

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI NAPOLI
FEDERICO II**



FACOLTÁ di INGEGNERIA

**DIPARTIMENTO di MECCANICA ed ENERGETICA
SCUOLA DI DOTTORATO IN INGEGNERIA INDUSTRIALE**

TESI DI DOTTORATO IN INGEGNERIA DEI SISTEMI MECCANICI

XXIII CICLO

**DIAGNOSTICA AVANZATA IN SISTEMI
MECCANICI COMPLESSI**

COORDINATORE DEL DOTTORATO

CH.MO PROF. ING.

FABIO BOZZA

Tutor

Ch.mo Prof. Ing.

VINCENZO NIOLA

Dottorando

GIUSEPPE QUAREMBA

ANNO ACCADEMICO 2009 - 2010

Indice

Premessa	5
Introduzione	7
Capitolo 1	10
La Trasformata Wavelet	10
1.1 Introduzione	10
1.2 Considerazioni sulla trasformata trigonometrica discreta di Fourier....	11
1.3 Funzioni a supporto compatto.....	19
1.4 Il sistema base di Haar	20
1.5 Analisi della multirisoluzione	27
1.6 La rappresentazione Wavelet	31
1.7 Obiettivi dell'analisi multirisoluzione.....	35
1.8 Smoother Wavelet Bases.....	41
1.9 Equazioni alle differenze.....	46
1.10 Base Hilbertiana	54
Capitolo 2	58
La Teoria del Caos	58
2.1 Caos.....	58
2.2 Sistemi dinamici.....	61
2.3 Spazio delle fasi o spazio di stato (<i>phase space</i>)	64
2.4 Punto fisso.....	69
2.5 Wavelet e caos.....	79
2.6 Mappa di Poincaré.....	79
2.7 Proprietà del piano delle fasi.....	81
2.8 Esponenti di Lyapunov	82
2.9 Il calcolo degli esponenti di Lyapunov attraverso il problema degli autovalori ed autovettori	96
Capitolo 3	99
Metodiche applicative	99
3.1 Premessa.....	99
3.2 Wavelet e caos deterministico.....	100
3.3 Il problema del malcondizionamento dei dati.....	101
3.4 Metodo pratico per il calcolo di λ_1	104
3.5 Trasformata wavelet adattativa	106
3.6 Fonte di errori.....	113
3.7 Frequenza (cepstrum analysis).....	125
3.8 Tempo (analisi statistica)	125
3.9 Analisi tempo-frequenza	126
3.10 Dimensione frattale	128
3.11 Modalità di esecuzione.....	135

3.12	Attività	135
Capitolo 4	138
Applicazioni	138
4.1	Strumentazione.....	138
4.2	Durability Test	138
4.3	Descrizione della prova di durata.....	139
4.4	Algoritmo di monitoraggio (Primo Indice).....	144
4.5	Algoritmo di monitoraggio (Secondo Indice).....	146
4.6	Risultati	146
4.7	Analisi EGR (Exhaust Gas Recirculation).....	163
4.8	PMI Vibrazionale (PMIv)	177
4.9	Ricostruzione tridimensionale dello stato vibrazionale del Cuscinetto dell'albero porta-elica	197
4.10	Caratteristiche parametriche per i coefficienti wavelet scala 13.....	203
4.11	Stato vibrazionale indotto da alimentazioni non convenzionali	220
4.12	Alcune considerazioni sul biodiesel in autotrazione.....	220
4.13	Proprietà del biodiesel.....	222
4.14	Mappe tridimensionali costruite con l'acquisizione dell'asse z, (x(n), x(n+1), x(n+2)).....	228
4.15	Analisi con gli esponenti di Lyapunov.....	230
Conclusioni	232
Appendice A	234
Sistema di elaborazione	234
Appendice B	237
Strumentazione	237
B.1	Amplificatori	237
B.2	Accelerometri	238
B.3	LMS SCADAS Mobile SCM01.....	250
B.4	Modulo di Ingresso a 8 canali	252
Appendice C	254
Alcune Considerazioni Operative per l'Analisi di Segnali monodimensionali	254
C.1	Introduzione	254
C.2	Descrizione dei principali indicatori	258
C.3	Nota Generale.....	258
C.4	Indicatori morfo-dinamici	259
C.5	Periodogramma	259
C.6	Fattore di forma.....	260
C.7	Indice quadratico di oscillazione.....	263
C.8	Indice di sincronia	264
C.9	Curtosi	264
C.10	RMS (Root Mean Square value)	268
C.11	Fattore di cresta (CF)	270

C.12	Energy Ratio (<i>ER</i>)	270
C.13	FM4 (figure of merit)	271
C.14	Sideband level factor	272
C.15	NA4	272
C.16	NA4*	273
C.17	Parametro NB4	274
C.18	L'indice di oscillazione β come strumento di analisi	275
Bibliografia		279

Premessa

L'analisi vibrazionale di fenomeni transienti a durata molto breve viene oggi effettuata attraverso tecniche classiche basate sullo studio degli spettri e più in generale a mezzo varianti della Fast Fourier Transform (FFT).

Il limite di queste tecniche è che sono applicabili a fenomeni vibrazionali periodici. La maggior parte dei fenomeni vibrazionali di origine meccanica oggetto della presente ricerca, che interessa vari campi, non sono periodici.

Per poter analizzare tali tipologie vibrazionali si ricorre, quindi, ad un artificio numerico che presuppone che tali fenomeni siano lentamente variabili nel tempo oppure quasi-stazionari.

Per fenomeni, però, di durata molto brevi, non è possibile applicare questa ipotesi di lavoro.

L'obiettivo di questa ricerca è, quindi, lo studio, la messa a punto e la verifica di metodi e tecniche alternative di analisi che possano essere adoperate nelle condizioni appena descritte.

Pertanto, per lo studio del sistema meccanico, sottoposto ad un eventuale monitoraggio, si procederà, preliminarmente, con l'impiego di una tecnica di analisi dei fenomeni vibrazionali impulsivi attraverso la Trasformata Wavelet.

Impiegata nell'analisi di fenomeni vibrazionali complessi, la Trasformata Wavelet viene distinta in Trasformata Wavelet Continua (CWT) e Discreta (DWT), e quest'ultima, in sistemi ridondanti discreti (*frames*) e basi wavelet ortonormali.

È sufficiente ricordare che lo spazio in cui sono "ambientate" le wavelet è quello multidimensionale di Hilbert, cioè uno spazio pre-hilbertiano completo. Per i nostri fini lo spazio R^n soddisfa le proprietà di uno spazio di Hilbert, in esso, è stata definita, nel prosieguo della presente ricerca, una funzione particolare, adattativa, che costituisce un sistema ortonormale completo (base). Essa, al pari di quanto viene fatto dalle funzioni cosinusoidali a mezzo la trasformata trigonometrica di Fourier, ha permesso di studiare il fenomeno vibrazionale con

un'accuratezza, una risoluzione ed un'affidabilità a cui, attualmente, non è possibile pervenire con altri metodi.

Inoltre, l'impiego della trasformata Wavelet, consente non soltanto la identificazione di eventuali "anomalie" (spike, transitori molto rapidi, istantanee variazioni di frequenza, ecc.) sempre presenti in fenomeni vibrazionali anomali, ma anche la loro esatta collocazione temporale.

Nella presente ricerca, tale tecnica di analisi è stata integrata con altre tecniche ed idee che afferiscono alla teoria del caos. E ciò, sia perché qualsiasi sistema meccanico, in realtà, è non-lineare e sia per la particolare attitudine che tali sofisticati test diagnostici presentano nell'evidenziare l'evoluzione dinamica di sistemi rotanti (motori, ruote dentate, camme, ecc.) e di agevolare l'identificazione precoce di particolari eventi quali, ad esempio, la usura e/o rottura di alcuni componenti meccanici o di parti di essi.

Infine, il ricorso all'analisi statistica multivariata dei dati (regressione, discriminante, fattoriale) condotta su particolari indicatori con cui verrà individuato il fenomeno vibrazionale, consentirà di classificare l'eventuale anomalia in esso presente.

Nella prima parte della presente relazione di tesi sono stati esposti i presupposti matematici e statistici su cui poggiano le suddette teorie. Nella seconda parte sono stati approfonditi e sviluppati alcuni aspetti specifici soprattutto dal punto di vista metodologico. Nella terza parte sono state presentate alcune interessanti applicazioni nel campo meccanico che meglio di ogni altro possono dare un'idea di come è possibile sfruttare la potenza di elaborazione offerta dall'integrazione di queste due teorie.

Lo svolgimento dell'attività scientifica ha avuto luogo in seno al gruppo afferente al Dipartimento di Meccanica ed Energetica della Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Napoli, Federico II, sotto il tutoraggio del Prof. Vincenzo Niola ed il coordinamento del Prof. Fabio Bozza, ai quali va un sentito ringraziamento per la fiducia accordatami nello svolgimento del presente lavoro di ricerca nonché per i loro preziosi consigli. Infine, una particolare gratitudine va all'Ing. Vincenzo Avagliano per la pazienza, professionalità e cura che ha profuso nell'approntamento del presente documento in formato digitale.

Introduzione

Wavelet e caos deterministico

Un segnale ovvero una serie numerica temporale ovvero una funzione analitica possono essere trasformati in un altro insieme numerico costituito da coefficienti wavelet ciascuno rappresentativo di una particolare frequenza corrispondente ad una scala prefissata. Tale tecnica di trasformazione fornisce una mappa molto utile se dobbiamo indagare le caratteristiche presenti nel segnale vibrazionale d'origine.

Monitorare un sistema dinamico non lineare significa prima di tutto individuarne le eventuali variazioni o meglio *firme* dinamiche che non possono essere ascritte ad eventi puramente aleatori. Indagare in tal senso, però, comporta un grosso problema metodologico: stabilire se quello che si sta osservando è dovuto al caso ovvero è determinato dal caos deterministico. Decidere in un senso o nell'altro non è cosa sempre facile e possibile. Obiettivo di fondo è quello di presentare una serie di metodi, ideati e verificati in occasione di questa ricerca, che possano aiutare i tecnici, i progettisti, i ricercatori ad orientarsi in questa terra di nessuno dove spesso le sfumature sono molto labili. Il tentativo è stato, pertanto, quello di rappresentare anche con l'aiuto di modelli semplificati, deterministici o stocastici, i fenomeni che si presentano nei vari campi di applicazione dei sistemi meccanici complessi.

A tal fine si è fatto ricorso a spazi funzionali nei quali fosse possibile introdurre basi funzionali che possano essere "traslate e scalate".

Nella figura che segue è rappresentato l'effetto dell'operazione di discretizzazione temporale che si verifica ogniqualvolta si esegue una misurazione su di un sistema dinamico attraverso un qualsivoglia strumento (accelerometro, termocoppia, estensimetro, ecc.). Più alto è il tasso di campionamento (*sampling rate*) più informazioni si possono raccogliere nell'unità di tempo¹.

¹ Nel rispetto del Teorema del campionamento di Nyquist-Shannon.

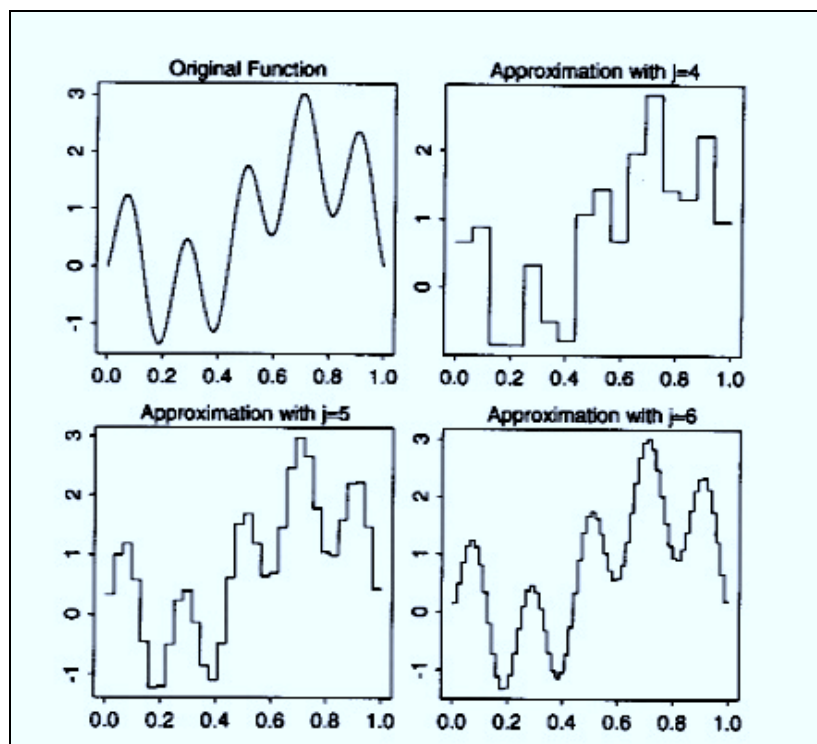


Fig. I

Ugualmente la figura bene mette in evidenza l'ipotesi di costanza a tratti, relativamente all'ampiezza dell'intervallo temporale del segnale campionato. I metodi numerici presentano errori grandi quando vengono applicati per determinare soluzioni che cambiano rapidamente (ad esempio per la presenza di una sequenza di *spike*).

Per tale ragione è utile campionare con tassi dell'ordine di 10^4 Hz, possibilmente con potenze naturali di base 2.

Si osservi ancora che se si intendono indagare le variazioni che un sistema dinamico esibisce nel tempo (è il caso del monitoraggio), allora certamente, a meno di casi particolari, questo non può essere fatto adoperando metodi che si avvalgono di macro parametri, né tantomeno è praticabile la via che porta ad analisi stocastiche. Il campo di indagine di cui si tratta nella presente ricerca è rappresentato da minime variazioni dinamiche, molte volte costituite da brevi treni di *spike* che, il più delle volte, sono precursori di danni irreversibili di natura cineto-elasto-dinamica causati da usure, rotture, lesioni, fratture, ecc., di un componente del sistema meccanico monitorato

Essi, proprio perché sono precursori di potenziali gravi danni futuri, vanno immediatamente rilevati e, se possibile, classificati.

Per fare ciò, però, si deve necessariamente spostare il campo di osservazione dalla bassa all'alta frequenza. È, infatti, in questo campo dello spettro di frequenza che si annidano gli spike che, per come si innescano, esibiscono piccole ampiezze ad alta frequenza.

Allora, il problema è quello di poter impiegare metodi che consentano di rilevare tali spike e nello stesso tempo di distinguerli tra eventi aleatori ovvero caotici deterministici.

Il primo problema, il rilevamento, può essere affrontato con l'impiego di opportune basi funzionali (trasformate wavelet). Il secondo, invece, è un po' più complesso infatti occorre analizzare molto attentamente la sequenza numerica con metodi afferenti alla teoria del caos deterministico e con strumenti di analisi quali lo spazio delle fasi, l'*embedding*, la dimensione frattale, ecc. Da qui la necessità di integrare questi due stadi del processamento dei dati: trasformata wavelet e teoria del caos.

Osserviamo che i fenomeni transitori e gli eventi rari (singolarità), sono sempre presenti nei segnali monodimensionali. Pertanto, la loro identificazione ha riscosso un interesse via via crescente in molti campi come la biomedicina, la geofisica, il riconoscimento del linguaggio, *pattern recognition*, ecc. Le metodologie proposte in tale ambito hanno fatto storicamente riferimento a modelli globali di segnale, ovvero alle proprietà analitiche di funzioni di una (1-D) o due (2-D) variabili indipendenti scelte a rappresentare tali segnali. Di conseguenza le procedure di identificazione hanno fatto ricorso a problemi di ottimizzazione di funzionali continui su spazi funzionali. Nella presente ricerca viene proposto un metodo basato su un processamento dei dati con wavelet con valori di scala decrescenti scelti in modo da filtrare il rumore ed evidenziare la presenza dei salti. Sulla base quindi di un modello delle discontinuità e della parte regolare del segnale, le posizioni dei salti vengono identificate mediante una procedura ottima di stima che si potrebbe definire di massima verosimiglianza.

Capitolo 1

La Trasformata Wavelet

1.1 Introduzione

La parola Wavelet, ondina, ha origine nei primi anni ottanta ed è dovuta a Morlet e Grossman che infatti usavano la parola francese *ondelette* - "piccola onda". Poco più tardi la parola venne convertita in inglese traducendo "onda" ("onde" in francese) in "wave" - ottenendo Wavelet.

Lo sviluppo delle Wavelet può essere collegato a diverse correnti di pensiero separate, che hanno origine dal lavoro di Haar all'inizio del ventesimo secolo.

Contributi importanti alla teoria delle Wavelet si possono attribuire alla formulazione, da parte di Goupillaud, Grossman e Morlet di quella che ora è nota come CWT (1982), ai lavori preliminari di Strömberg sulle Wavelet discrete (1983), alle Wavelet ortogonali a supporto compatto di Daubechies (1988), alla struttura a multirisoluzione di Mallat (1989), all'interpretazione in tempo-frequenza della CWT da parte di Delprat (1991), alla trasformata Wavelet armonica di Newland e molti altri ancora.

La scomposizione Wavelet, di una funzione, è analoga alla scomposizione effettuata a mezzo Fourier. Pertanto il sistema che meglio si presta a questo confronto, sia per evidenziarne le analogie e sia per metterne in evidenza le specifiche differenze, è quello comunemente denominato sistema base di Haar. Esso consente di descrivere i concetti dell'analisi della multirisoluzione e di generalizzarli ad altri tipi di basi Wavelet.

1.2 Considerazioni sulla trasformata trigonometrica discreta di Fourier

Di seguito verranno considerate soltanto funzioni reali definite nell'intervallo $[-\pi, +\pi]$. In ogni caso, una funzione f definita su un intervallo generico $[a, b]$, può sempre essere ricondotta nell'intervallo $[-\pi, +\pi]$.

Poiché le basi funzionali trigonometriche adoperate, seno e coseno, sono definite in tutto \mathbb{R} ed hanno periodo 2π , la scomposizione a mezzo trasformata discreta di Fourier (DFT) può essere pensata estesa a tutto \mathbb{R} ovvero al solo intervallo $[-\pi, +\pi]$.

Ricordiamo che, una funzione appartiene allo spazio delle funzioni cosiddette quadrato-sommabili $L^2[a, b]$ se

$$\int_a^b f^2(x) dx < \infty$$

ciò significa anche che la funzione è ad energia finita.

In generale, definiamo l'energia associata al segnale $f(x)$ come

$$E_{f(x)} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 d(x)$$

purché l'integrale risulti convergente (cioè $E_{f(x)} < \infty$). La definizione di energia, benché meno intuitiva, viene banalmente estesa anche ai segnali a tempo discreto come segue

$$E_x := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty.$$

Per tutti i segnali *fisici* (cioè effettivamente osservabili), l'integrale (o la sommatoria) che definisce l'energia risulta convergente, poiché ogni segnale proveniente da un sistema fisico reale è ad energia finita.

Per la maggior parte dei problemi pratici è sufficiente che siano soddisfatte le seguenti condizioni, dette "condizioni di Dirichlet":

- ogni funzione f oltre che periodica di periodo T deve essere univoca;
- in ogni periodo T la funzione f deve avere al massimo un numero finito di massimi e minimi ed un numero finito di punti di discontinuità e di punti all'infinito.

La scomposizione a mezzo trasformata di Fourier può essere espressa come una somma di infinite funzioni trascendenti, dilatate/comprese (a frequenza crescente e periodo decrescente) di seno e coseno²

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)) \quad (1.1)$$

per appropriati valori dei coefficienti $\{a_0, a_1, b_1, \dots\}$.

Pertanto, se la funzione è quadrato-sommabile sarà anche

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)) \right) \right]^2 dx = 0. \quad (1.2)$$

A tal proposito osserviamo che è possibile che la scomposizione di Fourier differisca dalla (1.2) nel caso f presenti un numero finito di punti di discontinuità all'infinito ed inoltre che la somma in (1.1) è intesa estesa all'infinito, ma una funzione può essere bene approssimata (in L^2) da una somma finita di termini:

² Nel caso che la funzione sia ad energia finita, cioè $f \in L^2[-\pi, \pi]$.

$$\hat{f} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^J (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)). \quad (1.3)$$

La rappresentazione in serie di Fourier è estremamente utile in L^2 in quanto, ogni funzione, può essere descritta tramite la composizione di funzioni molto semplici: seno e coseno. Questo è dovuto al fatto che il set di funzioni $\{\sin(j \cdot), \cos(j \cdot), j = 1, 2, \dots\}$, al pari della funzione costante $\left(\frac{1}{2} a_0\right)$, forma una "base" (nel senso di quanto verrà definito in seguito) nello spazio in cui la funzione è definita: $L^2[-\pi, \pi]$. Nella Fig. 1.1 che segue è ben visibile come l'incremento dell'indice j produce l'effetto da un lato di incrementare la frequenza delle funzioni base e dall'altro di ridurre il periodo.

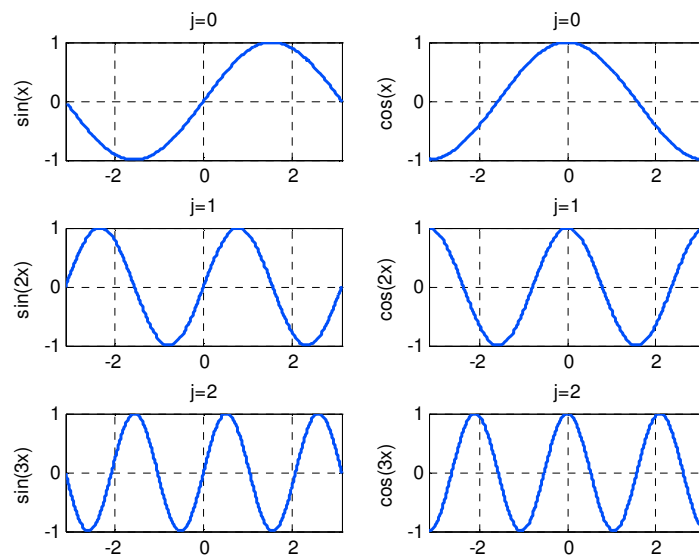


Fig. 1.1 - Andamento delle basi seno e coseno per $j=0, 1, 2$ in $[-\pi, \pi]$

La Fig. 1.2 mostra la capacità di ricostruzione della DFT applicata ad una funzione continua a tratti nell'intervallo $[-\pi, +\pi]$, definita da:

$$f(x) := \begin{cases} x + \pi, & -\pi \leq x \leq -\pi/2 \\ \pi/2, & -\pi/2 < x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases} \quad (1.4)$$

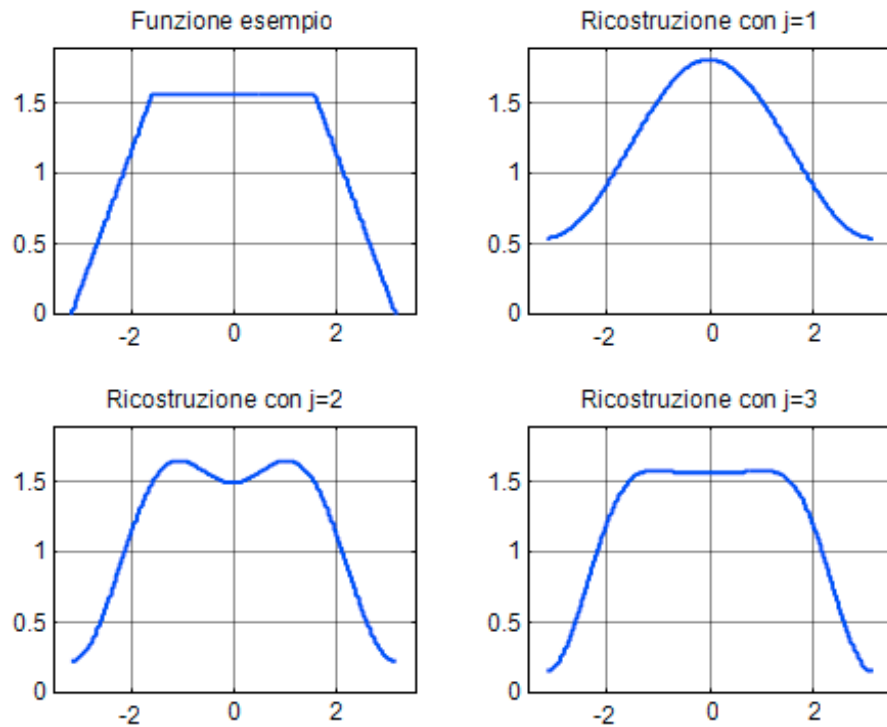


Fig. 1.2 - Un esempio di funzione e sua ricostruzione a mezzo DFT

In Fig. 1.2 è riportato il processo di ricostruzione della (1.4), applicando la (1.3) per $j=1, 2, 3$.

In particolare la Fig. 1.2 mostra la funzione originale e tre ricostruzioni di essa: all'incrementarsi del limite superiore J della somma in (1.3), più termini (armoniche) vengono inclusi nella ricostruzione, così che il risultato della somma fornisce una buona approssimazione della funzione (1.4). Naturalmente, anche questa buona ricostruzione della (1.4) può migliorare se si incrementa J .

Esaminando i coefficienti di Fourier riportati in Tab. 1.1, per prima cosa, notiamo che tutti i coefficienti b_j (corrispondenti alla base seno) sono pari a nullo. La ragione di ciò è che, nell'esempio, la funzione (1.4) è una funzione pari, pertanto il prodotto interno di f con ciascuna delle funzioni dispari (seno) è zero. Continuando l'analisi della Tab. 1.1, notiamo che i coefficienti a_j , relativi al coseno, di pedice pari sono pure uguali a zero (per $j \geq 4$) e che i coefficienti di pedice dispari, dati da $a_j = 2/(j^2\pi)$, decrescono rapidamente appena j cresce.

j	a_j	b_j	j	a_j	b_j
0	$3\pi/4$	-	5	$2/25\pi$	0
1	$2/\pi$	0	6	0	0
2	$-1/\pi$	0	7	$2/49\pi$	0
3	$2/(9\pi)$	0	8	0	0
4	0	0	9	$2/81\pi$	0

Tab. 1.1 - Coefficienti di Fourier per la funzione (1.4)

Ciò sta a significare che molto del contenuto in frequenza, relativo alla funzione di questo esempio, è concentrata a basse frequenze, il che può essere anche visto nella ricostruzione riportata in Fig. 1.2. I coefficienti a_0, a_1, a_2, a_3 , presentano valori relativamente più grandi, cosicché la ricostruzione della funzione (1.4) a mezzo la DFT rappresentata dalla (1.3) al livello $j=3$ appare già molto buona. Incrementando ancora J , l'approssimazione migliorerà sempre, nel senso della (1.2), ma la percentuale di miglioramento diverrà sempre minore.

Notiamo che, pur se la funzione mostrata in Fig. 1.2, presenta delle discontinuità nelle sue derivate, la ricostruzione a mezzo DFT converge su tutti i punti. In pratica questo significa che molte funzioni si possono ricostruire impiegando soltanto un numero limitato di coefficienti (o di componenti armoniche).

I coefficienti a_j e b_j in un certo qual modo è come se "misurassero" il "contenuto in frequenza" della funzione f al livello di "risoluzione" j .

Inoltre, in corrispondenza dei punti di discontinuità, in base anche alla già richiamata condizione di Dirichlet (numero finito di punti di discontinuità), il segnale approssimante presenta delle leggere fluttuazioni (*ripple*) attorno al reale andamento del segnale f .

Per il segnale assegnato, indipendentemente dal numero di armoniche che si usano nella ricostruzione di f , si ottiene comunque un segnale approssimante che ha esattamente un valore massimo (nei pressi della discontinuità) pari a circa $1.09a$, avendo indicato con a l'ampiezza del segnale. Questo fatto è noto come

fenomeno di Gibbs, e la sua presenza fa intuire che la successione di funzioni $\{f_k(x)\}$ non converge uniformemente al segnale $f(x)$.

Ritorniamo al sistema base di Fourier, composto dalle funzioni trascendenti seno e coseno. Esso gode di una importante proprietà: è una base *ortogonale*.

Definizione 1.1 Due funzioni $f_1, f_2 \in L^2[a, b]$ sono dette ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo, $(f_1, f_2) = 0$.

La ortogonalità delle basi di Fourier può essere provata attraverso le proprietà presentate dalle funzioni seno e coseno

$$(\sin(mx), \sin(nx)) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n > 0 \end{cases},$$

$$(\cos(mx) \cos(nx)) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n > 0 \\ 2\pi, & m = n = 0 \end{cases},$$

$$(\sin(mx) \cos(nx)) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0, \forall m, n \geq 0.$$

Segue una seconda definizione più generale.

Definizione 1.2: Una sequenza di funzioni $\{f_j\}$ è detta essere ortonormale se le $\{f_j\}$ sono a coppia ortogonali ed inoltre $\|f_j\| = 1, \forall j$ ⁽³⁾.

Abbiamo verificato che il requisito di ortogonalità è oltremodo soddisfatto con le funzioni seno e coseno.

³ La *norma* in L^2 di una funzione è definita essere: $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int f^2(x) dx}$, cioè nello spazio di Hilbert il prodotto scalare genera la funzione norma.

Inoltre, definendo $g_j(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(jx)$, $j = 1, 2, \dots$ e $h_j(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(jx)$, $j = 1, 2, \dots$ nonché la funzione costante $h_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ su $x \in [-\pi, \pi]$, si rende l'insieme delle funzioni $\{h_0, g_1, h_1, \dots\}$ ortonormali.

Tale normalizzazione ci consente di riscrivere la scomposizione (1.1) a mezzo Fourier come segue

$$f(x) = (f, h_0)h_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} ((f, g_j)g_j(x) + (f, h_j)h_j(x)). \quad (1.5)$$

A tal proposito, un rapporto da considerare è quello che lega la determinazione dei coefficienti $\{a_0, a_1, b_1, \dots\}$ della (1.2) con le espressioni riportate nella (1.5).

Infatti, i coefficienti di Fourier possono essere calcolati attraverso il prodotto interno (o prodotto scalare) della funzione f e delle corrispondenti basi funzionali (individuate dalle funzioni seno e coseno)

$$a_j = \frac{1}{\pi} (f, \cos(j \cdot)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(j \cdot) dx, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} (f, \sin(j \cdot)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(j \cdot) dx, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Dimostriamo le (1.6) e (1.7) nel caso più generale esemplificato in Fig. 1.3, in cui

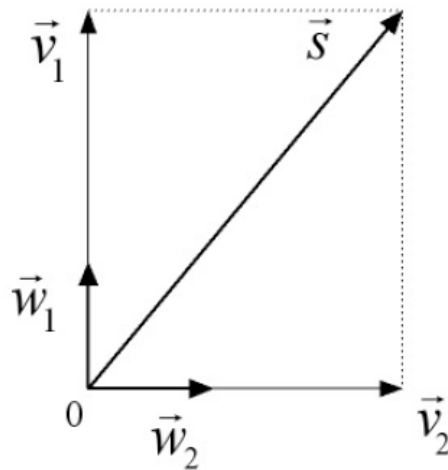


Fig. 1.3 - Scomposizione vettoriale attraverso basi funzionali

è mostrato un vettore \vec{s} che immaginiamo di scomporre nelle sue due componenti ortogonali \vec{v}_1 e \vec{v}_2 tali che $\vec{s} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Assegnati due versori ortonormali \vec{w}_1 e \vec{w}_2 si avrà

$$\vec{s} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = c_1 \vec{w}_1 + c_2 \vec{w}_2$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti opportune da determinare. Verifichiamo che

$$c_1 = (\vec{s}, \vec{w}_1).$$

Infatti

$$(\vec{s}, \vec{w}_1) = (c_1 \vec{w}_1 + c_2 \vec{w}_2, \vec{w}_1) = c_1 (\vec{w}_1, \vec{w}_1) + c_2 (\vec{w}_2, \vec{w}_1).$$

Stante, per ipotesi, la ortonormalità definita per i versori \vec{w}_1 e \vec{w}_2 , il primo prodotto scalare risulterà uguale all'unità, mentre il secondo si annulla.

La importanza della condizione di ortonormalità è stata bene messa in evidenza dalla precedente semplice dimostrazione vettoriale.

Definizione 1.3: Una sequenza di funzioni $\{f_j\}$ è detta essere un sistema ortonormale completo (**CONS**) se:

- $\{f_j\}$ sono a coppie ortogonali;
- $\|f_j\| = 1, \forall j$;
- la funzione ortogonale a ciascuna $\{f_j\}$ è rappresentata dalla funzione zero.

Quest'ultima proposizione la possiamo anche interpretare dicendo che ogni funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ può essere bene approssimata tramite una combinazione lineare delle sue basi (come lo è di fatto la (1.5)).

Oltre alle funzioni basi di Fourier, esistono anche altre funzioni che possono costituire un sistema ortonormale completo, secondo la Definizione 1.3 alcune forme polinomiali di Legendre ed, in particolare, le Wavelet.

1.3 Funzioni a supporto compatto

Sia $x(t)$ una funzione, se consideriamo l'insieme dei punti in cui la funzione è diversa da zero, si chiama supporto di $x(t)$ e lo indichiamo con $\text{supp}(x)$, la chiusura di tale insieme.

Quindi supporto di una funzione x è la chiusura dell'insieme dei punti dove la funzione è diversa da zero.

Se Ω è un insieme aperto allora il supporto è un insieme che deve essere contenuto in Ω , pertanto dovrà essere anche limitato. Ne consegue che poiché deve essere chiuso e limitato lo chiamiamo compatto. La totalità delle funzioni che presentano questa proprietà costituiscono uno spazio vettoriale. Notiamo che nella fascia che circonda il supporto la funzione è identicamente nulla.

Questo insieme è in realtà un sottospazio vettoriale di C^0 che generalmente è indicato con $C_0^0(\Omega)$ dove l'apice indica che la funzione è continua ed il pedice invece ci ricorda, che, in una fascia della frontiera, la funzione è identicamente

nulla. Tali insiemi si indicano anche con $C_c^0(\Omega)$ dove il pedice ci richiama alla memoria che sono funzioni a supporto compatto.

Infine si dimostra che se u, v sono funzioni a supporto compatto allora anche $u + v$ è una funzione a supporto compatto. Ovviamente u, v avranno i loro rispettivi supporti. Si verifica anche che il supporto di $u + v$ è contenuto in uno dei due supporti.

Analogamente moltiplicando per una costante una funzione a supporto compatto otteniamo ancora una funzione a supporto compatto.

Infine ricordiamo che una funzione continua identicamente nulla nell'area al confine con il suo supporto, conserva la continuità anche delle sue derivate. Inoltre essa ha anche le derivate identicamente nulle.

1.4 Il sistema base di Haar

L'estensione dall'analisi di scomposizione a mezzo Fourier a quella a mezzo Wavelet può avvenire attraverso lo studio della base costituita dalla funzione di Haar. Per la sua semplicità analitica, la funzione di Haar⁴ consente un approccio semplice e chiaro alle basi funzionali costituite dalle Wavelet.

Essa è una funzione a supporto compatto⁵, rappresentata in Fig. 2.1, è definibile come di seguito:

$$\psi(x) := \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{negli altri casi} \end{cases} \quad (1.8)$$

4 Tale funzione è stata proposta nel 1909, epoca in cui non era ancora stata introdotta l'analisi Wavelet, dal matematico inglese Alfred Haar.

⁵ Ricordiamo che un sottoinsieme di \mathbb{R}^n è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

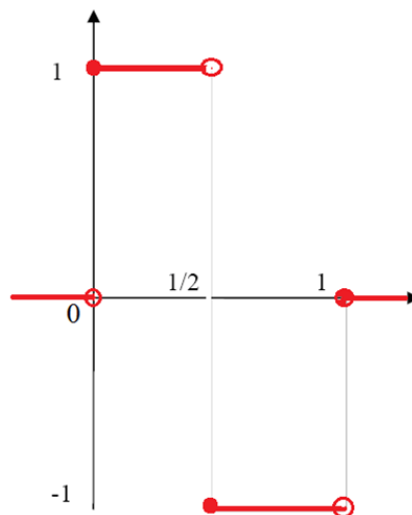


Fig. 1.4 – Funzione Haar

La funzione ψ di Haar definita in precedenza, viene comunemente denominata Wavelet *madre*.

Essa "genera" intere famiglie di Wavelet per mezzo di due operazioni: dilatazione/compressione diadica e traslazione intera. D'ora in poi indicheremo con " j " l'indice di dilatazione/compressione e con " k " l'indice di traslazione.

La funzione (1.8) in forma parametrica, si scrive come

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (1.9)$$

Da questo punto in poi, indicheremo, per brevità, indifferentemente con il termine Wavelet o semplicemente funzione, la funzione di Haar sopra definita.

Analizziamo più in dettaglio il comportamento della (1.9) al variare di uno degli indici. In particolare nella Tab. 1.2 è rappresentato il comportamento della Wavelet al variare del parametro k , fissato $j=0$. Notiamo che se k si incrementa, la Wavelet trasla verso destra, viceversa al decrescere di k la funzione trasla verso sinistra. In tale spostamento, la funzione rimane costante per quanto riguarda la

forma. L'ampiezza del supporto⁶ è pari ad 1. Il supporto invece varia passando da $[0, 1)$ per $k = 0$, a $[1, 2)$ per $k = 1$ e $[-1, 0)$ per $k = -1$.

Il comportamento della funzione è quello di una compressione o di un allungamento se, questa volta, proviamo a mantenere costante il parametro $k = 0$ e poniamo $j = 1$ ovvero $j = -1$. In questi ultimi casi l'ampiezza del supporto passa da 0.5 per $j = 1$ a 2 per $j = -1$. Mentre il supporto varia da $[0, 0.5)$ a $[0, 2)$ rispettivamente per $j = 1$ e $j = -1$. Pertanto una combinazione dei due parametri j e k comporterà sia traslazioni che compressioni o allungamenti della funzione.

Tali proprietà risulteranno molto utili allorquando si tratterà di utilizzare tale funzione come base per scomporre una qualsiasi altra funzione.

Funzione	Supporto	Amp. Supp.	Shape
$\psi_{0,0}(x) = \psi(x)$	$[0, 1)$	1	
$\psi_{0,1}(x) = \psi(x-1)$	$[1, 2)$	1	

⁶ Ricordiamo che supporto di una funzione definita in $X \subseteq \mathbb{R}$ è l'intervallo in cui la funzione è diversa da zero: $\text{supp } f(x) := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

$\psi_{0,-1}(x) = \psi(x+1)$	$[-1, 0)$	1	
$\psi_{1,0}(x) = \sqrt{2}\psi(2x)$	$[0, 0.5)$	0.5	
$\psi_{-1,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{x}{2}\right)$	$[0, 2)$	2	

Tab. 1.2 – Proprietà della funzione di Haar

Passiamo a dimostrare il seguente importante Teorema

Teorema 1.1: L'insieme $\{ \psi_{j,k}, j,k \in \mathbb{Z} \}$ costituisce un sistema ortonormale completo in $L^2(\mathbb{R})$.

Per stabilire il risultato del teorema, è necessario mostrare due condizioni:

1. l'insieme $\{ \psi_{j,k}, j, k \in Z \}$ è ortonormale;
2. ogni funzione $f \in L^2(R)$ può essere approssimata arbitrariamente bene tramite una combinazione lineare delle $\{ \psi_{j,k}, j, k \in Z \}$.

Per prima cosa, notiamo che ogni funzione Haar soddisfa la condizione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(x) dx = 0, \quad \forall j, k \in Z .$$

Per dimostrare la condizione (1), notiamo che il supporto della funzione Wavelet $\psi_{j,k}(x)$ è dato da

$$\text{supp } \psi_{j,k}(x) = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$$

e che l'ampiezza dell'intervallo è pari a 2^{-j} .

Dall'analisi anche della Tab. 2.1, notiamo che due Wavelets aventi lo stesso indice j ma differenti k non avranno mai un supporto che si sovrappone e perciò sono ortogonali. Se due Wavelets hanno differenti indici di dilatazione, diciamo $j' < j$ ma uguali k , allora $\text{supp } \psi_{j,k}$ individua una regione in cui una delle due funzioni Wavelet è costante, così esse sono ancora ortogonali. Dal momento che $\|\psi_{j,k}\| = 1, \forall j, k \in Z$, l'insieme è anche ortonormale.

Per dimostrare la condizione (2), per prima cosa osserviamo che ogni funzione in $L^2(R)$ può essere approssimata per mezzo di una funzione avente il supporto compatto.

Poiché

$$\int_{-2^{J_1}}^{2^{J_1}} f^2(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx$$

per $J_1 \rightarrow \infty$, possiamo approssimare f arbitrariamente bene in $L^2(\mathbb{R})$ scegliendo un intero J_1 opportunamente grande; la prima approssimazione di f è così legata alla restrizione di f sull'intervallo $[-2^{J_1}, 2^{J_1}]$, che può essere denotata come $f|_{[-2^{J_1}, 2^{J_1}]}$. La prima approssimazione può essere ulteriormente approssimata da una funzione che è continua a tratti su tutti gli intervalli del tipo $[l2^{J_0}, (l+1)2^{-J_0})$ dove l'intero J_0 è scelto grande tanto da rendere l'approssimazione buona quanto si vuole.

Questa ricostruzione approssimata di una funzione per mezzo di una funzione continua a tratti è illustrata nella Fig. 1.5. Poiché queste ricostruzioni approssimate possono essere fatte per ogni funzione in $L^2(\mathbb{R})$, restringiamo l'attenzione su tali funzioni definite costanti a tratti con supporto compatto.

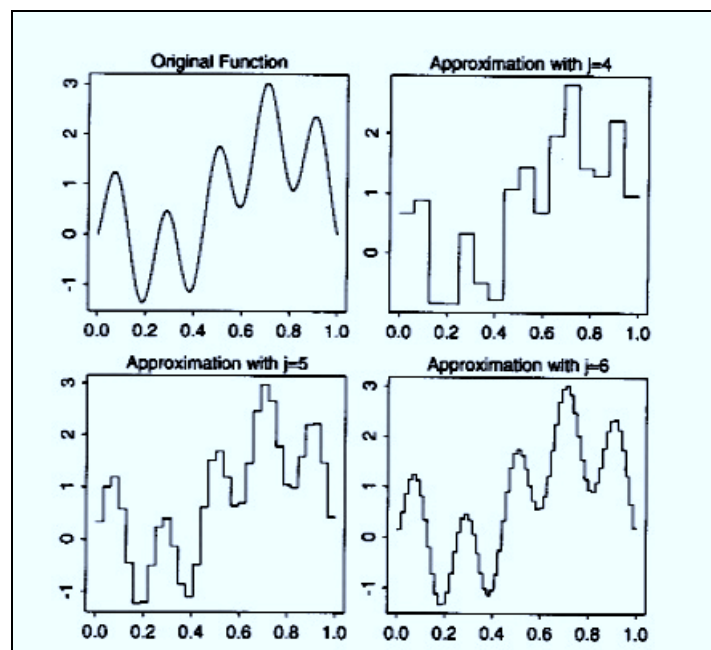


Fig. 1.5 - Ricostruzione approssimata di una funzione per mezzo di una funzione continua a tratti

Omettiamo una dimostrazione rigorosa ed analitica del Teorema, in quanto ciò esula dagli obiettivi di questa relazione.

Sia f^{J_0} una funzione continua a tratti su intervalli di lunghezza 2^{-J_0} . Allora $f_l^{J_0}$ rappresenterà il valore della funzione nell'intervallo $[l2^{-J_0}, (l+1)2^{-J_0}]$

$$f^{J_0}(x) = f_l^{J_0}, \forall x \in [l2^{-J_0}, (l+1)2^{-J_0}].$$

E' possibile scrivere f^{J_0} come somma di due funzioni

$$f^{J_0} = f^{J_0-1} + g^{J_0-1} \tag{1.10}$$

dove f^{J_0-1} rappresenta una approssimazione di f^{J_0} nell'intervallo di lunghezza $2^{-(J_0-1)}$, due volte più grande del primo 2^{-J_0} .

La funzione g^{J_0-1} , definita di *dettaglio*, rappresenta quella parte che deve essere aggiunta a quella di approssimazione f^{J_0-1} per ottenere un affinamento della f^{J_0} . La scomposizione rappresentata dalla (1.10) è riportata nella Fig. 1.6.

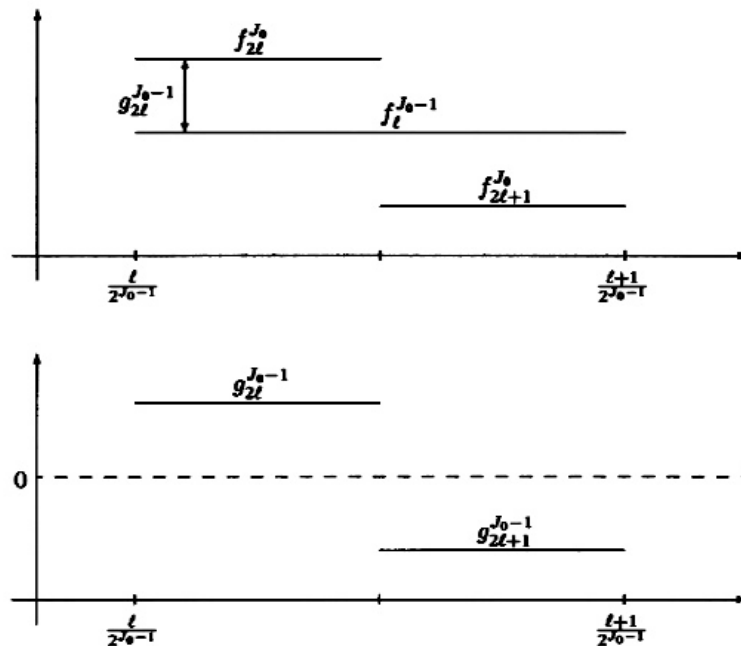


Fig. 1.6 – Scomposizione rappresentata dalla (1.10)

La funzione di approssimazione f^{J_0-1} può a sua volta essere scomposta, ottenendo

$$f^{J_0} = f^{J_0-1} + g^{J_0-1} = f^{J_0-2} + g^{J_0-2} + g^{J_0-1}.$$

Notiamo che f^{J_0-2} ha lo stesso supporto di f^{J_0} ma essa è continua a tratti su un intervallo più ampio: $[l2^{-(j_0-2)}, (l+1)2^{-(j_0-2)}]$.

Un modo di scrivere la (1.10) in forma generalizzata è il seguente

$$f^{J_0} = f^{-J_1} + \sum_{j=-J_1}^{J_0-1} \sum_l d_{j,k} \psi_{j,k} \quad (1.11)$$

dove

$$d_{j,k} = (f^{J_0}, \psi_{j,k}) = 2^{j/2} \int_{k2^j}^{(k+1)2^j} f^{J_0}(x) \psi(2^j x - k) dx. \quad (1.12)$$

La posizione (1.12) tanto può essere scritta in quanto la funzione $\psi(x)$ è una base ortonormale. La (1.11) dimostra la condizione (2) e pertanto il teorema.

Inoltre la (1.11) mette in evidenza una importante proprietà delle Wavelet, vale a dire l'analisi della multirisoluzione, discussa nel prossimo paragrafo.

1.5 Analisi della multirisoluzione

Consideriamo il rapporto: $87/7$. Esso, in notazione decimale, può essere riscritto come: 12.4285714...

Possiamo anche rappresentare il valore della frazione $87/7$ come: 10; 12; 12.4; 12.42..., dipendendo la scelta soltanto dal livello di accuratezza desiderato. La risoluzione tra 10 e 12 presenta una differenza di 2; tra 12 e 12.4 la differenza è di 0.2; tra 12.40 e 12.42 essa scende a 0.02 e così di seguito. Al pari della

Wavelet in cui il fattore di risoluzione varia di un fattore 2, nella rappresentazione della frazione $87/7$ la risoluzione varia di un fattore 10. Più si scende nel livello di dettaglio e minore è l'approssimazione. Viceversa se volessimo approssimare la frazione $87/7$ di un fattore 100, perderemmo di vista il valore reale della frazione. Pertanto possiamo scrivere il valore della frazione $87/7$ come $87/7 = 12 + \varepsilon$ (avendo indicato con ε l'errore di approssimazione) o con notazione simbolica afferente alla potenza in base 10

$$87/7 = 12 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4} + \dots$$

ovvero, con ovvio significato dei simboli, come

$$P^3 \frac{87}{7} = P^0 \frac{87}{7} + P^{-1} \frac{87}{7} + P^{-2} \frac{87}{7} + P^{-3} \frac{87}{7} + \dots \quad (1.13)$$

cioè

$$P^3 \frac{87}{7} = 12 + 0.4 + 0.02 + 0.008 \Rightarrow P^3 = 12.428.$$

Così come il nostro sistema di numerazione decimale permette di approssimare qualsiasi numero senza ridondanza e con la precisione desiderata, così l'analisi in multirisoluzione può fare lo stesso per un qualsiasi segnale, purché siano soddisfatte alcune condizioni.

Per rendere questo argomento più rigoroso, definiamo una funzione nello spazio V_j , $j \in \mathbb{Z}$, tale che

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ è continua a tratti su } \left[k^{2^{-j}}, (k+1)2^{-j}, \quad k \in \mathbb{Z} \right] \right\}.$$

Nella dimostrazione del Teorema 1.1, si è visto che ogni funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ può essere approssimata da una funzione continua a tratti (Haar) e che, come j cresce, migliora la sua approssimazione in L^2 .

Questa approssimazione può essere scritta, secondo la (1.10), come somma della approssimazione *grossolana* f^{j-1} ed una di *dettaglio* g^{j-1} . All'incrementarsi dell'indice j , la corrispondente ricostruzione passa da grossolana a fine. Inoltre, ciascuna funzione di dettaglio, g^j , può essere scritta come una combinazione lineare delle corrispondenti funzioni $\psi_{j,k}$.

Al pari della (1.13), usando la notazione $P^j f$ per denotare la "proiezione" di una funzione f sullo spazio V_j si ha:

$$P^j f = P^{j-1} + g^{j-1}. \quad (1.14)$$

La funzione di dettaglio g^{j-1} rappresenta il "residuo" (o errore ε) tra due approssimazioni successive. Esso può essere scritto in termini di wavelet (dilate e traslate) ponendo

$$P^j f = P^{j-1} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle \psi_{j-1,k}. \quad (1.15)$$

dove $\langle \cdot \rangle$ rappresenta il prodotto scalare tra funzioni discrete.

La sequenza degli spazi $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ rappresenta un insieme di sottospazi di risoluzione crescente (al crescere di j). Ciascun sottospazio V_j consiste di funzioni che sono continue a tratti sugli intervalli di lunghezza esattamente doppia di quelli di V_{j-1} (e metà della lunghezza per V_{j+1}).

Questa sequenza di sottospazi possiede le seguenti proprietà:

1. $\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots$
2. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \bar{V}_j = L^2(\mathbb{R})$

3. $f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j+1}$
4. $f \in V_0 \Rightarrow f(\cdot - k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}.$

In particolare, la terza proprietà mette in evidenza che ciascuno spazio V_j è una versione "scalata" dello spazio originale V_0 .

Il concetto dell'analisi in multirisoluzione ci porta ad affermare che allorquando ci sia una sequenza di spazi V_j che soddisfa le quattro proprietà precedenti allora

5. Esiste una funzione $\varphi \in V_0$ tale che l'insieme

$$\{\varphi_{0,k} = \varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$$

costituisce una base ortonormale per V_0 . Pertanto esiste una funzione φ tale che la (1.12) è vera. Nel caso della funzione di Haar considerata è chiaro che si può scegliere per φ

$$\varphi(x) = I_{[0,1)}(x) \tag{1.16}$$

dove $I_A(\cdot)$ è la funzione indicatore dell'insieme A. La funzione φ è detta funzione di *scaling* poiché essa dilata e trasla le basi ortonormali per tutti gli spazi V_j , che sono semplicemente versioni scalate di V_0 .

Poiché faremo largo uso di questa proprietà nel seguito, occorre una più rigorosa definizione

Definizione 1.4: Sottospazi chiusi $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ che soddisfano le proprietà (1)–(5) sopra richiamate formano una analisi multirisoluzione (**MRA**) in $L^2(\mathbb{R})$.

Se una funzione φ può essere usata per formare spazi

$$V_j = \text{span}\{\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$$

tale che $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ costituisce una MRA, allora la funzione (scaling) φ è detta generare una analisi multirisoluzione.

1.6 La rappresentazione Wavelet

Nell'esempio della funzione di Haar, è chiaro che la sequenza dei sottospazi $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ generata dalla funzione φ definita in (1.16) soddisfa le proprietà (1)–(5) riportate in precedenza.

La funzione Haar definita in (1.16), al pari della ψ , può essere espressa in forma parametrica come

$$\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}. \quad (1.17)$$

Essa definisce uno spazio V_j , e, a sua volta, risulta essere uno span ⁷, con l'insieme di funzioni $\{\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$, dello spazio V_j .

Così come fatto per la funzione ψ , notiamo che la (1.18), rappresentata in Fig. 1.7, è definita come segue

$$\varphi_{j,k}(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x \notin [0,1) \end{cases}. \quad (1.18)$$

⁷ Se ogni vettore in uno spazio vettoriale V può essere scritto come combinazione lineare di un insieme di vettori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, allora si dirà che questi vettori costituiscono uno span di V . Inoltre se l'insieme di vettori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ oltre ad essere uno span di V , risultano anche linearmente indipendenti, allora costituiranno una base di V .

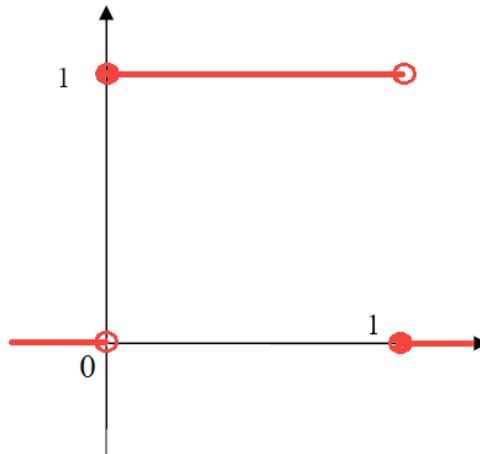


Fig. 1.7 - La funzione Haar di scala

Il supporto di φ è dato da

$$\text{supp } \varphi_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}),$$

mentre la sua ampiezza è data da

$$\text{amp supp } \varphi_{j,k} = 2^{-j}.$$

Nella Tab. 1.3 che segue sono riepilogate le caratteristiche delle due funzioni: ψ, φ .

$\psi(x) := \begin{cases} +1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & x \in [0, 1) \end{cases}$	$\varphi(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & x \notin [0, 1) \end{cases}$
$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} + (2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}$	$\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}$
$\text{supp } \psi_{j,k}(x) = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$	$\text{supp } \varphi_{j,k}(x) = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$
$\text{amp supp } \psi_{j,k} = 2^{-j}$	$\text{amp supp } \varphi_{j,k} = 2^{-j}$

Tab. 1.3 - Caratteristiche funzioni ψ, φ

Per completezza si riporta di seguito (Fig. 1.8 e Tab. 1.4) il comportamento di $\varphi_{j,k}$ al variare degli indici j,k .

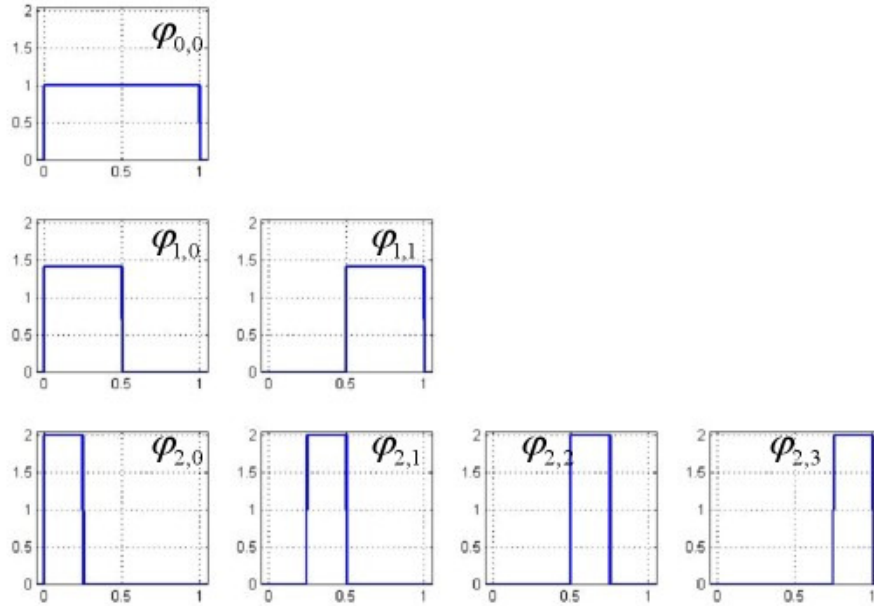


Fig. 1.8 - Proprietà della funzione di Haar

Funzione	Supporto	Ampiezza Supporto	Ampiezza Funzione
$\varphi_{0,0}(x)$	$[0,1)$	1	1
$\varphi_{1,0}(x)$	$[0,0.5)$	0.5	$\sqrt{2}$
$\varphi_{1,1}(x)$	$[0.5,1)$	0.5	$\sqrt{2}$
$\varphi_{2,0}(x)$	$[0,0.25)$	0.25	2
$\varphi_{2,1}(x)$	$[0.25,0.5)$	0.25	2
$\varphi_{2,2}(x)$	$[0.5,0.75)$	0.25	2
$\varphi_{2,3}(x)$	$[0.75,1)$	0.25	2

Tab. 1.4

Come è facilmente rilevabile la funzione φ "copre" lo spazio relativo a metà supporto della funzione ψ , dove essa è definita non negativa, più lo spazio di sinistra o di destra a seconda del valore assunto dall'indice j .

Si è già stabilito che le funzioni $\psi_{j,k}$ sono mutuamente ortogonali. Così che è possibile definire uno "spazio di dettaglio" per il quale l'insieme delle Wavelet con singolo indice di dilatazione formi una base ortonormale

$$W_j = \text{span}\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Si può dimostrare che la funzione di scaling e la Wavelet (dilatazioni e traslazioni) sono ortogonali.

Possiamo, pertanto, ritenere che la proiezione di una funzione in $L^2(\mathbb{R})$, su uno spazio vettoriale V_j , può essere fatta semplicemente utilizzando la funzione di scaling definita in precedenza, opportunamente scalata e traslata, cioè

$$P^j f = \sum_k c_{j,k} \varphi_{j,k}. \quad (1.19)$$

Poiché, l'insieme $\{\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$, è una base ortonormale per V_j , i coefficienti della funzione di scaling nella (1.19) possono essere calcolati tramite la

$$c_{j,k} = (f, \varphi_{j,k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_{j,k}(x) d(x). \quad (1.20)$$

Infine, la relazione base, che consente di integrare i concetti su esposti in una unica relazione sia vettoriale che funzionale, è la seguente

$$f(x) = \sum_k c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x), \{k \in \mathbb{Z}, j_0 = 0, j_1 = \text{int}(\log_2 N)\} \quad (1.21)$$

nella quale N rappresenta il numero di punti costituenti la sequenza del segnale.

1.7 Obiettivi dell'analisi multirisoluzione

Obiettivo delle Wavelet e dell'analisi multirisoluzione nel campo dell'analisi dei segnali è quello di ottenere una rappresentazione di una funzione (segnale) in una sintesi che comunque preservi le sue caratteristiche salienti, utilizzando un insieme limitato di coefficienti.

Una Wavelet (la quale opportunamente compressa/dilatata, forma la base per spazi in cui il fine è lo studio del *dettaglio* del segnale) deve essere localizzata nel tempo, nel senso che $\psi(x) \rightarrow 0$ rapidamente appena $|x|$ cresce. La Wavelet dovrebbe anche oscillare intorno allo zero in modo tale che $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) d(x) = 0$ ed i primi m momenti siano anche pari a zero,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x) d(x) = 0, k = 1, \dots, m-1.$$

La proprietà oscillatoria rende la funzione un'onda, ma poiché è localizzata, essa diviene una Wavelet (piccola onda limitata nel tempo).

Così una Wavelet madre ψ , quando è compressa, è molto più capace ad individuare dettagli "fini" del segnale. Si noti che poiché $\psi_{j,k}(x)$ è localizzata intorno al punto $x = 2^{-j}k$ ne consegue che il coefficiente Wavelet $d_{j,k} = (f, \psi_{j,k})$ misura l'ammontare della fluttuazione intorno al punto $x = 2^{-j}k$, con una frequenza determinata dall'indice j . In una applicazione di *signal processing*, è tipico partire da un basso livello di approssimazione per poi raggiungere un alto livello di scomposizione della Wavelet.

Un primo approccio alla Trasformata Wavelet può essere fatto considerando un vettore di soli quattro elementi in modo da focalizzare l'attenzione su quelle che sono le funzioni $\phi_{j,k}$ ⁸ e $\psi_{j,k}$.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = [-5, -1, 1, 11]$$

mostrata in Fig. 1.9.

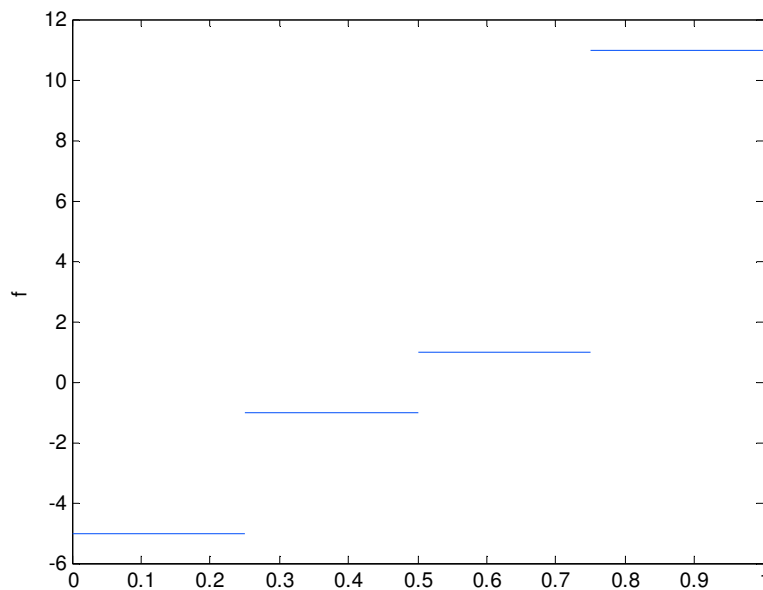


Fig. 1.9

Ricordando che le funzioni $\phi_{j,k}$ fissato j e le $\psi_{j,k}$ sono tutte linearmente indipendenti, possiamo ricostruire il segnale prelevando solo quattro di queste funzioni, sicuri che rappresentano una base.

Scegliamo una primo *set* di basi funzionali:

$$f(x) = c_1\phi_{00} + c_2\psi_{00} + c_3\psi_{10} + c_4\psi_{11}$$

si ottiene banalmente la base B in forma matriciale

⁸ Per ragioni tipografiche, conveniamo di indicare da ora in poi la funzione di scaling con il simbolo ϕ

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Andiamo quindi alla ricerca di quelli che sono i coefficienti della combinazione lineare scritta prima, con un'operazione matriciale

$$B^{-1} \times f(x)' = 1.5 \quad -4.5 \quad -2 \quad -5,$$

avendo indicato con l'apice il simbolo di trasposizione. Osserviamo che questa non è l'unica base di 4 vettori linearmente indipendenti che possiamo utilizzare per ricostruire il segnale origine.

Un'altra base potrebbe essere, ad esempio

$$f(x) = c_1\phi_{10} + c_2\phi_{11} + c_3\psi_{10} + c_4\psi_{11}$$

anche in questo caso la base V in forma matriciale è data da

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

I nuovi coefficienti della combinazione lineare sono dati da

$$V^{-1} \times f(x)' = -3 \quad 6 \quad -2 \quad -5.$$

Infine possiamo prendere in considerazione la cosiddetta base banale o canonica

$$f(x) = c_1\phi_{20} + c_2\phi_{21} + c_3\phi_{22} + c_4\phi_{23}$$

dove la forma matriciale della base A è una matrice diagonale unitaria

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

I coefficienti banalmente coincidono con gli elementi del vettore origine

$$A^{-1} \times f(x)' = -5 \quad -1 \quad 1 \quad 11.$$

Proviamo adesso a cercare quelle che sono le relazioni che possono leggere i coefficienti delle combinazioni lineari viste, in modo da evidenziare quelle che sono le caratteristiche tra le funzioni

$$\begin{aligned} & -5(\phi_{20}) \quad -1(\phi_{21}) \quad +1(\phi_{22}) \quad +11(\phi_{23}) \\ & -3(\phi_{10}) \quad +6(\phi_{11}) \quad -2(\psi_{10}) \quad -5(\psi_{11}). \\ & 1.5(\phi_{00}) - 4.5(\psi_{00}) \quad -2(\psi_{10}) \quad -5(\psi_{11}) \end{aligned}$$

Notiamo che i coefficienti evidenziati in rosso sono legati tra di loro, e più precisamente uno è media degli altri due

$$\frac{-5-1}{2} = -3$$

Di conseguenza possiamo dire che anche le funzioni sono correlate. In particolare la ϕ_{10} genera la ϕ_{20} e la ϕ_{21} . Questa caratteristica non è casuale, la ritroviamo prendendo in considerazione anche altri coefficienti

$$\begin{array}{cccc} -5(\phi_{20}) & -1(\phi_{21}) & +1(\phi_{22}) & +11(\phi_{23}) \\ -3(\phi_{10}) & +6(\phi_{11}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) \\ 1.5(\phi_{00}) - 4.5(\psi_{00}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) & \end{array}$$

$$\frac{1+11}{2} = 6.$$

Anche qui trovata la relazione tra i coefficienti possiamo dedurre che la ϕ_{11} genera la ϕ_{22} e la ϕ_{23} .

A sua volta la ϕ_{00} genererà la ϕ_{10} e la ϕ_{11} , infatti

$$\begin{array}{cccc} -5(\phi_{20}) & -1(\phi_{21}) & +1(\phi_{22}) & +11(\phi_{23}) \\ -3(\phi_{10}) & +6(\phi_{11}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) \\ 1.5(\phi_{00}) - 4.5(\psi_{00}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) & \end{array}$$

$$\frac{-3+6}{2} = 1.5.$$

Rappresentiamo quanto appena dedotto con uno schema piramidale (Fig. 1.10).

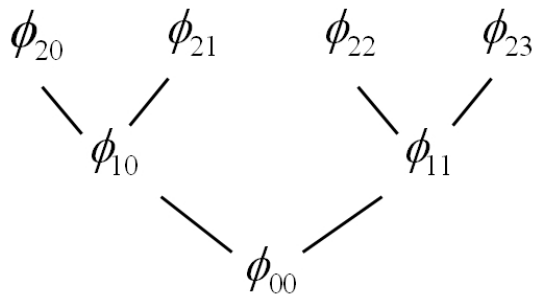


Fig. 1.10 - Struttura piramidale della funzione ϕ

Andiamo alla ricerca delle relazioni che intercorrono tra le $\psi_{j,k}$ e le $\phi_{j,k}$ sempre attraverso i coefficienti. Il legame che si osserva è la differenza dei coefficienti:

$$\begin{array}{cccc} -5(\phi_{20}) & -1(\phi_{21}) & +1(\phi_{22}) & +11(\phi_{23}) \\ -3(\phi_{10}) & +6(\phi_{11}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) \\ 1.5(\phi_{00}) - 4.5(\psi_{00}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) & \end{array}$$

$$-5 - (-3) = -2$$

Di conseguenza possiamo affermare che anche le funzioni ϕ_{10} e ϕ_{20} sono correlate alla ψ_{10} . Cambiando i coefficienti ritroviamo la medesima proprietà per altre funzioni:

$$\begin{array}{cccc} -5(\phi_{20}) & -1(\phi_{21}) & +1(\phi_{22}) & +11(\phi_{23}) \\ -3(\phi_{10}) & +6(\phi_{11}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) \\ 1.5(\phi_{00}) - 4.5(\psi_{00}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) & \end{array}$$

$$1 - 6 = -5$$

In particolare la ψ_{11} è generata dalle ϕ_{11} e ϕ_{22} e allo stesso modo notiamo che la ψ_{00} è generata dalle ϕ_{00} e ϕ_{10}

$$\begin{array}{cccc} -5(\phi_{20}) & -1(\phi_{21}) & +1(\phi_{22}) & +11(\phi_{23}) \\ -3(\phi_{10}) & +6(\phi_{11}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) \\ 1.5(\phi_{00}) - 4.5(\psi_{00}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) & \end{array}$$

$$-3 - 1.5 = -4.5.$$

Concludendo le relazioni viste tra le $\psi_{j,k}$ e le $\phi_{j,k}$ mostrano che un qualunque segnale può essere completamente ricostruito sommando una funzione di approssimazione al livello j e tutte le funzioni di dettaglio fino al j massimo. Quanto detto è evidente dalla Fig. 1.11.

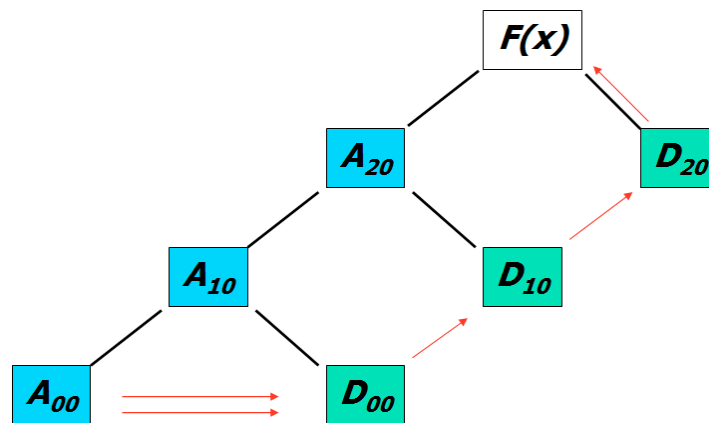


Fig. 1.11 - Modello di ricostruzione funzionale

1.8 Smoother Wavelet Bases

Fino ad ora si è trattato soltanto della funzione Wavelet Haar. L'estensione ad altre basi Wavelet consiste principalmente nel fatto di cambiare le funzioni ϕ e ψ , fermo restando i principi fondamentali esposti in precedenza.

Negli ultimi anni sono state sviluppate molte famiglie di basi ortonormali: Stromberg (1982), Meyer (1985), Battle (1987) e Lemarié (1988).

Ingrid Daubechies introdusse nel 1988 una nuova famiglia di Wavelet che non soltanto sono ortonormali, ma hanno anche il supporto compatto, cioè si annullano al di fuori del dominio di definizione. Questa nuova famiglia determinò un profondo impatto e queste Wavelet sono impiegate intensivamente nella pratica del processamento dei segnali. Alcuni componenti di questa famiglia sono rappresentati nella Fig. 1.12

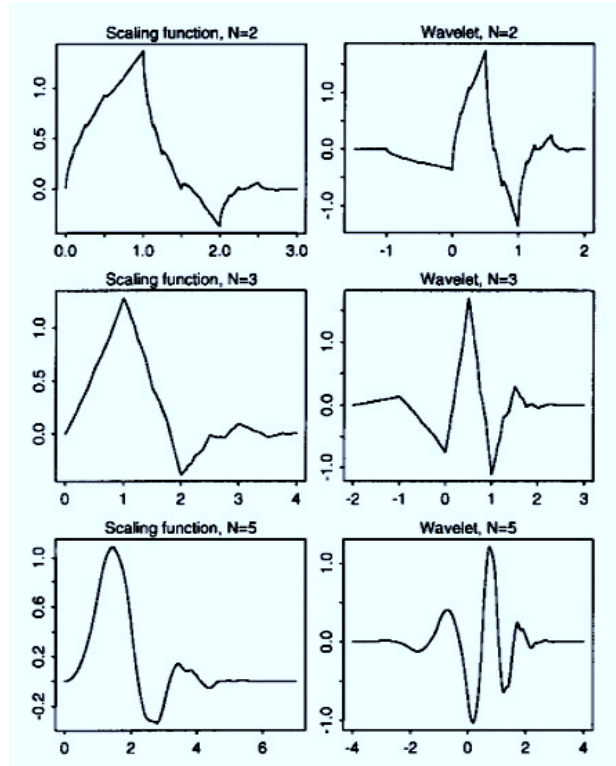


Fig. 1.12 - Tre esempi di funzioni scaling e Wavelet del tipo Daubechies, definite su supporti compatti

Ciascuna di esse è individuata da un intero N ; la oscillazione delle funzioni cresce al crescere di N , come pure la loro continuità.

Con una tale varietà di famiglia di Wavelet c'è da chiedersi quale è da preferire nei problemi di *signal processing*. In molti casi, nelle applicazioni statistiche, una importante qualità che una base Wavelet deve possedere è quella della ortonormalità che, spesso, deve essere rappresentata in un intervallo compatto $[0,1]$.

In applicazioni pratiche, la scelta della famiglia di Wavelet e dell'indice N non è così importante, provato che la corrispondente base è ortonormale.

Negli esempi che seguono sono state impiegate, per la ricostruzione della funzione, definita in (1.4), famiglie Daubechies, con $N=5$. I risultati sono mostrati nella Fig. 1.13.

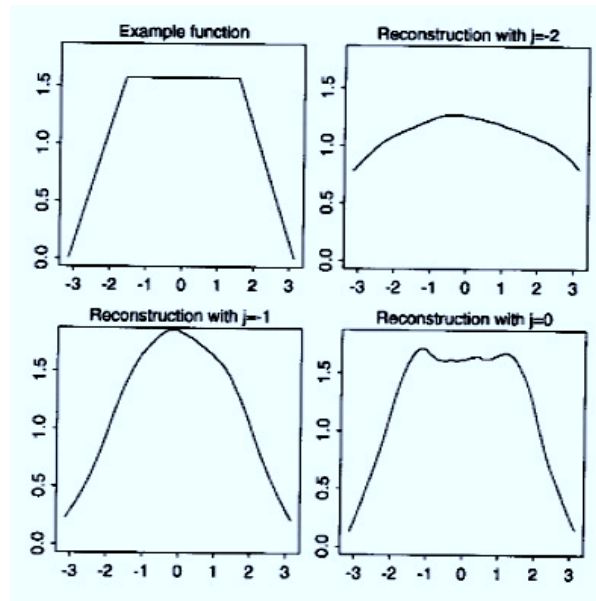


Fig. 1.13 - Un esempio di funzione e di rappresentazione Wavelet impiegando una Daubechies con $N=5$

I coefficienti della funzione di *scaling* (calcolati per integrazione numerica) sono riportati nella Tab. 1.5.

k	j=-2	j=-1	j=0
7	0	0	0.0078
6	0	0.0006	0.0243
5	0.0214	0.0006	0.0749
4	0.1226	0.0296	0.3756
3	0.4581	0.1030	1.3702
2	1.5109	1.8404	1.6069
1	2.4652	2.5179	1.5847
0	0.1536	0.8906	1.6640
1	0	0.0155	0.9159
2	0	0	0.0950

Tab. 1.5 - Coefficienti della funzione di *scaling* per una Daubechies con $N=5$

Si noti che l'effettivo supporto della Wavelet Daubechies $N=5$ è approssimativamente $[0, 5]$ (il supporto teorico è, invece, $[0, 9]$, ma la funzione è molto vicina allo zero al di fuori di $[0, 5]$). Pertanto ci sono circa 10 funzioni di

scaling non dilatate ($j=0$) con un effettivo supporto in sovrapposizione con $[-\pi, \pi]$, il supporto della funzione esempio, e di conseguenza 10 coefficienti a questo livello.

Comunque, soltanto una parte di questi coefficienti sono grandi abbastanza da partecipare alla ricostruzione. Ovviamente, simili considerazioni possono essere fatte se ci si riferisce ai due livelli inferiori.

Sia ora $x(t)$ una funzione continua definita in uno spazio V_0 cioè $x(t) \in V_0, t \in R$ (Fig. 1.14).

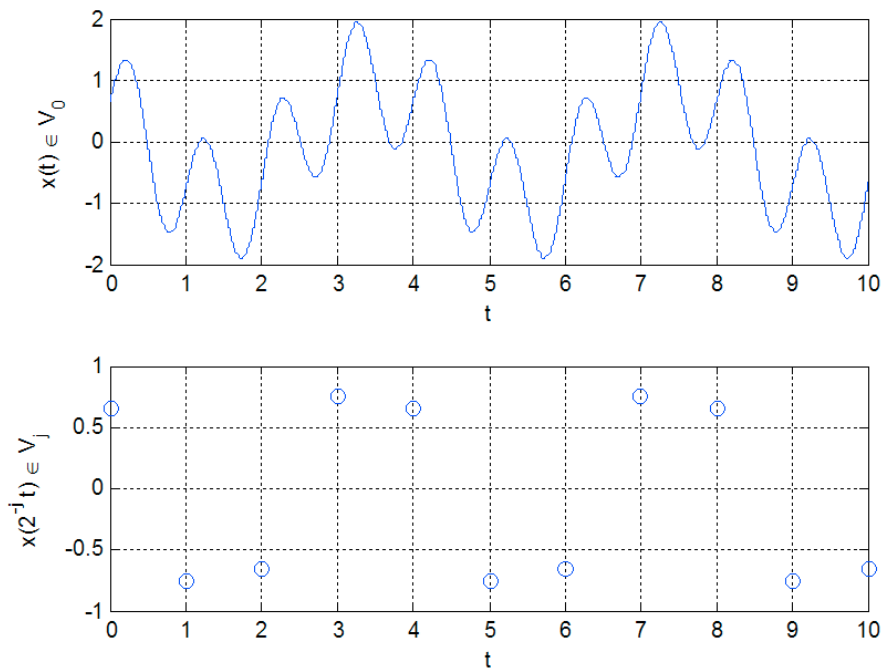


Fig. 1.14

La funzione $x(2^{-j} t), j \in Z^+$ è una funzione continua a tratti in intervalli di ampiezza 2^{-j} . Essa pertanto appartiene ad uno spazio V_j delle funzioni continue a tratti. Se $j > 0$ allora $V_j \subset V_0$. Nello spazio V_0 supponiamo di definire una base funzionale

$$\phi(t) \in V_0 \rightarrow \{\phi(t-k)\}_{k \in Z}.$$

Una tale funzione è detta anche di traslazione.

Essendo V_j un sottospazio di V_0 esso è anche chiamato sottospazio approssimazione di V_0 .

Una sua possibile base funzionale è data da

$$\left\{ 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}t - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

una tale funzione può traslare variando k e può scalare attraverso j .

Ebbene, stante la (1.10), dati i due spazi di approssimazione V_j, V_{j-1} , esiste un sottospazio W_j chiamato di dettaglio tale che

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j.$$

Anche nello spazio di dettaglio W_j possiamo definire una base funzionale che possa traslare e scalare del tipo

$$\left\{ 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

dove $\{\psi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sia una base funzionale dello spazio di approssimazione W_0 .

Abbiamo detto che la funzione $x(2^{-j}t)$ è una funzione continua a tratti in uno spazio V_j . Essa opera una trasformazione di una qualunque funzione continua $x(t) \in V_0$ "lavorando" sulla variabile t . Possiamo da ora in poi individuare nella variabile t , la costante temporale. Nella Fig. 1.15 che segue è rappresentato l'effetto dell'operazione di discretizzazione temporale che si ottiene ogniqualvolta si effettua una misurazione su di un sistema dinamico attraverso

qualsiasi dispositivo. Più "denso" è il tasso di campionamento (*sampling rate*) più informazioni riusciamo a raccogliere nell'unità di tempo⁹.

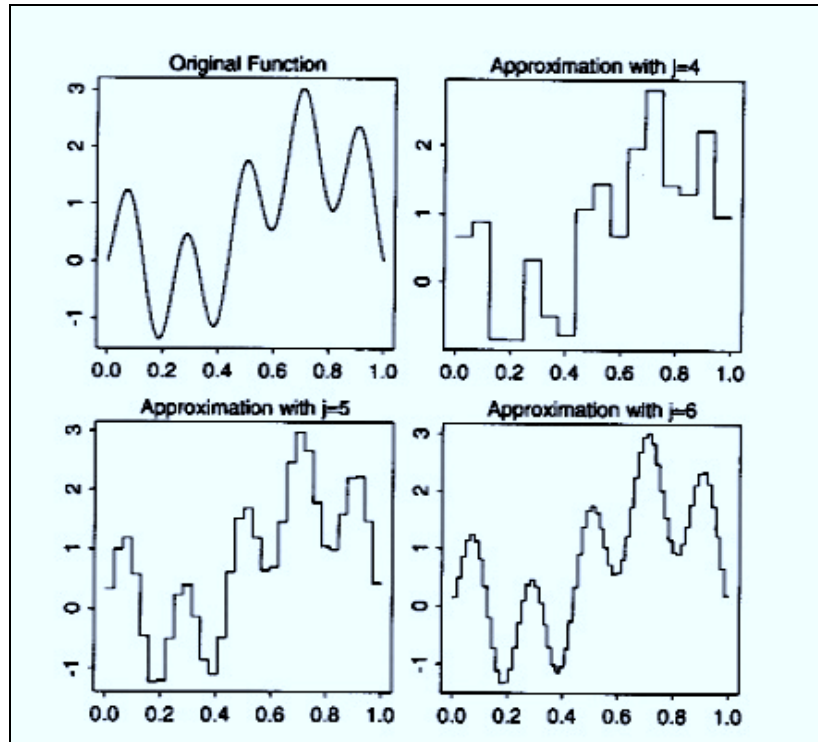


Fig. 1.15

1.9 Equazioni alle differenze

Per la soluzione delle equazioni differenziali si fa ricorso, come è ben noto, a metodi numerici quali ad esempio, quello di Runge-Kutta, di Simpson, Adams, ecc.

