UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"

Tesi per il Dottorato di Ricerca in Scienze Matematiche

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE E TEOREMI DI CONVERGENZA PER SPAZI DI VITALI

Flavia Ventriglia

Relatore Prof. P. de Lucia

Indice

Introduzione

Alla fine degli anni 60', G. Birkoff in [4] pose il problema della determinazione di una struttura in grado di generalizzare sia gli anelli Booleani che gli ℓ-gruppi, di cui casi particolari sono, rispettivamente, le algebre di insieme e gli spazi di Riesz. Swamy in [39], Wyler in [44] e Rama Rao in [36], introdussero una serie di strutture che in parte risolvevano il problema, ma una soluzione completa fu data, alla metà degli anni 80', da K.D. Schmidt in [37] che introdusse i clan minimali commutativi. Poco dopo lo studio dei clan minimali commutativi fu intrapreso da C. Constantinescu in [8] e [9], al quale devono il nome di Spazi di Vitali. Infine negli anni 90' furono introdotte nuove strutture quali le effect algebre e le MV-algebre, che sono casi particolari di Spazi di Vitali; successivamente l'attenzione si spostò sulle versioni non commutative di tali strutture, dette pseudo effect algebre e pseudo MV-algebre, dando vita ad una ricca teoria.

Uno spazio di Vitali $(E, \leq, +, 0)$ è un semigruppo parziale commutativo, nel senso che l'addizione è definita in un sottoinsieme di $E \times E$, tale che $(E, \leq)$ è un reticolo parzialmente ordinato. È evidente allora che un ℓ-gruppo (o gruppo reticolo parzialmente ordinato) abeliano $(G, \leq, +, 0)$ è uno spazio di Vitali in cui l'operazione di addizione è totale; così come, se consideriamo un anello Booleano $\mathcal{A}$ e definiamo, per ogni coppia di elementi disgiunti, la loro somma uguale alla loro unione, si ha che $(\mathcal{A}, \subseteq, +, \emptyset)$ è uno spazio di Vitali.

Nel primo capitolo presentiamo gli spazi di Vitali, la loro versione non commutativa, ovvero gli pseudo spazi di Vitali, e le altre strutture ad essi collegate, quali MV-algebre, effect algebre, effect algebre generalizzate (GEA) e pseudo effect algebre generalizzate (GPE), soffermandoci sulle loro principali proprietà.

Nel primo paragrafo del secondo capitolo introduciamo il concetto di omomorfismo tra pseudo spazi di Vitali e di strong unit (un elemento positivo $u \in E$ è uno strong unit se per ogni $x \in E$ esiste un intero $n \geq 1$ tale che $|x| \leq nu = u_1 + \cdots + u_n$ dove $u_1 = \ldots = u_n = u$). Ricordiamo che Wyler in [44] ha dimostrato che uno spazio di Vitali può essere immerso in un ℓ-gruppo abeliano. In questo paragrafo estendiamo tale risultato agli pseudo spazi di Vitali, ovvero dimostriamo che ogni pseudo spazio di Vitali E può essere isomorficamente immerso in un ℓ-gruppo detto gruppo rappresentativo di E (Teorema di Rappresentazione). Di conseguenza, una volta data la definizione di ideale di uno pseudo spazio di Vitali, è sembrato naturale, nel resto del capitolo, stabilire le relazioni esistenti tra gli ideali di uno pseudo spazio di Vitali, quelli del suo gruppo rappresentativo e le congruenze forti (che sono congruenze in E compatibili con le due operazioni di differenza che si possono definire in E).

Sempre nel secondo capitolo è riportato il concetto di stato su uno pseudo spazio di Vitali e sfruttando la ricca teoria riguardante gli stati di un ℓ-gruppo, si veda [30], proviamo due forme del Teorema di Loomis-Sikorski, una per pseudo spazi di Vitali e l'altra per pseudo spazi di Vitali positivi.

