
Rajah 3.10	Permukaan splin kabur yang menginterpolasi data dengan fungsi $z = \cos(e^{-(x^2+y^2)})$.	78
Rajah 4.1	Titik kawalan rangup dalam set wacana semesta S .	81
Rajah 4.2	Titik kawalan kabur dan selang $\langle \tilde{P}_i^-, P_i, \tilde{P}_i^+ \rangle$ pada suatu set aras- α dalam selang $(0,1]$.	82
Rajah 4.3	Pendekatan pengkaburan dan penyahkaburan titik dalam pemodelan geometri menggunakan teori set kabur.	83
Rajah 4.4	Lengkung Bezier kabur kuadratik yang terhasil dengan tiga titik kawalan kabur $\{\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2\}$.	84
Rajah 4.5	Lengkung Bezier kabur kubik.	85
Rajah 4.6	Lengkung penyahkaburan Contoh 4.1.	86
Rajah 4.7	Lengkung Bezier kabur dan Bezier penyahkaburan beserta poligon kawalannya.	88
Rajah 4.8	Lengkung Bezier kabur dan penyahkaburan kubik.	88
Rajah 4.9	Lengkung gabungan. (a) lengkung Bezier kabur dan (b) lengkung Bezier penyahkaburan yang disambung secara selanjar C^0 .	88
Rajah 4.10	Lengkung Bezier kabur dan penyahkaburan kubik disambung secara selanjar C^1 .	89

Rajah 4.11	Lengkung Bezier kabur kubik selanjar G^1 yang menginterpolasi titik \tilde{P}_0, \tilde{P}_3 dan \tilde{P}_6 .	90
Rajah 4.12	Lengkung Bezier kabur kubik selanjar G^1 yang menginterpolasi titik kabur \tilde{P}_0, \tilde{P}_1 dan \tilde{P}_2 .	91
Rajah 4.13	Jaringan titik kawalan kabur, polihedron cirian penyahkaburan dan tampalan Bezier kabur $(n+1) \times (m+1)$ untuk $n = m = 3$.	92
Rajah 4.14	Permukaan Bezier kabur dan penyahkaburan beserta polihedron kawalannya.	93
Rajah 4.15	Permukaan Bezier kabur dan penyahkaburan kubik.	93
Rajah 4.16	(a) Permukaan jaring Bezier kabur dan penyahkaburan. (b) Permukaan Bezier kabur dan penyahkaburan.	94
Rajah 4.17	Lengkung kontur dan permukaan Bezier penyahkaburan.	94
Rajah 5.1	Lengkung splin-B kabur kuadratik dengan nilai knot seragam, (a) lengkung tak menginterpolasi kedua titik hujung dan (b) menginterpolasi kedua titik hujung.	101
Rajah 5.2	Lengkung splin-B kabur kubik nilai knot (a) seragam dan (b) tak seragam.	102
Rajah 5.3	Lengkung splin-B penyahkaburan dan perbandingannya dengan lengkung splin-B rangup.	103
Rajah 5.4	(a) Lengkung splin-B kabur kubik, (b) lengkung splin-B penyahkaburan kubik dan (c) perbandingan di antara lengkung splin-B rangup dengan splin-B penyahkaburan kubik.	104
Rajah 5.5	Lengkung splin-B kabur dan penyahkaburan kubik tertutup.	104
Rajah 5.6	Lengkung splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan tertutup dalam bentuk 3D.	105
Rajah 5.7	Penyesuaian lengkung splin-B kabur kubik dengan titik kawalan kabur beserta poligonnya dan lengkung splin-B penyahkaburan kubik dengan titik kawalannya.	105
Rajah 5.8(a)	Kedudukan data x, y dan z kabur dengan poligon kawalan kaburnya yang dihasil melalui kaedah pengkaburan titik data.	108

Rajah 5.8(b)	Lengkung splin-B kabur dihasil melalui penyesuaian data x , data y dan data z adalah kabur .	108
Rajah 5.9	(a) dan (b) ialah lengkung splin-B kabur dengan titik data x dan y kabur serentak. (c) ialah lengkung splin-B penyahkaburan.	109
Rajah 5.10	Data kabur pada paksi dan pepenjuru dalam bentuk 2D dan 3D.	111
Rajah 5.11	Titik data kabur lengkap diberi dalam bentuk 2D dan 3D.	112
Rajah 5.12	Lengkung splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan titik data berpepenjuru kiri-kanan kabur	113
Rajah 5.13	Lengkung splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan titik data berpepenjuru kanan-kiri kabur.	114
Rajah 5.14	Lengkung splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan titik data berpepenjuru kabur dalam bentuk 3D.	115
Rajah 5.15	Lengkung splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan data 3D berpepenjuru kanan-kiri kabur.	116
Rajah 5.16	Lengkung splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan dalam bentuk 3D yang dihasil menggunakan titik data x , y dan z berpepenjuru kabur.	117
Rajah 5.17	Lengkung splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan kubik data kabur lengkap.	118
Rajah 5.18	Lengkung splin-B kabur dan penyahkaburan. (a) lengkung splin-B dengan knot \tilde{t}_6 kabur, (b) lengkung splin-B knot penyahkaburan dan (c) persilangan lengkung dalam poligon kawalan $\{P_1, P_2, P_3\}$ dan $\{P_3, P_4, P_5\}$.	121
Rajah 5.19	Lengkung splin-B kabur kubik dengan dua nilai knot \tilde{t}_5, \tilde{t}_6 kabur dan perbandingan lengkung penyahkaburan dengan lengkung rangup.	122
Rajah 5.20	Lengkung splin-B kabur dengan nilai knot kabur dan titik kawalan komponen x kabur.	123
Rajah 5.21	Lengkung splin-B kabur kubik (a) lengkung dengan dua nilai knot dan titik kawalan kabur dan (b) fokus terhadap tiga komponen lengkung A rangup, lengkung B bahagian kiri kabur dan C lengkung bahagian kanan kabur.	124
Rajah 5.22	Lengkung splin-B knot penyahkaburan dibanding dengan lengkung splin-B knot bernilai rangup.	125

Rajah 5.23(a)	Lengkung splin-B kabur dengan dua nilai knot kabur dan titik kawalan komponen y kabur.	126
Rajah 5.23(b)	Lengkung splin-B kabur dengan dua nilai knot kabur dan titik kawalan komponen y yang dinyahkaburan dibanding dengan lengkung rangup.	126
Rajah 5.24	Lengkung splin-B dengan dua nilai knot kabur dan titik kawalan komponen z kabur. Lengkung splin-B rangup dan penyahkaburan yang di sebelah kanan.	127
Rajah 5.25	Beberapa bentuk lengkung splin-B kabur kubik diplot menggunakan titik kawalan kabur dan knot bernilai kabur.	127
Rajah 5.26	Lengkung splin-B kabur kubik (a) menggunakan data kabur kompleks (data ketakpastian) dan (b) lengkung penyahkaburan kubik.	128
Rajah 5.27	Lengkung <i>NURBS</i> kabur kuadratik knot seragam dihasil menggunakan 13 titik kawalan, komponen yang ke-4, 5 dan 9 adalah kabur.	130
Rajah 5.28	Lengkung <i>NURBS</i> kabur kubik knot seragam dihasil menggunakan 13 titik kawalan, komponen ke-4, 5 dan 9 adalah kabur.	130
Rajah 5.29	Lengkung <i>NURBS</i> rangup dan <i>NURBS</i> kabur serta titik kawalannya.	131
Rajah 5.30	Lengkung <i>NURBS</i> kabur dengan nilai knot seragam.	131
Rajah 5.31	Perbandingan lengkung <i>NURBS</i> . (a) lengkung <i>NURBS</i> penyahkaburan kubik, (b) lengkung <i>NURBS</i> rangup dan <i>NURBS</i> penyahkaburan dan (c) kedudukan lengkung rangup dan lengkung kabur yang berbeza.	132
Rajah 5.32	Polihedron cirian kabur bagi permukaan splin-B kabur.	134
Rajah 5.33	Tampalan linear permukaan splin-B kabur dan permukaan splin-B kuadratik dengan jaring kawalan rangup.	135
Rajah 5.34	Permukaan splin-B kabur dengan titik kawalan kabur yang diwakili oleh satu set data kabur.	136
Rajah 5.35	Permukaan splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan dengan titik kawalan komponen x kabur.	136

Rajah 5.36	Permukaan splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan dengan titik kawalan komponen y kabur.	136
Rajah 5.37	Diberi satu set data dengan komponen z adalah kabur, permukaan tampalan linear dan permukaan splin-B kabur diplot beserta permukaan splin-B penyahkaburannya.	137
Rajah 5.38	Permukaan splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan dengan titik kawalan komponen (x,y) adalah kabur.	137
Rajah 5.39	Permukaan splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan dengan data komponen (x,y,z) adalah kabur.	137
Rajah 5.40	Visual tentang bagi permukaan splin-B kabur dari sudut yang berbeza yang diplot menggunakan titik kawalan (x,y,z) kabur.	138
Rajah 5.41	Permukaan splin-B penyahkaburan licin serta selanjar.	138
Rajah 5.42	Gambaran lapisan permukaan splin-B kabur kubik. (a) permukaan bagi data komponen z kabur, (b) kedudukan tiga lapisan permukaan, (c) Ilustrasi yang mempamer ketiga-tiga permukaan splin-B yang terdiri daripada lapisan atas, tengah dan bawah dan (d) permukaan penghampiran penyahkaburan licin yang mewakili maklumat data ketakpastian secara tersirat.	139
Rajah 5.43	Permukaan <i>NURBS</i> kabur dan titik kawalan komponen x dan y kabur.	140
Rajah 5.44	Permukaan <i>NURBS</i> kabur (a) dihasil dengan titik kawalan komponen z kabur dan (b) dihasil berdasarkan titik kawalan penyahkaburan komponen z .	140
Rajah 5.45	Permukaan <i>NURBS</i> kabur (a) diplot bersama permukaan penyahkaburan menggunakan titik kawalan berpepenjuru kabur dan (b) permukaan <i>NURBS</i> yang dihasil berdasarkan titik kawalan penyahkaburan.	141
Rajah 5.46	<i>NURBS</i> Kabur \Rightarrow splin-B kabur \Rightarrow splin Bezier kabur.	142
Rajah 6.1	Ilustrasi tentang teknik pungutan data permukaan Tasik Kenyir menggunakan bot dan alat pantulan permukaan.	144