Qui, vogliamo presentare il metodo più semplice, quello di Eulero, per meglio evidenziare le caratteristiche possedute dagli altri metodi più complessi e su quali principi essi si basano.

Premettiamo che una corretta rappresentazione di una qualunque funzione/segnale sia quella riportata nella Fig. 1.15 precedente, che bene mette in evidenza l'ipotesi di costanza a tratti della funzione/segnali campionati. D'altronde tale ipotesi è anche alla base del metodo di Eulero per quanto attiene la soluzione numerica di equazioni differenziali. L'approssimazione di cui sopra

⁹ Nel rispetto del Teorema del campionamento di Nyquist-Shannon.

consiste nel ritenere la funzione/segnale costante nell'intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$.

Senza perdere in generalità si consideri la seguente equazione differenziale lineare ordinaria

$$\frac{dy}{dt} = x(t)y(t)$$

con $x(t)$ funzione assegnata o comunque nota. Ebbene dalla definizione di derivata come è noto

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}. \quad (1.22)$$

Se ipotizziamo un incremento di tempo molto piccolo allora la (1.22) può essere approssimata come

$$\frac{dy}{dt} \stackrel{\Delta t \rightarrow 0}{\approx} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}. \quad (1.23)$$

Se sostituiamo la (1.23) nella (1.22) otteniamo

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = x(t)y(t)$$

cioè

$$y(t + \Delta t) = y(t) + y(t)x(t)\Delta t. \quad (1.24)$$

La (1.24), che costituisce una equazione alle differenze, bene mette in evidenza il limite di tale tecnica di risoluzione di un sistema di equazioni differenziali: i metodi numerici presentano errori grandi quando vengono applicati

per determinare soluzioni che cambiano rapidamente (ad esempio per la presenza di spike)¹⁰.

Ora, non v'è dubbio che una ipotesi forte che dobbiamo fare quando ricorriamo a questo metodo di risoluzione è che il secondo membro della (1.24) resti costante nell'intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$. Pertanto i metodi numerici applicati con un passo di integrazione piuttosto grossolano portano ineluttabilmente ad errori gravi allorché le soluzioni cambiano molto rapidamente. Infine facciamo notare che la (1.24) può essere scritta anche in una forma iterativa che la rende più simile a quelle che abitualmente si usano in questi tipi di problemi:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + f[t_k, y(t_k)] \Delta t \quad (1.25)$$

dove abbiamo posto

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t. \quad (1.26)$$

Per meglio evidenziare quanto testé affermato e soprattutto per meglio mostrare le capacità intrinseche di una base funzionale della famiglia delle wavelet, ci sembra utile riportare il caso rappresentato da un sistema come in Fig. 1.16, costituito da una massa variabile nel tempo, con legge predefinita, collegata ad una molla di rigidità nota.

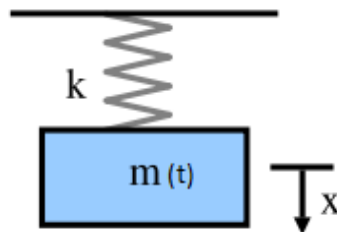


Fig. 1.16

¹⁰ Per tale ragione è utile campionare con tassi dell'ordine di 10^4 Hz, possibilmente con potenze di 2.

Il sistema è descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} m(t) \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \\ x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

dove la legge di variazione della massa è:

$$m(t) = 1 - a \left[t - b \left(|t - 3.5|^{0.2} + 3.5^{0.2} \right) \right], \quad (1.27)$$

quando $0 < a < 1$ e $b = 0$, $m(t)$ risulta una legge lineare decrescente.

Per risolvere la seguente equazione differenziale

$$m(t) \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

poniamo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = z(t) = v(t) \\ \dot{z}(t) = -\frac{k}{m(t)} x(t) \end{cases}$$

dove $v(t)$ è una velocità.

Si ha quindi che

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = v(t)$$

da cui

$$x(t + \Delta t) - x(t) = v(t) \Delta t$$

Discretizzandola e ponendola sotto forma iterativa, abbiamo

$$x(k + 1) = x(k) + v(k) \Delta t$$

Analogamente

$$\dot{z}(t) = -\frac{k}{m(t)} x(t)$$

dove $z(t)$ è anche esso una velocità, per cui

$$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt} z \approx \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = -\frac{k}{m(t)} x(t)$$

da cui si ottiene

$$z(t + \Delta t) - z(t) = -\frac{k}{m(t)} x(t) \Delta t$$

Discretizzandola

$$z(k + 1) - z(k) = -\frac{k}{m(k)} x(k) \Delta t$$

per cui

$$z(k + 1) = z(k) - \frac{k}{m(k)} x(k) \Delta t \quad (1.28)$$

A tal punto siamo in grado di tracciare la legge del moto della massa variabile (Fig. 1.17)

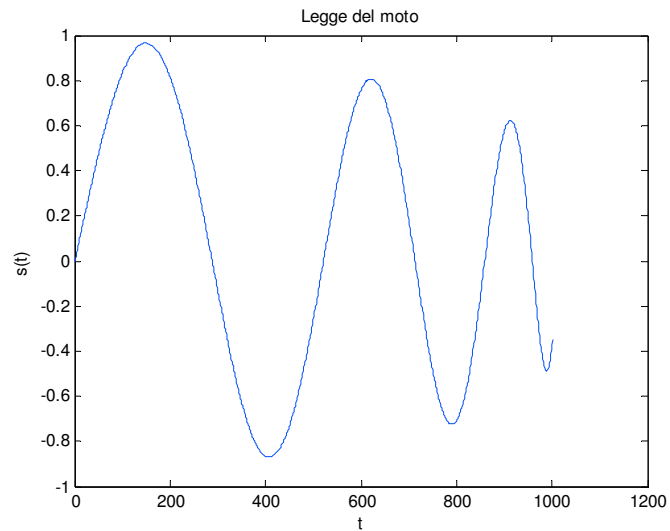


Fig. 1.17

Effettivamente questa è la legge del moto che ci aspettiamo di ritrovare. C'è, però, un problema: la legge della variazione della massa è illustrata in Fig. 1.18

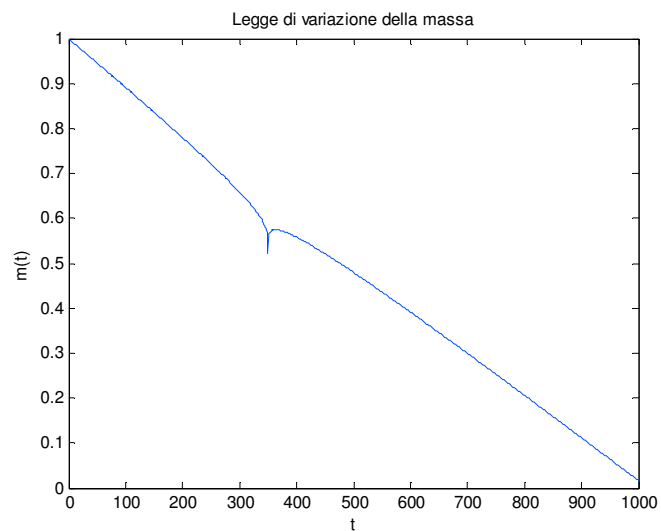


Fig. 1.18

E' ben evidente la presenza di uno spike nell'intervallo temporale $[300,400]$. Evidentemente l'ipotesi di costanza euleriana in questo caso non è

applicabile. Il problema potrebbe essere risolto ricorrendo ad un rapporto ottimo tra tasso di campionamento del segnale e tasso di incremento temporale Δt . Questo fatto, però, a priori non è sempre facilmente risolvibile.

Il ricorso alla trasformata wavelet (WT) ci consente, però, di esaminare più in dettaglio la legge del moto ottenuta dall'analisi differenziale. Mostriamo nelle Fig. 1.19 e Fig. 1.20 seguenti i coefficienti di approssimazione e di dettaglio, rispettivamente, che si ottengono applicando alla legge del moto, ricavata iterativamente, un filtro wavelet opportuno.

Sottolineamo che da ora in avanti ogniquale volta facciamo riferimento al diagramma dei coefficienti Wavelet (approssimazione, dettaglio), l'ordinata rappresenta l'ampiezza adimensionale di tali coefficienti, mentre l'ascisse, salvo avviso contrario, indica il numero di punti costituenti il segnale e cioè, in modo equivalente l'intervallo temporale di osservazione.

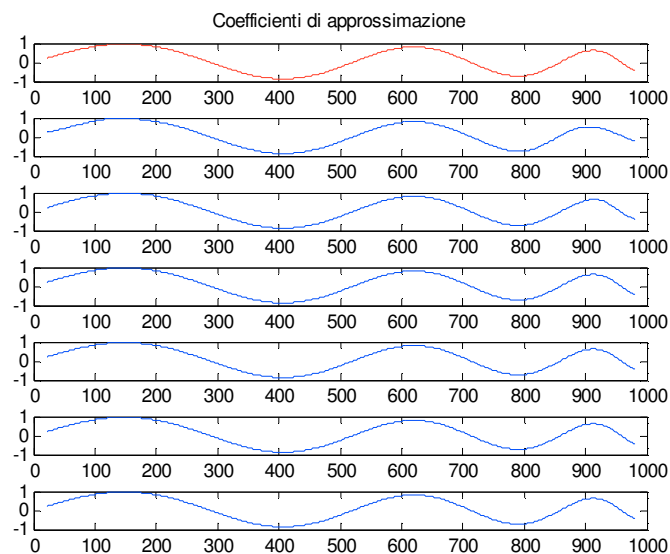


Fig. 1.19

Questa volta è ben evidenziata la presenza di uno spike all'istante $t \approx 350$. Esso, in realtà era nascosto dagli errori di arrotondamento generati dal metodo di risoluzione alle differenze finite impiegato per la soluzione del sistema di equazioni differenziali relativo al modello in oggetto.

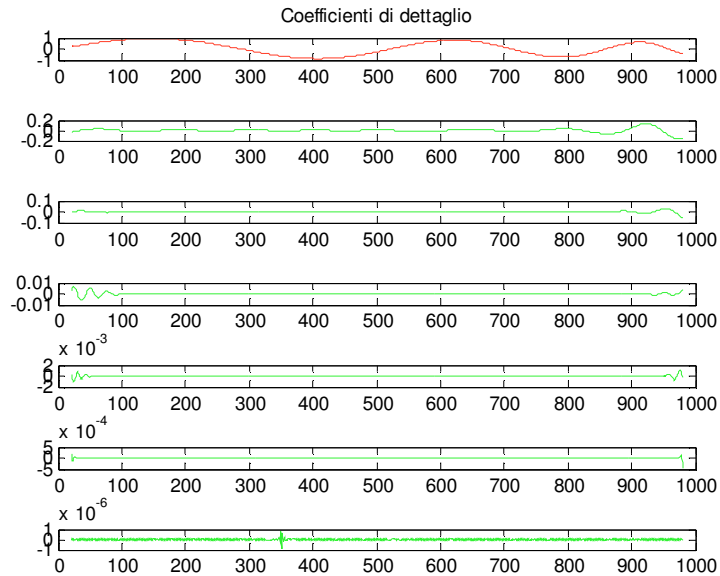


Fig. 1.20

Questo esempio ci permette di affermare che se si intendono indagare le variazioni di un sistema dinamico nel tempo (è questo il caso del monitoraggio), allora certamente, a meno di casi particolari, questo non può essere messo in atto adoperando metodi che si avvalgono di macro parametri, né tantomeno è praticabile la via che porta a indagini stocastiche. Il campo di indagine di cui parliamo è rappresentato da minime variazioni dinamiche, molte volte costituiti da brevi treni di spike che il più delle volte, come già detto, sono precursori di danni irreversibili di natura elasto-cinetico-dinamica causati da usure, rotture, lesioni, fratture, ecc.

Esse, proprio perché sono precursori di potenziali gravi danni futuri, vanno immediatamente rilevati e classificati.

Per fare ciò, però, dobbiamo necessariamente spostare il nostro campo di osservazione dalla bassa all'alta frequenza. È, infatti, in questo campo dello spettro di frequenza che si annidano gli spike: piccola ampiezza e alta frequenza.

Allora, il problema è quello di poter impiegare metodi che consentano di rilevare tali spike e nello stesso tempo di distinguerli tra eventi aleatori ovvero caotici deterministici.

Il primo problema, il rilevamento, può essere affrontato con l'impiego di opportune funzioni wavelet. Il secondo, invece, è un po' più complesso infatti occorre analizzare molto attentamente la sequenza numerica con metodi afferenti

alla teoria del caos deterministico e con strumenti di analisi quali lo spazio delle fasi, l'*embedding*, la dimensione frattale, ecc. Da qui la necessità di integrare queste due fasi di processamento dei dati: trasformata wavelet e teoria del caos.

Pertanto una base funzionale che possa essere utilmente impiegata nei problemi di cui sopra per essere definita tale deve avere le seguenti proprietà:

1. ortonormalizzabile
2. completa
3. supporto compatto
4. scala temporale
5. adattativa

1.10 Base Hilbertiana

Quando ci riferiamo alle serie di Fourier, la loro somma, che abusivamente chiamiamo combinazione lineare, è formata da infiniti termini. Eppure, una tale combinazione restituisce proprio la funzione¹¹. Questa base in realtà è chiamata base hilbertiana. Essa richiama il fatto che è ambientata in uno spazio di Hilbert, dove essendo definita una topologia ha senso parlare di limite della serie e di combinazione lineare di infiniti termini.

Ricordiamo che in algebra, ogni spazio vettoriale, non costituito da un solo elemento, è dotato di base. Il numero di addendi della base è dato dalla dimensione dello spazio. Ad esempio, uno spazio vettoriale di dimensione 5 avrà infinite basi formate da 5 vettori.

Pertanto, se esiste un sistema ortonormale completo in uno spazio di Hilbert esso è chiamato base Hilbertiana (non è una base in senso algebrico), e sarà formata da infiniti termini.

Supponiamo, ora, che il sottospazio H di Hilbert abbia dimensione finita. Allora la proiezione su H di un elemento $x \in H$ è data da

$$P_H x = (x, e_1)e_1 + (x, e_2)e_2 + \dots + (x, e_n)e_n, \quad (1.29)$$

¹¹ Ciò perché la chiusura del sottospazio è proprio lo spazio.

dove i vettori $\{e_i\}$, $i=1, \dots, n$, sono a due a due ortogonali. Ciò premesso la norma in uno spazio pre-hilbertiano, assegnati due vettori y_1, y_2 , è dato da (ricordando il T. di Pitagora)

$$\|y_1 + y_2\|^2 = \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2. \quad (1.30)$$

Notiamo che la (1.30) è vera. Infatti

$$\|y_1 + y_2\|^2 = (y_1 + y_2, y_1 + y_2).$$

Se i vettori sono ortogonali allora

$$(y_1, y_1) = \|y_1\|^2 \text{ mentre } (y_1, y_2) = 0$$

perché ortogonali. Da cui ricaviamo la (1.30).

Il T. di Pitagora si estende anche al caso di n vettori a due a due ortogonali come in (1.29). Questa si può anche scrivere come

$$P_H x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i \quad (1.31)$$

da cui per il T. di Pitagora

$$\|P_H x\|^2 = \sum_{i=1}^n \|(x, e_i) e_i\|^2. \quad (1.32)$$

Il prodotto scalare che compare nella (1.32), poiché per definizione è un numero, può essere portato fuori dalla norma, per cui la (1.32) può risciversi come

$$\|P_H x\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \|e_i\|^2. \quad (1.33)$$

Poiché il secondo fattore vale 1 in quanto tutti i vettori hanno norma unitaria la (1.33) diventa infine

$$\|P_{H_n} x\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2. \quad (1.34)$$

Abbiamo così ricavato una proprietà che riguarda la norma della proiezione. Abbiamo non soltanto l'espressione della proiezione ma anche quella della norma al quadrato.

A questo punto ci chiediamo cosa succede se la (1.29) fosse una successione ortonormale? Osserviamo che la (1.29) deve valere per qualunque n . Allora se $n \rightarrow +\infty$ la (1.29) è ancora valida? Se il limite della successione esiste ed è finito allora la (1.32) diventa

$$\|P_{\bar{X}} x\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |(x, e_i)|^2. \quad (1.35)$$

Questa espressione molto importante ci assicura l'esistenza del limite della successione a patto che X appartenga alla sua chiusura \bar{X} . Infatti $P_{H_n} x$ tende alla proiezione ortogonale sulla chiusura di \bar{X} .

In particolare se il sistema ortogonale è anche completo allora la (1.35) diventa

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |(x, e_i)|^2 \quad (1.36)$$

nota anche come uguaglianza di Parseval.

Notiamo che la (1.36) è anche condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema ortonormale sia completo.

Si dimostra infine che

$$\|P_H x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |(x, e_i)|^2 \quad (1.37)$$

nota anche come disuguaglianza di Bessel.

La (1.21) adattata alle funzioni wavelet diventa

$$f(x) = \sum_k c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x), \{k \in \mathbb{Z}, j_0 = 0, j_1 = \text{int}(\log_2 N)\} \quad (1.38)$$

dove

$$c_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_{j,k}(x) dx \quad (1.39)$$

e

$$d_{j,k} = \langle f^{J_0}, \psi_{j,k} \rangle = 2^{j/2} \int_{k2^j}^{(k+1)2^j} f^{J_0}(x) \psi(2^j x - k) dx \quad (1.40)$$

Capitolo 2

La Teoria del Caos

2.1 Caos

Non è facile dare una definizione esaustiva del termine caos. Ci sembra, comunque, molto appropriata la seguente: *"un comportamento aperiodico a lungo termine di un sistema deterministico non lineare che manifesta elevata sensibilità alle condizioni iniziali"*.

Già nel 1908 Poincaré¹² osservava a proposito: *"... it may happen that small differences in the initial conditions produce very great ones in the final phenomena. A small error in the former will produce an enormous error in the latter. Prediction becomes impossible and we have the fortuitous phenomenon."* Ebbene, sistemi siffatti vengono chiamati "caotici". Per essi è impossibile predirne l'evoluzione che oltre che dipendere dalle condizioni iniziali (anche minime variazioni comportano variazioni imprevedibili nella loro evoluzione) in alcuni istanti sembrano avere un comportamento apparentemente stocastico. Tale casualità è però solo apparente a causa della loro intrinseca "natura". In quanto segue vedremo come, alla luce delle più moderne tecniche di analisi, tali segnali complessi, possono essere studiati. Vedremo quante e quali informazioni si nascondono in una sequenza temporale di tal tipo.

Una successione temporale di valori numerici è la tecnica comunemente impiegata per acquisire la "mappa" di un determinato sistema dinamico. Osserviamo, preliminarmente, che comportamenti caotici sono, il più delle volte, generati da particolari condizioni dinamiche in cui viene a trovarsi il sistema oggetto di studio. Da un punto di vista prospettico l'identificazione e la

¹² Poincaré H., Science et Méthode, Paris, Flammarion, 1908.

caratterizzazione di processi non lineari eventualmente presenti in segnali complessi, renderebbe più affidabili i modelli impiegati per descrivere il comportamento dinamico di tali sistemi. A tal proposito, scriveva Palus¹³, con riferimento ai segnali eegrafici: "*...the chaotic measures do not measure chaos any more, but reflect macroscopic statistical properties of the studied data.*"

Si sottolinea l'importanza della precedente riflessione di Palus: la macroscopicità di una misurazione di un evento definibile caotico.

Ancora, a proposito del problema della non-stazionarietà di alcuni dati. La non stazionarietà può essere dedotta da cambiamenti osservati durante la misurazione della dinamica di un sistema, quantunque non esiste, ad oggi, un accordo circa la definizione di stazionarietà per serie temporali reali; infatti un segnale potrebbe essere considerato stazionario per alcune applicazioni e non esserlo, invece, per altre. Pertanto il concetto di stazionarietà oltre ad essere relativo è anche difficile da verificare¹⁴.

Inoltre, poiché in natura i fenomeni sono intrinsecamente non lineari, non è da trascurare la differenza sostanziale che esiste tra un sistema lineare ed uno non lineare. Nel primo caso vige il "principio di additività degli effetti" nel senso che un sistema, per quanto complesso, può sempre essere risolto tramite un sistema di equazioni lineari. Si tratta, cioè, di scomporre qualsiasi sistema dinamico complesso in modelli elementari. La composizione lineare delle loro singole soluzioni consente di ricavare la soluzione dell'intero sistema complesso. Lo stesso principio non è applicabile ai sistemi non lineari e né tantomeno caotici. Eppure in natura sono più evidenti sistemi di quest'ultimo tipo. Non esiste in questi casi un approccio analitico generale che ci consente una soluzione, infatti equazioni non lineari possono generare sia ordine che caos. In quest'ultimo caso non esistono soluzioni analitiche utili.

Si è detto che un sistema, per essere definito caotico, deve presentare elementi o proprietà non-lineari. Un assunto di base è che un sistema lineare non

¹³ Palus, M. (1999). Nonlinear dynamics in the EEG analysis: Disappointments and Perspectives. Nonlinear dynamics and brain functioning. Pradhan, N., Rapp. P. E. & Sreenivasan, R. (Eds.), Novascience, NewYork.

¹⁴ Schreiber, T. (1999). Interdisciplinary application of nonlinear time series methods. Phys. Rep. 308, 2.

può esibire vibrazioni caotiche. Di conseguenza, in un sistema lineare, ingressi periodici produrranno uscite proporzionalmente periodiche, trascorso il transitorio.

E' pur vero che, per vari motivi, i sistemi cosiddetti lineari sono una eccezione da qui l'esigenza di estendere lo studio ai sistemi meccanici non-lineari.

Comportamenti elastici di tipo non-lineare possono essere indotti sia dalle proprietà del materiale che dalla particolare geometria di un componente meccanico che può assumere più posizioni o stati di equilibrio critici determinati, ad esempio, da fenomeni di usura precoce ed anomala.

Nel campo delle vibrazioni caotiche, non vi sono ingressi assunti come *random*; cioè, le forze applicate o le eccitazioni sono assunte essere deterministiche.

Per definizione, le vibrazioni, cosiddette caotiche, nascono da sistemi fisici deterministici o da equazioni differenziali o alle differenze (che comunque sono deterministiche).

In genere, la vibrazione anomala non mostra un *pattern* visibile ovvero periodicità particolari, tanto più se l'osservazione si riferisce ad una lunga sequenza temporale. Inoltre, molti sistemi a comportamento non lineare, mostrano vibrazioni *quasi-periodiche* in cui sono presenti due o più segnali periodici incommensurabili, cioè che presentano un rapporto irrazionale delle loro rispettive frequenze. In tal caso segnali non-periodici possono sempre scomporsi nella somma di funzioni armoniche periodiche del tipo

$$x(t) = C_1 \text{sen}(\omega_1 t + d_1) + C_2 \text{sen}(\omega_2 t + d_2)$$

dove $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ è un numero irrazionale.

2.2 Sistemi dinamici

Un qualsiasi sistema fisico che evolve temporalmente sulla base di una ben definita regola è chiamato sistema dinamico. Esso è costituito dal fatto che il tasso di variazione delle sue variabili è determinato dai valori assunti da funzioni, che identificano ciascuna variabile, in un ben definito istante temporale.

Diciamo S un tale sistema (Fig. 2.1).

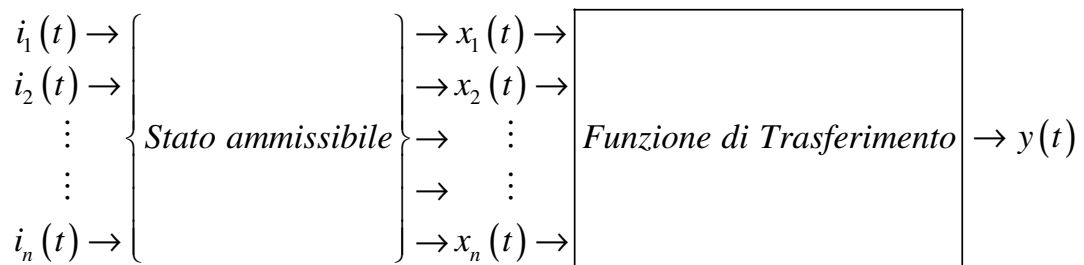


Fig. 2.1

Per studiare e comprendere la dinamica del sistema dovremmo poter misurare l'evoluzione nel tempo di tutte le sue variabili. A ciò facciamo notare che a volte non esiste un modello e pertanto tale indeterminazione comporta l'impossibilità di stabilire quali sono le variabili che partecipano alla descrizione del sistema. Se ipotizziamo di aver determinato n variabili di stato $x_1(t), \dots, x_n(t)$, le cui misure siano tecnicamente ed economicamente possibili poter rilevare, allora possiamo immaginare un funzionale il cui dominio è dato dallo spazio R^n delle n variabili di stato ed a valore in R tramite la sola variabile $y(t)$. Si vengono così a determinare gli insiemi:

T : tempo, con $t \geq 0$

X : stati ammissibili in ogni istante t

Y : uscite ammissibili in ogni istante t .

È chiaro che T è invariante, mentre sia X che Y sono a loro volta funzioni degli ingressi $i(t)$ ammissibili in ogni istante t . Questi, a loro volta, costituiscono un insieme che chiameremo I . Infine, per generalizzare il problema, chiamiamo Ω l'insieme costituito da tutte le funzioni di ingresso $i(t)$ ammissibili. Rimanendo nel campo della generalizzazione possiamo pensare ad esempio, alle funzioni di ingresso come ad una decisione, una scelta politica, una ben definita azione, mentre l'uscita può essere interpretata come una conseguenza, un effetto di una ben determinata scelta politica, decisioni operate a monte.

In Fig. 2.2 è schematizzato il modello di un sistema dinamico in cui abbiamo evidenziato una funzione ϕ e g definite rispettivamente

$$\phi(\cdot, \cdot): x(t) = \phi(x(0), i(t)), \quad t \in [0, t[$$

e

$$g(\cdot, \cdot): y(t) = g(x(t), i(t)), \quad t \geq 0.$$

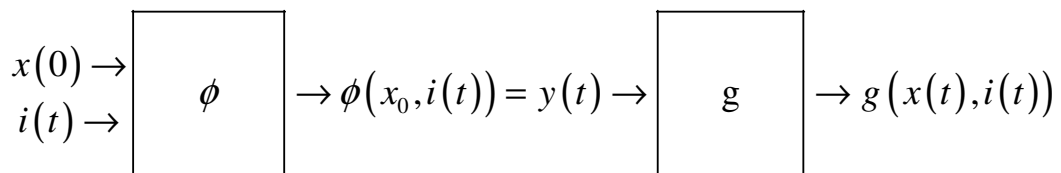


Fig. 2.2

La prima funzione risente dello stato iniziale $x(0)$ in cui si trova il sistema dinamico e della funzione di ingresso $i(t)$ che agisce sul sistema stesso. La funzione g invece determina l'uscita $y(t)$ in base alla funzione di ingresso applicata/prescelta ed allo stato assunto dal sistema per effetto dell'ingresso applicato.

Un modello come quello esemplificato in Fig. 2.2, in genere è quello adoperato per "modellare" un sistema reale. Esso potrà essere più o meno accurato.

Notiamo che se $t \in N$ allora i sistemi si chiamano discreti, se invece $t \in R$ parliamo di sistemi continui.

Inoltre diciamo che il sistema è a dimensione finita n se $X \subseteq R^n (C^n)$. E', inoltre, regolare, di dimensione n , se la funzione ϕ può essere implicitamente descritta da un sistema di n equazioni del tipo

$$x(t+1) = f(x(t)) \begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

se $i \equiv 0$.

Il sistema può essere, però, anche descritto da un insieme di equazioni differenziali ordinarie:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

se $u \equiv 0$.

Nel nostro caso è di interesse conoscere sui tempi lunghi (asintotici) qual è il comportamento del sistema dinamico per diverse condizioni iniziali. Ebbene i comportamenti possibili (chiamati anche regimi) possono essere di quattro tipi Fig. 2.3 (attrattori).

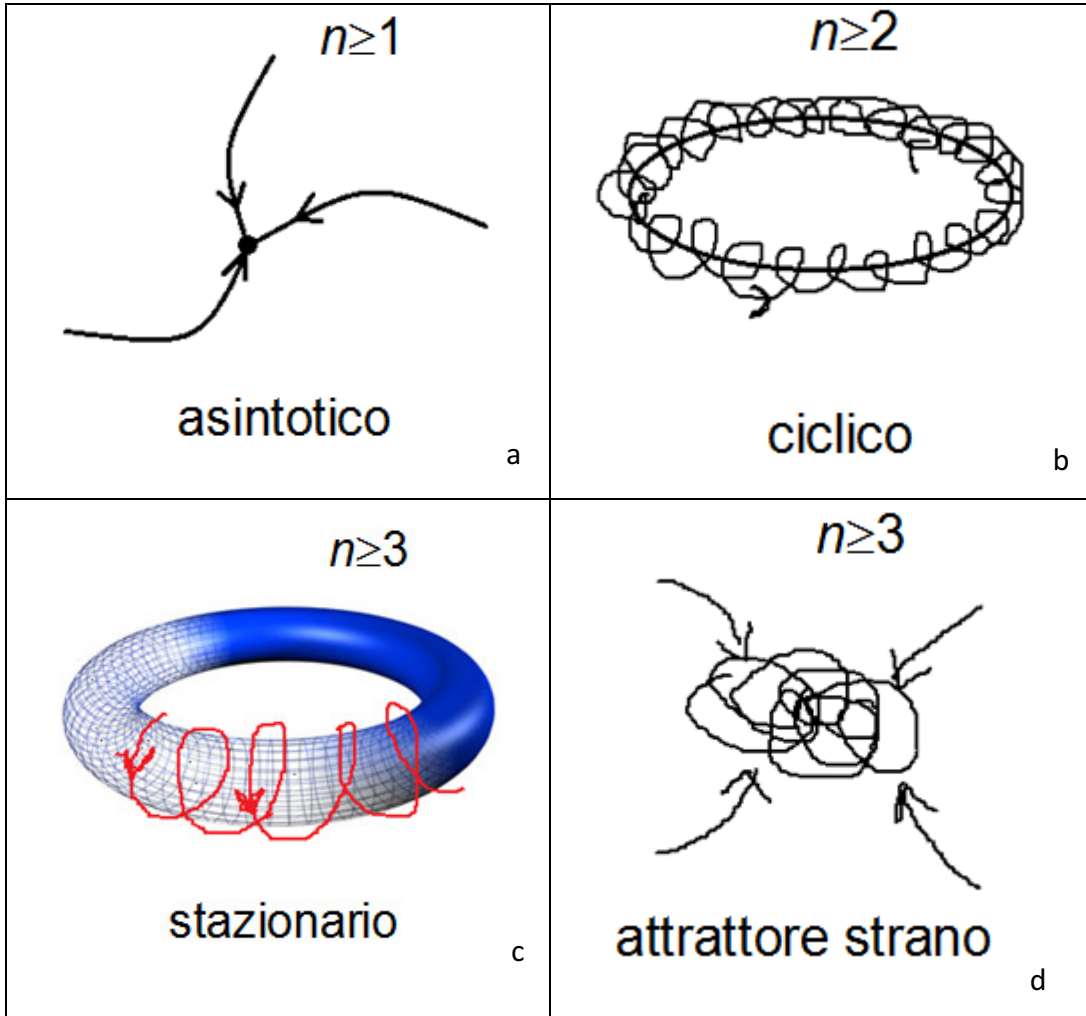


Fig. 2.3

Nella Fig. 2.3a è illustrato il comportamento asintotico che definisce un attrattore stazionario (o di equilibrio). La Fig. 2.3b mostra un tipico attrattore che chiamiamo ciclico. La Fig. 2.3c illustra un attrattore definito toro mentre in Fig. 2.3d è riportato un tipico comportamento che chiamiamo attrattore strano.

2.3 Spazio delle fasi o spazio di stato (*phase space*)

Da quando precede sembra evidente che un insieme dinamico può essere rappresentato in uno spazio nel quale su un asse riportiamo la posizione e nell'altro asse le velocità da esso assunte. Una tale rappresentazione è chiamata spazio delle fasi. Pertanto in un sistema dinamico ad n gradi di libertà la dimensione dello spazio delle fasi è $2n$.

L'evoluzione di un suddetto sistema può essere rappresentato riportando, istante per istante, la posizione di ogni suo punto rappresentativo. In tal caso chiamiamo traiettoria o orbita una tale rappresentazione. L'insieme di tutte le possibili orbite che si originano da tutte le possibili condizioni iniziali danno luogo ad un "flusso" il quale è governato da $2n$ equazioni differenziali del primo ordine

$$\frac{dx_i}{dt} = F(x_1, x_2, \dots, x_n; v_1, v_2, \dots, v_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = F(x_1, x_2, \dots, x_n; v_1, v_2, \dots, v_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

avendo indicato con n il numero di gradi di libertà del sistema.

Pertanto, per rappresentare un punto del sistema nello spazio delle fasi, dobbiamo calcolare i valori di posizione e velocità nei vari istanti cioè

$$x_{t+1} = x_t + F_t(x_1, x_2, \dots, x_n; v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (2.3)$$

per la posizione e

$$v_{t+1} = v_t + F_t(x_1, x_2, \dots, x_n; v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (2.4)$$

per la velocità; avendo indicato con t la variabile temporale, supposta discreta. In quanto segue indicheremo più semplicemente la (2.3) e la (2.4) rispettivamente come segue

$$x(t+1) = f(x(t)) \quad (2.5)$$

e

$$\dot{x}(t+1) = f(x(t)). \quad (2.6)$$

Poiché faremo spesso riferimento a termini quali stazionario, deterministico, random ecc., al fine di evitare equivoci brevemente diamo alcune definizioni in merito.

Parlando di sistemi dinamici, le regole che li governano possono essere funzioni di una sola o più variabili, nel primo caso si dicono monodimensionali nel secondo multidimensionali. La variabile indipendente in generale è di tipo temporale, pertanto chiameremo a tempo continuo o a tempo discreto le classi di sistemi dinamici con riguardo alla variabile tempo.

Spesso rappresenteremo l'evolversi di un sistema dinamico tramite sequenze numeriche a tempo discreto. In tal caso la variabile indipendente viene indicata con la notazione $x(n)$. Una sequenza (discreta o continua) si dice deterministica se è completamente descritta da una espressione matematica ovvero da un diagramma ovvero da una regola di qualunque tipo.

Si chiama aleatoria una sequenza che è collezione di sequenze ognuna delle quali corrisponde ad un singolo risultato di un esperimento casuale. Si dirà, infine, stazionaria una sequenza invariante rispetto al tempo.

Abbiamo detto, dunque, che un sistema dinamico si dice deterministico se nota la "legge" che lo governa è possibile predire gli stati di evoluzione futura. In quanto segue ci riferiamo a sistemi in cui la variabile temporale è discretizzabile. D'altronde i sistemi continui, se studiati con tecniche di calcolo numerico di discretizzazione, vengono ricondotti a sistemi discreti. Pertanto, l'estensione, di fatto, alle continuità temporali è legata al concetto di densità di campionamento di un determinato fenomeno o sistema dinamico che dir si voglia.

Allora supponiamo che un sistema dinamico discreto evolva ad uno stato definito da un operatore che chiameremo Φ cioè

$$\Phi: a \times z \rightarrow \Omega \quad (2.7)$$

dove con $A \subseteq R^n$ abbiamo indicato un insieme chiuso e limitato e con Z uno spazio vettoriale degli stati in cui un vettore $z_n \in A \subseteq R^n$ consente di definire lo stato del sistema. Per quanto ipotizzato avremo

$$\Phi(z_n, t) = z_{n+t} \quad (2.8)$$

cioè se è possibile determinare tramite la (2.8) lo stato (posizione e velocità) del sistema per qualsiasi $t > 0$, allora il sistema dinamico descritto da (A, Φ) è detto deterministico e lo sarà anche l'operatore Φ .

Inoltre se dato $m \neq n$ si ha

$$x_n = x_m \Rightarrow \Phi(x_n, \cdot) = \Phi(x_m, \cdot) \quad (2.9)$$

allora il sistema dinamico si dirà stazionario.

L'insieme A lo abbiamo supposto chiuso e limitato, ebbene se esso inoltre soddisfa le seguenti tre condizioni di essere:

- invariante
- attrattivo
- indecomponibile o minimo

allora lo chiamiamo attrattore.

È noto che se $A \subseteq R^n$ allora può essere definito chiuso e limitato cioè compatto. Ricordiamo che in R limitato significa dotato di minoranti e maggioranti e nel far questo si utilizza l'ordinamento (R è un insieme totalmente ordinato). Nel piano (R^2) un insieme si dice limitato quando esiste un cerchio o un intervallo che lo contiene. Ad es. l'insieme X rappresentato in Fig. 2.4 è limitato in R^2 .

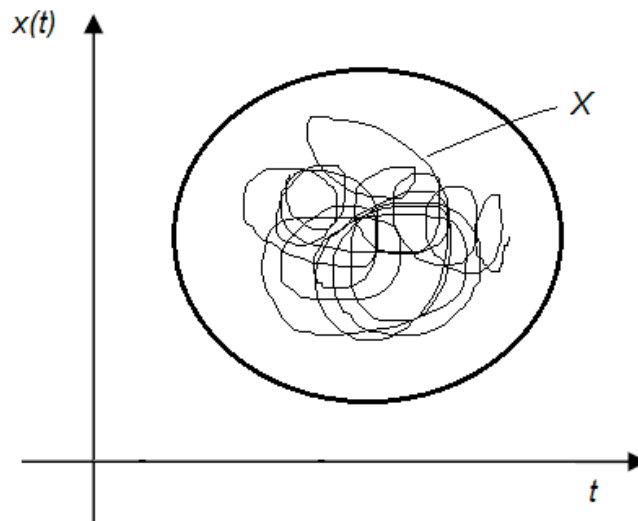


Fig. 2.4

Ricordiamo che l'intervallo di R^2 è il prodotto cartesiano $R \times R$ (R è un insieme numerico ordinato). I cerchi sono, invece, particolari sottoinsiemi che utilizzano un altro concetto di distanza tra due punti. Un cerchio di centro C e raggio r è un insieme di tutti i punti che hanno distanza da $C < r$ (cerchio aperto) o $\leq r$ (cerchio chiuso). Ricordiamo che in R^n ,

$$X \text{ Compatto} \Leftrightarrow X \text{ chiuso e limitato, se } X \subseteq R^n.$$

Infine ricordiamo che un insieme si dice chiuso quando l'insieme complementare è aperto.

Tornando alle tre condizioni a cui deve soddisfare un insieme per chiamarsi attrattore, chiariamo che $A \subseteq R^n$ è invariante se $x(0) \in A \Rightarrow x(t) \in A, \forall t$. La seconda condizione si può esplicitare dicendo che deve esistere intorno ad $A \subseteq R^n$ un insieme aperto che chiameremo Bacino di Attrazione B tale che

$$x(0) \in B \supset A \Rightarrow x(t) \rightarrow A, \text{ per } t \rightarrow +\infty.$$

Se esiste un tale insieme B allora diremo che A è immerso in B .

La condizione precedente si può esplicitare dicendo che non esiste un sottoinsieme proprio che gode delle proprietà di essere un compatto e né tanto meno rispettare le due prime condizioni. Una particolarità di A è che esso è denso nel senso che da qualunque punto di A si parte prima o poi si passa arbitrariamente vicino a qualunque punto di A . La Fig. 2.5 esemplifica quanto finora riportato.

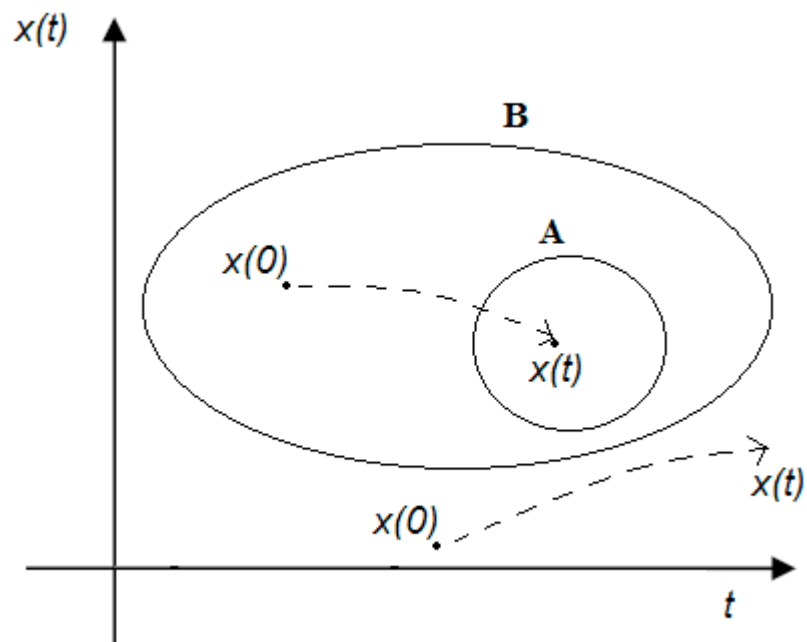


Fig. 2.5

Il bacino di attrazione è quindi un particolare insieme costituito da punti tali che

$$B(A) = \{x : \Phi(x, t) \rightarrow A\}. \quad (2.10)$$

2.4 Punto fisso

Indichiamo con g la corrispondenza che associa la rotazione di un piano supposto rigido rispetto ad un determinato punto P_0 del piano stesso (Fig. 2.6).

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

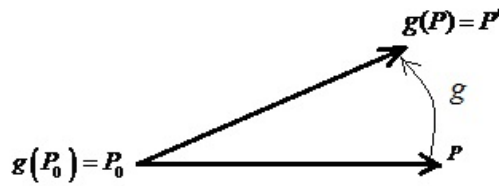


Fig. 2.6

Il punto P_0 coincide con la propria immagine (o corrispondente):

$$g(P_0) = P_0 .$$

La funzione

$$g(P) = P ,$$

nell'incognita P , ammette una ed una sola soluzione: il punto P_0 . Infatti, esso è l'unico punto del piano che non ruota. Allora possiamo dire che un punto che coincide con il suo corrispondente si chiama punto fisso.

Questo concetto lo abbiamo esteso al caso di una funzione di una sola variabile f , nel piano, definita nell'intervallo (a, b) :

$$f : [a, b] \rightarrow [a, b] .$$

Il diagramma è esemplificato nella Fig. 2.7 seguente.

Ebbene il diagramma della funzione, per come è stata definita, è contenuto nel rettangolo $[a, b] \times [a, b]$.

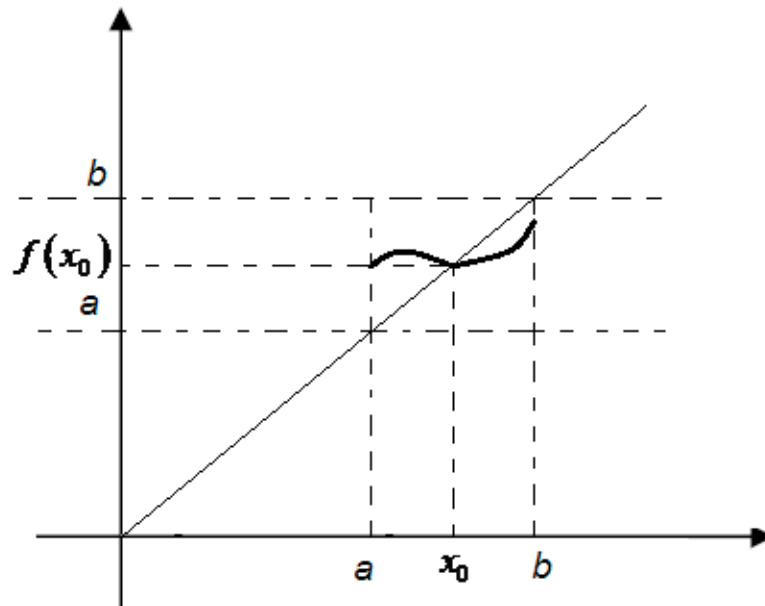


Fig. 2.7

Consideriamo la bisettrice del primo quadrante; notiamo un punto del diagramma che interseca la bisettrice. Se diciamo x_0 la sua ascissa, allora abbiamo che

$$f(x_0) = x_0.$$

Per quanto detto in precedenza la corrispondenza

$$f(x) = x \tag{2.11}$$

quindi presenta un punto fisso (x_0).

Se la funzione avesse esibito un diagramma, come ad esempio quello riportato in Fig. 2.8, allora avrebbe avuto tre punti fissi e la (2.11) avrebbe ammesso tre soluzioni.

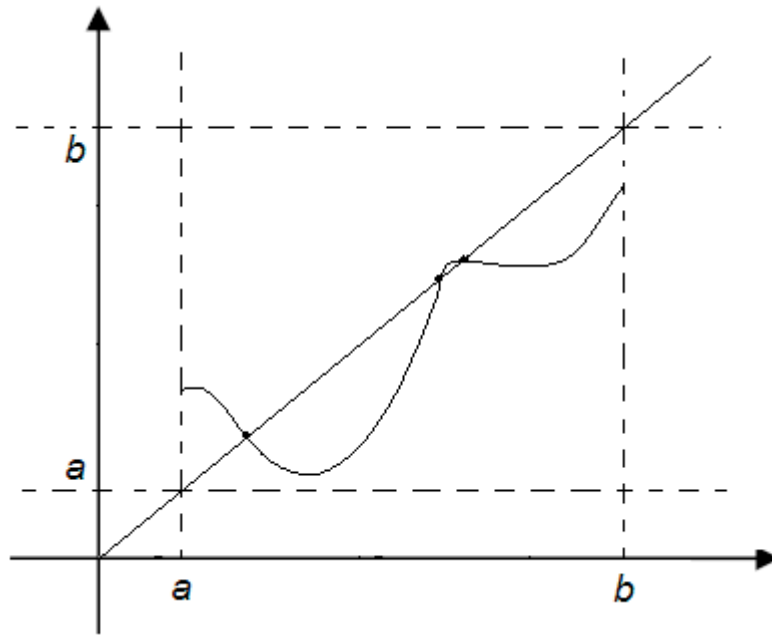


Fig. 2.8

Naturalmente la funzione potrebbe anche non ammettere alcun punto fisso, così come ne potrebbe ammettere infiniti.

Osserviamo che nel caso della traslazione o rotazione del piano abbiamo parlato di funzioni del tipo $R^2 \rightarrow R^2$ (punti del piano), successivamente abbiamo parlato di funzioni del tipo $[a, b] \rightarrow [a, b]$ (intervalli del piano).

Consideriamo ora il seguente problema di Cauchy costituito da una equazione differenziale del primo ordine con condizione iniziale nota:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Per quanto da noi sviluppato nella presente ricerca, a proposito della integrazione tra la trasformata Wavelet e la alcuni principi afferenti alla teoria del Caos, è molto importante convertire la (2.12) in un problema di punto fisso.

La funzione $y = y(x)$ deve essere tale che:

$$\forall x \in I, y(x) = (x, y(x)) \in A \quad (\text{I condizione})$$

dove con A abbiamo indicato l'insieme di definizione della funzione $f(x, y)$ (Fig. 2.9).

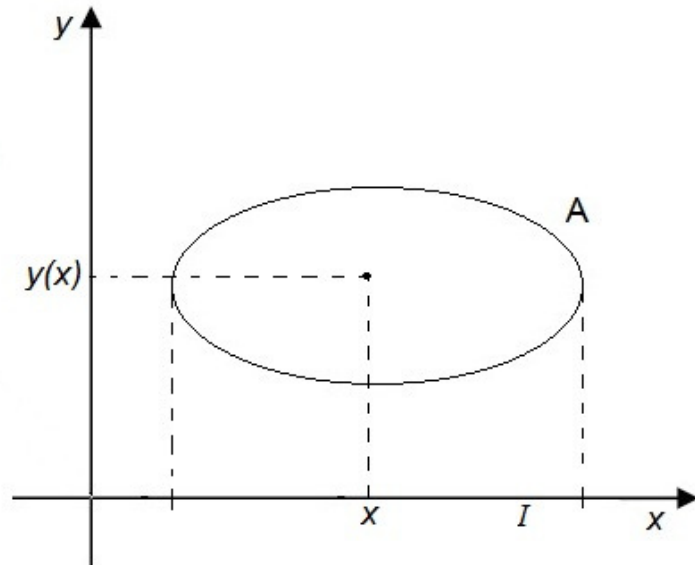


Fig. 2.9

Inoltre deve accadere che

$$\forall x \in I, y'(x) = f(x, y(x)) \text{ (II condizione)}$$

cioè la derivata della funzione incognita deve essere uguale a $f(x, y(x))$.

Ovviamente per fare in modo che sia verificata la seconda condizione deve accadere che il punto $(x, y(x)) \in A$ (Fig. 2.10).

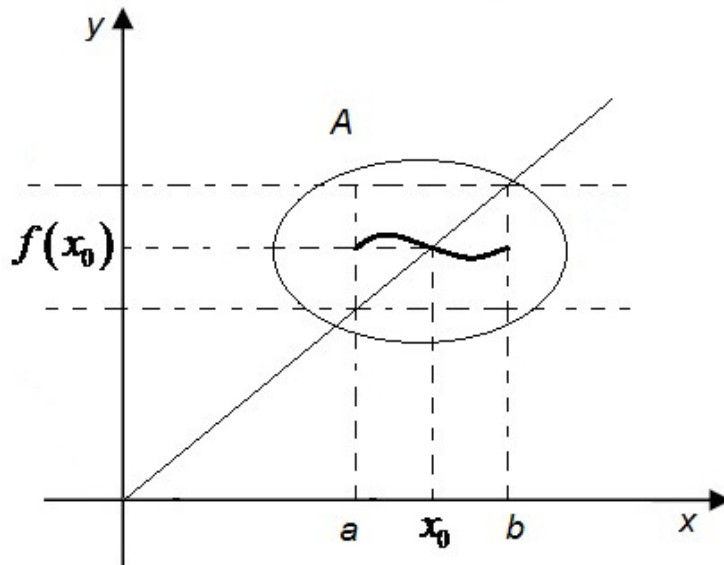


Fig. 2.10

Di conseguenza il diagramma della funzione incognita $y = y(x)$ deve essere contenuto in A . Cioè il problema è quello di trovare una funzione $y = y(x)$ definita in un intervallo I ($x \in I$) il cui diagramma sia contenuto in A . Inoltre la derivata di questa funzione in un qualunque punto dell'intervallo I deve essere uguale al valore di f in quel punto.

Tutto questo è sintetizzato nel simbolismo della (2.12).

Il problema di Cauchy si completa con le condizioni iniziali, cioè tra le infinite soluzioni c'è ne sarà una in particolare il cui diagramma deve passare per il punto di coordinante $(x_0, y_0) \in A$.

Ammettiamo che questo problema ammetta una soluzione

$$y = y(x), \tag{2.13}$$

con condizioni iniziali $y(x_0) = x_0$.

Dovendo essere la (2.13) soluzione del problema avremo che:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \forall x \in I = [a, b]. \tag{2.14}$$

Quindi il punto iniziale è un punto dell'insieme A : $(x_0, y_0) \in A$.

Allora il problema sta nella ricerca di un integrale il cui diagramma sia contenuto nell'insieme A ed inoltre debba passare per il punto (x_0, y_0) (condizione iniziale).

Integriamo la (2.14):

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \forall x \in [a, b].$$

Il primo integrale è quello della derivata:

$$|y(t)|_{x_0}^x = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \forall x \in [a, b].$$

Da cui

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \forall x \in [a, b]. \quad (2.15)$$

Allora se $y(x)$ è una soluzione del problema di Cauchy, esso deve verificare la (2.15) e viceversa.

La (2.15) si chiama equazione di Volterra¹⁵. Notiamo che nella (2.15) la funzione incognita compare sotto il segno di integrale mentre la variabile x è nell'intervallo di integrazione.

Ebbene questo è un problema di punto fisso. Infatti, supponiamo di ambientare il problema espresso dalla (2.15) nello spazio $C^0[a, b]$, cioè uno spazio vettoriale, costituito da funzioni continue in un intervallo $[a, b]$. Le funzioni inoltre sono limitate, per cui ad esse è applicabile il Teorema di Weierstrass. In questo spazio introduciamo una norma, pertanto esso diventa uno

¹⁵ Vito Volterra, matematico e fisico italiano, 1860-1940.

spazio normato. Inoltre supponiamo che tale norma generi una metrica e che tale metrica, a sua volta, generi una topologia. Allora lo spazio che abbiamo ipotizzato è uno spazio normato, metrico, vettoriale, topologico.

In tale spazio una corrispondenza è data da:

$$F : y \in C^0[a, b] \rightarrow \varphi.$$

Quindi F è una funzione continua che associa un'altra funzione continua: φ . Pertanto anche φ sarà un elemento di $C^0[a, b]$ e precisamente

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \forall x \in [a, b]. \quad (2.16)$$

Pertanto, poiché φ è il corrispondente di F , allora

$$\varphi = F(y). \quad (2.17)$$

Notiamo che F parte da $C^0[a, b]$ e va a finire in $C^0[a, b]$. All'inizio di questo paragrafo abbiamo fatto una traslazione ed una rotazione di piani $R^2 \rightarrow R^2$ ora invece abbiamo che $C^0 \rightarrow C^0$. Allora la (2.15) la possiamo anche scrivere come segue:

$$y(x) = \varphi(x), \forall x \in [a, b], \quad (2.18)$$

cioè il problema di Cauchy si sintetizza nella (2.18). Ma stante la (2.17), la (2.18) la possiamo anche scrivere come

$$y = \varphi \text{ e cioè } y = F(y).$$

Quindi la soluzione che cerchiamo, relativamente al problema di Cauchy, si riduce a determinare il punto fisso della funzione F , cioè, trovare un elemento y di $C^0[a, b]$ che coincida con la sua immagine ($F(y)$), sempre in $C^0[a, b]$.

Generalizziamo, ora, il problema. A tal fine consideriamo un insieme qualunque S .

Consideriamo una funzione F di S , cioè una funzione

$$F : S \rightarrow S .$$

Il problema, allora, è quello di stabilire se esiste un elemento di S , diciamo x_0 , la cui immagine coincida con se stesso:

$$F(x_0) = x_0 . \tag{2.18a}$$

Ebbene, se esiste un tale elemento diremo che esso è il punto fisso di F .

La soluzione della (2.18a) la si affronta con un procedimento iterativo. Ovviamente dobbiamo supporre che sia nota la funzione F . In tal caso scelto un punto iniziale $x_0 \in S$ possiamo calcolarci $F(x_0) \in S$, cioè una corrispondenza di $S \rightarrow S$. Poniamo, pertanto

$$F(x_0) = x_1 .$$

Successivamente calcoliamo il corrispondente di x_1 , cioè $x_1 \Rightarrow F(x_1)$ otteniamo $F(x_1) = x_2$ e così di seguito, $F(x_2) = x_3 \dots$.

Otteniamo così una successione che verificherà l'uguaglianza:

$$F(x_{n-1}) = x_n, \forall n \in N, \{x_n\} \in S$$

con $\{x_n\}$ successione di elementi di S .

Questo metodo lo chiamiamo Metodo delle Approssimazioni Successive. Ricordiamoci che il nostro scopo è quello di risolvere il seguente problema di punto fisso

$$F(x) = x .$$

Supponiamo, allora, che la successione $\{x_n\}$ sia convergente, cioè

$$\lim x_n = x^* \text{ nello spazio topologico } (S, \mathcal{T})^{16}. \quad (2.19)$$

Stante la (2.19), per la definizione di limite, avremo che da un certo indice ν in poi, gli elementi della successione ricadranno nell'intorno, fissato, di x^* . Se la topologia è provvista di una metrica, l'approssimazione relativa alla convergenza può essere quantizzata ricorrendo al cerchio di raggio ε . Cioè, deve avvenire che la distanza d tra x_n ed x^* sia minore di un valore ε piccolo a piacere prefissato:

$$d(x_n, x^*) < \varepsilon .$$

Allora sarà

$$\lim F(x_{n-1}) = \lim x_n, \forall n \in N . \quad (2.20)$$

Poiché F è supposta continua possiamo scambiare l'operazione di limite e stante la (2.19) possiamo scrivere la (2.20) come segue

$$F(\lim x_{n-1}) = x^*$$

cioè

$$F(x^*) = x^* ,$$

dove x^* è il punto fisso cercato per F .

¹⁶ Ricordiamo che un limite ha senso soltanto se esso è riferibile ad una topologia.

Pertanto possiamo concludere che se siamo in presenza di una funzione continua convergente in uno spazio topologico allora il limite della funzione è proprio il suo punto fisso.

2.5 Wavelet e caos

Si procede ora con una descrizione degli strumenti utilizzati per il monitoraggio di sistemi dinamici oggetto della presente ricerca.

2.6 Mappa di Poincaré

Una tecnica impiegata quando si ha a disposizione una sola variabile misurata (nel nostro caso il segnale accelerometrico) è quella di rappresentarla nello *spazio di embedding* o *pseudo-fasi*. Sebbene questa tecnica di rappresentare le orbite è molto impiegata, il *plot* di sistemi continui finisce col fornire poca informazione. In tal caso occorre ricorrere ad una tecnica di rappresentazione del piano delle fasi modificata chiamata *mappa di Poincaré*.

Ricordiamo che l'analisi diretta dello spettro di Fourier non è di grande aiuto se non si possono osservare cambiamenti nella sua composizione al variare dell'ampiezza e/o della frequenza dell'azione forzante generatrice indiretta delle vibrazioni.

Pertanto, quando il moto è forzato di periodo T , una regola naturale di campionamento per ottenere una mappa di Poincaré è quella di scegliere $t_n = nT + \tau_0$. Questo consente di distinguere tra moti periodici e non-periodici.

Per esempio, se il moto armonico campionato, è sincronizzato con il suo periodo la mappa sarà formata da un solo punto fisso (Fig. 2.11).

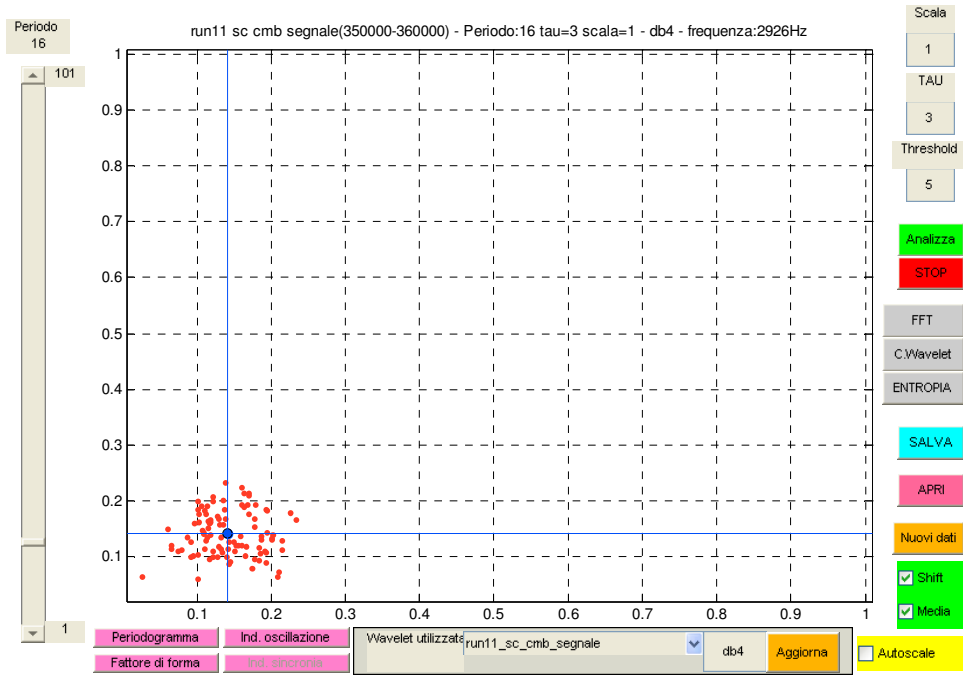


Fig. 2.11 - Moto armonico campionato e sincronizzato con il suo periodo

Un'altra mappa di Poincaré non-caotica è mostrata in Fig. 2.12 dove il moto consiste di 2 frequenze tra loro incommensurabili.

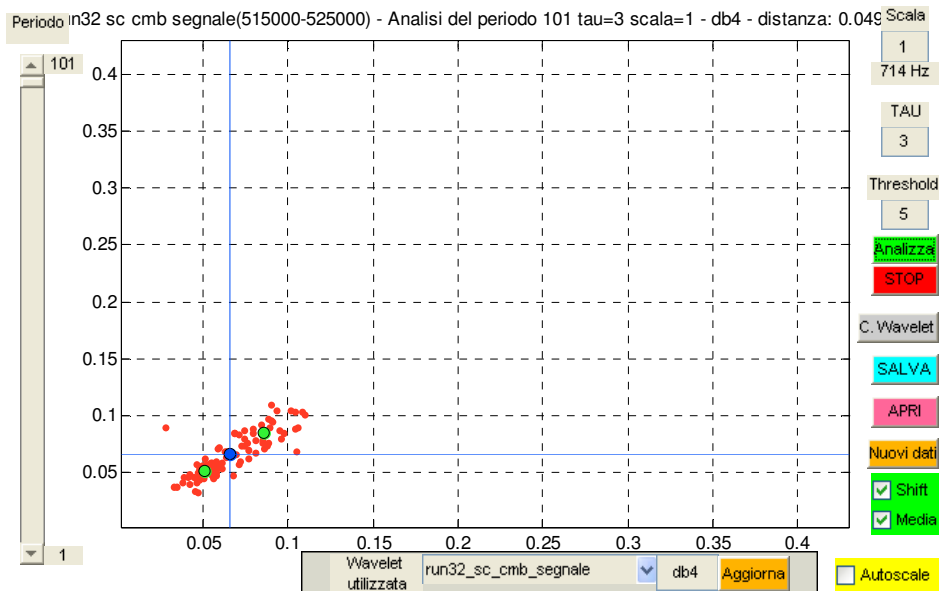


Fig. 2.12 – Esempio di mappa di Poincaré dove il moto consiste di due frequenze incommensurabili

Infine, se la mappa di Poincaré non mostra o un insieme finito di punti fissi o un'orbita chiusa il moto può essere considerato caotico.

2.7 Proprietà del piano delle fasi

Le proprietà geometriche della rappresentazione delle fasi di un sistema dinamico può essere espressa quantitativamente utilizzando misure che riflettano in ultima analisi la dinamica del sistema stesso. Più grande è la dimensione di un attrattore più complicato esso appare nello spazio delle fasi. E' importante distinguere tra la dimensione dello spazio delle fasi (*embedding dimension*) e la dimensione dell'attrattore. La embedding dimension (p) è la dimensione dello spazio delle fasi che contiene l'attrattore ed è sempre un intero positivo. La dimensione dell'attrattore (D) può non essere un intero. D è direttamente correlato al numero di variabili del sistema ed inversamente correlato all'eventuale relazione che le lega.

Secondo Takens¹⁷ la embedding dimension p può essere calcolata come

$$p = (2D + 1)$$

al fine di racchiudere un attrattore in uno spazio delle fasi.

La misura più impiegata per stimare D è la dimensione di correlazione dello spazio delle fasi (ν).

Metodi per calcolare la dimensione di correlazione sono descritti da Mayer e Kostelich^{18,19}.

Un attrattore caotico è un attrattore dove, mediamente, orbite che si originano da condizioni molto simili (punti molto vicini nello spazio delle fasi) divergono esponenzialmente molto rapidamente (*expansion process*); essi rimangono vicini solo per un breve periodo di tempo. Se queste orbite provengono

¹⁷ Takens, F., Detecting strange attractors in turbulence, in Dynamical systems and turbulence, Lecture notes in mathematics, Eds. D.A. Rand & L.S. Young, Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 366-381, 1981.

¹⁸ Mayer-Kress, G. editor, Dimension and entropies in chaotic systems, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

¹⁹ Kostelich, E.J., Problems in estimating dynamics from data, Physica D, vol. 58, pp. 138-152, 1992.

da un attrattore di dimensione finita, esse collasseranno man mano che il processo evolve (*folding process*). Il risultato di questi due processi è una struttura a strati.

Le misure che quantizzano la caoticità di un attrattore sono la entropia (K) di Kolmogorov e gli esponenti di Lyapunov^{20,21}. Un attrattore per essere definito caotico dovrà avere l'entropia K o il massimo degli esponenti L_{\max} di Lyapunov positivi. L'entropia di Kolmogorov (Sinai o metrica) misura l'incertezza circa il futuro stato del sistema nello spazio delle fasi nota l'informazione circa gli stati precedenti (le posizioni o i vettori nello spazio delle fasi). Gli esponenti di Lyapunov misurano il tasso medio di espansione e collassamento che si registra lungo le auto-direzioni locali all'interno di un attrattore nello spazio delle fasi. Se lo spazio delle fasi ha dimensione p , possiamo stimare teoricamente fino a p esponenti di Lyapunov. Comunque, soltanto $([D]+1)$ di essi saranno reali.

Vari metodi sono stati proposti al fine di misurare tali parametri. La stima del più grande valore degli esponenti di Lyapunov in un sistema caotico è stato dimostrato essere il più affidabile e riproducibile rispetto agli altri esponenti in particolar modo quando D cambia nel tempo in caso di dati non stazionari.

2.8 Esponenti di Lyapunov²²

Consideriamo la seguente equazione iterativa

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n). \quad (2.21)$$

Essa genera una successione non lineare di termini che appartengono ad una parabola. La (2.21) tecnicamente rappresenta, in ambito geometrico, una mappa funzionale²³ cioè una corrispondenza di tipo non lineare tra lo stato di un sistema all'istante n e nell'istante successivo $n+1$. Se intendiamo verificare l'esistenza di

²⁰ Oseledec, A., A multiplicative ergodic theorem-Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, IEEE Int. Conf. ASSP, vol. 19, pp. 179-210, 1992.

²¹ Walters, P., An introduction to ergodic theory, Springer graduate text in Mathematics, vol. 79, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

²² Alcuni autori lo riportano con il nome Liapunov.

²³ In ambito matematico si chiama funzione o applicazione mentre quando si trattano spazi vettoriali si preferisce parlare di mappa.

almeno un punto fisso, chiamiamolo x^* , dobbiamo imporre la condizione, per quanto detto in precedenza,

$$x^* = kx^*(1 - x^*)$$

da cui

$$x^* = \frac{k-1}{k}. \quad (2.22)$$

Allora ritorniamo alla mappa funzionale (2.21) $F: R \rightarrow R$ monodimensionale ponendo $k = 4$:

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n).$$

Essa, stante la (2.22), così come è anche verificabile geometricamente, presenta un punto fisso in $x^* = 0.75$. Ci chiediamo se esso è asintoticamente stabile, cioè intendiamo verificare se da qualunque punto del suo intorno si parta la traiettoria tende asintoticamente ad un equilibrio in $x^* = 0.75$.

Per verificare quanto sopra, consideriamo un semplice sistema discreto di ordine unitario (mappa mono-dimensionale) definita come segue:

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (2.23)$$

Inoltre, supponiamo di conoscere una sua possibile traiettoria e quella descritta da un punto vicino (Fig. 2.13).

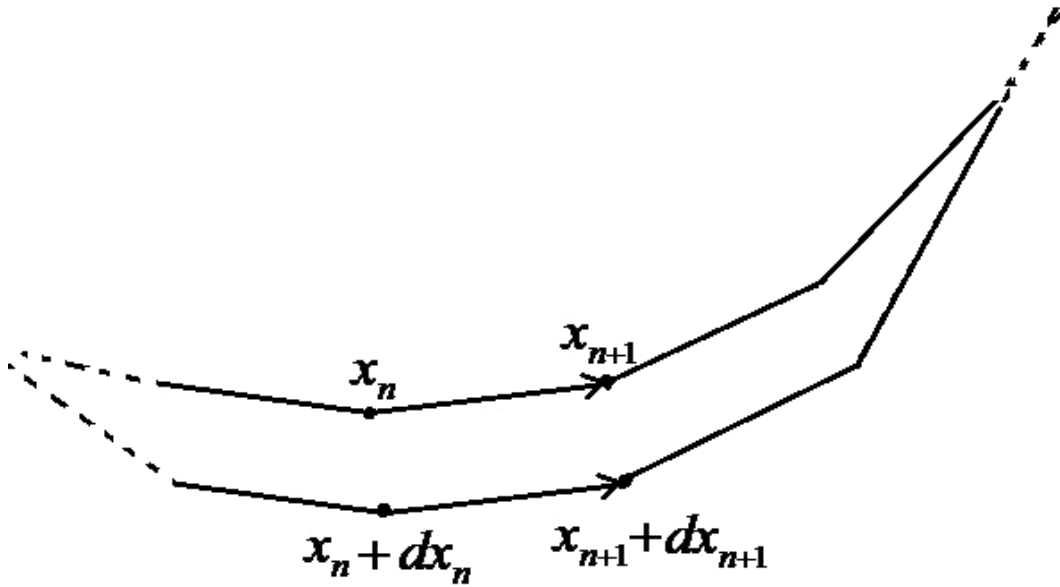


Fig. 2.13

Se i punti considerati appartengono ad un intorno molto piccolo e se consideriamo due istanti molto vicini allora possiamo indicare nell'istante n i punti come $x_n, x_n + dx_n$ mentre nell'istante $n+1$ come $x_{n+1}, x_{n+1} + dx_{n+1}$. Ci proponiamo di valutare il tasso medio di convergenza o divergenza esibito dai due punti nel passare da n ad $n+1$.

Avendo ipotizzato differenze infinitesime possiamo scrivere, stante la (2.23)

$$x_{n+1} - (x_{n+1} + dx_{n+1}) = f(x_n) - f(x_n + dx_n)$$

cioè

$$\begin{aligned} x_{n+1} - (x_{n+1} + dx_{n+1}) &= f(x_n) - f(x_n + dx_n) = \\ &= \frac{f(x_n) - f(x_n + dx_n)}{[x_n - (x_n + dx_n)]} [x_n - (x_n + dx_n)] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ora, in forma differenziale, la (2.24) può anche essere scritta come segue:

$$x_{n+1} - (x_{n+1} + dx_{n+1}) = f'(x_n) [x_n - (x_n + dx_n)]. \quad (2.25)$$

Ne segue che $f'(x_n)$ può essere inteso come il tasso di espansione o contrazione esibito dalle due traiettorie passando da n ad $n+1$.

Il ragionamento può essere reiterato al fine di trovare una legge generale che valga per un qualsiasi numero consecutivo di istanti. Proviamo a vedere cosa succede se prendiamo in considerazione gli istanti che vanno da n ad $n+1$ fino ad $n+2$.

La (2.25) con riferimento agli istanti $n+1$, $n+2$ sempre per spostamenti infinitesimi diventa

$$x_{n+2} - (x_{n+2} + dx_{n+2}) = f'(x_{n+1}) [x_{n+1} - (x_{n+1} + dx_{n+1})] \quad (2.26)$$

che, stante la (2.25), può essere riscritta come

$$x_{n+2} - (x_{n+2} + dx_{n+2}) = f'(x_{n+1}) f'(x_n) [x_n - (x_n + dx_n)]. \quad (2.27)$$

La (2.27) può, pertanto, essere generalizzata scegliendo un numero $m > n$ di istanti infinitesimi:

$$x_{n+m} - (x_{n+m} + dx_{n+m}) = f'(x_{n+m-1}) f'(x_{n+m-2}) \cdots f'(x_n) [x_n - (x_n + dx_n)]. \quad (2.28)$$

Ebbene, il tasso medio di espansione o contrazione delle traiettorie è dato dalla media geometrica delle derivate prime:

$$\Lambda = [f'(x_{n+m-1}) f'(x_{n+m-2}) \cdots f'(x_n)]^{1/m} = \left[\prod_{j=1}^m f'(x_{n+m-j}) \right]^{1/m}. \quad (2.29)$$

La (2.29) può essere estesa anche sui tempi lunghi, in tal caso essa diventa, nell'ipotesi che si parta dall'istante generico n :

$$\Lambda_{x_n} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\prod_{j=1}^m f'(x_{n+m-j}) \right]^{1/m} . \quad (2.30)$$

Infine, nell'ipotesi di spostamenti infinitesimi la (2.30) diventa

$$\delta(x_{n+m}) = \Lambda_{x_n}^m \delta(x_n) \quad (2.31)$$

ovvero

$$\delta(x_{n+m}) \rightarrow e^{\lambda_{x_n}^m} \delta(x_n) \quad (2.32)$$

dove

$$\lambda_{x_n} = \ln(\Lambda_{x_n}) \quad (2.33)$$

rappresenta l'esponente di Lyapunov relativo alle traiettorie infinitamente vicine che partono da un istante qualsiasi n fino all'istante m ²⁴.

Tale importante parametro consente di stabilire il comportamento medio di traiettorie comunque vicine, infatti possiamo sintetizzare il tutto come segue:

se $\lambda_{x_n} < 0$, le traiettorie prossime a quella che parte da x_n mediamente tendono ad avvicinarsi ad essa. Siamo in presenza di un punto fisso e l'orbita comunque è stabile. Gli esponenti negativi sono tipici di sistemi dissipativi

se $\lambda_{x_n} > 0$, le traiettorie prossime a quella che parte da x_n mediamente tendono ad allontanarsi da essa. L'orbita oltre ad essere instabile è anche caotica

²⁴ I simboli qui utilizzati non sono unificati o standardizzati come anche la base logaritmica.

se $\lambda_{x_n} = 0$, esiste un punto fisso. Gli esponenti nulli sono tipici di sistemi conservativi.

Ora stante la (2.30), possiamo anche riscrivere la (2.33) come segue

$$\lambda_{x_n} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f'(x_{n+m-1})| + \ln |f'(x_{n+m-2})| + \cdots + \ln |f'(x_n)|}{m}, \quad (2.34)$$

osserviamo che l'esponente di Lyapunov ha la dimensione dell'inverso dell'unità di tempo (nel caso che m indichi il tempo). In realtà il parametro in oggetto misura la velocità media di divergenza o di convergenza di orbite che sono inizialmente molto vicine nello spazio delle fasi

La (2.34) è l'espressione che ci siamo imposti di cercare ad inizio di questo paragrafo.

Vediamo con alcuni esempi il suo impiego per la determinazione tra punto di equilibrio e punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Riprendiamo l'esempio della mappa funzionale (2.21) e che qui richiamiamo avendo posto $k = 4$:

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n). \quad (2.35)$$

Abbiamo già verificato che esiste un punto di equilibrio $x^* = 0.75$. Procediamo ora a determinare l'esponente di Lyapunov. Osserviamo preliminarmente che il problema è comunque mal condizionato avendo un fattore di amplificazione dei dati $C = 2$. Inoltre la derivata della (2.35) nel punto di equilibrio è data da

$$f'(x) = 4 - 8x \Rightarrow f'(x^*) = 4 - 8x^* = -2$$

ne consegue, stante la (2.34), che $\lambda_{x^*=0.75} = 0.1844$. Pertanto il sistema esibisce orbite instabili e caotiche, vale a dire che il punto $x^* = 0.75$ pur essendo un punto fisso per la mappa in oggetto, non è stabile asintoticamente.

La tabella che segue sintetizza le condizioni dinamiche della mappa in funzione del primo punto x_0 (*seed*) prescelto (Tab. 2.1).

Seed	Orbita
0.10	Instabile/Caotica
0.20	Instabile/Caotica
0.55	Instabile/Caotica
0.60	Instabile/Caotica

Tab. 2.1

L'esempio che segue illustra, invece, il caso di un punto di equilibrio asintoticamente stabile. La sua equazione è identica a quella dell'esempio precedente, ora, però, poniamo $k = 2.5$. Pertanto la mappa monodimensionale è la seguente:

$$x_{n+1} = 2.5x_n(1 - x_n). \quad (2.36)$$

Il punto fisso, stante la (2.22), è rappresentato da $x^* = 0.6$. La Fig. 2.14 che segue illustra il diagramma della mappa in oggetto e quello della retta bisettrice $y = x$ che consente di individuare graficamente il punto fisso.

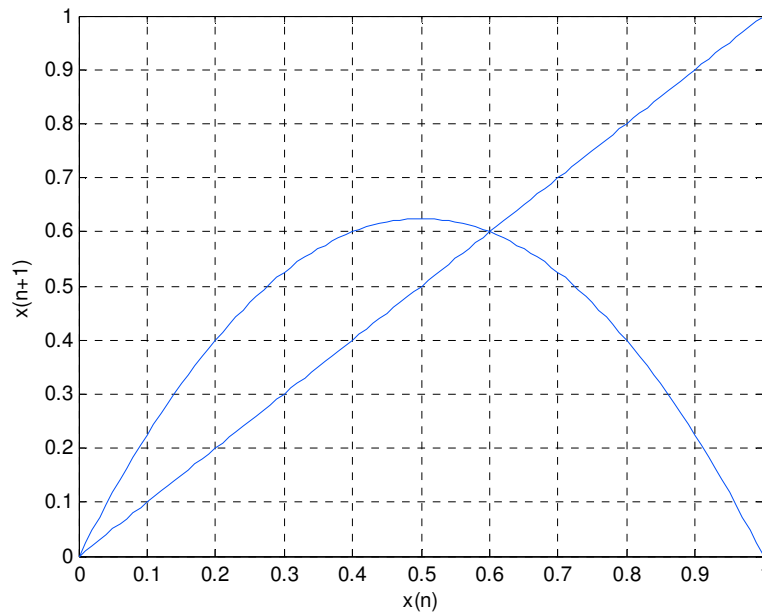


Fig. 2.14

Per l'esempio proposto abbiamo che la derivata della mappa calcolata nel punto fisso vale

$$f'(x) = 2.5 - 5x \Rightarrow f'(x^*) = -0.5$$

da cui immediatamente segue che $\lambda_{x^*=0.6} = -0.6931$. Pertanto questo punto fisso è asintoticamente stabile. La Fig. 2.15 che segue esemplifica quanto testé affermato e cioè che da qualunque punto dell'intorno di $x^* = 0.6$ ci si incominci a muovere la traiettoria tende asintoticamente ad un equilibrio, rappresentato proprio da $x^* = 0.6$.

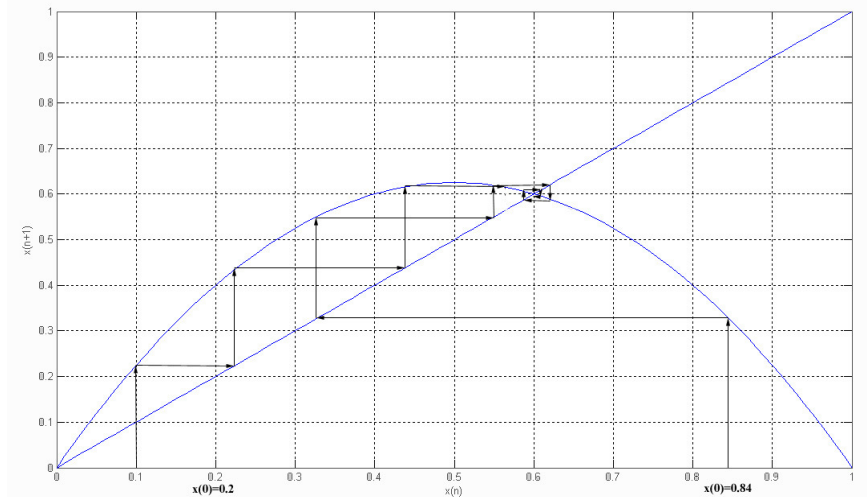


Fig. 2.15

L'esempio che segue, invece, esemplifica il caso in cui la traiettoria non tende mai ad un punto di equilibrio. La mappa a cui facciamo riferimento è mostrata in Fig. 2.16, ed è definita come segue²⁵:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{se } x_n \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x_n) & \text{se } x_n > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.37)$$

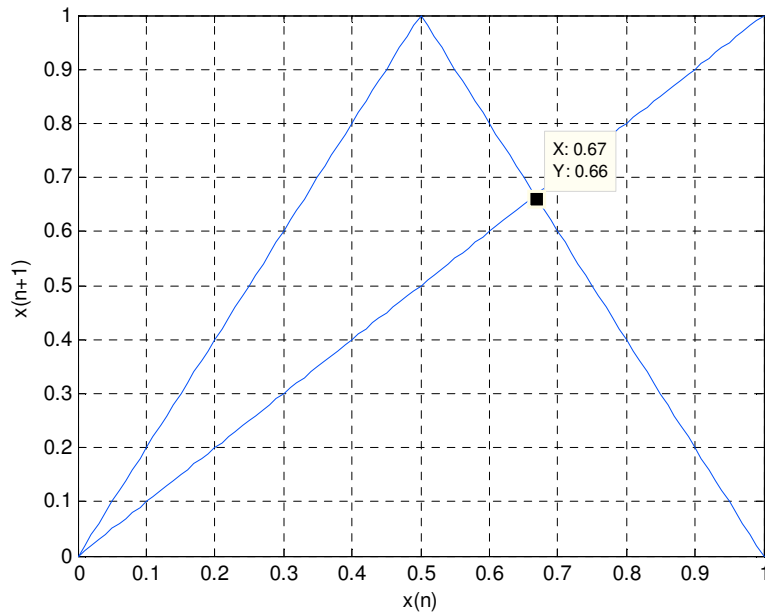


Fig. 2.16

²⁵ Essa è anche denominata mappa a "tenda" per la sua particolare forma che ricorda appunto una tenda.

Il punto fisso stante la (2.22) è dato da $x^* = 0.6667$ mentre, poiché la derivata è sempre pari a 2, l'esponente di Lyapunov risulta $\lambda = \ln(2) = 0.6931 > 0$. Essendo $\lambda > 0, \forall x_0 \in [0,1]$ allora qualunque traiettoria scegliamo non tenderà mai ad un punto di equilibrio così come bene esemplificato dalla Fig. 2.17 che segue.