C. Constantinescu in [9] ha studiato in maniera approfondita le proprietà delle misure sugli spazi di Vitali, giungendo alla dimostrazione di una serie di Teoremi di convergenza e limitatezza; nel terzo capitolo di questa tesi abbiamo voluto riprendere lo studio di tali Teoremi abbandonando la tecnica dimostrativa di Constantinescu, efficace ma complessa. Così utilizzando un Teorema sulle matrici di P. de Lucia e T. Traynor (cfr. [15]), abbiamo dimostrato, in modo, come dire,"usuale ", i Teoremi di convergenza di Cafiero, Brooks-Jewett e Nikodym per funzioni definite in uno spazio di Vitali con Subsequential interpolation property a valori in un gruppo topologico di Hausdorff.

Nell'appendice, infine, oltre alla dimostrazione del Teorema sulle matrici di de Lucia-Traynor di cui facciamo ampio uso nelle dimostrazioni dei teoremi di Cafiero e Brooks-Jewett, riportiamo una piccola introduzione alla teoria delle categorie. Infatti grazie al Teorema di Rappresentazione possiamo dimostrare l'equivalenza tra la categoria degli pseudo spazi di Vitali e quella degli ℓ-gruppi.

I miei più sinceri ringraziamenti vanno alle Professoresse Emma d'Aniello ed Anna de Simone per i consigli e l'aiuto datomi in questi anni. Un ringraziamento particolare va al Professore Anatolij Dvurečenskij che ha messo a mia disposizione la sua grande conoscenza di tali strutture. Per ultimo, ma assolutamente non ultimo, voglio ringraziare il Professore Paolo de Lucia che, con tanta pazienza, in questi anni ha seguito il mio percorso, indirizzandomi con buoni consigli e dando sempre nuovi slanci al mio lavoro di ricerca con la sua vasta esperienza matematica.

1 Strutture

In questo capitolo definiamo gli Spazi di Vitali, nucleo di questa tesi, ed una serie di strutture che generalizzano o sono generalizzate da quest'ultimi come: MV-algebre, pseudo spazi di Vitali (o clan minimali), effect algebre, pseudo effect algebre e pseudo effect algebre generalizzate . Le proprietà di queste strutture verranno poi utilizzate nei capitoli successivi per dare alcuni risultati validi per gli spazi di Vitali, come, ad esempio, i Teoremi di Rappresentazione.

1.1 Spazi di Vitali

Gli spazi di Vitali furono introdotti da K.D. Schmidt in [37] con il nome di clan minimali commutativi e successivamente studiati da C. Constantinescu, al quale devono il nome, in [8] e [9]. Tali spazi furono introdotti come generalizzazione degli anelli Booleani e dei gruppo reticolo ordinati , permettendo così una trattazione unificata della teoria di queste due differenti strutture.

Definizione 1.1.1. *Uno* **Spazio di Vitali***, o Clan Minimale commutativo, è un reticolo* $(E, \leq)$ *dotato di una relazione* S*, ovvero di un sottoinsieme del prodotto cartesiano* $E \times E$*, e di un'operazione di addizione parziale,* $+ : S \to E$*, tale che dati* $x, y, z \in E$ *si ha:*

(SV1) *se* $(x, y) \in S \Rightarrow (y, x) \in S$ *e si ha* $x + y = y + x$*;*

(SV2) *se* $(x, y), (x + y, z) \in S \Rightarrow (y, z), (x, y + z) \in S$ *e si ha* $(x + y) + z = x + (y + z)$*;*

(SV3) $\exists 0 \in E$ *tale che* $\forall x \in E$ *si ha che* $(0, x) \in S$ *e* $x + 0 = x$*;*

(SV4) *se* $(x, y) \in S$ *e* $(z, y) \in S \Rightarrow [x \leq z \Leftrightarrow x + y \leq z + y]$*;*

(SV5) $\forall$ $x, y \in E$ $\exists$ $u \in E^+$ *tale che* $(u, x) \in S$ *e*
$(u, x \wedge y) \in S$ *e si ha* $u + x = x \vee y$ *e* $u + x \wedge y = y$*,*
dove $E^+ := \{x \in E : x \geq 0\}$*.*

Uno spazio di Vitali dotato di elemento massimo si dice limitato.