Rajah 6.2	Perihalan statistik data Tasik Kenyir Zon1:Surfer-[200106.srf].	145
Rajah 6.3	Taburan titik data rangup yang mempamerkan kedudukan dan jujukan data yang tak seragam.	145
Rajah 6.4	Data Zon1 rangup dalam bentuk data grid.	146
Rajah 6.5	Ilustrasi mengenai kedalaman rangup data Zon1 di antara permukaan alat dengan permukaan dasaran tasik.	146
Rajah 6.6	Perihalan domain dan julat data Zon1.	147
Rajah 6.7	Lengkung dan permukaan linear data Zon1.	147
Rajah 6.8	Proses pemodelan lengkung dan permukaan data Zon1 menggunakan teknik kabur.	148
Rajah 6.9	Data rangup dan data paksi-z kabur.	150
Rajah 6.10	Data Zon1 dengan komponen z kabur yang sudah diproses.	150
Rajah 6.11	Lengkung permukaan Bezier kabur data Zon1.	151
Rajah 6.12	Permukaan Bezier kabur data Zon1.	152
Rajah 6.13	Permukaan Bezier penyahkaburan data Zon1.	153
Rajah 6.14	Lengkung splin-B kabur data Zon1.	154
Rajah 6.15	Permukaan splin-B kabur data Zon1 beserta asasnya.	154
Rajah 6.16	Lengkung kontur dan permukaan splin-B kubik data Zon1 kabur.	155
Rajah 6.17	Fokus permukaan splin-B kabur kubik data Zon1 pada bahagian tertentu.	155
Rajah 6.18	Permukaan pada bahagian (a) dan (b) adalah hasil penyesuaian data Zon1: Tasik Kenyir di Terengganu menggunakan model splin-B penyahkaburan kubik.	156
Rajah 6.19	Ralat ketakpastian di antara permukaan rangup dengan permukaan splin-B penyahkaburan kubik adalah kecil.	157

SENARAI PENERBITAN & SEMINAR

	Muka surat
1.1 Kecekapan matematik dalam reka bentuk untuk keperluan industri.	170
1.2 Fuzzy set in geometric modelling.	170
1.3 Geometric modelling of uncertain region.	170
1.4 Tinjauan: Set kabur dalam pemodelan geometri.	170
1.5 Pemodelan geometri bagi masalah data ketakpastian.	170
1.6 Reka bentuk lengkung “ <i>NURBS</i> ” kabur.	170
1.7 Penyesuaian data ketakpastian melalui splin kabur.	170

PEMODELAN GEOMETRI MENGGUNAKAN TEORI SET KABUR

ABSTRAK

Pemodelan geometri dan teori set kabur telah dikembangkan dan diguna dengan meluasnya dalam berbagai cabang matematik, termasuk juga sains dan kejuruteraan. Supaya model yang boleh dipercayai diperolehi, parameter bagi persamaan yang terlibat mestilah tepat. Bagaimanapun, nilai-nilai yang tepat tidak selalunya dapat dibekalkan, dan lazimnya pada suatu tahap tertentu selalunya tidak pasti. Tesis ini memperkenalkan model hibrid kabur berasaskan pemodelan geometri rangup dan teori set kabur. Oleh itu, beberapa model hybrid kabur seperti model fungsi splin kabur, model Bezier kabur, model splin-B kabur dan model "NURBS" kabur untuk perwakilan lengkung dan permukaan bagi set data ketakpastian dikaji dan dibangunkan. Nombor kabur digunakan bagi membina takrif titik kawalan kabur dan knot kabur untuk perkembangan lengkung dan permukaan kabur dalam pemodelan geometri. Tesis ini juga membincang model lengkung dan permukaan splin-B kabur berasaskan data kabur yang kompleks dan model splin penyahkaburan dengan menggunakan titik kawalan yang dinyahkaburan. Untuk menguji dan menganalisis model, kita memilih set data nyata Zon1:Tasik Kenyir, yang telah dipungut dari uji kaji fizikal. Dengan menggunakan data yang dikutip, permukaan splin-B bagi Zon1: Tasik Kenyir dijana dalam kedua-dua bentuk kabur dan penyahkaburan, dan ralat ketakpastian antara splin-B rangup dan splin-B penyahkaburan dibandingkan. Akhir sekali, dapatan kajian dan beberapa aspek kajian selanjutnya dalam bidang pemodelan geometri dengan menggunakan teori set kabur dibincangkan.

GEOMETRIC MODELLING USING FUZZY SET THEORY

ABSTRACT

Geometric modelling and fuzzy set theory have been developed and widely used in various branches of mathematics, as well as in sciences and engineering. In order to achieve reliable model, the parameters in the governing equations must be exact. However, those exact values are not often be provided, and normally to some degree are always uncertain. This thesis introduces fuzzy hybrid model based on crisp geometric modelling and fuzzy set theory. Therefore, several possible fuzzy hybrid models, such as fuzzy function spline model, fuzzy Bezier model, fuzzy B-spline model and fuzzy *NURBS* model for curves and surfaces representation of uncertain data set are studied and developed. Fuzzy numbers are used to construct the definitions of fuzzy control points and fuzzy knots for the development of fuzzy curves and fuzzy surfaces in geometric modelling. We also discuss fuzzy B-spline curves and surfaces model which is based on complex fuzzy data and defuzzification spline model using defuzzified control points. For testing and analyzing the models, we chose real data set of Zon1: Tasik Kenyir that was collected through physical experiments. Using the data collected, the B-spline surfaces of Zon1: Tasik Kenyir were generated in both fuzzy and defuzzification formed, and the uncertain error between crisp and defuzzified B-spline is compared. Finally, the results and some aspects of further research in the area of geometric modelling using fuzzy set theory are discussed.

BAB 1 PENGENALAN

Sesungguhnya manusia menjadikan matematik sebagai ilmu asas, atau perantaraan untuk pelbagai tujuan ilmu dan kehidupan harian. Kita memerlukan model matematik yang sesuai untuk tujuan menganalisis, merekabentuk dan membuat keputusan. Menganalisis data dan merekabentuk model untuk masalah ketakpastian dengan menggunakan kaedah pemodelan geometri berbantuan komputer merupakan satu cabaran bentuk baru yang mampu kita tangani. Pembinaan model ketakpastian sama ada untuk lengkung atau permukaan yang boleh dilaksanakan untuk menyelesaikan masalah itu adalah sukar dan mencabar kerana faktor ketakpastian yang bersifat ambiguiti dan kekelaman yang perlu diambil kira. Persoalan data yang bersifat ambiguiti dan kekelaman ini pula biasanya tidak dapat diselesaikan melalui kaedah statistik. Malah, model-model rangup yang sedia ada tidak berupaya menanganinya dengan berkesan kerana sebahagian data yang mempunyai tahap ketakpastian itu akan diabaikan. Dengan yang demikian, hasil penyesuaian sama ada berbentuk lengkung atau permukaan akan hanya mewakili maklumat yang mengenai data berkeahlian penuh sahaja, sedangkan data yang tidak berkeahlian penuh dalam set semestanya perlulah diambil kira juga supaya analisis dan pemodelannya akan memberikan keputusan terbaik. Jadi, dengan melakukan hibrid antara pemodelan geometri dengan teori set kabur yang sedia ada, akan membolehkan kita membina beberapa perwakilan matematik dalam bentuk model terbaru yang bercirikan kekaburan, fungsinya boleh mewakili dan merangkumi kesemua aspek data, iaitu bahagian rangup dan kabur adalah terangkum dalam hasil penyesuaiannya.

Pemodelan geometri adalah berkenaan dengan kaedah pembinaan perwakilan matematik untuk bentuk geometri, manakala teori set kabur adalah berkenaan dengan perwakilan matematik yang bertujuan membina konsep dan teknik untuk menangani

persoalan ketakpastian yang bukan bersifat statistik. Kedua-dua bidang ini telah berkembang dan digunakan secara meluas, tetapi berasingan dalam pelbagai bidang sains, reka bentuk dan kejuruteraan. Pembinaan model matematik yang menggabungkan pemodelan geometri dengan teori set kabur untuk menyelesaikan masalah data ketakpastian yang bersifat ketaktentuan berbentuk ambiguiti dan kekelaman akibat dari kesilapan manusia atau proses perolehan data merupakan satu pendekatan baru yang mencabar. Malah, dalam mengkuantitatifkan setiap titik data bersifat ketakpastian yang tersebar itu, kita memerlukan kaedah atau pendekatan baru yang lebih semula jadi (kaedah kabur) serta dapat menghuraikan komplikasinya secara bermatematik dalam bentuk yang mudah dan senang difahami. Penyesuaian data, sama ada untuk lengkung atau permukaan interpolasi atau penghampiran juga sukar kerana komponennya yang bersifat kabur. Akibatnya, maklumat dan realiti berkenaan data dalam set semestanya juga tidak dapat diperihal sepenuhnya ke dalam bentuk lengkung atau permukaan melalui pemodelan geometri kaedah biasa. Oleh yang demikian, model hibrid antara pemodelan geometri dengan teori set kabur adalah wajar dikaji dan perlulah diperkenalkan dalam tesis ini.