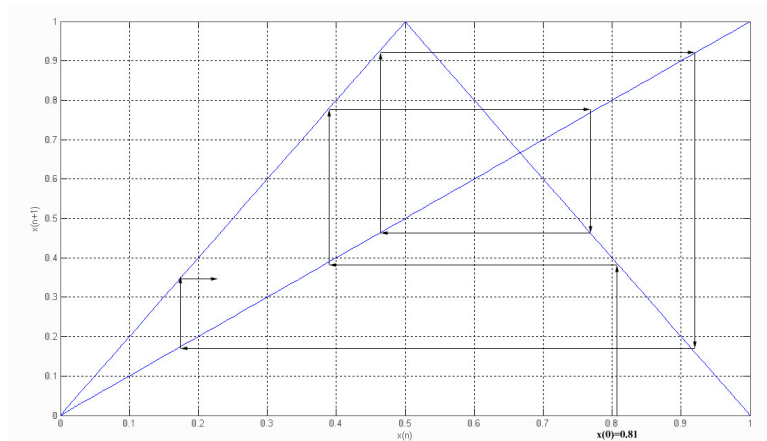


Fig. 2.17

Concludiamo il paragrafo con alcune osservazioni:

sulla bisettrice $y = x$ di fatto si genera, per ogni traiettoria prescelta, una successione numerica che certamente tende ad un limite (punto di equilibrio asintotico) se la successione rispetta la condizione di sufficienza secondo Cauchy.

Segue dalla (2.32), dovendo essere $\delta(x_{n+m}) \rightarrow e^{\lambda_{x_n}^m} \delta(x_n)$, che la distanza tra due orbite, dopo un intervallo m , è cresciuta o meno mediamente secondo un fattore moltiplicativo uguale a $e^{\lambda_{x_n}^m}$. Inoltre, il tasso medio di espansione o contrazione delle orbite, Λ , è funzione del prodotto delle derivate nel punto x_n . Questo fatto indica la velocità con cui i punti vicini ad x_n si allontanano o si avvicinano dopo m iterazioni. Ne consegue che la migliore approssimazione lineare di una funzione differenziabile vicino ad un punto assegnato è rappresentata dalla matrice jacobiana. Se la traiettoria tende asintoticamente ad un punto di equilibrio allora $\lambda_{x_n}^m$ coincide con il logaritmo del modulo dello jacobiano.

Tutto ciò premesso possiamo ora procedere ad illustrare una serie di metodi per determinare se, assegnato un sistema dinamico, esso possa essere classificato come caotico. Una caratteristica di una tale famiglia di sistemi è quella che è legata alla dipendenza dalle condizioni iniziali. Il che significa che se due traiettorie in un determinato istante sono molto vicine, dopo un brevissimo intervallo di tempo, stante la (2.32) possono in media muoversi esponenzialmente, nel senso che possono allontanarsi ovvero avvicinarsi. Pertanto per un sistema tempo continuo possiamo dire che la (2.32) può anche scriversi in maniera più sintetica come segue:

$$\delta(t) = \delta(t_0)e^{\lambda t}, t \in R_0^+ \quad (2.38)$$

dove con $\delta(t_0)$ abbiamo indicato la distanza iniziale tra le due traiettorie.

La (2.38) può essere scritta con notazione analoga ma con riferimento a sistemi dinamici a tempo discreto come segue (Fig. 2.18):

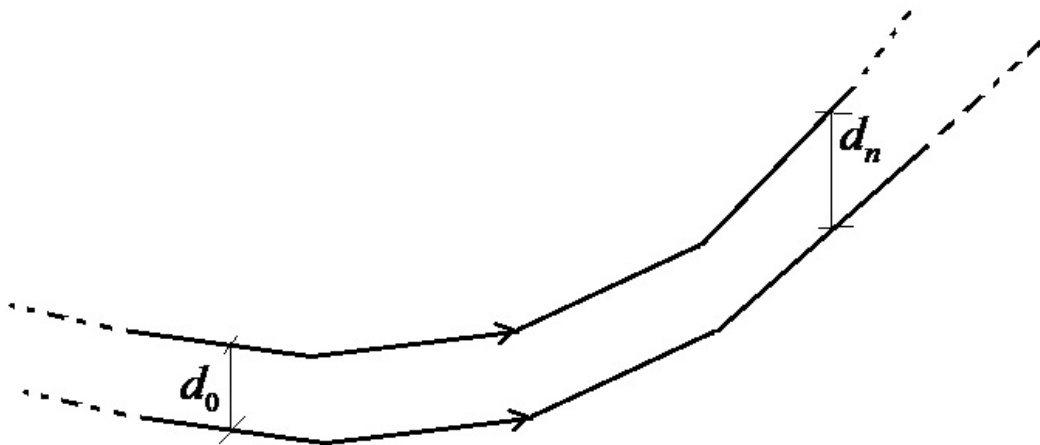


Fig. 2.18

$$d_n = d_0 e^{\lambda n}. \quad (2.39)$$

Osserviamo che la divergenza di un sistema caotico, se esso presenta una mappa limitata, non può procedere all'infinito. Pertanto quando ci riferiamo alla (2.38) ovvero alla (2.39) dobbiamo intendere che esse hanno valore locale cioè per brevi intervalli temporali. Ebbene selezionata una traiettoria possiamo facilmente verificare il comportamento del rapporto

$$\frac{d(t)}{d(t_0)} \quad (2.40)$$

nell'intervallo prescelto $(t-t_0)$, piccolo a piacere. Possiamo in tal modo procedere, selezionando opportuni intervalli consecutivi, a determinare una successione finita di tali rapporti come di seguito indicata:

$$\left\{ \frac{d_1}{d_0}, \frac{d_2}{d_1}, \dots, \frac{d_n}{d_{n-1}} \right\}. \quad (2.41)$$

Dalla successione rappresentata dalla (2.41) possiamo ricavare la stima dell'esponente di Lyapunov come media rapportata all'intervallo temporale esaminato:

$$\lambda = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{j=1}^n \log \frac{d(t_j)}{d(t_{j-1})}. \quad (2.42)$$

Possiamo a questo punto affermare, almeno in prima battuta, che il sistema dinamico esaminato presenta caratteristiche caotiche se $\lambda > 0$, viceversa, se $\lambda < 0$ allora il suo andamento è regolare.

Riprendendo la mappa parametrica funzionale discreta

$$x_{n+1} = kx_n(1-x_n), \quad (2.43)$$

la determinazione degli esponenti di Lyapunov in funzione del parametro $0.1 \leq k \leq 4$ è illustrata in Fig. 2.19

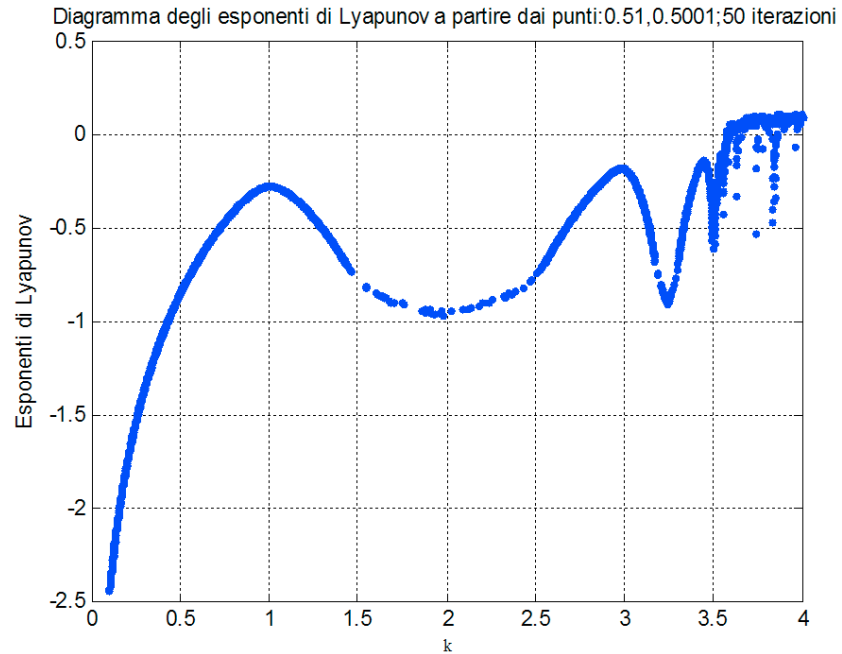


Fig. 2.19

In base alla densità di punti calcolati possiamo dire che il primo valore positivo dell'esponente di Lyapunov lo abbiamo per $k = 3.575$ in corrispondenza del quale abbiamo un $\lambda = 0.02159$ il cui diagramma è riportato in Fig. 2.20

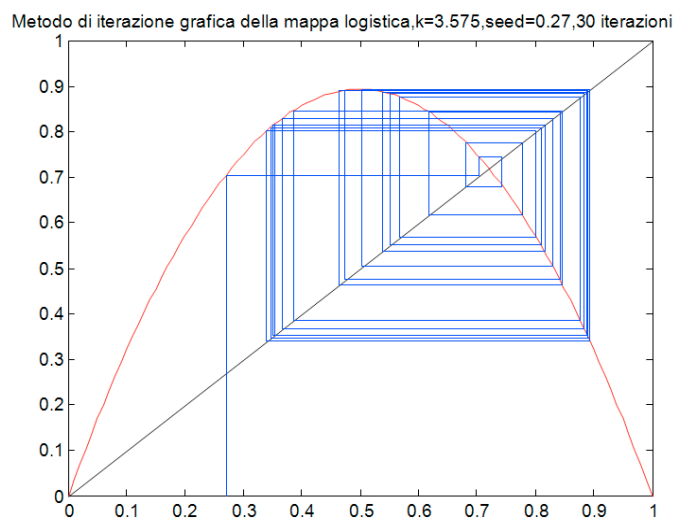


Fig. 2.20

Abbiamo visto come possiamo quantizzare la proprietà posseduta da alcuni particolari sistemi dinamici in merito alla forte sensibilità alle condizioni iniziali.

Con riferimento ad uno spazio delle fasi n -dimensionale si definiscono n esponenti di Lyapunov che in genere si ordinano in senso decrescente di "peso":

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Se gli esponenti sono tutti negativi allora siamo in presenza di un sistema dinamico n -dimensionale dotato di un punto fisso detto anche attrattore.

Se almeno uno degli esponenti è positivo allora siamo in presenza di un regime caotico.

Diremo che siamo in presenza di un ciclo limite se il primo esponente è nullo e i restanti sono negativi, cioè $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_i < 0, 1 < i \leq n$.

Viceversa, un sistema dinamico avrà una evoluzione quasi-periodica e l'attrattore nello spazio delle fasi si chiama toro k -dimensionale, cioè $\lambda_i = 0, 1 \leq i \leq k$ e $\lambda_j < 0, k < j \leq n$.

2.9 Il calcolo degli esponenti di Lyapunov attraverso il problema degli autovalori ed autovettori

Abbiamo già sottolineato che un processo dinamico che evolve nel tempo in maniera caotica o non, comunque può essere analizzato attraverso lo studio delle distanze delle sue traiettorie a partire da un istante qualsiasi. Generalmente la rappresentazione grafica è quella riportata in Fig. 2.21

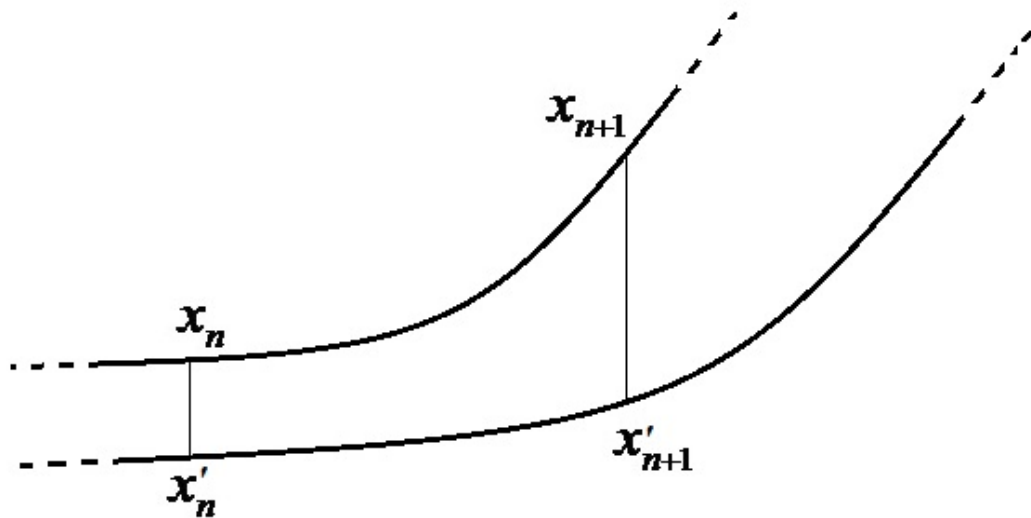


Fig. 2.21

Un sistema dissipativo n -dimensionale, ad esempio, tende a contrarre e a deformare l'iniziale ipersfera. In uno spazio tridimensionale una sfera si deforma in un ellissoide, in uno spazio bidimensionale un cerchio in un'ellisse.

Ad esempio, in uno spazio tridimensionale, un sfera inizialmente di raggio ρ dopo n unità di tempo diventa un ellissoide con assi principali rispettivamente di lunghezza $(\varepsilon_1^n \rho, \varepsilon_2^n \rho, \varepsilon_3^n \rho)$ di talché possiamo concludere che ad ogni sistema dinamico è associabile uno spettro di esponenti di Lyapunov $\{\lambda_i\}$, $\lambda_i = \ln \varepsilon_i$.

Sappiamo che in uno spazio monodimensionale le lunghezze variano con la seguente legge

$$d(t) \approx d_0 e^{\lambda t}, \quad (2.44)$$

in uno spazio bidimensionale le aree variano con legge del tipo

$$A(t) = A_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \quad (2.45)$$

mentre in uno spazio tridimensionale i volumi variano con legge

$$V(t) = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} \quad (2.46)$$

e così di seguito.

Pertanto volendo generalizzare il problema possiamo dire che il cambiamento nel tempo dell'ipersfera dipende dalla derivata locale, cioè, se consideriamo una mappa m -dimensionale

$$\bar{x}_{n+1} = F(\bar{x}_n) \quad (2.47)$$

allora sarà fondamentale studiare la matrice Jacobiana associata al sistema dinamico. Ad esempio se

$$F = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

possiamo ricavare il seguente gradiente locale (o Jacobiano), supposto che la funzione sia derivabile,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Dopo n iterazioni della mappa la ipersfera assumerà una forma che dipenderà dal prodotto dei primi n Jacobiani:

$$J_n = [J^n J^{n-1} \dots J^1] \quad (2.49)$$

Se ipotizziamo che gli intervalli temporali siano infinitamente piccoli tali cioè da poter ritenere linearizzabile il sistema dinamico allora possiamo ritenere lo Jacobiano un operatore lineare e quindi procedere a calcolare gli autovalori ad esso associati

Ciostante, gli autovalori di J_n saranno $j_1(n) \geq j_2(n) \geq \dots \geq j_m(n)$. Da cui possiamo ricavare gli esponenti di Lyapunov

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln j_i(n), i = 1, \dots, m. \quad (2.50)$$

Capitolo 3

Metodiche applicative

3.1 Premessa

In un generico processo manifatturiero in cui siano presenti organi e alberi rotanti parte dell'investimento di capitale è indirizzato alla loro manutenzione.

Spesso alcuni componenti meccanici vengono sostituiti senza aver identificato la causa del danneggiamento, lasciando quindi aperta la possibilità a future e analoghe rotture non previste.

La misura sistematica delle vibrazioni del macchinario, inserita in un adeguato programma di manutenzione predittiva, consente di ottenere benefici quali: annullamento o drastica riduzione delle fermate non programmate, utilizzo dei componenti fino al tempo economico di sostituzione, eliminazione o riduzione di rotture dei componenti che fermano la produzione. Per ottenere questi benefici è però necessario riuscire a distinguere l'insorgere del danno in un tempo utile all'intervento manutentivo. L'analisi di spettri complessi come quelli generati da sistemi meccanici è difficoltosa e complicata dalla possibile sovrapposizione di altri segnali provenienti dalla macchina o dai suoi componenti in movimento. La loro analisi e la diagnostica può essere semplificata dall'uso di una procedura di identificazione delle frequenze principali e delle loro armoniche, calcolandone la somma e la differenza e considerando nello spettro soltanto i picchi prodotti da queste frequenze.

Questa procedura ha però utilità limitata perché la contaminazione dei segnali provenienti dal resto della macchina riduce enormemente l'affidabilità e l'identificabilità dei rilievi. Tecniche più idonee sono quelle basate su filtraggi selettivi o sull'individuazione di opportuni campi di frequenza in cui il rapporto segnale/rumore risulti idoneo alla misura. In ogni caso l'interpretazione dei difetti

dei sistemi meccanici complessi passa spesso attraverso l'analisi FFT (Fast Fourier Transform) dei segnali in bassa frequenza, ottenuti mediante demodulazioni e involucri di segnali associati a campi di frequenze più elevate.

L'obiettivo è allora sviluppare e rendere disponibile per applicazione in ambito industriale una metodologia di indagine in grado di identificare i difetti presenti.

Perché la metodologia sviluppata sia bene adattabile alla realtà industriale si sono scelte tecniche di indagine che consentano misurazioni le meno intrusive possibili nei macchinari limitando le acquisizioni di segnale in due o tre direzioni ortogonali rispetto, ad esempio, all'asse di rotazione dell'albero. Pertanto, l'obiettivo allora è quello di individuare le tecniche più sensibili alle variazioni dello stato di salute dei sistemi dinamici e tra queste scegliere quelle che richiedono un minore carico computazionale. Per confrontare le potenzialità delle diverse tipologie di analisi del segnale (valore di picco, Crest Factor, valore globale o quadratico medio (RMS), Curtosi, Cepstrum, involucri spettrale, ecc.) utilizzate per identificare il loro danneggiamento difettato *ad hoc*, è stato realizzato un banco prova dedicato, simile a una macchina di tipo industriale e quindi in grado di combinare più sorgenti di vibrazione. Tra le varie tecniche sperimentate, il metodo dell'analisi a mezzo trasformata wavelet si è dimostrato particolarmente adatto, in combinazione con la teoria del caos, per l'identificazione dei difetti.

3.2 Wavelet e caos deterministico

Come abbiamo anticipato, un segnale ovvero una serie temporale ovvero una funzione analitica possono facilmente essere trasformate in un insieme composto da coefficienti wavelet ciascuno rappresentativo di una particolare frequenza corrispondente ad una scala prefissata. Tale tecnica di trasformazione fornisce una mappa molto utile se dobbiamo indagare le caratteristiche presenti nel segnale origine. Che i due mondi (quello della Wavelet e quello del caos deterministico) si dovessero prima o poi integrare era ormai scontato. In questo paragrafo vogliamo soltanto tratteggiare quest'ultimo sviluppo e presentare alcune

interessanti simulazioni che meglio di ogni altro possono dare una idea di come è possibile sfruttare la potenza di elaborazione offerta da essi.

Monitorare un sistema dinamico non lineare significa prima di tutto individuarne le eventuali variazioni dinamiche che non possono essere ascritte ad eventi puramente aleatori. Indagare in tal senso, però, comporta un grosso problema metodologico: stabilire se quello che stiamo osservando è dovuto al caso ovvero è determinato dal caos deterministico. Decidere in un senso o nell'altro non è cosa sempre facile e possibile. Scopo di questo paragrafo è quello di presentare una serie di metodi che possono aiutare il ricercatore ad orientarsi in questa terra di nessuno dove spesso le sfumature sono molto labili ed il nostro tentativo è quello di rappresentare con modelli semplificati deterministici o stocastici i fenomeni che si presentano in natura.

3.3 Il problema del malcondizionamento dei dati

Prima di affrontare i problemi afferenti alla teoria del caos non possiamo non richiamare ed introdurre alcuni concetti di base necessari per poter discriminare tra falsi o veri fenomeni caotici.

Un segnale non è altro che una sequenza numerica che se è descrivibile tramite una funzione allora esso è chiamato deterministico, altrimenti è chiamato aleatorio.

Per tali sequenze numeriche si presenta spesso un dilemma legato al buono o cattivo condizionamento dei dati. Cioè, ci chiediamo se è possibile trovare una relazione che leghi la variazione dei dati in ingresso Δx con quelli in uscita $\Delta f(x)$, su di un sistema dinamico elementare quale può essere un *black-box*. Un tale tipo di problema si presenta, ad esempio, ogniqualvolta effettuiamo misurazioni affette da errori e/o da arrotondamenti.

Introduciamo l'errore assoluto per i dati in ingresso e quelli che di conseguenza si ripercuotono sui dati in uscita:

$$E_x = |x - \hat{x}| \quad \text{e} \quad E_{f(x)} = |f(x) - \hat{f}(x)|$$

dove i termini col segno \wedge indicano le quantità affette da errori di misurazione di qualunque natura essi siano.

L'errore assoluto, però, non è sensibile alla "significatività" della variazione. Ad esempio, consideriamo le due differenze: $|0.374 - 0.372| = 0.002$ e $|10000.137 - 10000.135| = 0.002$.

Non v'è dubbio che, pur esibendo lo stesso risultato, il secondo errore ha certamente un peso relativo minore rispetto al primo.

Pertanto, conviene definire una quantità che tenga conto anche dei valori in gioco, da qui l'esigenza di introdurre il cosiddetto errore relativo definito come appresso rispettivamente per le variazioni dei dati di ingresso (dominio) e per le corrispondenti variazioni dei dati di uscita (codominio):

$$E'_x = \frac{|\Delta x|}{|x|} \quad \text{e} \quad E'_{f(x)} = \frac{|\Delta f(x)|}{|f(x)|}. \quad (3.1)$$

Ciò premesso, ci proponiamo di determinare una legge che possa mettere in relazione gli errori in (3.1).

Cominciamo con l'osservare che, poiché una eventuale modificazione dei dati di ingresso si ripercuote anche sui dati di uscita, allora deve essere:

$$\Delta x \rightarrow \Delta f(x).$$

Quindi

$$\Delta x = (x + \Delta x) - x \rightarrow \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Moltiplicando ambo i membri per $x \Delta x$ otteniamo

$$\Delta f(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} x \frac{\Delta x}{x}.$$

Passando al limite per Δx tendente a zero, considerando inoltre la (3.1) e passando ai moduli si ha

$$|\Delta f(x)| = |f'(x)| E'_x.$$

Dividendo ambo i membri per il modulo di $f(x)$ e ricordando ancora la (3.1) otteniamo la relazione finale cercata:

$$E'_{f(x)} = \frac{|f'(x)x|}{|f(x)|} E'_x.$$

Dunque l'errore relativo che eventualmente commettiamo sui dati di ingresso si ripercuote sui dati in uscita come se fosse un fattore di amplificazione

$$C = \frac{|f'(x)x|}{|f(x)|}$$

chiamato per l'appunto fattore di condizionamento dei dati. Questo significa che l'errore in uscita è una funzione del fattore di amplificazione C . Ad esempio, se la funzione di trasferimento (ingresso \rightarrow uscita) è del tipo $f(x) = x^n, n \in N$, il fattore di condizionamento è dato da $C = \frac{nx^{n-1}x}{x^n} = n$.

Ciò porta ad una facile interpretazione geometrica.

In Fig. 3.1, per $n=1$, $C=1$ e per $n=2$, $C=2$, si vede chiaramente che a parità di Δx , la variazione dell'uscita è tanto più grande quanto più C è grande quindi quanto più grande è l'esponente n della funzione considerata.

Dunque il mal condizionamento è un fattore da tenere in grossa considerazione quando si affrontano problemi numerici soprattutto se questi possono implicare conseguenze di tipo caotico per le quali piccole variazioni in ingresso possono determinare nei sistemi coinvolti evoluzioni non soltanto

imprevedibili ma praticamente molto diverse tra loro. Pertanto occorre ben definire lo stato del sistema. Tutto questo sarà presentato nei prossimi paragrafi.

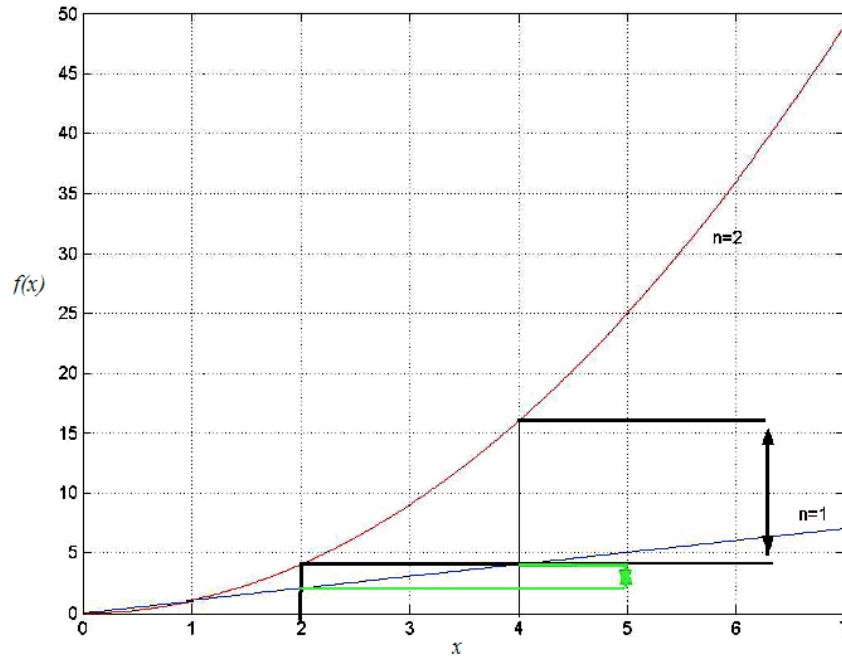


Fig. 3.1

3.4 Metodo pratico per il calcolo di λ_1

Come già sottolineato nel Capitolo 2, degli n esponenti di Lyapunov, nel caso di una mappa n -dimensionale, il più discriminante, ai fini della definizione dello stato di un sistema dinamico, è il primo. Pertanto, durante la presente ricerca, sono stati messi a punto una serie di algoritmi che permettono di calcolarlo con una buona approssimazione. Uno dei più semplici è quello che illustriamo di seguito.

Assegnata una mappa si possono estrarre da essa, in modo iterativo, due successioni numeriche con la condizione che la seconda abbia come punto iniziale un valore prossimo a quello della prima successione. Chiamiamo

$$\delta x(0) = |x(0) - x'(0)| \quad (3.2)$$

la loro distanza, avendo indicato con $x(0)$ il valore iniziale della seconda successione e con $x'(0)$ quello relativo alla prima.

Dopo un tempo t le due successioni avranno distanza

$$\delta x(t) = |x(t) - x'(t)|. \quad (3.3)$$

Per quanto detto in precedenza il primo esponente di Lyapunov lo possiamo determinare come segue

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\delta x(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\delta x(t)}{\delta x(0)} \right). \quad (3.4)$$

Il metodo approssimato che illustriamo parte da questa semplice considerazione e cioè che la distanza al tempo t mostrato dalle due successioni è proporzionale, a meno di una costante di amplificazione, alla distanza da essa esibita nell'istante iniziale, cioè, stante la (3.4)

$$\delta x(t) \approx \delta x(0) e^{\lambda_1 t} \quad (3.5)$$

da cui applicando ad ambo i membri il logaritmo naturale otteniamo il primo degli esponenti di Lyapunov

$$\ln \frac{\delta x(t)}{\delta x(0)} = \lambda_1 t. \quad (3.6)$$

La variabile t che compare nella (3.6) può essere assunta come parametro temporale per il diagramma iterato delle due successioni. Il grafico che così si ottiene interpolato con una retta ai minimi quadrati fornisce il coefficiente angolare che a sua volta è una buona stima dell'esponente in parola.

3.5 Trasformata wavelet adattativa

Notiamo che per molti segnali dinamici di origine meccanica, le caratteristiche dei componenti sono di carattere impulsivo. Molti degli odierni metodi presenti in letteratura non sono affidabili se l'operazione è quella di identificare componenti impulsive ricoperte da rumore.

Pertanto abbiamo approntato una nuova metodica (denominata wavelet adattativa) utile per il *denoising*. Essa può trovare applicazione in special modo per la estrazione di componenti impulsive.

Abbiamo più volte messo in evidenza che il calcolo dei coefficienti wavelet si basa sulla convoluzione tra il segnale, ad esempio accelerometrico, ricavato dal sistema dinamico monitorato e la funzione wavelet.

Questo implica che la wavelet che deve essere impiegata per "scoprire" le caratteristiche del segnale deve essere quanto più simile alle caratteristiche evidenziate dal segnale accelerometrico. La discretizzazione diadica ($a = 2^j, b = k2^j, j, k \in Z$) è uno dei metodi più impiegati, tale metodo, però, non è impiegabile con successo se il segnale accelerometrico presenta un SNR²⁶ molto basso.

Pertanto, la trasformata wavelet che presentiamo in questo paragrafo consente di adattarsi alle caratteristiche che vogliamo ricercare in un segnale. Essa è chiamata wavelet continua (CWT) adattativa.

Pertanto, l'obiettivo è quello di progettare una wavelet che sia quanto più simile ai segnali impulsivi dinamici solitamente monitorati sui sistemi meccanici, per tale ragione l'abbiamo definita adattativa, per la sua principale caratteristica di "adattarsi" al segnale in studio.

La funzione madre è definita come segue

$$\psi(t) = e^{(-\beta^2 t^2 / 2)} \cos(\pi t) . \quad (3.7)$$

²⁶ Signal to Noise Ratio.

Notiamo che la funzione presenta le seguenti caratteristiche: non è ortogonale, le griglie di campionamento sono piuttosto sparse ed è tempo invariante a supporto compatto.

Possiamo ricavare funzioni "figlie" agendo sulla dilatazione a e sulla traslazione b come di seguito

$$\psi_{a,b}(t) = e^{\left[-\frac{\beta^2(t-b)^2}{a^2}\right]} \cos\left[\frac{\pi(t-b)}{a}\right]. \quad (3.8)$$

La Fig. 3.2 mostra la forma di tale wavelet. Essa è una funzione coseno che decade esponenzialmente su entrambi i lati.

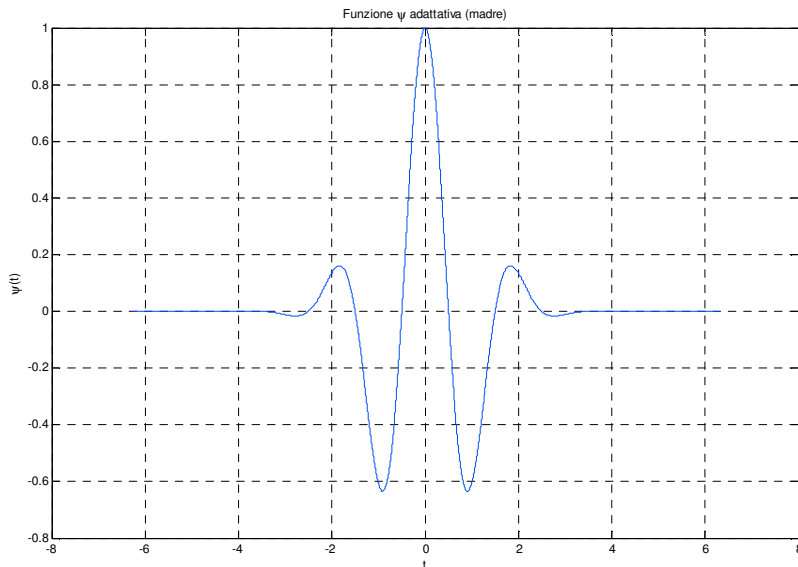


Fig. 3.2 – Wavelet adattativa (madre)

Nella (3.8) compaiono tre parametri: a , b e β . Differenti definizioni dei domini di a e b corrispondono a differenti segmentazioni del piano tempo-scala della CWT.

Ricordiamo che poiché per un determinato segnale digitale, il tasso di campionamento segue sempre il Teorema di Nyquist-Shannon, il campionamento (*sampling rate*) deve sempre essere molto alto (dell'ordine dei kHz). In tal modo avremo sufficiente risoluzione temporale se l'unità di traslazione dovesse coincidere con il periodo di campionamento. Ne consegue che la lunghezza della griglia tempo-scala lungo l'asse temporale è uguale al periodo di campionamento.

Notiamo anche che la lunghezza della griglia tempo-scala lungo l'asse della scala può essere diversa a seconda dei casi monitorati dipendendo ciò anche dalla distribuzione e risoluzione delle caratteristiche delle componenti frequenziali.

A questo adattamento provvede il parametro β che, agendo sia sulla risoluzione temporale che su quella frequenziale, ne modifica la forma.

Se β decresce si incrementerà la frequenza di risoluzione ma decresce la risoluzione temporale. Quando β tende a zero la CWT diviene una funzione coseno che mostrerà la più fine risoluzione frequenziale (Fig. 3.3) e quando β tende all'infinito la CWT diviene una funzione di Dirac e quindi avrà una più alta risoluzione temporale (Fig. 3.4).

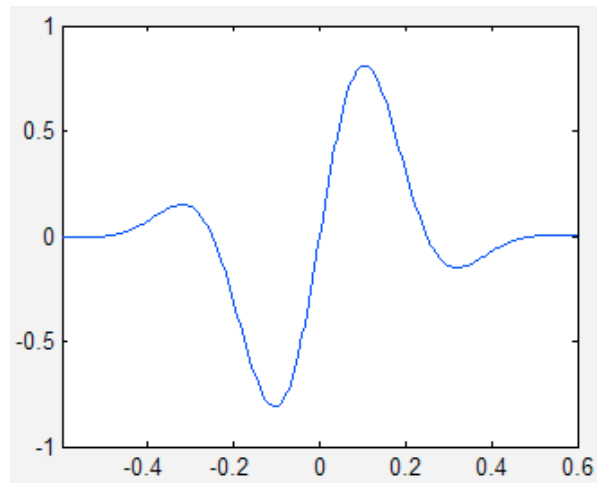


Fig. 3.3 - $\beta \rightarrow 0$

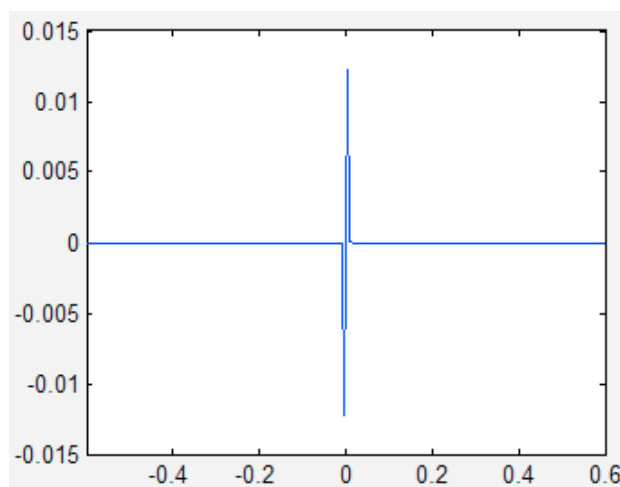


Fig. 3.4 - $\beta \rightarrow \infty$

Così ci sarà sempre un β ottimo che determinerà la migliore risoluzione tempo-frequenza per una famiglia di segnali localizzati nel piano tempo-frequenza.

Il processo di ottimizzazione della base wavelet fa riferimento alla "rarefazione" dei coefficienti wavelet. Perciò, il valore di β può essere determinato quando i coefficienti wavelet sono più "sparsi". Tale proprietà può essere misurata con la Entropia di Shannon.

Sia $\{c_i\}_{i=1,\dots,M}$ la classe dei coefficienti wavelet. Dopo un processo di normalizzazione del tipo

$$d_j = c_j / \sum_{i=1}^M c_i , \quad (3.9)$$

è possibile calcolare la entropia come

$$E_n = -\sum_{i=1}^M d_i \log d_i . \quad (3.10)$$

Per verificare la validità del metodo entropico proposto si è proceduto ad una simulazione.

Supponiamo di avere un segnale definito come segue:

$$\begin{aligned} f(t) = & e^{[-(t-400)^2/200]} \cos[\pi(t-400)/5] + \\ & e^{[-(t-425)^2/600]} \cos[\pi(t-425)/7.2] + \\ & e^{[-(t-440)^2/400]} \cos[\pi(t-440)/5.3] . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Il *sampling rate* è 1Hz ed i primi 160 punti sono illustrati in Fig. 3.5.

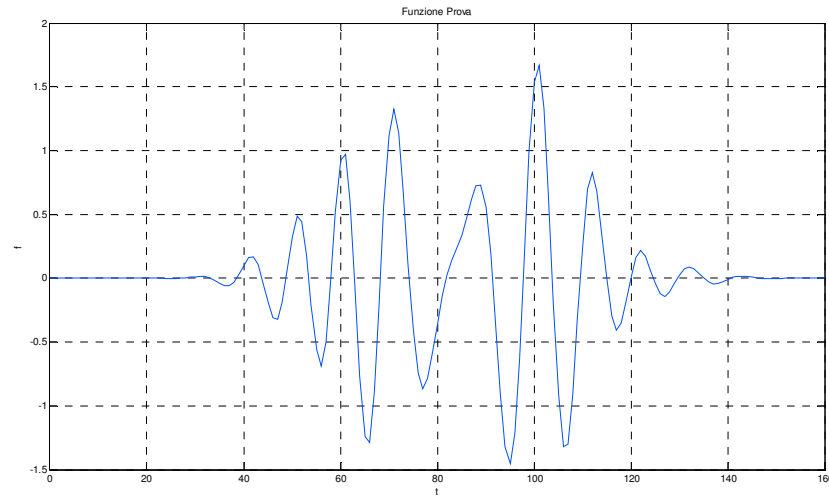


Fig. 3.5 - Funzione di prova (primi 160 punti)

Incrementando β da 0.1 a 20 e calcolando la entropia dei coefficienti wavelet normalizzati, si determina un minimo valore della entropia quando $\beta=0.5$. Tale valore è quello ottimale.

Infatti la simulazione con la funzione prima definita assumendo β pari a 0.2, 1.5 e 0.5 rispettivamente consente di notare la differenza. Osserviamo che la funzione include tre componenti impulsive; per $\beta=0.5$ i tre fenomeni impulsivi sono ben visibili (Fig. 3.6 e Fig. 3.7).

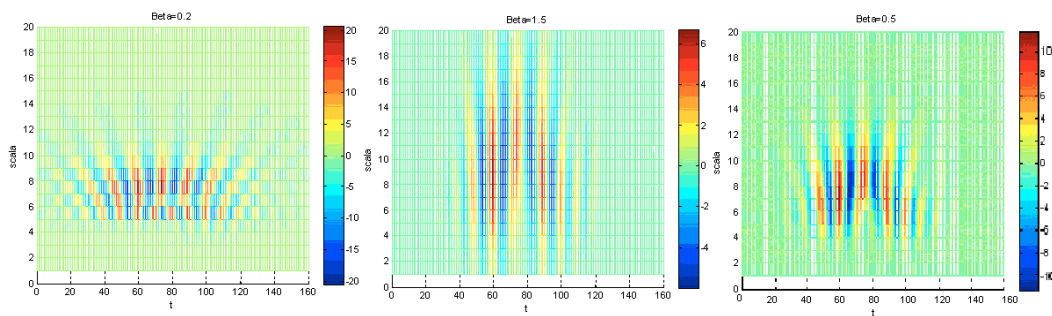


Fig. 3.6 – CWT del segnale quando $\beta=0.2$, $\beta=1.5$ e $\beta=0.5$

È importante sottolineare che la regola di ottimizzazione non è basata su un *threshold*, cioè su una soglia, ma sulla densità entropica dei coefficienti Wavelet: il minimo esibito dalla (3.10) in funzione di β (Fig. 3.8 e Fig. 3.9) corrisponde alla migliore risoluzione tempo-frequenziale per far sì che i coefficienti wavelet ottenuti misurino al meglio la "similarità" tra il segnale e la CWT. Di conseguenza

più la CWT esibisce caratteristiche tempo-frequenziali simili al segnale più grande è il corrispondente coefficiente Wavelet.

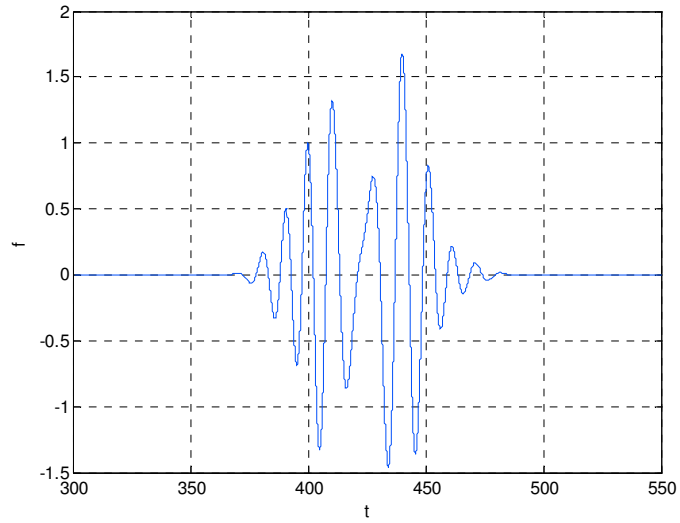


Fig. 3.7 - Segnale simulato

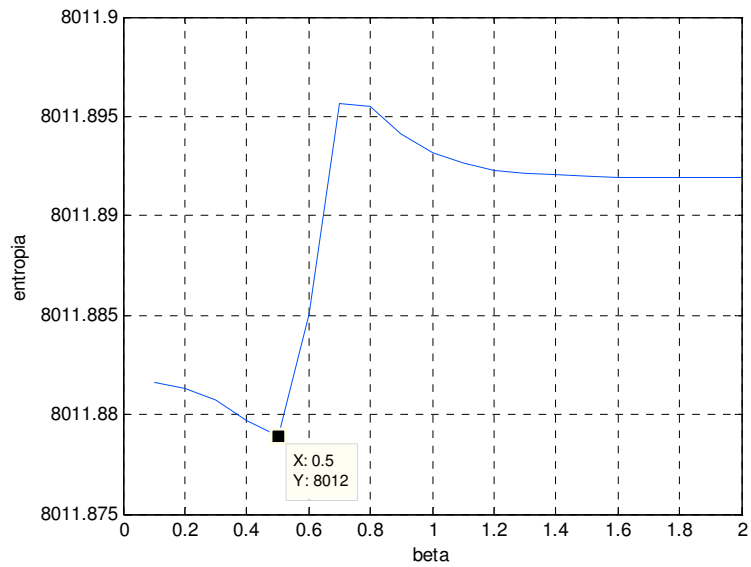


Fig. 3.8 - Diagramma entropia - β

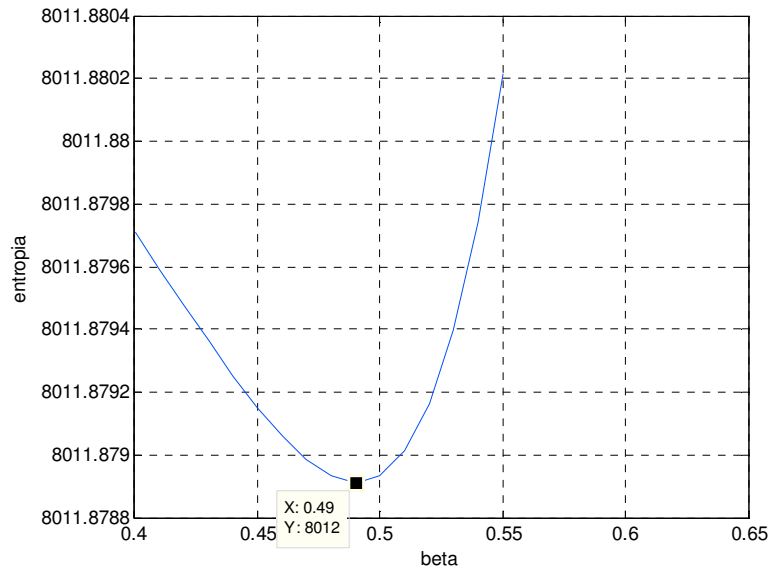


Fig. 3.9 - Particolare del minimo entropico in funzione di β

La Fig. 3.10 mostra un raffronto della shape relativa alla funzione (3.11) e della CWT ottimizzata.

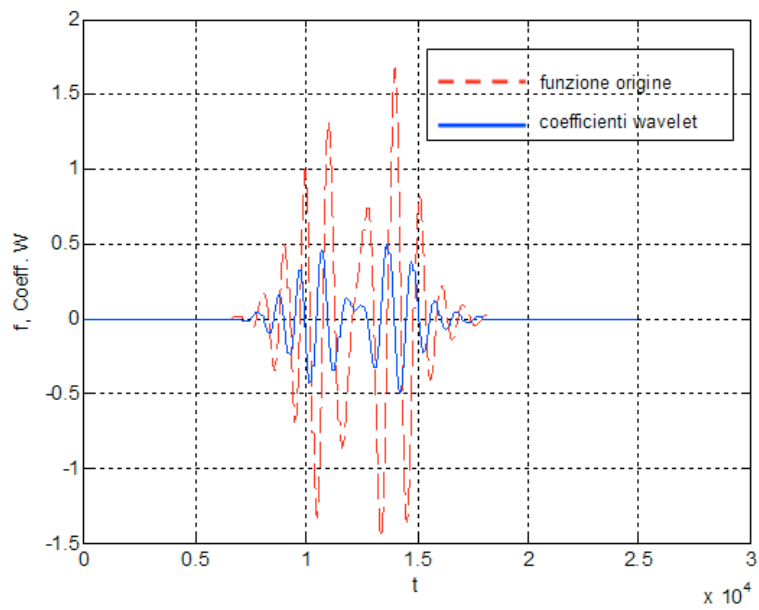


Fig. 3.10

3.6 Fonte di errori

In generale lo stato dinamico di un evento temporale discreto all'istante $(t+1)$ è dato da:

$$x(t+1) = f(x(t)) + \varepsilon(t) + \eta(t) + \gamma(t)$$

dove abbiamo indicato con $f(x(t))$ lo stato dinamico del sistema al tempo t , con $\varepsilon(t)$ l'errore di misurazione, con $\eta(t)$ le inevitabili perturbazioni che agiscono sul sistema da parte dell'ambiente e con $\gamma(t)$ gli errori di arrotondamento generati da parte di qualsiasi sistema di elaborazione. A questi andrebbe aggiunto anche l'errore sistematico di campionamento ovvero di misurazione chiamato *bias*.

Quanto ci sia di aleatorio nelle perturbazioni di cui sopra e soprattutto quanto queste possano incidere sullo sviluppo temporale del sistema dinamico stesso non è sempre facile stabilirlo.

Vogliamo, ora, mettere in evidenza alcune peculiarità degli errori di misurazione su una successione numerica non lineare.

Pertanto, procediamo ad esemplificare quanto fin qui detto con un esempio. In particolare consideriamo la seguente successione numerica composta da 10 elementi:

$$X = \begin{bmatrix} 0.4132 \\ 0.9699 \\ 0.1169 \\ 0.4129 \\ 0.9696 \\ 0.1178 \\ 0.4156 \\ 0.9715 \\ 0.1108 \\ 0.3941 \end{bmatrix}$$

Diagrammata (Fig. 3.11), sembra che la successione esibisca una certa stazionarietà. Infatti l'andamento dei primi 10 elementi sembra descrivere un diagramma che presenta una ripetitività o meglio una certa periodicità (periodo 3).

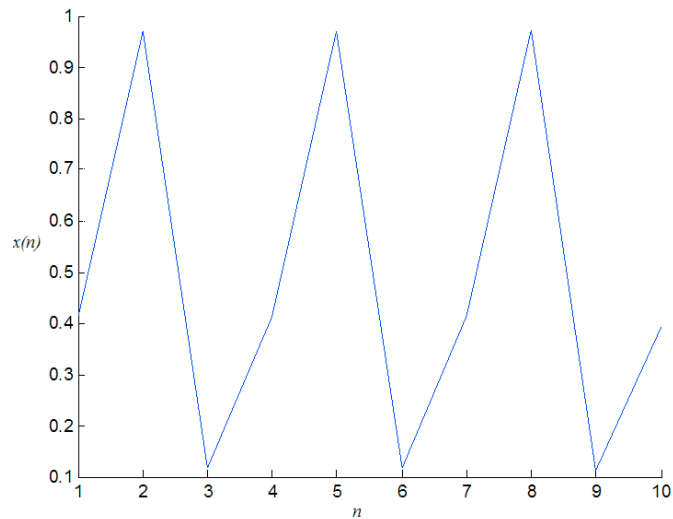


Fig. 3.11

Ebbene se proviamo ad andare avanti, ad esempio riportando i primi 20 elementi della serie temporale, ci accorgiamo che a partire dal decimo elemento il diagramma perde la sua regolarità esibita dai tre periodi (Fig. 3.12). Se diagrammiamo i primi 30 elementi l'andamento si fa sempre più irregolare (Fig. 3.13).

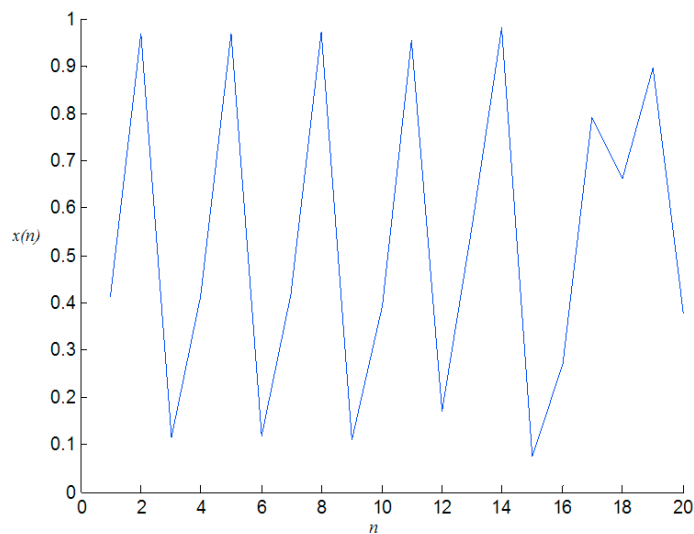


Fig. 3.12

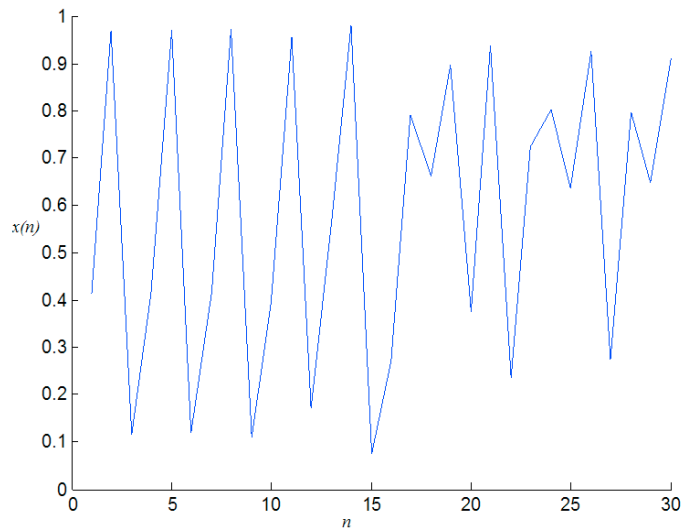


Fig. 3.13

L'andamento della successione diventa del tutto imprevedibile se proviamo a diagrammare i suoi primi 100 elementi (Fig. 3.14).

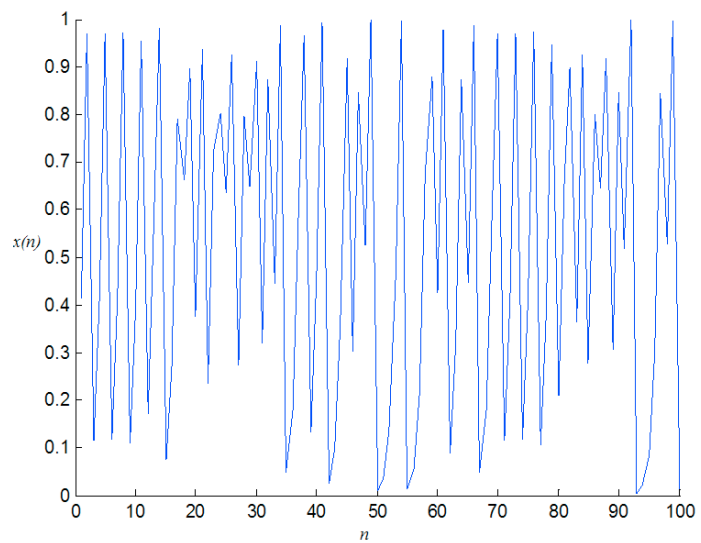


Fig. 3.14

Come si spiega tutto questo? Possiamo affermare che ci troviamo di fronte ad un tipico esempio di modello caotico? A dire il vero mai come in questo caso l'apparenza inganna. Infatti se proviamo a rappresentare su un piano i primi 100 elementi della serie temporale però accoppiando i valori come ascisse ed ordinate (x_n, x_{n+1}) , ecco cosa potremmo vedere (Fig. 3.15).

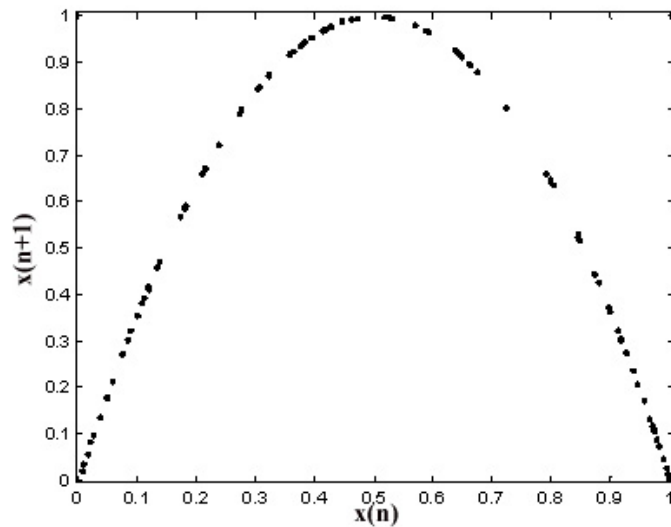


Fig. 3.15

Ci accorgiamo facilmente che gli elementi della successione sono tutt'altro che quelli generati da un sistema caotico. Il sistema che li genera è rappresentato da una semplicissima equazione deterministica di secondo grado: una parabola la cui equazione è $y = 4x(1-x)$.

La equazione la possiamo scrivere anche in modo ricorsivo nella forma seguente:

$$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n).$$

Così scritta l'equazione meglio si presta ad essere interpretata. Infatti, la prima coppia di coordinate è data da (0.116997, 0.4132). La successiva sarà data da (0.4132, 0.9699) e così di seguito. Quello che però lascia molto meravigliati è il fatto che se proviamo a cambiare il valore del primo elemento (seed) da $x_0 = 0.116997$ a $x_0 = 0.116998$ e diagrammiamo i primi 10 elementi non notiamo alcunché di diverso nell'andamento delle due successioni (Fig. 3.16). Invece, se proviamo ad estendere la successione ai primi 30 elementi notiamo che le due successioni già dal loro 12° elemento incominciano ad assumere valori diversi (Fig. 3.16).

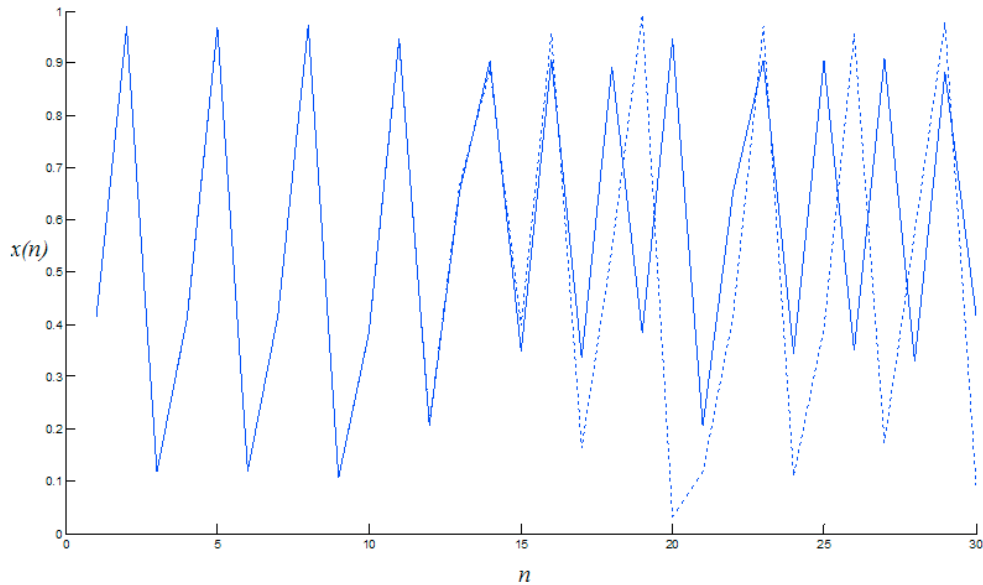


Fig. 3.16

Eppure abbiamo agito soltanto sulla 6^a cifra decimale del seed. Questo esempio bene mette in evidenza una proprietà del caos deterministico: la "contraffazione del caso" generata dalla serie²⁷. Ci chiediamo a questo punto quale è il reale andamento della successione che stiamo studiando? La risposta non la possiamo fornire. Possiamo soltanto ritenere che, ad esempio, il millesimo elemento della successione apparterrà alla parabola da cui esso viene generato. Non possiamo aggiungere altro! E' l'indeterminatezza dei sistemi caotici; essi sono fondamentalmente instabili nel senso che piccoli scarti iniziali conducono molto rapidamente a grandi deviazioni nella evoluzione temporale del sistema.

A tal proposito vogliamo ricordare quanto detto a proposito del mal condizionamento di un sistema. Il fattore di amplificazione per la successione in studio, dopo semplici passaggi, è uguale a 2. Pertanto l'errore (ε) che commettiamo a partire dal seed si ripercuote con un fattore doppio e così andando avanti reiterando il procedimento. La Fig. 3.17 che segue illustra la differenza esibita dai primi 30 elementi delle due serie. Osserviamo che l'errore rimane quasi nullo per i primi 15 elementi per poi esplodere improvvisamente a partire dal 17° elemento in poi. Se proviamo a calcolare il logaritmo dell'errore possiamo meglio renderci conto del suo "tasso di crescita" (Fig. 3.18) soprattutto nei primi istanti di vita delle due serie, laddove sembra che le differenze siano nulle.

²⁷ I. Ekeland, Come funziona il caos. Bollati Boringhieri, 2006.

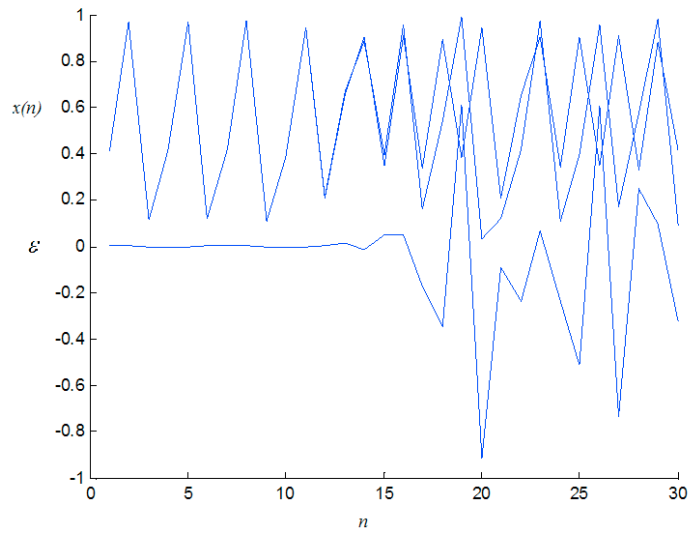


Fig. 3.17

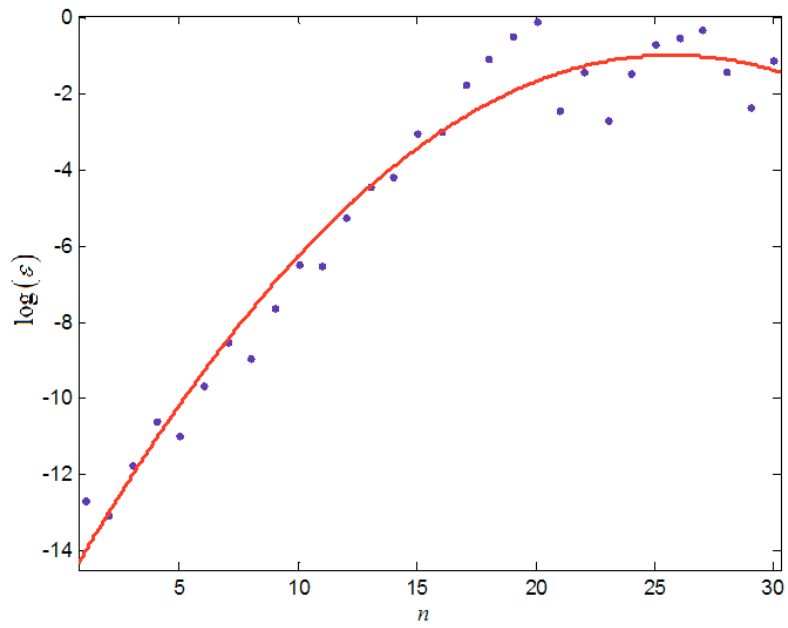


Fig. 3.18

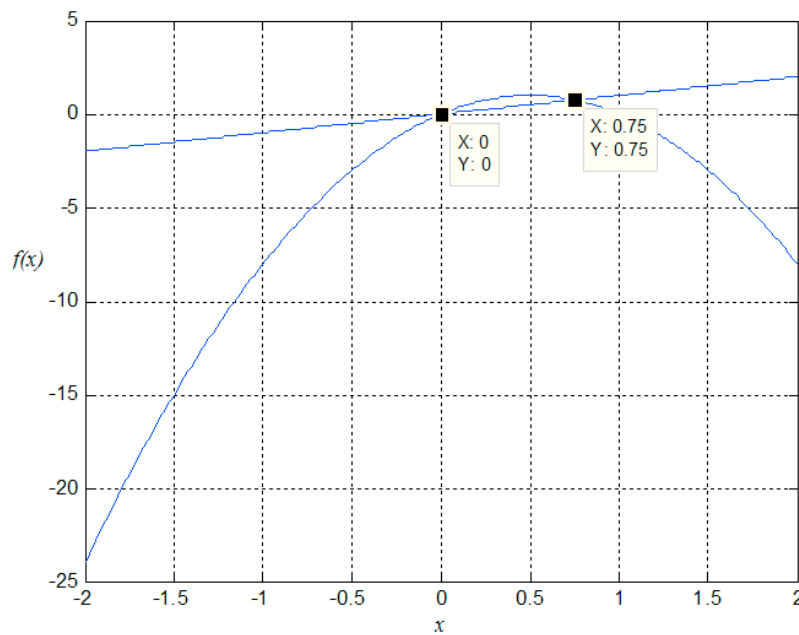


Fig. 3.19

Ciò premesso, ci proponiamo di identificare la presenza di eventuali punti fissi. Se consideriamo quanto detto in precedenza da un punto di vista geometrico sull'argomento, si tratta di tracciare la bisettrice del primo quadrante per poter agevolmente rilevare l'eventuale esistenza di un tale punto del diagramma. Diciamo x_0 la sua ascissa. Allora deve essere

$$f(x_0) = x_0.$$

La Fig. 3.19 sopra riportata mostra la presenza di 2 punti fissi aventi ascissa rispettivamente $x_1 = 0$ e $x_2 = 0.75$. Se scegliamo come seed uno dei due punti fissi allora la traiettoria che otteniamo è stazionaria (Fig. 3.20). Cosa succede se anziché scegliere ad esempio come seed 0 scegliamo un numero prossimo ad esso, 0.116997 ovvero 0.116998, è stato già ampiamente illustrato.

Di seguito vogliamo illustrare un metodo molto semplice di tipo grafico che consente di valutare le conseguenze relative alla scelta del primo valore della serie, cioè del seed. Per fare ciò riferiamoci alla Fig. 3.21 che mostra sovrapposti i diagrammi della parabola in oggetto e della retta bisettrice del primo e terzo quadrante.

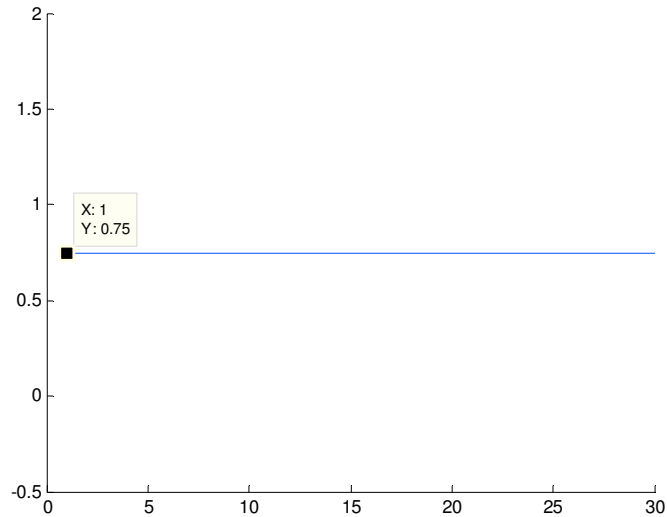


Fig. 3.20

Ebbene, se tracciamo partendo dalla condizione iniziale individuata con $x(0)$, presa sull'asse delle ascisse, un segmento verticale fino ad incontrare il diagramma della parabola in A avremo individuato il corrispondente valore di $x(0)$ cioè $f(x(0))$. Se si vuole procedere nella iterazione allora dobbiamo riportare sull'asse delle ascisse il nuovo argomento in modo che applicando la funzione in oggetto possiamo ricavare il secondo elemento della serie, cioè $x(2)$. Per fare ciò dobbiamo individuare $x(1)$ sull'asse delle ascisse, utilizzando la bisettrice, luogo dei punti tali che $f(x) = x$, cioè luogo di punti fissi.

La bisettrice consente di individuare $x(1)$ sull'asse delle ascisse mediante uno spostamento orizzontale verso destra (B) e successivamente verso il basso. Il procedimento può essere ripetuto per quante volte si vuole.

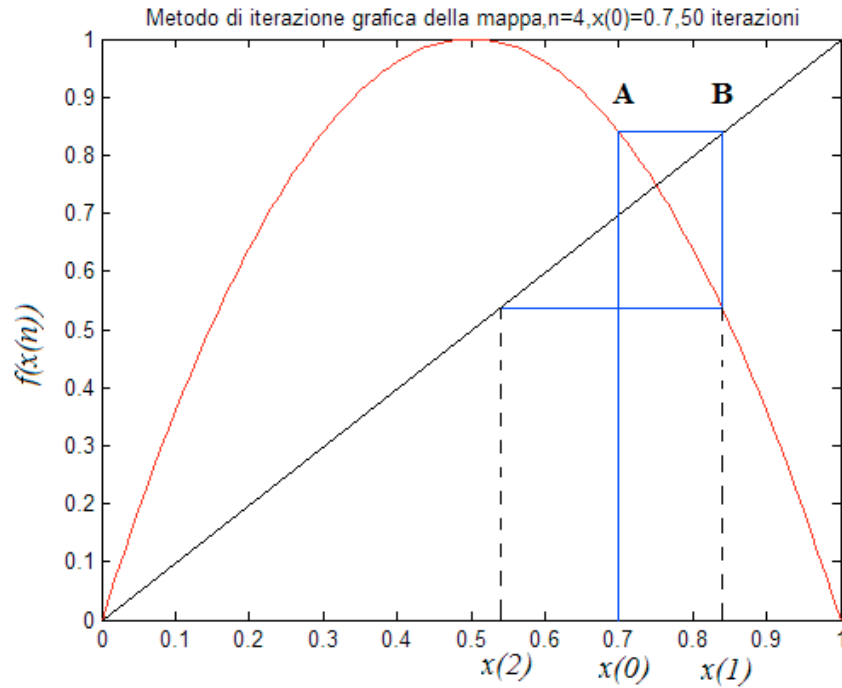


Fig. 3.21

Osserviamo subito che se scegliamo come seed un valore negativo e prossimo allo zero, la successione tende rapidamente ad espandersi, assumendo, cioè, valori via via crescenti. Nella Fig. 3.22 che segue è illustrato l'andamento che assume la successione quando il seed è posto uguale ad esempio $x(0) = -0.1$.

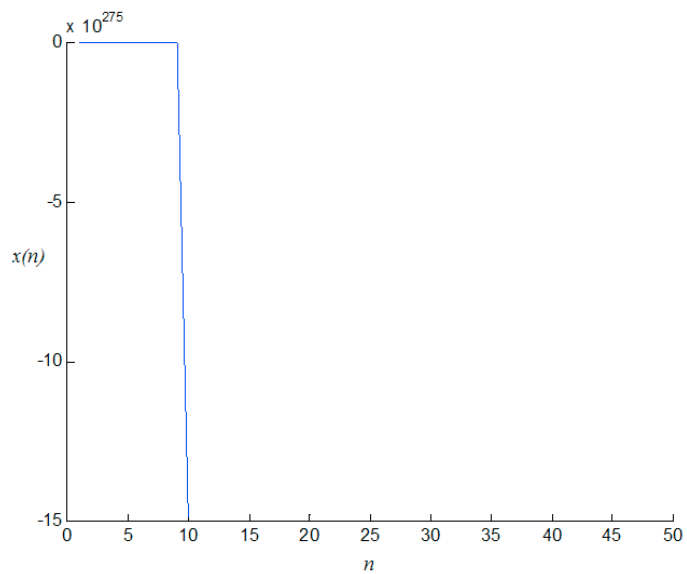


Fig. 3.22

Facilmente notiamo che le ampiezze assumono rapidamente valori molto ampi dell'ordine di 10^{275} . La successione ovviamente è divergente. Notiamo che sulla bisettrice possiamo in realtà leggere i valori che assumono gli elementi della successione durante la sua evoluzione. Un sistema che presenta queste caratteristiche lo chiamiamo in equilibrio instabile o repulsivo e per estensione diremo che $x(0)$ è un punto di equilibrio instabile o repulsivo.

Orbene, poiché la funzione (parabola) che abbiamo utilizzato per questo esempio è di tipo non lineare, ci chiediamo allora se cambiando il valore del seed possiamo assistere ad altre evoluzioni. La Fig. 3.23 che segue mostra l'andamento nel caso $x(0) = 0.1$. La successione esibisce una dinamica che possiamo definire mista, composta cioè da espansioni a cui seguono contrazioni più o meno regolari, ma comunque sempre instabile. Tecnicamente queste trasformazioni si chiamano rispettivamente folding e stretching. Tale è un'altra proprietà del caos deterministico: l'alternanza più o meno regolare di processi di allungamento evolutivo e di contrazione.

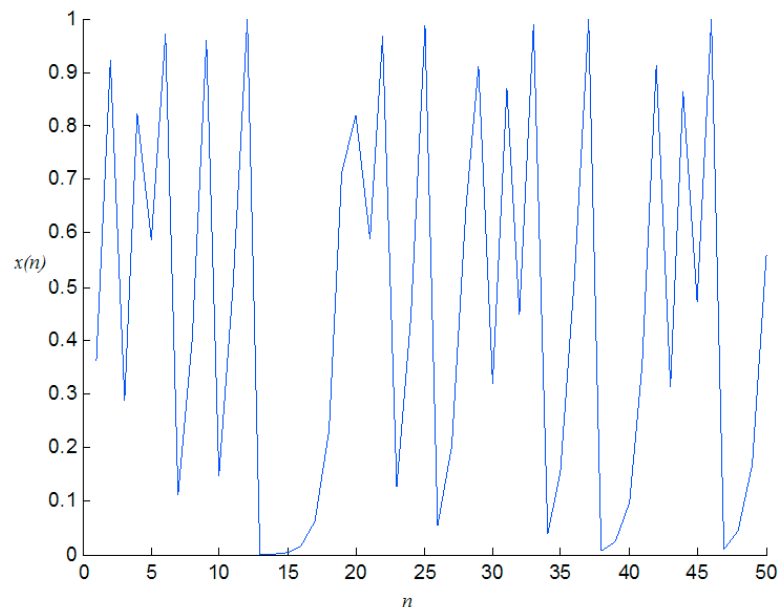


Fig. 3.23

La Fig. 3.24 che segue esemplifica, nel piano $x(n), x(n+1)$, quanto detto nel caso particolare in cui il seed valga $x(0) = 0.55$ e $k = 0.25$.

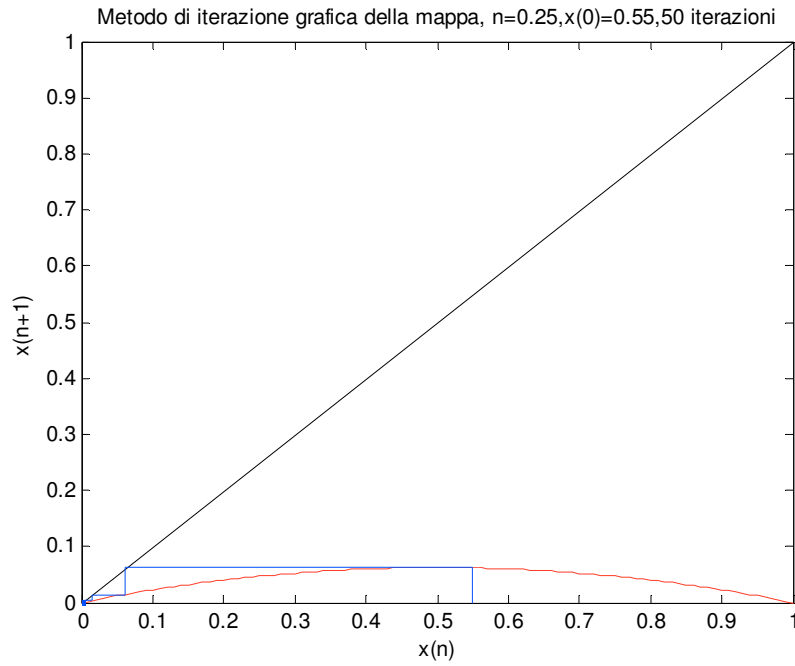


Fig. 3.24

La successione converge rapidamente al punto fisso di ascissa $x = 0$.

Infine la Fig. 3.25 bene descrive la complessità della serie temporale in oggetto, mostrato nel diagramma tridimensionale $x(n), x(n+1), x(n+2)$ e $k = 4$.

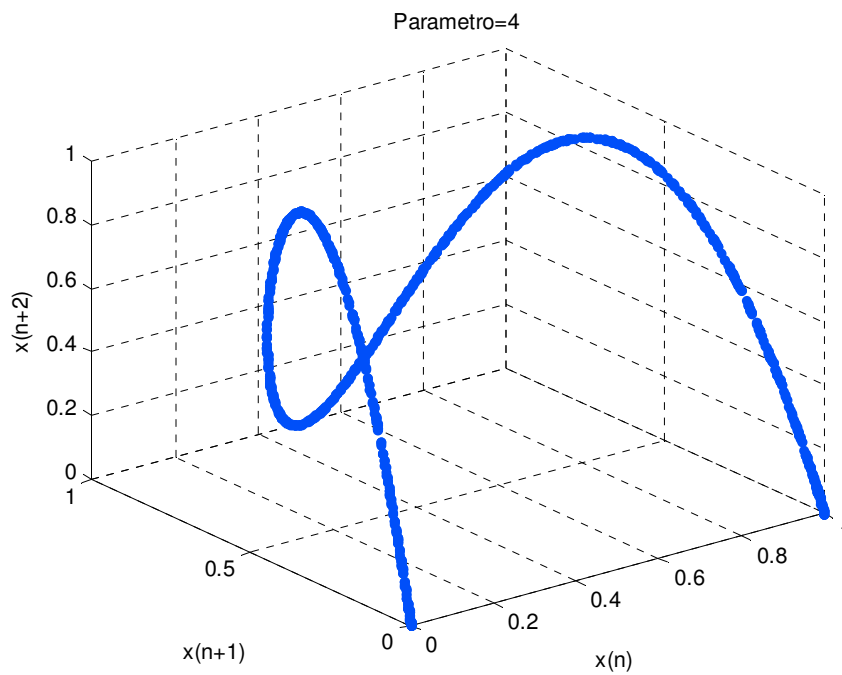


Fig. 3.25

Durante le applicazioni, illustrate in dettaglio nel Capitolo 4, ci siamo spesso imbattuti in sistemi meccanici la cui dinamica vibratoria era determinata principalmente dal moto rotatorio di un complesso di ruote dentate.

Esistono diverse metodiche attualmente impiegate per monitorare in modo affidabile lo stato delle ruote dentate.

Facendo riferimento alla tipologia del dominio di analisi, generalmente esse possono essere classificate:

- frequenza (cepstrum analysis)
- tempo (analisi statistica)
- tempo-frequenza

3.7 Frequenza (cepstrum analysis)

La classica metodica di analisi è quella spettrale. Dal confronto di uno spettro generato da un ingranaggio danneggiato con uno in buono stato possono essere individuate diverse condizioni di danno.

Per esempio, se l'ingranaggio è composto soltanto da un paio di ruote dentate è possibile individuare il danno di un dente ispezionando la modulazione delle *sidebands* nell'intorno della frequenza di ingranaggio (*meshing frequency*) e delle sue armoniche.

Per *cepstrum* si intende l'inverso della trasformata di Fourier del logaritmo dello spettro di potenza. Poiché nello spettro è possibile individuare la periodicità, la presenza di una caratteristica ricorrenza causata dal danneggiamento di un dente può essere facilmente individuata. Osserviamo che una tale metodica è applicabile soltanto se il rapporto SNR, segnale-rumore, non è fortemente inquinato da rumore, in caso contrario, infatti, è praticamente impossibile rilevare anomalie vibratorie incipienti determinate da cedimenti meccanici. Inoltre per sistemi di ingranaggi complessi, però, è molto difficile identificare i danni soltanto dallo spettro o dal *cepstrum* a causa del numero enorme di componenti che sono contemporaneamente coinvolti.

3.8 Tempo (analisi statistica)

La media sincrona temporale (Time Synchronous Average, TSA) è un procedimento che media il segnale su un numero abbastanza grande di cicli, sincronizzati con la velocità di rotazione di uno specifico albero/ingranaggio. Tale metodica permette di rimuovere non soltanto il rumore di fondo ma anche tutti quegli eventi che non sono esattamente sincroni con la ruota dentata monitorata. Inoltre, con le tecniche di interpolazione e di ricampionamento è possibile ridurre gli effetti dovuti alle fluttuazioni della velocità eliminando la necessità di ricorrere al blocco delle fasi multipli delle frequenze.

Danni molto avanzati possono facilmente essere identificati dall'ispezione delle TSA. Alcuni ricercatori [P. D. McFadden, 1986 Journal of Vibrations, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 108, 165-170. Detecting fatigue

cracks in gears by amplitude and phase demodulation of meshing vibration] suggeriscono l'impiego della fase e della demodulazione di ampiezza del residuo della meshing frequency dominante. In alcuni casi, può essere impiegata la curvatura della modulazione di fase e le sue derivate per la diagnosi del danno [P. D. McFadden, 1986 Journal of Vibrations, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 108, 165-170. Detecting fatigue cracks in gears by amplitude and phase demodulation of meshing vibration., G. Dalpiaz e U. Meneghetti, 1991, NDT&E International, 24, 303-306. Monitoring fatigue cracks in gears].

Altri autori [F. Ismail, H. Martin e F. Omar, 1995, Proc. of the ASME Biennial Conference on Vibration and Noise, Vol. DE-84-1, 1413-1418. A statistical index for monitoring toothcracks in a gearbox. Boston, MA] hanno impiegato la curvatura della funzione beta per amplificare i transitori generati dalla rottura di un dente. Hanno proposto, a tal fine, anche l'uso di un indice statistico. Ancora, altri autori [F. Colnaraghi, D. Lin e P. Fromme, 1995, ASME Biennial Conference on Vibration and Noise, Vol. DE-81-1, 121-127. Gear] hanno introdotto analisi da dinamiche caotiche e non lineari al fine di individuare cambiamenti generali di particolari sistemi dinamici. Infine, altri ricercatori [D. Lin, F. Colnaraghi e F. Ismail, 1997, Journal of Sound and Vibration, 208, 664-670. The dimension of the gearbox signal] hanno studiato gli effetti che la rottura di un dente ha sulla correlazione dimensionale di un segnale vibrazionale di un cambio. Purtroppo le evidenze sperimentali sono limitate e gli stessi autori raccomandano ulteriori approfondimenti.

3.9 Analisi tempo-frequenza

L'analisi in tempo-frequenza è divenuto un approccio sempre più importante per la diagnosi dei danni alle ruote dentate.

L'analisi classica è la trasformata cosiddetta Short-Time Frequency Fourier (STFT). Una forma diversa della STFT è la cosiddetta distribuzione Wigner-Ville che è ottenuta studiando il segnale attraverso la auto-correlazione ed il processo della trasformata di Fourier. Sebbene non sia sempre affidabile essa comunque è molto utilizzata per l'individuazione dei danni di ruote dentate. Recentemente sono stati fatti notevoli passi avanti con l'impiego della trasformata wavelet

(WT). Al contrario della STFT la WT consente di indagare sia in alta che in bassa frequenza e contemporaneamente nel dominio del tempo. Pertanto è una analisi molto affidabile per la individuazione di transitori e di segnali non-stazionari. Molti sono i ricercatori che hanno fatto proposte metodologiche in tal senso [G. Strang e T. Nguyen, 1996, *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley: Cambridge Press, W.J. Wang e P.D. McFadden, 1996, *Journal of Sound and Vibration*, 192, 927-937. Application of wavelets to gear box vibration signals for fault detection, W.J. Wang e P.D. McFadden, 1995, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 9, 497-507. Application of orthogonal wavelets to early gear damage detection]. Essi comunque mettono in evidenza il fatto che pur fornendo una rappresentazione efficiente e senza ridondanze le mappe tempo-frequenze non forniscono utili dettagli. Inoltre, alcuni ricercatori [S.T. Lin e P.D. McFadden, 1995, *Institute of Mechanical Engineers 2nd Intern. Conf. on Gearbox, Noise, Vibration and Diagnostics*, 59-72. Vibration analysis of gearbox by linear wavelet transform. London, U.K.], hanno introdotto il concetto di WT lineare, in cui la mappa è normalizzata secondo l'ampiezza del segnale invece che con la sua energia. Ancora, [D. Bollahbal, F. Golnaraghi e F. Ismail, 1999, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13, 423-436. Amplitude and phase wavelet maps for the detection of cracks in geared systems], alcuni hanno usato l'ampiezza della WT e la fase simultaneamente per indagare rotture ed usure dei denti. Essi hanno proposto una rappresentazione polare che potrebbe essere impiegata per localizzare il danno dei denti con una particolare rappresentazione dei coefficienti wavelet.