Gli elementi di S si dicono ***sommabili***.
Diciamo che una famiglia $(x_i)_{i \in I}$ di elementi di E è ***finitamente sommabile*** se per ogni parte finita J di I è definita $\sum_{i \in J} x_i$.
È possibile provare che (cfr.[9] e [37]):

1. la somma parziale è distributiva rispetto alle operazioni del reticolo, cioé: se $x, y, z \in E$ e $(x, z), (y, z), ((x \wedge y), z), ((x \vee y), z) \in S$ allora $(x \vee y) + z = (x + z) \vee (y + z)$ e $(x \wedge y) + z = (x + z) \wedge (y + z)$ ([37, Teorema 2.7]);

2. se $(x, y) \in S$ e $x + y = z$ allora possiamo definire la differenza $z - y = x$, ovvero possiamo definire un'operazione di differenza parziale;

3. Se $x \leq s$, $y \leq t$ e $(s, t) \in S$ allora $(x, y) \in S$.

Sia E uno spazio di Vitali e F un suo sottoinsieme tale che

(i) F è un sottoreticolo di E,

(ii) $0 \in F$,

(iii) $x, y \in F, x \leq y \Rightarrow y - x \in F$,

(vi) $x, y, z, x + y, x + y + z \in F \Rightarrow y + z \in F$.

Se consideriamo $S_F := \{(x, y) \in F \times F : (x, y) \in S \quad e \quad x + y \in F\}$ e l'operazione di addizione di E ristretta a S_F, si verifica facilmente che anche F è uno spazio di Vitali. Diciamo allora che F è un **sottospazio di Vitali** di E.

Negli spazi di Vitali valgono le seguenti proprietà, la cui dimostrazione si può trovare sempre in [37].

Teorema 1.1.2. *[37, Teorema 2.8,Corollario 2.9] Sia E uno spazio di Vitali e $x, y \in E$. Allora:*

1. *$(x, y) \in S$ se e solo se $(x \vee y, x \wedge y) \in S$ ed in tal caso si ha $x + y = x \vee y + x \wedge y$ (Legge modulare);*

2. *se $x \wedge y = 0$, si ha $(x, y) \in S$ e $x + y = x \vee y$.*

Teorema 1.1.3. *[37, Teorema 2.10] Uno spazio di Vitali è un reticolo distributivo, cioé*
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
per ogni $x, y, z \in E$.

Dimostrazione. Proviamo solo la prima delle uguaglianze dato che la seconda si prova in modo analogo.
Siano $x, y, z \in E$. Dalla $(SV5)$, sappiamo che esistono $u, v, w \in E^+$ tali che
$(y \wedge z) + u = x \vee (y \wedge z), \quad (x \wedge y \wedge z) + u = x$,
$x + v = x \vee y, \quad (x \wedge y) + v = y$,
$x + w = x \vee z, \quad (x \wedge z) + w = z$.

Allora si ha

$(x \wedge y \wedge z) + (u \wedge v \wedge w) \leq (x \wedge y \wedge z)$

che, dalla $(SV4)$, implica $0 \leq (u \wedge v \wedge w) \leq 0$ ovvero $(u \wedge v \wedge w) = 0$.

Da [37, Corollario 2.9], segue che $u + (v \wedge w) = u \vee (v \wedge w)$. Finalmente, applicando la proprietà distributiva della somma rispetto alle operazioni del reticolo, abbiamo

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x + v) \wedge (x + w)$

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x + (v \wedge w)$

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \wedge y \wedge z) + u + (v \wedge w)$

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = ((x \wedge y \wedge z) + u) \vee ((x \wedge y \wedge z) + (v \wedge w))$,

da cui segue

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$.