Matlamat utama tesis ini ialah untuk membina perwakilan geometri menggunakan pendekatan kabur untuk penyelesaian masalah data dengan memperkenalkan model kabur dan model penyahkaburan. Model-model yang akan diperkenalkan ialah model fungsi splin kabur (splin penyahkaburan), model splin Bezier kabur (splin Bezier penyahkaburan), model splin-B kabur (splin-B penyahkaburan) dan model splin-B nisbah tak seragam kabur atau "*NURBS*" (Non Uniform Rational B-Spline) kabur (*NURBS* penyahkaburan). Model tersebut, seperti Bezier kabur (penyahkaburan) dan splin-B kabur (penyahkaburan) yang dihasilkan akan diuji tahap keberkesanannya menerusi sampel data nyata. Data Zon1:Tasik Kenyir Terengganu (Surfer-200106.srf/INOS_UMT) yang mempunyai ketakpastian pada paksi-z telah dipilih dalam ujian ini. Akhir sekali, permukaan splin dasaran akan diplot menerusi

model splin-B kabur dan splin-B penyahkaburan kubik yang selanjat dan licin sebagai pengujian terhadap tahap kecekapan model yang dihasilkan menerusi kaedah ini.

Disebabkan data dan splin adalah berkait rapat, oleh sebab itu matlamat utama membina model splin kabur adalah untuk merangkumi data yang mempunyai ketakpastian. Oleh yang demikian, langkah pengkaburan set data tersebut menggunakan teori set kabur adalah sangat wajar dan amat tepat sekali. Seperti mana yang pernah dilakukan oleh Zadeh (Zadeh, 1965), iaitu set rangup dalam teori set klasik dengan gred keahliannya yang tertakrif pada set $\{0,1\}$ boleh dikaburkan dengan pengitlakkan set biasa dalam teori tersebut kepada set kabur dengan gred keahliannya tertakrif dalam selang tertutup $[0,1]$. Berdasarkan prinsip yang serupa, perwakilan berangka titik kawalan rangup dapat dikaburkan dan penakrifannya boleh dilakukan berdasarkan konsep nombor kabur. Jika titik kawalan kabur tersebut diadun dengan fungsi asas bagi splin, maka beberapa model splin yang bercirikan kekaburan akan dapat dibentuk dan ianya boleh memberikan sumbangan besar kepada perkembangan bidang ilmu yang telah sedia ada. Malah model hibrid ini boleh menghuraikan komplikasi data dalam bentuk lengkung atau permukaan apabila setiap titik data tersebut dianggarkan sebagai titik kawalan kabur. Akhir sekali, bentuk lengkung atau permukaan penghampiran data Zon1 yang dikaburkan akan dapat disuaikan menerusi model kabur dan model penyahkaburan yang dibangunkan.

Bidang pemodelan geometri telah berkembang dan digunakan secara meluas dalam reka bentuk, pemodelan lengkung dan permukaan bagi sesuatu objek menggunakan set titik kawalan rangup. Dengan titik kawalan rangup yang ditetapkan, lengkung atau permukaan penghampiran atau interpolasi akan dicapai menerusi beberapa model tertentu dengan berbantuan komputer. Oleh yang demikian, ia menjadikan bidang ini sangat penting dan amat diperlukan dalam pelbagai bidang lain termasuk bidang sains dan kejuruteraan. Sebagai contoh, pemodelan geometri telah

digunakan dalam bidang grafik berkomputer, reka bentuk berbantuan komputer (Computer Aided Design), pembuatan berbantuan komputer (Computer Aided Manufacturing) dan lain-lain termasuklah bidang perwakilan data bagi tujuan analisis dan simpanan data. Lihat (Farin, 1997, 1999; Dierckx, 1993; Elaine et al., 2001; Faux & Pratt, 1990; de Boor, 1972; Jamaludin & Abd. Fatah, 2005).

Dalam masalah ketakpastian, didapati bahawa konsep ketakpastian paling awal yang pernah dibincang dengan menggunakan mantik ialah seperti yang dibincang oleh Black (Black, 1937), dan seterusnya diperkembangkan lagi oleh Zadeh (Zadeh, 1965) dengan memperkenalkan teori set kabur khusus untuk menangani masalah ketakpastian yang bukan bersifat berketentuan. Tetapi kajian mengenai kaedah pembinaan perwakilan matematik untuk masalah ketakpastian ini dengan menggunakan teori set kabur masih pada tahap permulaan (Martin, 1990; Anile et al., 2000). Dalam kajian analisis dan pemodelan geometri, pembinaan model bagi perwakilan data bersifat ketakpastian masih menjadi masalah utama (Abd. Fatah et al., 2004), yang tidak boleh diselesaikan sepenuhnya dengan menggunakan kaedah pemodelan biasa kerana data tersebut yang bersifat kabur (Gallo & Spinello, 2000; Jacas et al., 1997). Dengan kemunculan konsep matematik beserta sifat aljabarnya yang ditakrif secara kabur seperti yang diperkenalkan Zadeh (Zadeh, 1965), maka maksud kuantitatif dan kualitatif bagi data ketakpastian ini telah diterjemah pengertiannya ke dalam bentuk set kabur yang tertakrif di atas garis nyata (Anile, 1995; Bodjanova, 2002, 2005; Chanas, 2001; Dubois & Prade, 1985; Zhang et al., 2005). Justeru itu, penggabungan secara bersepadu di antara teori set kabur dengan pemodelan geometri yang sedia ada akan memberikan dalam bentuk model hibrid sebagai model alternatif yang boleh berfungsi menyelesaikan masalah sama ada yang berbentuk rangup, kabur dan penyahkaburan.

1.1 Latar Belakang Kajian dan Sorotan Kepustakaan

Kajian tesis ini berlatar belakang pemodelan geometri dan teori set kabur. Bahagian ini membincang beberapa dapatan kajian yang lepas dan sorotan kepustakaan kajian dalam bidang teori set kabur dan pemodelan geometri. Hasil kajian yang membincang masalah perwakilan data ketidakpastian menerusi nombor kabur akan diteliti dan dikaji. Keutamaan juga diberikan kepada dapatan kajian sedia ada dalam bidang pemodelan lengkung dan permukaan yang menggunakan pendekatan kabur dan penyahkaburan.

Konsep kekaburan yang paling awal dibincang menggunakan mantik ialah konsep "*kekelaman*" seperti yang dikemukakan oleh Black (Black, 1937). Melalui konsep fungsi cirian, sifat kekelaman dan ambiguiti yang wujud pada unsur dalam set biasa dapat dinyatakan secara kuantitatif dengan suatu gred yang nilainya antara 0 dan 1. Dengan itu, Zadeh (Zadeh, 1965; 1966) mula memperluaskan teori set kabur dan sistemnya sebagai model umum bagi masalah ketidakpastian yang digunakan dalam sistem kawalan dan kejuruteraan dengan memperluaskan "*set rangup*" atau "*crisp set*" kepada "*set kabur*" atau "*fuzzy set*" menggunakan konsep fungsi cirian atau fungsi indeks. Set kabur dengan sistem yang telah mantap digunakan untuk membangunkan sistem mantik kabur (Zadeh, 1966; 1983). Dalam konteks pemodelan geometri melalui set kabur, mengikut Konsinski (Konsinski, 2006), teori nombor kabur yang banyak diterima pakai ialah konsep nombor kabur yang dibincang oleh Dubois dan Prade (Dubois & Prade, 1993) yang mengelaskan fungsi keahlian kepada nombor-(kiri-kanan) dalam bentuk fungsi L dan R . Prinsip perluasan yang diperkenalkan Zadeh (Zadeh, 1983), telah dilaksanakan untuk nombor kabur Dubois & Prade dalam pengoperasiannya. Sifat aljabar serta ciri-ciri penting nombor kabur telah banyak dibincangkan (Zadeh, 1975a; Jain, 1976a; Giachetti & Young, 1997). Pengoperasi set dan nombor kabur seperti operasi penambahan, pendaraban, kesatuan, persilangan dan pelengkap dalam konteks tesis ini dirujuk kepada (Zadeh, 1983; Konsinski, 2006).

Takrif nombor kabur dalam konteks yang lebih umum dan penggunaannya di dalam pemodelan geometri adalah seperti yang dikemukakan oleh Konsinski (Konsinski, 2004), iaitu penyusunan struktur serta sifat aljabarnya yang lebih bersifat guna. Manakala kaedah penyahkaburan nombor kabur (atau data kabur) kita merujuk kepada Konsinski dan Bodjanova (Konsinski, 2004; Bodjanova, 2005).

Dalam pemodelan geometri, ruang Affin yang terdiri dari pungutan titik yang mewakili kedudukan vektor arah beserta sifat aljabarnya adalah menjadi asas penting dalam pembinaan model sebagai perwakilan matematik bagi lengkung atau permukaan yang boleh dimanipulasi melalui komputer. Setiap bentuk geometri akan direka bentuk modelnya berdasarkan kedudukan titik kawalan rangup dan struktur matematik akan diterbitkan ke dalam bentuk rumus dan algoritma yang akan diimplimentasikan ke dalam komputer dengan hasilnya adalah berbentuk lengkung atau permukaan. Segmen lengkung atau permukaan yang dihasil menggunakan kaedah penghampiran atau interpolasi boleh disambung secara selanjar (Peters, 1991; De Rose, 1985) untuk membentuk lengkung atau permukaan splin yang licin dan sesuai digunakan dalam reka bentuk geometri (Bartels et al., 1987; Elaine et al., 2001; de Boor, 1978; Dirckx, 1993).