Ciò premesso esistono molte metodiche non integrate tra loro ognuna capace di fornire informazioni parziali circa l'*assessment* di ruote dentate.

Il nostro obiettivo è consistito nel mettere a punto una metodica che integrando le due teorie (Wavelet e Chaos) e tecniche diverse possa consentire di fornire affidabili sistemi di monitoraggio in particolare sulla evoluzione dinamica di sistemi dinamici complessi.

3.10 Dimensione frattale

Osserviamo che fino ad ora abbiamo sempre fatto riferimento a sistemi dinamici a comportamento non lineare. Di conseguenza per essi non è valido il teorema della sovrapposizione degli effetti. Molti modelli afferenti al caos e soprattutto quelli che tentano di descrivere i fenomeni della realtà che ci circonda presentano comportamenti e dinamiche non lineari. Laddove è possibile si cerca di aggirare l'ostacolo rappresentato dai sistemi di equazioni differenziali ordinarie non lineari rendendole lineari con opportuni artifici matematici. Ma non sempre ciò è possibile. Allora conviene affrontare il problema, sia esso a tempo continuo che a tempo discreto con o senza la presenza di un modello, da un altro punto di vista: se il sistema funziona su un attrattore allora può essere utile tentare di ricostruirlo facendo ricorso ad altre tecniche.

Dapprima, però, dobbiamo chiederci se quello che stiamo osservando attraverso la serie di numeri che in un qualche modo misurano il sistema dinamico in esame sia attribuibile realmente ad un caos deterministico ovvero a fenomeni puramente aleatori. Molte volte il confine tra i due fenomeni è molto sfumato ed occorrono abilità ed esperienza per la sua definizione. Potrebbe essere il caso, ad esempio, di un sistema dinamico che presenti un esponente di Lyapunov massimo prossimo a zero: 0.001. La prima cosa che verrebbe da chiedersi è se esso è frutto di una media statistica, se ciò fosse vero allora è opportuno verificare quanto valga la deviazione standard. Se questa fosse, ad esempio, pari a 0.1 allora avremmo molti dubbi sulla conclusione a cui pervenire: caos o aleatorietà. A ciò dobbiamo aggiungere che il più delle volte le serie numeriche di cui disponiamo sono affette da errori di misurazioni ed inoltre le elaborazioni sono affette a loro volta da errori di arrotondamento. Sappiamo quanto sia importante la definizione di questi fenomeni ai fini dello studio sul caos. Infatti questi sistemi sono per definizione estremamente sensibili alle condizioni iniziali ed a tutto ciò che può in qualche modo perturbare la loro evoluzione temporale. In realtà una qualunque funzione, ad esempio tempo discreta, dovrebbe contemplare queste considerazioni.

Per tener conto di tali fonti di errore, abbiamo già evidenziato che lo stato dinamico di un evento temporale discreto all'istante $t + 1$ è dato da

$$x(t+1) = f(x(t)) + \varepsilon(t) + \eta(t). \quad (3.12)$$

A questi errori dovremmo aggiungere gli errori di arrotondamento generati da parte di qualsiasi sistema di elaborazione. Quanto ci sia di aleatorio nelle perturbazioni di cui sopra e soprattutto quanto queste possano incidere sullo sviluppo temporale del sistema dinamico stesso non è sempre facile stabilirlo.

Per poter risolvere tale ambiguità dobbiamo fare ricorso a metodi che ci possano consentire la ricerca di strutture comuni a tutti i fenomeni caotici che possiamo definire invarianti e che possano essere misurati. A tal fine si rivela essenziale collocare il sistema dinamico nel cosiddetto spazio delle fasi nel quale è possibile rappresentare la sua evoluzione. Ovviamente in tale spazio saranno impiegate tante variabili quanto sono quelle strettamente necessarie per rappresentare compiutamente la dinamica. Di conseguenza una volta definite tali variabili risulteranno definite anche le dimensioni dello spazio in cui si presuma debba essere collocato il sistema. Una prima osservazione generale riguarda il fatto se il sistema presenta evoluzioni comunque limitate e circoscritte ad un determinato spazio, in quanto un andamento per quanto caotico comunque deve presentare una proprietà: essere comunque limitato nello spazio, qualunque dimensione esso abbia. Per tale ragione l'evoluzione del sistema, non potendosi estendere all'infinito, dovrà presentare un naturale meccanismo di stiramento e di ripiegamento delle traiettorie, senza che si presentino intersezioni, molto sensibile alle condizioni iniziali. E ciò anche se siamo in presenza di un sistema di equazioni che descrivano il fenomeno nella sua dinamica (caos deterministico).

Come abbiamo più volte ricordato, se dovessimo studiare l'evoluzione temporale di un semplice sistema dinamico non caotico, allora le inevitabili approssimazioni che sempre accompagnano le rilevazioni fisiche, probabilmente non giocherebbero un ruolo così determinante come accade invece se siamo in presenza di un sistema dinamico caotico.

Pertanto dobbiamo introdurre una serie di parametri che meglio ci consentano di stabilire se siamo in presenza o meno di un sistema caotico ovvero la indeterminatezza della sua evoluzione possa essere frutto della aleatorietà anche ascrivibile alla precisione delle misurazioni. In Appendice C è riportato un elenco completo e dettagliato degli indicatori messi appunto o adattati, necessari per monitorare i sistemi dinamici presentati nel Capitolo 4.

Oltre alla determinazione del massimo esponente di Lyapunov, un altro importante parametro molto impiegato nello studio dei sistemi caotici non lineari è la dimensione frattale intesa come misura della struttura geometrica dell'attrattore.

A tal proposito osserviamo che quasi sempre è più conveniente ridurre la dimensione del sistema ricorrendo ad un sistema equivalente, che però conservi tutte le caratteristiche e proprietà del sistema a cui esso fa riferimento. In tale ottica si colloca lo studio condotto con la tecnica nota come *time delay embedding*.

La dimensione m che ne segue, meglio nota come dimensione di embedding o dimensione dello spazio delle fasi ricostruito, è tale che, detto $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una serie temporale, dove il pedice ne indica i vari istanti²⁸, se assumiamo m come ritardo temporale allora avremo definito due serie: quella costituita dagli elementi $x_t = \{x_t, x_{t+1}, \dots, x_{n-m}\}$, cioè la serie che è compresa tra gli istanti t ed $n-m$, e l'altra serie composta dagli elementi $x_{t+m} = \{x_{t+m}, x_{t+m+1}, \dots, x_n\}$ cioè tutti gli elementi compresi tra gli istanti $t+m$ ed n . Ebbene il diagramma costruito attraverso x_{t+m} vs x_t è chiamato pseudo - spazio di fase con ritardo temporale m e dimensione di embedding pari a 2. Notiamo che x_t ed x_{t+m} sono due sottoinsiemi di x ed entrambi contengono $n-t-m+1$ elementi. Per poter creare uno pseudo - spazio occorre definire due parametri: la minima dimensione di embedding ed il ritardo temporale ottimale m .

²⁸ Tale potrebbe essere, ad esempio, una serie ottenuta attraverso una indagine accelerometrica relativa ad un sistema vibrante.

Purtroppo i vari teoremi che esistono sull'argomento non forniscono la possibilità di operare delle scelte ottimali per quanto riguarda i suddetti due parametri. Ad esempio una scelta di m molto piccola non aggiungerebbe alcuna informazione aggiuntiva alla serie x . Viceversa un suo valore molto grande genererebbe due serie del tutto casuali.

Ad oggi sono stati proposti due metodi per la scelta ottimale di m : il primo è basato sulla ricerca del primo minimo locale esibito dalla funzione di mutua informazione ed il secondo basato sulla ricerca del primo zero assunto dalla funzione di autocorrelazione.

La determinazione delle effettive dimensioni del sistema può essere effettuata con il metodo dei "falsi vicini". Il metodo si basa sulla identificazione di una correlazione dimensionale di tipo funzionale, la quale dà la probabilità che due punti, arbitrariamente scelti su una orbita, siano nella stessa posizione (intesa come distanza) dopo un intervallo di tempo t . Una tale funzione può essere come di seguito definita, detta

$$C(r) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \Theta(r - |x_i - x_j|) \quad (3.13)$$

una funzione di correlazione, dove r è la distanza radiale rispetto a ciascun punto x_i , n è il numero totale di punti nello spazio delle fasi, Θ è la funzione di Heaviside (Fig. 3.26)

$$\Theta(x) : \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

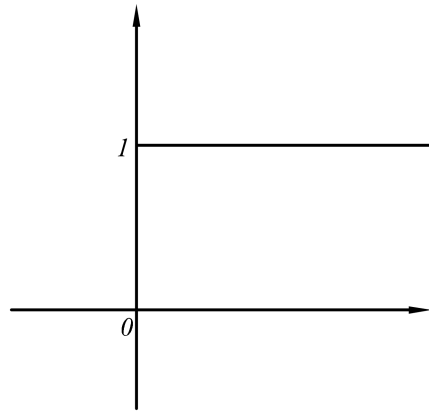


Fig. 3.26

la funzione di correlazione dimensionale è data da

$$D_{corr} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log(r)}. \quad (3.15)$$

Nelle applicazioni pratiche si è soliti calcolare D_{corr} per vari valori della dimensione di embedding. Dopodiché, una loro rappresentazione grafica consente di definire con una buona approssimazione la dimensione cercata, che dovrebbe essere quel valore a cui asintoticamente tende il grafico (Fig. 3.27).

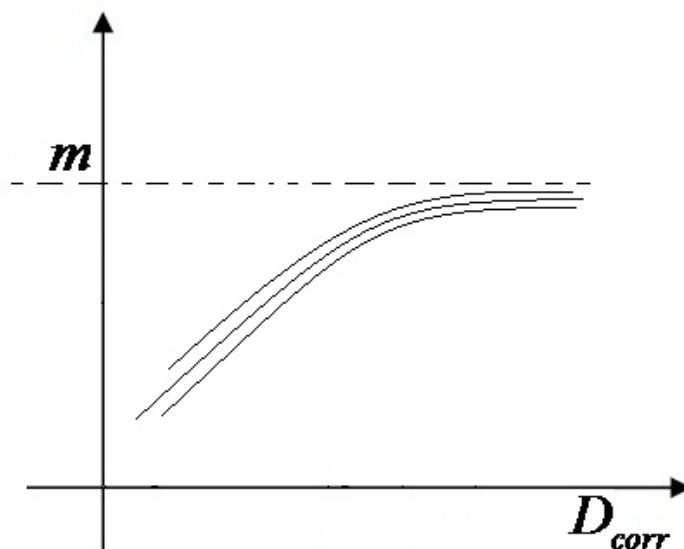


Fig. 3.27

Ora consideriamo il seguente problema: data una misurazione di una serie temporale $x(t)$, quanti suoi elementi $x(t + \tau)$ possono essere mediamente predetti dopo un tempo τ ? La risposta a questo interrogativo ce la fornisce la cosiddetta funzione di mutua informazione. Per vero in questo caso più che di funzione sarebbe più opportuno parlare di funzionale della distribuzione della probabilità congiunta P_{sq} avendo posto $[s, q] = [x(t), x(t + \tau)]$. In sostanza siamo interessati a misurare quanto siano dipendenti i valori di $x(t + \tau)$ noti i valori $x(t)$. Per poter rispondere a queste domande dobbiamo dapprima assicurarci che la serie temporale sia formata da un numero significativo di punti tali da garantirci che tutte le regioni dello spazio in studio siano visitate almeno una volta. Assunta tale ipotesi allora possiamo affermare che la probabilità di trovare un punto i -mo della serie che cada in uno degli N ipercubi aventi i lati di dimensione ε è data da

$$P_i = \frac{N_i}{N_0} \quad (3.16)$$

dove N_0 è il totale dei punti della serie ed inoltre $\sum_{i=1}^N P_i = 1$.

Sappiamo che l'ammontare medio della informazione acquisita dalla conoscenza della serie s è data da

$$H(s) = -\sum_{i=1}^N P_s(s_i) \log P_s(s_i) \quad (3.17)$$

avendo indicato con $P_s(s_i)$ la probabilità associata alla serie s_i ²⁹.

Indichiamo brevemente la (3.17) come segue:

$$I(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^N P_i \log P_i \quad (3.18)$$

²⁹ Notiamo che se la base del logaritmo è due allora H si esprime in unità di bits.

Per piccoli valori di ε la (3.18) si può anche scrivere come segue:

$$I \approx d_I \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (3.19)$$

dove abbiamo indicato con d_I

$$d_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_i \log P_i}{\log \varepsilon}. \quad (3.20)$$

Osserviamo che se facciamo riferimento ad una distribuzione di N_0 punti appartenenti ad una linea o ad un'area come mostrato in Fig. 3.28 , allora il numero minimo di punti capaci di coprire la linea ovvero l'area è una funzione della scala ε adoperata. Nel caso della linea esso è funzione di

$$N(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.21)$$

mentre nel caso dell'area

$$N(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon^2}. \quad (3.22)$$

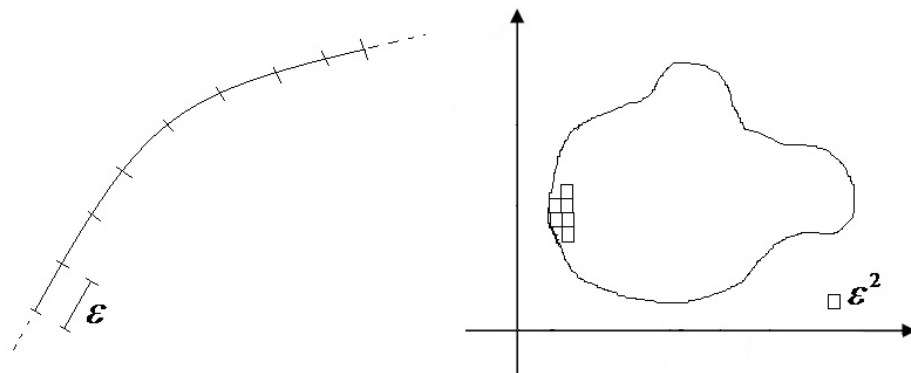


Fig. 3.28

Generalizzando la (3.22) ad un sistema d -dimensionale abbiamo

$$N(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon^d}. \quad (3.23)$$

La (3.23) può anche essere riscritta come segue:

$$d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}. \quad (3.24)$$

La (3.24) è chiamata anche capacità dimensionale se ammettiamo che il numero N_0 di punti che compongono la serie sia infinitamente grande.

Pertanto si conviene di chiamare frattale una serie di punti la cui dimensione non sia intera (da qui il termine di dimensione frattale).

In generale è

$$D_{corr} \leq d_l \leq d_c. \quad (3.25)$$

3.11 Modalità di esecuzione

Per lo sviluppo e l'analisi degli esempi finora illustrati nonché delle applicazioni riportate nel seguito, ci si è avvalsi dei seguenti Software e Toolbox: MATLAB della The MathWorks Inc., Toolbox Wavelet Analysis, Toolbox Simulink; SPSS per l'analisi multivariata dei dati; Mathematica della Wolfram Research per la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali.

3.12 Attività

Nel seguito verranno riportate le principali considerazioni ed osservazioni annotate durante gli sviluppi della presente ricerca che ha il preciso obiettivo di consentire l'identificazione, in tempo reale, di oscillazioni/vibrazioni anomale determinate da sistemi meccanici con particolare riguardo a tutti quei fenomeni vibrazionali che si generano durante l'ingranamento di ruote dentate.

Le osservazioni riportate di seguito riguardano sviluppi delle idee afferenti alla teoria del caos e della Trasformata Wavelet presentate nei primi due capitoli della presente relazione. La capacità di identificare e, successivamente, di classificare la natura delle oscillazioni anomale, ad esempio con l'ausilio di sistemi esperti, può fornire utili indicazioni su cosa fare per controllarle e prevenire le conseguenze negative ad esse legate.

E' noto, ad esempio, che se un sistema è descritto da un modello di tipo lineare, forti oscillazioni possono essere riferite a fenomeni di risonanza. Se il sistema è non-lineare, un ciclo limite può essere generato, ad esempio, da una vibrazione non-periodica che la si può ricollegare a forme di instabilità dinamica del sistema stesso.

L'attività scientifica si è incentrata su aspetti metodologici e applicativi della ricerca nel campo del "Noise, Vibration and Harshness (NVH)". Le metodologie utilizzate e messe a punto verranno puntualmente illustrate nel Capitolo 4.

Durante la presente ricerca è stata svolta una intensa attività sperimentale che costantemente affiancata all'investigazione metodologica sin qui messa a punto, è risultata essere un elemento caratterizzante del cammino di ricerca perseguito; infatti, l'attività di laboratorio ha rappresentato un importante momento di verifica delle metodologie sviluppate e, allo stesso tempo, ha consentito nuovi orientamenti e percorsi di investigazione.

I segnali vibratorii relativi a macchinari sono spesso impiegati per la diagnosi di anomalie meccaniche, ciò perché essi portano informazioni dinamiche prodotte dalle stesse macchine. Comunque, queste vibrazioni anche se ben campionate contengono sempre molto rumore. Se il rumore è molto forte allora anche le informazioni più importanti possono essere corrotte al punto tale che non si riesce a riconoscere il reale stato del sistema meccanico o addirittura si rischia di arrivare ad errate conclusioni.

Perciò, sono stati messi a punto molti metodi per l'estrazione di caratteristiche da segnali rumorosi.

L'analisi wavelet è uno di tali potenti *tool*. Esso rappresenta un avanzato sistema di *signal processing* impiegabile soprattutto se il segnale da analizzare è non stazionario.

Nel campo della diagnosi di problemi meccanici l'analisi wavelet è impiegata per la diagnosi di molti componenti meccanici: cuscinetti, gear-box, motori, ecc.

Capitolo 4

Applicazioni

4.1 Strumentazione

Incominciamo con la descrizione del set-up sperimentale, della acquisizione dei dati ed i metodi di *pre-processing* impiegati.

Per le sperimentazioni condotte presso il DiME e per le applicazioni eseguite presso Enti esterni, sono state utilizzate le seguenti strumentazioni:

3 accelerometri (B&K Type 4395), 3 amplificatori di segnale (B&K, DeltaTron™ power supplier WB 1372), notebook completo di programma di acquisizione dati (LMS), sistema Yokogawa (DL750), termocamera Fluke, sensore per acquisizione segnale tachimetrico. In particolare, nelle Appendici A e B sono riportate le schede tecniche relative al sistema di acquisizione LMS, agli accelerometri, agli amplificatori di segnale ed al PC impiegati.

4.2 Durability Test

- **Luogo:** ELASIS
- **Sistema meccanico:** Cambio a 5 marce di serie
- **Scopo della prova:** monitorare il sistema cambio per rilevare con largo anticipo i segni premonitori di un eventuale cedimento meccanico del rotismo.

4.3 Descrizione della prova di durata

Le vibrazioni di un sistema di trasmissione ad ingranaggi sono prodotte non soltanto dagli urti che si generano tra i fianchi dei denti durante la loro fase di ingranamento ma anche dalla variazione periodica della rigidità d'ingranamento; inoltre le inevitabili variazioni della forma rispetto al profilo ideale, del passo e della concentricità della primitiva rispetto all'asse di rotazione, contribuiscono a produrre effetti sul comportamento vibratorio dell'ingranaggio.

Quest'ultimo normalmente viene rilevato mediante accelerometri posizionati sui supporti dei cuscinetti di sostegno degli alberi.

La localizzazione dei sensori è un aspetto a cui deve essere dedicata molta attenzione; essi devono essere collocati ovviamente il più vicino possibile alla ruota in esame, ma anche in questo modo il segnale rilevato è soggetto al filtraggio della struttura circostante che ne determina un'attenuazione non trascurabile.

Nel campo della Noise, Vibration and Harshness (NVH) di una trasmissione meccanica, tali tecniche, per esempio, oltre che per tutti i casi in cui i fenomeni sono impulsivi, si potrebbero adottare, per esempio, per analisi:

1. di rumorosità in accensione e spegnimento;
2. di rumorosità durante l'attuazione del meccanismo di frizione;
3. vibrazionale rilascio pedale frizione;
4. vibrazionale rumorosità di innesto manicotti;
5. analisi puntuale di vibrazione durante ingranamento.

Ricordiamo brevemente che le principali cause di rottura dei denti sono quelle per fatica a flessione dei denti (*bending*), di danneggiamento per fatica superficiale (*pitting*) oppure per grippaggio (*scuffing*).

Prima di descrivere i risultati ottenuti, si descrive brevemente la modalità con cui è stata condotta la prova di durata, durante la quale è stato eseguito il monitoraggio vibrazionale con una nuova metodologia scaturita dalla presente ricerca. Al fine di verificare la bontà del metodo proposto, parallelamente sono

stati utilizzati alcuni algoritmi approntati impiegando due originali indici di "analisi spettrale".

La prova di durata viene effettuata solo dopo che il cambio ha superato la prova di lubrificazione, dopodiché si effettua un rodaggio in tutte le marce durante il quale il cambio funziona a basse velocità di rotazione (2000-2500 giri/min) con bassi valori di coppia (circa il 10% della coppia massima). Una volta terminata questa fase, dopo avere effettuato il "cambio" dell'olio lubrificante, può avere inizio la prova di durata.

Il test prevede che il cambio "percorra" un certo numero di chilometri in tutte le marce, sia in condizioni di coppia massima che di potenza massima. La coppia e la potenza massima, e le relative velocità di rotazione, sono stabilite in base al motore a cui il cambio sarà accoppiato. Nel caso in esame la prova è stata eseguita in prima velocità in quanto, proprio in tale manovra era stato riscontrato un problema di affidabilità. Per il tipo di cambio monitorato, le velocità di rotazione adottate sono state:

- condizione di coppia massima, 2500 giri/min
- condizione di potenza massima, 4000 giri/min

Nell'ambito di questa prova il banco viene comandato impostando all'uscita dei semiassi una coppia pari a 4160 Nm, tale da avere in ingresso al primario del cambio una coppia pari a 260 Nm, tenendo conto del rapporto di trasmissione.

Nella Fig. 4.1 che segue è mostrato uno schema tipico del cambio in prova.

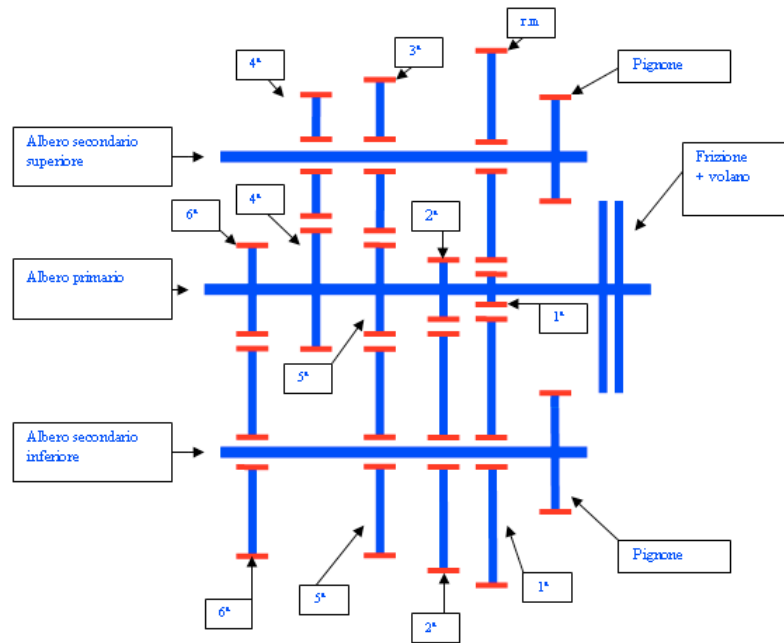


Fig. 4.1 - Schema cambio

La successiva Fig. 4.2 mostra l'attrezzaggio strumentale del cambio che prevede l'impiego di tre accelerometri monodirezionali, disposti come in figura, e di un pick-up per il rilevamento del segnale tachimetrico.

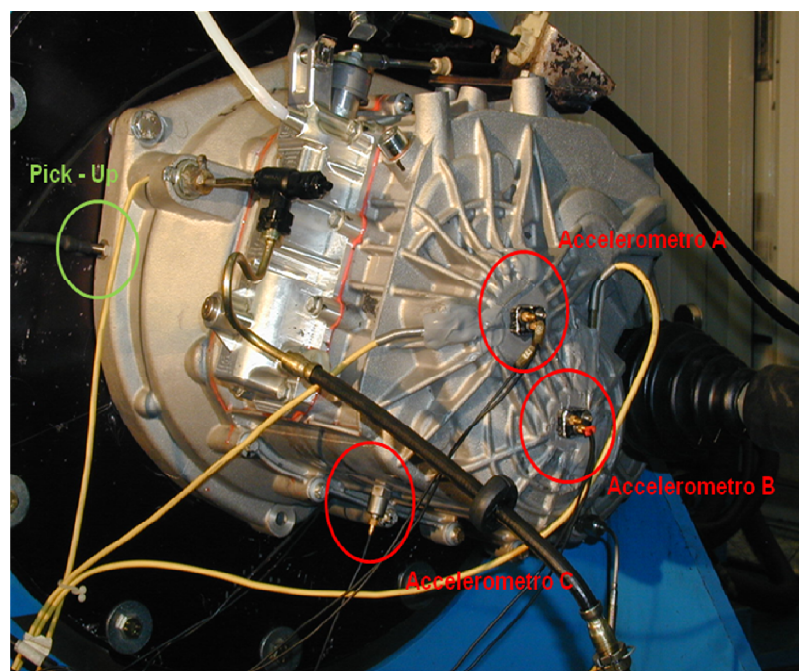


Fig. 4.2 - Set-up cambio

Indichiamo con $D1$ la distanza complessiva, prestabilita, che il cambio deve percorrere in prima marcia. Tale distanza non viene percorsa in un unico step, ma attraverso N step di uguale lunghezza $d1 = D1/N$. Il valore prescelto per N è 100, così che se un cambio non presenta alcun tipo di difetto dopo 100 step, si dice che ha raggiunto il 100% del ciclo prova.

Come detto precedentemente, ogni step a sua volta comprende due fasi: la prima in cui il cambio lavora nelle condizioni di coppia massima, la seconda in cui è nelle condizioni di potenza massima.

Le distanze previste per queste due fasi, che indichiamo con $d1c$ e $d1p$, sono anch'esse prestabilite, e sono tali che $d1c + d1p = d1$. Poiché si è stabilito che il cambio raggiunge il 100% del ciclo prova se percorre, in prima marcia, una distanza di 4000 km, si può ottenere la distanza percorsa per ogni step, da cui conoscendo $d1c$ e $d1p$, si ha che la durata della fase nella condizione di coppia massima è $t1c = 190$ secondi, mentre quella in condizione di potenza massima è $t1p = 61$ secondi.

Di seguito si riporta la sequenza delle operazioni che costituiscono il ciclo di durata. Il banco prova aumenta automaticamente la velocità dell'albero primario fino al valore corrispondente alla coppia massima; una volta raggiunta questa velocità viene gradualmente applicata la coppia, fino al massimo valore previsto. Il tempo che il banco impiega per portarsi alla velocità prevista e quello impiegato per applicare la coppia sono prestabiliti, e sono detti tempi di rampa (*ramp time*). Il cambio, in prima marcia, percorre i previsti $d1C$ km in condizioni di coppia massima, dopodiché la coppia viene portata al 10% circa della coppia massima; la velocità aumenta fino a quella corrispondente alla potenza massima, e successivamente viene applicata la coppia fino al valore corrispondente alla potenza massima. In queste condizioni il cambio percorre i previsti $d1P$ chilometri in potenza massima.

Una volta percorsa questa distanza, è previsto uno step "di riposo e lubrificazione" durante il quale il cambio è in sesta marcia. La velocità in ingresso all'albero primario è tale che i semiassi, e quindi il differenziale, ruotino ad una velocità pari a circa 1000 giri/min. Lo scopo di questa fase è quello di raffreddare l'olio lubrificante e, contemporaneamente, di lubrificare tutte le parti del cambio.

Terminato lo step di "riposo", ne inizia un altro in condizioni di coppia massima e potenza massima che si svolge con le stesse modalità. Un cambio che non presenti difetti è tale da superare senza problemi tutti gli N step programmati.

Schematizzando quanto riportato (Tab. 4.1):

Marcia	Distanza Totale Prevista	Da ripetere N volte		Totale
Prima	D_1	Distanza in Coppia Max	Distanza in Potenza Max	D_1
		D_{1C}/N (tempo di percorrenza t_{1C})	D_{1P}/N (tempo di percorrenza t_{1P})	

Tab. 4.1 - Distanze previste dalla prova di durata.

4.4 Algoritmo di monitoraggio (Primo Indice)

Di seguito si riporta il diagramma di flusso della sequenza dei passi logici della procedura di monitoraggio per la costruzione di un primo indice che consenta un confronto in parallelo con l'impiego della trasformata wavelet.

STEP 1

Per ogni ciclo di prova, sia al regime di coppia massima che al regime di potenza massima, si calcola, per ogni marcia, lo spettro del segnale accelerometrico mediato sulla durata dell'intero ciclo.

STEP 2

Si acquisiscono i primi cinque cicli di prova per ogni marcia, dove cinque è un valore definito in base alla *case history* su cui si è fatto il *Reverse Engineering*.

STEP 3

Si procede al calcolo della curva limite, di seguito definita "spettro obiettivo", calcolata come media degli spettri relativi ai primi cinque cicli di prova.

STEP 4

Si procede al calcolo dell'integrale dello spettro obiettivo, di seguito denominato "Area_rif".

STEP 5

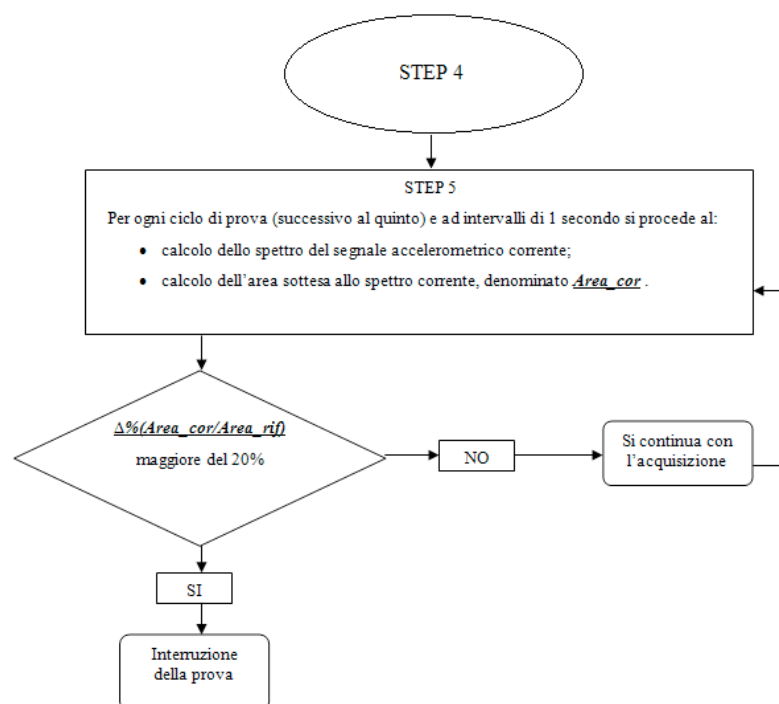
Per ogni ciclo di prova (successivo al quinto) e ad intervalli di 1 secondo si procede al:
calcolo dello spettro del segnale accelerometrico corrente;
calcolo dell'area sottesa allo spettro corrente, denominato "Area_cor".

Il punto di forza del suddetto algoritmo è quello di rendere automatizzato il fermo prova attraverso la creazione di un indice, $\Delta\%(Area_cor/Area_rif)$, basato sulla variazione percentuale dello spettro all'istante corrente, $Area_cor$, rispetto allo spettro preso come riferimento $Area_rif$, cioè

$$\Delta\%(Area_cor/Area_rif) = 100 * \left(\frac{Area_Cor - Area_rif}{Area_rif} \right).$$

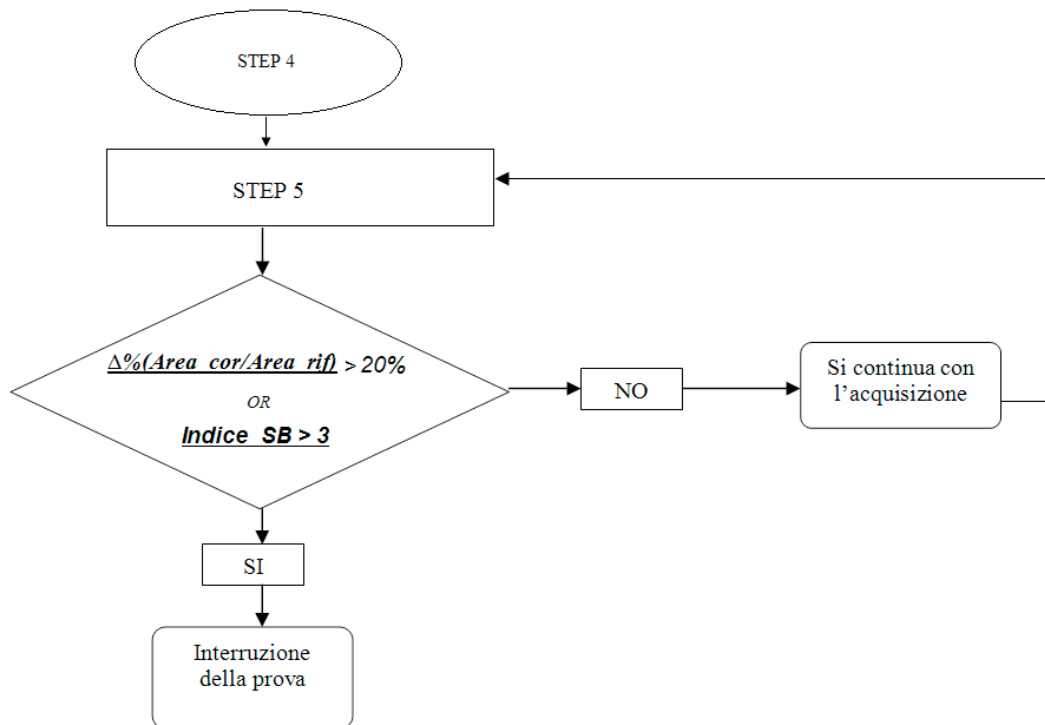
Questo è un indice globale che viene monitorato istante per istante. In normali condizioni di funzionamento, durante un ciclo di prova, l'area dello spettro corrente rimane sostanzialmente stabile; in tal caso tale indice ha un valore prossimo allo 0%. Se nel corso della prova si registra un innalzamento complessivo dello spettro corrente tale da far risultare l'indice $\Delta\%(Area_cor/Area_rif)$ superiore al valore di soglia, impostata al 20%, allora si procede al fermo prova. Si fa notare che una possibile variazione dell'ordine di ingranamento del 20% non determina il fermo prova in quanto la condizione di fermo implica che la variazione deve essere distribuita su tutto il range di frequenza.

Di seguito si riporta lo step successivo al 5°.



4.5 Algoritmo di monitoraggio (Secondo Indice)

Si può utilizzare l'analisi spettrale per costruire un nuovo indice di monitoraggio. Esso è dato dal rapporto tra lo spettro di riferimento e lo spettro corrente. Poiché tale indice monitora quelle che prendono il nome di *Side_Band* è stato denominato proprio *Indice SideBand*. Tale indice, in condizioni di funzionamento normali è atteso intorno al valore 1. Al fine di monitorare una prova di durata e ritenerla superata, tale indice non deve superare il valore soglia 3. L'utilizzo di tale nuovo indice modifica il 5° step dell'algoritmo di monitoraggio precedentemente illustrato, che per brevità è stato riassunto nel seguente flow-chart



4.6 Risultati

Nei risultati sperimentali si è visto che tale secondo indice, rispetto al precedente è più sensibile e di conseguenza consente di intervenire alcuni Run³⁰

³⁰ Ricordiamo che la prova di durata è divisa in 100 step, ad ognuno dei quali viene associato per brevità e chiarezza il nome Run ed il numero dello step raggiunto.

antecedenti. In particolare durante il 31° Run si è verificato che tale indice avendo significativamente superato il livello di soglia prestabilito la prova doveva essere interrotta (Fig. 4.3).

Il primo indice, invece, durante il Run 31 mostrava l'area dello spettro corrente ben più piccola di quella dello spettro *target* (Fig. 4.4).

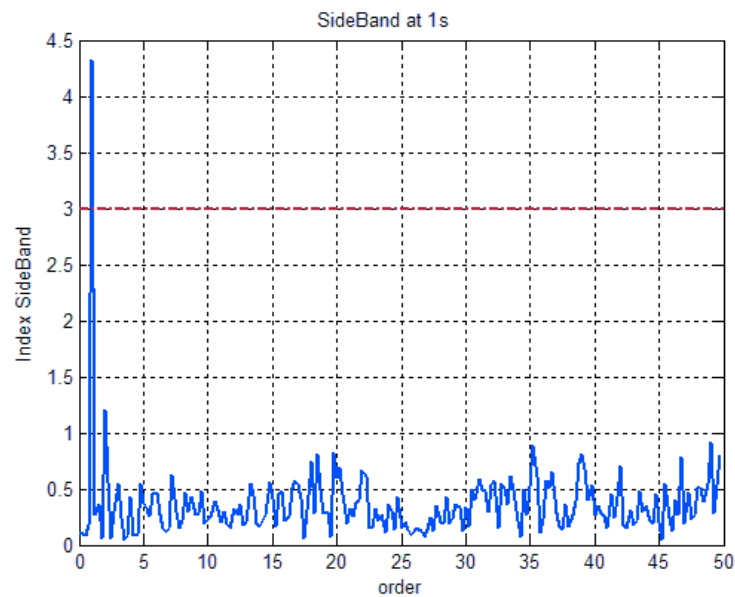


Fig. 4.3

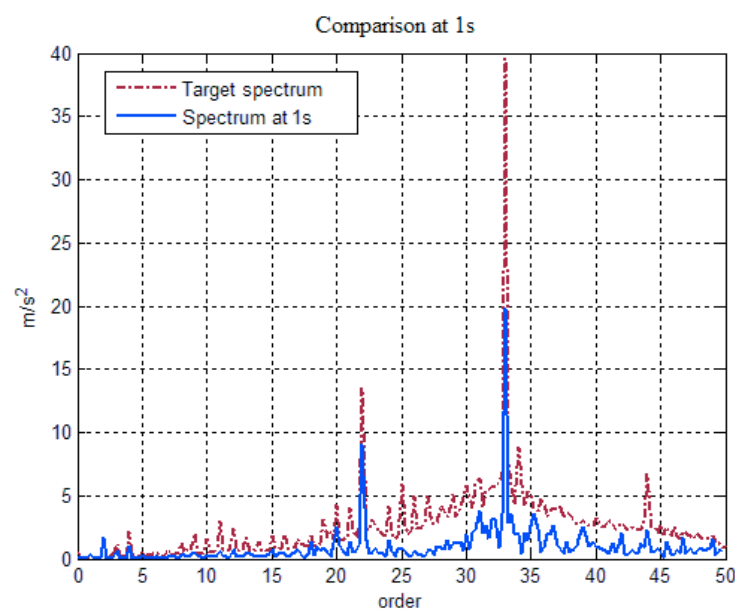


Fig. 4.4

L'impiego del secondo indice portando all'arresto più repentino della prova di durata consente maggiori possibilità di poter rintracciare la causa della difettosità in fase di ispezione del cambio in oggetto.

In Fig. 4.5 è riportato l'andamento del primo indice. Nella Fig. 4.6 è riportato un ingrandimento del suddetto indice nell'intorno del fermo prova.

Il primo indice ha segnalato la necessità del fermo prova durante il 32° Run (Fig. 4.5), cioè soltanto pochi secondi prima che il cambio si rompesse. Troppo poco il tempo di preavviso; ricordiamo che è fondamentale in questo tipo di test sospendere la prova quanto prima possibile, in modo da poter indagare circa le cause delle difettosità nella sua fase incipiente.

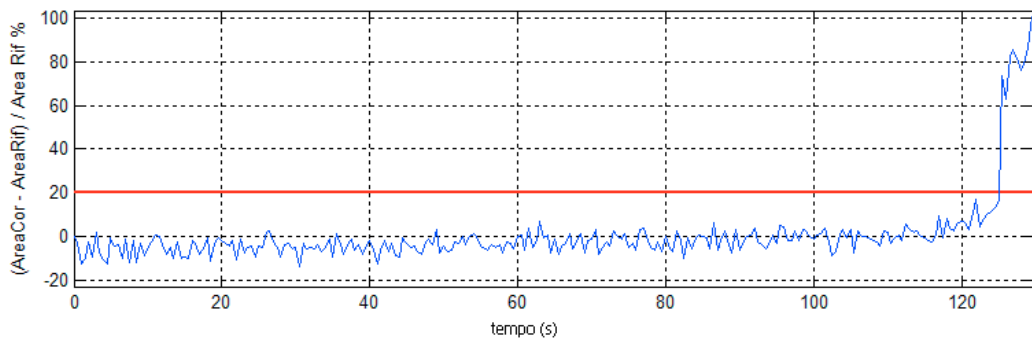


Fig. 4.5

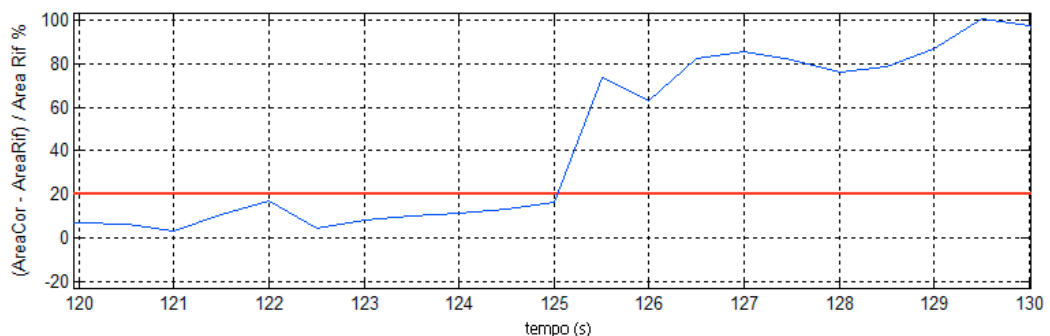


Fig. 4.6 - indice della variazione percentuale dell'Area_cor rispetto all'Area_rif (in alto); uno zoom nella zona di fermo prova (in basso)

Come visto, l'analisi spettrale realizzata per il monitoraggio di un cambio automobilistico ha un limite sostanziale inerente alla realizzazione *real-time* del processo di monitoraggio ed alla definizione di una soglia limite per decidere l'interruzione della prova. Inoltre abbiamo verificato che la sensibilità degli indici

impiegati non è tale da consentire un margine sufficientemente ampio per sfruttare appieno la prova stessa.

Per sopperire a tale lacuna, si è pensato di introdurre una metodica ed una tecnica che oltre a garantire una specificità elevata fornisca una sensibilità ancora maggiore. Infatti, il nuovo tipo di approccio, come sarà illustrato in seguito, rileverà un'anomalia all'interno del cambio precocemente, consentendo uno studio di monitoraggio non più necessariamente real-time ma *nearly* real-time garantendo comunque un fermo prova in largo anticipo rispetto a quelli ottenuti dalle procedure precedentemente descritte.

Pertanto, lo studio di tecniche di monitoraggio di firme vibrazionali che sfruttano l'analisi Wavelet strettamente correlate alla teoria del caos hanno consentito di mettere a punto un algoritmo che permette di interrompere la prova precocemente, consentendo un'ispezione più significativa all'interno della scatola cambio.

La condizione di fermo prova è evidenziata molto bene dalle seguenti figure dove è riportato il confronto dei pattern dell'interpolazione *spline* dei coefficienti Wavelet estratti durante i Run6, Run14 e Run15 (Fig. 4.7 e Fig. 4.8).

In ascisse sono riportati i punti costituenti un periodo, in ordinate le ampiezze dei coefficienti wavelet.

Da una loro osservazione risulta evidente la condizione di fermo prova: infatti dal confronto proposto in Fig. 4.7 tra il Run6 (assunto come baseline o riferimento) e il Run15 il pattern di quest'ultimo assume una *shape* significativamente diversa. Questo cambiamento non è un fenomeno transitorio tant'è che il pattern estratto durante il Run15 continua a mantenere la stessa forma riferibile al Run14 (Fig. 4.8) (comunque dissimile da quella che il cambio mostrava inizialmente in occasione del Run6).

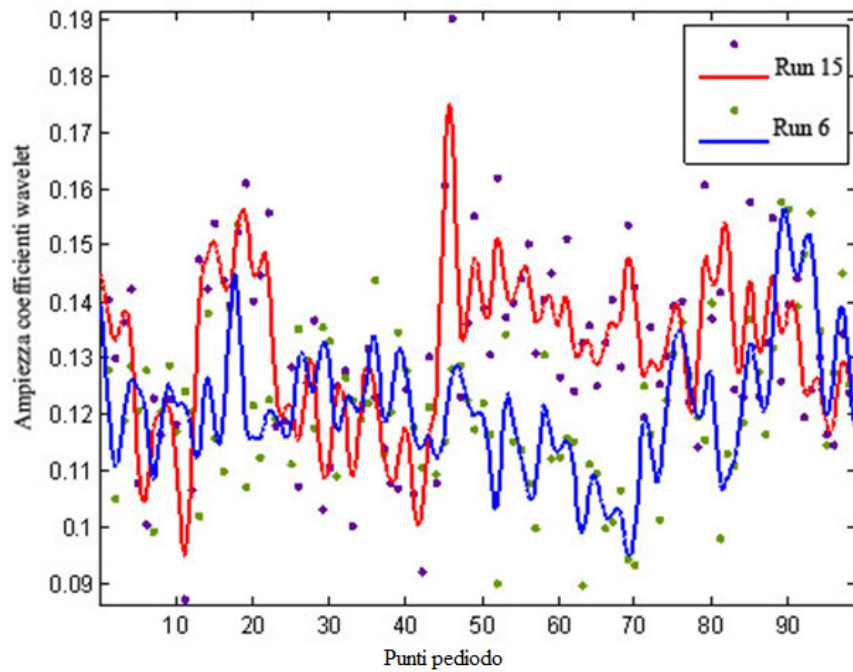


Fig. 4.7

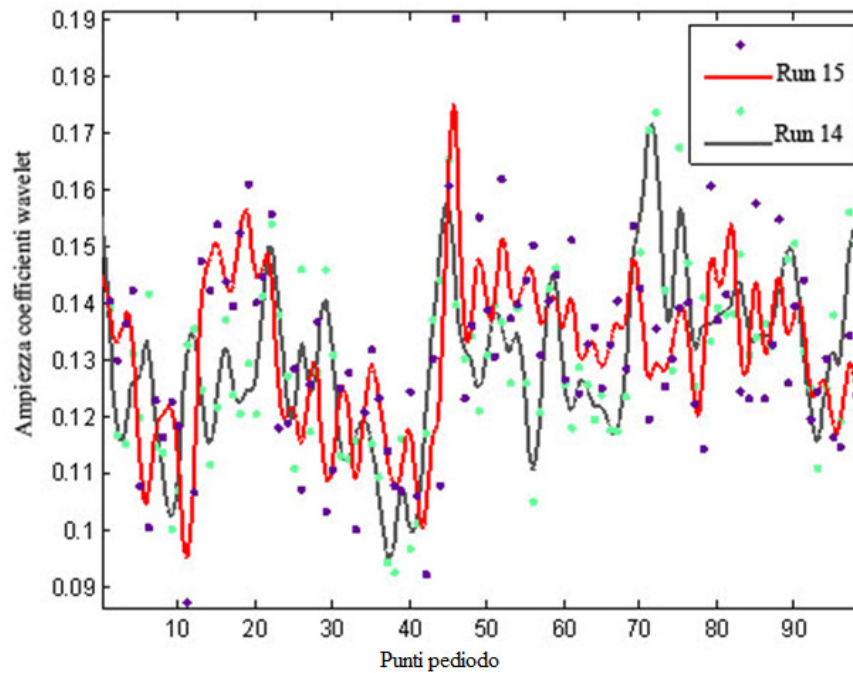


Fig. 4.8

Questo significa che sono intervenuti importanti cambiamenti internamente al cambio che portano una morfo-dinamicità significativamente diversa dalle firme vibrazionali del sistema meccanico monitorato. Di conseguenza sono sorte le condizioni per arrestare la prova. Questo consente di poter effettuare

un'ispezione accurata che porti a comprendere le ragioni che hanno portato al cambiamento della morfologia del pattern vibrazionale. L'indagine precoce consente di apportare tutti quegli accorgimenti progettuali o costruttivi necessari per eliminare le difettosità relative al cambio automobilistico in oggetto.

Ciò premesso la Fig. 4.9 mette a confronto le mappe di Poincaré relative ai Run6, 14 e 15.

Esse sono state calcolate nell'intorno della frequenza di meshing ($\approx 458 \text{ Hz}$)³¹, adoperando una Wavelet db4, scala 6, 488Hz. È ben visibile la copresenza di due punti fissi in ognuna delle mappe illustrate. In particolare la distanza tra di essi in occasione del Run15 è pari a 0.035021, cioè circa il 17% di incremento rispetto alla distanza baseline pari a 0.029 circa. Questo a dimostrazione di una variazione della firma vibrazionale.

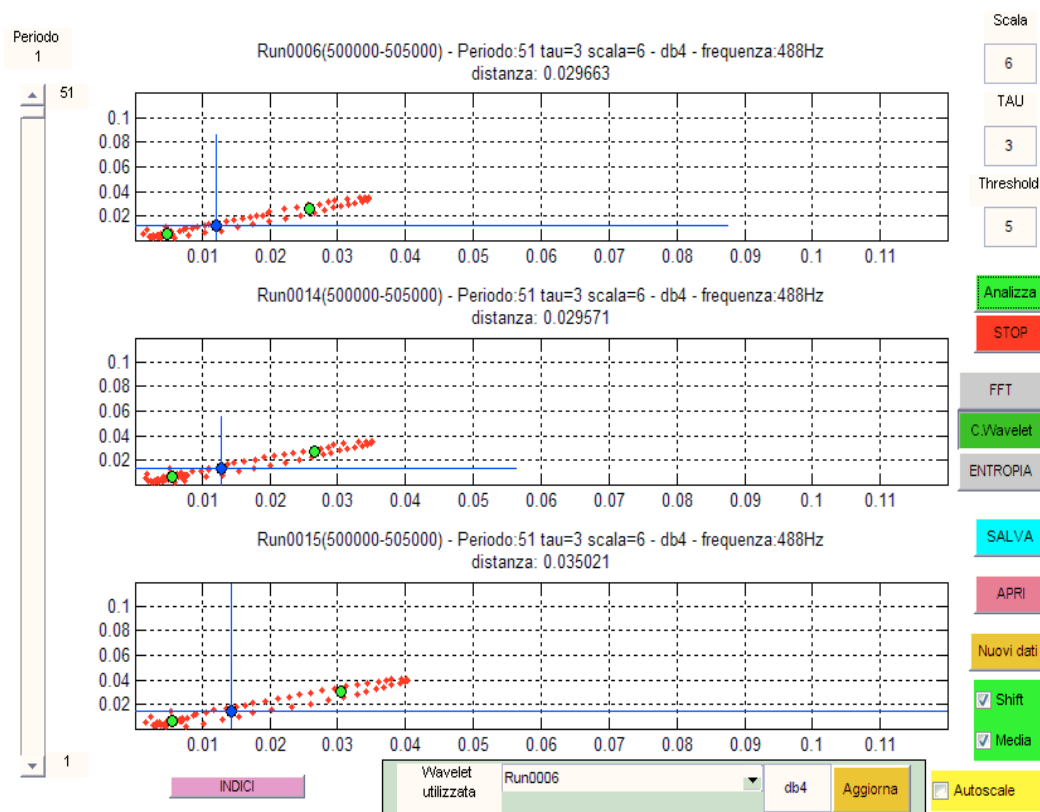


Fig. 4.9 - Confronto Run 6 vs 14 vs 15 – Mappa di Poincaré

³¹ Esso è funzione del numero di denti e del numero di giri/s della ruota monitorata: $\frac{11 \times 2500}{60}$.

La Fig. 4.10 mostra l'andamento dei periodogrammi relativi ai tre Run analizzati.

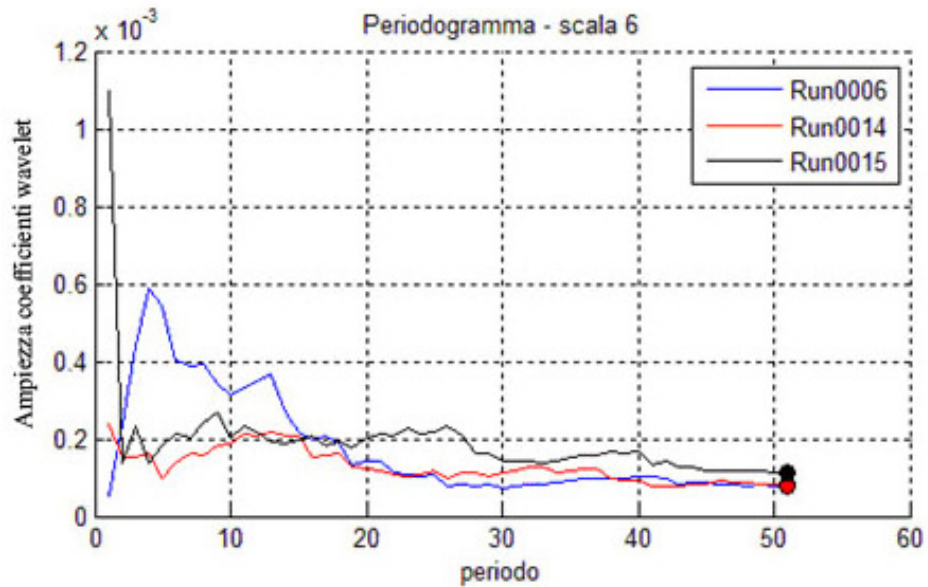


Fig. 4.10

In particolare si osserva un andamento quasi identico dei diagrammi relativi ai Run6 e Run14 mentre il Run15 mostra un valore che mediamente è maggiore di quelli esibiti dai Run precedenti. Ciò è determinato dalla co-presenza di almeno due frequenze tra loro non proporzionali (il cui rapporto è un numero irrazionale), causate da impulsi generati da due denti la cui rigidità presenta caratteristiche di eccessiva variabilità (usura eccessiva e/o cedimento elasto-plastico). Inoltre nella prima parte del periodogramma si nota un evidente andamento del diagramma relativo al Run6 causato molto probabilmente dalla presenza di un dente con caratteristiche geometriche ai limiti della tolleranza. Tale anomalia dinamicamente viene compensata dopo poco tempo per effetto del normale assestamento del profilo (rodaggio).

La Fig. 4.11 mostra l'andamento dell'indice quadratico di oscillazione.

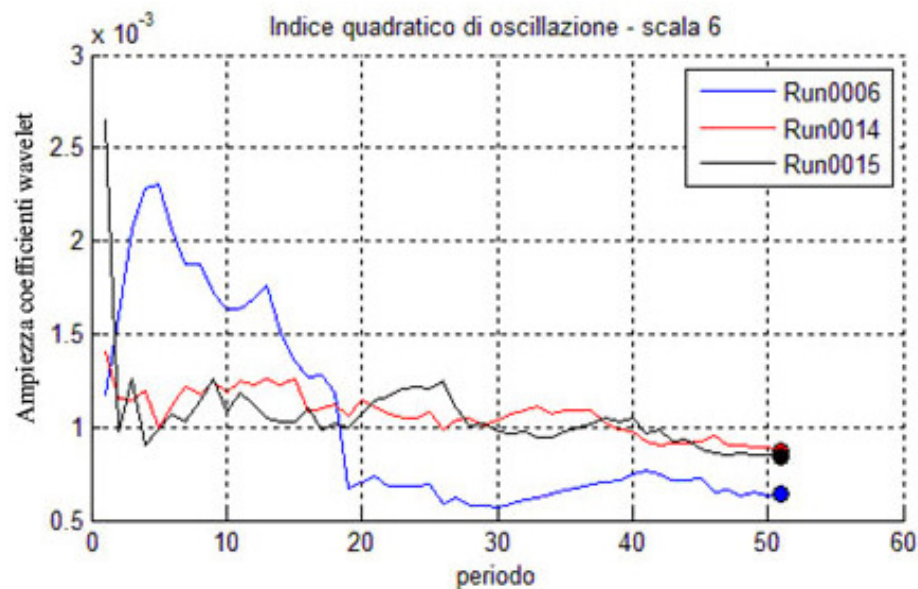


Fig. 4.11

È ben visibile la sovrapposizione dei valori riferibili ai coefficienti wavelet dei Run14 e Run15. L'andamento dei coefficienti wavelet estratti dal Run6 ben evidenzia l'evoluzione bifasica a questo punto della prova. Nella prima parte per le ragioni riferibili a quanto detto in precedenza l'indice mostra valori significativamente superiori a quelli esibiti dal Run14 e Run15. Nella seconda parte l'indice dopo l'avvenuto rodaggio si mantiene costantemente e significativamente al di sotto dei Run14 e Run15. Ciò si spiega se si considera che il Run6, a tutti gli effetti, rappresenta lo stato elasto-cinetico-dinamico del rotismo al tempo t_0 (baseline).

Nella Fig. 4.12 è riportato il diagramma relativo all'andamento del fattore di forma.

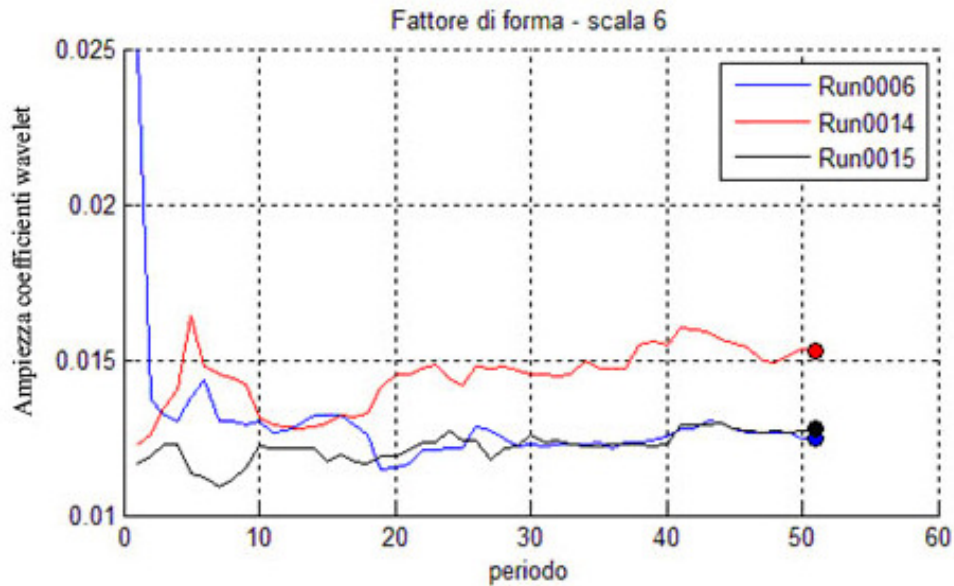


Fig. 4.12

È ben visibile anche qui un andamento molto simile dei diagrammi riferibili al Run6 e al Run15. Ciò è determinato dalla presenza, come già detto (Run6) di almeno un dente che presenta caratteristiche iniziali, probabilmente di natura geometrica, diverse dagli altri denti. Questo fatto genera una significativa diversa dinamica massima (determinata da un dente) rispetto alla media della dinamica esibita dal segnale riferibile agli altri denti. Il Run15, invece, esibisce una serie di valori temporalmente sovrapponibili a quelli esibiti dal Run6. In questo caso la contemporanea presenza della variazione elasto-plastica di uno o più denti (che determina l'incremento della dinamica) non è compensato dall'andamento medio vibrazionale in quanto esso è causato dall'usura di tutti i denti.

Il Run14 mostra un miglior fattore di forma determinato da una migliore dinamica massima e da un più uniforme livello vibrazionale del rotismo.

L'indice di sincronia è mostrato nella Fig. 4.13 seguente.

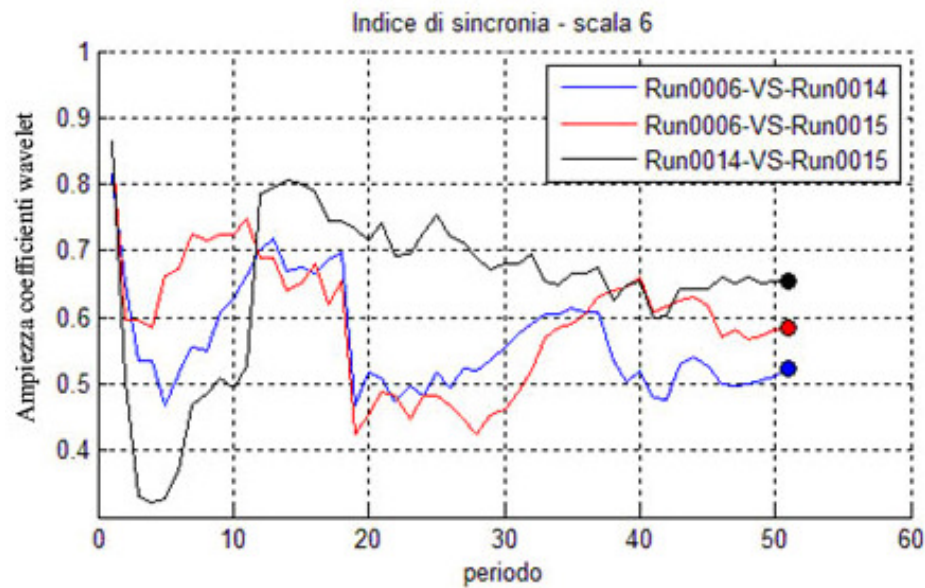


Fig. 4.13

Il miglior andamento è esibito dal sincronismo tra il Run14 e il Run15 in quanto i fenomeni elasto-cinetico-dinamici sono molto simili.

La tecnica testé illustrata consente un monitoraggio più efficiente se paragonato ai due indici precedentemente esposti; essa infatti permette di arrestare la prova al 15% (RUN 15) e non più al 31% (RUN 31) del ciclo di durata. Questo è un vantaggio sostanziale: infatti la trasmissione meccanica può essere ispezionata precocemente, cioè prima che cedimenti successivi alterino o mascherino i reali motivi che portano al danneggiamento degli organi del cambio.

Come è evidente si nota già al 15% del ciclo la presenza di anomalie sulla ruota dentata. Questo conferma l'affidabilità della tecnica di monitoraggio presentata e il vantaggio di poter arrestare la prova prima che il danno alteri significativamente le caratteristiche geometriche e non solo del dente.

Tutto ciò indubbiamente favorisce la ricerca del fenomeno che innesca l'anomalia.

Un ulteriore affinamento dell'indagine consiste nell'utilizzare anche il segnale tachimetro laddove esso è presente. Infatti è possibile, in tal caso, ricorrere ad un metodo, che si potrebbe definire "naturale", di riduzione del

rumore: mediare geometricamente il segnale accelerometrico periodicizzato sulla base del segnale tachimetrico per poi analizzarlo ricorrendo alla trasformata wavelet. L'estrazione della media geometrica dal segnale accelerometrico periodicizzato consente di eliminare o filtrare da esso quei "frammenti" che non sono riferibili a ben definiti eventi dinamici del sistema meccanico bensì ad eventi spuri ovvero puramente aleatori ovvero occasionali. Questi, in particolare, vanno a formare quell'insieme di punti che possiamo definire rumore o con termine anglosassone *noise*.

Il risultato è mostrato nelle figure tridimensionali seguenti. Nella prima (Fig. 4.14) in occasione del Run11 è visibile l'andamento dei coefficienti wavelet estratti dal segnale baseline (a sinistra i coefficienti istantanei, a destra quelli mediati geometricamente su 100 periodi).

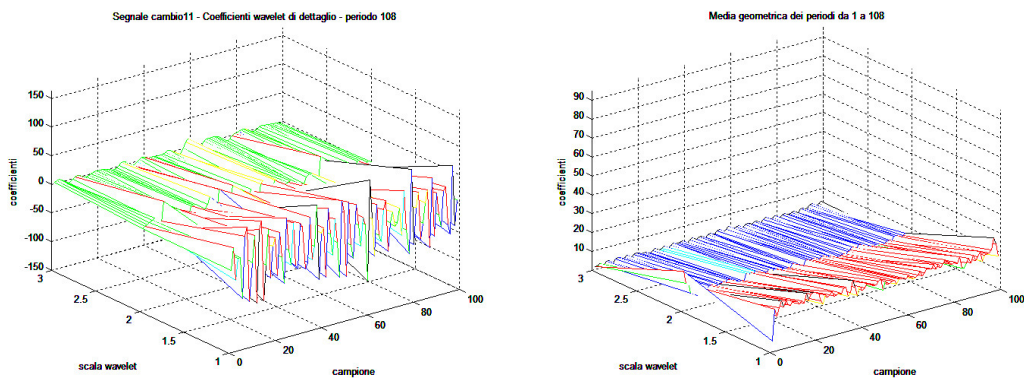


Fig. 4.14

Non sono visibili particolari anomalie. La figura successiva (Fig. 4.15) invece mostra una incipiente anomalia riferibile ad un fatto dinamico non occasionale: l'incipiente rottura di un dente in occasione del 13°Run.

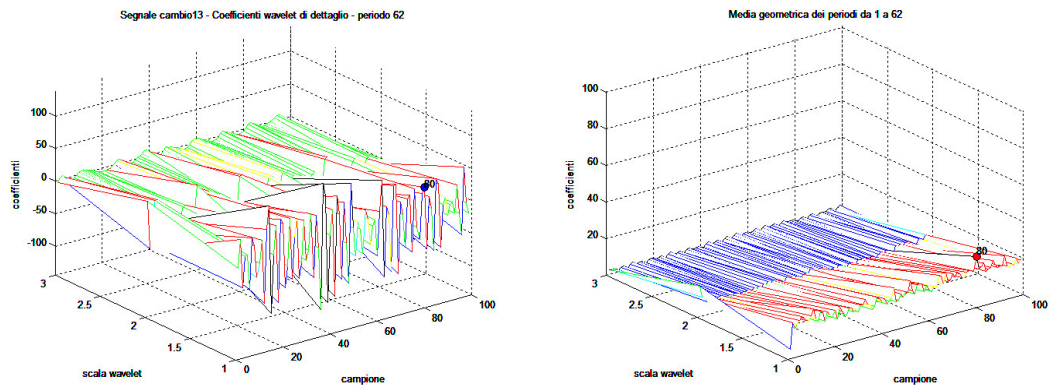


Fig. 4.15

Infine la Fig. 4.16 mostra una evidente anomalia rilevata in occasione del 13°Run. Si può osservare la co-presenza di significative alterazioni in corrispondenza anche di scale frequenziali diverse. Ciò è certamente determinato dalla esistenza di una firma vibrazionale significativa che interessa un ben determinato dente che ciclicamente si ripresenta. Il dente in questione è stato individuato impiegando l'indice β , che come già sottolineato in precedenza è sensibile alle microalterazioni vibrazionali determinate dall'accoppiamento dei fianchi dei denti.

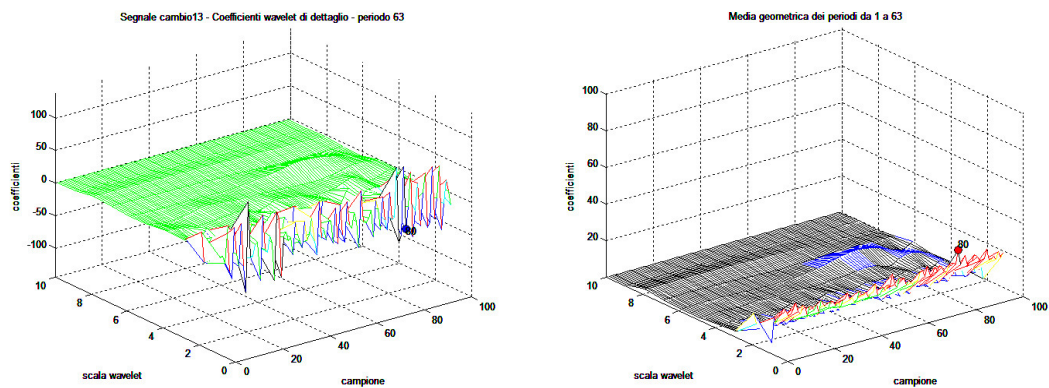


Fig. 4.16

In particolare l'analisi effettuata con la funzione β è stata applicata alla ruota dentata di prima marcia che compie 2500rpm ed è dotata di 11 denti, per cui il numero di impulsi al secondo è dato da $\frac{2500 \cdot 11}{60} \approx 458Hz$. Ne consegue che la

scelta per quanto riguarda la trasformata wavelet è caduta sulla db4, scala 6, 488Hz.

Le figure seguenti bene evidenziano il progressivo deterioramento inizialmente di un dente e successivamente anche del suo contiguo. La mappa di Poincaré che si riporta in Fig. 4.17 mostra la co-presenza durante il Run6 di due punti fissi (distanti circa 0.029663), prodotti da problemi legati alla geometria dei denti n.1 e n.11 visibili in Fig. 4.18.

Successivamente (Fig. 4.19) durante il Run14 la co-presenza di due alterazioni riconducibili ai denti n.1 ed al contiguo n.2 genera ancora la co-presenza di due punti fissi aventi la stessa distanza dei precedenti data la loro consecutività (0.029571).

La mappa di Poincaré mostra una maggiore distanza dei punti fissi (0.036021) rilevata in occasione del Run15, ciò a dimostrazione del fatto che più punti partecipano oramai in maniera più o meno sincrona alla loro generazione (Fig. 4.20).

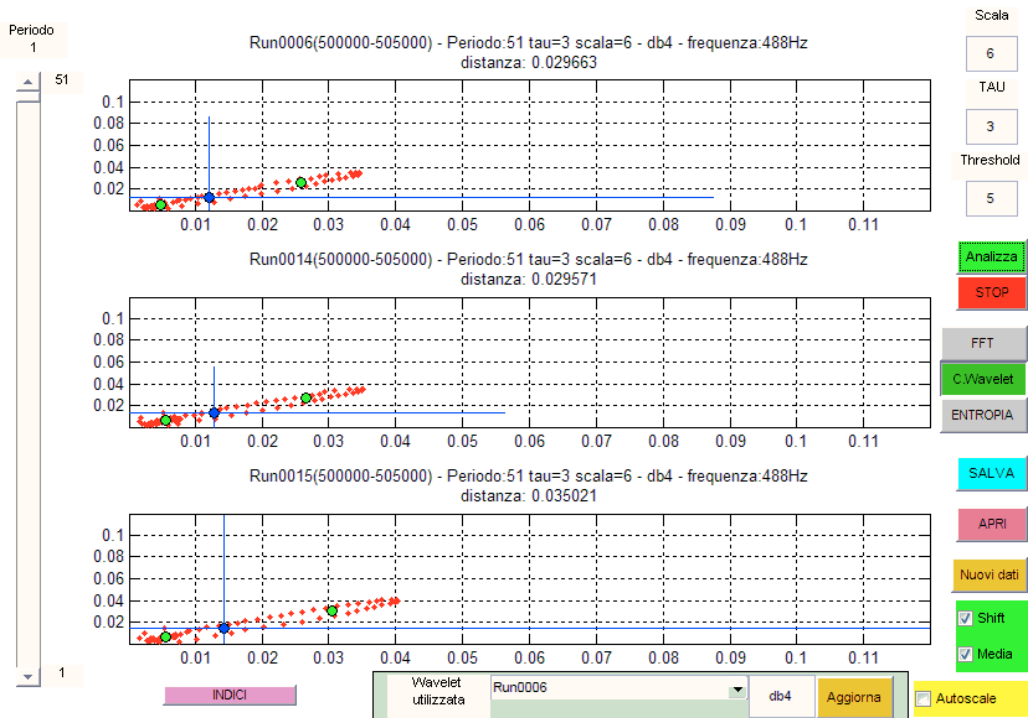


Fig. 4.17

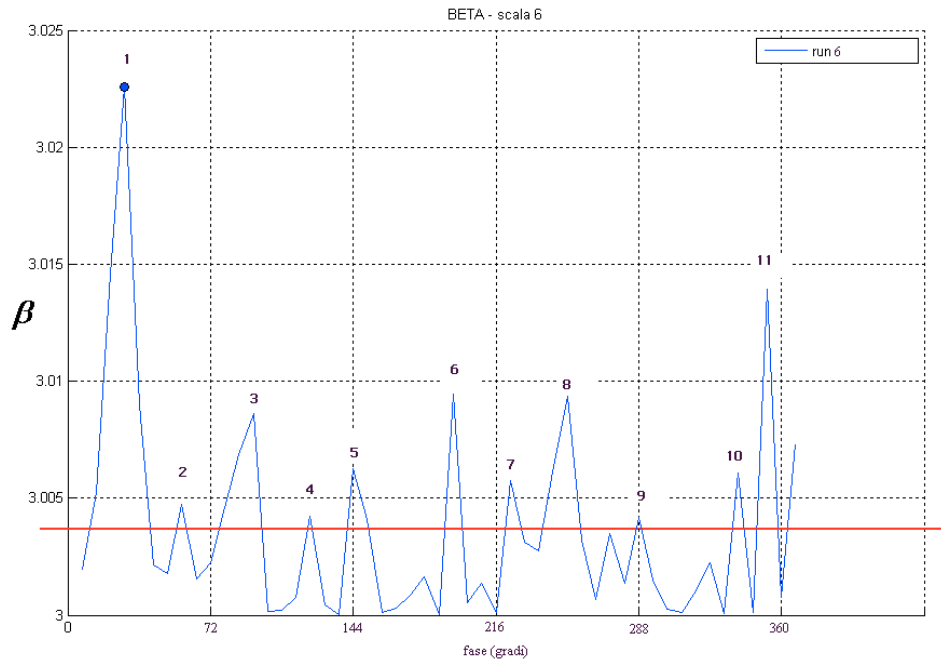


Fig. 4.18 – Indice β - Run6

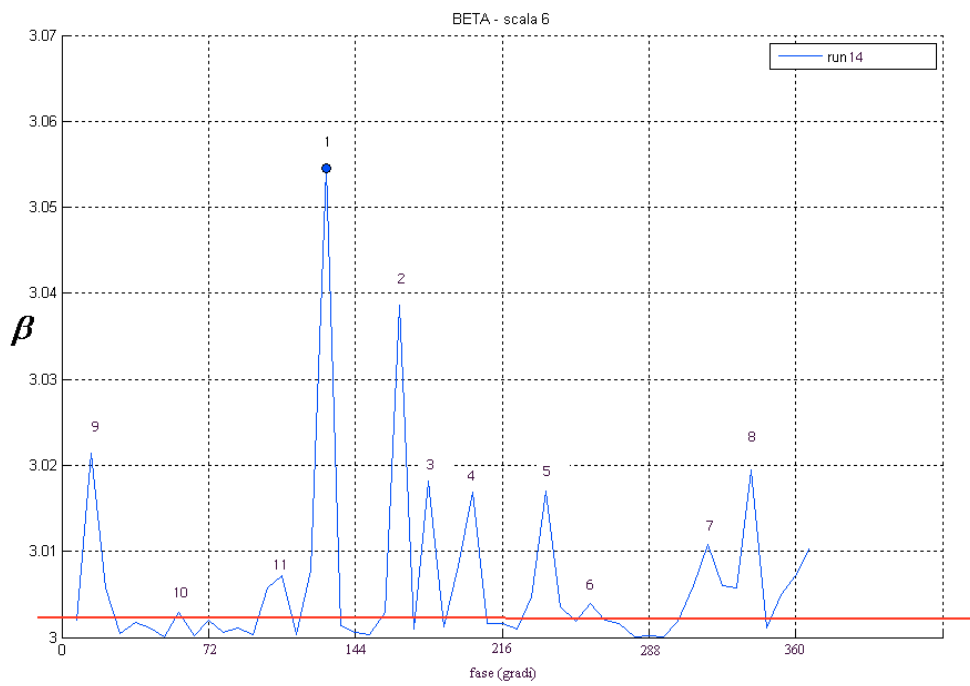


Fig. 4.19 – Indice β - Run14

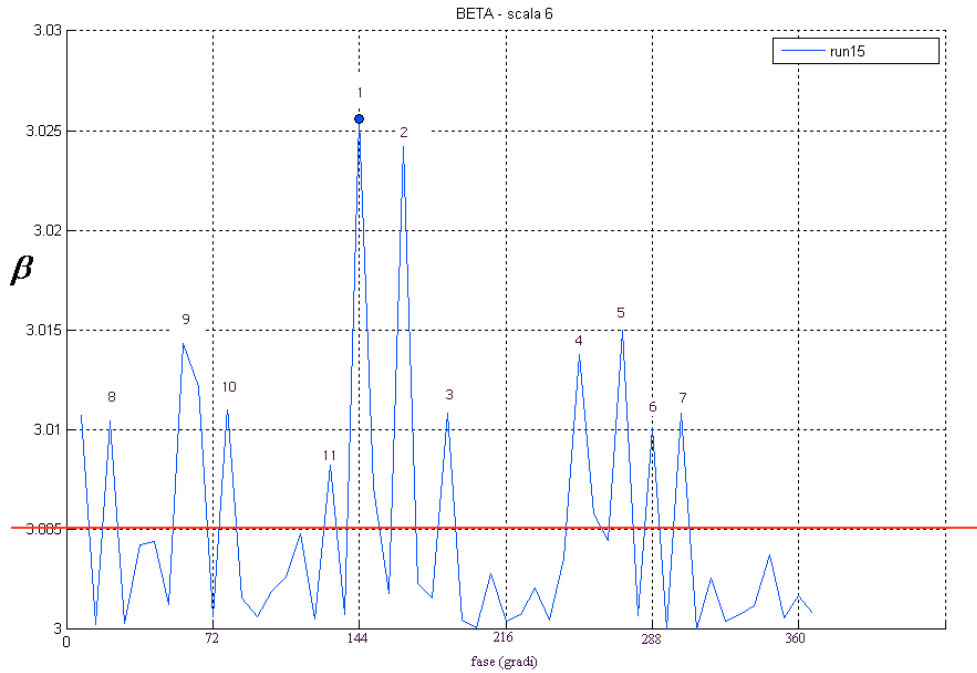


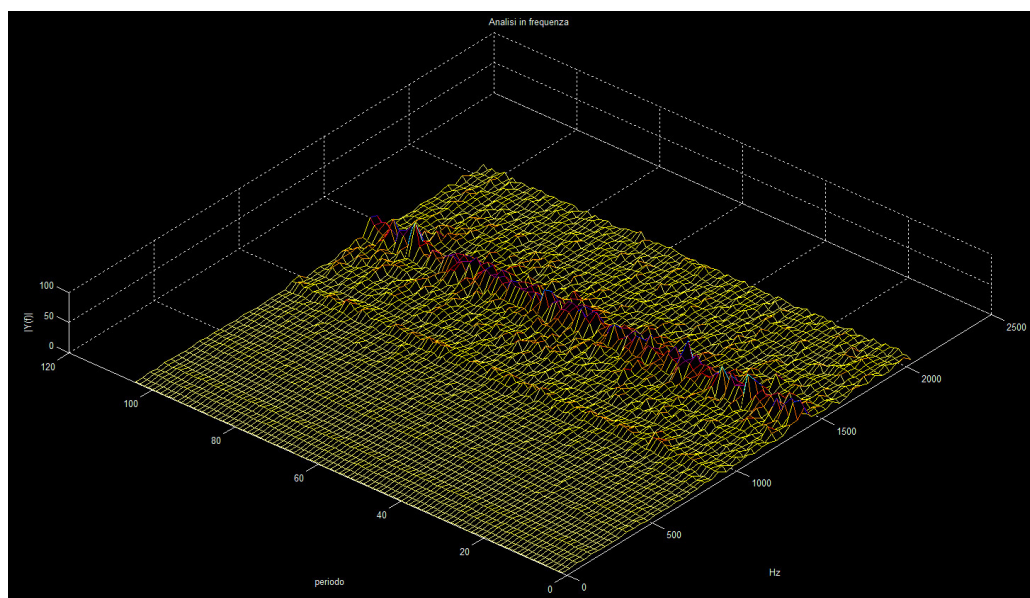
Fig. 4.20 – Indice β - Run15

Nella Tab. 4.2 sono riportati i principali parametri statistici ed energetici relativi alla funzione β . È evidente lo scarso potere informativo da essi presentato (macro-informazione).

<i>Run</i>	<i>Mediana</i>	<i>Media</i>	<i>Deviazione Standard</i>	<i>Entropia</i>	<i>Energia</i>
6	3.0021	3.0037	0.0044	112.1848	0.4206
14	3.0020	3.0062	0.0100	112.2691	0.4210
15	3.0021	3.0049	0.0060	112.2232	0.4208

Tab. 4.2

Infine, nella Fig. 4.21 è mostrato il diagramma tridimensionale dello spettro di frequenza esibito dal sistema meccanico in occasione del 14°Run. Non si notano particolari frequenze sideband ad eccezione di quella principale e di un suo multiplo, ciò a dimostrazione dello scarso potere informativo degli spettri di frequenza in tali tipologie di applicazioni complesse.