L' altra disuguaglianza è ovvia. $\square$

Lemma 1.1.4 (Decomposizione di Riesz)**.** *Sia E uno spazio di Vitali e $x, y_1, \dots, y_n \in E$, con gli y_i sommabili, tali che*

$$x \leq \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Allora esistono $x_1, \dots, x_n \in E$ sommabili tali che

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

con $x_i \leq y_i$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Teorema 1.1.5 (Teorema di decomposizione di Jordan)**.** *Sia E uno spazio di Vitali e sia $x \in E$. Allora posto*

$x^+ := x \vee 0$, $x^- := x \vee 0 - x$, $|x| := x \vee 0 - x \wedge 0$

si ha

$x^+ = x + x^-$, $x^+ \wedge x^- = 0$, $|x| = x^+ + x^-$.

Inoltre se $y, z \in E^+$ *sono tali che* $z + x = y$ *e* $y \wedge z = 0$ *allora* $y = x^+$ *e* $z = x^-$, *ovvero la decomposizione di Jordan è unica.*

Esempi

1. $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ con l'addizione e la relazione d'ordine usuali sono esempi di spazi di Vitali. Osserviamo che in questo caso l'operazione d'addizione è totale.

2. Un **ℓ-gruppo** (commutativo), o gruppo reticolo ordinato, $(G, \leq, +)$ è un gruppo (abeliano) $(G, +)$ dotato di una relazione d'ordine $\leq$ rispetto alla quale è un reticolo e verifica la relazione:
   $x \leq y \Rightarrow x + a \leq y + a$ per ogni $x, y, a \in G$.
   Gli ℓ-gruppi commutativi e quindi in particolare gli spazi di Riesz sono esempi di spazi di Vitali.
   In modo naturale si definiscono gli **ℓ-sottogruppi di** G come sottogruppi del gruppo $(G, +)$ chiusi rispetto alle operazioni $\vee, \wedge$, e con una relazione d'ordine ottenuta dalla restrizione ad essi della relazione d'ordine di G.

3. Un anello Booleano è un reticolo distributivo $(E, \leq)$ dotato di elemento minimo 0 e tale che per ogni $x, y \in E$, con $x \leq y$, esiste $z \in E$ per cui si ha $x \wedge z = 0$ e $x \vee z = y$.
   Gli anelli Booleani, e quindi le algebre di Boole che sono anelli Booleani dotati di elementi massimali, sono esempi di spazi di Vitali in cui

due elementi sono sommabili se disgiunti ed in tal caso la loro somma coincide con il loro estremo superiore.

1.2 MV-Algebre

Un caso particolare di spazi di Vitali sono le **MV-algebre** introdotte da Chang in [10] e successivamente studiate anche da Mundici [35] che ha provato che esse sono intervalli in ℓ-gruppi abeliani.

Definizione 1.2.1. *Una MV-algebra è un semigruppo commutativo* $(L, \oplus)$ *dotato di elemento neutro* 0*, di un elemento* 1 *e di un'operazione* $^* : L \to L$ *tali che, per ogni* $x, y \in L$

(i) $x \oplus 1 = 1$,

(ii) $(x^*)^* = x$,

(iii) $x \oplus x^* = 1$,

(iv) $0^* = 1$,

(v) $(x^* \oplus y)^* \oplus y = (x \oplus y^*)^* \oplus x$.

Inoltre poniamo $x \odot y = (x^* \oplus y^*)^*$*;* $x \wedge y = x \odot (x^* \oplus y)$*;* $x \vee y = (x \odot y^*) \oplus y$.

Allora è facile vedere che una MV-algebra è uno spazio di Vitali limitato in cui tutti gli elementi sono positivi definendo:
$x - y := (y \oplus x^*)^*$ per $y \leq x$, $x + y := (x^* - y)^*$ per $y \leq x^*$.
Le MV-algebre non commutative sono dette **pseudo MV-algebre**; maggiori informazioni riguardo tali strutture si possono reperire in [29].

Esempio

Sia G un ℓ-gruppo abeliano e $u \in G, u > 0$. Sia

$[0,u] := \{x \in G : 0 \leq x \leq u\}$,

poniamo, per ogni $x, y \in [0,u]$

$x \oplus y := u \wedge (x+y) \quad \text{e} \quad x^* := u - x.$

La struttura $([0,u], \oplus, ^*, 0)$ è denotata $\Gamma([0,u])$.