Konsep lengkung dan permukaan Bezier rangup telah dibangunkan secara berasingan oleh de Casteljaou (1959) dan Bezier (1963) untuk industri automobil. Skema yang dibangunkan dijadikan asas yang penting dalam reka bentuk geometri berbantuan komputer. Walaupun kedua-dua Bezier dan de Casteljaou telah berjaya membangunkan model lengkung Bezier rangup untuk pemodelan, tetapi perluasannya kepada konsep permukaan adalah berbeza. Sebagai contoh, Bezier menggunakan hasil darab tensor lengkungnya bagi menghasilkan suatu bentuk permukaan yang licin serta selanjar. Lihat (de Casteljaou, 1986; Farin 1990; 1992; Peters, 1991; Dahmen, 1981; De Rose, 1985).

Tidak seperti Bezier, lengkung splin-B rangup merupakan cebisan polinomial iaitu gabungan segmen lengkung polinomial yang boleh merekabentuk bentuk geometri yang licin serta selanjur dengan lengkungnya yang bersifat setempat. Sifat kawalan setempat ini banyak memberikan kelebihan kepada model splin-B rangup dalam pemodelan geometri. Dengan melakukan perubahan terhadap kedudukan titik kawalan atau nilai knot yang tertentu, bentuk lengkung atau permukaan splin-B akan turut berubah secara setempat di dalam poligon titik kawalan tersebut. Lengkungnya mudah dikendalikan dan fungsi asasnya ditakrifkan secara rekursif (de Boor, 1987; Farin, 1990; Lane & Riesenfeld 1980). Oleh sebab kedua-dua bentuk iaitu bentuk Bezier dan bentuk splin-B rangup diperihal oleh polinomial, maka algoritma bagi menukar titik kawalan di antara kedua-duanya telah diketahui umum. Lihat (Boehm, 1977; Jean, 2000; Gallier, 2000).

Splin Bezier rangup yang dibina berasaskan polinomial (Sablonniere, 1978; Farin, 1997) akan dijadikan asas penting dalam pembinaan model Bezier kabur dalam konteks pemodelan geometri. Konsep splin Bezier telah diperluas oleh Gordon dan Riesenfeld (Gordon & Riesenfeld 1974) kepada konsep splin-B (splin asas) dengan menukarkan polinomial Bernstein kepada fungsi asas splin-B yang memiliki ciri-ciri penting dalam reka bentuk yang tidak terdapat dalam fungsi asas Bernstein. Ciri penting yang dimaksudkan ialah sifat kawalan lengkung atau permukaan rangup secara setempat (Farin, 1997). Curry dan Schoenberg (Curry & Schoenberg, 1966) telah membincang kaedah penghampiran splin-B rangup berasaskan teori penghampiran dan kemudiannya dikembang oleh de Boor dan Cox (de Boor, 1976). Riesenfeld (Riesenfeld, 1973) telah mengaplikasikan teori penghampiran splin-B ini dalam pemodelan geometri berbantuan komputer atau "CAGD" seperti reka bentuk permukaan menggunakan kaedah hasil darab tensor. Perkara yang menarik dibincang oleh Riesenfeld ialah splin-B rangup yang bersifat setempat dengan fungsi asas tak negatif dan hasil tambahnya sama dengan satu. Oleh itu, dengan kedua-dua sifat ini

dapat memberi jaminan bahawa penghampiran splin-B akan sentiasa berada di dalam kecembungan hulunya. Dengan itu, lengkung yang terhasil akan bersilang dengan garis lurus sebanyak $(n-1)$ kali lebih kecil daripada n perubahan tanda dan fungsinya akan menjadi lebih licin, lihat (de Boor, 1978; Dahmen, 1980; Dahmen & Micchelli, 1983) untuk keterangan lanjut. Model splin-B nisbah tak seragam atau lebih dikenali sebagai model "NURBS" rangup diperluas dari konsep splin-B rangup dengan penambahan nilai yang dinamai *pemberat* terhadap pekalnya. Model NURBS ini merupakan penyelesaian kepada masalah dalam reka bentuk geometri kerana ianya lebih tepat dan juga licin (Piegl, 1991; Piegl & Tiller, 1995; Ma & Kruth, 1994).

Sabin (Sabin, 1976) membina permukaan bentuk splin-B segi tiga rangup dengan menggunakan jaring segi tiga de Boor dan dijana secara rekursif (Boehm, 1985) dan secara subbahagian (Boehm, 1983; 1982).

Dapatan kajian lepas yang berkaitan dengan penggunaan teori set kabur ialah hasil yang menyentuh isu data ketakpastian. Kajian analisis yang berkenaan data ketakpastian menggunakan teori set kabur telah mendapat perhatian ramai selepas Burrough (Burrough, 1996) membincang konsep data ketakpastian yang mengfokus kepada masalah sempadan data yang tak menentu menggunakan set kabur. Manakala dalam teori sukatan pula, Mauris (Mauris et al., 2001) menggunakan pendekatan serupa bagi mengungkap pengertian mengenai sifat ketakpastian ke dalam bentuk set sukatan. Giachetti dalam tesisnya (Giachetti, 1996) telah menggunakan nombor segi tiga kabur sebagai model sokongan dalam reka bentuk masalah ketakpastiannya.

Sehingga kini, fenomena dan masalah ketakpastian yang berkaitan set data seperti yang dibincang masih menjadi persoalan yang menarik. Kemajuan dan pencapaian terkini dalam kajian mengenai teori set kabur telah membolehkan fenomena seperti ini dapat diperihal secara kuantitatif dengan hanya di atas suatu

selang yang merupakan set sokongan bagi set kabur yang terletak di atas garis nyata (Kaufmann & Gupta, 1988). Penakrifan set secara pasangan tertib unsur generik dengan gred keahlian pula telah membuka ruang yang begitu luas kepada perkembangan teori matematik pemodelan, iaitu setiap unsur set boleh dinyatakan secara gandingan dalam bentuk unsur pasangan tertib seperti dalam set kabur (Anile et al., 1995; Dubois & Prade, 1988; Gorgoryan & Rheingans, 2004).

Secara umumnya didapati bahawa, fenomena ketakpastian ini ialah model nombor kabur serta operasinya telah digunakan sebagai alat penting dalam pemerihalalan skop dan struktur data input seperti yang dibincang dalam (Zadeh, 1966; Klir dan Yuan, 1995). Prinsip perluasan Zadeh (Zadeh, 1983), yang membentuk teori asas aritmetik kabur telah membolehkan fungsi bernilai nyata dapat diperluas kepada fungsi yang bernilai nombor kabur. Hal seperti ini, Klimke & Wohlmuth (Klimke & Wohlmuth, 2005) telah membincang pemodelan ketakpastian menggunakan nombor kabur dan aritmetik kabur dengan membuat pengiraan terhadap fungsi bernilai kabur menggunakan interpolasi titik grid. Manakala penghampiran secara selang bagi nombor kabur dibincang oleh Chanas (Chanas, 2001). Penggunaan konsep aritmetik kabur dalam pengiraan selang dan pemodelan ketakpastian telah dibincang oleh Hanss (Hanss, 2002). Bodjanova (Bodjanova, 2002) pula memperluaskan konsep pengitlakkan set aras- α nombor kabur dengan membincang kaedah penyahkaburan nilai median dan selang median. Manakala Bodjanova (Bodjanova, 2005), konsep nilai median dan selang median bagi suatu nombor kabur diperluaskan kepada konsep nilai pusat dan konsep selang pusat dengan penggunaan yang berbeza.

Terdapat beberapa kajian mengenai perwakilan data ke dalam suatu bentuk lengkung atau permukaan menerusi teori set kabur seperti berikut:

- Jaccas (Jaccas et al., 1997) telah membincang beberapa model yang berasaskan sistem set kabur untuk *CAGD*. Menerusi mantik kabur, Castro (Castro, 1995)

mengguna sistem mantik kabur dan hukum *JIKA* dan *MAKA*, penghampiran lengkung dan permukaan Bezier telah dibincangkan. Nombor kabur dalam bentuk linguistik, Jaccas (Jaccas et al., 1993) telah menggunakannya sebagai pembolehubah dalam sistem pemodelannya.

- Anile dan rakan-rakan (Anile et al., 2000) telah membincang masalah pemodelan data dalam sistem maklumat geografi atau “GIS” menggunakan splin asas kabur melalui kaedah penghampiran. Splin-B rangup dan selang splin-B diitlakkan secara langsung menggunakan aritmetik kabur dalam pembentukan permukaan. Data ketakpastian disukat menggunakan prinsip nombor kabur dan jumlahnya dikurangkan dengan mengabaikan sebahagian data yang tidak berkaitan. Data bermatra satu dan dua telah diuji tahap keberkesanan modelnya.
- Gallo & Spinello (Gallo & Spinello, 2000) menggunakan model splin asas yang diperkenalkan Anile dan rakan-rakan (Anile et al., 2000) dalam menyelesaikan masalah yang serupa. Data kabur diturunkan ke dalam bentuk data sel, maka dengan nombor kabur, aritmetik kabur dan prinsip perluasan (Anile et al., 1995), penghampiran permukaan splin kabur telah memberikan hasil yang memuaskan. Data asli Gunung Mount Etna digunakan bagi ujian penghampiran dan pelaksanaan model kaburnya.
- Idea yang menjurus kepada pemodelan geometri pepejal yang berbentuk ketakpastian telah disoroti oleh Martin (Martin, 1990). Reka bentuk geometri pepejal tinjauan Martin ini telah mencetuskan pelbagai idea mengenai kaedah pemodelan dan reka bentuk bentuk geometri pepejal dengan set data ketakpastian. Manakala kaedah pelincinan lengkung dengan menggunakan set kabur seperti yang dibincang oleh Moon (Moon, 1998).