**Fig. 4.21**

Nella Fig. 4.22 che segue è mostrata la ruota monitorata dopo rottura a fine prova di durata, che ripetiamo è avvenuta al Run32.

**Fig. 4.22**

Prove condotte successivamente sulla stessa tipologia di cambio sono state arrestate con la metodica proposta che consentendo ispezioni precoci hanno

permesso di risalire alle cause che provocavano il cedimento e quindi l'affidabilità del cambio.

4.7 Analisi EGR (Exhaust Gas Recirculation)

Luogo: Laboratorio DiME

Sistema Meccanico: Motore FIAT 1900 JTD di serie

Scopo della prova: Quantizzare la "regolarità" di funzionamento del motore, attraverso la identificazione e la classificazione dei *cluster* generati dagli stati vibrazionali del motore, determinati dall'incremento di inerti in camera di combustione, cioè i gas combusti, agendo sulla elettrovalvola del circuito di ricircolo dei gas di scarico (Exhaust Gas Recirculation).

A tal fine sono stati acquisiti segnali accelerometrici nella direzione x parallela all'asse dell'albero motore, y perpendicolare all'asse dell'albero motore e contemporaneamente parallela al basamento ed infine z perpendicolare al basamento (quindi alle direzioni x, y) (Fig. 4.23).

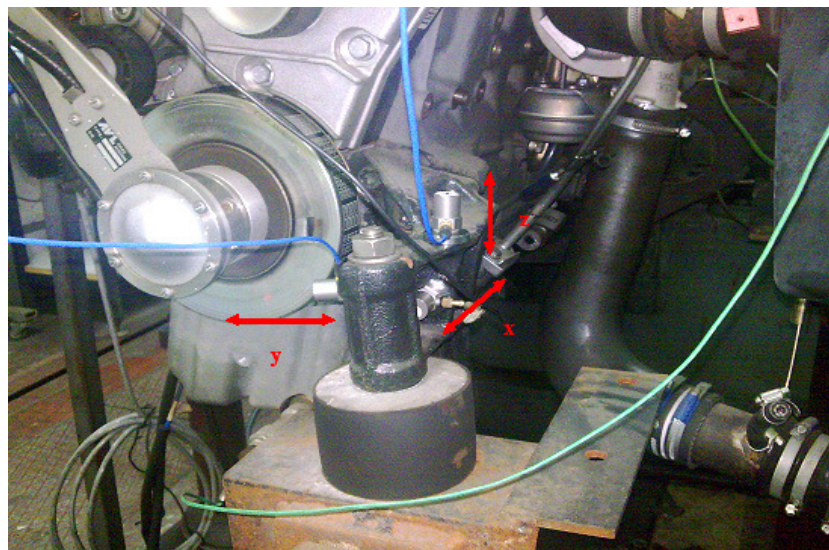


Fig. 4.23

La metodologia di prova utilizzata è la seguente:

- Motore in funzionamento stazionario per tutta la durata della prova
- Punto di funzionamento 2000 rpm e 2 bar di Pressione Media Effettiva (PME)

La prova si è svolta acquisendo per circa 2 minuti i segnali accelerometrici prodotti dal motore nelle condizioni di funzionamento standard (vale a dire quantità di gas riciccolati pari a quella normalmente utilizzata dalla mappatura della centralina motore). Tali dati sono stati utilizzati per costruire il cosiddetto segnale *baseline* o di riferimento.

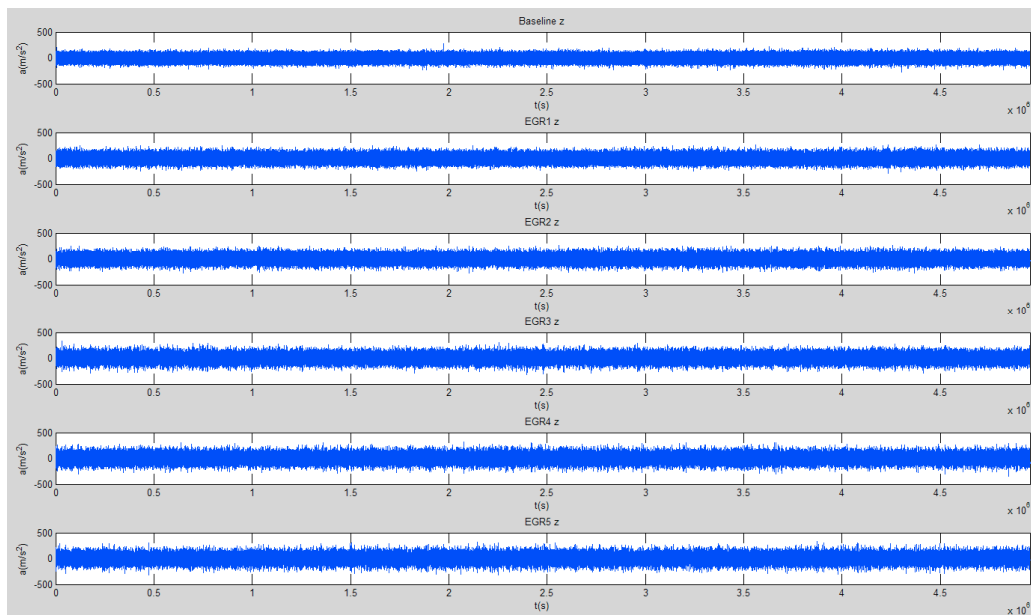


Fig. 4.24

Le successive acquisizioni sono state effettuate variando per 5 volte, progressivamente in successivi intervalli temporali, l'apertura dell'elettrovalvola che regola l'EGR in modo da aumentare progressivamente la quantità di gas combusti in camera di combustione.

Le suddette acquisizioni accelerometriche relative all'asse z , sono esemplificate in Fig. 4.24. In essa sono riportate sequenze equivalenti a circa 121s (~ 5000000 di punti) relativi alla baseline ed alle 5 condizioni di funzionamento determinate dalle variazioni di EGR, denominate brevemente EGR1, EGR2,...,EGR5.

Nella Fig. 4.25 è riportato un dettaglio relativo ai segnali di cui sopra corrispondenti a circa 0.25 secondi (circa 8 periodi/giri compiuti dall'albero motore).

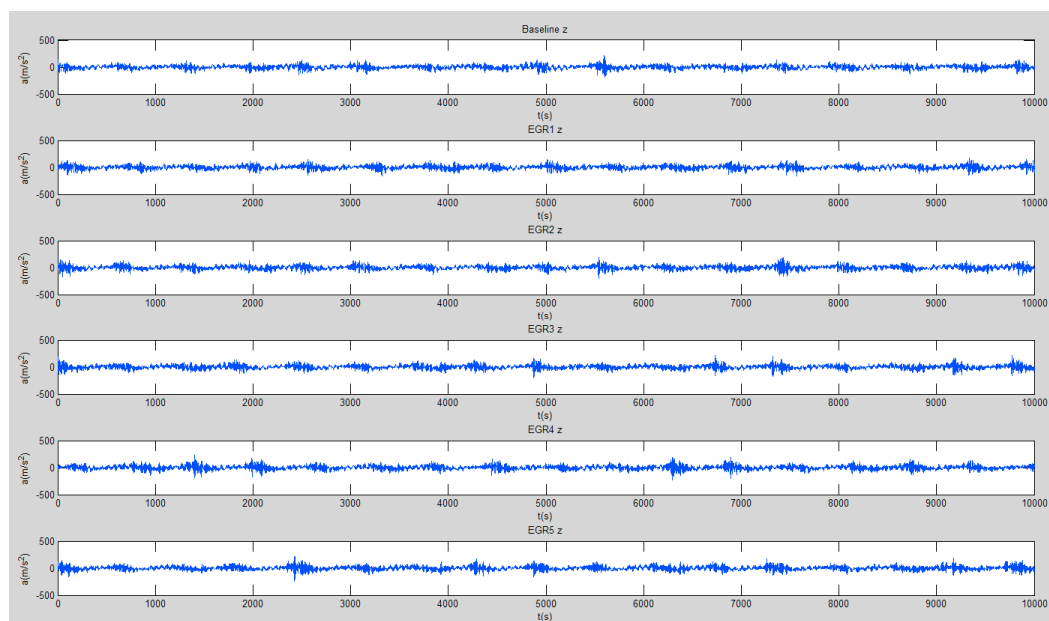


Fig. 4.25

Da un punto di vista motoristico l'incremento (5 step molto piccoli) dell'EGR provoca una combustione meno brusca con picchi di temperatura locale meno elevati e quindi una minore formazione degli ossidi di azoto (NO_x). Tali prove (cioè le sequenze accelerometriche) come già detto sono state denominate EGR1, EGR2,...,EGR5. Si precisa che i diversi punti di funzionamento del motore si discostano semplicemente perché sono caratterizzati da una combustione leggermente diversa che influenza quasi esclusivamente la formazione degli inquinanti (diminuzione degli NO_x ed incremento del Monossido di Carbonio CO) lasciando inalterate le prestazioni ovvero la Potenza.

Come già sottolineato lo scopo della prova è stato quello di quantizzare il "grado di regolarità" di funzionamento del motore utilizzando soltanto segnali accelerometrici acquisiti durante le prove.

L'analisi del segnale ha avuto per oggetto la verifica di una ipotesi di base: l'idea è che un motore alimentato con maggiore apporto di inerti dovrebbe esibire, rispetto ad una alimentazione standard, una maggiore regolarità di funzionamento. Per regolarità intendiamo riferirci alla morfo-dinamica vibrazionale esibita dal motore allorquando esso viene alimentato con percentuali di inerti, via via crescenti.

Per ottenere queste informazioni, molto labili, i segnali, nell'ambito di ciascun cluster (baseline, EGR1,...) sono stati "sincronizzati" con il segnale tachimetrico anch'esso acquisito durante l'effettuazione delle prove.

Osserviamo che la regolarità morfo-dinamica del segnale vibrazionale, è via via crescente fino ad un punto oltre il quale, un ulteriore afflusso di inerti, tende a far regredire il fenomeno. La spiegazione risiede nel fatto che all'aumentare della percentuale di EGR la combustione diventa meno brusca e quindi più regolare. L'EGR ha come scopo la riduzione dell'emissione di NOx che, come è noto, vengono prodotti allorquando la combustione è più veloce e con picchi elevati di temperatura locale.

Per poter in qualche modo "valutare" tale fenomeno abbiamo ricostruito, per ogni cluster, per prima cosa, un segnale che abbiamo denominato "surrogato". Esso è il rappresentate medio, in termini di spettro (frequenze ed ampiezze), dei segnali accelerometrici acquisiti durante le prove (baseline ed EGR).

Pertanto per la costruzione di un surrogato per ogni famiglia abbiamo messo a punto la seguente procedura:

- a) Determinazione del numero di punti di acquisizione occorrenti per la descrizione di un giro. Ossia 2000rpm (numero di giri del motore) = 33.33giri/s $\rightarrow 1/33.33=0.03\text{s/giro} \rightarrow 0.03 \times 40960$ (sampling rate) =1228punti/giro.
- b) Estrazione casuale di 51 sequenze accelerometriche sincronizzate con il rispettivo segnale tachimetrico (*record*).
- c) Da tali record vengono estratti a mezzo FFT gli spettri di frequenza con successiva determinazione di uno spettro medio (geometrico o aritmetico).
- d) Ricostruzione del segnale medio a mezzo trasformata inversa (IFFT) denominato in seguito "surrogato".

- e) Selezione dei parametri della wavelet adattativa.
- f) Convoluzione tra surrogato ed i 51 record selezionati casualmente nell'ambito di ciascun cluster.
- g) Calcolo dei coefficienti Wavelet derivanti dalle convoluzioni e dei corrispondenti 23 parametri di regolarità; tra cui il coefficiente di correlazione e l'errore di cross-correlazione.
- h) Tutti i parametri calcolati sono stati impiegati per la successiva classificazione multivariata (analisi discriminante).

Nelle figure che seguono sono mostrati i confronti tra gli spettri baseline, EGR1 (Fig. 4.26) e EGR5 (Fig. 4.27) rispettivamente.

Come è facilmente desumibile il confronto tra gli spettri relativi alla baseline e l'EGR1 mostra veramente poche differenze e comunque quelle poche osservabili poco o niente ci dicono per quanto riguarda la più o meno regolarità vibrazionale del motore. Analogo ragionamento può essere fatto confrontando gli spettri estratti dalla baseline e dall'EGR5.

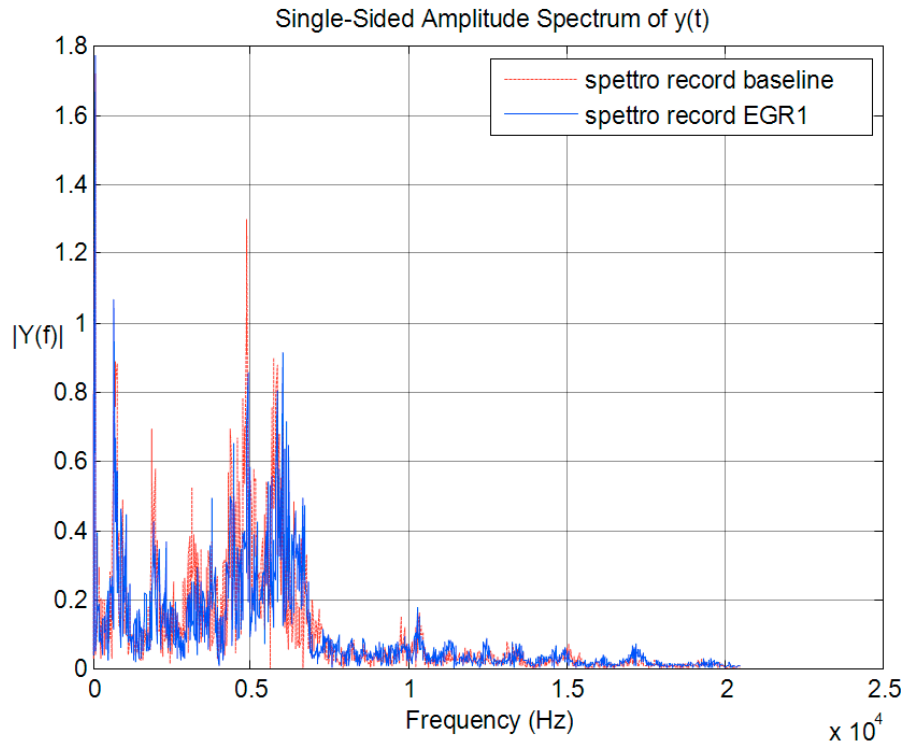


Fig. 4.26

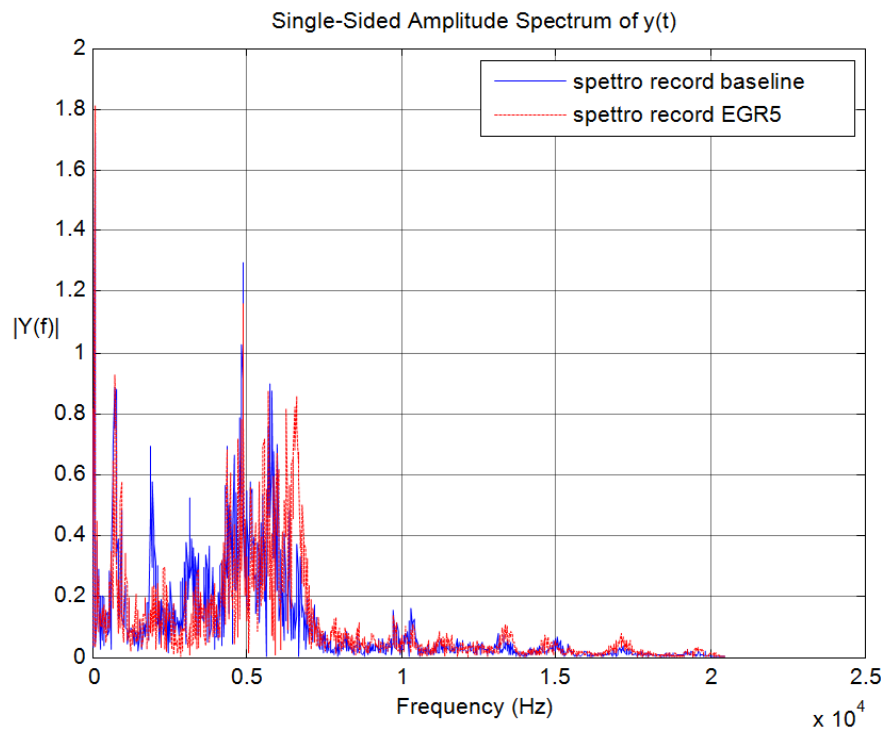


Fig. 4.27

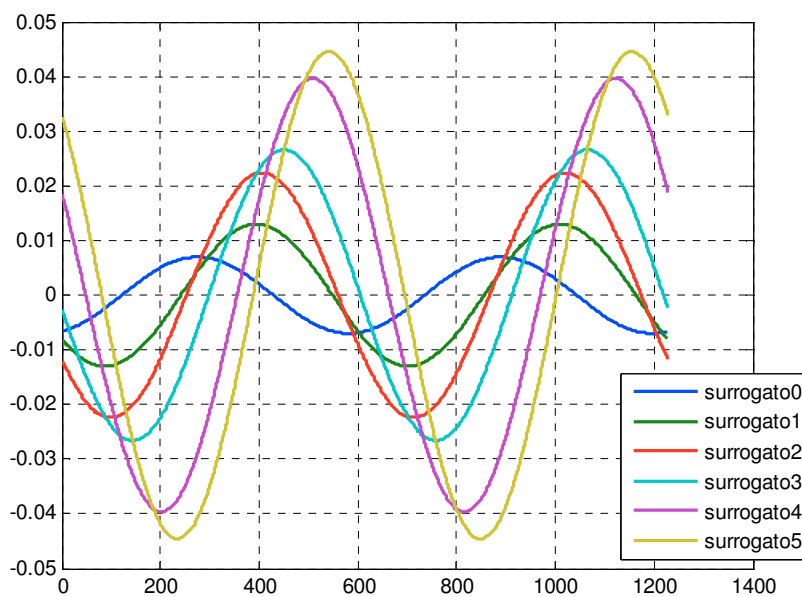


Fig. 4.28

La Fig. 4.28 mostra il confronto tra i surrogati estratti da ciascun cluster. È ben evidente, all'aumentare della percentuale di EGR, la loro progressiva sfasatura, la variazione dell'ampiezza e della frequenza: ciascuno di essi caratterizza i cluster da cui è stato estratto.

Con essi è stato possibile applicare l'analisi discriminante al fine di verificare le ipotesi su cui si basa questa prova.

Brevemente ricordiamo che l'analisi discriminante si propone di distinguere statisticamente due o più gruppi di eventi ottenuti da precedenti osservazioni. Ad esempio gli eventi sono le particolari condizioni di funzionamento di un motore a combustione interna che possono generare risposte che opportunamente codificate e parametrizzate consentono di identificare e classificare una prova dall'altra (cluster).

Per poter distinguere i cluster in genere ci si serve di una collezione di variabili che dovrebbero misurare le caratteristiche che consentono di discriminare tra i vari gruppi. Ad esempio, sempre con riferimento ad un motore a combustione interna, la risposta ad una variazione del numero di giri o del carico applicato ovvero a minime variazioni dell'EGR.

Dal punto di vista matematico l'obiettivo di un'analisi discriminante, è quello di pesare e combinare linearmente il *set* di variabili prescelte per lo studio in maniera tale da poter differenziare significativamente, un gruppo dall'altro. In

altre parole, si vuole cercare di discriminare i gruppi in modo da poterli distinguere. Ad esempio, se sappiamo che una certa manovra può ingenerare in un motore una risposta significativa e caratteristica allora le variabili utilizzate assumono un ruolo fondamentale nel consentirci di raggiungere l'obiettivo che ci siamo prefissati: discriminare i gruppi.

Pertanto, per raggiungere tale obiettivo si deve cercare di costruire una o più combinazioni lineari formate da variabili discriminanti nella forma seguente

$$D_i = d_{i1}Z_1 + d_{i2}Z_2 + \dots + d_{ip}Z_p \quad (4.1)$$

dove D_i è il punteggio (*score*) della i -ma funzione discriminante, d sono i pesi assunti dalle singole variabili, Z sono i valori standardizzati delle p variabili impiegate nell'analisi.

Come tali parametri hanno consentito di classificare i 306 record accelerometrici prima definiti lo possiamo constatare attraverso l'osservazione della Fig. 4.29.

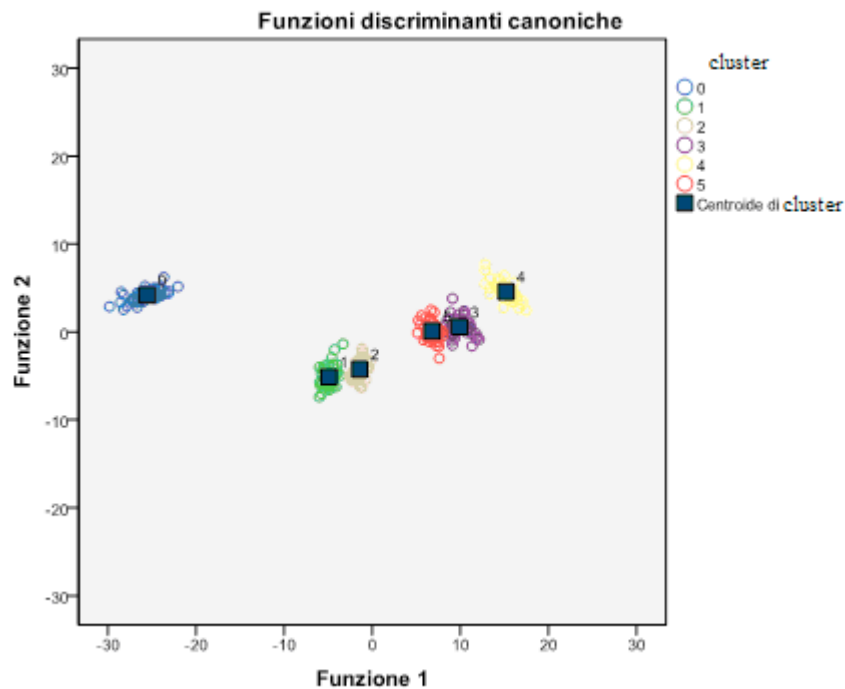


Fig. 4.29

In essa notiamo la presenza di 6 cluster ben discriminati e soprattutto una significativa distanza tra i "centroidi" relativi al cluster della baseline e quello relativo all'EGR1, cioè quello generato soltanto da minime variazioni percentuali di EGR. Talché se ne deduce anche la sensibilità del metodo adoperato.

Notiamo ancora che per la classificazione di tutti i record sono state utilizzate soltanto due funzioni discriminanti, composizioni lineari dei due parametri: coefficiente di correlazione ed errore di cross-correlazione.

Il loro andamento, con riferimento a ciascun cluster, è riportato nelle Fig. 4.30 e Fig. 4.31 seguenti, in cui è visibile, per ogni cluster, l'intervallo di confidenza al 95%. In particolare notiamo che il coefficiente di correlazione mostra un incremento piuttosto rapido quando si passa dalla condizione di baseline a quella di EGR1, per raggiungere un massimo in corrispondenza della condizione EGR4, per poi mostrare una riduzione nella condizione EGR5, condizione oltre la quale ogni ulteriore apporto di inerti potrebbe pregiudicare la regolarità di funzionamento del motore.

Ragionamento identico ma invertito può essere fatto per l'altro parametro discriminante: l'errore di cross-correlazione, che misura la simmetria dei record con il rispettivo surrogato. Qui il minimo corrisponde al cluster EGR4, a conferma del comportamento del primo parametro.

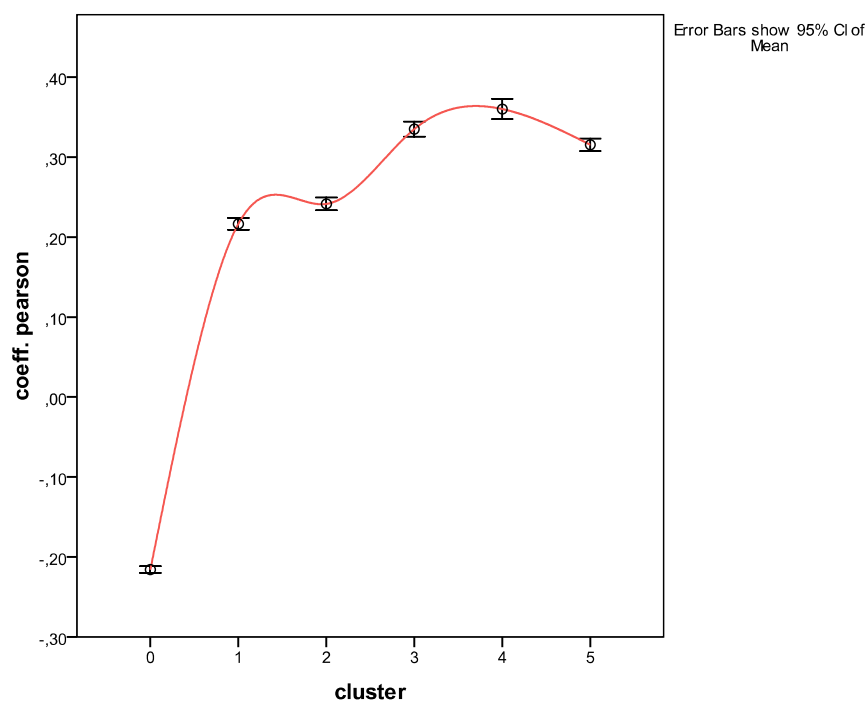


Fig. 4.30

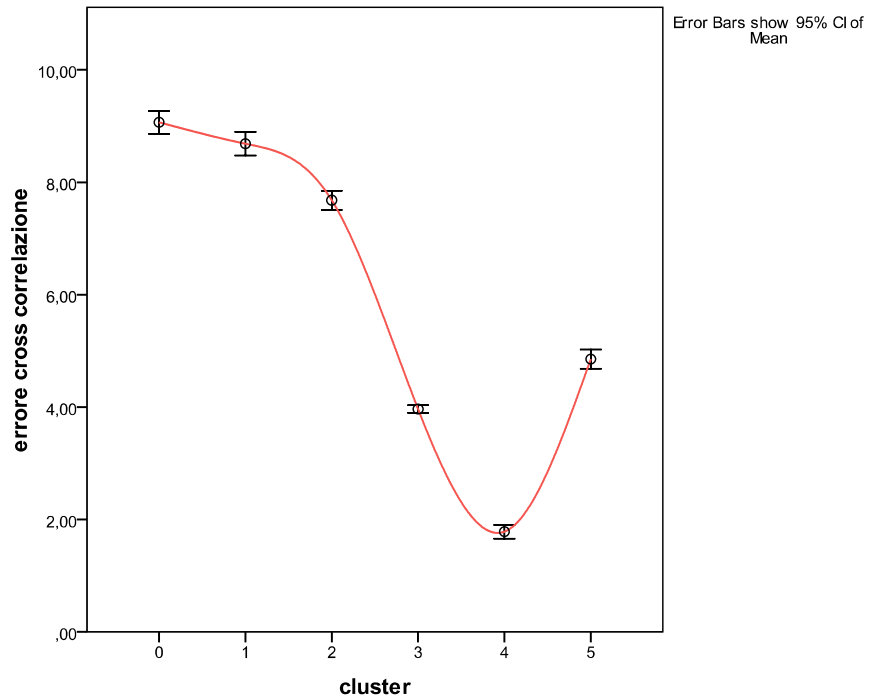


Fig. 4.31

La significatività del "potere discriminante" di ciascuna funzione è valutabile in base al valore assunto dai rispettivi autovalori (Tab. 4.3). Le prime due funzioni utilizzate per la discriminazione da sole "spiegano" circa il 99% della varianza.

Eigenvalues				
Function	Eigenvalue	% of Variance	Cumulative %	Canonical Correlation
1	179,356 ^a	91,6	91,6	,997
2	14,142 ^a	7,2	98,8	,966
3	1,161 ^a	,6	99,4	,733
4	,784 ^a	,4	99,8	,663
5	,386 ^a	,2	100,0	,528

a. First 5 canonical discriminant functions were used in the analysis.

Tab. 4.3

Successivamente è stata eseguita una ulteriore indagine statistica estesa a 612 record estratti casualmente da ciascuna prova, ripetendo la metodologia dai punti b ad h.

Il risultato della classificazione è visibile nella Fig. 4.32. E' sempre ben evidenziato il cluster riferito alla baseline rispetto agli altri 5 cluster. L'analisi multivariata ha consentito di aggregare meglio i cluster in base alla loro caratteristica proprietà che si estrinseca indirettamente in una quantizzazione del grado di regolarità di funzionamento del motore in funzione delle quantità di gas di scarico riciccolate.

In pratica le aggregazioni consentono di limitare ai primi due cluster una buona regolarità di funzionamento mentre molta attenzione andrebbe posta allorquando si raggiungono quantità di gas di ricircolo tali da modificare il surrogato come quelli riportati nella Fig. 4.32.

Anche con questo campione gli autovalori confermano la bontà dell'analisi, spiegando, cumulativamente, con le prime due funzioni discriminanti quasi il 99% della varianza (Tab. 4.4).

È interessante, infine, notare che gli andamenti dei due parametri con maggiore potere discriminante è molto simile a quello ottenuto con un campione di ampiezza minore. Inoltre, anche l'intervallo di confidenza esibisce una minore variabilità a conferma della bontà dell'analisi condotta.

La regolarità di funzionamento del motore si evince dalle variabili selezionate per il modello discriminante: il coefficiente di correlazione e l'errore di cross-correlazione. Il primo conferma che un motore se alimentato anche con gas di ricircolo esausti genera una firma vibratoria molto simile al suo surrogato e di conseguenza molto ripetitiva (circa +40%) di converso il motore non alimentato con gas esausti presenta maggiore irregolarità (circa -25%). Ovviamente vi è un limite al ricircolo di EGR oltre il quale il motore diventa molto più irregolare: il miglior rapporto si concentra intorno al quarto cluster (Fig. 4.34), dove raggiunge il minimo la variabile che misura l'errore di cross-correlazione.

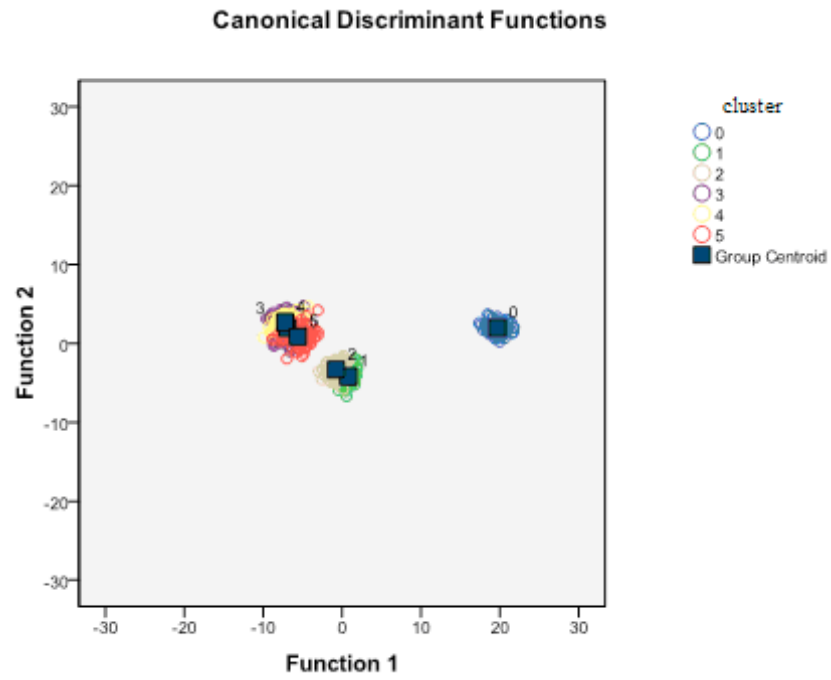


Fig. 4.32

Eigenvalues

Function	Eigenvalue	% of Variance	Cumulative %	Canonical Correlation
1	87,465 ^a	90,9	90,9	,994
2	7,457 ^a	7,7	98,6	,939
3	,668 ^a	,7	99,3	,633
4	,597 ^a	,6	100,0	,612
5	,043 ^a	,0	100,0	,204

a. First 5 canonical discriminant functions were used in the analysis.

Tab. 4.4

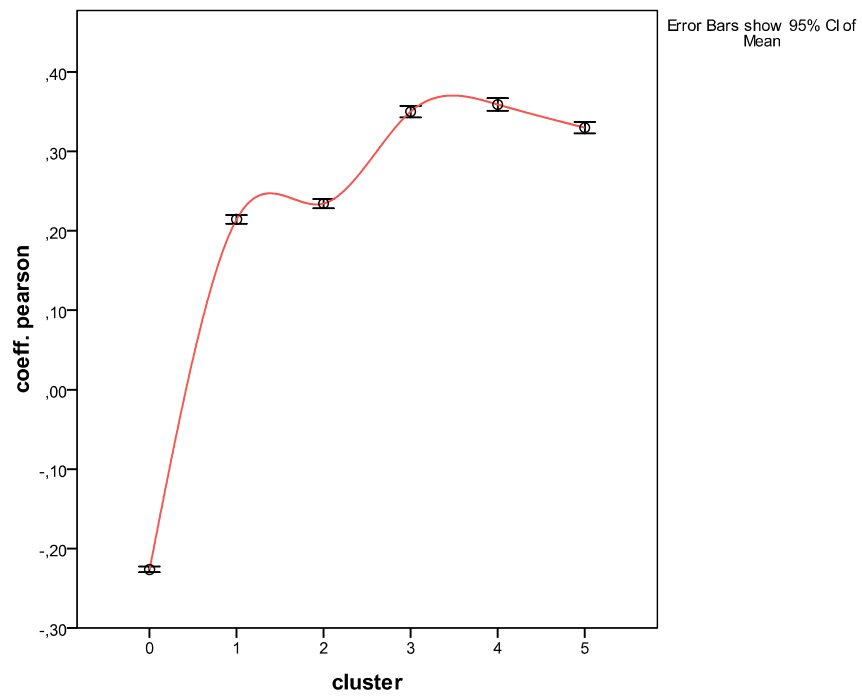


Fig. 4.33

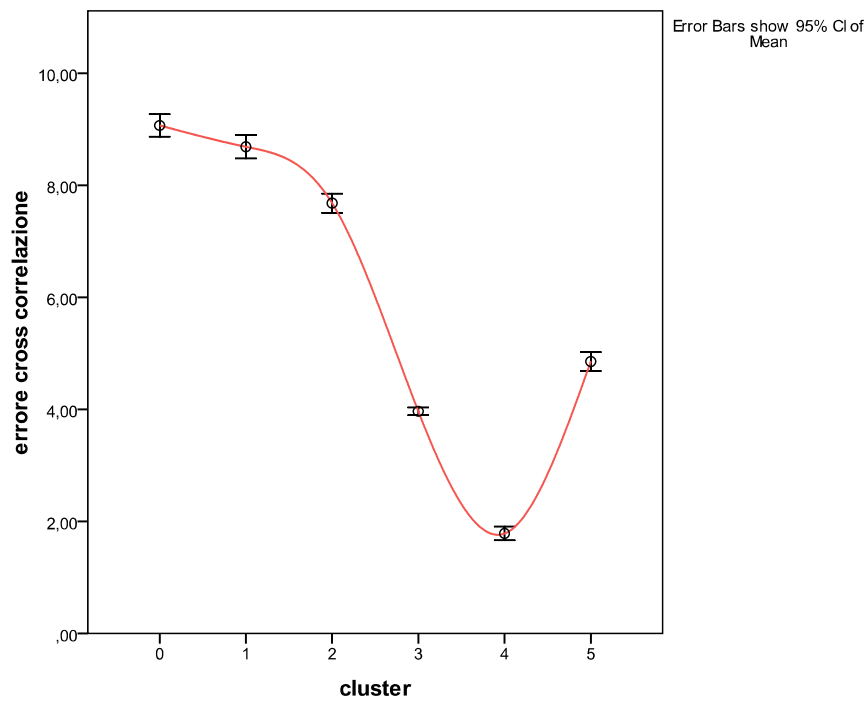


Fig. 4.34

Stante la risposta e la sensibilità della metodica esposta questa potrebbe essere impiegata per ottimizzare, ad esempio, per ciascuna famiglia di motori, la

curva di EGR proprio sfruttando la risposta del sistema meccanico dal punto di vista vibrazionale.

Ciò consentirebbe, agendo sulla mappatura della centralina motore, di ottimizzare il giusto rapporto tra combustibile e gas inerti di ricircolo con la doppia finalità, da un lato la riduzione degli NOx e dall'altro una maggiore regolarità di funzionamento del motore soprattutto da un punto di vista vibrazionale con grosso giovamento funzionale e di durata di tutti gli organi meccanici sottoposti a minore stress termico e a fatica.

4.8 PMI Vibrazionale (PMIv)

Luogo: Nave petroliera in navigazione commerciale tra Italia e Spagna

Sistema meccanico: motore navale diesel con distribuzione a camme

Scopo della prova: monitoraggio preliminare al tempo T_0

Il monitoraggio vibrazionale è stato condotto su un motore navale di una petroliera del tipo riprodotto in Fig. 4.35 appartenente ad un noto Gruppo Armatoriale.



Fig. 4.35

Di seguito vengono riportate le principali caratteristiche del motore:

Numero di cilindri: 6
 Diametro dei cilindri: 500mm
 Corsa del pistone: 2000mm
 Potenza: 9480kW
 Velocità: 127rpm
 Massima pressione di combustione: 150bar
 Pressione media effettiva: 19bar
 Velocità del pistone: 8.47m/s
 Ordine di accensione: 1-5-3-4-2-6
 Verso di rotazione: orario (osservando dall'elica)

Fig. 4.36

L'acquisizione dei segnali accelerometrici necessari per ricavare le firme vibrazionali caratterizzanti, in particolare, ciascun cilindro è stata eseguita

avvalendoci di tre accelerometri monodirezionali posizionati sulla testa di ciascun cilindro (visibili in Fig. 4.37).

I rilievi vibrazionali sono stati eseguiti con i seguenti assetti, in occasione di un traversata commerciale dall'Italia alla Spagna:

- 40 rpm *75% cargo condition*
- 95 rpm *75% cargo condition*
- 114 rpm *75% cargo condition*

In quanto segue abbiamo riportato alcuni risultati ritenuti tra i più significativi conseguiti con l'assetto rispettivamente: 114 e 95 rpm *75% cargo condition*.

I rilievi accelerometrici sono stati eseguiti posizionando la strumentazione su tre livelli verticali:

- 1I** - Basamento
- 2I** - Livello collettore recupero olio di lubrificazione
- 3I** - Livello prossimo alla testa motore (Fig. 4.37).



Fig. 4.37

In particolare, gli accelerometri sono stati applicati sulla struttura posta in testa alla camera di scoppio di ciascun cilindro, come mostrato in Fig. 4.38.

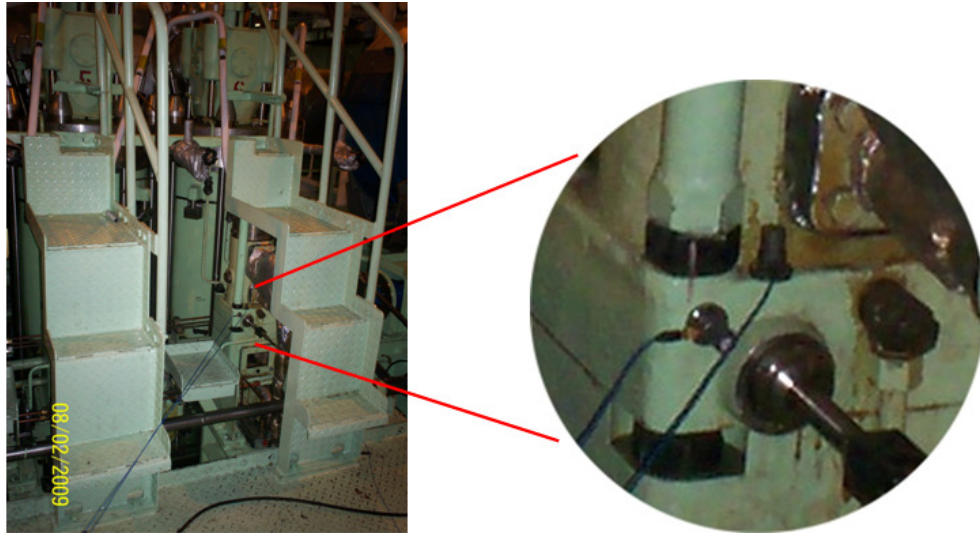


Fig. 4.38

Nella Fig. 4.39 è riportata un'altra vista della nave durante le operazioni di monitoraggio condotte al piano terra. Sono visibili le apparecchiature e la strumentazione adoperata e descritta nel precedente paragrafo 4.1 ed in particolare nelle Appendici A e B.



Fig. 4.39

Per procedere alla sincronizzazione periodica dei segnali accelerometrici (cioè, allineati con ciascun periodo di rotazione dell'albero motore), è stato posizionato un rilevatore tachimetrico su di una ruota dentata calettata sull'albero motore come in Fig. 4.40.

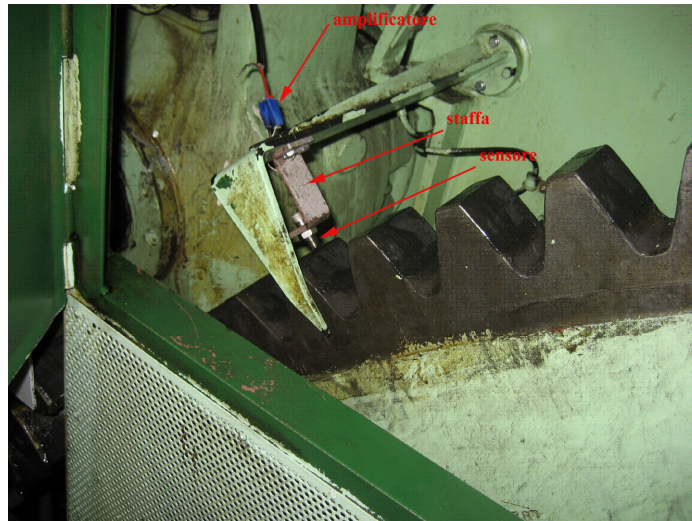


Fig. 4.40

Durante tutta la traversata, la velocità di navigazione era stata contenuta in modo da non superare mai i 114rpm pur potendo toccare come massimo valore di progetto 127rpm. Questa limitazione era indotta dall'insorgere di eccessive pericolose vibrazioni, riscontrabili sul sistema motore, al raggiungimento di tale numero di giri.

Il segnale accelerometrico è stato campionato in continuo a 20kHz per una durata di circa 5min, in varie circostanze. L'analisi spettrale ha evidenziato l'esistenza di varie frequenze caratteristiche del sistema meccanico monitorato ed attribuibili a specifici componenti. Ad esempio, 114rpm, asse z (Fig. 4.41): 9.5Hz dovuto al propulsore costituito da una unica elica provvista di 3 pale, 11.5Hz causato dal motore, 95Hz attribuibile ad una ruota dentata costituita da 50 denti che funge anche da volano, 45.5Hz prodotta dal pretensionatore, ecc.

L'indagine del sistema meccanico si è articolata in varie fasi. Dapprima si è proceduto a sincronizzare il segnale accelerometrico con il corrispondente segnale tachimetrico con lo scopo di rilevare periodi interi del ciclo termodinamico relativo a ciascun cilindro. Successivamente si è preso in considerazione il singolo

periodo termodinamico, individuato da un giro completo dell'albero motore. Nonostante la nave viaggiasse a velocità costante, le dimensioni dei periodi erano differenti. Si è deciso, pertanto, di effettuare un *resampling* dei singoli vettori rappresentativi del periodo rapportandoli alla dimensione minore. In tal modo, si sono costruiti segnali periodici di ampiezze costanti rappresentativi dello stato vibrazionale di ciascun cilindro costituiti da circa 12000 punti.

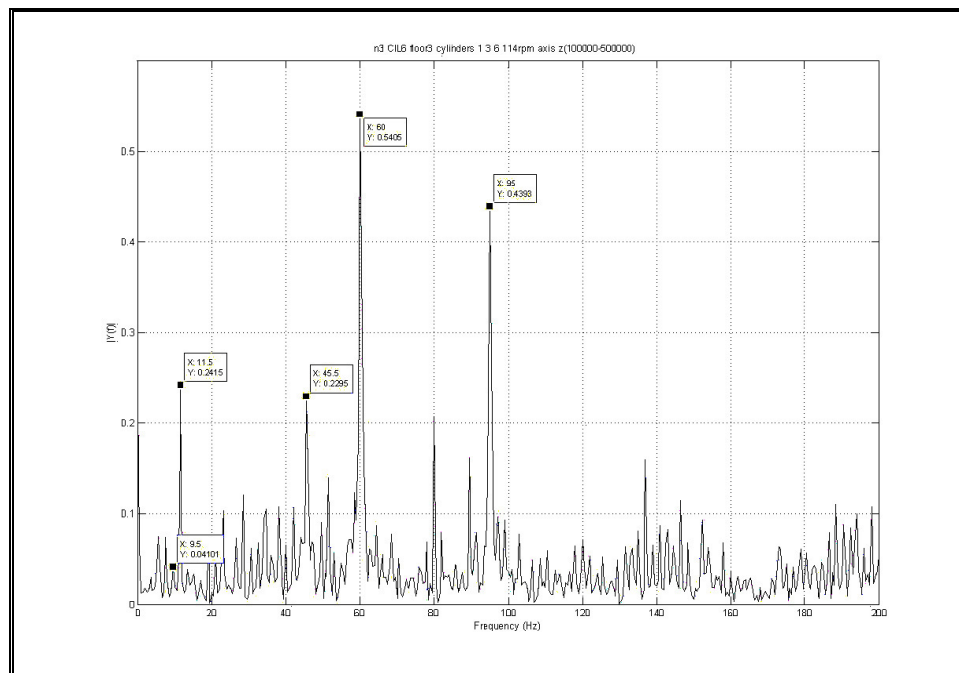


Fig. 4.41

Osserviamo che la Fig. 4.41 riproduce un esempio di quello che abbiamo denominato *working spectrum* al tempo T_0 ottenuto nelle condizioni considerate, vale a dire: 114rpm e 75% cargo condition.

Per *working spectrum* intendiamo lo spettro delle frequenze tipiche a masse concentrate. Lo spettro, in caso di funzionamento corretto del sistema (in questo caso dell'intera catena moto-propulsiva), fornisce le frequenze base sia dei singoli componenti sia dei loro accoppiamenti con il sistema nave.

Dall'analisi condotta al tempo T_0 non si evincono frequenze anomale nell'intorno dei punti caratteristici. La presenza o la formazione, in futuro, di frequenze e/o spike (side-bands) su tale mappa rappresenterebbero, in funzione della loro frequenza e/o ampiezza, un'anomalia di funzionamento cui porre attenzione. Nel caso il gruppo motopropulsore fosse sottoposto ad interventi di

manutenzione allora si ritiene utile effettuare un tale tipo di monitoraggio soltanto dopo un opportuno intervallo di tempo in modo da consentire una fase di assestamento degli elementi eventualmente sostituiti e/o manutenzionati.

Una fase del monitoraggio molto importante e delicata è stata quella di rilevare le firme vibrazionali esibite dai cicli termodinamici relativi ai singoli cilindri. La scelta è ricaduta sulla wavelet Gauss1. La Fig. 4.42 chiarisce l'importanza di poter disporre di una metodica che consenta sia la selezione mirata della frequenza di lavoro e sia della riproduzione della evoluzione temporale del fenomeno spettralmente selezionato.

In particolare, la velocità di navigazione tenuta dalla nave corrispondeva a 95rpm, è stato impiegato un solo accelerometro, relativo all'asse z , posto sulla testa del cilindro n.6, 3° piano, per l'analisi wavelet è stata impiegata la trasformata Gauss1, scala 2, 2000Hz, $\tau = 3$. La sequenza vibrazionale (costituita dai coefficienti wavelet) istantanea, vale a dire non mediata geometricamente, così estratta, riferibile al ciclo termodinamico a cui corrisponde l'autoaccensione del combustibile, è mostrata in Fig. 4.42.

Sono ben visibili, rispetto alla scala temporale rappresentata dall'ascissa, la successione delle vibrazioni indotte dalle autoaccensioni relative ai 6 cilindri regolarmente intervallate (circa 2000 punti, equivalenti ad una fase di circa 60°), acquisite dall'unico accelerometro, di cui sopra, posizionato in testa al 6° cilindro. Sottolineiamo che la Fig. 4.42 si riferisce ad una rilevazione istantanea, cioè non mediata geometricamente.

Si sottolinea che nelle figure che seguono, laddove non riportata, la legenda relativa all'asse delle ordinate deve intendersi come "Ampiezza Coefficienti Wavelet" che per definizione è adimensionale. Analogamente per l'asse delle ascisse laddove non riportata la legenda deve intendersi come il "Numero di Punti" costituenti il segnale.

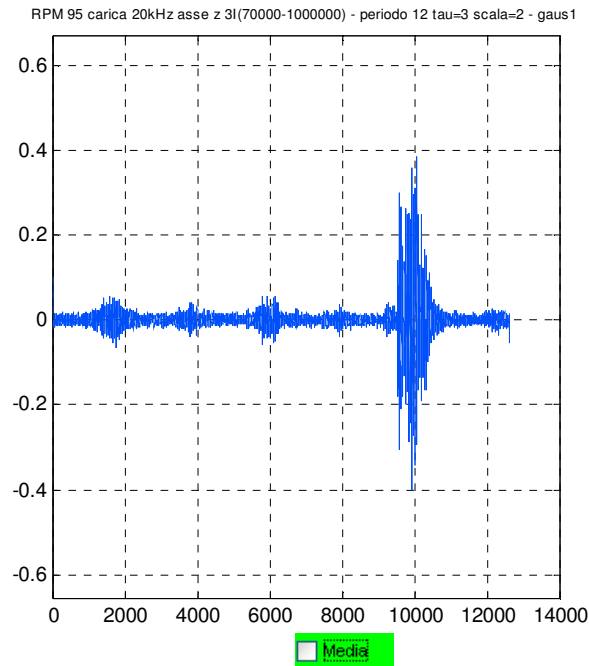


Fig. 4.42

La mappa istantanea di Poincaré (Fig. 4.43), ottimizzata per $\tau = 3$, relativa al 12° periodo, mostra una distribuzione proiettata sul secondo e quarto quadrante ed un nucleo in cui si concentra la maggior parte dei punti della sequenza vibrazionale.

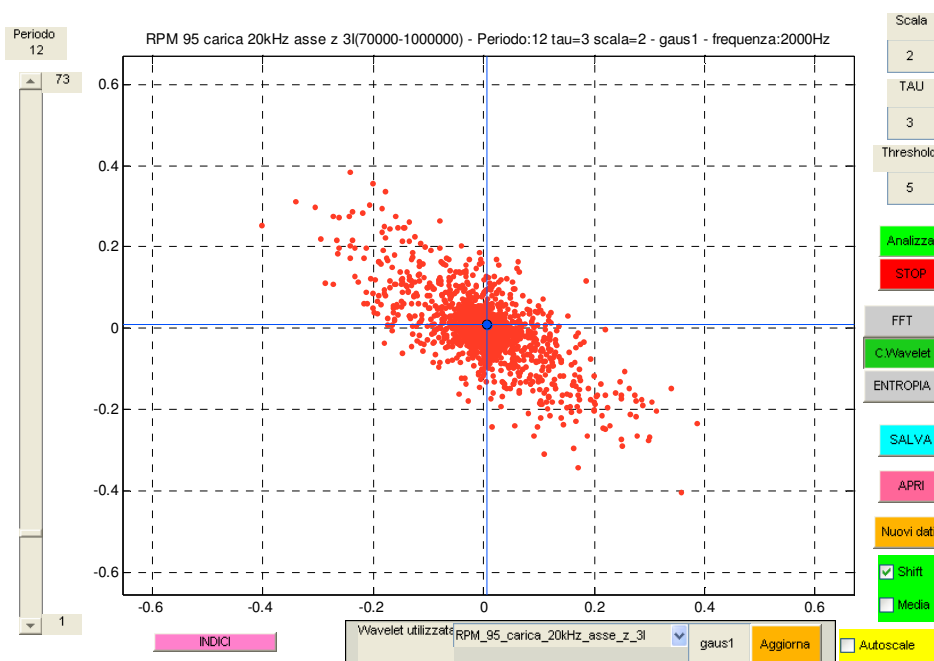


Fig. 4.43

La mappa di Poincaré equivalente a quella riportata nella Fig. 4.43 precedente, relativa, però, alla ricostruzione della firma vibrazionale mediata geometricamente dopo 12 periodi è illustrata nella Fig. 4.44. È ben visibile la distribuzione fortemente asimmetrica del ciclo dinamico-vibrazionale. Questa anomalia sarà meglio chiarita ed interpretata di seguito.

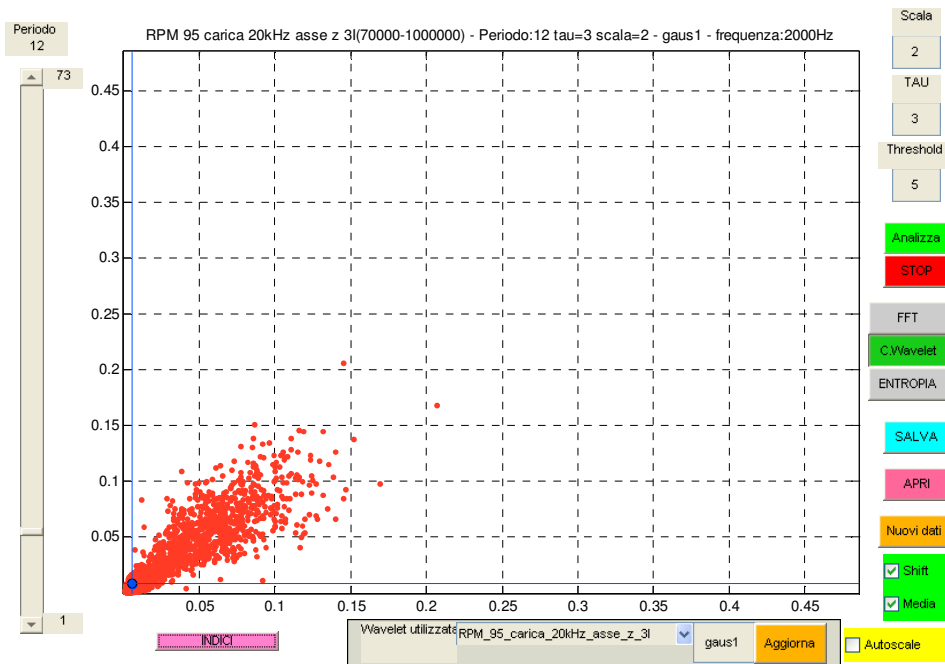


Fig. 4.44

Per ora presentiamo la distribuzione accelerometrica che fotografa temporalmente le successive fasi di combustione dei vari cilindri, sfasate di circa 60° l'una dall'altra.

Per fare ciò, abbiamo illustrato attraverso la Fig. 4.45 la distribuzione di cui sopra con un diagramma che riporta i valori assoluti assunti dai coefficienti wavelet.

Il picco maggiore è chiaramente riferibile al 6° cilindro su cui è stato posto l'accelerometro. Il diagramma è stato mediato geometricamente, in modo da eliminare, naturalmente, artefatti e/o elementi spuri del tutto occasionali che nulla hanno a che vedere con il reale andamento vibrazionale del sistema meccanico monitorato. Vogliamo ancora una volta sottolineare l'importanza dell'applicazione di una trasformata tipo wavelet: poter osservare un fenomeno

dinamicamente durante la sua evoluzione nel tempo dopo averlo spettralmente selezionato.

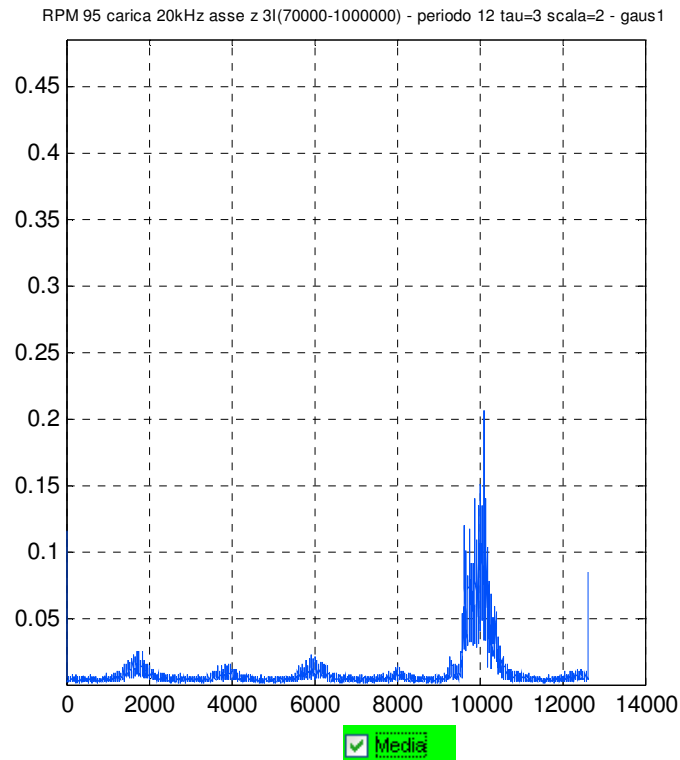


Fig. 4.45

La Fig. 4.46 meglio illustra quanto sopra riportato. In essa è visibile l'ordine di accensione dei cilindri: 1-5-3-4-2-6, così come rilevabile dalla figura Fig. 4.36. Notiamo che la maggiore ampiezza wavelet (Fig. 4.47) ($Y=0.1571$) è chiaramente riferibile al 6° cilindro sulla cui testa è stato posto l'accelerometro. Dopo l'accensione del sesto cilindro segue quella del primo cilindro, che è anche il più lontano, che determina di conseguenza anche la minima ampiezza wavelet ($Y=0.006589$).

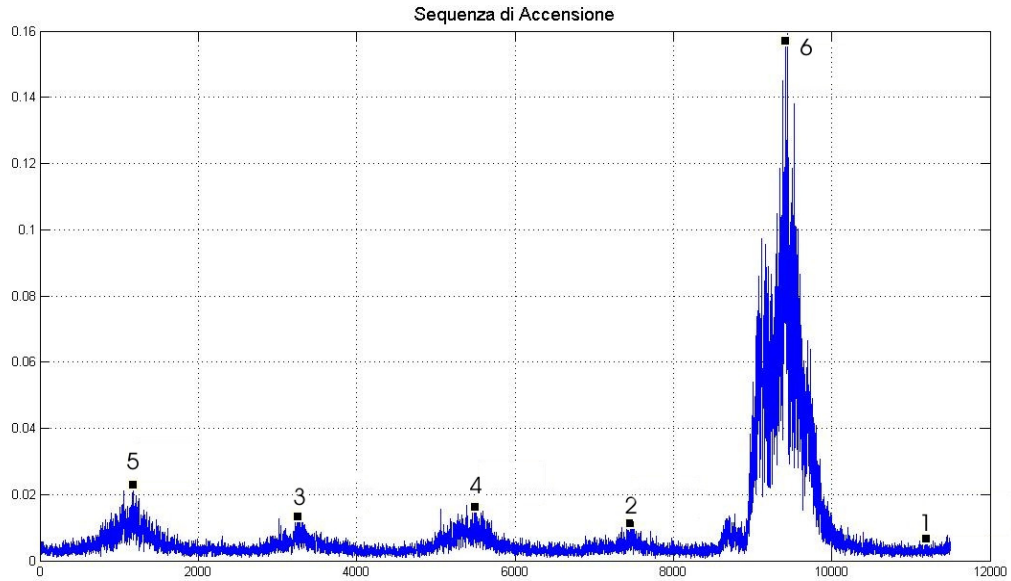


Fig. 4.46

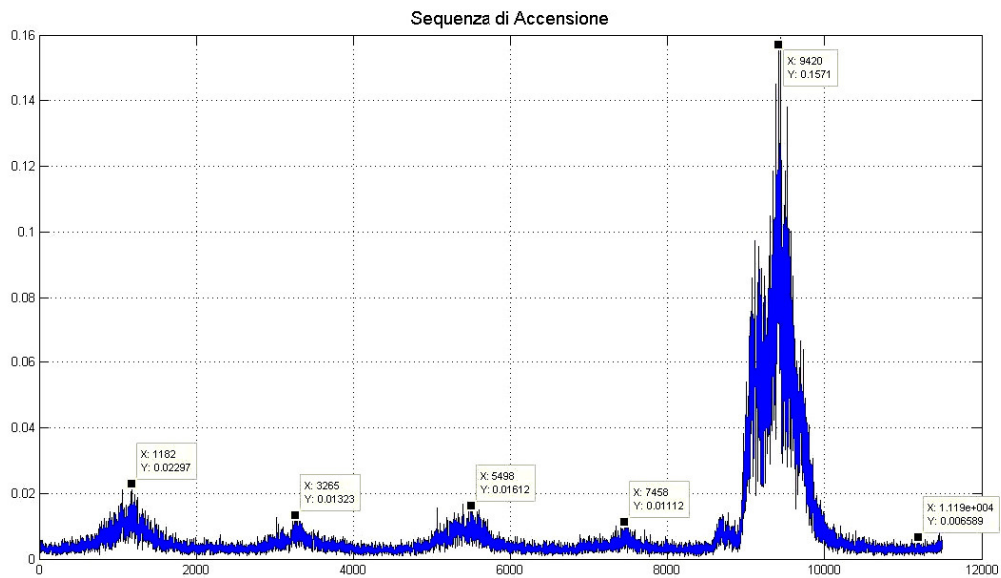


Fig. 4.47

Si evince anche come il cilindro identificato con il numero 1, determina in assoluto la più piccola ampiezza vibrazionale, relativamente agli altri cilindri, in quanto esso è localizzato ad una distanza di circa 7 metri dallo strumento accelerometrico.

Seguono le accensioni del quinto cilindro, contiguo al sesto ($Y=0.02297$), del terzo ($Y=0.01323$) in posizione intermedia, del quarto ($Y=0.01612$) ed infine del secondo cilindro ($Y=0.01112$). Le ampiezze wavelet confermano la

correttezza della sequenza temporalmente rilevata delle accensioni attraverso l'accelerometro, che ripetiamo, è stato posto sul sesto cilindro.

Successivamente si è passati ad applicare la metodologia presentata ad ogni singolo periodo estratto dal segnale accelerometrico relativo a tutti i cilindri. Per ridurre il rumore (noise) presente nel segnale accelerometrico, e quindi nell'analisi Wavelet, è stata applicata la media geometrica progressiva dei coefficienti wavelet, presi in valore assoluto, per un numero prestabilito di periodi (in genere, 30, 60 e 120) .

Naturalmente per esaltare quelli che sono i reali andamenti di questi segnali, si sono ricostruiti gli stessi considerando soltanto un numero di armoniche tali che la variazione della norma logaritmica ottenuta con l'aggiunta di ulteriori armoniche era inferiore ad un ordine di grandezza di 10^{-4} .

In Fig. 4.48 è riportata tale ricostruzione effettuata sui coefficienti wavelet di dettaglio, scala 1 (Gauss1, 4096Hz), cioè una scala sensibile a catturare le vibrazioni relative al ciclo cinematico e termodinamico dell'intero sistema pistone-cilindro monitorato, costituito, cioè, dai sei cilindri. In particolare esso è stato estratto dall'accelerometro posizionato sul primo cilindro, terzo piano, 114rpm, asse z, dopo 60 periodi mediati geometricamente.

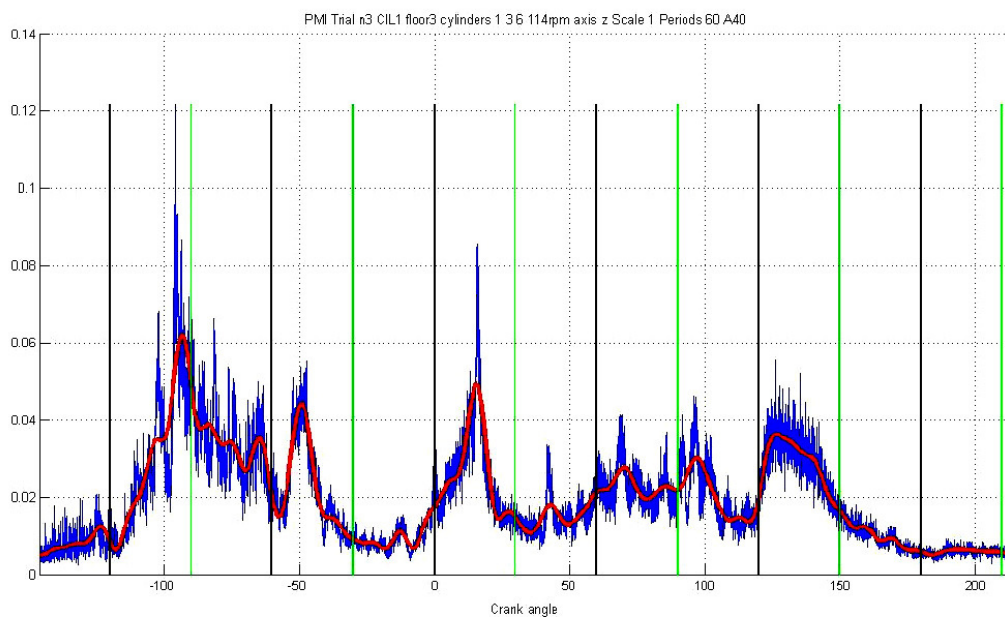


Fig. 4.48

In rosso è mostrata la ricostruzione del segnale utilizzando le prime 40 armoniche.

Si nota che sull'asse delle ascisse sono riportati gli angoli di manovella dell'intero periodo. L'angolo zero è stato posizionato sulla prima gobba rappresentativa del PMS del cilindro 1, in nero sono riportati poi i 60° di sfasamento dei successivi cilindri.

In dettaglio viene mostrato (Fig. 4.49) lo stesso segnale vibro-accelerometrico del cilindro n.1, riferito ai 30° che precedono e seguono il PMS. La ricostruzione è stata effettuata prendendo le prime 20 armoniche dopo 120 periodi geometricamente mediati.

La Fig. 4.50 mette a confronto le curve vibrazionali geometricamente mediate, ricostruite con 20 armoniche dopo 13, 60 e 120 periodi.

La stabilità della *shape* depone per una buona affidabilità del metodo adoperato per la sua ricostruzione.

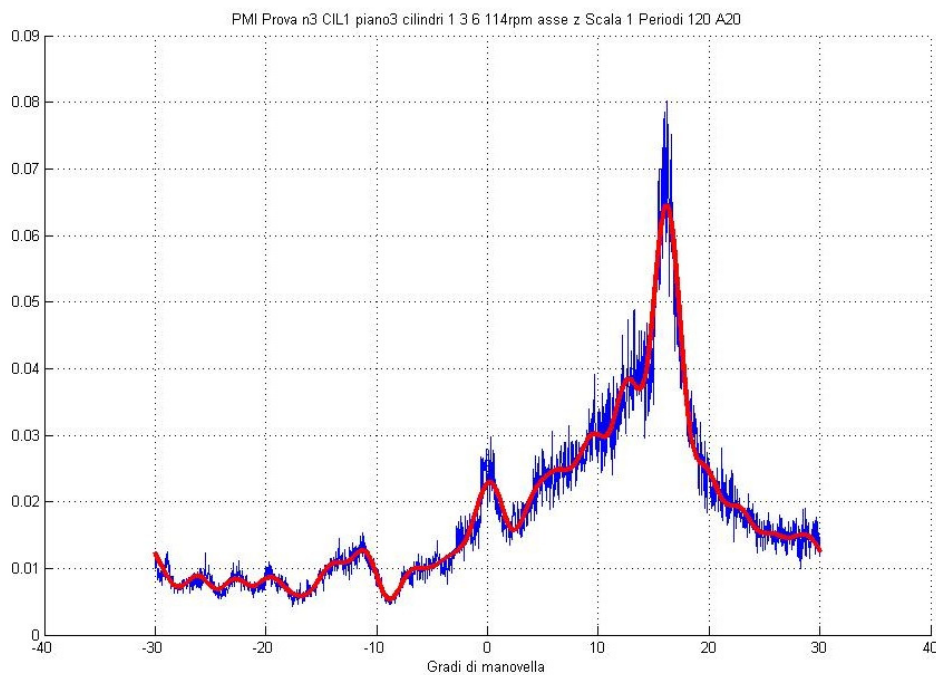


Fig. 4.49

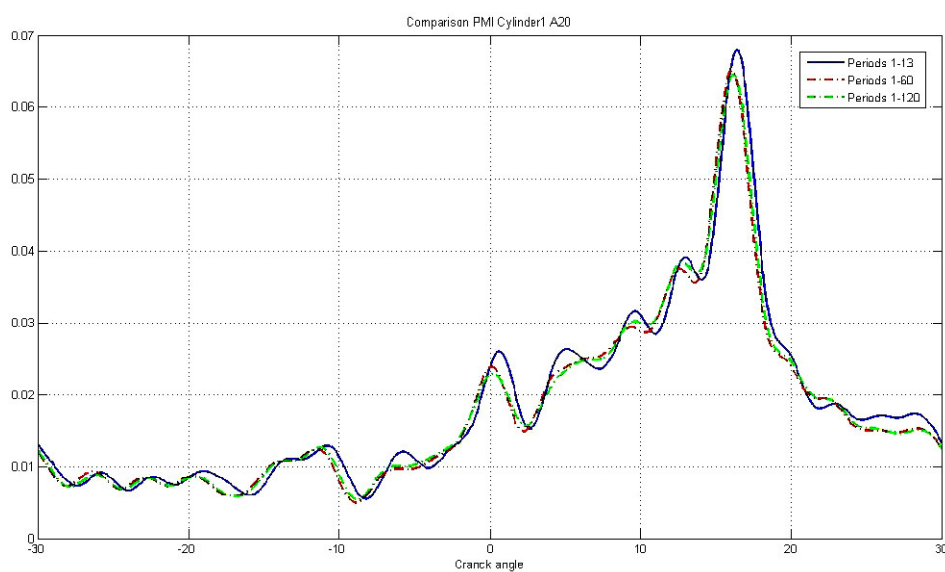


Fig. 4.50

Analoga metodica ricostruttiva è stata condotta sul segnale accelerometrico riferibile al cilindro n. 3 (Fig. 4.51-Fig. 4.52)

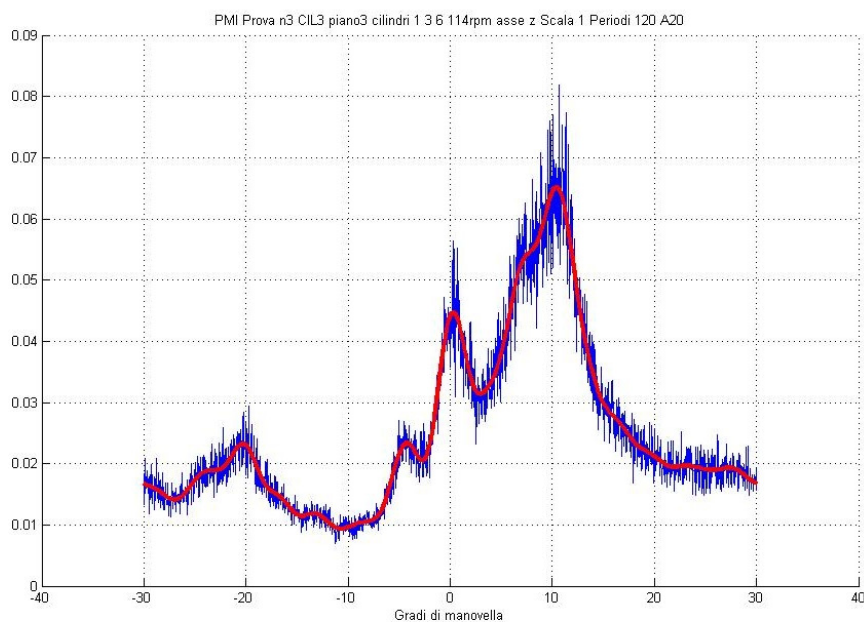


Fig. 4.51

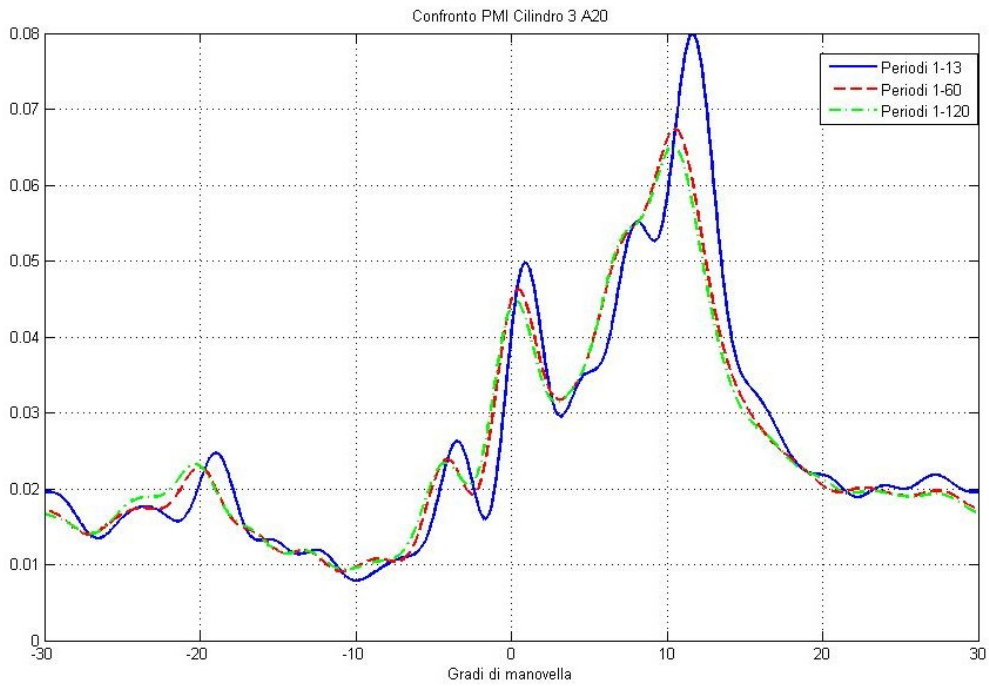


Fig. 4.52

Analoga metodica ricostruttiva è stata condotta sul segnale accelerometrico riferibile al cilindro n. 6 (Fig. 4.53-Fig. 4.54)

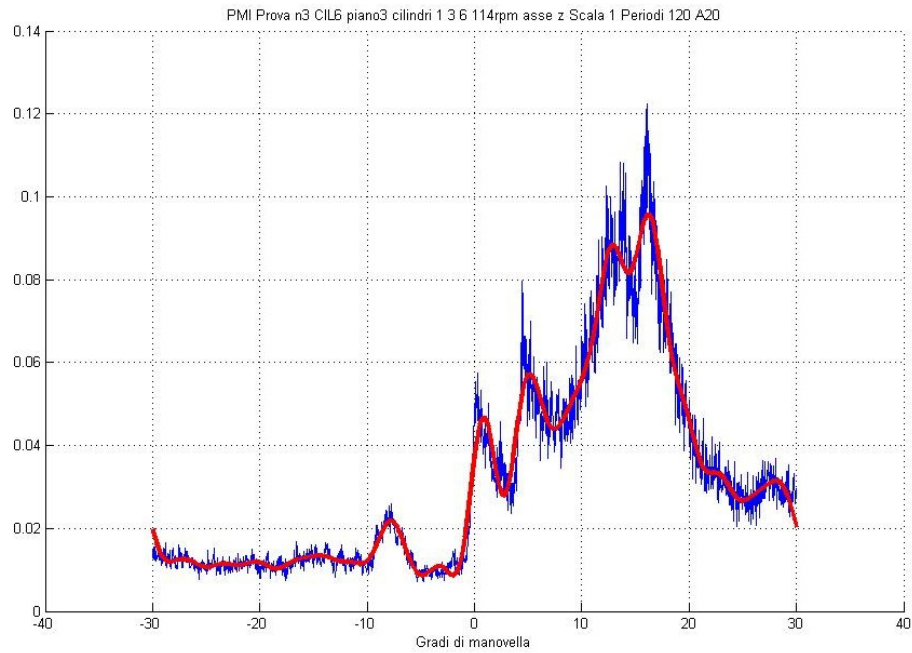


Fig. 4.53

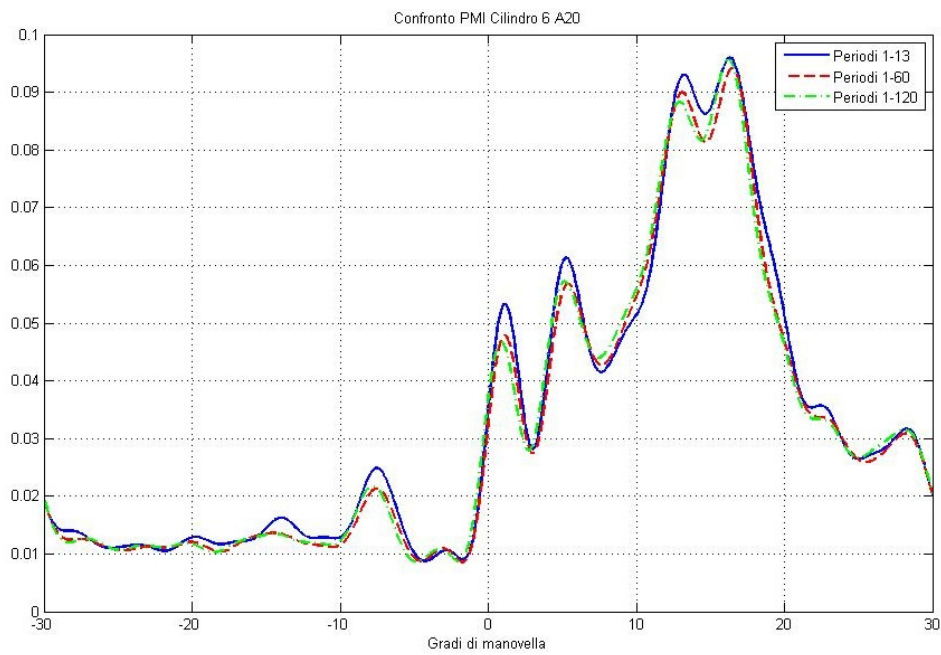


Fig. 4.54

Infine, in Fig. 4.55 è mostrato il confronto delle firme vibrazionali relativi ai tre cilindri: 1, 3 e 6. E' ben visibile la significativa differenza sia di forma che di area sottesa relativamente al sesto cilindro.

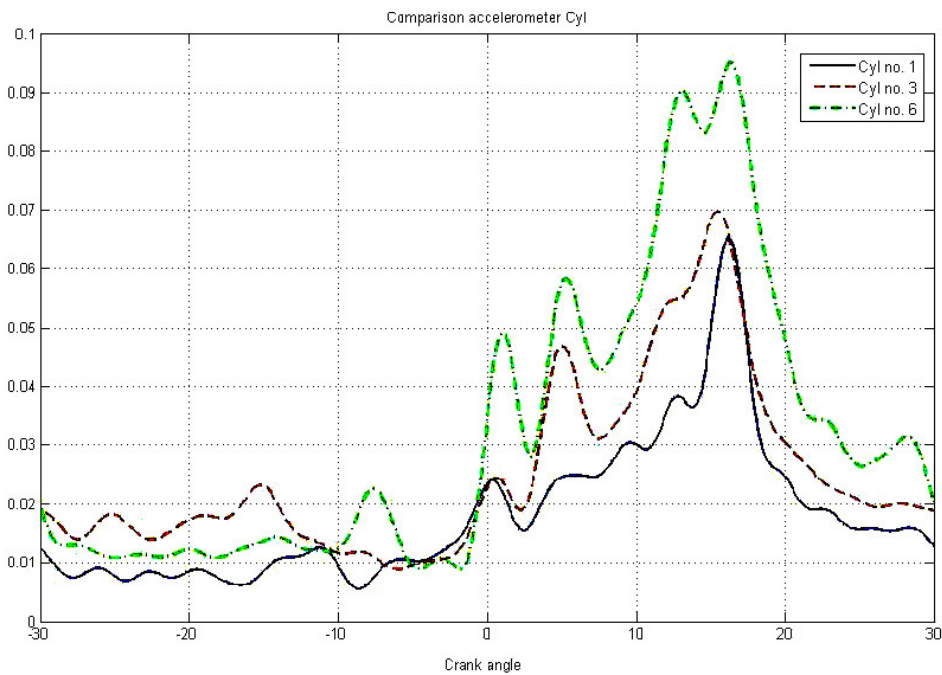


Fig. 4.55

Interessante è la somiglianza tra la ricostruzione dell'andamento dello stato vibrazionale determinato dal sistema cilindro-pistone effettuata attraverso l'impiego di una opportuna scala della trasformata wavelet e quello ricostruito da prove a banco effettuate dal *maker* registrando l'andamento pressorio direttamente sulla testa del cilindro (Fig. 4.56) (nelle stesse condizioni di carico con cui è stata da noi eseguito il monitoraggio: 75% del carico).