In [35, Propoizione 2.1.2] è dimostrato che $\Gamma([0,u])$ è una MV-algebra.

1.3 Pseudo Spazi di Vitali o Clan Minimali

Gli spazi di Vitali sono casi particolari di **clan minimali** introdotti negli anni 60' da Wyler. In questa tesi chiameremo i clan minimali anche **pseudo spazi di Vitali**, nome dovuto a A. Dvurečenskij ed usato in [22] e [23].

Definizione 1.3.1. *Uno pseudo spazio di Vitali, o clan minimale, è una struttura* $(E, \leq, +)$ *dove* $(E, \leq)$ *è un reticolo,* $+$ *è un' operazione binaria parziale, e si ha:*

(V1) $x + y$ *e* $(x + y) + z$ *esistono se e solo se* $y + z$ *e* $x + (y + z)$ *esistono e in questo caso si ha* $(x + y) + z = x + (y + z)$*;*

(V2) $\exists 0 \in E$ *tale che,* $\forall x \in E$*,* $0 + x$ *e* $x + 0$ *esistono in* E *e si ha* $x + 0 = x = 0 + x$*;*

(V3) se $x + y$ *e* $z + y$ *esistono in* E *allora* $[x \leq z \Leftrightarrow x + y \leq z + y]$*;*
se $y + x$ *e* $y + z$ *esistono in* E *allora* $[x \leq z \Leftrightarrow y + x \leq y + z]$*;*

(V4) $\forall \quad x, y \in E \quad \exists \quad u, v \in E$ *tali che* $u + x, x + v$ *e* $u + (x \wedge y), (x \wedge y) + v$ *esistono in* E *e si ha* $u + x = x \vee y = x + v$ *e* $u + (x \wedge y) = y = (x \wedge y) + v$.

Nel resto del paragrafo indicheremo con E uno pseudo spazio di Vitali e con E^+ indicheremo l'insieme degli elementi di E maggiori di 0.

Usando il metodo di Schmidt in [37, Teorema 2.10], si prova che $(E, \leq)$ è un reticolo distributivo.
Uno spazio di Vitali è uno pseudo spazio di Vitali in cui l'operazione di addizione parziale è commutativa.

In virtù della (V4), possiamo definire due operazioni di differenza parziali, date da:

$c\backslash b = a$ se e solo se $c = a + b$ e $b/c = a$ se e solo se $c = b + a$.

Segue dalle (V3) e (V4) che se $a \leq b$ allora ci sono due elementi $e, f \in E$ tali che $a + e = b = f + a$. Quindi $a/b = e$ e $b\backslash a = f$ esistono in E e verificano la relazione:

$a + (a/b) = b = (b\backslash a) + a$.

Proposizione 1.3.2. *Per $a, b \in E$ abbiamo $a \leq b$ se e solo se $b\backslash a \geq 0$ se e solo se $a/b \geq 0$.*

Dimostrazione. Infatti se $b\backslash a \geq 0$ allora $b = (b\backslash a) + a \geq 0 + a = a$. Invece se $a \leq b$ allora $b = (b\backslash a) + a \geq 0 + a = a$ e da (V3) segue $b\backslash a \geq 0$. □

Proposizione 1.3.3. *Per ogni $x, y \in E$ si ha*

$(x \vee y)\backslash x = y\backslash(x \wedge y)$ *e* $x/(x \vee y) = (x \wedge y)/y$.

Proposizione 1.3.4. *Se $x + y$ esiste in E e $x_1 \leq x$ e $y_1 \leq y$ allora $x_1 + y_1$ esiste in E e si ha $x_1 + y_1 \leq x + y$.*

Dimostrazione. Osserviamo che

$x + y = ((x\backslash x_1) + x_1) + (y_1 + (y_1/y)) =$

dalla (V1)

$=(x\backslash x_1) + (x_1 + y_1) + (y_1/y)$

quindi $(x_1 + y_1)$ esiste in E, ed utilizzando la (V3) segue $x_1 + y_1 \leq x + y$. □

Proposizione 1.3.5. *Per tutti $x, y \in E$ abbiamo*

$(x\backslash(x \wedge y)) \wedge (y\backslash(x \wedge y)) = 0 = ((x \wedge y)/x) \wedge (x \wedge y)/y)$.