Berikut adalah ulasan ringkas dapatan dalam kajian lepas mengenai teori set kabur dan pemodelan geometri yang akan dirujuk dan dijadikan rujukan utama dalam kajian tesis ini.

- Teori set kabur (Zadeh, 1965; Dubois & Prade, 1980) akan dijadikan asas penting dalam perbincangan tesis ini. Sifat aljabar dan aritmetik set kabur dirujuk kepada (Anile et al., 1995; Kaufmann & Gupta, 1991). Manakala konsep nombor kabur dan operasinya dirujuk kepada (Bodjanova, 2002; Dubois & Prade, 1978; Konsinski, 2006). Prinsip perluasan dan pengitlakkan nombor kabur dirujuk kepada (Chanas, 2001; Dubois & Prade, 1985). Prinsip penyahkaburan, panduannya ialah (Bodjanova, 2005). Mengenai data ketakpastian, lihat (Anile et al., 2000; Abd. Fatah et al., 2004; Hong & Lee 2002). Analisis selang dirujuk kepada (Moore, 1966). Struktur nombor kabur untuk pemodelan lihat (Moller et al., 2004). Masalah dan pendekatan kepada data ketakpastian, panduannya ialah (Pang et al., 1997).
- Dalam pemodelan geometri, pemodelan lengkung dan permukaan dalam konteks rangup dirujuk kepada (Farin, 1990, 1997; Faux & Pratt, 1990). Takrif Bezier rangup panduannya rujuk kepada (de Boor, 1978; Farin, 1983; Gordon & Riesenfeld, 1974). Spline-B rangup lihat (Boehm, 1977; Catmull & Clark, 1978; Cox, 1972; de Boor, 1972; Gordon & Riesenfeld, 1974) dan "NURBS" rangup lihat (Farin, 1997; Piegl, 1991; Piegl & Tiller, 1995). Keselajaran lengkung dan permukaan dirujuk (Farin, 1982; Riesenfeld, 1973, 1981).
- Pemodelan masalah ketakpastian menggunakan set kabur seperti yang dibincang dalam (Anile et al., 2000; Lodwick & Santos, 2003; Abd. Fatah et al., 2004; Mauris et al., 2001; Gallo & Spinello, 2000; Giachetti et al., 1997). Penyesuaian data dan teori penghampiran dirujuk (Schumaker, 1976).

1.2 Objektif Kajian

Antara objektif utama kajian dalam tesis ini adalah seperti berikut:

- (i) Untuk membangunkan model geometri menggunakan teori set kabur yang boleh dilaksanakan untuk menyelesaikan masalah data.
- (ii) Untuk memperkenalkan model spline kabur serta sifatnya untuk pemodelan geometri dan analisis data.

- (iii) Untuk memperkenalkan model splin penyahkaburan sebagai model splin tunggal yang berbeza dari model splin rangup.
- (iv) Untuk mengkaji dan menganalisis masalah data Zon 1: Tasik Kenyir yang bersifat ketakpastian menerusi kaedah dan model yang diperkenalkan.

1.3 Implikasi Kajian

Model geometri yang dihasil melalui pendekatan kabur ini mempunyai banyak kelebihan. Bagi titik kawalan yang ditakrif secara kabur dan penyahkaburan, implikasinya dalam pembinaan takrif model geometri berpengertian kabur dan penyahkaburan. Banyak persoalan dalam set data dapat diatasi dan dirumus secara matematik ke dalam bentuk lengkung dan permukaan kabur. Sebagai contoh, data ketakpastian yang kompleks boleh diperihal melalui model lengkung atau permukaan splin-B kabur yang bersifat selanjar, licin dan kawalan setempat. Model yang dihasil melalui kaedah yang dikaji dalam tesis ini boleh dijadikan panduan asas dalam menyelesaikan masalah penyesuaian dan reka bentuk lengkung atau permukaan geometri yang kompleks kerana titik kawalannya bersifat kabur dan modelnya ditakrif oleh fungsi polinomial secara cebis demi cebis.

1.4 Pernyataan Masalah dan Masalah Kajian

Penglibatan teori set kabur dalam menyelesaikan masalah ketidakpastian amat luas dalam semua bidang ilmu. Pembangunan dalam bidang pemodelan geometri pula adalah sejajar dengan perkembangan era teknologi moden masa kini. Tetapi, perkembangan dalam kajian tentang pembinaan perwakilan matematik dengan data ketakpastian masih pada tahap permulaan. *Persoalannya, bagaimanakah cara untuk membina suatu model splin untuk lengkung atau permukaan yang selanjar serta licin dengan menggunakan set titik kawalan yang ditakrif secara kabur sebagai sebahagian dari model geometri berasaskan teori set kabur, modelnya boleh mewakili semua maklumat kekaburan yang wujud dalam set data dengan berbantuan komputer?*

Berikut adalah beberapa permasalahan yang akan dikaji dalam tesis ini.

- Masalah pembinaan takrif titik kawalan dan takrif titik knot melalui set kabur.
- Pembinaan perwakilan titik data ketakpastian melalui struktur nombor kabur.
- Mengkaji masalah pembinaan model geometri untuk lengkung atau permukaan berdasarkan titik data ketakpastian melalui konsep titik kawalan kabur (titik kawalan penyahkaburan) yang dipilih mengikut set aras- α nombor kabur.
- Mengkaji masalah pengkaburan data dan penyesuaiannya dengan lengkung atau permukaan kabur menggunakan kaedah penghampiran atau interpolasi.
- Masalah penyahkaburan titik data kabur dan pembinaan model penyahkaburan untuk lengkung dan permukaan tunggal.
- Mengkaji ciri-ciri penting model yang dihasil menerusi contoh penyesuaian splin kabur, splin Bezier kabur, splin-B kabur dan splin *NURBS* kabur.
- Membina model penyahkaburan bagi setiap model kabur yang dihasilkan.
- Pelaksanaan model kabur dan model penyahkaburan terhadap set data nyata yang bersifat ketakpastian.

1.5 Kandungan Tesis dan Pendekatan Pembinaan Model Kabur

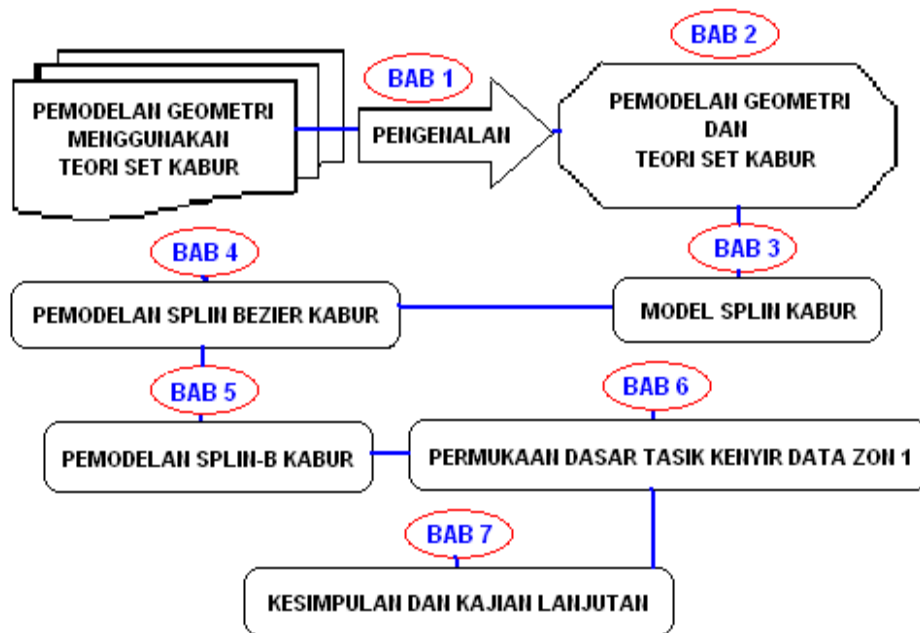
Tesis ini mengandungi tujuh bab utama yang bermula dengan bab pengenalan yang menyentuh perkara seperti masalah kajian, latar belakang, sorotan kepustakaan, objektif serta implikasi kajian, pernyataan masalah dan penyusunan tesis. Diikuti dengan Bab 2 yang membincang tajuk-tajuk asas iaitu teori set kabur dan pemodelan geometri. Jadi, tiga bab iaitu Bab 3 sehingga Bab 5 yang akan membincang model-model penting sebagai hasil kajian dalam tesis ini. Manakala dua bab lagi akan menyentuh aspek pelaksanaan model, perbincangan dapatan kajian dan penutupan.

Bab 3 membincang kaedah pemodelan geometri dengan menggunakan fungsi splin kabur untuk melukis lengkung dan permukaan kabur. Fungsi analisis dengan pekalnya yang ditakrif melalui prinsip nombor kabur turut dibincang. Contoh lengkung

dan permukaan yang dihasil melalui model splin ini diberikan melalui beberapa contoh berangka pada akhir bab ini nanti.