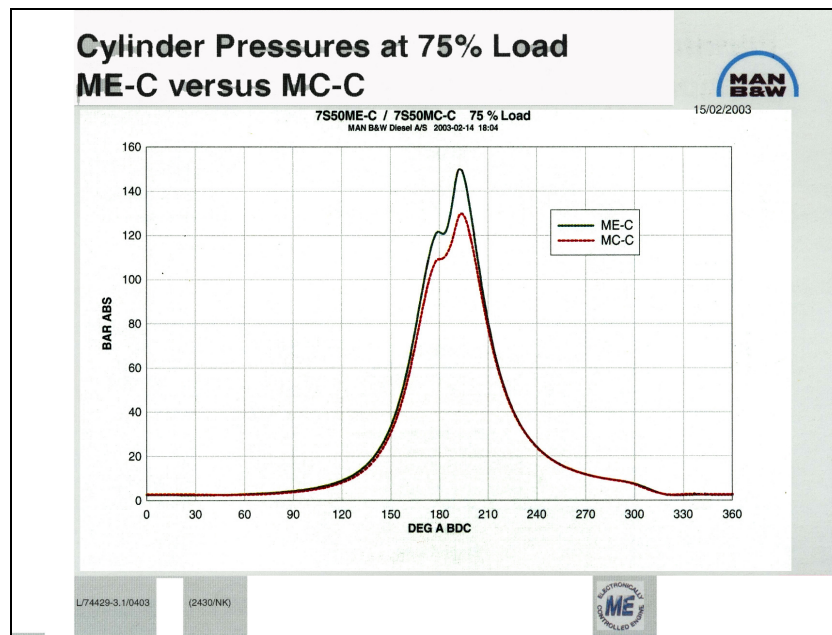


Fig. 4.56

Le due figure che seguono presentano rispettivamente l'andamento reale delle PMI fornite dal maker relative a ciascun cilindro ottenute durante le prove di collaudo e l'andamento della firma vibrazionale rilevata *on-site* in occasione dei nostri rilievi accelerometrici sul cilindro n°6 e ricostruito, con interpolazione, con il metodo proposto. Anche in questo caso è facilmente constatabile la somiglianza tra le due shape.

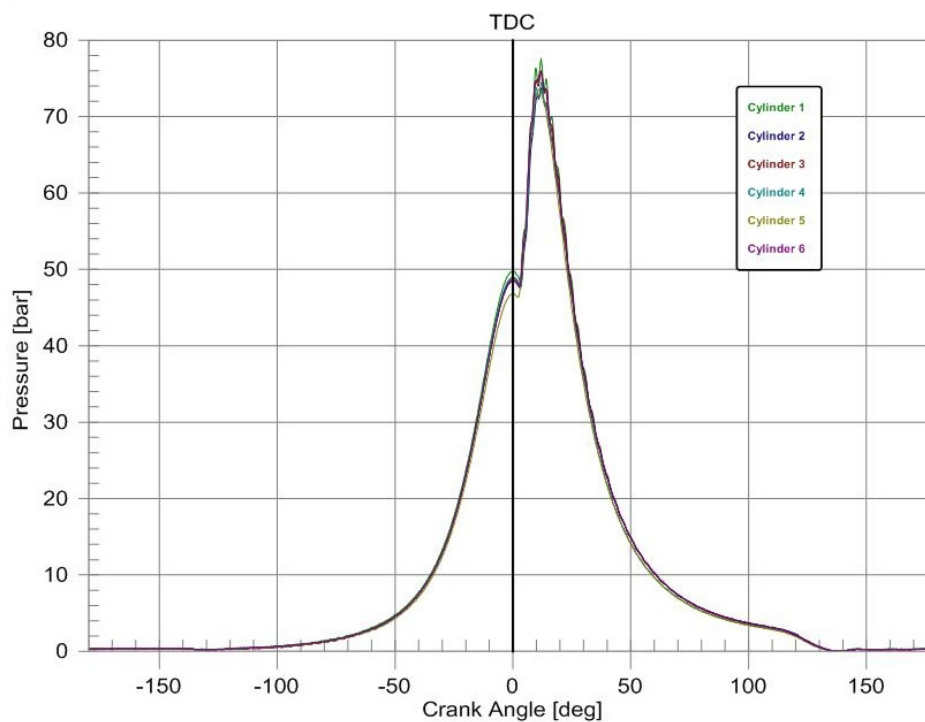


Fig. 4.57

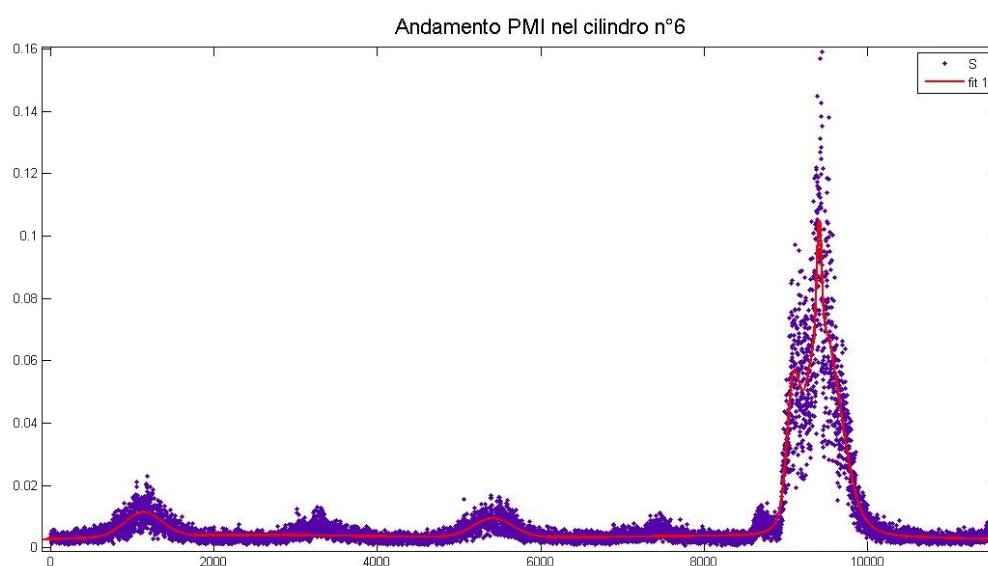


Fig. 4.58

Una ulteriore analisi condotta, in particolare, sul cilindro n.6 che, come è stato dimostrato, presentava evidenti anomalie funzionali se rapportato al comportamento termodinamico dei cilindri n. 1 e 3, ha consentito di evidenziare inusuali fenomeni causati, molto probabilmente, da combustioni anomale

particolarmente violente, che sono state bene evidenziate dall'analisi wavelet e dalle corrispondenti mappe di Poincaré.

In Fig. 4.59 è mostrata una tipica sequenza vibratoria istantanea, cioè non mediata geometricamente, prodotta dalla successione degli scoppi da parte dei 6 cilindri riferita al periodo n. 162. L'ampiezza maggiore è relativa al cilindro n.6 su cui è stato posto un accelerometro.

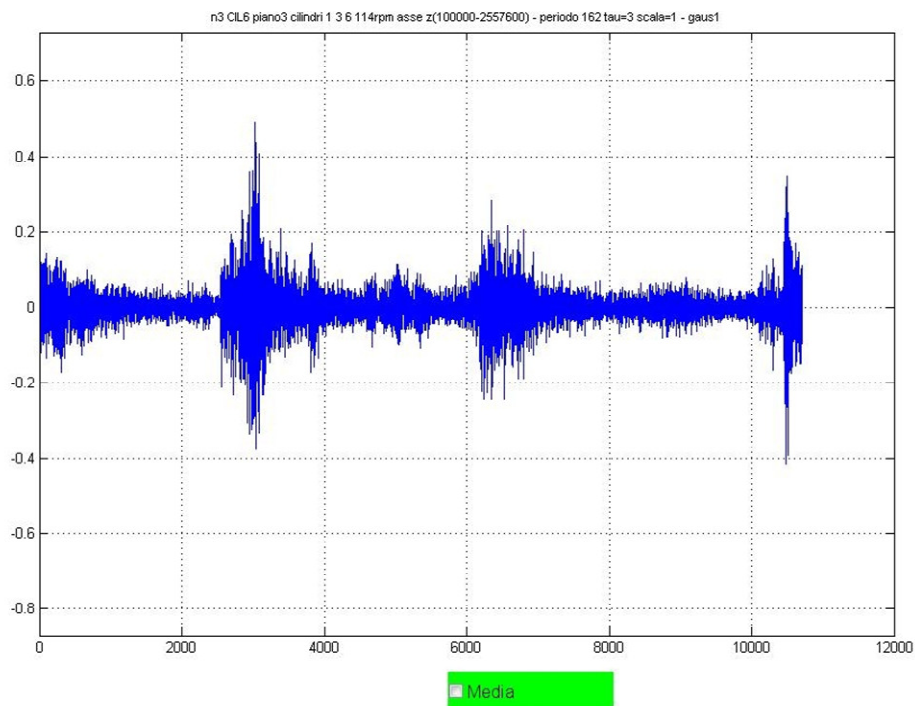


Fig. 4.59

Un'accensione e/o combustione irregolare è ben evidenziata nella Fig. 4.60 occorsa nel successivo periodo 163. Sono chiaramente visibili le eccezionali ed irregolari ampiezze assunte dai coefficienti wavelet relativi in particolare al sesto cilindro.

La proiezione vibratoria che si è presentata durante il periodo 163 prodotta dal cilindro n.6 è altrettanto bene evidenziata dalla mappa di Poincaré di Fig. 4.61.

Tale anomalia vibratoria è tanto più evidente se confrontata con la mappa di Fig. 4.62 relativa al periodo 162 precedente dove essa si presenta più regolare e "raccolta".

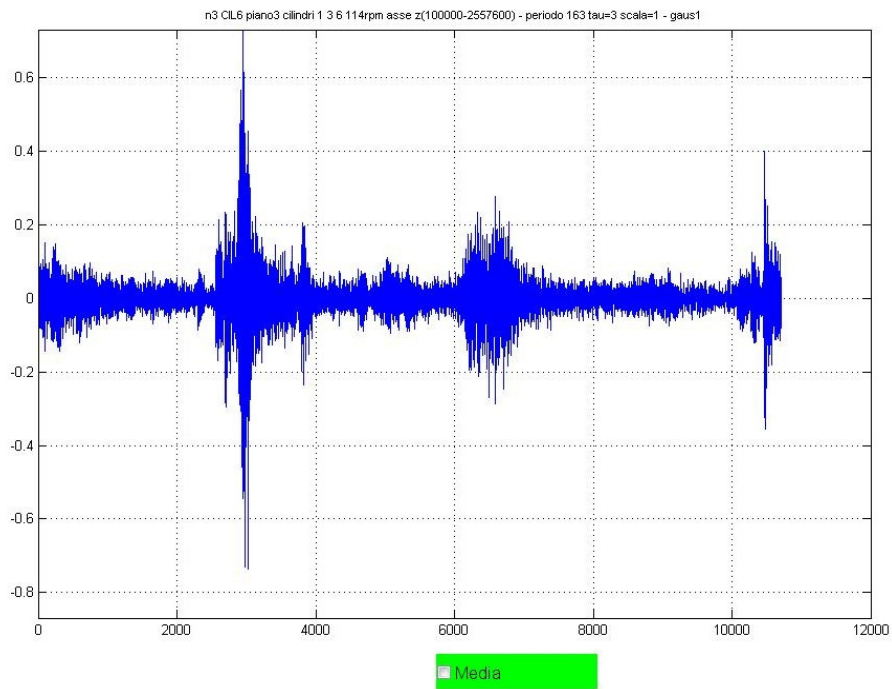


Fig. 4.60

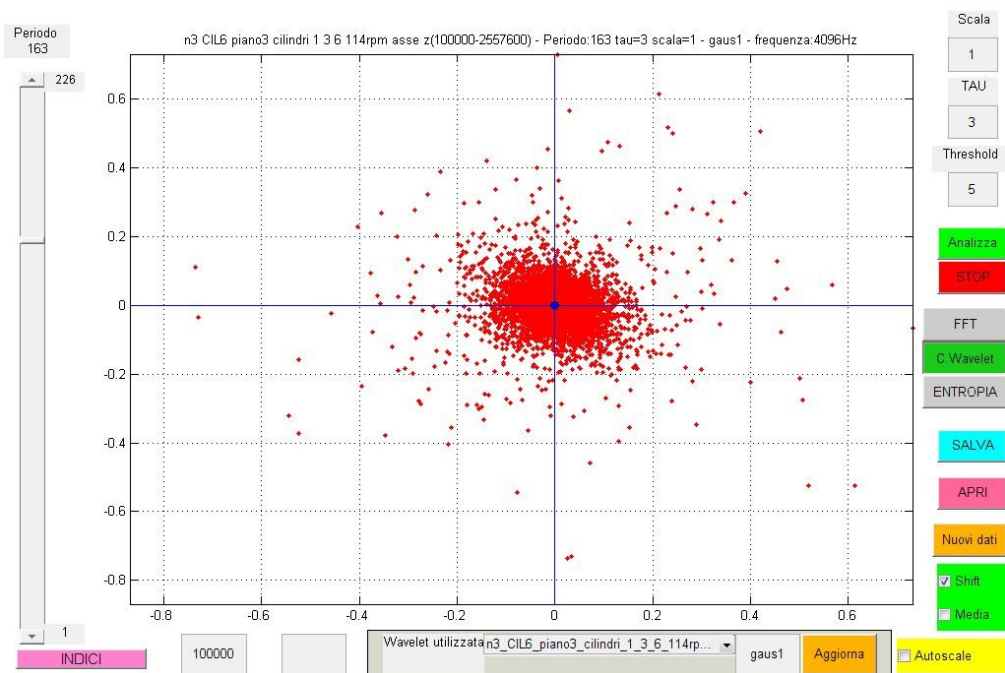


Fig. 4.61

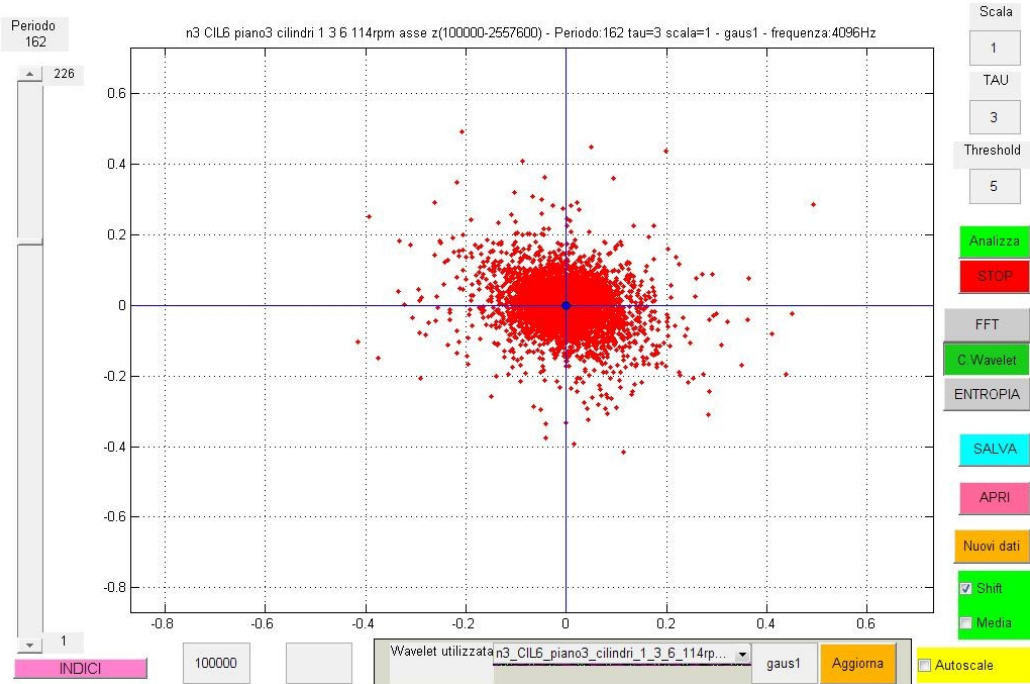


Fig. 4.62

La metodologia presentata ha consentito di evidenziare, attraverso una indagine condotta su un intero sistema moto-propulsore navale, un problema di natura vibrazionale indotto da uno specifico cilindro probabilmente legata a fattori di natura funzionale.

Comunque, le informazioni ricavate al tempo, cosiddetto, T_0 risulteranno fondamentali per confronti futuri circa lo stato cineto-elasto-dinamico del sistema meccanico.

4.9 Ricostruzione tridimensionale dello stato vibrazionale del Cuscinetto dell'albero porta-elica

Luogo: nave petroliera in navigazione commerciale tra Italia e Spagna

Sistema meccanico: cuscinetto albero porta-elica

Scopo della prova: analizzare lo stato vibrazionale del cuscinetto in uno spazio tridimensionale

La Fig. 4.63 mostra il posizionamento di tre accelerometri monodirezionali.

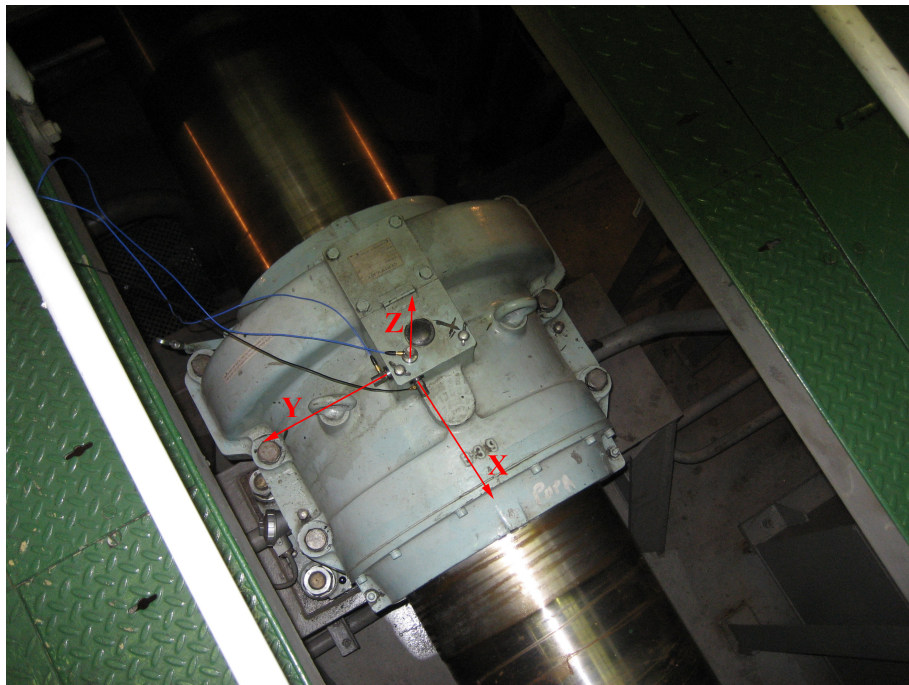


Fig. 4.63

Le vibrazioni a bordo di una nave possono essere quelle proprie dello scafo, quelle prodotte dalle eliche, dai motori, dai gruppi elettrogeni e da tutti gli impianti che hanno motori con masse rotanti o alternative. Le principali, per entità, sono quelle dello scafo, eliche e motori propulsivi. In questa applicazione della metodologia saranno trattate le vibrazioni prodotte in particolare dall'elica.

Prima di ricostruire tridimensionalmente lo stato vibrazionale del cuscinetto della nave petroliera si sono valutati alcuni parametri ricostruiti tramite i coefficienti wavelet, adoperando il filtro Gauss1, scala 1 (4096Hz), 114rpm.

Sottolineamo che le ordinate di tutti i diagrammi bidimensionali che seguono si riferiscono alle Ampiezze, adimensionali dei Coefficienti Wavelet.

Nella Fig. 4.64 è mostrato l'andamento della funzione β . Trattandosi di un parametro molto sensibile alle modulazioni di fase e/o di ampiezza di un segnale, esso è praticamente stabile il che conferma che il cuscinetto monitorato è in ottime condizioni cineto-elasto-dinamiche. L'andamento del fattore di cresta (Fig. 4.65) è tale da far ritenere che una leggera dinamica è più marcata lungo l'asse x , cioè quello relativo all'asse dell'albero. Probabilmente è proprio questo l'asse che riceve i maggiori contraccolpi causati dalle turbolenze generate dalle pale dell'elica a contatto con l'acqua. Inoltre tali contraccolpi sono di natura fortemente impulsiva così come evidenziato dal diagramma relativo al fattore di forma (Fig. 4.66). Infatti il diagramma relativo all'asse x è quello che assume i valori più bassi.

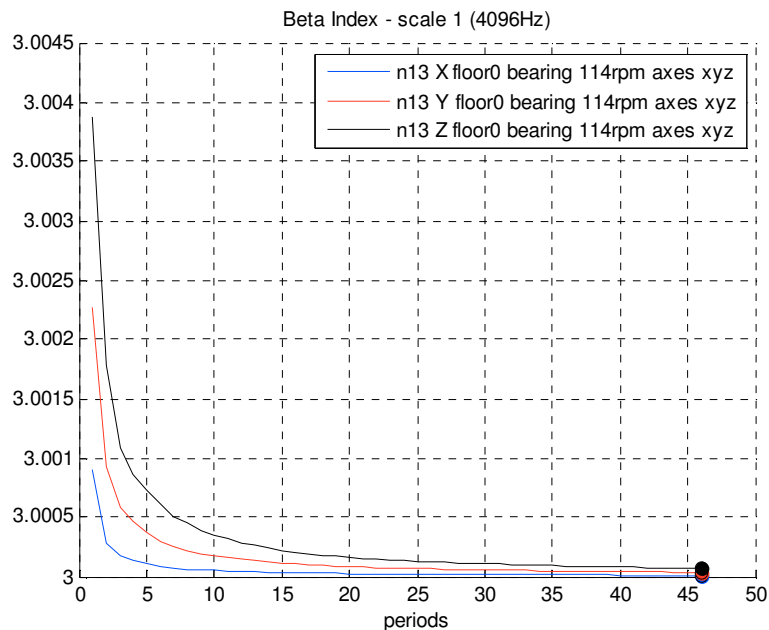


Fig. 4.64

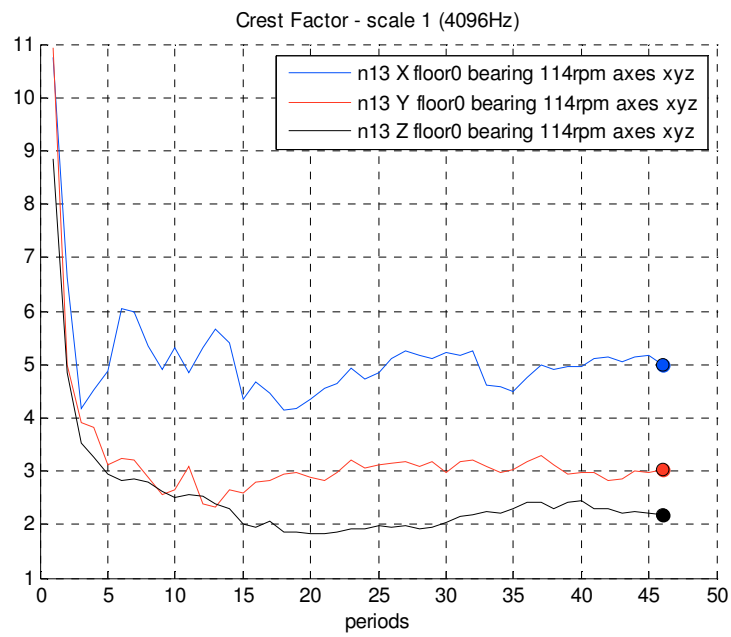


Fig. 4.65

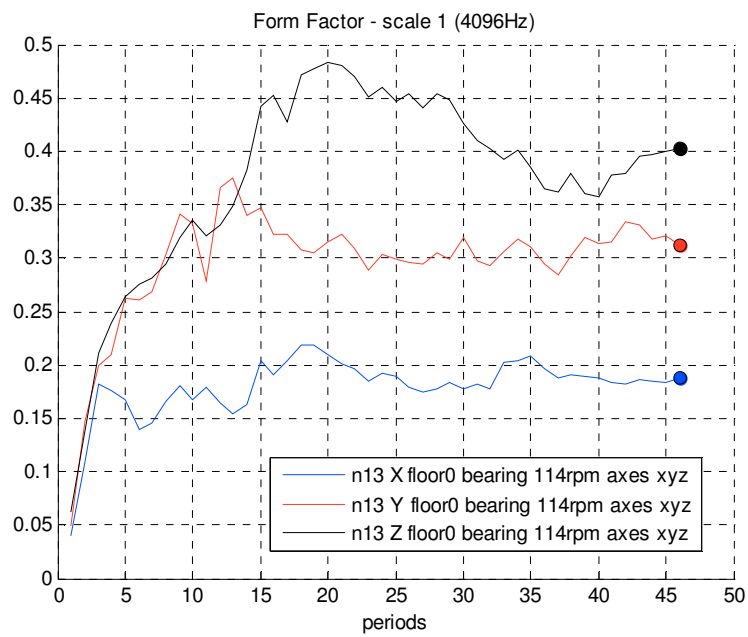


Fig. 4.66

Nessuna significativa informazione ricaviamo dall'andamento dell'Indice di Oscillazione Quadratico (Fig. 4.67).

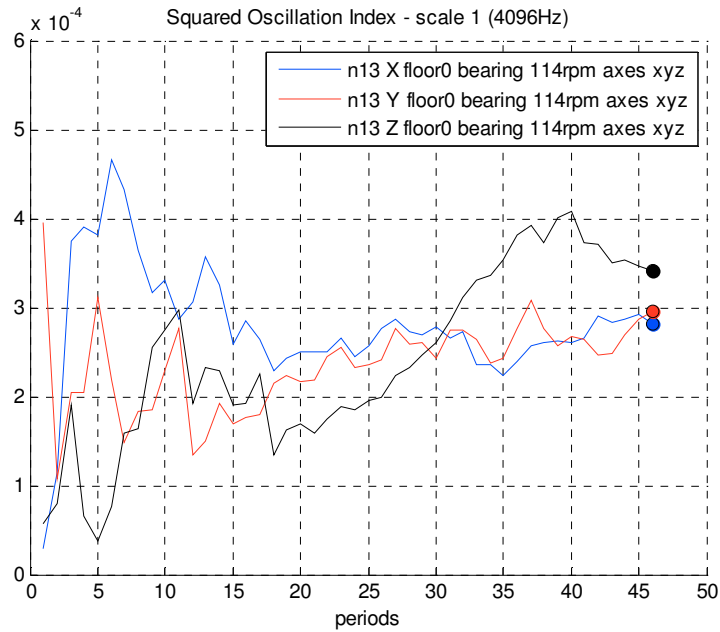


Fig. 4.67

Perfettamente in linea sono gli indicatori di curtosi per quanto riguarda gli assi y, z , il loro valore è prossimo a quello di una distribuzione normale (vale a dire 3), mentre non lo è per l'asse x . Il valore particolarmente alto circa 45 raggiunto da tale coefficiente conferma l'andamento prevalentemente cuspidato della sua firma vibrazionale. Ciò conferma che tale asse è continuamente sottoposto a fenomeni di contraccolpo continuamente variabili (Fig. 4.68 e Fig. 4.69).

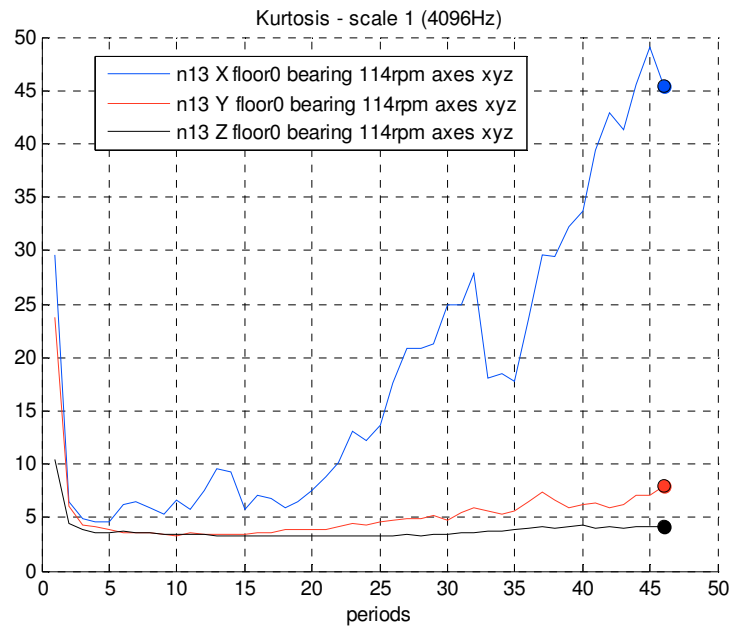


Fig. 4.68

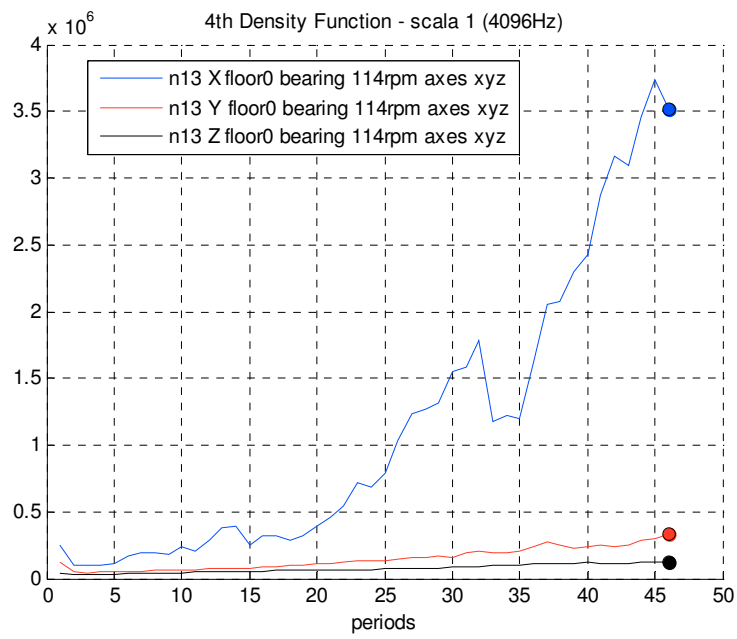


Fig. 4.69

Notiamo un Periodogramma piuttosto instabile per l'asse z (Fig. 4.70).

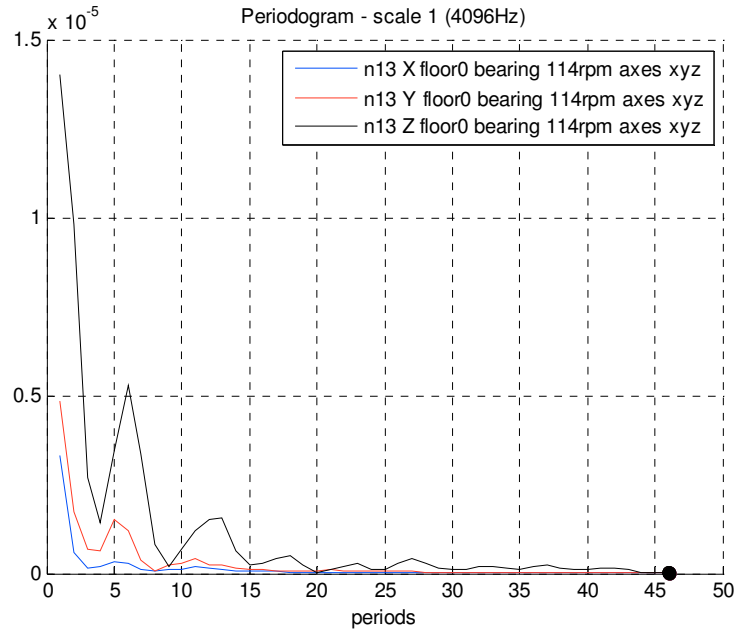


Fig. 4.70

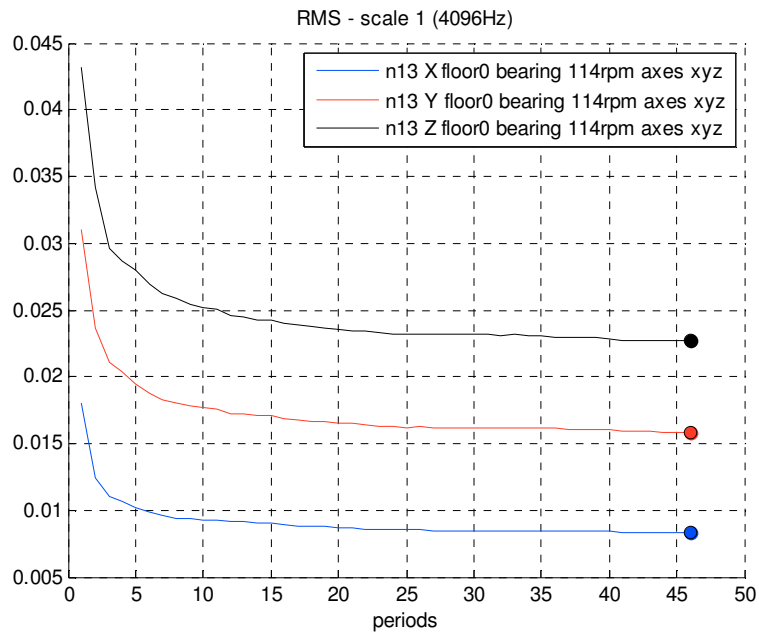


Fig. 4.71

L'indice RMS mostra un livello energetico via via crescente rispettivamente per l'asse x, y, z (Fig. 4.71).

4.10 Caratteristiche parametriche per i coefficienti wavelet scala 13

L'analisi è stata successivamente condotta selezionando la scala 13, 315Hz. Questo a dimostrazione del fatto che a parità di wavelet la selezione della scala è fondamentale per l'ottenimento delle informazioni selettive di ciascun asse monitorato. La maggior parte dei diagrammi, ad eccezione per il fattore di forma, non mostrano evidenze dinamiche attribuibili al modo di vibrare di ciascuno degli assi monitorati (da Fig. 4.72 a Fig. 4.79).

Questo conferma il fatto che la maggior parte dei fenomeni impulsivi osservabili, innescati da cedimenti meccanici, non sono stazionari. Pertanto essi si presentano con le tipiche caratteristiche del rumore: piccole ampiezze ad alte frequenze. Da qui la necessità di indagare in un *range* di alta frequenza (nel nostro caso, ad esempio, 4096Hz anziché 315Hz).

Nelle pagine che seguono verrà illustrato un metodo che consente di selezionare la scala più appropriata per il fenomeno dinamico-vibrotorio che si intende monitorare.

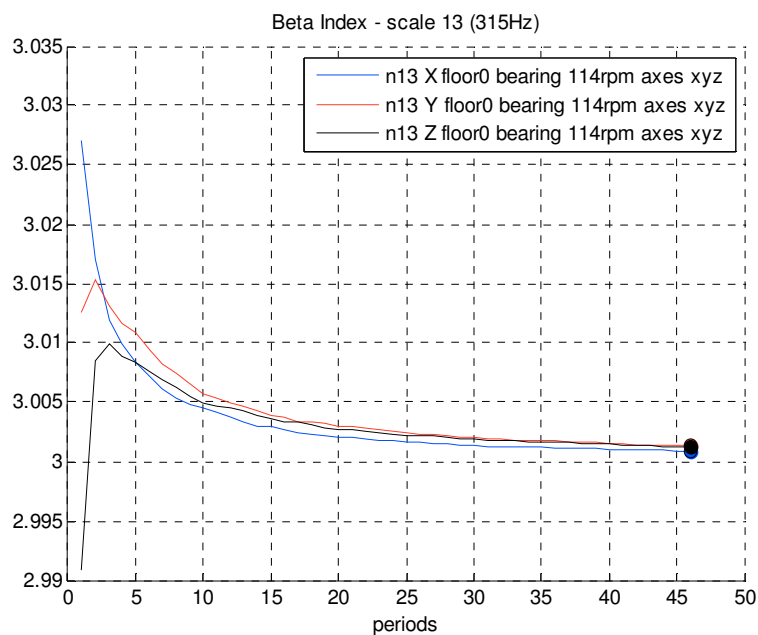


Fig. 4.72

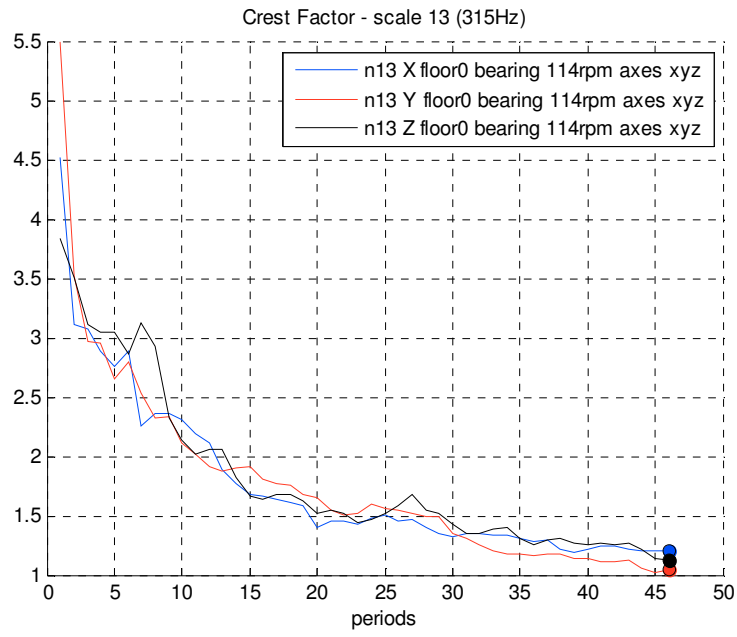


Fig. 4.73

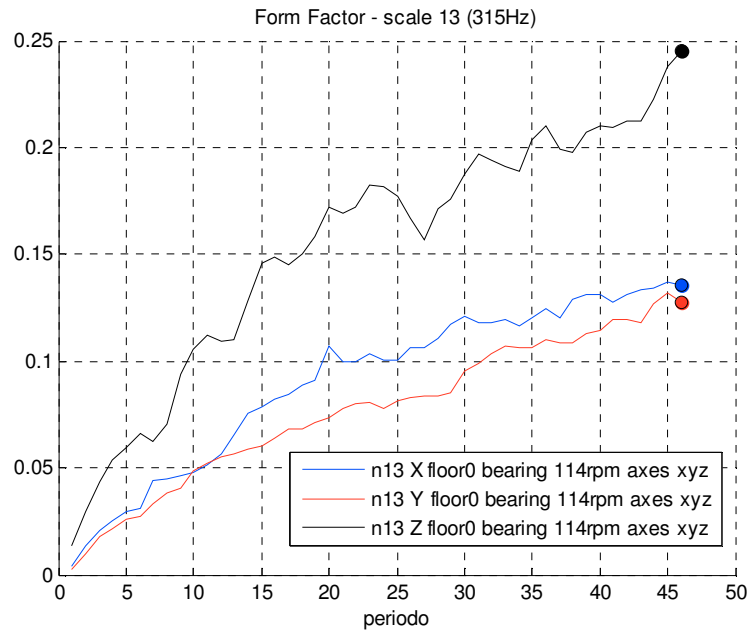


Fig. 4.74

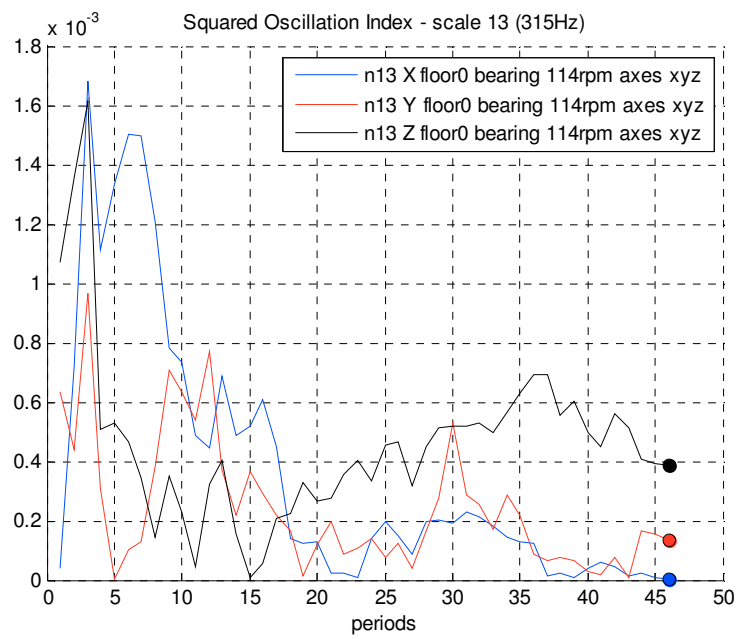


Fig. 4.75

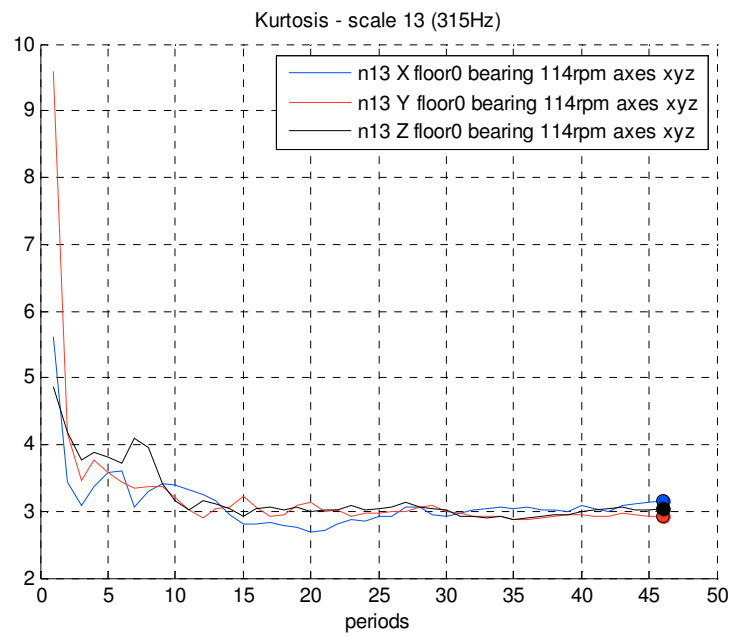


Fig. 4.76

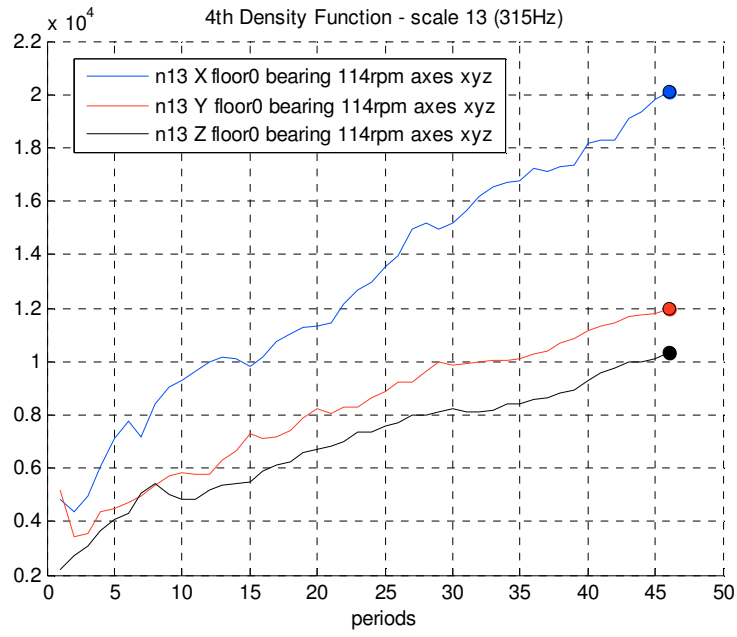


Fig. 4.77

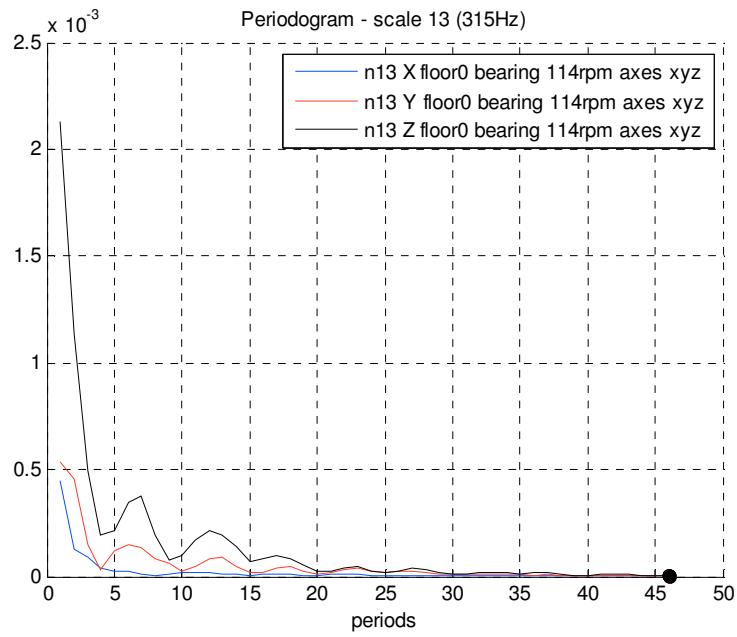


Fig. 4.78

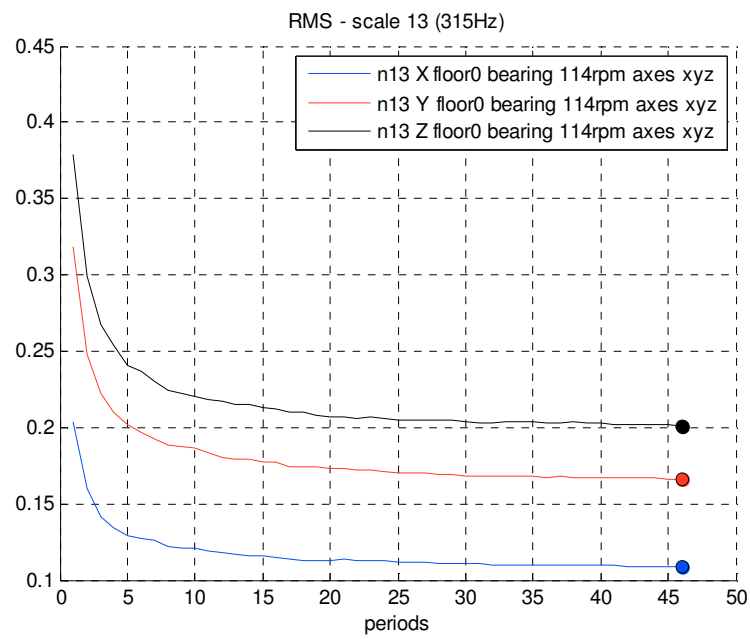


Fig. 4.79

Per ricostruire lo stato tridimensionale vibrazionale si sono acquisiti i segnali del cuscinetto monitorato a 20480Hz nelle tre direzioni x , y e z (Fig. 4.80).

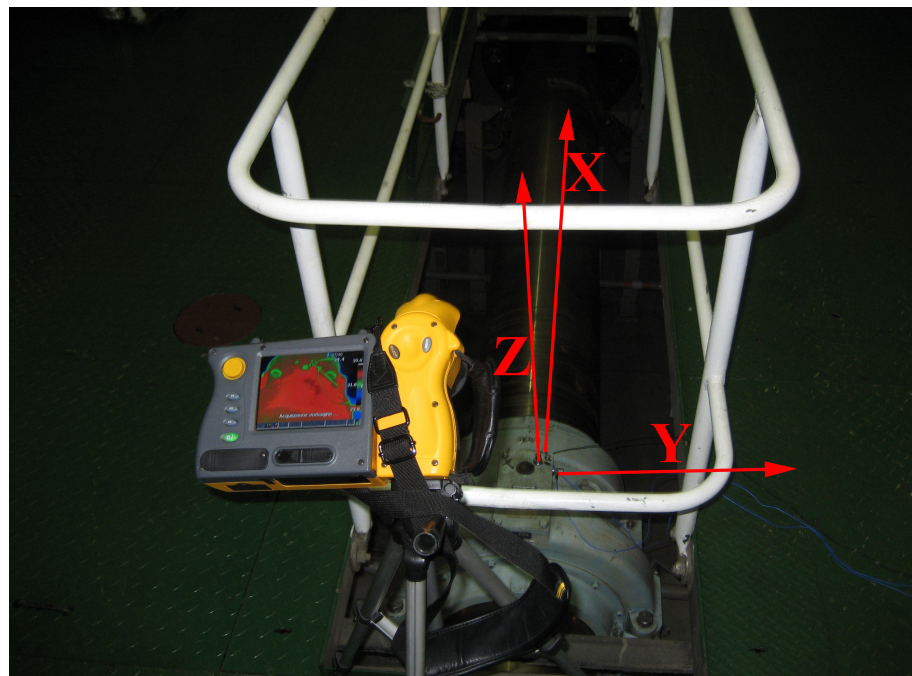


Fig. 4.80

Quella che segue è la ricostruzione tridimensionale istantanea dei coefficienti wavelet Gauss1, scala 1, 4096Hz, $\tau=3$ (Fig. 4.81). Nella stessa figura sono riportate le proiezioni sui tre piani, x - y , x - z e y - z rispettivamente. Sono ben visibili molti artefatti oscillatori che molto probabilmente sono stati indotti dalla natura oscillatoria del fenomeno monitorato che potremmo definire extra-meccanico, cioè addebitabile al moto ondoso, a fenomeni di turbolenze prodotte dalle eliche e così via. Pertanto tali artefatti possono essere eliminati ovvero ridotti, come già più volte sottolineato, ricorrendo ad un metodo di filtraggio naturale attraverso la media geometrica progressiva. A questo punto ci preme sottolineare il fatto che il ricorso a filtri, software, digitali, ecc., del tipo passa-basso, passa-banda, passa-alto, può determinare un fatto molto importante: l'eliminazione dal segnale di dettagli che potrebbero essere di fondamentale importanza nella individuazione di una *failure* in fase non avanzata del danno. Verrebbe in tal caso a cadere il beneficio di poter salvaguardare sia i sistemi meccanici che di poter effettuare una migliore diagnosi.

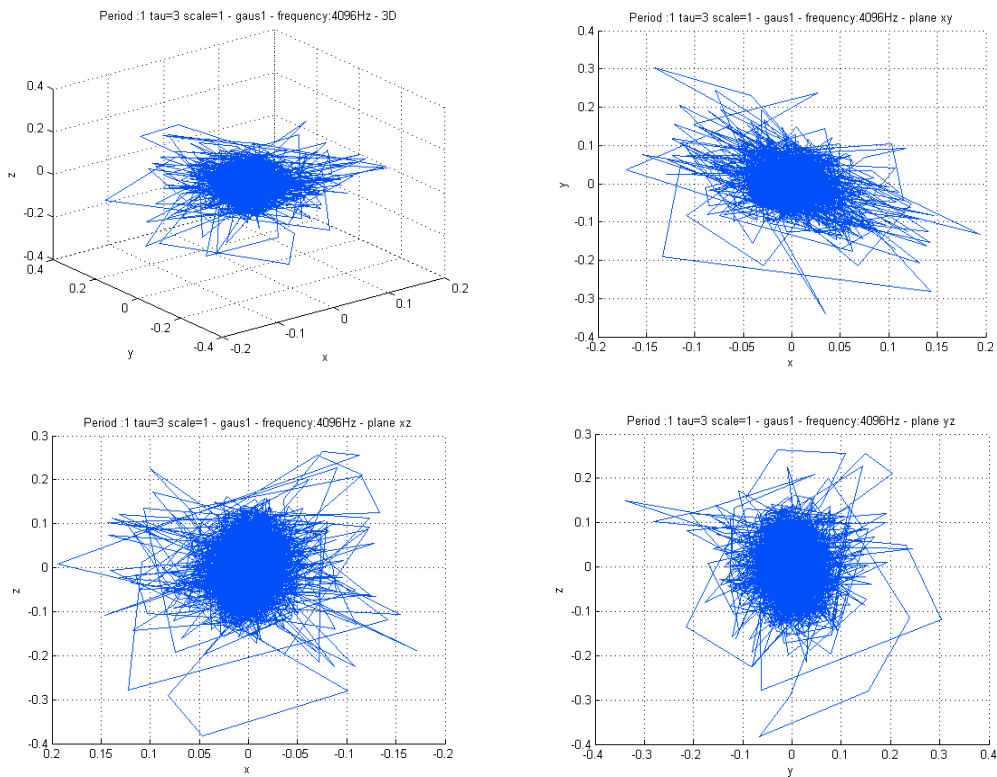


Fig. 4.81

Quella che segue è la ricostruzione tridimensionale istantanea dei coefficienti wavelet in scala 13, Gauss1, scala 13, 4096Hz, $\tau=3$ (Fig. 4.83). Nella stessa figura sono riportate le proiezioni sui tre piani, x - y , x - z e y - z rispettivamente.

Anche in questo caso vale quanto riportato per la rappresentazione tridimensionale effettuata ricorrendo ai coefficienti wavelet estratti in scala1: possiamo notare la presenza di un notevole numero di artefatti.

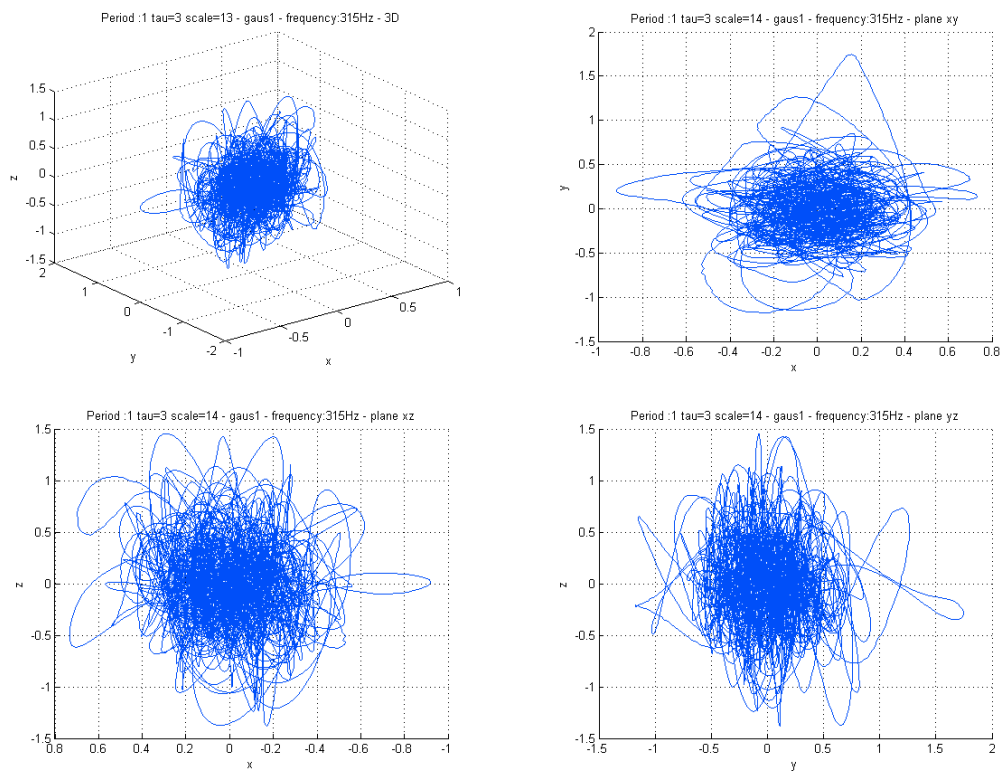


Fig. 4.82

Quella che segue è la ricostruzione tridimensionale con media geometrica progressiva dei coefficienti wavelet in scala 1, 4096Hz (Fig. 4.83).

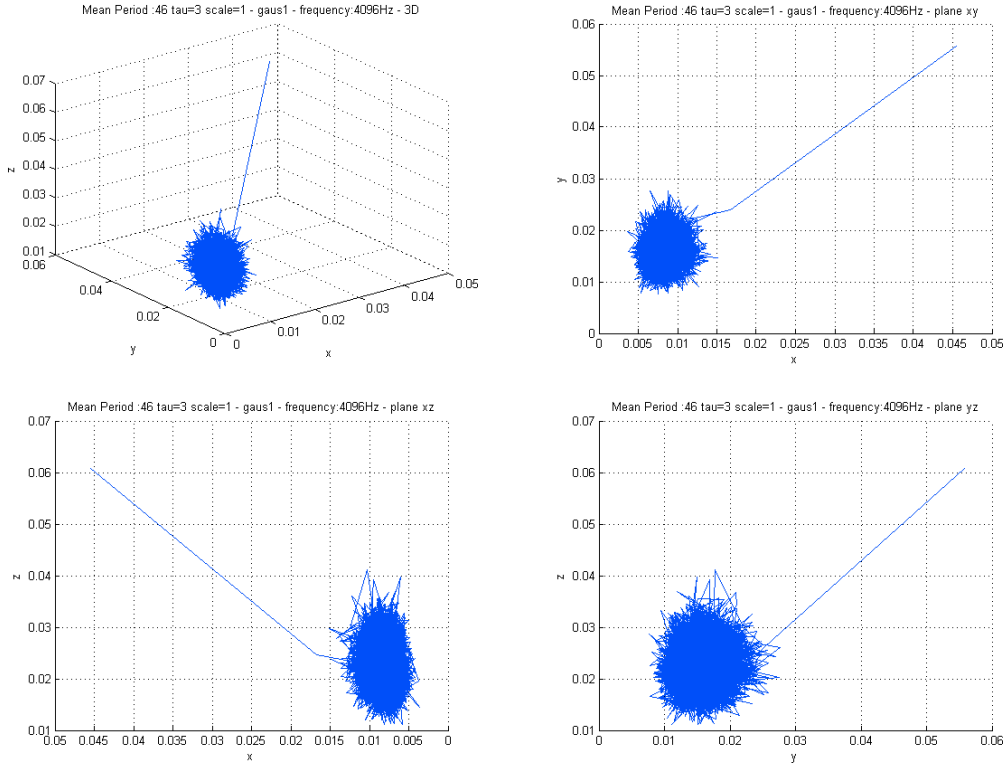


Fig. 4.83

La ricostruzione tridimensionale con media geometrica progressiva dei coefficienti wavelet in scala 13, 315Hz è riportata in Fig. 4.84.

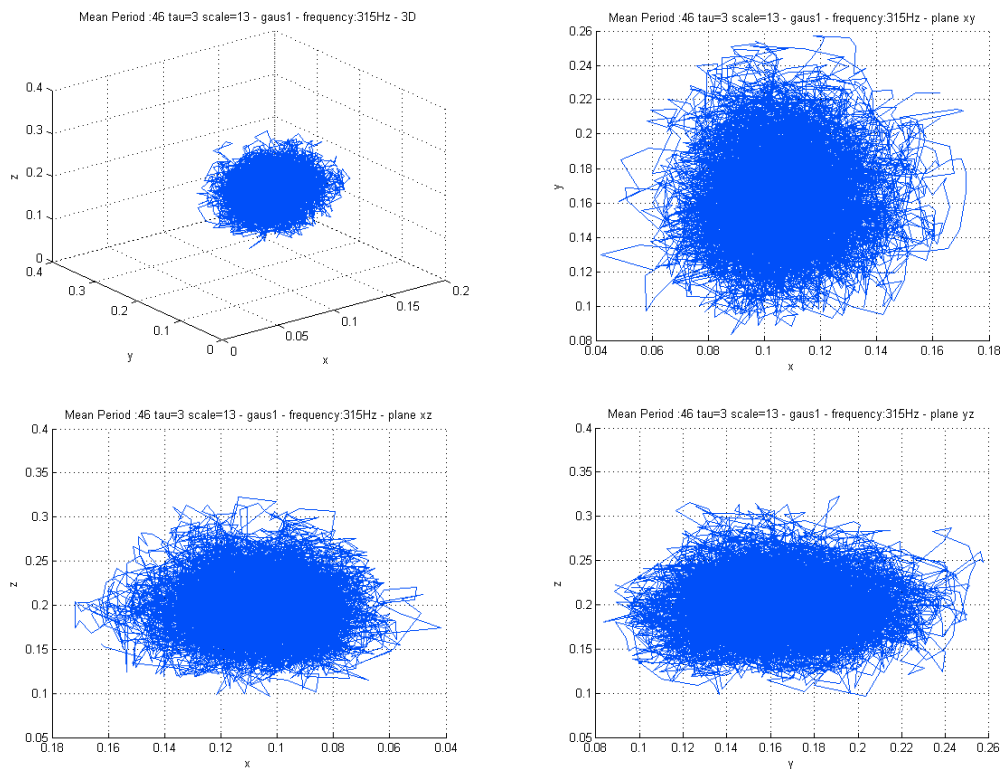


Fig. 4.84

I benefici di un filtraggio naturale attraverso la media geometrica della sequenza accelerometrica sono ben evidenti. In particolare da ciascuna rappresentazione possiamo estrarre un diagramma denominato *bull-eye*. In Fig. 4.85 è illustrato un esempio ottenuto dal diagramma proiettato sul piano x-y scala 13, 315Hz.

Esso consiste nella selezione di un opportuno raggio ρ al di sotto del quale è possibile ritenere "normale" l'andamento dei coefficienti wavelet estratti. Futuri monitoraggi potrebbero segnalare l'evoluzione del segnale con lo sconfinamento oltre il raggio selezionato dovuto a fenomeni perturbativi non occasionali né random. Il tutto è esemplificato nella Fig. 4.86 in cui abbiamo simulato la presenza di alcuni fenomeni vibratorii anomali.

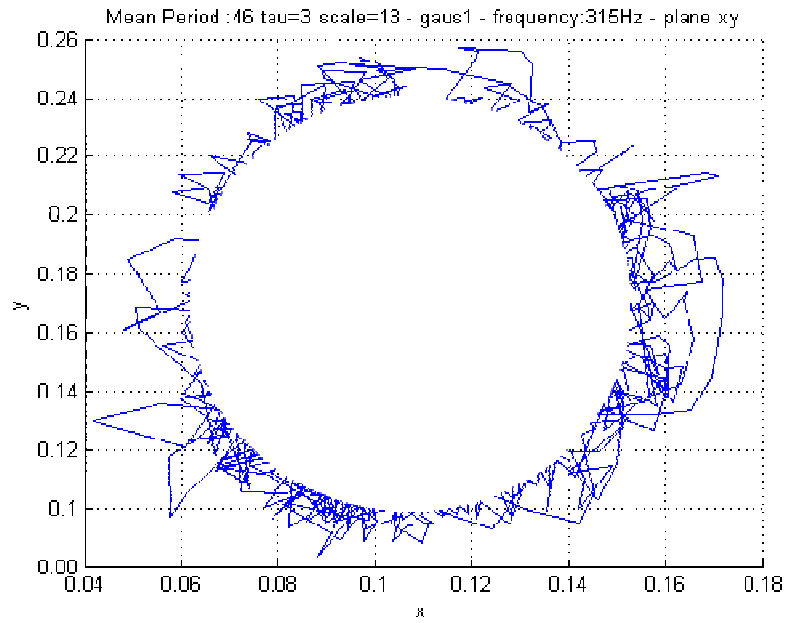


Fig. 4.85

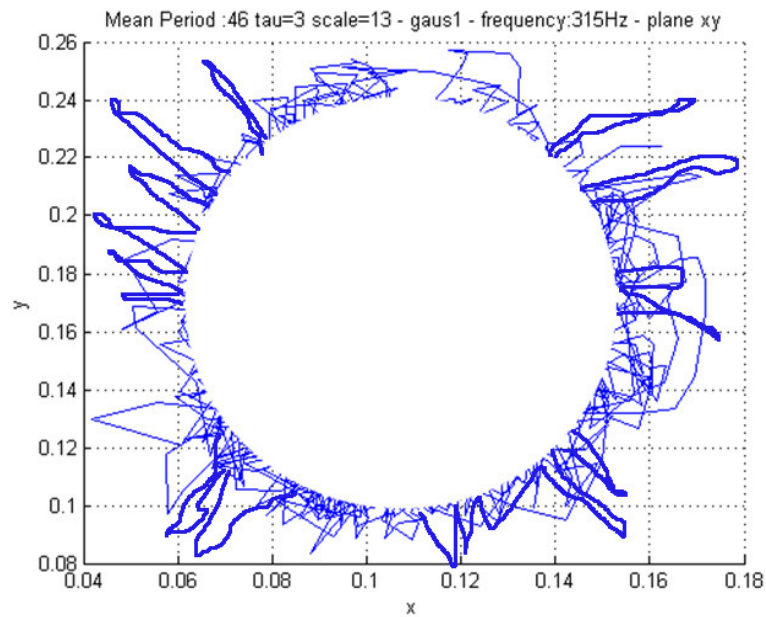


Fig. 4.86

Infine, vogliamo mostrare la congruenza di quanto esposto con alcune considerazioni che possono essere dedotte da metodi afferenti alla teoria del caos. Cominciamo con l'osservare che la frequenza base con cui è stato monitorato il cuscinetto è pari a 9.5Hz (Fig. 4.87). Infatti, l'albero porta-elica ruota con un numero di giri pari a 570rpm, in rapporto 1:5 con il numero di giri dell'albero

motore (114rpm). Il tempo ciclo dell'albero motore è pari a 0.105s. Poiché il sampling rate è stato di 20480Hz allora un periodo è composto da 2150 punti.

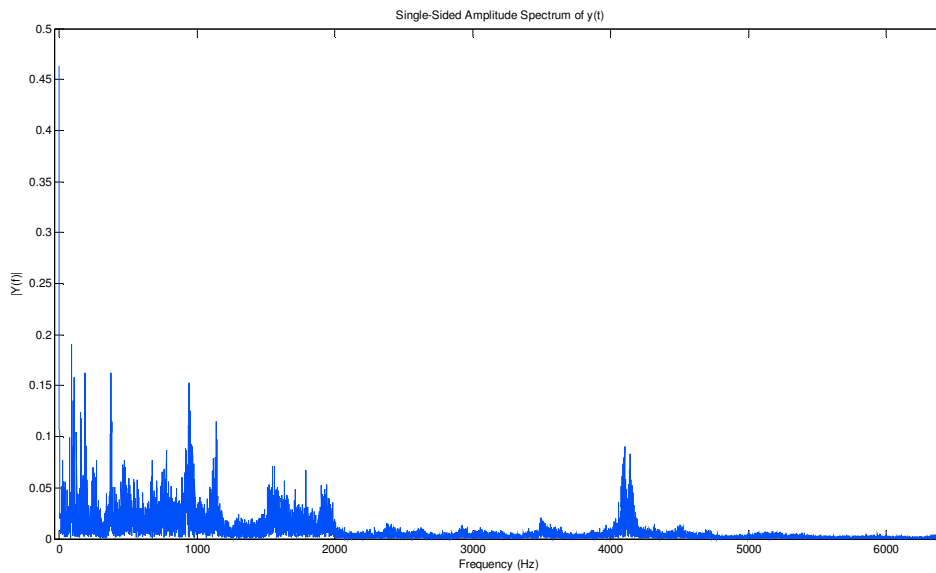


Fig. 4.87

Nella Fig. 4.88 è mostrata una sequenza accelerometrica relativa all'asse z corrispondente a 4s (81920 punti).

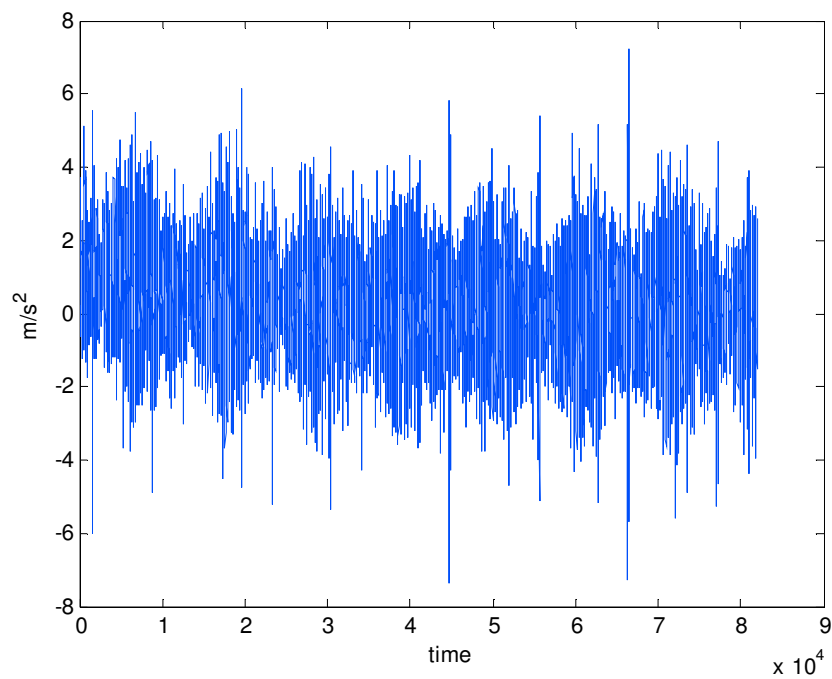


Fig. 4.88

Inoltre nelle Fig. 4.89, Fig. 4.90, Fig. 4.91 sono mostrate le cross-correlazioni dei segnali accelerometrici estratti dagli assi x , y e z rispettivamente.

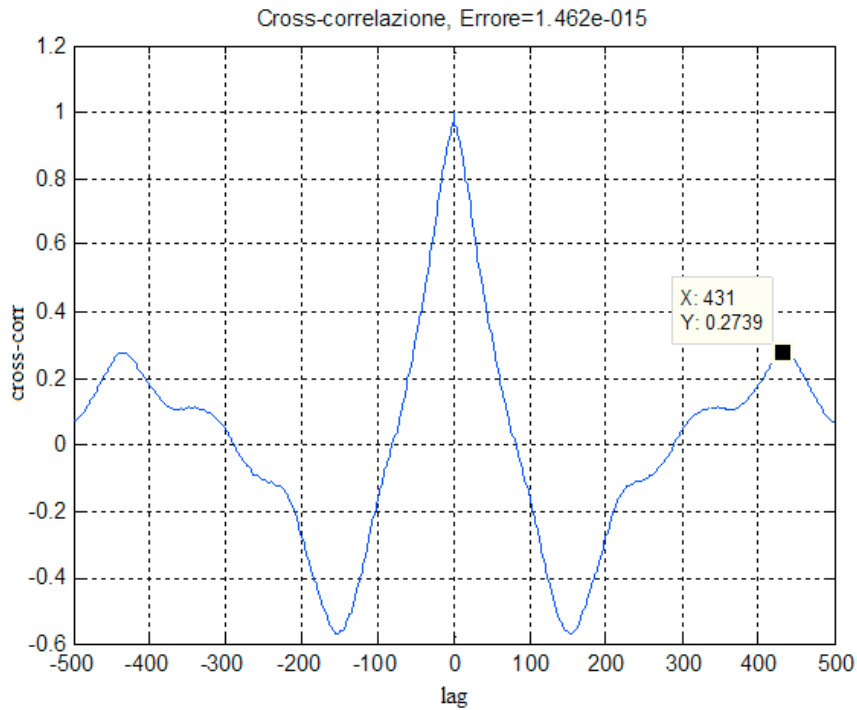


Fig. 4.89 - Cross-correlazione asse x

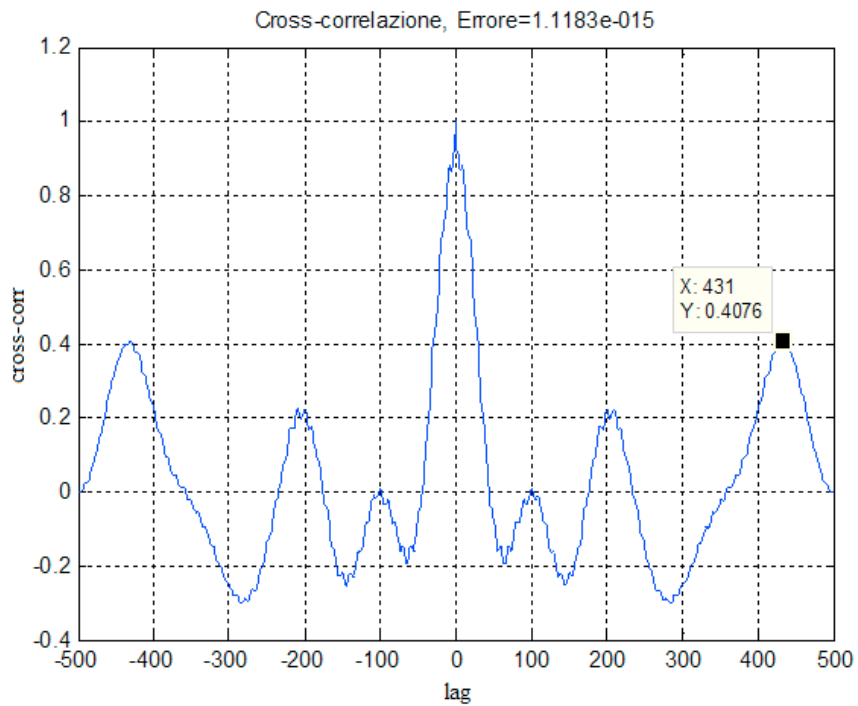


Fig. 4.90 - Cross-correlazione asse y

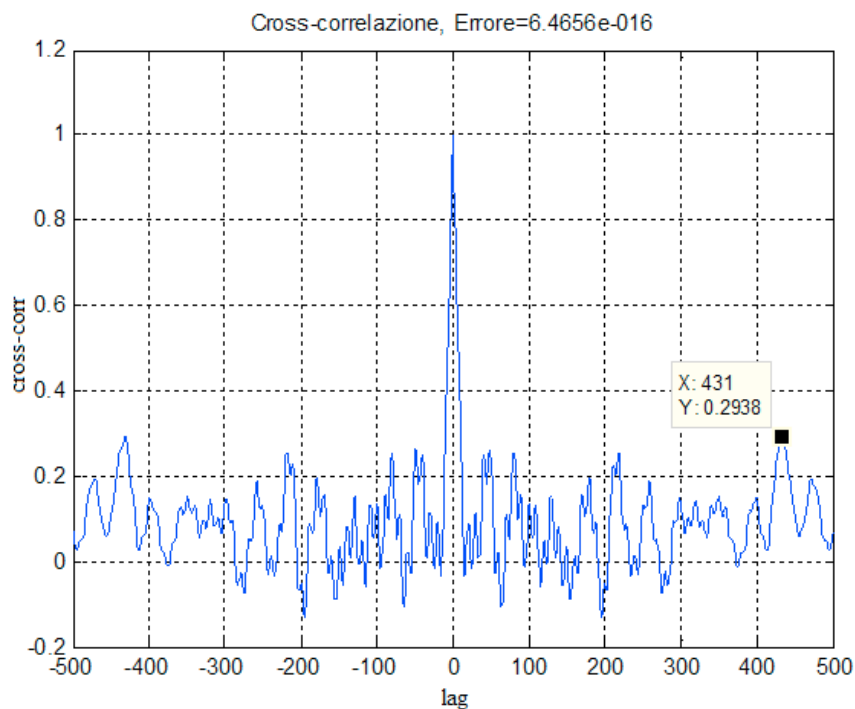


Fig. 4.91 - Cross-correlazione asse z

Da esse si evince l'esistenza di un *lag* comune, corrispondente a 431. Nella Fig. 4.87 è ben visibile una frequenza significativa in corrispondenza della 431^{ma} armonica della frequenza base: $(9.5\text{Hz}) \times 431 \approx 4095\text{Hz}$. Pertanto, a tale frequenza sono state condotte le analisi parametriche e tridimensionali precedentemente esposte nonché lo studio per la determinazione del massimo esponente di Lyapunov relativo a ciascun asse, di seguito illustrato.

Come ci aspettavamo tutti gli assi presentano sequenze accelerometriche dell'ordine di 10^{-5} in particolare 2.73, 1.27, 2.13 rispettivamente (da Fig. 4.92 a Fig. 4.94).

Sono tutti valori tendenti a zero ma comunque positivi, cioè, sequenze che esibiscono andamenti sotto certi aspetti stazionari a cui si sovrappongono in modo non prevedibile sequenze accelerometriche e quindi oscillazioni non deterministiche e quindi puramente caotiche.

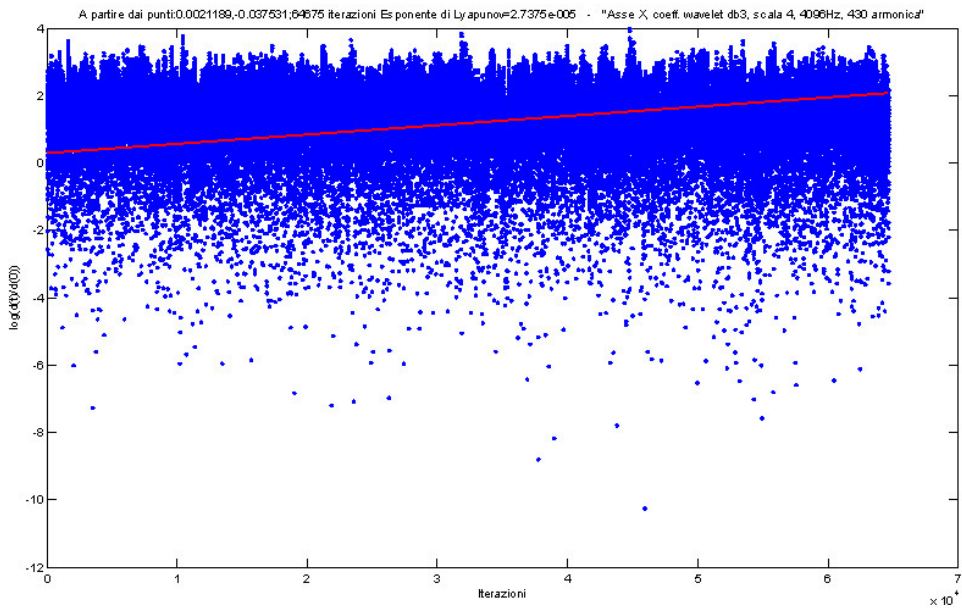


Fig. 4.92

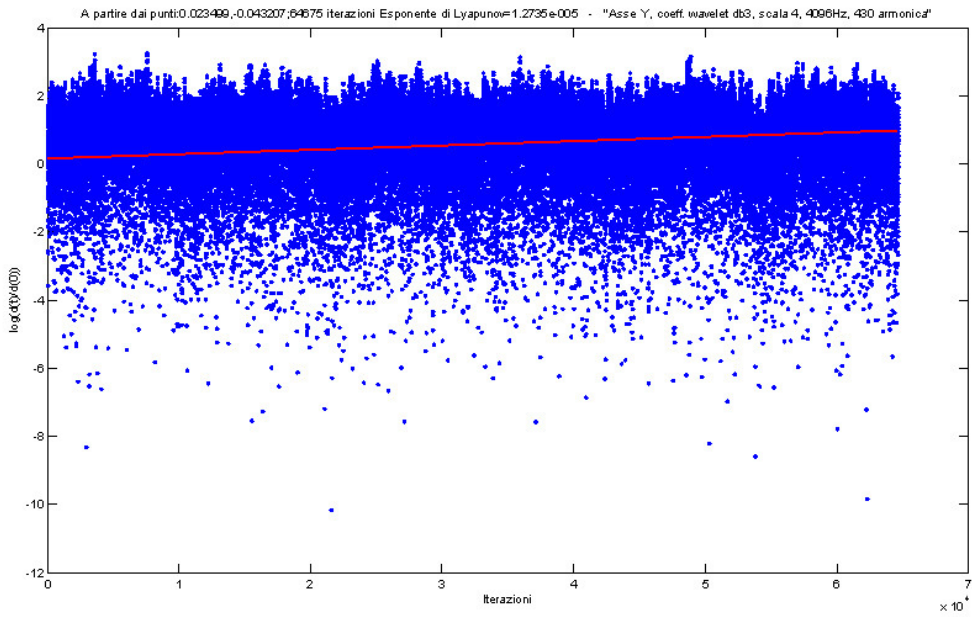


Fig. 4.93

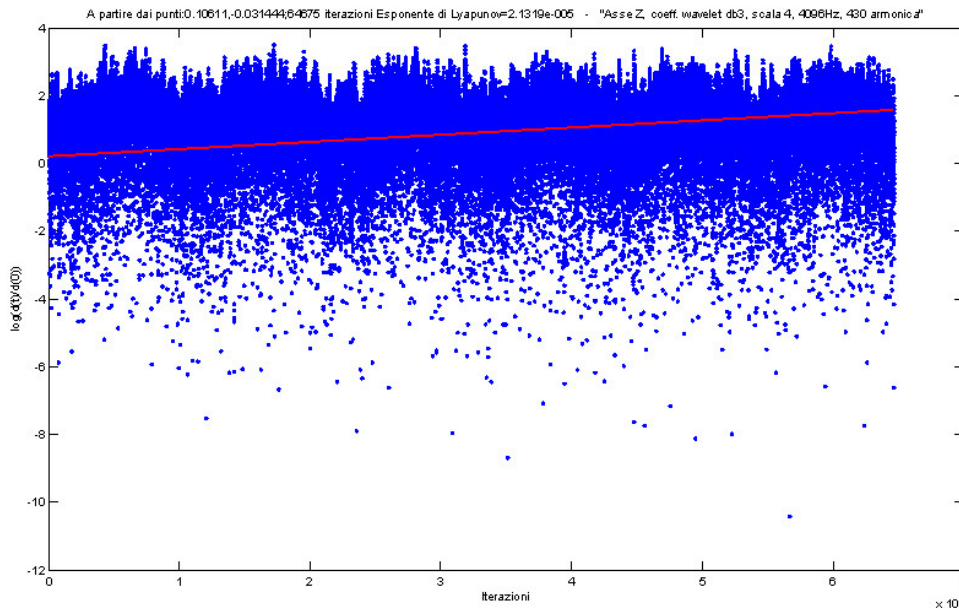


Fig. 4.94

Ciò è spiegabile in quanto le principali azioni esterne che contribuiscono a rendere caotico il segnale sono determinate dalla presenza di turbolenze indotte sul sistema monitorato dalle oscillazioni di maggiore ampiezza che si rilevano di solito nel piano longitudinale. Quelle che più interessano lo scafo sono: vibrazioni flessionali verticali che avvengono nel piano longitudinale di simmetria; vibrazioni flessionali orizzontali o trasversali che avvengono in un piano normale al piano longitudinale di simmetria. Le cause che eccitano il moto vibratorio dello scafo, e quindi provocano la condizione di risonanza, sono l'elica con la relativa linea d'asse, i moti di rollio-beccheggio, i motori termici alternativi di propulsione.