Dimostrazione. Poniamo $u = x\backslash(x \wedge y) \geq 0$ e $v = y\backslash(x \wedge y) \geq 0$. Quindi $u \wedge v \geq 0$. Sia $z \leq u, v$. Da (V3) segue che $z + (x \wedge y) \leq u + (x \wedge y) = x$ e $z + (x \wedge y) \leq v + (x \wedge y) = y$. Dunque $z + (x \wedge y) \leq x \wedge y$ e quindi $z \leq 0$. $\square$

Usando le proprietà delle differenze è facile vedere che l'operazione di somma è ancora distributiva rispetto alle operazioni del reticolo sia da destra che da sinistra.

Proposizione 1.3.6. *Se $x\backslash a, x\backslash b \in E$ allora $x\backslash(a \wedge b) \in E$ e*
$x\backslash(a \wedge b) = (x\backslash a) \vee (x\backslash b)$.
Analogamente se $a/x, b/x \in E$ allora $(a \wedge b)/x \in E$ e
$(a \wedge b)/x = (a/x) \vee (b/x)$.

Dimostrazione. Proviamo solo la prima equazione, dato che la seconda si prova in modo analogo.
Sia $x\backslash a = z$. Allora $x = z + a \geq z + (a \wedge b)$. Dunque $x\backslash(a \wedge b)$ esiste in E e $x\backslash(a \wedge b) \geq x\backslash a$; analogamente $x\backslash(a \wedge b) \geq x\backslash b$. Segue che $x\backslash(a \wedge b) \geq (x\backslash a) \vee (x\backslash b)$.
Sia ora $p \geq x\backslash a, x\backslash b$. Quindi $p = u_1 + (x\backslash a) = u_2 + (x\backslash b)$, per qualche $u_1, u_2 \geq 0$. Allora $p+a = u_1+x \geq x, p+b = u_2+x \geq x$, e $(p+a)\wedge(p+b) \geq x$. Abbiamo allora $(p+a)\wedge(p+b) = u+x$ per qualche $u \geq 0$. Dalla distributività della somma rispetto all'estremo inferiore segue che $p + (a \wedge b) = u + x \geq x$, e questo prova l'equazione. $\square$

Proposizione 1.3.7. *$x\backslash(a \vee b)$ esiste E se e solo se $x\backslash a, x\backslash b \in E$. In tal caso caso $x\backslash(a \vee b) = (x\backslash a) \wedge (x\backslash b)$.*

$(a \vee b)/x$ esiste E se e solo se $a/x, b/x \in E$. In tal caso caso $(a \vee b)/x = (a/x) \wedge (b/x)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $z := x\backslash(a \vee b)$ esista in E. Allora $x = z+(a\vee b) \geq z+a$ e $x = u+z+a$ per qualche $u \geq 0$. Segue che $x\backslash a = u+z \geq z$; ed in modo analogo si prova che $x\backslash b \geq z$, quindi $(x\backslash a) \wedge (x\backslash b) \geq z$. Sia ora $v \leq x\backslash a, x\backslash b$. Allora $v/x \geq a, b$, $v/x \geq a\vee b$, da cui segue $x \geq v+a, x \geq v+b$. Dunque si ha $x \geq (v + a) \vee (v + b) = v + (a \vee b)$, e $z = x\backslash(a \vee b) \geq v$, che prova l'uguaglianza. Viceversa supponiamo che $x\backslash a, x\backslash b \in E$. Scegliamo $p \leq x\backslash a, x\backslash b$. Allora $a \leq p/x$, $b \leq p/x$ e $a \vee b \leq p/x$. Per qualche $w \geq 0$ si ha allora $w + (a \vee b) = p/x$ e $p + w = x\backslash(a \vee b)$. □