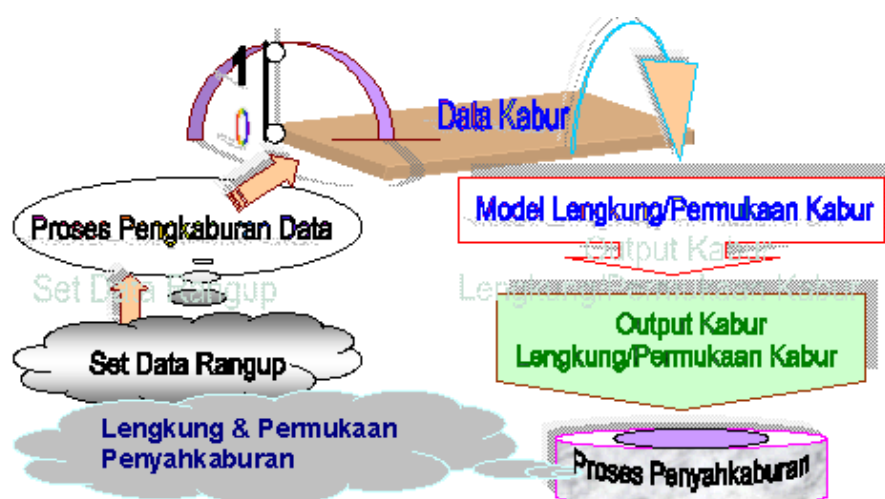
Dalam Bab 4, takrif titik kawalan kabur dan titik kawalan penyahkaburan diperkenalkan melalui konsep nombor kabur. Dengan takrif titik kawalan kabur yang diperkenalkan, model lengkung dan permukaan Bezier kabur beserta sifatnya akan dikaji. Oleh sebab kekurangan sifat kawalan setempat dalam Bezier kabur, model ini akan diperluas lagi kepada model splin yang lebih umum, iaitu model splin-B kabur seperti dalam Bab 5. Perluasan model splin-B kabur adalah dengan berdasarkan titik kawalan seperti dalam model Bezier kabur. Dengan titik knot rangup dan knot kabur yang relatif dengan jumlah titik kawalan kabur akan menentukan peringkat bagi splin-B kabur. Dalam Bab 5 juga akan membincang model splin-B berdasarkan set data ketakpastian dengan pelaksanaannya akan dibincang dalam Bab 6. Melalui konsep nilai pemberat, model splin-B nisbah tak seragam kabur atau *NURBS* kabur beserta sifatnya akan diperkenal pada bahagian akhir Bab 5. Setiap model kabur yang dihasilkan, akan diturun kepada model berbentuk tunggal melalui proses penyahkaburan mudah dan modelnya dikenali sebagai model penyahkaburan atau model ketakpastian tunggal.

Aspek penggunaan, pelaksanaan dan pengujian tahap keberkesanan model yang dihasilkan akan dilakukan menerusi contoh set data yang dipungut melalui aktiviti fizikal di satu lokasi Tasik Kenyir di Negeri Terengganu. Data yang diperoleh adalah bersifat kabur, faktor-faktor kaburannya akan dibincang dalam Bab 6. Akhir sekali, Bab 7 akan membincangkan kesimpulan dan perumusan hasil kajian tesis serta cadangan masalah kajian dan penyelidikan lanjutan. Kesemua tujuh bab beserta tajuk-tajuknya yang dimuatkan sebagai kandungan tesis ini disusun seperti yang ditunjuk pada Rajah 1.1.

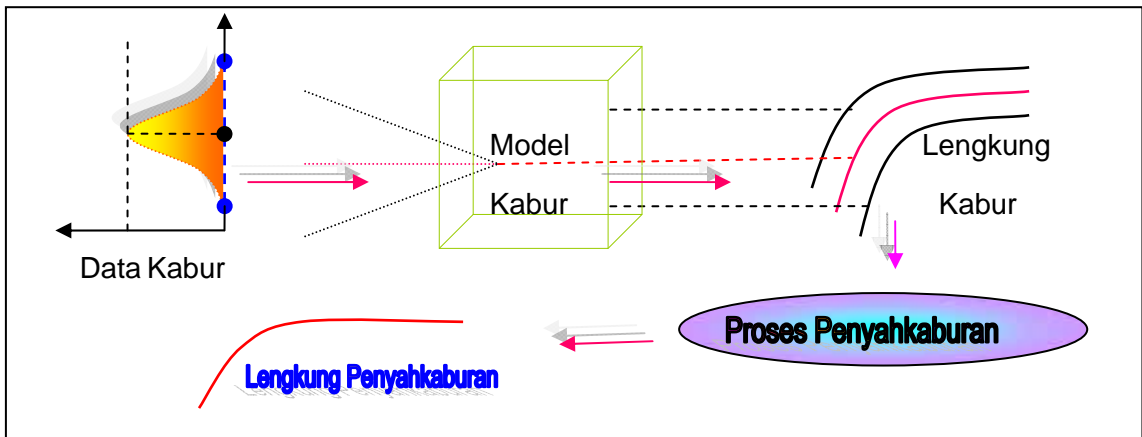


Rajah 1.1 Penyusunan dan organisasi tesis.

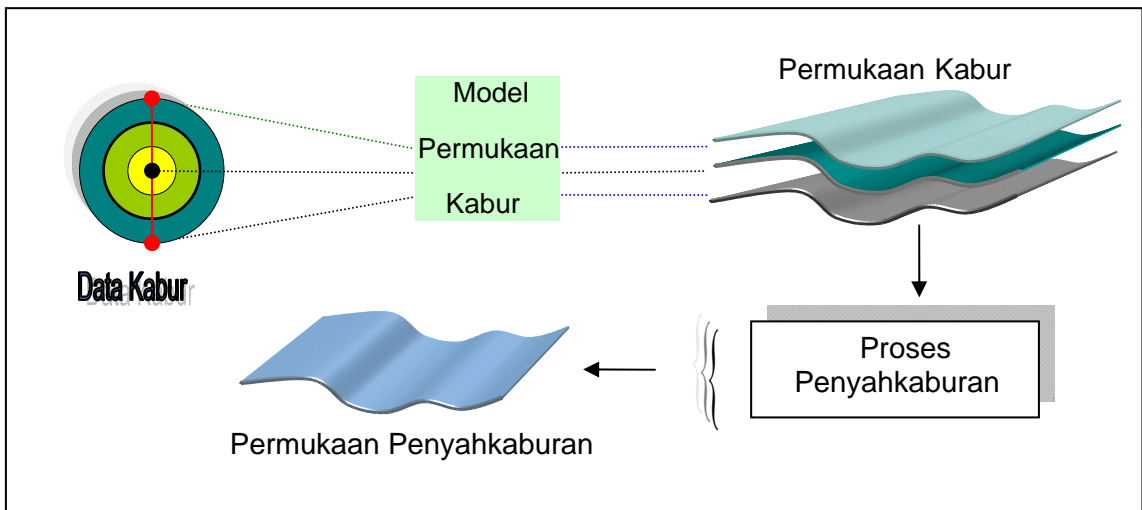
Di antara konsep dan pendekatan pembinaan model geometri menggunakan teori set kabur ialah set data rangup akan diproses melalui kaedah pengkaburan bagi menghasilkan set data kabur yang boleh digunakan. Langkah seterusnya, model kabur dan model penyahkaburan digunakan untuk melukis lengkung atau permukaan. Langkah-langkahnya seperti yang diilustrasi dalam Rajah 1.2 - 1.4 berikut.



Rajah 1.2 Ilustrasi proses dan konsep pemodelan geometri teknik kabur.



Rajah 1.3 Proses pemodelan lengkung kabur dan lengkung penyahkaburan.



Rajah 1.4 Proses pemodelan permukaan kabur dan permukaan penyahkaburan.

BAB 2

PEMODELAN GEOMETRI DAN TEORI SET KABUR

2.0 Pengenalan

Pemodelan geometri dan teori set kabur adalah dua bidang berbeza yang mempunyai peranannya masing-masing dalam perwakilan matematik, satu dalam perwakilan bentuk geometri dan satu lagi dalam perwakilan bentuk data. Perwakilan matematik untuk lengkung atau permukaan dihasilkan menerusi model geometri dengan berdasarkan set titik kawalan yang ditetapkan. Manakala teori set kabur pula boleh mewakili fenomenon data ketakpastian ke dalam bentuk kepastian kuantitatif dan kualitatif menerusi konsep nombor kabur. Jadi, kedua-dua bidang ini adalah sama penting dengan kekuatannya yang berbeza, satu dalam bidang pemodelan dan satu lagi dalam bidang teori set kabur. Sebagai objektif utama tesis, iaitu penggabungan antara kedua-duanya di dalam satu tajuk yang khusus, maka beberapa konsep asas yang berkaitan dengan kedua-dua tajuk ini akan diberikan di dalam bab ini.

Bidang pemodelan geometri menjadi lebih penting selepas perang dunia kedua. Oleh sebab bidang pemodelan ini dapat menyediakan rangka kerja asas matematik untuk pengiraan berkomputer, maka penggunaannya tidak hanya terbatas kepada reka bentuk model dalam grafik berkomputer dan dalam kejuruteraan untuk barangan buatan dan pengilangan sahaja, malah modelnya telah digunakan secara meluas dalam pelbagai bidang lain seperti analisis data, perubatan, perhutanan, perikanan, sains samudra dan alam sekitar. Dengan berbantuan komputer, pemodelan yang berasaskan polinomial seperti splin Bezier rangup, splin-B rangup (splin asas) dan *NURBS* rangup akan menjadi lebih mudah, cepat dan menarik, malah telah digunakan dalam menyelesaikan masalah ketakpastian dalam geometri. Lihat (Sarkar & Menq, 1991; Rockwood & Chambers, 1996; Peters, 1991).