La frequenza trasmessa dall'elica allo scafo è data da

$$f = \frac{nN}{60}$$

dove

n è il numero delle pale

N è il numero di giri al primo dell'asse portaelica.

La pala dell'elica in ogni suo giro incontra zone in cui la velocità dell'acqua è notevolmente diversa in senso radiale e circonferenziale.

A causa della disuniformità della scia, l'elica produce tre generi diversi d'impulsi che vengono qui di seguito esaminati in ordine d'importanza:

Fluttuazioni della spinta - Le fluttuazioni della spinta agiscono senza produrre disturbo sulla nave attraverso la linea d'asse ed il cuscinetto di spinta, dato che le loro frequenze sono inferiori alla frequenza propria della linea d'asse nella direzione della spinta e lo smorzamento è piccolo.

Fluttuazioni del momento torcente - Le fluttuazioni del momento torcente sono notevolmente influenzate sia dal momento d'inerzia dinamico dell'elica relativamente elevato che permette solo piccole variazioni angolari, sia dall'elasticità alla torsione della linea d'asse. Con un torsigrafo si può constatare una rapida diminuzione delle variazioni angolari torsionali lungo la linea d'asse prodotte dall'elica. Le fluttuazioni del momento torcente, se arrivano fino al motore, sono trasmesse alla nave attraverso gli appoggi del motore stesso.

Fluttuazioni di flessione - In seguito alla continua variazione del carico sulle pale durante la rotazione, il centro di applicazione della spinta si sposta dal centro dell'elica, quindi nascono delle sollecitazioni di flessione sull'asse portaelica, anche se piccole in confronto a quelle dovute al peso dell'elica immersa nell'acqua di mare. Queste sollecitazioni vengono trasmesse alla nave in un piano perpendicolare alla linea d'asse attraverso i cuscinetti e dato che esse hanno la stessa frequenza della spinta, si sommeranno gli effetti.

Poiché le vibrazioni ad alta frequenza e piccola ampiezza si smorzano rapidamente allontanandosi dal centro di vibrazione e poiché le vibrazioni in esame hanno generalmente una frequenza superiore a quelle di risonanza delle strutture di scafo, si comprende come un'elica a maggior numero di pale produca nella nave vibrazioni notevolmente inferiori a quelle delle eliche a minor numero di pale.

La conoscenza delle oscillazioni massime del momento torcente assorbito e della spinta fornita dall'elica è importante per il calcolo della robustezza della pala. Le frequenze di queste oscillazioni non dipendono dal numero delle pale, sono multiple del numero di giri e possono produrre vibrazioni nelle pale e quindi sollecitazioni aggiuntive nel materiale.

Per evitare nelle navi vibrazioni prodotte dall'elica si devono tenere presenti i seguenti principali accorgimenti:

1- si deve cercare di ottenere una corrente di scia quanto più possibile uniforme nella zona dell'elica, affinando le linee d'acqua poppiere, adottando un grande pozzo dell'elica ed una buona distanza di questa dal dritto dell'elica e dal dritto del timone

2- le frequenze delle vibrazioni dell'elica e del motore non devono coincidere od essere nel rapporto di riduzione del riduttore

3- la frequenza propria e le vibrazioni di parti strutturali della nave, che cadono nel campo delle frequenze dell'elica, devono essere annullate rinforzando queste parti strutturali.

Oltre alle vibrazioni dello scafo possono verificarsi anche dei rumori che dall'elica si trasmettono allo scafo attraverso l'acqua e che vengono amplificati dal fasciame di questo, che entra in vibrazione. Questi rumori, che hanno una frequenza data dal prodotto del numero di giri dell'albero per il numero delle pale, sono causati da formazioni locali di cavitazione e da forti differenze di velocità di scia durante il passaggio della pala in corrispondenza del dritto o braccio portaelica.

In conclusione quanto maggiori sono il numero delle pale di un'elica, poiché saranno maggiori le frequenze e minori le ampiezze vibratorie, tanto maggiore sarà la sicurezza di evitare vibrazioni allo scafo.

4.11 Stato vibrazionale indotto da alimentazioni non convenzionali

Luogo: Laboratorio DiME

Sistema meccanico: Motore FIAT 1900 JTD di serie

Scopo della prova: analizzare lo stato vibrazionale indotto sul motore alimentato da Gasolio ovvero da Biodiesel

Nella Fig. 4.95 è visibile il posizionamento dei tre accelerometri monodirezionali.

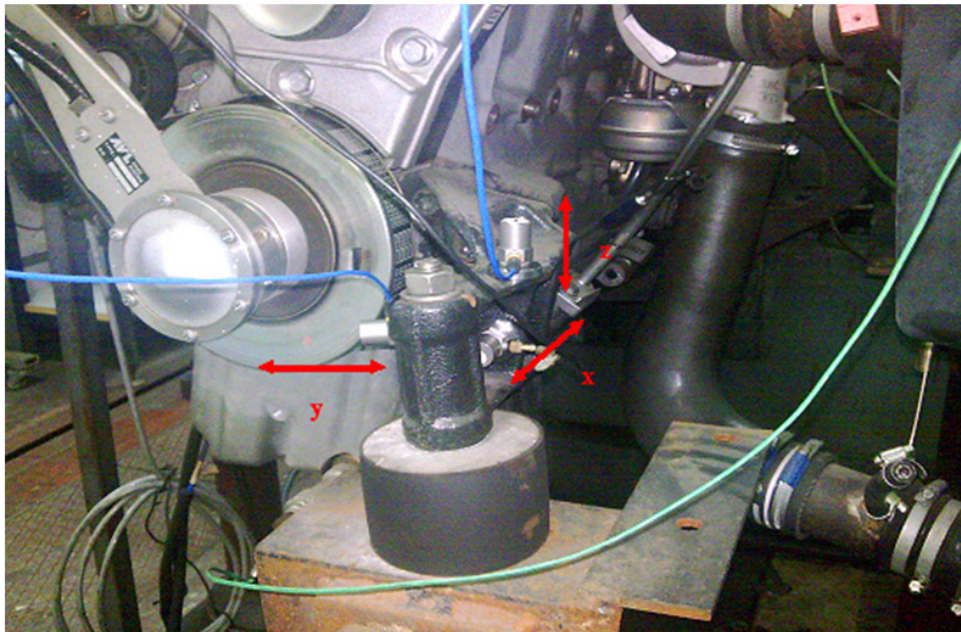


Fig. 4.95

- Punto di funzionamento del motore 2000 rpm – 2 bar Pressione Media Effettiva (PME)
- Acquisizione (sampling rate) a 40960Hz
- Motore in condizioni normali di funzionamento (baseline).
- Acquisizione per due diversi combustibili (Gasolio e biodiesel).

4.12 Alcune considerazioni sul biodiesel in autotrazione

Premesso che il funzionamento, l'usura dei motori e prestazioni sono del tutto assimilabili a quelle ottenute con gasolio tradizionale in termini di resa ed

affidabilità, il biodiesel può essere impiegato puro al 100% od in miscela con gasolio in qualunque proporzione, in tutti i mezzi di trasporto dotati di motore diesel di recente concezione, i quali possono usufruirne senza particolari accorgimenti tecnici; in miscela con gasolio fino al 30-40% su tutti i mezzi di trasporto dotati di motore diesel, di qualunque età, senza la necessità di accorgimenti tecnici.

Esso può essere impiegato puro al 100% in tutti i mezzi di trasporto dotati di motore diesel di produzione antecedente, con lievi modifiche da eseguire in officina (sostituzione di guarnizioni e condotti in gomma, eventuali semplici modifiche al circuito di iniezione).

Nella Tab. 4.5 che segue sono riportate alcune caratteristiche del biodiesel per autotrazione.

CARATTERISTICHE DEL BIODIESEL PER AUTOTRAZIONE Norma UNI 10946			
PARAMETRO	di	Limiti	
		min	max
Contenuto di estere	% m/m	96,5	
*Massa volumica a 15 °C	kg/m ³	860	900
*Viscosità a 40 °C	mm ² /sec	3,5	5,0
*Punto di infiammabilità	°C	120	
*Contenuto di zolfo	mg/kg		10
*Residuo carbonioso (sul 10% residuo distillazione)	% m/m		0,3
*Numero cetano		51	
*Contenuto di ceneri solfatate	% m/m		0,02
Contenuto di acqua	mg/kg		500
*Contaminazione totale	mg/kg		24
*Corrosione su lamina di rame (3 ore a 50 °C)	indice		classe 1
*Stabilità termico-ossidativa (110°C)	ore	6	
Valore di acidità	mg KOH/g		0,50
*Valore di jodio	gJ ² /100 g		120
Estere metilico linolenico	% m/m		12,0
Contenuto di metanolo	% m/m		0,2
Contenuto di monogliceridi	% m/m		0,80
Contenuto di digliceridi	% m/m		0,20
Contenuto di trigliceridi	% m/m		0,20
Glicerolo libero	% m/m		0,02
Glicerolo totale	% m/m		0,25
C.F.P.P.	°C		vedi nota
*Metalli alcalini (Na+ K)	mg/kg		5
*Contenuto di fosforo	mg/kg		10,0

(*) additivato

Tab. 4.5

4.13 Proprietà del biodiesel

Il biodiesel oltre ad essere un prodotto ecologico perché non immette ulteriore anidride carbonica (CO₂) nell'ambiente, il suo impiego come combustibile per autotrazione apporta ulteriori benefici: le sostanze che andiamo a bruciare nel biodiesel sono esteri degli acidi grassi, sostanze altamente energetiche che hanno in più già presenza di ossigeno nelle molecole per cui la loro combustione nel motore è più completa e quindi aumentano il rendimento e generano meno incombusti e polveri (particolato carbonioso). È più facilmente infiammabile per compressione del normale gasolio essendo costituito praticamente da un monocomponente.

Non contiene assolutamente composti aromatici nella sua composizione per cui contribuisce in minima parte all'incremento degli idrocarburi poliaromatici (IPA), cancerogeni, prodotti dai normali combustibili derivati dal petrolio.

Non contiene zolfo, dunque non contribuisce all'immissione di anidride solforosa nell'ambiente che, oltre ad essere tossica ed irritante per la gola, contribuisce in modo rilevante all'aumento dell'acidità delle piogge.

In generale, il biodiesel, ottimizzando la combustione, produce meno inquinanti come monossido di carbonio (CO) e Particolato Carbonioso a fronte di un lieve incremento degli ossidi d'azoto (eliminabile mediante ottimizzazione del *timing* dell'iniezione).

Contribuisce a mantenere pulito tutto il sistema d'iniezione del motore contribuendo ad aumentarne l'efficienza e diminuendo la necessità di manutenzione.

In definitiva l'utilizzo del biodiesel (puro o miscelato) quale combustibile per l'alimentazione dei motori diesel, oltre a contribuire alla riduzione della CO₂ in atmosfera, produce una combustione che si differenzia da quella provocata dal gasolio tradizionale in termini di velocità e regolarità con effetti sia sulle prestazioni che sulle emissioni inquinanti.

Queste caratteristiche dinamiche enunciate a favore dell'alimentazione a biodiesel, in un certo qual modo le abbiamo potute verificare sottoponendo i segnali accelerometrici estratti dal motore ad un'analisi avanzata basata a mezzo trasformata wavelet integrata con alcuni risultati afferenti alla teoria del caos.

La Fig. 4.96 che segue mostra la mappa di Poincaré ottenuta utilizzando i coefficienti wavelet estratti a mezzo la funzione wavelet denominata gauss1, 1365Hz, $\tau = 3$, media geometrica progressiva. Poiché il motore gira a 2000rpm (33.33Hz) e poiché il *sampling rate* è di 40960Hz, se ne deduce che il numero di punti che formano un giro completo è dato da: $\frac{1}{33.33} \times 40960 \approx 1229$. Pertanto il

numero di periodi che possiamo utilizzare per la media geometrica è dato dal numero di punti estratti (100000) rapportati al numero di punti contenuti in un periodo: $\frac{100000}{1229} \approx 81$. Pertanto la mappa visualizzata in Fig. 4.96 è riferita alla

media geometrica progressiva dopo 81 periodi.

Sottolineamo che i 100000 punti estratti casualmente dalla serie temporale accelerometrica corrispondono in realtà a circa 2.5s. Ebbene, sono sufficienti soltanto pochi secondi per effettuare l'elaborazione che viene di seguito illustrata.

Notiamo (Fig. 4.96) un duplice punto fisso nel caso di alimentazione a biodiesel. Ciò può essere spiegato se consideriamo che l'alimentazione con biodiesel è dal punto di vista della cinetica chimica più veloce in quanto è più facilmente infiammabile del diesel. Questo comporta la possibilità di apprezzare meglio le firme vibrazionali del motore determinate dall'alternarsi della coppia di cilindri che entrano in gioco a giri alterni. Tale caratteristica è visibile anche attraverso l'analisi del periodogramma dove si apprezza una maggiore distanza tra i diagrammi riferibili al biodiesel (Fig. 4.97).

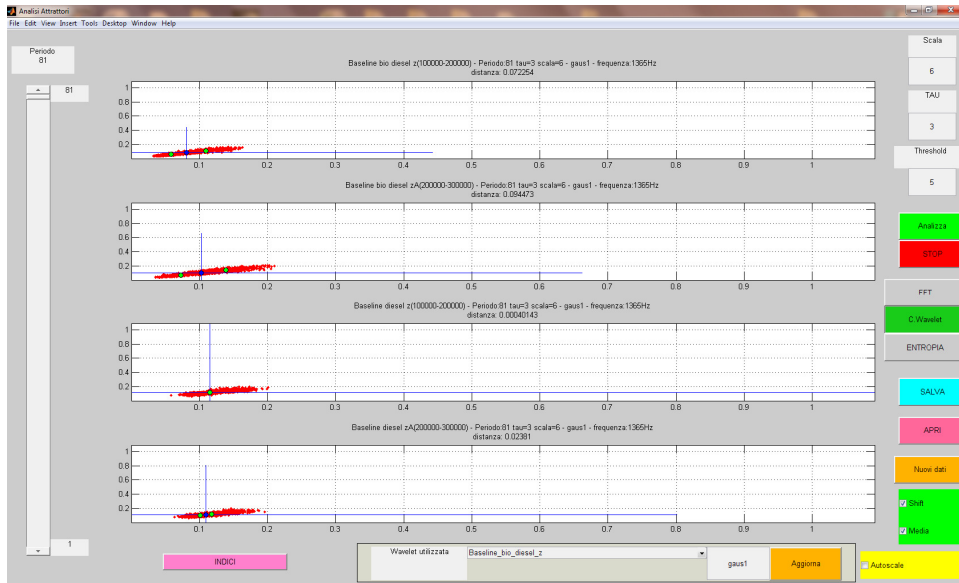


Fig. 4.96

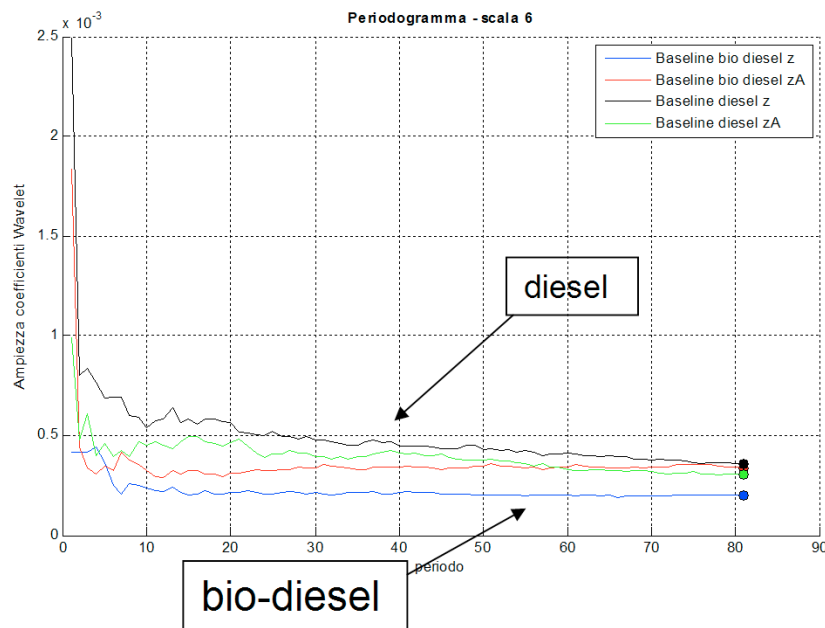


Fig. 4.97

L'Indice RMS è mostrato in Fig. 4.98 mentre i diagrammi riferiti alla curtosi (Fig. 4.99) mostrano una distribuzione più uniforme nel caso del biodiesel (circa 3) contro il diesel (circa 4), a dimostrazione che la vibrazione indotta dal diesel è più irregolare rispetto a quella indotta dal biodiesel.

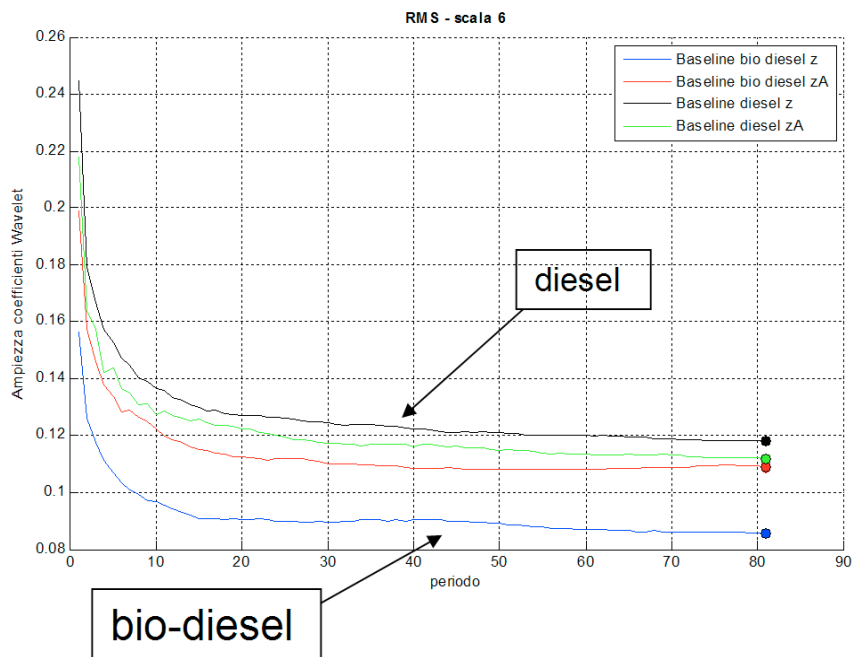


Fig. 4.98

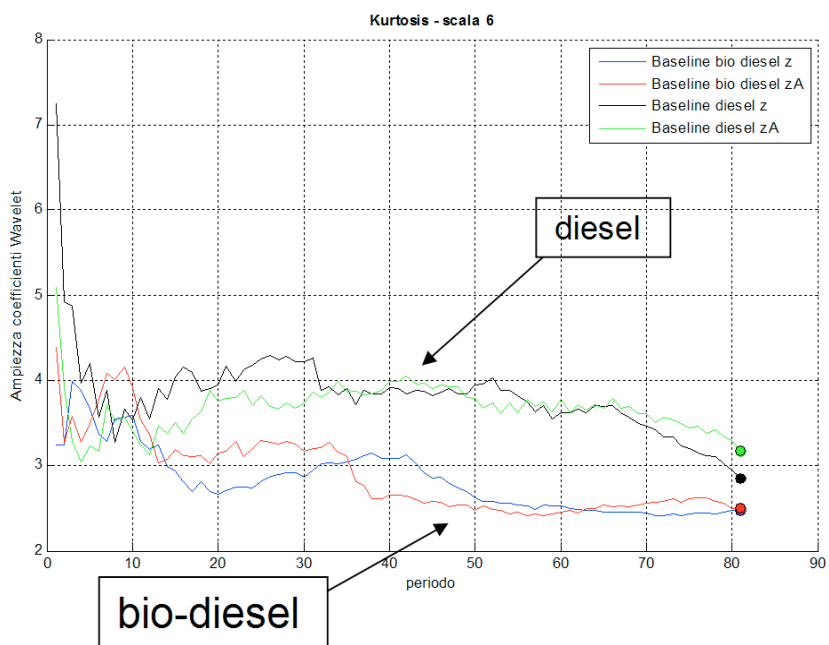


Fig. 4.99

La Fig. 4.100 è riferita al diagramma dell'Indice Beta.

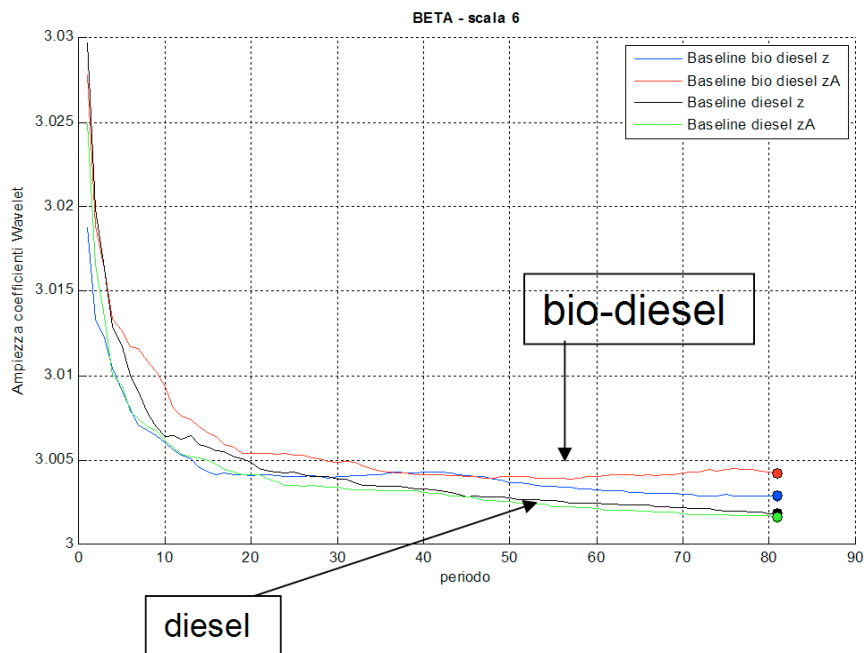


Fig. 4.100

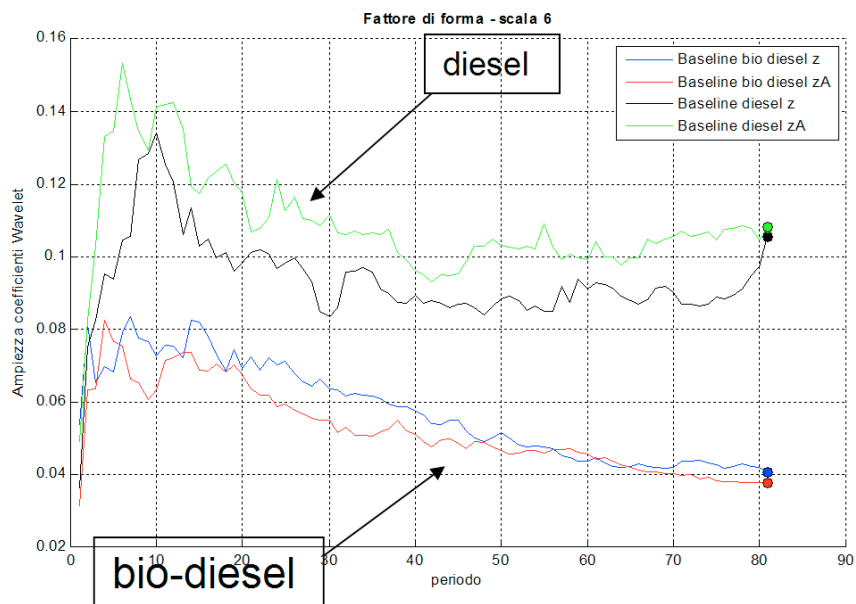


Fig. 4.101

Il diagramma relativo al Fattore di Forma (Fig. 4.101) relativo al diesel mostra valori dell'Ampezza dei Coefficienti Wavelet maggiori rispetto al biodiesel: la shape del biodiesel è più "cuspidata" rispetto al diesel. Questo

conferma il fatto che la combustione del biodiesel oltre ad avvenire in tempi più rapidi è anche più uniforme.

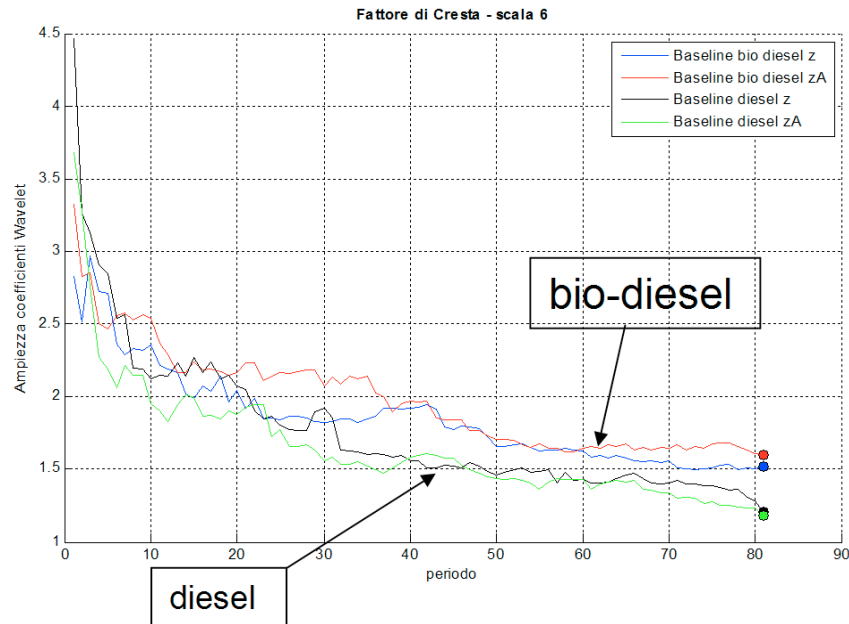


Fig. 4.102

La Fig. 4.102 relativa al Fattore di Cresta bene discrimina i segnali estratti dalle due alimentazioni. L'errore di cross-correlazione (Fig. 4.103) è minore nel caso del biodiesel (1.9054) a conferma della migliore simmetria della firma vibrazionale rispetto a quella determinata dall'alimentazione a gasolio (2.0299).

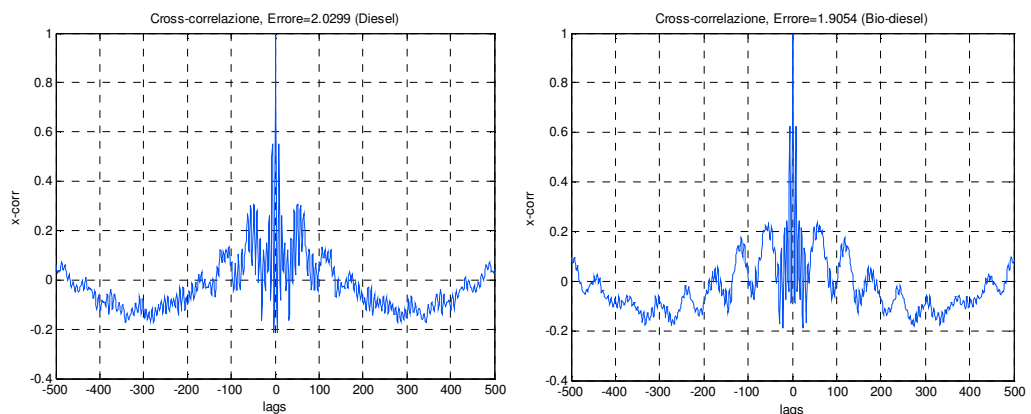


Fig. 4.103

4.14 Mappe tridimensionali costruite con l'acquisizione dell'asse z, $(x(n), x(n+1), x(n+2))$

Nelle Fig. 4.104 e Fig. 4.105 seguenti non si osservano particolari morfometrie delle mappe relative all'asse z.

Nella Fig. 4.106 che segue è mostrato il confronto tra le mappe tridimensionali ottenute con il metodo dei ritardi tra le vibrazioni indotte sull'asse z del motore alimentato una volta con diesel e successivamente con biodiesel. Anche in questo caso non sono visibili particolari morfometrie.

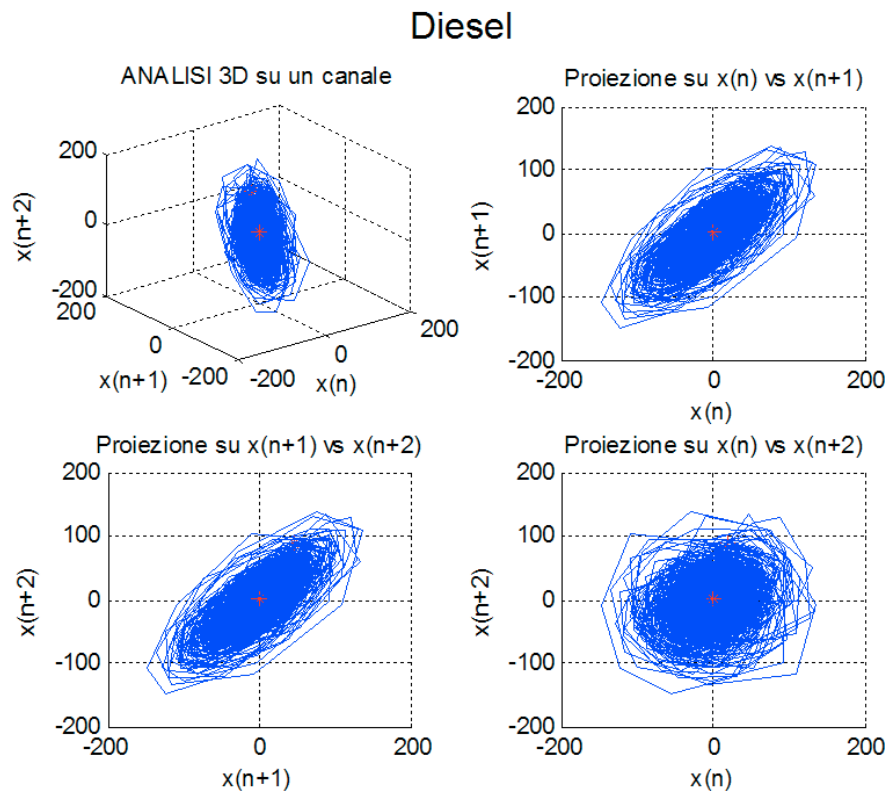


Fig. 4.104

Bio-diesel

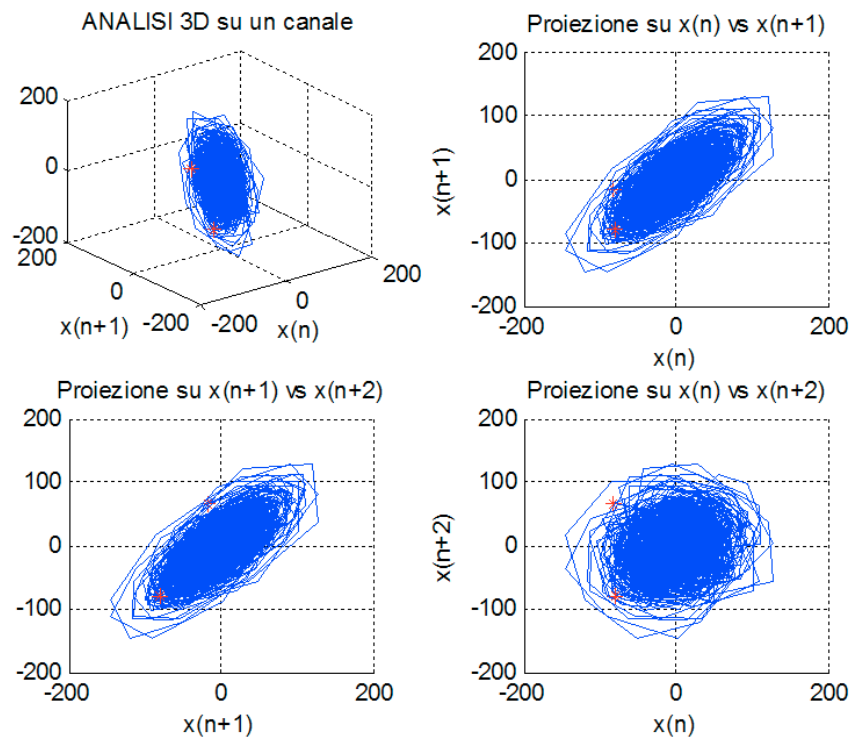


Fig. 4.105

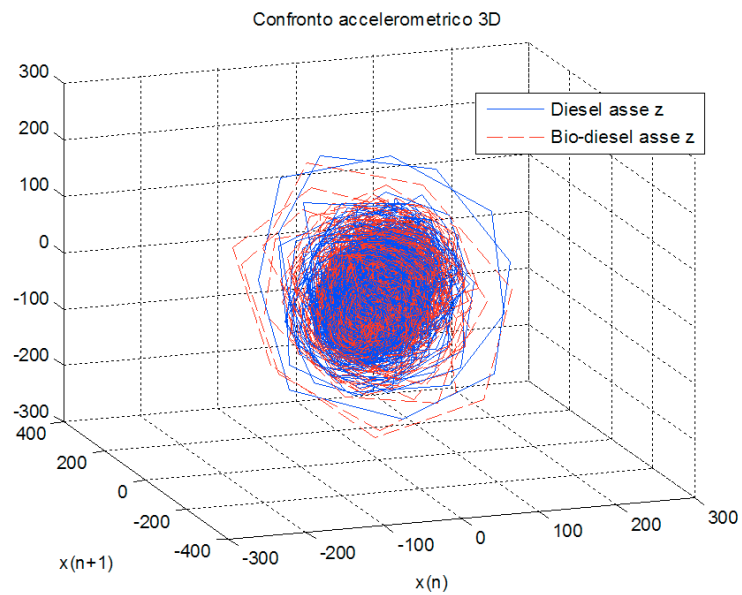


Fig. 4.106

4.15 Analisi con gli esponenti di Lyapunov

Nella Fig. 4.107 sottostante sono posti a confronto gli spettri ottenuti dall'analisi vibrazionale relativo al motore alimentato con diesel e biodiesel rispettivamente.

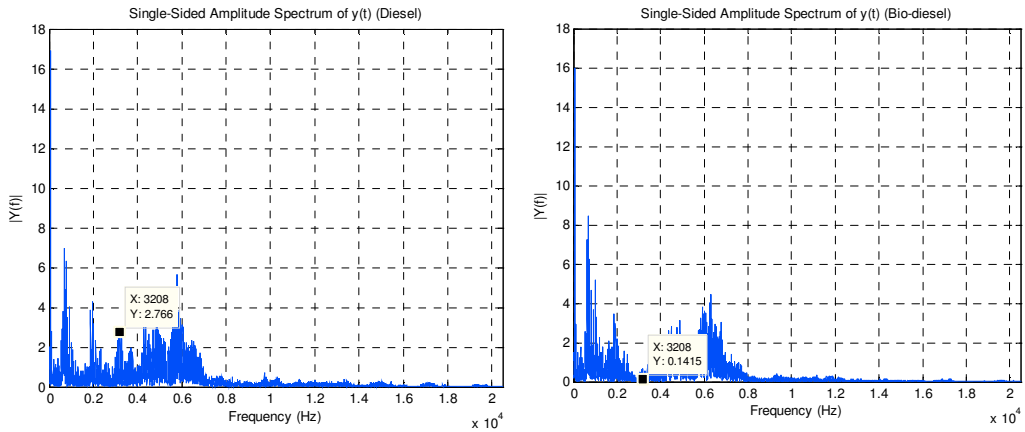


Fig. 4.107

La Fig. 4.108 mostra i rispettivi andamenti degli esponenti di Lyapunov.

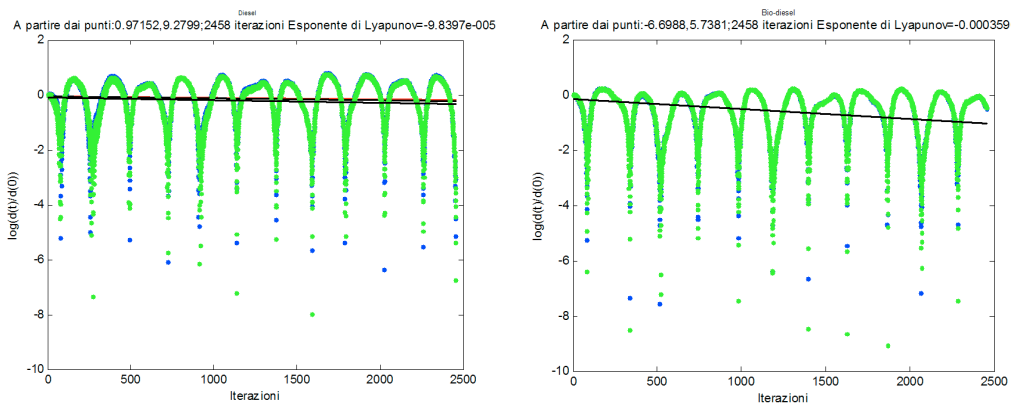


Fig. 4.108

In particolare la Fig. 4.108 mette a confronto i diagrammi relativi alla definizione del coefficiente di Lyapunov con motore alimentato a diesel ed a

biodiesel rispettivamente. Notiamo che nel caso del diesel l'ordine di grandezza del coefficiente è di 10^{-5} mentre nel caso del biodiesel è di 10^{-4} .

L'interpretazione di questa informazione, che si ricollega alla rapidità ed uniformità della combustione del biodiesel rispetto al diesel, potrebbe essere la seguente: la coppia erogata dal motore alimentato a biodiesel, a parità di condizioni (ovvero a parità di combustibile bruciato), è leggermente inferiore a quella con alimentazione convenzionale (il Potere Calorifico Inferiore del biodiesel è più basso di quello del gasolio). Ciò viene compensato da un maggiore contributo derivante dalle inerzie delle masse in gioco. Infatti l'esponente di Lyapunov di un ordine di grandezza più grande nel caso del biodiesel dimostra la maggiore tendenza che ha il motore a perdere potenza. La qual cosa, invece, non avviene nel caso di alimentazione con diesel, a causa della maggiore durata della combustione.

Quanto sopra, ai fini pratici, si riflette nel fatto che il consumo su lunghe distanze dei motori alimentati con biodiesel è leggermente maggiore a quello che lo stesso motore avrebbe se fosse alimentato con diesel (a parità di potenza bisogna bruciare più biodiesel che gasolio).

Conclusioni

Obiettivo di questa ricerca è stato lo studio, la messa a punto e la verifica di metodi e tecniche alternative di monitoraggio ed analisi di sistemi meccanici complessi che possono esibire fenomeni vibratorii anomali transienti, prodotti da incipienti cedimenti di natura elasto-cinetico-dinamici di loro organi o componenti, di durata molto brevi ed in alta frequenza. Tali caratteristiche vibrazionali non consentono di applicare metodiche e tecniche classiche basate, ad esempio, sullo studio degli spettri e più in generale a mezzo varianti della Fast Fourier Transform (FFT). Infatti, il limite di queste metodologie è che sono applicabili a fenomeni vibrazionali periodici.

Per sopperire a questo presupposto si ricorre, quindi, ad un artificio numerico che congettura che tali fenomeni siano lentamente variabili nel tempo oppure quasi-stazionari.

Per fenomeni, però, di durata molto brevi, non è possibile applicare questa ipotesi di lavoro

Da qui, la proposta metodologica scaturita dalla presente ricerca, di integrare la teoria afferente alle funzioni a supporto compatto chiamate wavelet con alcuni risultati afferenti alla teoria del caos. La prima, infatti, presenta spiccate proprietà di individuare non soltanto l'esistenza di eventuali "anomalie" (spike, transitori molto rapidi, istantanee variazioni di frequenza, ecc.), sempre presenti in fenomeni vibrazionali anomali, ma anche la loro esatta collocazione temporale. La seconda è necessaria sia perché qualsiasi sistema meccanico, in realtà, è non-lineare e sia per la particolare capacità che tali sofisticati test diagnostici presentano nell'evidenziare l'evoluzione dinamica di sistemi rotanti (motori, ruote dentate, camme, ecc.) e di agevolare l'identificazione precoce di particolari eventi quali, ad esempio, la usura e/o rottura di alcuni componenti meccanici o di parti di essi.

Monitorare un sistema dinamico non lineare significa prima di tutto individuarne le eventuali variazioni dinamiche che non possono essere ascritte ad eventi puramente aleatori. Indagare in tal senso, però, comporta un grosso

problema metodologico: stabilire se quello che stiamo osservando è dovuto al caso ovvero è determinato dal caos deterministico. Decidere in un senso o nell'altro non è cosa sempre facile e possibile. Pertanto, lo scopo di questo lavoro di ricerca è stato quello di presentare una serie di metodi che possono aiutare il ricercatore ad orientarsi in questa terra di nessuno dove spesso le sfumature sono molto labili. Ciò stante, l'intento è stato quello di sviluppare e rendere disponibile per applicazione in ambito anche industriale e non soltanto in laboratori di ricerca una metodologia di indagine in grado di identificare i difetti presenti.

Affinché la metodologia sviluppata sia bene adattabile alla realtà industriale si sono scelte tecniche di indagine che consentono misurazioni le meno intrusive possibili nei macchinari limitando le acquisizioni di segnale in due o tre direzioni ortogonali rispetto, ad esempio, all'asse di rotazione dell'albero. Notiamo che le metodiche proposte, nonostante siano più sensibili alle variazioni dello "stato di salute" dei sistemi dinamici, non richiedono maggiori carichi computazionali.

Infine, sottolineiamo l'importanza di aver potuto applicare tali metodologie in diversi ambiti ed in varie condizioni ambientali. Ciò ha consentito di perseguire almeno due obiettivi: da un lato la verifica della sensibilità e l'affidabilità di quanto sviluppato in ambito scientifico e dall'altro la messa a punto e l'integrazione tra le diverse tecnologie impiegate e gli applicativi software sviluppati.

Appendice A

Sistema di elaborazione

Computer:	
Tipo computer	ACPI x64-based PC
Sistema operativo	Microsoft Windows 7
DirectX	4.09.00.0904 (DirectX 9.0c)

Scheda madre:	
Tipo processore	QuadCore Intel Core i7 920, 2800 MHz (21 x 133)
Nome scheda madre	Asus P6T (2 PCI, 1 PCI-E x1, 3 PCI-E x16, 6 DDR3 DIMM, Audio, Gigabit LAN, IEEE-1394)
Chipset scheda madre	Intel Tylersburg X58, Intel Nehalem
Memoria di sistema	8182 MB (DDR3-1333 DDR3 SDRAM)

Scheda video:	
Adattatore video	NVIDIA GeForce 9800 GT (Microsoft Corporation - WDDM v1.1) (1024 MB))
Acceleratore 3D	nVIDIA GeForce 9800 GT

Schermo	Asus VW198 [19" LCD] (82LMTN008118)
---------	----------------------------------------

Multimedia:	
Periferica audio	Realtek ALC888/1200 @ Intel 82801JB ICH10 - High Definition Audio Controller

Archiviazione:	
Unità floppy	Unità disco floppy
Unità disco	STM3500418AS ATA Device (500 GB, 7200 RPM, SATA-II)
Unità disco	WDC WD3000HLFS-01G6U1 ATA Device (279 GB, 10000 RPM, IDE)
Unità ottica	HL-DT-ST DVD-RAM GH22NS50 ATA Device (DVD+R9:16x, DVD- R9:12x, DVD+RW:22x/8x, DVD- RW:22x/6x, DVD-RAM:12x, DVD- ROM:16x, CD:48x/32x/48x DVD+RW/DVD-RW/DVD-RAM)

Partizioni:	
C: (NTFS)	279.4 GB (194.1 GB disponibili)
E: (NTFS)	465.8 GB (392.9 GB disponibili)
Capacità	745.1 GB (587.1 GB disponibili)

Periferiche di input:	
Tastiera	Tastiera PS/2 standard
Mouse	Mouse Microsoft PS/2


Periferiche:	
Stampante	Adobe PDF
Stampante	Brother MFC-215C USB Printer
Stampante	Brother PC-FAX v.2.1
Stampante	Brother PC-FAX v.2
Stampante	CutePDF Writer
Stampante	Fax
Stampante	HP Color LaserJet 2600n
Stampante	Microsoft XPS Document Writer
Stampante	Printer Driver Type 104 PCL 6
Stampante	SmarThru PC Fax
Controller FireWire	VIA OHCI Compliant IEEE 1394 Host Controller (PHY: VIA VT6307)

Appendice B

Strumentazione

B.1 Amplificatori

DeltaTron Power Supply Type WB-1372

 <p>The image shows a green DeltaTron Power Supply Type WB-1372. It features a central analog meter with a scale from 0 to 100 mV. Above the meter, there are terminals for 'Input', 'Power Off', and 'Output'. Below the meter, there are terminals for 'Bias' and 'Battery'. The device is labeled 'DeltaTron™ Power Supply WB 1372' and 'Baker & Taylor'.</p>	<p>WB-1372 Physical Dimensions</p> <ul style="list-style-type: none"> • Height: 39 mm (1.5") • Width: 65 mm (2.5") • Depth: 120 mm (4.7") • Weight: 250 gram (8.8 oz.)
<p>Channels</p>	<p>1</p>
<p>Type Number</p>	<p>WB-1372</p>
<p>Description</p>	<p>DeltaTron Power Supply</p>

Features of WB-1372

- Powers one DeltaTron transducer
- Input/output BNC sockets
- Transducer current: 3 mA ($\pm 20\%$)
- Displays bias voltage on the meter
- Dynamic Impedance: $>100\text{ k}\Omega$
- The unit uses three 9V standard batteries, that is, 6LR61
- Battery check
- AC output

B.2 Accelerometri

Product Data

DeltaTron® Range

Miniature Accelerometer Types 4394, 4397
 Accelerometer Types 4395, 4396, 4398, 4399
 Charge Converter Type 2646
 Power Supply ZG0328

USES:

- Shock and vibration measurement
- Vibration analysis
- Vibration monitoring
- Vibration test control
- Product and quality control

- Charge converter for conventional accelerometers
- Adaptor for Brüel & Kjær analyzer inputs
- Accelerometers with:

- Integral preamplifiers
- All-welded construction
- Delta Shear® Uni-Gain design
- Plain or Insulated base
- Low sensitivity to all extraneous environments
- Individual standard-traceable calibration

FEATURES:

- All DeltaTron® products operate on constant-current line-drive principles

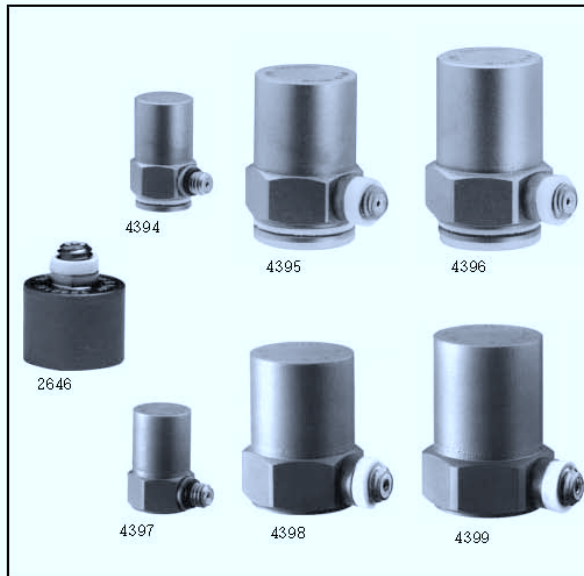
DeltaTron® is the generic name for the new family of accelerometers and signal conditioning products from Brüel & Kjær. The DeltaTron® name identifies products that are designed to operate on a constant-current power supply and to give output signals in the form of voltage modulation on the power supply line.

The DeltaTron® range described in this Data Sheet comprises:

- Piezoelectric accelerometers with integral preamplifiers.
- Charge converter for use with conventional accelerometers.
- Power supply/adaptor for use with Brüel & Kjær Signal Analyzers and other instruments with 7-pin microphone inputs.

All DeltaTron® accelerometers are individually calibrated and a calibration chart showing the individually measured frequency response curve is provided with each accelerometer.

In addition to the products described in this Data Sheet, Brüel & Kjær also supply DeltaTron® accelerometers for permanent industrial installations, a comprehensive range of Delta Shear® piezoelectric accelerometers and a wide range of signal conditioning amplifiers. Details of these products are given in their respective Product Data sheets.



DeltaTron® Accelerometers

The DeltaTron® accelerometers described here are constructed to the proven Brüel & Kjær Delta Shear® design with the addition of an integral preamplifier. They require an external constant-current, power supply and operate as voltage sources.

DeltaTron® accelerometers operate over a frequency range from below 1 Hz to approximately half the resonance frequency of the accelerometer assembly. All are supplied with individual calibration charts which give individually measured frequency response curves (see Fig. 1).

Design and Construction

PZ 23 lead zirconate titanate, piezoelectric elements are used in the accelerometers, whose housings are all welded. The accelerometers are available as types with a plain base (no insulation), or as types with an insulated base.

On the insulated types the mounting bases are insulated by high-quality ceramic discs bonded between base and housing. Both base and housing are made of titanium, making the accelerometers very corrosion resistant.

The built-in preamplifier is a charge converter made using thick film technology. It comprises a low-noise MOS Field Effect Transistor as its input stage and a bipolar transistor to give low output impedance. A single-pole filter at the input extends the accelerometer's usable frequency range to approximately 50% of the mounted resonance frequency. Special efforts have been made to minimise interference from RF (radio frequency) electromagnetic fields.

Characteristics

Uni-Gain Sensitivity

The Brüel & Kjær Uni-Gain designation applies to all DeltaTron® accelerometers. This means that the accelerometer sensitivity is adjusted during manufacture to within 2% of either 1 or 10 mV/ms⁻².

Frequency response

The upper frequency limits given in the specifications are the frequencies where the deviation from the reference sensitivity is less than 10%. It is approximately 50% of the mounted resonance frequency. This assumes that the accelerometer is correctly mounted onto the test structure – a poor mounting can have a marked effect on the mounted resonance frequency.

The lower frequency limits and phase response are determined by the built-in preamplifiers. The lower frequency limits are given in the specifications for deviations from reference sensitivity of less than 10%.

The low damping of Brüel & Kjær accelerometers leads to the single, well-defined resonance peak shown on the frequency response curves.

The individually measured frequency response curves with absolute values of amplitude and phase are given on the calibration chart for the major part of the frequency range. At low and high frequencies, the curves given are typical (Fig. 1).

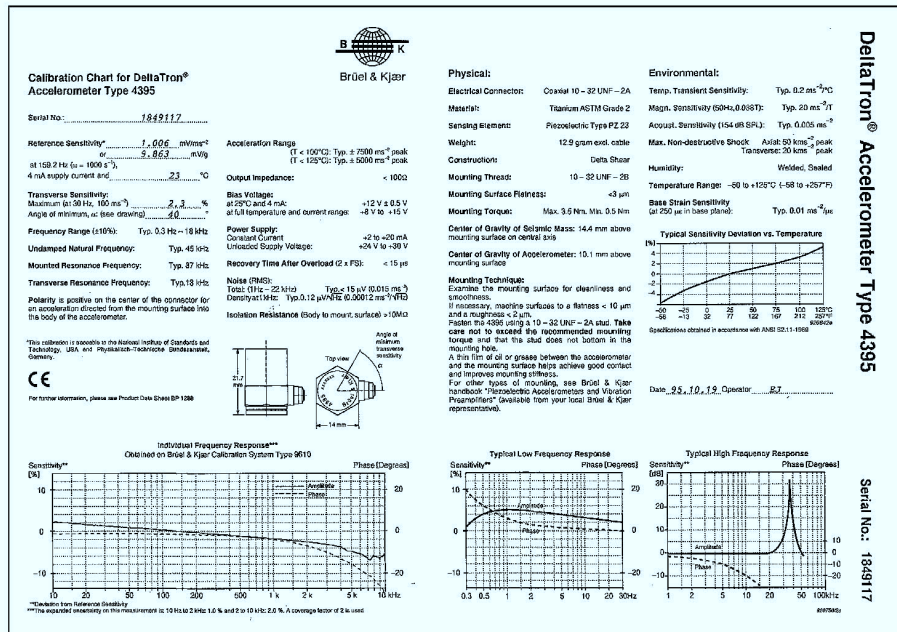


Fig.1 Example of the calibration chart supplied with Brüel & Kjær DeltaTron® accelerometers

Transverse Sensitivity

All piezoelectric accelerometers are slightly sensitive to acceleration that is perpendicular to their main sensitivity axis. This transverse sensitivity is measured during the factory calibration process using a 30 Hz and 100 ms^{-2} excitation, and is given as a percentage of the corresponding main axis sensitivity.

The direction of minimum transverse sensitivity is indicated on the calibration chart of each DeltaTron[®] accelerometer.

Transverse Resonance Frequency

Typical values for the transverse resonance frequency are obtained by mounting an accelerometer on the side of a steel cube attached to a Calibration Exciter Type 4290.

Dynamic Range

The dynamic range of an accelerometer is the range over which its electrical output is directly proportional to the acceleration applied to its base.

Upper Limit

In general, the smaller the accelerometer, the higher the vibration level at which it can be used. The upper limit depends on the type of vibration to which the accelerometer is subjected and is determined by the prestressing of the piezoelectric elements as well as by the mechanical strength of the element.

The acceleration ranges given in the specifications are determined by the measuring limits of the integral preamplifiers. For transporting and handling, the maximum non-destructive shock is given.

When short duration transient signals are measured, care must be taken to avoid ringing effects due to the high-frequency resonance of the accelerometer. As a general rule, the duration of a half sine shock pulse should be greater than $5/f_r$ for an amplitude error of less than 10%, where f_r is the mounted resonance frequency of the accelerometer.

Lower Limit

The lower limit is imposed by the noise level of the integral preamplifier, which has been constructed to give very low noise levels, and by the environment in which the measurements are made.

A discussion of the effect of environmental influences, can be found in the Brüel & Kjær handbook "Piezoelectric Accelerometers and Vibration Preamplifiers".

Electrical Impedance

All DeltaTron[®] accelerometers have integral preamplifiers and can be regarded as voltage sources. The output impedance is specified as typically less than 100Ω . With a supply current of $>4 \text{ mA}$ output impedance is typically $<30 \Omega$.

Environment**Temperature**

DeltaTron[®] accelerometers are specified to an operating temperature range of -50°C to $+125^\circ\text{C}$. Throughout this range, the sensitivity of the accelerometers has a small temperature dependence, details of this are given in the individual calibration charts (see Fig. 1).

Temperature Transients

All piezoelectric accelerometers have slight sensitivity to temperature fluctuations. This effect may be significant when low frequency, low level accelerations are being measured.

The procedure for measuring temperature transient sensitivity is described in the Brüel & Kjær handbook "Piezoelectric Accelerometers and Vibration Preamplifiers".

Humidity

DeltaTron[®] accelerometers have all-welded titanium housings to give them a high resistance to the majority of corrosive agents found in industry. The low impedance of the preamplifier gives it a low sensitivity to humidity on the output terminal and allows the accelerometers to be used without protection in conditions where there is small amounts of condensation.

Where heavy condensation is encountered, the use of moisture impervious cables and sealing will permit operation. Suitable sealants are Dow Corning RTV 738 or similar compounds.

Sound Pressure

The acoustic sensitivity is low, and for most vibration measurements it can be neglected. The vibration signal from the structure-under-test is normally much greater than the signal due to acoustic sensitivity.

Acoustic sensitivity is specified as an equivalent acceleration caused by a 154 dB sound pressure level in the frequency range 2 Hz to 100 Hz, but the specified value is normally valid outside this range.

Electromagnetic Compatibility**(EMC)**

Susceptibility of DeltaTron[®] accelerometers to radio-frequency electromagnetic radiation is also low.

The accelerometers are certified (CE) to Standards EN 50081-1 and EN 50082-2 for emission and immunity, respectively.

EN 50081-1 covers:

- Radiated emission from 30 to 1000 MHz

- Conducted emission from 0.15 to 30 MHz.

EN 50082-2 covers the effects of:

- Radio frequency fields from 20 to 1000 MHz at a field strength of 3 and 10 V/m with an amplitude modulation of 80%

- Electrostatic discharge at 4 and 8 kV

- Transient bursts at 1 kV

- Magnetic fields from 50 Hz to 20 kHz with a strength of 30 A/m at 50 Hz

Base Strains

These can be introduced into an accelerometer by distortion of the surface to which it is attached.

Base strain sensitivity, which is minimised by the Delta Shear[®] construction, is specified in $\text{ms}^{-2}/\mu\text{e}$.

Mounting

DeltaTron[®] accelerometers can be mounted with their main sensitivity axis aligned in any direction.

Recommended Mounting Technique

Fig. 2 shows the recommended mounting method for DeltaTron[®] accelerometers. Steel Stud YS8321 is a flanged M3 stud which is used with Accelerometer Type 4394. It is available in sets of 25 as order number UA 1221. For the uninsulated miniature accelerometer Type 4397 steel stud YQ2003 is used. For types 4395, 4396, 4398 and 4399, steel stud YQ 2962 is used. The accelerometers are screwed, using the stud, onto a clean metal surface meeting the requirements specified in Fig. 3. The optimum torque for tightening the M3 studs is between 0.2 Nm (1.8 lbf.-in) and 0.6 Nm (5.3 lbf.-in). For 10–32 UNF studs, the corresponding values are 0.5 Nm (4.4 lbf.-in) and 3.5 Nm (31 lbf.-in). To avoid possible damage to the ceramic disc, it is important that the maximum torque is not exceeded.

It should be noted when using the recommended technique, that if the

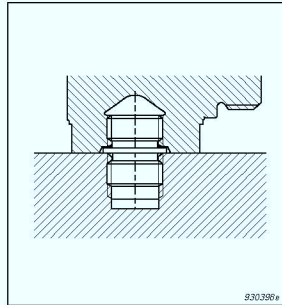


Fig. 2 Recommended mounting technique for Type 4394, using a steel stud YS 8321 (YQ2003 for uninsulated base, Type 4397)

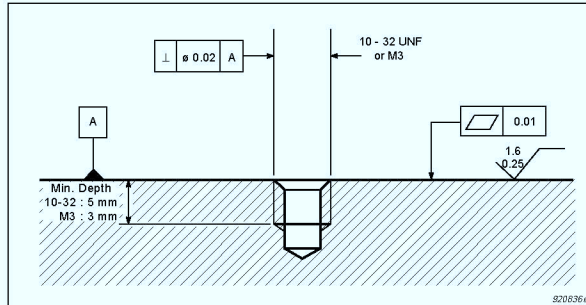


Fig. 3 Recommended tolerances for the mounting surfaces. Dimensions and symbols in accordance with ISO 1101

mounting surface is not perfectly smooth, the application of a thin layer of silicon grease to the base of the accelerometer before screwing it down on the mounting surface will improve the mounting stiffness.

Alternative Mounting Techniques

The section entitled Standard Accessories lists the mounting accessories that are supplied with individual accelerometers.

When mounting techniques other than the recommended one are used, the mounted resonance frequency of the accelerometer will probably be lowered. Most alternative mounting techniques are described in the Brüel & Kjær "Piezoelectric Accelerometers and Vibration Preamplifiers" handbook, where their effects on the frequency response are illustrated.

Connecting Cables

For direct connection to DeltaTron[®] accelerometers, miniature, double-screened low-noise, single-core, coaxial cables are available. These are a standard 1.2 m long, Teflon-insulated, cables that are supplied fitted with miniature coaxial plugs.

Types 4394 and 4397 require an M3 connector and is supplied with Cable AO1381 which is fitted with one M3 and one 10-32 UNF connector. Types 4395, 4396, 4398 and 4399 are supplied with Cable AO1382 which is fitted with two 10-32 UNF connectors. DeltaTron[®] Charge Converter Type 2646 is supplied without a cable, but AO 0406, a 5 m cable fitted with 10-32 UNF connectors and supplied with a 10-32 UNF to BNC adaptor, is available as an accessory. As an alternative, an AO 1382 cable

can be used. Additional cable lengths and connectors can be ordered.

Note, however, that for many, non-critical applications, lower quality cables or twisted pairs can be used. However, when such cables are used, the EMC certification is not valid.

Details of the accelerometer connections and recommended plug clearances are given in the section entitled Accelerometer Dimensions.

Maximum Cable Length

The maximum output voltage of a DeltaTron[®] accelerometer depends on the supply current at which it is operating, and on the capacitive load due to the connecting cable.

Fig. 4 shows typical curves for maximum output levels with supply currents of 2 and 20 mA (for distortion $\leq 1\%$). The maximum cable length in metres (L) is given by:

$$L = 75000 \times \frac{I_s}{f \times V_o \times C_m}$$

where:

I_s = supply current [mA]

f = frequency [kHz]

V_o = output voltage [V_{peak}]

C_m = cable capacitance [$\mu F/m$]

If the supply current is less than 4 mA, the power consumption of the built-in preamplifier becomes significant and this formula cannot be applied.

Calibration

Factory Calibration

All Brüel & Kjær Accelerometers are thoroughly checked and examined at each stage of manufacture and assembly. Every accelerometer under-

goes an extensive calibration procedure and artificial ageing process to ensure completely predictable performance and stable operation. Accurate numerical details of the calibration are reported on the calibration chart supplied with each transducer (see Fig. 1).

At Brüel & Kjær, piezoelectric accelerometers are calibrated by back-to-back comparison with a primary reference standard accelerometer which is regularly calibrated by laser interferometry at the Danish Primary Laboratory of Acoustics and by both the American National Institute of Standards and Technology and the German Physikalisch-Technische Bundesanstalt. The overall accuracy of the back-to-back comparison is 2% with a 99.9% confidence level (1.6% for a 99% confidence level), while for the interferometry method the accuracy is better than $\pm 0.6\%$ with a 99% confidence level.

Subsequent Calibration

Regular calibration of accelerometers helps maintain confidence in the measurements taken and indicates whether accelerometers have been damaged. Brüel & Kjær manufacture a range of equipment for frequency response, sensitivity and system calibrations, details of which are available in separate Product Data Sheets.

Individual Accelerometers

Dimensions and specifications for the accelerometers can be found in the schemes given towards the end of this Data Sheet.

**Miniature Accelerometer
Type 4394 and 4397**

These accelerometers are suitable for measurements on lightweight structures where relatively high-level, high-frequency vibrations are encountered.

**Shock and Vibration Accelerometer
Type 4395 and 4398**

Type 4395 and 4398 accelerometers are designed for the measurement of relatively high levels of continuous vibration and mechanical shock up to 7500 ms^{-2} .

**General Purpose Accelerometer
Type 4396 and 4399**

These accelerometers are intended to be used for general purpose vibration measurements.

**Charge Converter Type
2646**

Charge Converter Type 2646 is a signal conditioner designed for use with standard piezoelectric accelerometers or other piezoelectric transducers. It requires an external, constant-current power supply, and its function is to convert a charge input to a voltage-modulation of the constant-current power supply lines.

Type 2646 is also designed to withstand severe environments so that it can be mounted directly onto transducers with 10–32 UNF top connectors, or located in close proximity to transducers with side connectors.

For miniature size and low weight, Type 2646 has thick film electronics that are double sealed in a silicone elastomer compound and contained in a titanium housing. Type 2646 is supplied without a cable, however there is a space in the case for storing a cable. Cables AO0406 and AO 1382 are available as accessories.

Full specifications are given on the last page of this Data Sheet, and the

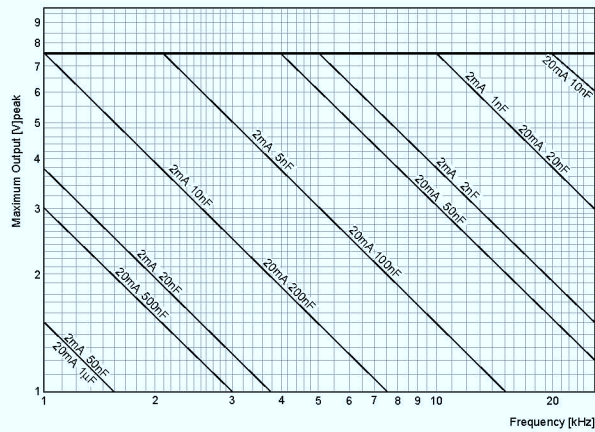


Fig.4 Typical curves for maximum output level of DeltaTron® accelerometers, showing maximum capacitive load over the recommended current supply range

extensive range of accelerometers that are suitable for use with Type 2646 are described in the Brüel & Kjær Data Sheet "Piezoelectric Accelerometers" (BP 0196).

**Power Supply Adaptor
ZG 0328**

The Power Supply Adaptor ZG0328 is designed to connect directly into the 7-pin microphone (preamplifier) socket that is provided on many Brüel & Kjær instruments (except Types 2230 to 2235). The function of ZG 0328 is to adapt the socket for direct use with DeltaTron® accelerometers.

From the power available in the microphone socket, ZG 0328 provides the constant-current drive for the accelerometer and the signal input to the microphone socket.

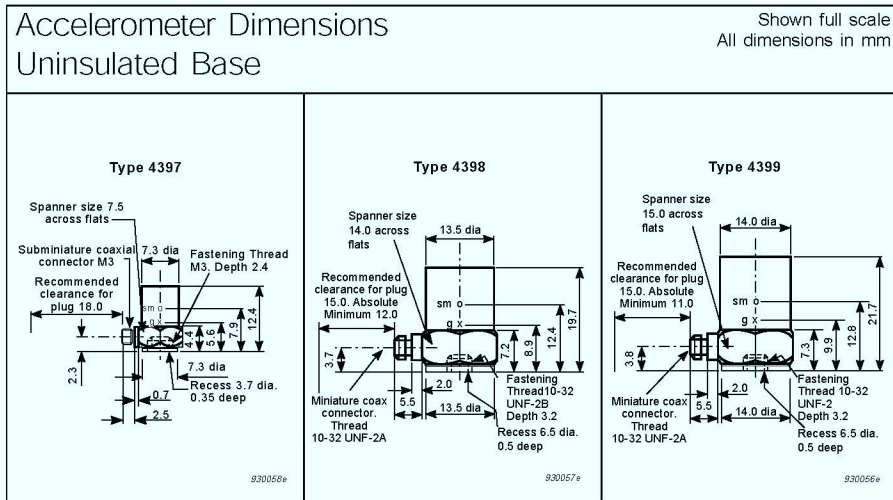
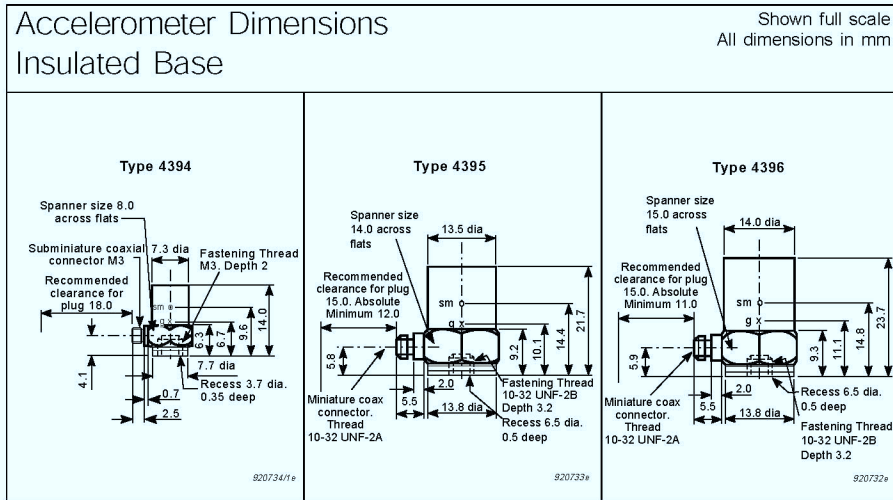
**How to Order
Accelerometers**

Accelerometers are available as standard or as a **Set**.

As standard an accelerometer is supplied with a cable and mounting studs (for example Order No. **4395**).

An **Accelerometer Set** (suffix S after the type number) consists of a single accelerometer complete with cable and accessories in a case.

A complete list of the accessories supplied with each set or standard version, is given in the section on Standard Accessories. Additional accessories are available on separate order.

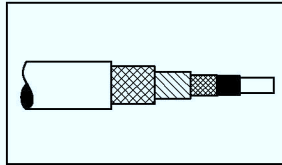


Standard Accessories

B&K Part Number	Standard Accessories	4394		4395		4396		4397		4398		4399	
		S		S		S		S		S		S	
AO 1381	Teflon low-noise cable, double screened AC 0104 (∅ 1.6 mm). Fitted with one 10-32 UNF and one M3 connector. Length 1.2m	1	1					1	1				
AO 1382	Teflon low-noise cable, double screened AC 0104 (∅ 1.6 mm). Fitted with two 10-32 UNF connectors. Length 1.2m			1	1	1	1			1	1	1	1
JJ 0032	Extension connector for cables fitted with 10-32 UNF connectors	3		3		3		3		3		3	
JP 0145	10-32 UNF to BNC adaptor	1		1		1		1		1		1	
YS 8321	Steel stud M3/M3 (UA1221 is a set of 25 of these studs)	3	3										
YQ 2003	Steel Stud M3, 5 mm long							3	3				
YQ 2960	10-32 UNF threaded steel stud. Length 0.5 in.			2		2				2		2	
YQ 2962	10-32 UNF threaded steel stud. Length 0.3 in.			3	1	3	1			3	1	3	1
YM 0414	10-32 UNF nut			1		1				1		1	
QA 0041	Tap for M3 thread	1						1					
QA 0029	Tap for 10-32 UNF thread			1		1				1		1	
DB 0757	Cement stud M3. Diameter 8 mm	1						1					
DB 0756	Cement stud 10-32 UNF. Diameter 14 mm			1		1				1		1	
QA 0042	Hexagonal key for M3 studs	1						1					
QA 0013	Hexagonal key for 10-32 UNF studs			1		1				1		1	
YJ 0216	Beeswax for mounting	1		1		1		1		1		1	
UA 0642	Mounting magnet with 10-32 UNF stud			1		1				1		1	
YO 0073	25 x adhesive mounting disc. Diameter 5.5 mm	1						1					
QS 0007	Tube of cyanoacrylate adhesive	1						1					
BC 0200	Individual calibration chart	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	Accessory set included with S version		UA 1218		UA 1219		UA 1219		UA 1218		UA 1219		UA 1219

Table 1 The accelerometers can be ordered as standard version (for example: Order No. 4395) or as an "S" version (for example: Order No. 4395 S). This table gives details about which accessories are supplied with accelerometers in the standard version and which are supplied with the "S" version

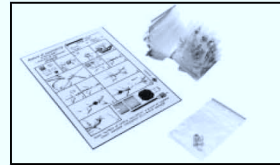
Additional Accessories Available



AC0104. Teflon insulated double screened low-noise cable (illustrated).
AC0005. Teflon insulated super low-noise cable.
AC0200. Reinforced double screened version of AC0005.
AC0208. PVC coated cable
 The EMC certification (CE) is only valid for AC0104.



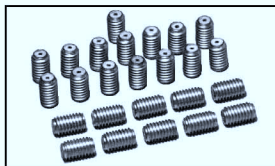
AO0406. Teflon insulated double screened cable AC0104 fitted with 10-32 UNF connectors and supplied with a 10-32 UNF to BNC adaptor (JP0145). Length 5m.



UA0130. Set of 25 plugs JP0012 for cable AC0104 and AC0005.
UA0730. Set of 25 plugs JP0056 for cable AC0200. For mounting the plugs, the assembly tool QA0035 is required.



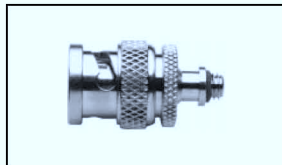
UA0643. Set of 5 10-32 UNF mounting magnets UA0642. Includes PTFE self adhesive discs for electrical insulation.



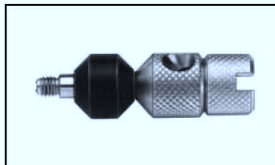
UA0186. Set of 25 extension connectors JJ0032 for miniature cables with plugs JP0012 and JP0056.



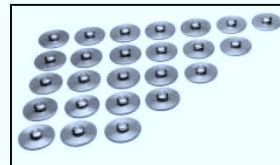
UA0553. Set of 5 electrically insulated Mechanical Filters UA0559, plus a tommy bar for mounting.



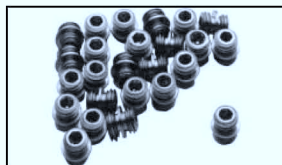
JP0145. 10-32 UNF to BNC adaptor for connection of cables with miniature coaxial plugs JP0012 and JP0056.



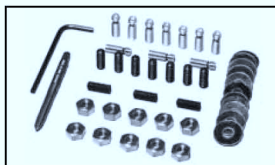
QA0035. Assembly tool for mounting miniature plugs on accelerometer cables.



UA0866. Set of 25 10-32 UNF cement studs DB0756.
UA0867. Set of 25 M3 cement studs DB0757.






UA1221. Set of 25 steel studs YS8321.



UA0125. Set of 10 insulating studs YP0150, 10 steel studs YQ2960, 10 nuts YM0414, 10 mica washers YO0534 plus 10-32 UNF tap and hexagonal key for 10-32 UNF studs.

Accelerometer Specifications Insulated Base

		
Type 4394	Type 4395	Type 4396

Dynamic				
Mounted Resonance Frequency, typical	kHz	52	37	28
Transverse Resonance Frequency, typical	kHz	15	13	9

Electrical				
Case Insulation to Ground	MΩ	> 10		

Environmental				
Base Strain Sensitivity, typical	ms ⁻² (g)/με	0.005 (0.0005)	0.01 (0.001)	0.005 (0.0005)

Physical				
Weight	gram (oz)	2.9 (0.10)	12.9 (0.46)	18.2 (0.64)
Height	mm (in)	14.0 (0.55)	21.7 (0.85)	23.7 (0.93)
Spanner Size	mm (in)	8.0 (0.31)	14.0 (0.55)	15.0 (0.59)

Accelerometer Specifications Uninsulated Base

		
Type 4397	Type 4398	Type 4399

Dynamic				
Mounted Resonance Frequency, typical	kHz	53	38	28
Transverse Resonance Frequency, typical	kHz	17	14	10

Environmental				
Base Strain Sensitivity, typical	ms ⁻² (g)/με	0.005 (0.0005)	0.02 (0.002)	0.01 (0.001)

Physical				
Weight	gram (oz.)	2.4 (0.09)	11.8 (0.42)	17.1 (0.60)
Height	mm (in)	12.4 (0.49)	19.7 (0.77)	21.7 (0.85)
Spanner Size	mm (in)	7.5 (0.30)	14.0 (0.55)	15.0 (0.59)

Common Specifications for Both Types of Accelerometers

Dynamic	Type 4394 Type 4397		Type 4395 Type 4398	Type 4396 Type 4399
	Sensitivity (axial) at 159.2 Hz, 100 ms ⁻² (10.2 g), 25°C (77°F), 4 mA	1.00 (9.807) ± 2 %		10.0 (98.07) ± 2 %
Measuring Range (peak), typical	temperature <100°C (212°F)	±7500 (765)		±750 (76)
	temperature <125°C (257°F)	±5000 (510)		±500 (51)
Frequency Range (±10%), typical ¹	Hz	1 to 25000	0.3 to 18000	1 to 14000
Maximum Transverse Response	%	< 4		

¹**Note:** The frequency range from 10 Hz to 10 kHz is measured individually and shown on the calibration chart supplied. The expanded uncertainty on this measurement is: 1.0% from 10 Hz to 2 kHz and 2.0% from 2 kHz to 10 kHz at 2σ (i.e. expanded uncertainty using a coverage factor of 2)

Common Specifications for Both Types of Accelerometers (Cont.)

Electrical

Constant Current Supply	temperature <100°C (212°F)	mA	+2 to +20		
	temperature <125°C (257°F)	mA	+2 to +10	+2 to +20	
Supply Voltage, unloaded	for full specification	V DC	+24 to +30		
	minimum (reduced specification)	V DC	+18		
Output Impedance		Ω	<100		
Bias Voltage	at 25°C (77°F), 4 mA	V	12 ±0.5		
	full temperature and current range	V	8 to 15		
Residual Noise, typical	from 1 to 22000 Hz	μV	<25	<15	<40
	equivalent acceleration	ms ⁻² (g)	<0.025 (0.0026)	<0.015 (0.0015)	<0.004 (0.0004)
Polarity (acceleration directed from base into body)			Positive		
Recovery time from Overload (2×maximum level)		μs	<20	<15	<25


Environmental

Maximum Non-destructive Shock (peak)	Axial	ms ⁻² (g)	100000 (10200)	50000 (5100)	20000 (2040)
	Transverse	ms ⁻² (g)	50000 (5100)	20000 (2040)	10000 (1020)
Temperature Range		°C (°F)	-50 to +125 (-58 to +257)		
Humidity			Welded, sealed		
Temperature Transient Sensitivity, typical		ms ⁻² /°C (g/°F)	2 (0.1)	0.2 (0.01)	0.1 (0.006)
Magnetic Sensitivity (50 Hz, 0.038T), typical		ms ⁻² (g)/T	10 (1)	20 (2)	5 (0.5)
Acoustic Sensitivity (154 dB SPL), typical		ms ⁻² (g)	0.01 (0.001)	0.005 (0.0005)	0.002 (0.0002)


Physical

Construction		Delta Shear			
Piezoelectric Material		PZ23			
Case Material	Titanium	ASTM Gr. 2			
Connector	Coaxial	M3 miniature	10-32 UNF		
Mounting Thread	Tapped center-hole	M3	10-32 UNF		
Mounting Torque	Nm (lb.in)	0.2 to 0.6 (1.8 to 5.3)	0.5 to 3.5 (4.4 to 31)		

Compliance with Standards

	CE-mark indicates compliance with: EMC Directive
Safety	EN 61010-1 and IEC 1010-1: Safety requirements for electrical equipment for measurement, control and laboratory use.
EMC Emission	EN 50081-1: Generic emission standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50081-2: Generic emission standard. Part 2: Industrial environment. CISPR 22: Radio disturbance characteristics of information technology equipment. Class B Limits. FCC Class B limits
EMC Immunity	EN 50082-1: Generic immunity standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50082-2: Generic immunity standard. Part 2: Industrial environment. Note: The above is guaranteed using accessories listed in this Product Data sheet only.
Temperature	IEC 68-2-1 & IEC 68-2-2: Environmental Testing. Cold and Dry Heat. Operating Temperature: -50 to +125°C (-58 to +257°F)
Humidity	IEC 68-2-3: 90% RH (non-condensing at 40°C (104°F))

Specifications for DeltaTron[®] Charge Converter Type 2646



Charge Input
INPUT CONNECTOR:
 10–32UNF coaxial. Used for direct attachment of 2646 to an accelerometer that has a top mounted connector. Also accepts a miniature accelerometer cable for side-by-side mounting with an accelerometer.

MAXIMUM SINUSOIDAL INPUT:
 7.5×10^3 pC peak at temperatures between –50 and +100°C (–58 and +212°F), decreasing to 5×10^3 pC at +125°C (257°F).
INPUT CAPACITANCE: >200 nF

Amplifier Response
SENSITIVITY:
 $1 \text{ mV/pC} \pm 1\%$ at 25°C (77°F) with a constant current of 4 mA.

FREQUENCY RANGE:
 0.3 Hz to 100 kHz (–10% limits)

NOISE RMS (referred to input terminated with a transducer capacitance of 1 nF):

Inherent, in 1Hz to 22kHz: $<15 \times 10^{-3}$ pC
 Density at

10Hz	0.80×10^{-3} pC/√Hz
100Hz	0.28×10^{-3} pC/√Hz
1kHz	0.12×10^{-3} pC/√Hz
10kHz	0.05×10^{-3} pC/√Hz

Electromagnetic: SpCT (50Hz, 0.038T)
RECOVERY TIME (2×FS): <15 μs

Output
OUTPUT CONNECTOR:
 10–32UNF coaxial. Used for both signal output and power input through a single coaxial cable.
PHASE (output referred to input): Inverted
OUTPUT IMPEDANCE: <100 Ω

Power Supply
CONSTANT CURRENT: +2 to +20 mA
UNLOADED SUPPLY VOLTAGE:

+24 to +30 V (minimum: +18 V with reduced specification)
BIAS VOLTAGE:
 $+12 \pm 0.5 \text{ V}$ at 4 mA and 25°C. For full temperature and current range, the bias voltage range is +8 to +15 V.

Environmental
TEMPERATURE RANGE:
 –50 to +125°C (–58 to +257°F). Sensitivity temperature coefficient is within $\pm 0.03\%/^{\circ}\text{C}$ ($\pm 0.016\%/^{\circ}\text{F}$).
HUMIDITY:
 0 to 90%RH (non-condensing) without extra sealing
VIBRATION INDUCED NOISE:
 1×10^{-3} pC/ms² (0.01 pC/g)

MAXIMUM PHYSICAL SHOCK:
 50 ms^{-2} (5100 g) peak
MAXIMUM INPUT WITHOUT DAMAGE:
 50000 pC
CASE MATERIAL: Titanium ASTM Gr. 2

Dimensions and Weight
Diameter: 13.5mm (0.53in)
Height: 16.0mm (0.64in)
Weight: 5.3g (0.19oz.)

Note: All values are typical at 25°C (77°F), unless measurement uncertainty is specified.