Proposizione 1.3.8. *Se $x \leq 0$ allora $x/0 = 0\backslash x$ e $0\backslash(0\backslash x) = x = (0\backslash x)/0 = (x/0)/0$.*

Dimostrazione. Abbiamo $0\backslash x = (0\backslash x)+0 = (0\backslash x)+x+(x/0) = 0+(x/0) = x/0$. □

Proposizione 1.3.9. *Se $x, y \leq 0$ e $x + y$ esiste in E allora $(x + y)/0 = (y/0) + (x/0)$ e $0\backslash(x + y) = (0\backslash y) + (0\backslash x)$.*

Dimostrazione. Abbiamo $0\backslash(x+y)+(x+y) = 0 = (0\backslash y)+y$, quindi $0\backslash(x+y) + x = (0\backslash y) = (0\backslash y) + 0 = (0\backslash y) + (0\backslash x) + x$, da cui segue per la (V3) segue $0\backslash(x + y) = (0\backslash y) + (0\backslash x)$. □

Proposizione 1.3.10. *1. Se $x\backslash b, b\backslash a \in E$ allora anche $x\backslash a$ esiste in E e si ha*

$$x\backslash a = (x\backslash b) + (b\backslash a).$$

Se $a \leq b$ *allora* $x \backslash b \leq x \backslash a$.

Se $b/y, a/b \in E$ *allora anche* a/y *esiste in* E *e si ha*

$$a/y = (a/b) + (b/y).$$

Se $a \leq b$ *allora* $b/y \leq a/y$.

2. *Se* $a \leq b$ *e* $a \backslash x, b \backslash x \in E$ *allora* $a \backslash x \leq b \backslash x$ *e*

$$b \backslash x = (x \backslash a) + (a \backslash x).$$

Se $a \leq b$ *e* $x/a, x/b \in E$ *allora* $x/a \leq x/b$ *e*

$$x/b = (x/a) + (a/b).$$

Dimostrazione. 1.
Basta osservare che $x = (x \backslash b) + b = (x \backslash b) + (b \backslash a) + a$. Inoltre se $a \leq b$ si ha $b \backslash a \geq 0$ e quindi anche la disuguaglianza è provata.
2.
Basta osservare che $(b \backslash x) + x = b = (b \backslash a) + a = (b \backslash a) + (a \backslash x) + x$ e applicare la (V3). $\square$

Utilizzando le proposizioni provate fino ad ora è facile dimostrare

Proposizione 1.3.11. $(a \vee b) \backslash x$ *esiste se e solo se* $a \backslash x, b \backslash x$ *esistono in* E. *Allora* $(a \vee b) \backslash x = (a \backslash x) \vee (b \backslash x)$.
$x/(a \vee b)$ *esiste se e solo se* $x/a, x/b$ *esistono in* E. *Allora* $x/(a \vee b) = (x/a) \vee (x/b)$.

Usando la stessa tecnica di Schmidt in [37], abbiamo il seguente tipo di **decomposizione di Riesz** $(RPD)_0$

Proposizione 1.3.12. *Se* $c \leq a + b$ *allora esistono* $a_1 \leq a$ *e* $b_1 \leq b$ *tali che* $c = a_1 + b_1$.

In [25, Proposizione 5.3] è stato provato E^+ soddisfa la seguente forma di **decomposizione di Riesz** $(RDP)_2$:
se $a_1, a_2, b_1, b_2 \in E^+$ sono tali che $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$, esistono allora $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} \in E^+$ per cui si ha $a_1 = c_{11} + c_{12}, a_2 = c_{21} + c_{22}, b_1 = c_{11} + c_{21}, b_2 = c_{12} + c_{22}$ e $c_{12} \wedge c_{21} = 0$.