Kita sedia maklum bahawa sistem titik kawalan sangat berperanan dalam pembinaan model dan reka bentuk geometri. Jika titik kawalan atau pekali geometri ini ditakrif secara kabur dengan menggunakan prinsip dan sifat nombor kabur, maka model yang didasari oleh titik kawalan ini akan menjadi lebih berkesan dan mampu menangani masalah data yang akibat dari sifat ambiguiti dan kekelaman (Zadeh, 1965; Gallo et al., 2000; Lodwick & Santos, 2003; Konsinski, 2006). Pembinaan model untuk reka bentuk geometri dengan pengertian kabur akan menjadi lebih mudah dan senang difahami dengan kelebihan yang terdapat dalam konsep penggredan keahlian dalam set kabur yang akan diberikan. Dengan yang demikian, pemodelan geometri menggunakan teori set kabur akan menjadi lebih penting dan bersifat universal kerana modelnya dapat mewarisi sifat ketakpastian data ke dalam bentuk lengkung atau permukaan kabur dan penyahkaburan. Seterusnya, model yang diperkenalkan menerusi kaedah ini akan menjadi model baru yang bersifat guna dan boleh menyelesaikan masalah yang berkaitan reka bentuk dan pemodelan.

Dalam bab ini, pemodelan geometri dalam konteks rangup akan dibincang dan beberapa prinsip dasar dalam teori set kabur akan diberi, tetapi secara berasingan. Model-model asas splin rangup seperti model splin Bezier, model splin-B dan model *NURBS* dikemukakan sebagai sebahagian asas penting dalam bahagian pembinaan model geometri hibrid menggunakan prinsip-prinsip dalam set kabur. Perkaitan antara kedua-duanya akan diitlakan dan dibincang secara terperinci dalam bab seterusnya di bawah tajuk model fungsi splin kabur, model Bezier kabur, model splin-B kabur dan model *NURBS* kabur. Model geometri yang dibina di atas landasan dan prinsip dalam set kabur ini telah digariskan sebagai salah satu objektif utama dalam bab pengenalan dalam tesis ini. Semua model geometri yang dikemukakan dalam bab ini adalah dianggap sebagai rangup supaya hubungannya dengan model geometri kabur nanti akan lebih jelas sifatnya.

2.1 Pembinaan Model Lengkung Bezier Rangup

Model dalam pemodelan geometri berbantuan komputer yang asas binaannya melibatkan polinomial yang diperkenalkan oleh Schoenberg (1946) ialah model lengkung Bezier rangup. Model ini telah dibangunkan, tetapi secara berasingan oleh Paul de Casteljaou (1956) dan Piere Bezier (1962). Sejak itulah, cebisan polinomial telah digunakan dalam pemodelan berbantuan komputer seperti yang dilakukan oleh de Casteljaou (Citroen), Pere Bezier (Renault), Birkhoff dan Garabedian (General Motor) dan Ferguson (Boeing). Mereka ini menggunakan polinomial atas beberapa sebab tertentu, iaitu modelnya mudah dikawal, pengiraannya tidak begitu rumit dan mudah melakukan suatu perubahan terhadap lengkungnya. Tentang pengrekursifan, Cal de Boor (de Boor,1972) mengemukakan rumus rekursi yang mudah dan stabil. Dengan gabungan cembung bagi dua splin asas berperingkat yang lebih rendah meningkatkan nilai darjah bagi yang seterusnya. Pengrekursifnya adalah stabil disebabkan gabungan sebutan yang bersifat positif.

Dalam bahagian ini, konsep asas dan model lengkung Bezier rangup beserta sifatnya dibincangkan. Takrif dan contoh lengkung Bezier rangup diberikan, ciri-ciri penting lengkung seperti keselantaran, kelicinan dan kecembungan ditunjukkan dalam beberapa contoh. Takrif dan sifat asas ini diberikan, kerana akan digunapakai dalam bahagian pemodelan lengkung Bezier yang berprinsipkan teori set kabur dalam bab seterusnya.

2.1.1 Konsep Asas

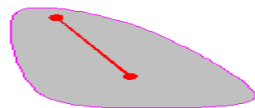
Sebagai asas dalam pembinaan model lengkung Bezier rangup, konsep set rangup, set cembung, hul cembung dan polinomial Bernstein beserta sifatnya akan dibincang dalam bahagian ini.

(a) Misalkan X sebagai set semesta dan P adalah subset bagi X . Set P dikatakan *rangup* jika untuk setiap unsur $P_i \in X$ wujud fungsi cirian, $\mu_P : X \rightarrow \{0,1\}$ yang ditakrif sebagai

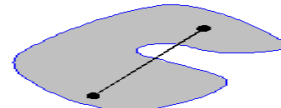
$$\mu_P(P_i) = \begin{cases} 0 & P_i \notin P \\ 1 & P_i \in P \end{cases}$$

dan $P = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ dikatakan *set rangup terhingga* jika untuk $P_i \in X$ adalah terhingga dan gred keahlian untuk setiap i ialah $\mu_P(P_i) = 1$.

(b) Misalkan P_0, P_1, \dots, P_n adalah titik rangup dalam set P . P dikatakan *set kecembungan rangup* jika untuk sebarang dua titik rangup iaitu $P_i, P_j \in P$ dengan $P = a_i P_i + a_j P_j$ adalah suatu gabungan cembung yang terkandung di dalam P . Lihat Rajah 2.1.



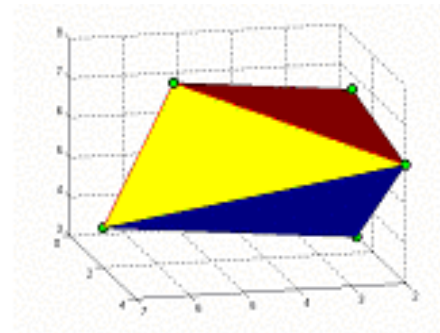
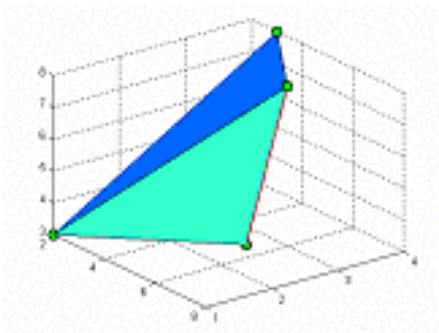
set cembung



set tak cembung

Rajah 2.1 Set cembung dan set tak cembung rangup.

(c) Set yang mengandungi semua titik rangup bagi P yang boleh ditulis sebagai gabungan cembung dari titik P_0, P_1, \dots, P_n dinamakan *kecembungan hul rangup* bagi titik P_0, P_1, \dots, P_n . Lihat Rajah 2.2.



Rajah 2.2 Rantau kecembungan hul titik P_1, P_2, \dots, P_n .

(d) Bentuk polinomial boleh diperihal dengan cara berlainan yang lebih menarik berdasarkan kaedah perihalan polinomial Bernstein. Keadaah ini telah dijadikan sebagai alat asas yang digunakan dalam reka bentuk model lengkung Bezier rangup berperingkat $(n+1)$.

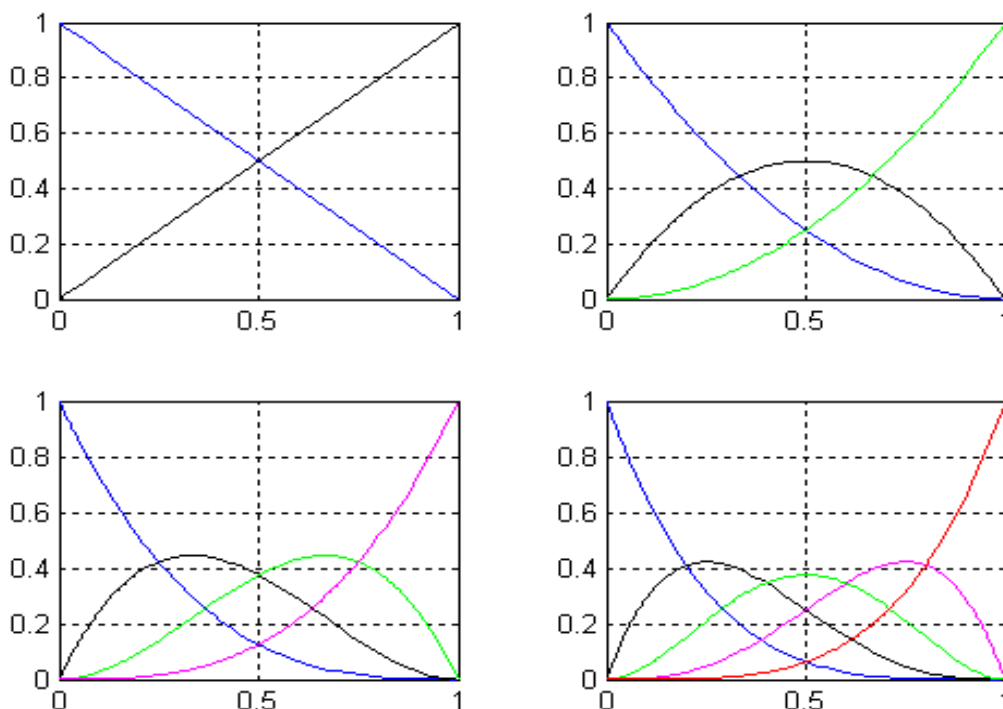
Sekarang, Kita pertimbang rumus binomial $1 = ((1-t) + t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$

dengan pekali binomial $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ dan $0! = 1$. Maka *polinomial Bernstein berdarjah n* ditakrif sebagai

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad t \in R. \quad (2.1)$$

dan *rumus rekursi* untuk polinomial Bernstein ditakrif oleh persamaan

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t). \quad (2.2)$$



Rajah 2.3 Lengkung polinomial $B_0^1(t)$, $B_1^1(t)$, $B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$, $B_2^2(t)$, $B_0^3(t)$, $B_1^3(t)$, $B_2^3(t)$, $B_3^3(t)$ dan $B_0^4(t)$, $B_1^4(t)$, $B_2^4(t)$, $B_3^4(t)$, $B_4^4(t)$ yang digunakan dalam penjanaan lengkung Bezier berdarjah $n = 1, 2, 3$ dan 4 .