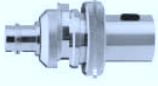
COMPLIANCE WITH STANDARDS:

CE	CE-mark indicates compliance with EMC Directive.
Safety	EN 61010–1 and IEC 1010: Safety requirements for electrical equipment for measurement, control and laboratory use.
EMC Emission	EN 50081–1: Generic emission standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50081–2: Generic emission standard. Part 2: Industrial environment. CISPR 22: Radio disturbance characteristics of information technology equipment. Class B Limits. FCC Rules, Part 15: Class B limits.
EMC Immunity	EN 50082–1: Generic immunity standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50082–2: Generic immunity standard. Part 2: Industrial environment. Note 1: The above is guaranteed using accessories listed in this Product Data sheet only. Note 2: Sensitivity to RF common-mode, injected to signal line (in accordance with EN 50082–2) $<70 \mu\text{V}$ (13 dB), with the converter connected directly to the accelerometer $<900 \mu\text{V}$ (35 dB), with a cable between the converter and the accelerometer
Temperature	IEC 68–2–1 & IEC 68–2–2: Environmental Testing, Cold and Dry Heat. Operating Temperature: –50 to +125°C (–58 to +257°F)
Humidity	IEC 68–2–3: Damp Heat: 90% RH (non-condensing at 40°C (104°F))

Ordering Information

<p>Type 2646 DeltaTron[®] Charge Converter Includes the following accessories: JJ0032: Cable Extension Connector (10–32UNF) 2 × YJ0606: O-Ring</p>		
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--

Specifications for DeltaTron[®] Power Supply ZG0328

 <p>SHORT-CIRCUIT CURRENT: 3 ±0.9 mA UNLOADED SUPPLY VOLTAGE: 27 V DYNAMIC IMPEDANCE: >100 kΩ NOISE RMS (inherent, Lin. 1 Hz to 22kHz): <50 nA OUTPUT: Transducer signal connected to pin 4 of the microphone socket TRANSDUCER CONNECTOR: BNC SUPPLY CONNECTOR: Standard Brüel & Kjær 7-pin microphone plug</p> <p>Environmental TEMPERATURE RANGE: -10 to +55°C (+14 to +131°F) HUMIDITY: 0 to 90%RH (non-condensing) CASE MATERIAL: Nickel-coated Brass</p> <p>Dimensions and Weight Diameter: 26.5 mm (1.04 in.) Length: 52.5 mm (2.07 in.) Weight: 48.5g (1.707 oz.)</p> <p>Note: All values are typical at 25°C (77°F), unless measurement uncertainty is specified.</p>	COMPLIANCE WITH STANDARDS:														
	<table border="1"> <tr> <td>CE</td> <td>CE-mark indicates compliance with EMC Directive.</td> </tr> <tr> <td>Safety</td> <td>EN 61010-1 and IEC 1010-1: Safety requirements for electrical equipment for measurement, control and laboratory use.</td> </tr> <tr> <td>EMC Emission</td> <td>EN 50081-1: Generic emission standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50081-2: Generic emission standard. Part 2: Industrial environment. CISPR 22: Radio disturbance characteristics of information technology equipment. Class B Limits. FCC Rules, Part 15: Class B limits.</td> </tr> <tr> <td>EMC Immunity</td> <td>EN 50082-1: Generic immunity standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50082-2: Generic immunity standard. Part 2: Industrial environment. Note 1: The above is guaranteed using accessories listed in this Product Data sheet only. Note 2: Sensitivity to magnetic fields (30 A/m, 50 Hz): 80 nA</td> </tr> <tr> <td>Temperature</td> <td>IEC 68-2-1 & IEC 68-2-2: Environmental Testing. Cold and Dry Heat. Operating Temperature: -10 to +55°C (+14 to +131°F) Storage Temperature: -25 to +70°C (+13 to +158°F)</td> </tr> <tr> <td>Humidity</td> <td>IEC 68-2-3: Damp Heat: 90% RH (non-condensing at 40°C (104°F))</td> </tr> <tr> <td>Mechanical</td> <td>Non-operating IEC 68-2-6: Vibration: 0.3 mm, 20 m/s², 10-500 Hz IEC 68-2-27: Shock: 1000 m/s² IEC 68-2-29: Bump: 4000 bumps at 400 m/s²</td> </tr> </table>	CE	CE-mark indicates compliance with EMC Directive.	Safety	EN 61010-1 and IEC 1010-1: Safety requirements for electrical equipment for measurement, control and laboratory use.	EMC Emission	EN 50081-1: Generic emission standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50081-2: Generic emission standard. Part 2: Industrial environment. CISPR 22: Radio disturbance characteristics of information technology equipment. Class B Limits. FCC Rules, Part 15: Class B limits.	EMC Immunity	EN 50082-1: Generic immunity standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50082-2: Generic immunity standard. Part 2: Industrial environment. Note 1: The above is guaranteed using accessories listed in this Product Data sheet only. Note 2: Sensitivity to magnetic fields (30 A/m, 50 Hz): 80 nA	Temperature	IEC 68-2-1 & IEC 68-2-2: Environmental Testing. Cold and Dry Heat. Operating Temperature: -10 to +55°C (+14 to +131°F) Storage Temperature: -25 to +70°C (+13 to +158°F)	Humidity	IEC 68-2-3: Damp Heat: 90% RH (non-condensing at 40°C (104°F))	Mechanical	Non-operating IEC 68-2-6: Vibration: 0.3 mm, 20 m/s ² , 10-500 Hz IEC 68-2-27: Shock: 1000 m/s ² IEC 68-2-29: Bump: 4000 bumps at 400 m/s ²
CE	CE-mark indicates compliance with EMC Directive.														
Safety	EN 61010-1 and IEC 1010-1: Safety requirements for electrical equipment for measurement, control and laboratory use.														
EMC Emission	EN 50081-1: Generic emission standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50081-2: Generic emission standard. Part 2: Industrial environment. CISPR 22: Radio disturbance characteristics of information technology equipment. Class B Limits. FCC Rules, Part 15: Class B limits.														
EMC Immunity	EN 50082-1: Generic immunity standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50082-2: Generic immunity standard. Part 2: Industrial environment. Note 1: The above is guaranteed using accessories listed in this Product Data sheet only. Note 2: Sensitivity to magnetic fields (30 A/m, 50 Hz): 80 nA														
Temperature	IEC 68-2-1 & IEC 68-2-2: Environmental Testing. Cold and Dry Heat. Operating Temperature: -10 to +55°C (+14 to +131°F) Storage Temperature: -25 to +70°C (+13 to +158°F)														
Humidity	IEC 68-2-3: Damp Heat: 90% RH (non-condensing at 40°C (104°F))														
Mechanical	Non-operating IEC 68-2-6: Vibration: 0.3 mm, 20 m/s ² , 10-500 Hz IEC 68-2-27: Shock: 1000 m/s ² IEC 68-2-29: Bump: 4000 bumps at 400 m/s ²														

Ordering Information

ZG 0328	DeltaTron [®] Power Supply
Includes the following accessories:	
JP 0145:	10-32 UNF to BNC adaptor

Brüel&Kjær reserves the right to change specifications and accessories without notice

Brüel & Kjær 

B.3 LMS SCADAS Mobile SCM01

LMS product information

LMS SCADAS Mobile

LMS/SCM/SCM01/160507



One Slot Mainframe [SCM01]

Frame

The SCM01 is a very compact front-end that accommodates two tachometer inputs, two generator outputs and up to 8 input channels. Its small size, low weight and battery operation makes it the ideal portable sound and vibration analyzer.

SCADAS Mobile uses a high-speed serial Ethernet interface to the host. With a maximum throughput of over 3.8Msamples/sec, the SCADAS Mobile offers full bandwidth throughput to the host for all channels.

Measure anywhere

Because of its robustness, exceptional environmental specifications, flexible power requirements and wide operating temperature range, the SCADAS Mobile can be employed in virtually any mobile test campaign.

Ultra quiet, no fan cooling

Having no cooling fan, the SCADAS Mobile is the ideal system for critical acoustic measurements. The combination of three advanced techniques eliminates fans:

- The input modules are based on low power components, reducing power consumption to less than 0.5W per channel.
- Heat is dissipated via an integrated cooling block on the rear of the frame. The heat from the printed circuit boards is transferred via the back plane connectors and via cold walls.
- An intelligent power management system, monitoring system activity, sets SCADAS Mobile in power-down mode when no measurements are done.

Battery operation

The SCM01 includes a built-in battery for mains independent operation of 3 hours. The battery is charged automatically when external power is connected.

Features and benefits

- Ultra compact size
- Rugged housing for rough environments
- Wide operational temperature range from -10°C to +55°C
- 3.8Msamples/second throughput via Ethernet interface
- Plug&Play operation
- Built-in battery for 3 hours mains independent operation
- Ultra quiet, no fan cooling
- Accommodates up to 8 input channels
- Wide range DC power supply
- On board dual tachometer input
- On board dual signal generator output

[1] © 2007 LMS International
Specification subject to change without notice



Specifications SCM01

Number of slots:

SCM01 has two slots; one slot is reserved for the system controller

Power input:

Auto ranging DC input from 9VDC to 36VDC; AC operation uses an external mains adapter

Power management:

ON/OFF switch, automatic sleep mode

Power consumption:

15W maximum

Internal battery:

Rechargeable Li-ion battery; rating 21.6V-1.6Ah; charge time is five hours @ 0.5A when the SCM01 is switched on, and two hours @ 1A when it is switched off; the battery is charged automatically when external power is applied; charging during measurements limits temperature range to 40°C; charging can be disabled; autonomous operation time is 3 hours minimum.

Cooling:

Heat conduction via printed circuit board connectors; sides of the printed circuit boards are cooled via cold walls connected to cooling block at the rear

Tacho input:

- Dual tacho input to support signature or order tracking applications
- Tacho frequency from 5Hz to 17kHz
- Input range from 200mV to 40V

Signal generator:

- Two short circuit protected single ended outputs via grounded SMB socket
- 24-bit bit-stream DAC
- Dynamic range is 110dB referred to maximum output signal for 20kHz bandwidth
- Interpolation filters are a combination of analog reconstruction filters and digital interpolation filters with noise shaping
- Flatness up to 20kHz within 0.1dB

Random output

Uncorrelated base-band noise with crest factor of 3.5 in continuous or burst mode

Sine output

Sine with amplitude and phase control; swept sine with amplitude and sweep speed control

Output level

Maximum output voltage of ±10V

Ethernet interface:

Ethernet interface with 100Mbit per second transfer speed gives a maximum throughput rate of 3.8Msamples of 24 bit per second

Dimensions:

Width: 203 mm
Height: 58 mm
Depth: 260 mm

Weight:

2.5 kg.

Temperature:

Operating: -10°C to +55°C
Storage: -20°C to +70°C

Relative humidity:

Up to 95% non-condensing

Vibration MIL-STD-810F:

20-2000Hz (random): 7.7g_{rms}

Shock MIL-STD-810F:

60g_{pk} applying an 11ms sawtooth shock pulse; 3 shocks per direction


Ordering information:

- SCM01: SCADAS Mobile mainframe with one free slot, including battery, AC/DC power adapter, DC power cable, Ethernet Carbus host interface and a 2m. UTP cable
- SCM-OPTION02: GPS option, including active antenna



LMS SCADAS Mobile is a product of LMS Instruments

The SCM01 mainframe complies with the standards:
EN61010
EN50081-1
EN50082-1



B.4 Modulo di Ingresso a 8 canali

LMS product information

LMS SCADAS Mobile

LMS/SCM/V8/160907



Eight-channel Input Module [V8 / VS8]

V8 input module

The V8 is an LMS SCADAS Mobile input module, supporting full voltage and ICP® signal conditioning and signal processing for eight channels. The V8 offers the unique combination of ultra-low power consumption with high performance 24-bits analog to digital conversion.

VS8 has the same functionality as V8, with additional support for AES/EBU or SPDIF digital audio sources.

Signal conditioning

Each input channel has a voltage amplifier with an input range from $\pm 100\text{mV}$ to $\pm 12\text{V}$, and includes ICP power supply to the transducers. The V8 has an ICP cable check circuit to detect an open loop in the sensor cable; errors are indicated through a front-panel LED for optimum user feedback and simultaneously transferred to the host as well. For acoustic applications, an additional 7Hz AC coupling reduces low frequency signals that might otherwise overload the input amplifier. The overload LED indicates both analog overloads, detected at the input amplifier, and digital overloads, detected by digital signal processor. The V8 supports smart sensors according to IEEE 1451.4. Without changing cables, LMS SCADAS Mobile can read the Transducer Electronic Data Sheet (TEDS) with essential information including sensor type, sensitivity, calibration date, coordinates etc.

Analog to digital conversion

The V8 uses low-power high performance 24-bit sigma-delta analog to digital converters. A 4-pole analog anti-alias filter precedes each ADC. Running at 102.4kHz, the V8 supports both vibration and acoustic applications. A wide range of digital decimation filters reduces bandwidth in steps of 2 and 2.5.

Signal processing

The V8 is equipped with a low-power high-performance DSP56311 and 512Kx24-bit memory for digital filtering, calibration, overload handling, real-time order tracking and one-third octave filtering, independent of the number of channels.

Features and benefits

- 8 input channels via SMB connectors
- Smart sensor support
- Analog anti-alias filter
- Analog and digital overload detection with LED indication on front-panel
- 24-bit analog to digital conversion with 46kHz bandwidth maximum
- Built-in calibration for improved specifications over a longer period
- Real-time order tracking with overlap
- Real time $1/3^{\text{rd}}$ octave analysis
- Time domain A-weighting filter
- VS8: additional support of AES/EBU and SPDIF digital audio formats for all standard audio sample rates

[1] © 2007 LMS International
Specification subject to change without notice



Specifications V8 and VS8

Input function:

Single ended voltage input via grounded SMB socket

Input voltage:

±100mV, ±316mV, ±1V, 3.16V, ±12V

Maximum input voltage:

28Vrms continuously

Input impedance:

1MΩ/50pF

Input coupling:

DC, AC, ICP in single ended mode

AC coupling:

0.48Hz ±6%, 7Hz ±2%

Supply for ICP sensors:

2.8mA±10% from 28V source

ICP cable check:

Checking the sensor bias voltage continuously for open loop and short circuit with indication by LED in the front panel

Overload detection and indication:

Analog overload detection at the input is combined with digital overload detection after the ADC; overloads are indicated on the front panel LED and transmitted to the host

Digital audio interface (VS8):

Channel 7 and 8 can be set to either analog or digital mode for support of AES/EBU and SPDIF formats (one stereo channel) with HMS data; accurate sample rate conversion provides an alias suppression of 125dB; all standard audio sample rates (32kHz, 44.1kHz, 48kHz, 96kHz) are supported

Ordering information:

SCM-V8: LMS SCADAS Mobile V/ICP/TEDS 8-channel 24-bit input module, including SCM-CAS01 cable adapter set

SCM-VS8: LMS SCADAS Mobile V/ICP/TEDS 8-channel 24-bit input module with digital audio support, including SCM-CAS01 cable adapter set

Dynamic range

Input range	Signal to Noise Ratio	Spurious Free Floor
12V	105dB	-138dB
3.16V	105dB	-138dB
1V	105dB	-138dB
316mV	100dB	-135dB
100mV	90dB	-125dB

Overall dynamic range with gain: 165dB

Crosstalk:

Between any two channels: -116dB typical, independent of range settings

Accuracy (102.4kHz sample rate):

At 1kHz better than ±0.2% between 5°C and 40°C

Residual Offset (102.4kHz sample rate):

< ±0.1% between 5°C and 40°C

Calibration:

Factory gain & offset calibration factors are stored in non-volatile RAM

Analog anti-alias filter:

4-pole Equal Time Delay filter with 80kHz cut-off frequency and 0.01dB flatness

Analog to digital conversion:

24-bit ΣΔ ADC with a maximum sampling frequency of 102.4kHz; 150dB/oct digital filter with 100dB alias protection provides a useful bandwidth of 46kHz

Total Harmonic Distortion:

Better than -100dB @ 3dB below full scale

Smart sensor interface:

Full support of IEEE 1451.4 smart sensors to read out Transducer Electronic Data Sheet (TEDS)

Phase match:

Better than 0.2° @ 10kHz with 12V input range

DSP section:

DSP 56311 with 512Kx24-bit SRAM

Decimation filter

Reduces bandwidth prior to signal processing; bandwidth can be down-sampled in steps of 2 and 2.5.

Signal processing

1. Fixed sampling:

Continuous time data output; bandwidth selection via the decimation filters, including support for multiple sample rates

2. Order tracking:

Order tracking processing with up to 10kHz order frequency

3. Octave filters

Time domain third octave filters with maximum band of 20kHz according to ANSI S1.11-2004 class 1 and IEC 61260:1995 class 1; time domain A-weighting according to ANSI S1.42 can be switched on or off

Dimensions:

One 20 mm high SCADAS Mobile slot

Power consumption:

During normal operation, no overload and ICP supply switched on: 3.8W



LMS SCADAS Mobile is a product of LMS Instruments

When installed in SCM01 or SCM05, V8 and VS8 comply with the standards: EN61010 EN50081-1 EN50082-1	CE
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------

Appendice C

Alcune Considerazioni Operative per l'Analisi di Segnali monodimensionali

C.1 Introduzione

Uno dei problemi più rilevanti tutt'oggi oggetto di ricerca riguarda la determinazione di tutti quei dati sperimentali necessari per procedere alla progettazione di organi rotanti e non di sistemi meccanici, soprattutto nelle condizioni estreme di esercizio (alte velocità, elevate temperature, ecc.) tanto più se vengono impiegati nuovi materiali.

A tal fine per ottenere utili informazioni si procede a prove sperimentali condotte allo scopo di rilevare il manifestarsi di incipienti rotture o di deterioramento superficiale. In questi casi è prevista la registrazione delle vibrazioni posizionando opportunamente una serie di accelerometri. Fatta salva la frequenza minima di campionamento dei segnali accelerometrici, che deve essere almeno il doppio della sua frequenza massima (T. di Nyquist-Shannon) (ad es., $2 \times \text{frequenza di ingranamento}$), purtroppo ogni registrazione è affetta da rumore provocato da fenomeni casuali non correlati al problema da indagare. Per ridurre il rumore, sarebbe opportuno effettuare delle medie temporali "sincronizzate", eseguite cioè in modo che l'inizio di ogni serie temporale di campioni corrisponda ad una stessa posizione angolare del componente oggetto di indagine. Tale tecnica di analisi è possibile effettuarla se oltre agli accelerometri, viene impiegato anche un *pick-up* per la rilevazione del segnale tachimetrico. Un *pick-up* magnetico grazie al passaggio di opportuni marcatori posti, ad esempio, sull'albero dell'organo monitorato, permettendo di misurare la velocità di rotazione dello stesso, consente di determinarne la posizione angolare. All'interno di un intervallo

individuato fra due marcatori successivi la velocità angolare può essere considerata costante. Tale ipotesi è tanto più realistica quanto più fitte sono le divisioni previste per il singolo giro, ovvero, quanto più numerosi risultano i marcatori rilevati dal pick-up. Pertanto, poiché il segnale tachimetrico acquisito insieme a quello accelerometrico, consente di suddividere quest'ultimo in "finestre" relative ad un giro completo dell'organo monitorato, in ogni finestra sono presenti un numero costante di punti campionati.

In assenza di un dispositivo dedicato a sincronizzare l'inizio dell'acquisizione con una ben precisa posizione angolare si può considerare costante e nota la velocità angolare. Quindi fissata la frequenza di campionamento, possiamo calcolare la durata e la dimensione di ciascuna delle tracce da mediare, tutto questo nell'ipotesi che non vi siano significative fluttuazioni della velocità angolare.

E' altresì noto che possiamo ottenere informazioni importanti sul comportamento meccanico, ad esempio, delle ruote dentate e segnali precursori della loro rottura attraverso l'osservazione dell'ampiezza dello spettro nell'intervallo che corrisponde alla frequenza di ingranamento della ruota monitorata. In tal caso è possibile verificare la eventuale presenza di bande laterali, che corrispondono a modulazioni prodotte da un difetto che si presenta ad intervalli di tempo regolari.

In alcuni casi può essere utile agire sul segnale campionato filtrando le ampiezze dello spettro corrispondenti a frequenze ben determinate (una volta nota la frequenza di rotazione ed il numero dei denti). In altri casi può essere utile selezionare regioni spettrali "piatte" per controllare l'insorgenza di rumore a largo spettro nelle bande prive di picchi.

Molto impiegato è il metodo che consiste nell'ottenere una successione di trasformate di Fourier relative a intervalli di tempo consecutivi, dopo avere applicato al segnale una finestra temporale di durata opportuna di convoluzione (box, triangolare, Hamming, Hanning).

Si possono utilizzare anche altri tipi di trasformate, anch'esse adatte all'analisi di segnali digitalizzati, quali la trasformata di Wigner-Ville o altre distribuzioni tempo-frequenza.

È possibile anche eseguire un'analisi in frequenza con tecniche stocastiche per la determinazione della densità spettrale di potenza.

Nell'ambito della presente ricerca informazioni importanti sono state ricavate dall'applicazione della trasformata wavelet integrata anche con tecniche afferenti alla teoria del caos. Osserviamo che, poiché all'asse dei tempi corrisponde (a velocità angolare costante) la posizione dei vari denti, una variazione dell'ampiezza della trasformata wavelet potrebbe dare indicazioni sul cedimento di un ben determinato dente. A tal proposito si è verificato che l'indicatore β potrebbe essere una tecnica molto affidabile per effettuare una diagnosi tempo-dominio. Infatti la modulazione di fase, da essa generata, è molto sensibile alle imperfezioni del rotismo.

Ricordiamo che lo spettro in frequenza di un ingranaggio (*Meshing Frequency*) sano risulta dominato dalla presenza della frequenza di ingranamento e delle sue armoniche (ad es., se una ruota dentata è provvista di 11 denti e la sua velocità massima di rotazione è di 41.67Hz (2500rpm) allora la frequenza di ingranamento è data da $11 \times 41.67 \approx 458$ Hz, la II armonica è data da 916Hz, la III armonica è data da 1374Hz e così di seguito).

In genere, si osserva un certo numero di bande laterali attorno a queste frequenze caratteristiche (frequenza ingranamento, armoniche, ecc.). Esse sono originate da fenomeni di modulazione in ampiezza e fase, originate da difetti introdotti in fase costruttiva e di montaggio. Poiché queste rappresentano delle componenti regolari dello spettro, non possono essere utilizzati per la diagnostica. Pertanto è indispensabile ricorrere a tecniche di filtraggio di tali frequenze in modo da eliminarle dallo studio.

L'operazione di filtraggio consiste nel porre uguali a zero le componenti dello spettro all'interno di un intervallo di frequenze selezionato. Successivamente

al filtraggio, il segnale viene riportato nel dominio del tempo e analizzato con metodi statistici (in genere vengono selezionate regioni spettrali inizialmente piatte), meglio se tale filtraggio viene compiuto sulla media sincrona del segnale.

Infatti, la presenza di un difetto localizzato su un singolo dente di una ruota (es. fessura), introduce una variazione di breve durata nel segnale raccolto dagli accelerometri, mentre danneggiamenti maggiormente distribuiti (imperfezioni geometriche ed usura) danno luogo a modifiche del segnale che si estendono su un intero periodo di rivoluzione della ruota in esame.

Le metodologie di analisi applicabili al segnale raccolto dai sensori per evidenziarne lo sviluppo di un danno possono essere eseguite nel dominio del tempo, della frequenza o di entrambi.

In ogni caso esse vengono svolte sul segnale opportunamente "mediato" e non su quello "grezzo" uscente dagli accelerometri al fine di eliminare il rumore e le vibrazioni aperiodiche .

La tecnica che viene effettuata per eseguire tale operazione è detta media sincrona. Essa consiste nell'effettuazione della media aritmetica ovvero geometrica dei valori campionati del segnale rilevati ad ogni giro della ruota dentata a mezzo segnale tachimetrico.

In questo modo, all'aumentare del numero dei campioni, si può annullare il contributo delle fluttuazioni della velocità di rotazione attorno al valore in esame e ciò rende possibile ottenere sia l'andamento temporale del segnale accelerometrico mediato, sia gli eventuali spettri nel dominio della frequenza.

Per definizione la media sincrona di una funzione $x(t)$ è data da

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(t + nT_R)$$

dove T_R è il periodo di sincronizzazione ed N il numero delle medie eseguite.

Tale metodologia consente di eliminare l'influenza del rumore e permette di evidenziare alcune componenti del segnale con una frequenza pari ad un valore prefissato o ad un suo multiplo consentendo l'individuazione di una loro eventuale modifica.

Operando un filtraggio sul segnale prodotto dalla media sincrona è possibile ottenere un segnale, detto "residuo", che ha la caratteristica di essere depurato della frequenza di ingranamento e delle sue armoniche. In questo modo risulta più semplice evidenziare le variazioni di segnale prodotte dallo sviluppo di un danno.

Il segnale residuo $r(t)$ è ottenuto come

$$r(t) = \bar{y}(t) - g(t)$$

dove $g(t)$ è la parte relativa alla frequenza che si vuole eliminare.

C.2 Descrizione dei principali indicatori

Generalmente si impiegano tre tipologie di segnali: *raw* (grezzi), *residual* (residuo) e *difference* o *differential* (differenza).

C.3 Nota Generale

Nel prosieguo si definiscono i seguenti segnali sincroni mediati temporalmente (TSA - Time Synchronous Average):

1. Residuo (r), ottenuto tramite filtraggio della frequenza di ingranamento (*gear mesh frequency*) e di tutti i suoi multipli (armoniche di ordine superiore), nonché della frequenza di rotazione dell'albero (*driveshaft frequency*) e dei suoi multipli (seconde armoniche);
2. Differenza (d), ottenuto tramite filtraggio delle frequenze di ingranamento, di tutti i suoi multipli e di alcune bande laterali (*sidebands*).

Comunque, alcuni autori, lasciano le seconde armoniche relative alla *driveshaft frequency* nel segnale residuo ovvero rimuovono dal segnale differenza soltanto la *sideband* del secondo ordine.

Infatti, è stato dimostrato come, l'effetto di modulazione introdotto da difetti localizzati, si manifesti con bande laterali di ampiezza limitata ma in una banda larga, mentre la modulazione introdotta dai difetti distribuiti, si manifesta con poche coppie significative di bande laterali di ampiezza maggiore.

In genere le due componenti che costituiscono il segnale raw, uniforme e residua, forniscono informazioni su anomalie/danni non localizzati, o sulla generica "rumorosità" del segnale (scuffing), mentre la componente residua dà informazioni su anomalie/danni localizzati (bending, spalling).

C.4 Indicatori morfo-dinamici

Gli indicatori che seguono sono applicabili sia al segnale differenza e/o residuo sia, in generale, ai coefficienti wavelet relativi alle varie scale estratti da qualsivoglia tipologia di segnali, al limite anche quelli grezzi. Ricordiamo che, nella presente ricerca, ogni segnale è assimilabile ad una successione di punti (detta anche serie temporale).

C.5 Periodogramma

Si è costruito un indice *ad hoc*, che indichi la co-presenza di due o più frequenze tra loro non proporzionali nell'ambito del periodo di osservazione. Il relativo diagramma è stato chiamato periodogramma.

Per il calcolo di tale indice si procede in tale maniera

$$W(T) = \frac{1}{2} (A^2 + B^2) \quad (C.1)$$

con

$$A = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cos \frac{2\pi}{T} i \quad (C.2)$$

e

$$B = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sin \frac{2\pi}{T} i, \quad (C.3)$$

dove

n , numero di punti costituenti la successione

x_i , elementi della successione

T , lunghezza del periodo.

L'andamento del diagramma consente di stabilire in prima approssimazione l'esistenza o meno di un periodo significativo, "resistente", cioè, alla varianza del segnale.

C.6 Fattore di forma

Il fattore di forma è definito

$$0 \leq K = \frac{H_{media}}{\bar{H}} \leq 1 \quad (C.4)$$

dove

$\bar{H} = H_{max} - H_{min}$, distanza del picco più alto dalla valle più profonda

H_{media} è la retta media di compenso, cioè quella retta che scelta come asse delle x rende minima la somma dei quadrati delle deviazioni del profilo del segnale da essa, cioè tale da annullare l'integrale

$$\int_0^l y dx = 0, \quad (C.5)$$

dove y è il segnale in studio ed l è la sua lunghezza (Fig. C.1).

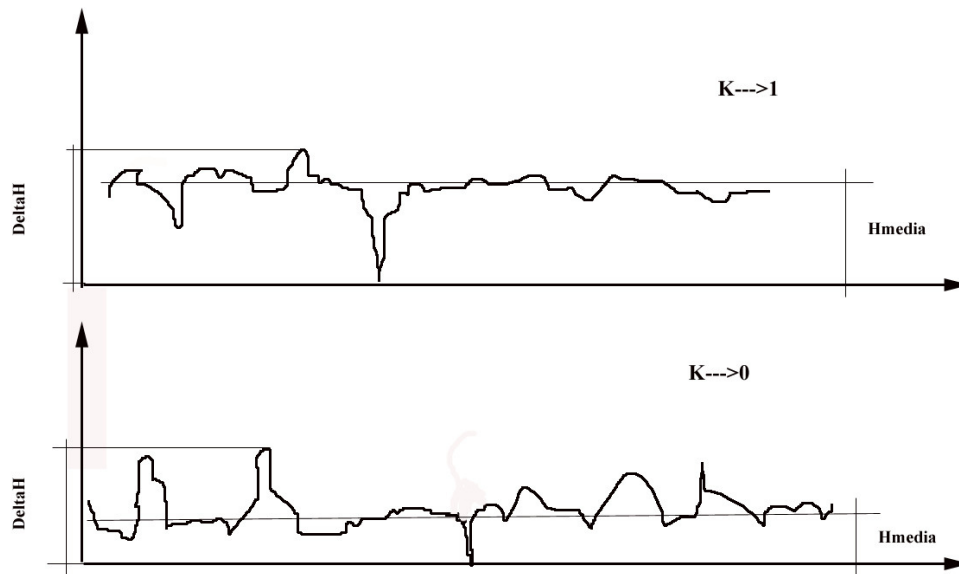


Fig. C.1

Il metodo dei minimi quadrati consente di approssimare mediante una serie di funzioni una serie di dati con errore quadratico minimo; quando la serie di funzioni utilizzata impiega polinomi di grado non superiore al primo si afferma che la curva di regressione è lineare.

Sia la serie di n punti

$$\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\} \quad (C.6)$$

vogliamo determinare la retta $y = mx + q$ tale che la somma degli scarti quadratici dai punti della serie sia minima.

Lo *scarto quadratico* è definito pari a $(y_i - y(x_i))^2$, ovvero la differenza tra il valore reale della serie e quello stimato dalla retta di regressione.

Il *residuo* è definito come la somma degli scarti quadratici medi:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2 = (y_1 - (mx_1 - q))^2 + \dots + (y_n - (mx_n - q))^2 \quad (C.7)$$

ed $y(x_i) = mx_i + q$ è il valore stimato dalla retta di regressione lineare nel punto x_i .

La soluzione è data dal sistema

$$\begin{cases} nq + m \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ q \sum_{i=1}^n x_i + m \sum_{i=1}^n (x_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

dove le uniche variabili sono m e q , mentre tutti gli altri termini sono numeri calcolabili dai dati in ingresso.

Nella (C.8)

n , numero dei dati in ingresso

$\sum_{i=1}^n x_i$, somma delle ascisse dei punti noti

$\sum_{i=1}^n (x_i)^2$, somma dei quadrati delle ascisse dei punti noti

$\sum_{i=1}^n y_i$, somma delle ordinate dei punti noti

$\sum_{i=1}^n x_i y_i$, somma dei prodotti delle ascisse per le ordinate dei punti noti.

La soluzione del sistema (C.8) è quindi data da

$$\begin{cases} m = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n (x_i)^2} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \sum_{i=1}^n y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n (x_i)^2} \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Da qui la retta di regressione cercata:

$$y = mx + q . \quad (\text{C.10})$$

C.7 Indice quadratico di oscillazione

L'indice quadratico di oscillazione è definito come segue:

$$^2O = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1})^2} .$$

Tale indice fornisce indicazioni circa il fenomeno oscillante, cioè la dinamica esibita dal segnale, che è compreso in un intervallo di ampiezza finita in quanto, per ipotesi, è limitato. Ne consegue che tutta la dinamica si riduce a movimenti oscillatori più o meno ampi, più o meno regolari; da ciò discende la ragione principale dell'impiego di tale indice per l'analisi dei segnali accelerometrici, cioè vibrazionali. Al di là dei fatti contingenti che lo fanno variare con una certa dinamica, il fenomeno oscillatorio possiede una sua "potenza" oscillatoria che è legata alla strettezza del legame autoregressivo tra i valori della successione. Un valore dell'oscillazione particolarmente elevato fa pensare ad un sistema in cui tutte le energie dinamiche disponibili vengono "sfruttate" al massimo. Le conseguenze di un tale assetto dinamico sono diverse a seconda del caso cui si riferiscono che possono riguardare situazioni di massimo pericolo o meno. In altre parole è come se ogni fenomeno temporale, avesse un particolare ritmo interno che produce in modo sufficientemente stabile e caratterizzante movimenti oscillatori. Questo fatto potrebbe consentire, se esteso ad un gran numero di osservazioni, di individuare classi di fenomeni tipizzati da una particolare misura dell'indice. Tale misura, per la sua notevole stabilità al variare delle osservazioni, potrebbe suggerire un sistema di classificazione per insiemi di fenomeni di natura quanto mai eterogenea che vengono unificati dai responsi ottenuti dall'indice. Vale a dire che ogni fenomeno ha una sua intima

ragione d'essere, che si manifesta poi nella sua dinamica oscillante, che potrebbe, nell'indice studiato, trovare interessanti spiegazioni.

C.8 Indice di sincronia

Siano due segnali x, y , si è definito indice di sincronia e lo si è indicato con ρ il rapporto

$$-1 \leq \rho = \frac{\sum_{i=1}^k a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2 \sum_{i=1}^k b_i^2}} \leq 1$$

dove si è supposto un sistema di ascisse comune tale che $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_k$ e dove

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_1 + y_k}{x_k - x_1} \right)$$

$$a_{i+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i-1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right), (i = 1, 2, \dots, k-2)$$

$$a_k = \frac{1}{2} \left(\frac{y_k - y_1}{x_k - x_1} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right).$$

Lo stesso, adattato, vale per i coefficienti b_i .

C.9 Curtosi

La curtosi (kurtosis), nel linguaggio della statistica, è un allontanamento dalla normalità distributiva, rispetto alla quale si verifica un maggiore "appiattimento" (distribuzione platicurtica) o un maggiore "allungamento" (distribuzione leptocurtica). La più nota misura della curtosi è l'indice di Fisher,

ottenuto facendo il rapporto tra il momento centrato di ordine 4 (m_4) e la varianza al quadrato (m_2^2)

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3$$

dove

$$\beta_2 = \frac{m_4}{m_2^2}$$

è l'indice di curtosi, in cui m_4 e m_2 sono rispettivamente il momento centrale di ordine 4 e 2.

Una definizione matematica è la seguente

$$Kurt = \frac{N \sum_{i=1}^N (s_i - \bar{s})^4}{\left(\sum_{i=1}^N (s_i - \bar{s})^2 \right)^2}$$

dove

N è il numero di punti del segnale s

s_i è l' i -mo punto del segnale.

Possiamo dire che la curtosi è il quarto momento centrale del segnale, normalizzato rispetto al quadrato della varianza.

Nel caso di una variabile casuale normale, $\beta_2 = 3$, così che il coefficiente di curtosi γ_2 risulta pari a zero.

Allora, in sintesi, se il coefficiente di curtosi è (Fig. C.2)

- >3 la curva si definisce leptocurtica, cioè più "appuntita" di una normale;

- <3 la curva si definisce platicurtica, cioè più "piatta" di una normale;
- $=3$ la curva si definisce normocurtica (o mesocurtica), cioè "piatta" come una normale.

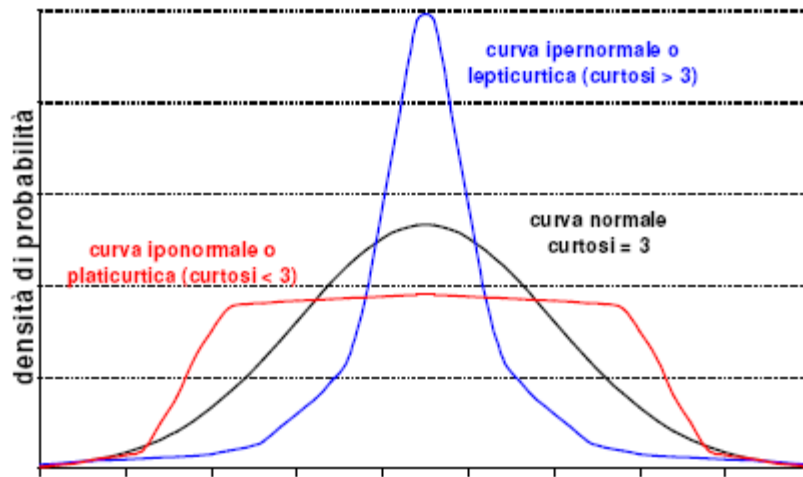


Fig. C.2

Il calcolo del coefficiente di curtosi ha senso solo nelle distribuzioni unimodali.

Siccome β_2 e γ_2 vengono calcolate facendo lo scarto dalla media alla quarta potenza, valori equidistanti dalla media (simmetrici rispetto alla media) contribuiscono con lo stesso *peso* mentre valori distanti dalla media sono molto più "pesanti" di quelli prossimi alla media, cosicché distribuzioni "larghe" producono β_2 e γ_2 elevati.

Il coefficiente di curtosi (così come quello di simmetria), non rappresenta una buona stima del corrispondente parametro della popolazione se calcolato su piccoli campioni. Ciò nonostante, anche in presenza di piccoli campioni, valori elevati di tali indicatori devono far insorgere nel ricercatore il dubbio che le eventuali ipotesi di normalità non siano verificate.

Il valore dell'indice corrispondente alla distribuzione normale (gaussiana) è 0 (qualora si utilizzi l'indice mostrato che, come si vede, è centrato sullo zero

poiché viene sottratto 3). E' possibile che alcuni indici non siano centrati sullo zero e quindi il valore ottenuto nel caso di normalità è 3 (così come mostrato nella figura precedente).

Come già detto, l'indice di curtosi è uno degli indici relativi alla forma di una distribuzione, che costituisce una misura dello "spessore" delle code di una funzione di densità, ovvero il grado di "appiattimento" di una distribuzione. L'interesse per questo indice è dato dal fatto che lo "spessore" delle code influenza il comportamento di diverse statistiche.

Benché sia stato evidenziato che non c'è una relazione tra il grado di appiattimento e l'indice di curtosi (si veda oltre), (Irving Kaplansky, nel 1945 in "A common error concerning Kurtosis") è rimasto in uso tale terminologia.

Pertanto la curtosi è un indicatore statistico che permette di definire il carattere impulsivo di un segnale operando in corrispondenza di un determinato campo di frequenza.

E' un parametro adimensionale che confronta la distribuzione dei dati in esame con una di tipo Gaussiana in modo da quantificare l'appiattimento della densità di probabilità del segnale attraverso la misura dei picchi della distribuzione. In assenza di segnali impulsivi, cioè con una distribuzione Gaussiana, l'indice ha un valore di 3 (se non è zero centrato) mentre può raggiungere un valore molto più elevato in presenza di tali eventi.

C.10 RMS (Root Mean Square value)

Con riferimento ad un generico segnale discretizzato s

$$s_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s_i^2)}$$

dove

s_i è l' i -mo elemento del segnale s

N è il numero di punti che compongono il segnale s .

Dalla definizione dell'indice RMS si desume che il suo valore non si incrementa significativamente per la presenza di picchi isolati nel segnale. Di conseguenza questo parametro non è sensibile ad incipienti rotture ad esempio di un dente. Il suo valore si incrementa con il progressivo deterioramento del segnale.

In generale, il parametro RMS è un buon indicatore dello stato generale di un sistema dinamico.

Tale parametro è sensibile ai cambi di carico e velocità del sistema.

Nella Fig. C.3 che segue è riportato un esempio relativo alla storia vibrazionale di un segnale relativo ad un test di durabilità di un rotismo (L è la durata del test normalizzato rispetto alla durata totale della prova).

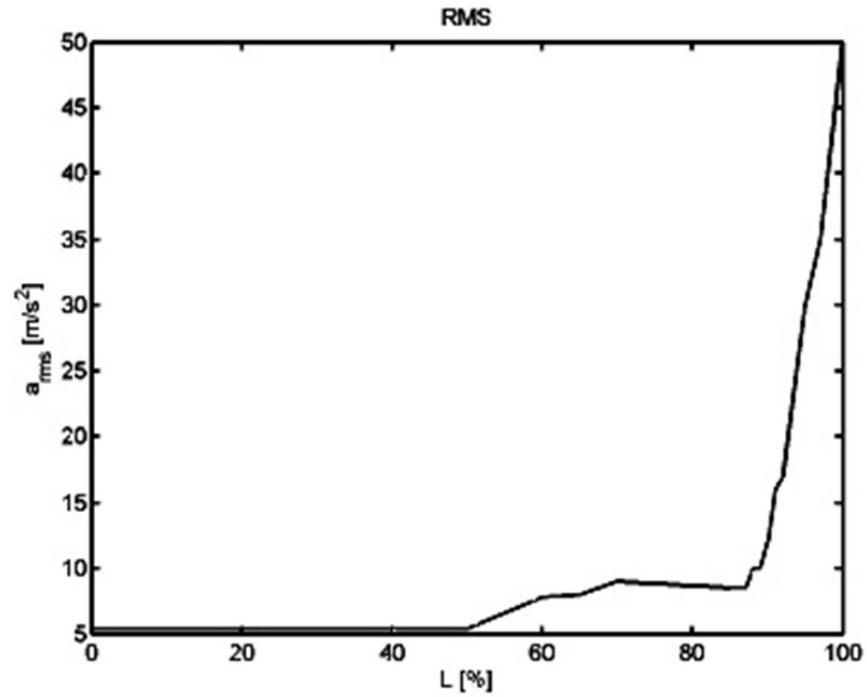


Fig. C.3

Nella Fig. C.4 sottostante, è riportato un esempio di segnale stazionario con evidenziati i relativi valori di ampiezza (V_p), dell'indice RMS (V_{RMS}) e del valore picco-picco (V_{pp}), cioè la massima distanza tra una valle ed un picco esibito dal segnale.

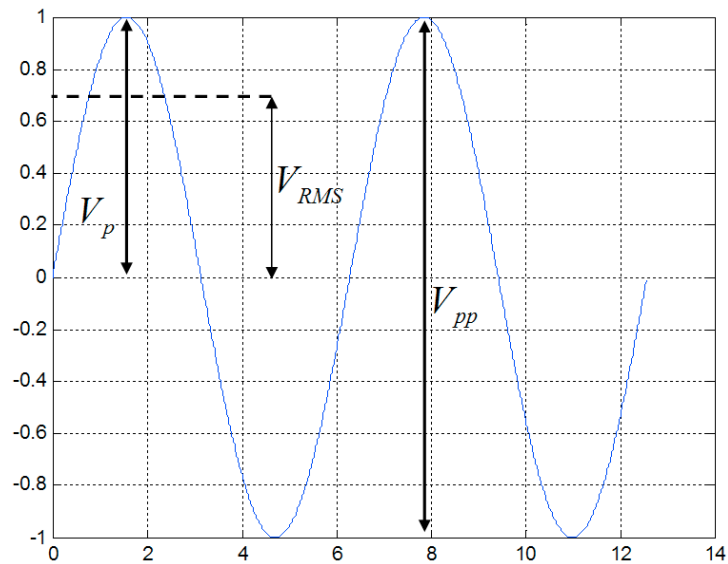


Fig. C.4

C.11 Fattore di cresta (CF)

Questo parametro segnala il danneggiamento, ovvero la evoluzione di uno stato vibrazionale, già nei suoi stadi iniziali.

Esso è definito come il rapporto tra il valore di picco-picco, esibito dal segnale, e il valore di RMS

$$CF = \frac{s_{p-p}}{s_{rms}}$$

dove

s_{pp} è il valore picco-picco esibito dal segnale

s_{rms} è la radice media quadratica della vibrazione del segnale.

Allorquando soltanto un dente è danneggiato, non vi è alcuna variazione nel valore di RMS durante una rotazione dell'albero su cui è calettata la ruota danneggiata, mentre il valore di picco aumenta. Perciò, l'indice si incrementa. Se il danneggiamento progredisce allora il valore di RMS aumenta e necessariamente si riduce il valore di CF.

C.12 Energy Ratio (ER)

Il rapporto energetico (ER) è definito come rapporto tra energia del segnale differenza ed energia della componente regolare di meshing

$$ER = \frac{\sigma(d)}{\sigma(r)}$$

dove

$\sigma(d)$ è la deviazione standard del segnale differenza

$\sigma(r)$ è la deviazione standard del segnale residuo.

Non tutti gli autori usano la stessa definizione per questi segnali. La regular meshing frequency è generalmente definita come la mesh frequency e le sue armoniche. Di conseguenza, il segnale differenza è ricavato dal segnale raw dopo che sono state rimosse le componenti della regular meshing. L'idea di base è che l'energia è trasferita dalla componente della regular meshing al resto del segnale sotto forma di usura progressiva. Questo parametro, perciò, è una buona misura per usure profonde, dove più di un dente della trasmissione è danneggiato.

C.13 FM4 (figure of merit)

Il parametro FM4 è una semplice misura dell'ampiezza della distribuzione (*peaked* o *flat*), applicato al segnale differenza. Esso è dato dal rapporto fra il momento statistico del quarto ordine applicato al segnale differenza e la sua varianza al quadrato. E' un parametro statistico che misura l'entità dei picchi in una distribuzione di campioni.

Effettuando il calcolo sul segnale differenza la sensibilità dell'indicatore migliora perché i picchi risultano più accentuati:

$$FM4 = \frac{N \sum_{i=1}^N (d_i - \bar{d})^4}{\left(\sum_{i=1}^N (d_i - \bar{d})^2 \right)^2},$$

con ovvio significato dei simboli.

Il parametro, se il segnale è regolare (dinamica buona) ha un valore simile ad una distribuzione gaussiana. Viceversa, in caso di dinamiche anomale, per la presenza di picchi di grossa ampiezza ma concentrati esso assume valori crescenti. Se i picchi sono distribuiti allora il valore di FM4 decresce.

FM4 è un indice che rileva le variazioni dello spettro di frequenza di una ruota con un numero limitato di denti danneggiati.

Esso è ottenuto dal segnale mediato nel tempo a cui vengono sottratte le componenti principali di frequenza relative alla rotazione dell'albero, all'ingranamento e alle bande laterali del primo ordine.

C.14 Sideband level factor

Questo parametro è definito come la somma del primo ordine delle bande laterali relative alla frequenza fondamentale di gear meshing rapportata alla deviazione standard della media del segnale raw.

L'idea è che un dente rotto produce una modulazione di ampiezza del segnale vibrazionale. Per una trasmissione in buone condizioni questo fattore è nullo.

C.15 NA4

Questo indicatore è stato sviluppato per migliorare la risposta di FM4 allorquando più di un dente è danneggiato.

Il segnale residuo è ottenuto filtrando la frequenza di rotazione dell'albero e la frequenza di ingranamento con le sue armoniche.

Le bande laterali si lasciano inalterate. L'operazione di filtraggio è analoga a quella effettuata per il segnale differenza. Anche in questo caso, la forma d'onda ottenuta viene analizzata tramite tecniche statistiche.

NA4 è un parametro simile a FM4 ma si contraddistingue da esso per il fatto che le bande laterali non vengono sottratte al segnale mediato e la Kurtosis viene divisa per la varianza del segnale mediato nel tempo (σ). In questo modo, fino a quando la varianza si mantiene costante, è possibile monitorare costantemente il segnale residuo ed avere indicazioni sull'andamento del danno. Sia il parametro NA4 che FA4 hanno un valore attorno a 3 per un ingranaggio sano ed assumono valori maggiori con l'avanzamento del processo di deterioramento.

La prima differenza con FM4 risiede nel fatto che NA4 impiega il segnale residuo per calcolare la curtosi.

$$NA4 = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^4}{\left(\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N (r_{ij} - \bar{r}_j)^2 \right)^2 \right)}$$

dove

r_i è i -mo punto del segnale residuo

r_{ij} è l' i -mo punto del j -mo record del segnale residuo

j è il record corrente

i è il punto del segnale

M è il record corrente dell'insieme dei record

N è il numero di punti che costituiscono il segnale (record).

La seconda differenza è nel fatto che si impiega una media del valore della varianza.

Così se il segnale esibisce un incremento di anomalie la media della varianza cresce più lentamente consentendo così al parametro NA4 di crescere. La seconda ragione affinché NA4 cresca è che il segnale residuo contenga le sidebands di primo ordine, le quali crescono quando intervengono danneggiamenti.

Quando il danneggiamento procede, la media della varianza può crescere rapidamente il che comporta una riduzione di NA4. Per superare questo problema si ricorre all'indicatore NA4*.

C.16 NA4*

Differisce dal precedente poiché il valore della varianza media viene bloccato quando eccede un limite prestabilito. Confrontando i diversi valori che assume la Kurtosis relativa alle due σ , bloccata e non, si ottengono indicazioni circa il trend del parametro in esame e quindi sullo sviluppo del danneggiamento.

Il momento del quarto ordine centrato del segnale residuale è normalizzato tramite la media della varianza relativa al segnale al tempo zero (baseline). Ciò comporta che NA4* cresce appena il danno si incrementa:

$$NA4^* = \frac{N \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^4}{(\text{var}(\tau_{OK}))^2}$$

dove

$\text{var}(\tau_{OK})$ è la varianza del segnale al tempo zero (baseline).

Il valore del segnale standard è assunto come pattern di riferimento per un buon funzionamento.

C.17 Parametro NB4

Il parametro NB4 è stato ricavato dal parametro NA4. Il parametro NA4 è calcolato a partire dal segnale residuale il parametro NB4 invece è calcolato a partire dal segnale involuppo.

Il segnale raw vibrazionale è filtrato in passa banda intorno alla gear meshing frequency.

Alcuni autori suggeriscono di usare un filtro passa banda con larghezza di banda che cattura il massimo delle sidebands, mentre altri autori usano un filtro con larghezza di banda limitata alla prima armonica diversa della gear mesh frequency.

Filtrato il segnale, viene impiegata la trasformata di Hilbert per creare un segnale analitico \hat{a}

$$H[a(t)] = \tilde{a}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau) \cdot \frac{1}{t - \tau} d\tau$$

dove

$\tilde{a}(t)$ è la trasformata di Hilbert

$a(t)$ è il segnale analogico di ingresso reale.

Dal segnale analitico l'involuppo è calcolato secondo la equazione seguente

$$|\hat{a}(t)| = \sqrt{a^2(t) + \tilde{a}^2(t)}$$

dove

$a(t)$ è il segnale analogico di input

$\tilde{a}(t)$ è la trasformata di Hilbert del segnale.

L'involuppo di un segnale rappresenta il suo contorno o profilo (può essere pensato come il luogo dei punti relativi ai picchi presenti nel segnale).

Un segnale analitico è un segnale complesso dove la parte reale è rappresentata dal segnale originale e la parte immaginaria è la trasformata di Hilbert del segnale originale.

La trasformata di Hilbert è successivamente moltiplicata per "i" e sommata al segnale originale. Infine il segnale involuppo è calcolato estraendo il valore assoluto del segnale analitico.

Con tale funzione si utilizza soltanto una parte del segnale residuo che viene filtrato in corrispondenza delle frequenze principali che sono quella di rotazione e quella di ingranamento.

In questo modo è possibile valutare la modulazione di ampiezza del segnale in corrispondenza delle frequenze esaminate, che è dovuta principalmente alle variazioni di carico nel transitorio legate allo sviluppo di danneggiamenti anche di piccola entità.

C.18 L'indice di oscillazione β come strumento di analisi

L'indice β è il quarto momento della funzione β . Sia x una variabile random continua normalizzata tra 0 e 1, allora la funzione di probabilità β , è definita come la co-funzione della funzione

$$f_x(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}$$

dove

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1} dx$$

e

α e β costanti numeriche positive.

Il k^{mo} momento intorno alla media μ , può essere espresso come

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k f_x(x) dx = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 (x-\mu)^k (1-x)^{\beta-1} dx \quad (C.11)$$

Ricordando l'espansione binomiale

$$(x-\mu)^k = \sum_{r=0}^k (-1)^r \frac{k!}{r!(k-r)!} \mu^r x^{k-r}$$

la (C.11) diventa:

$$\begin{aligned} \mu_k &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \sum_{r=0}^k (-1)^r \mu^r \frac{k!}{r!(k-r)!} \int_0^1 x^{k-r} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \sum_{r=0}^k (-1)^r \mu^r \frac{k!}{r!(k-r)!} \int_0^1 x^{[(\alpha+k-r)-1]} (1-x)^{\beta-1} dx = \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \sum_{r=0}^k (-1)^r \mu^r \frac{k!}{r!(k-r)!} B(\alpha + \beta - r, \beta) \end{aligned} \quad (C.12)$$

Ricordando la relazione tra le funzioni β e Γ

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

dopo una serie di passaggi si ottengono i seguenti momenti

$$m_1 = \mu - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = 0 \quad (\text{il primo momento riferito alla media è nullo})$$

$$m_2 = \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)} \quad (\text{secondo momento, varianza})$$

$$m_4 = \frac{3\alpha\beta(2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + 2\beta^2)}{(\alpha + \beta)^4 (\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 3)}$$

$$\beta = \frac{m_4}{(\sigma^2)^2} = \frac{3(\alpha + \beta + 1)(2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + 2\beta^2)}{\alpha\beta(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 3)}$$

dove

$$\alpha = \frac{\mu}{\sigma^2(\mu - \mu^2 - \sigma^2)}$$

$$\beta = \frac{1 - \mu}{\sigma^2(\mu - \mu^2 - \sigma^2)} \quad .$$

La curtosi relativa alla modulazione di fase come pure le sue derivate può essere usata per effettuare una diagnosi di guasto, infatti la curtosi della funzione β può essere usata per amplificare gli spike generati, ad esempio, dalla rottura di un dente.

Nella nostra ricerca abbiamo verificato che l'indicatore β è una tecnica molto affidabile per effettuare una diagnosi tempo-dominio. Infatti la modulazione di fase è molto sensibile alle imperfezioni del rotismo. Comunque, noi abbiamo integrato questa informazione con altri indicatori (periodogramma, fattore di forma, indice quadratico di oscillazione e indice di sincronia).

Nella Fig. C.5 seguente è bene rappresentata una sintesi relativa al *data-processing* testé riportato [Estratto da: P. Vecer, M. Kreidl, R. Smid, Condition Indicators for Gearbox Condition Monitoring Systems, Acta Polytechnica, Vol. 45, No. 6/2005].

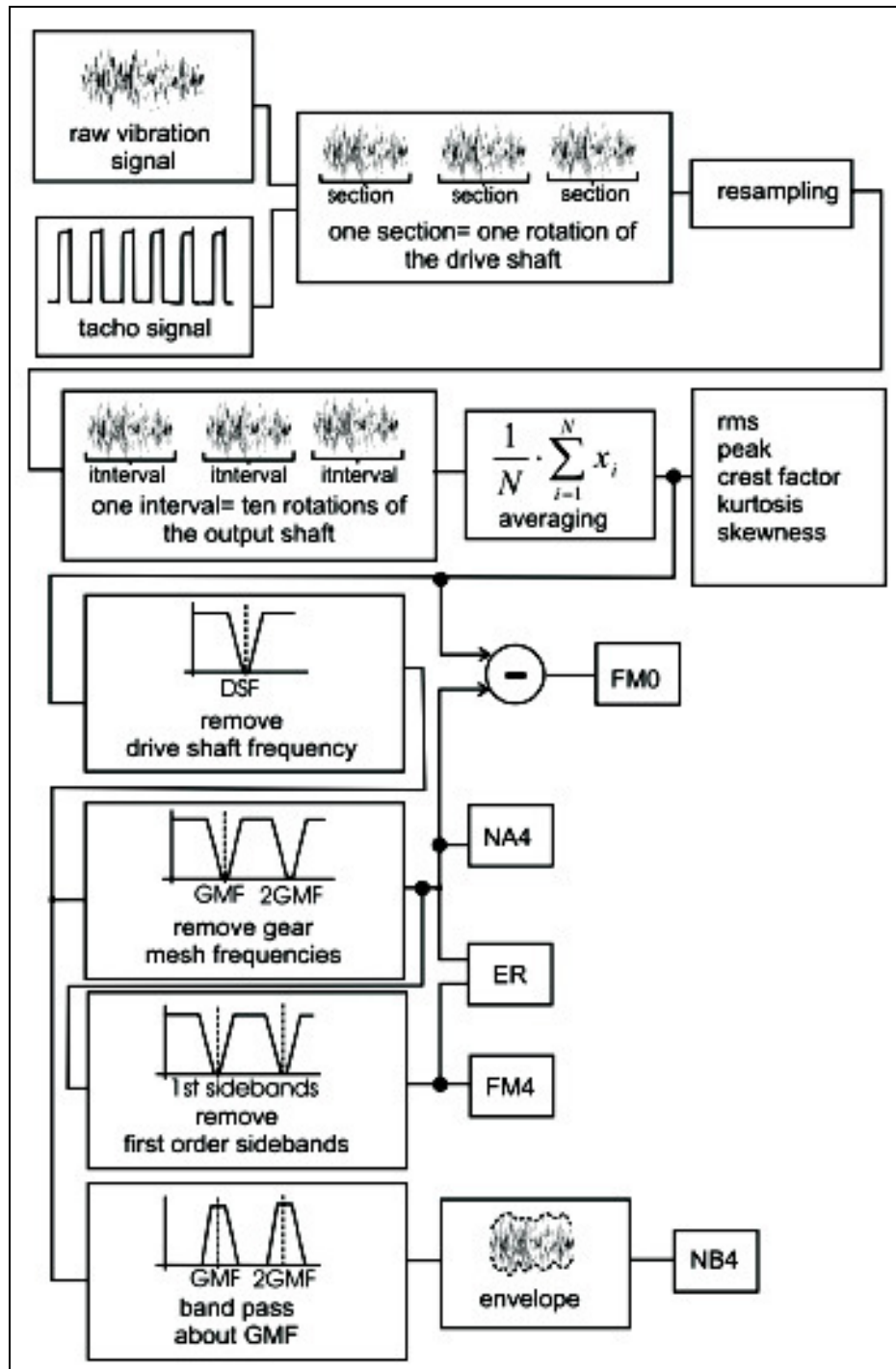


Fig. C.5

Bibliografia

1. Niola V., Quaremba G., con Applicazioni a cura Avagliano V., Langella F., *Elementi di dinamica dei sistemi meccanici per l'ingegneria. Dalla Trasformata Wavelet alla Teoria del Caos*, Liguori Ed., in stampa.
2. Stratonovich R.L., *Topics in the Theory of Random Noise*, Vol. II, Gordon and Breach, New York, (1967).
3. Hand, D.J., *Discrimination and Classification*, John Wiley & Sons, New York, (1981).
4. Esposito A., Fiorenza R., *Lezioni di Analisi Matematica*, Liguori Ed., (2002).
5. Tass P., Rosenblum M.G. et al., *Detection of $n:m$ Phase Locking from Noisy Data: Application to Magnetoencephalography*, Physical Review Letters, Vol. 81, N. 15, (1998).
6. Bandt C., Pompe B., *Permutation Entropy: A Natural Complexity Measure for Time Series*, Physical Review Letters, Vol. 88, N. 17, (2002).
7. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J., *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*, Boston University, USA, (1992).
8. Autori Vari, *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*, Proc. Int. Workshop at Pecos River Ranch, New Mexico, G. Mayer-Kress Ed., (1985).
9. Moon F.C., *Chaotic Vibrations*, John Wiley & Sons, New York, (1987).

10. Autori Vari, *Nonlinear Science: Theory and Applications*, Manchester University Press, (1987).
11. Walters P., *Ergodic Theory – Introduction Lectures*, Springer Verlag, New York, (1975).
12. Zwirner G., *Esercizi e Complementi di Analisi Matematica*, CEDAM, Padova, (1967).
13. Gnedenko B.V., *The Theory of Probability*, MIR Pub., Moscow, (1978).
14. Ogden R.T., *Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis*, Boston, Birkhäuser, (1997).
15. Goedecker S., *Wavelets and their application for the solution of partial differential equations in physics*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, CH, (1998).
16. Chui C.K., *An Introduction to Wavelets*, Vol. 1, Academic Press, New York, (1992).
17. Daubechies I., *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, Penn., (1992).
18. Burrus C.S., Gopinath R.A., Guo H., *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms – A Primer*, Prentice Hall, New Jersey, (1998).
19. Aboufadel E., Schlicker S., *Discovering Wavelets*, John Wiley & Sons, New York, (1999).

20. Chui C.K., *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, New York, (1992).
21. Frazier M.W., *An Introduction to Wavelets through Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York, (1999).
22. Hubbard B.B., *The World according to Wavelets*, Second Edition, A K Peters, Natick, Massachusetts, (1998).
23. Benedetto J.J., Frazier M.W., *Wavelets Mathematics and Applications*, CRC Press, New York, (1994).
24. Walter G.G., Shen X., *Wavelets and other Orthogonal Systems*, Second Edition, Chapman & Hall/CRC, New York, (2001).
25. Meyer Y., *Wavelets Algorithms & Applications*, SIAM, Philadelphia, (1993).
26. Wickerhauser M.V., *Adapted Wavelet Analysis form Theory to Software*, A K Peters, Natick, Massachusetts, (1994).
27. Mallat S., *A Wavelet tour of signal processing*, Second Edition, Academic Press, New York, (2001).
28. Ekeland I., *Come funziona il caos – Dal moto dei pianeti all’effetto farfalla*, Bollati Boringhieri, (2010).
29. Fisher S.D., *Complex Variables*, Second Edition, Dover Pub., Mineola, New York, (1999).
30. Kaiser G., *A Friendly Guide to Wavelets*, Birkhäuser, Cambridge, (1999).

31. Meyer Y., *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, (2004).
32. Autori Vari, *Wavelets and Statistics*, Springer-Verlag, New York, (1995).
33. Strang G., Nguyen T., *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley, Cambridge Press, (1997).
34. Teolis A., *Computational Signal Processing with Wavelets*, Birkhäuser, Boston, (1998).
35. Härdle W., Kerkyacharian G. et al., *Wavelets, Approximation and Statistical Applications*, Springer-Verlag, New York, (1998).
36. SPSS, *Advanced Statistics*, Ver. 5.0, Chicago, Ill., (1992).
37. Crow E.L., Davis F.A., Maxfield M.W., *Statistics Manual*, Dover Pub., New York, (1960).
38. Dempsey P.J., *A Comparison of Vibration and Oil Debris Gear Damage Detection Methods Applied to Pitting Damage*, NASA/TM-2000-210371, Cleveland, Ohio, (2000).
39. Cao Y., Tung W.W., Gao J.B., Hively L.M., *Detecting dynamical changes in time series using the permutation entropy*, Physical Review, E 70, 046217, The American Physical Society, (2004).
40. Zakrajsek J.J., *Detecting Gear Tooth Fatigue Cracks in Advance of Complete Fracture*, NASA, Technical Memorandum, 107145, Cleveland, Ohio, (1996).

41. Samuel P.D., Pines D.J., *A review of vibration-based techniques for helicopter transmission diagnostics*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, (2005).
42. Halim E.B., Shah S.L., Zuo M.J., Choudhury M.A.A.S., *Fault Detection of Gearbox from Vibration Signals using Time-Frequency Domain Averaging*, Proc. of the 2006 American Control Conference, Minneapolis, Minnesota, USA, (2006).
43. Vecer P., Kreidl M., Smid R., *Condition Indicators for Gearbox Condition Monitoring Systems*, Acta Polytechnica, Vol. 45, N. 6, (2005).
44. Wang W.Q., Ismail F., Golnaraghi M.F., *Assessment of Gear Damage Monitoring Techniques using Vibration Measurements*, Mechanical Systems and Signal Processing, 15(5), Academic Press, (2001).
45. Wang W., Golnaraghi F., Ismail F., *Condition monitoring of multistage printing presses*, Journal of Sound and Vibration, 270, Elsevier, (2004).
46. Schoen R.R., Habetler T.G., Kamran F., Bartheld R.G., *Motor Bearing Damage Detection using Stator Current Monitoring*, IEEE Trans. on Industry Applications, Vol. 31, N. 6, (1995).
47. Raad A., Antoni J., Sidahmed M., *Indicators of cyclostationarity: Theory and application to gear fault monitoring*, Mechanical System and Signal Processing, 22, Elsevier, (2008).
48. Lin J., Zuo M.J., *Extraction of Periodic Components for Gearbox Diagnosis combining Wavelet Filtering and Cyclostationary Analysis*, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 126, (2004).

49. Lin J., Qu L., *Feature Extraction Based on Morlet Wavelet and its Application for Mechanical Fault Diagnosis*, Journal of Sound and Vibration, 234(1), (2000).
50. Lin J., Zuo M.J., *Gearbox Fault using Adaptive Wavelet Filter*, Mechanical Systems and Signal Processing, 17(6), Elsevier Science, (2003).
51. Johnson T.J., Adams D.E., *Composite indices applied to vibration data in rolling tires to detect bead area damage*, Mechanical Systems and Signal Processing, 21, Elsevier, (2007).
52. Badaoui M.E., Cahouet V., Guillet F., Daniere J., Vexel P., *Modelling and detection of localized tooth defects in geared systems*, Proc. of the 1999 ASME Design Engineering Technical Conferences, Las Vegas, Nevada, (1999).
53. Dalpiaz G., Rivola A., Rubini R., *A Kineto-elastodynamic Model of a Gear Testing Machine*, MTM, (1997).
54. Delprat N., Escudié B. et al., *Asymptotic Wavelet and Gabor Analysis: Extraction of Instantaneous Frequencies*, IEEE Trans. on Information Theory, Vol. 38, N. 2, (1992).
55. Wang K., *Phase Information at Tooth Mesh Frequency for Gear Crack Diagnosis*, Second IEEE Conf. on Industrial Electronics and Applications, IEEE, (2007).
56. Yang W.X., Ren X.M., *Detecting Impulses in Mechanical Signals by Wavelets*, EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 8, (2004).
57. Fan X., Zuo M.J., *Gearbox fault detection using Hilbert and Wavelet packet transform*, Mechanical Systems and Signal Processing, 20, (2006).

58. Bonnardot F., Randall R.B., Guillet F., *Extraction of second-order cyclostationary sources – Application to vibration analysis*, Mechanical Systems and Signal Processing, 19, Elsevier, (2005).
59. Quiroga R.Q., Kreuz T., Grassberger P., *Event synchronization: A simple and fast method to measure synchronicity and time delay patterns*, Physical Review, E, 66, 041904, (2002).
60. Chelidze D., *Identifying Multidimensional Damage in a Hierarchical Dynamical System*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, (2004).
61. Fraser A.M., Swinney H., *Independent coordinates for strange attractors from mutual information*, Physical Review, A, Vol. 33, N. 2, (1986).
62. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J., *Comment on "Phase synchronization in discrete chaotic systems*, Physical Review, E, Vol. 63, 058201, The American Physical Society, (2001).
63. Giannerini S., Rosa S., *Caos, Statistica e Metodi di Ricampionamento*, Statistica, anno LXII, N. 3, (2002).
64. McFadden P.D., *Detecting fatigue cracks in gears by amplitude and phase demodulation of meshing vibration*, Journal of Vibrations, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 108, (1986).
65. Dalpiaz G., Meneghetti U., *Monitoring fatigue cracks in gears*, NDT&E International, 24, (1991).
66. Ismail F., Martin H., Omar F., *A statistical index for monitoring tootcracks in a gearbox*, Proc. of the ASME Biennial Conference on Vibration and Noise, Vol. DE-84-1, Boston, MA (1995).

67. Lin D., Colnaraghi F., Ismail F., *The dimension of the gearbox signal*, Journal of Sound and Vibration, 208,(1997).
68. Wang W.J, McFadden P.D., *Application of orthogonal wavelets to early gear damage detection*, Mechanical Systems and Signal Processing, 9, (1995).
69. Lin S.T., McFadden P.D., *Vibration analysis of gearbox by linear wavelet transform*, 2nd Intern. Conf. on Gearbox, Noise, Vibration and Diagnostics, 59-72, London, U.K. (1995).
70. Bollahbal D., Golnaraghi F., Ismail F., *Amplitude and phase wavelet maps for the detection of cracks in geared systems* , Mechanical Systems and Signal Processing, 13, (1999).
71. Fiorenza R., *Appunti delle Lezioni di Analisi Funzionale*, Università degli Studi di Napoli, Federico II, Italy, COINOR.
72. Niola V., Quaremba G., *The location of anomalous spike on a working rotor: a theoretical – experimental test*, International Journal of Applied Mechanics and Engineering, Vol. 9, N. 3, (2004).
73. Niola V., Quaremba G., *Sul principio della ortogonalità della risposta dinamica in sistemi meccanici complessi*, Atti Workshop 2004 "Progettazione e validazione di sistemi di trasmissione a camma", Cassino, 5 marzo 2004.
74. Niola V., Quaremba G., Nasti G., *A wavelet application identifying simulated anomalies superimposed to real signal carried out from a rigid rotor*, IASME TRANSACTIONS, Issue 1, Vol. 1, January, (2004).

75. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *A study on dynamic effect of curvature changing in a cam profile by wavelet analysis*, IASME TRANSACTIONS, Issue 1, Vol. 1, January, (2004).
76. Niola V., . Oliviero R., Quaremba G., *Estimating the threshold parameter of a generalized Pareto Distribution by a wavelet method*, Atti Convegno MAF 2004, Salerno, (2004).
77. Niola V., Quaremba G., *On dynamical response of a cam-follower system*, Atti WSEAS International Conference SOSM 2004, Miami, Florida, April 21-23, 2004. Pubblicato sulla rivista internazionale WSEAS TRANSECTIONS on CIRCUITS and SYSTEMS, Issue 3, Vol. 3, (2004).
78. Niola V., Quaremba G., Ceccarelli M., *On the effect of dynamic behaviour of a cam-follower system damaged on contact surface*, Atti WSEAS International Conference SOSM 2004, Miami, Florida, April 21-23 2004. Pubblicato sulla rivista internazionale WSEAS TRANSECTIONS on CIRCUITS and SYSTEMS, Issue 3, Vol. 3, (2004).
79. Niola V.; Quaremba G., Nasti G., *Several aspects in determining the presence of turbulences generated in a lubricating oil flow*, 4th AIMETA International Tribology Conference, Roma, (2004).
80. Niola V., Quaremba G, Oliviero R., *A method for classifying turbulences generated in a lubricating oil flow*, 4th AIMETA International Tribology Conference, Roma, (2004).
81. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *Fuzzy logic for the classification of a complex signal analysed by wavelets for the diagnostic of mechanical systems*, 5th International Conference "Acoustical and Vibratory Surveillance Methods and Diagnostic Techniques, Senlis, France, (2004).

82. Niola V., Quaremba G., Nasti G., *A Method for 3-D Reconstruction*, International Conference on Advanced Optical Diagnostics in Solids, Fluids and Combustion (VSJ-SPIE'04), University of Tokyo, Tokyo, Japan, (2004).
83. Niola V., Quaremba G., Nasti G., *Wear recognition in antifriction bearings*, International Conference on Advanced Optical Diagnostics in Solids, Fluids and Combustion (VSJ-SPIE'04), University of Tokyo, Tokyo, Japan, (2004).
84. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *The definition of the optimum threshold for emphasizing features of surface roughness*, WSEAS Transactions on Advances in Engineering Education, Issue 1, Vol. 1, (2004).
85. Niola V., Quaremba G., *A problem of detecting dynamical irregular of a cam-follower system*, WSEAS Transactions on Advances in Engineering Education, Issue 1, Vol. 1, (2004).
86. Niola V., Nasti G., Quaremba G., *A problem of emphasizing features roughness by means the Discrete Wavelet Transform*, International Journal of Materials Processing Technology – Elsevier , Vol. 164 -165, (2005).
87. Niola V., Quaremba G., *An application of self learning neural network for reviling the presence of anomalies on a gear system*, WSEAS International Conference ACOMS '05, Prague, (2005).
88. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *A robust method for estimating Weibull parameters*, International WSEAS Conference AMCOS '05, Rio de Janeiro, Brazil, (2005).

89. Niola V., Quaremba G., *Pattern Recognition and feature extraction: a comparative study*, 6th WSEAS Int. Conf. on NEURAL NETWORKS (NN'05), Lisboa, Portugal, 16–18 Giugno 2005. Pubblicato sulla Rivista Internazionale WSEAS TRANSACTIONS on CIRCUITS and SYSTEMS, Issue 4, Vol. 4, (2005).

90. Niola V., Quaremba G., Savino S., *The objects location from images binarized by means of self-learning neural network*, 6th WSEAS Int.Conf. on NEURAL NETWORKS (NN'05), Lisboa, Portugal, 16–18 Giugno 2005 - Pubblicato sulla Rivista Internazionale WSEAS TRANSACTIONS on SYSTEMS , Issue 4, Vol. 4, (2005).

91. Niola V., Donnarumma A., Quaremba G., *On the definition of functioning conditions of a mechanical system by means of orthogonal processing*, 6th WSEAS Int. Conf. on NEURAL NETWORKS (NN'05), Lisboa, Portugal, 16–18 Giugno 2005 - Pubblicato sulla Rivista Internazionale WSEAS TRANSACTIONS on SYSTEMS, Issue 4, Vol. 4, (2005).

92. Niola V., Quaremba G., Savino S., *Experimental results for trajectory planning in the joint space*, Proc. 9th WSEAS International Conference on Computers, Athens, (2005).

93. Niola V., Quaremba G., Oliviero R., *A comparison on accuracy of numerical methods: an application to a varying mass system based on Wavelet Transform*, Proc. 9th WSEAS International Conference on Computers, Athens, (2005).

94. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *A non-parametric method for the estimation of a GPD parameter based on wavelet theory*, Proc. 9th WSEAS International Conference on Computers, Athens, (2005).

95. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *The problem of estimating a GPD by means of wavelet transform*, WSEAS Transactions on Information Science and Applications, Issue 7, Vol. 2, (2005).
96. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *On the accuracy of numerical methods performed by Wavelet Transform: an application to a varying mass system*, WSEAS Transactions on Information Science and Applications, Issue 67, Vol. 2, (2005)
97. Niola V., Quaremba G., Rossi C., Savino G., *Trajectories planning by assigning position and velocity laws*, WSEAS Transactions on Information Science and Applications, Issue 8, Vol.2, (2005).
98. Niola V., Donnarumma A., Quaremba G., *On the problem of classification through orthogonal processing*, Proc. 7th WSEAS International Conference on Wavelet Analysis and Multivariate Systems, Sofia, Bulgaria, (2005).
99. Niola V., Donnarumma A., Quaremba G., *The problem of classifying functioning conditions: An orthogonal processing applied to a mechanical system*, TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, Issue 1, Vol. 1, (2005).
100. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *The application of wavelet transform for estimating the shape parameter of a Weibull pdf*, Proc. 5th WSEAS International Conference on Signal Processing, Venezia, (2005).
101. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *A problem of interpolating irregular robot trajectories*, Proc. 5th WSEAS International Conference on Signal Processing, Venezia, (2005).

102. Niola V., Quaremba G., *A multivariate methodology for dynamical analysis of a cam-follower system*, Proc. International Workshop on Cam Transmissions: Functional and Dynamical Aspects, Naples, Italy, (2005).
103. Niola V., Quaremba G., *The evaluation of the damage in a gear-system by a simulation model*, Proc. International Workshop on Cam Transmissions: Functional and Dynamical Aspects, Naples, Italy, (2005).
104. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *A non-parametric method for estimating the shape parameter of a Weibull pdf*, Transaction on Systems, Issue 2, Vol.5, (2006).
105. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *On the interpolation of irregular trajectories*, Transaction on Systems, Issue 2, Vol.5, (2006).
106. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *The problem of signal denoising for detecting the presence of spikes*, Proc. 5th International Conf. on Signal processing, Robotics and Automation, Madrid, (2006).
107. Niola V., Buccelli C., Gervasio L., Pilleri M., Pollocino F., Quaremba G., *Wavelet analysis applied to the study of digitalized bullet striatures for the firearm identification: first evidences*, 5th International Conf. on Signal Processing, Robotics and Automation, Madrid, (2006).
108. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *A Method of Moments for the Estimation Weibull pdf Parameters*, Proc. International Conference, Prague,(2006).
109. Niola V., Quaremba G., *On the Operating condition of Mechanical System*, Proc. International Conference, Prague, (2006).

110. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *A Neural Network application for signal denoising*, Transactions on Signal Processing, Issue 2, Vol. 2, (2006).
111. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *Robot trajectories*, Proc. 16th International Conference on Flexible Automation & Intelligent Manufacturing, University of Limerik, Limerik, Ireland,(2006).
112. Niola V., Quaremba G., *The estimation of Weibull pdf parameters in presence of censored data*, Transactions on Computers, Issue 4, Vol. 5, (2006).
113. Niola V., Quaremba G., *The analysis of a crank mechanism by Wavelet Transform*, Transactions on Systems, Issue 5, Vol. 5,(2006).
114. Niola V., Quaremba G., *Image denoising and Fuzziness Measures*, Proc. 7th International Conference on "Neural Networks" (NN'06), Cvatat, Croatia, (2006).
115. Niola V., Quaremba G., *The optimization of spur gear performance by processing the line of action with the wavelet transform*, Invited paper, Proc. International Conference IADAT on Automation, Control and Instrumentation, Valencia, Spain, (2006).
116. Niola V., Quaremba G., *The shape of the line of action optimized by means of DWT*, Invited paper, Proc. of 6th WSEAS International Conference on "Wavelet analysis & multivariate Systems"- Bucharest, Romania, (2006).
117. Niola V., Quaremba G., *A Wavelet application for improving the kinematical quality of gear transmission*, Transactions on Systems, Issue 1, Vol. 6, (2007).

118. Niola V., Quaremba G., *The optimization of kinematical response of gear transmission*, Invited paper, Proc. of International Conference on Circuits, Systems, Signal and Telecommunications (CISST '07), Gold Coast, Queensland, Australia, (2007).
119. Niola V., Quaremba G., *Kinematical quality of gear transmission tested by means of wavelet transform*, *Transactions on Systems*, Issue 5, Vol. 6, ISSN 1109-2777, (2007).
120. Niola V., Quaremba G., *The improvement of kinematical quality of gear transmission by means of wavelet transform*, Proc. of the 17th International Conference "Flexible Automation and Intelligent Manufacturing", Philadelphia, USA,(2007).
121. Mongiello C., Niola V., Quaremba G., *Spectral-like Approach to Modelling the Liquid Fuel Atomisation Process in a Reactor*, Proc. of the 11th WSEAS International Conference on Systems, Agios Nikolaos, Crete Island, Greece, July 23-25, 2007- Pubblicato sul libro "Systems Theory and Applications", pagg. 303-309, ISBN 978-960-8457-90-4, (2007).
122. Niola V., Quaremba G., Rossi C., *A new method for detecting and measuring surface wear*, Proc. of ICME2007, Int. Conf. on Mechanical Engineering and Mechanics, Wuxi, China (2007).
123. Niola V., Quaremba G., Forcelli A., *Gear noise detection. An integrated method using Fourier and Wavelet approach*, 6th International Conference on SYSTEM SCIENCE and SIMULATION in ENGINEERING , Venezia, Italy, (2007).

124. Niola V., Quaremba G., Langella F., Forcelli A., *A new method for gear noise assessment*, 11th Mechatronics Forum Biennial International Conference, Limerick, Ireland, (2008).
125. Niola V., Quaremba G., Forcelli A., *The detection of gear noise computer by integrating the Fourier and Wavelet methods*, WSEAS Transactions on Signal Processing – Issue 3, Vol. 4, ISSN 1790 – 5052, (2008).
126. Niola V., Quaremba G., Amoresano A., *Assessment of mechanical components stress using Wavelet Transform applied to infrared thermography*, Proc. of "7th International Conference on System Science and Simulation in Engineering", Venezia 21- 23 November 2008 – ISBN: 978-960-474-027-7. Pubblicato sul libro "Recent Advance in System Science and Simulation in Engineering", ISSN:1790-2769.
127. Niola V., Quaremba G., Avagliano V., *Vibration monitoring of gear transmission*, Proc. of 9th WSEAS Int. Conf. on SIMULATION, MODELLING AND OPTIMIZATION, Budapest Tech, Budapest, Hungary, (2009).
128. Niola V., Quaremba G., Avagliano V., *Further developments on gear transmission monitoring*, Proc. of 9th WSEAS Int. Conf. on SIMULATION, MODELLING AND OPTIMIZATION, Budapest Tech, Budapest, Hungary, (2009).
129. Niola V., Quaremba G., Avagliano V., *Nearly Real-Time Monitoring of Gearbox Vibration Signal using DWT*, Proc. 6th WSEAS International Conference on DYNAMICAL SYSTEMS and CONTROL (CONTROL '10), Kantaoui, Sousse, Tunisia, (2010).

130. Niola V., Quaremba G., Avagliano V., *A real time algorithm for monitoring the gearbox reliability test*, WSEAS TRANSACTIONS on SYSTEMS, Issue 7, Vol. 8, (2009)
131. Niola V., Quaremba G., Avagliano V., *A new index for monitoring the duration test*, WSEAS TRANSACTIONS on SYSTEMS, Issue 8, Vol. 8, (2009).

"...nella storia della scienza... il progresso dipende sempre dallo studio di un dettaglio che permette di modificare la teoria generale di riferimento..."
(M. Butor)