Sifat polinomial Bernstein (Farin, 1993) dikemukakan bagi membantu kita dalam memahami ciri-ciri penting yang terdapat dalam model lengkung Bezier secara lebih mendalam kerana dengan polinomial yang sama kita akan gunakan untuk penjanaaan beberapa model splin Bezier dalam konteks kabur nanti.

- $B_i^n(0) = B_i^n(1) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 & \text{untuk } i = 0 \text{ atau } n \end{cases}$
- Simetri jika $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$ dan normal jika $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$.
- Positif jika $B_i^n(t) \geq 0$ untuk $0 \leq t \leq 1$ dan $B_i^n(t)$ mempunyai hanya satu titik maksimum setempat. $\{B_i^n, i = 0, 1, \dots, n\}$ adalah asas bagi polinomial $P_n([0,1])$.

2.1.2 Lengkung Bezier Rangup

Lengkung Bezier rangup kubik dibina menggunakan empat titik kawalan rangup dan bilangan titik yang lebih digunakan untuk peringkat lengkung yang lebih tinggi. Misalkan P_0, P_1, P_2 dan P_3 adalah titik kawalan rangup yang diberikan. Maka *lengkung Bezier rangup kubik* yang merupakan fungsi berparameter yang ditakrif sebagai

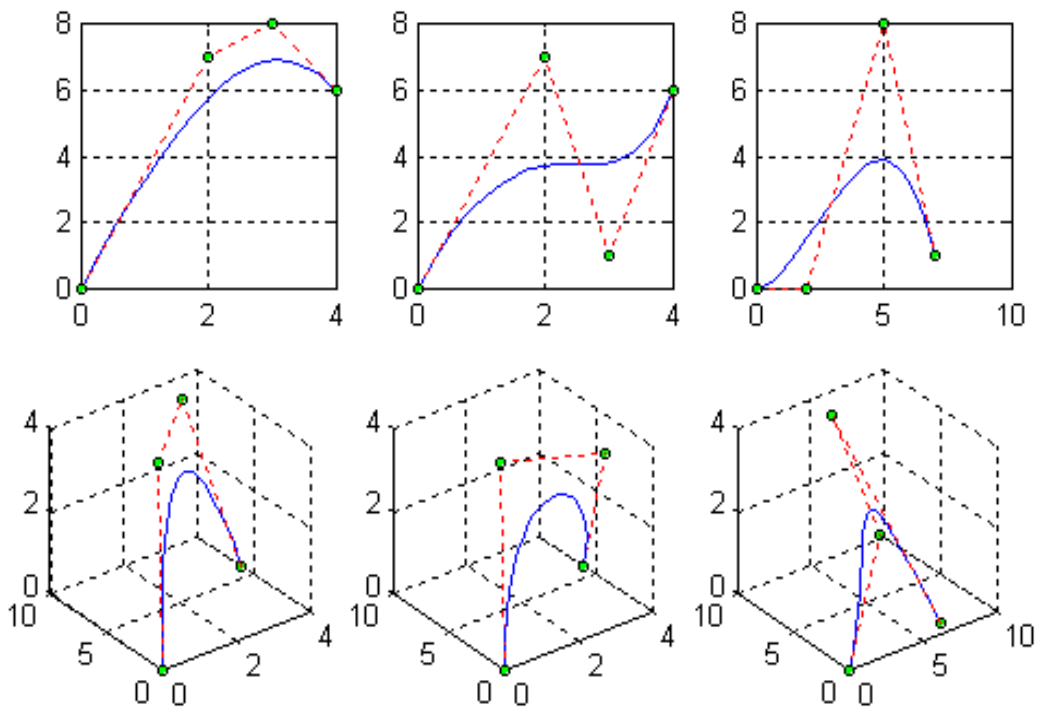
$$Bez_3(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i^3(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.3)$$

dengan

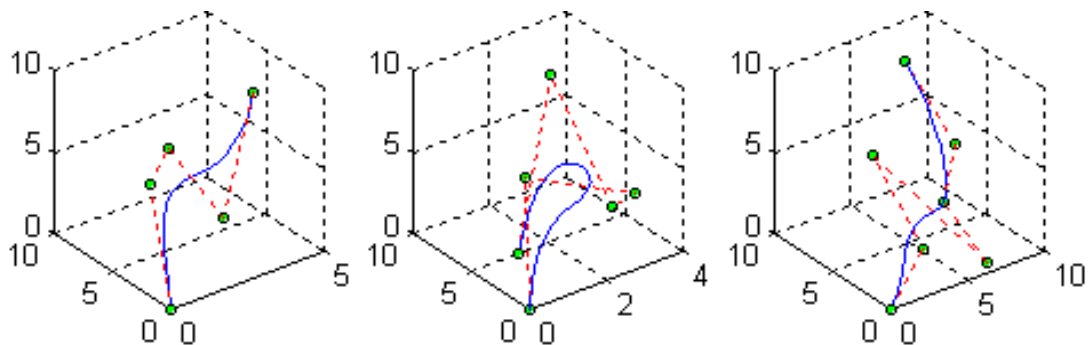
- $B_0^3(t) = (1-t)^3$, $B_1^3(t) = 3t(1-t)^2$, $B_2^3(t) = 3t^2(1-t)$ dan $B_3^3(t) = t^3$ sebagai fungsi adunan Bernstein atau fungsi asas Bezier rangup kubik dan
- P_i adalah titik kawalan rangup atau pekali geometri.

Jika kita setkan titik kawalan rangup $P = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ yang diberi dalam pelbagai kedudukan, maka lengkung Bezier rangup kubik dapat dihasilkan dalam pelbagai bentuk seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 2.4. Secara amnya, lengkung Bezier rangup adalah mudah difahami, dengan darjah yang lebih tinggi, lengkung yang lebih licin dapat dicapai dan dengan sedikit perubahan pada kedudukan titik

kawalan dalam set kawalan poligon rangupnya, keseluruhan lengkungnya juga akan turut berubah. Perubahan seperti ini telah disifatkan sebagai satu kelemahan yang terdapat di dalam model lengkung Bezier rangup. Ini bermakna, model Bezier ini tidak mempunyai sifat pengawalan yang dapat pengawal lengkungannya secara setempat, sedangkan sifat ini amat berguna sekali dan diperlukan oleh pereka di dalam reka bentuk lengkung atau permukaan yang lebih kompleks. Perubahan terhadap titik kawalan rangup yang memberi kesan kepada perubahan bentuk lengkung secara keseluruhan dan perubahan ini boleh dilihat seperti yang ditunjukkan pada Rajah 2.6.

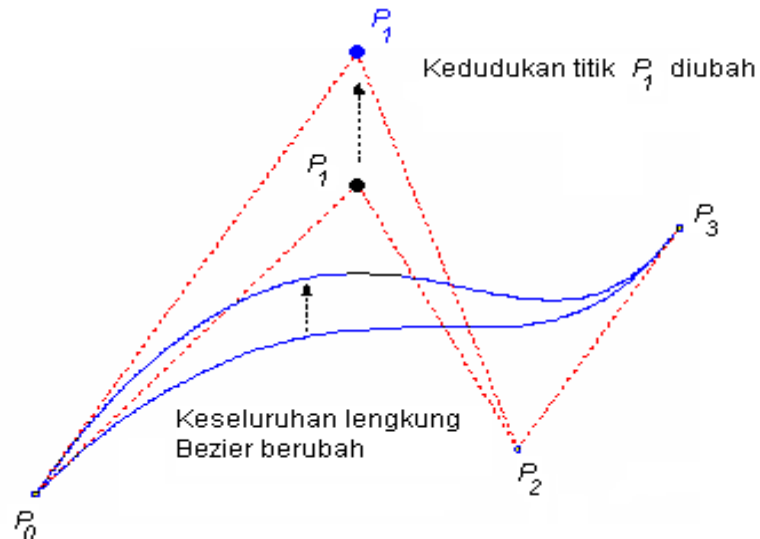


Rajah 2.4 Lengkung Bezier kubik dalam bentuk 2D dan 3D dengan titik kawalan rangup $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ dalam pelbagai kedudukan yang berbeza.



Rajah 2.5 Lengkung Bezier berperingkat lebih tinggi dalam 3D dengan titik kawalan yang lebih dari empat.

Keseluruhan lengkung Bezier rangup akan berubah apabila kedudukan salah satu dari titik kawalannya telah diubah, iaitu P_1 dari set poligon kawalan $\{P_0, P_1, P_2\}$ yang diubah, bentuk keseluruhan lengkung di dalam set poligon kawalan tersebut juga turut berubah, lihat Rajah 2.6.



Rajah 2.6 Sifat perubahan terhadap lengkung Bezier rangup.

Secara amnya, lengkung Bezier rangup boleh dibina dengan sebarang jumlah titik kawalan. Jika $P = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ adalah $(n+1)$ titik kawalan rangup dengan $t = \alpha \in [0,1]$ sebagai parameter, maka lengkung Bezier rangup berdarjah n dan berperingkat $(n+1)$ adalah ditakrif sebagai

$$Bez_n(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.4)$$

dengan $Bez_n(t)$ adalah nilai pada lengkung polinomial yang berpadanan dengan parameter $t = \alpha \in [0,1]$. Manakala n adalah darjah bagi lengkung, iaitu darjah polinomial dalam fungsi Bernstein dan P_i adalah titik kawalan rangup yang ke- i atau pekali geometri yang akan membentuk suatu poligon kawalan rangup yang boleh mengawal pembentukan lengkung yang terhasil dalam hul cembungunya.

$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, $i \in \{0,1, \dots, n\}$ adalah fungsi asas Bernstein atau fungsi adunan