Proposizione 1.3.13. *Per ogni* $x \in E$ *poniamo* $x^+ := x \vee 0$*,* $x^- := (x \wedge 0)/0$*. Allora* $x^+ \wedge x^- = 0, x = x^+ \backslash x^- = x^-/x^+$ *e l'elemento* $|x| := x^+ + x^-$ *è definito in* E*. Infine si prova che* $x^- + (x \wedge 0) = 0 = (x \wedge 0) + x^-$*.*

Dimostrazione. $x^+ = x \vee 0 = x + (x/(x \vee 0)) = x + ((x \wedge 0)/0) = x + x^-$
inoltre
$x^+ = x \vee 0 = ((x \vee 0)\backslash x) + x = (0 \backslash (x \wedge 0)) + x = x^- + x$.
Osservando che
$0 = (x \wedge 0) + ((x \wedge 0)/0) = (x + (x \wedge 0)/0) \wedge ((x \wedge 0)/0)$
segue $x^+ \wedge x^- = (x \vee 0) \wedge ((x \wedge 0)/0) = (x + ((x \wedge 0)/0)) \wedge ((x \wedge 0)/0) = 0$.
Il resto della proposizione segue banalmente. □

Proposizione 1.3.14. *Se* $a, b \in E$ *sono tali che* $a \leq 0 \leq b$ *allora* $a + b$ *e* $b + a$ *sono definiti in* E *e si ha* $a + b = a^-/b$ *e* $b + a = b \backslash a^-$*.*

Dimostrazione. Essendo $a \leq 0 \leq b$, e lo 0 sommabile con b, dalla Proposizione 1.3.4 segue che $a + b$ e $b + a$ esistono in E. Poiché $a = (a/0)/0$, utilizzando le Proposizioni 1.3.8 e 1.3.10 abbiamo che $a + b = ((a/0)/0) + (0/b) =$

a^-/b.

L'altra uguaglianza si prova in modo analogo. $\square$

Proposizione 1.3.15. *Se* $x = y + a = b + y$, *allora* $x + a^- = y + a^+$ *e* $b^- + x = b^+ + y$.

Dimostrazione. Abbiamo

$x = y + a = y + a^+ \backslash a^-$

$x + 0 = y + a^+ \backslash a^- + 0$

$x + a^- + (a \wedge 0) = y + a^+ \backslash a^- + a^- + (a \wedge 0)$

$x + a^- = y + a^+$.

In modo analogo si prova anche la seconda uguaglianza. $\square$

Esempi

1. Un ℓ-gruppo non commutativo G è un esempio di pseudo spazio di Vitali.

2. Sia G un ℓ-gruppo non commutativo e consideriamo il prodotto lessicografico $\mathbb{Z}\overrightarrow{\times}G$; ricordiamo che $(n, g) \leq (m, h)$ iff $n < m$ oppure $n = m$ e $g \leq h$. L'insieme $E = \{(n, g) : n \geq 0, g \in G\}$ con l'operazione di somma e di reticolo derivanti da $G\overrightarrow{\times}\mathbb{Z}$, è uno pseudo spazio di Vitali in cui l'operazione di somma è totale. Ovviamente, se G fosse abeliano allora E sarebbe uno spazio di Vitali.

1.4 Effect Algebre, GEA e GPE

Introduciamo in questo paragrafo delle nuove strutture, delle quali gli pseudo spazi di Vitali positivi (o clan minimali positivi) sono dei casi particolari. Nel capitolo successivo, sfrutteremo i risultati ottenuti da Dvurečenskij e Vetterlein su queste strutture in [24] e [25] e li estenderemo agli pseudo spazi di Vitali (o clan minimali).

Definizione 1.4.1. *Un* ***Effect Algebra*** *è un sistema* $(E, \oplus, 0, 1)$ *costituito da un insieme* E *con due elementi speciali* $0, 1 \in E$*, chiamati zero e unità e da un'operazione binaria parziale* $\oplus$ *soddisfacenti le seguenti condizioni per* $p, q, s \in E$

(E1) se $p \oplus q$ *è definito allora anche* $q \oplus p$ *è definito e si ha* $p \oplus q = q \oplus p$ *(legge commutativa);*

(E2) se $p \oplus q$ *e* $(p \oplus q) \oplus s$ *esistono allora* $q \oplus s$ *e* $p \oplus (q \oplus s)$ *esistono e in questo caso si ha* $(p \oplus q) \oplus s = p \oplus (q \oplus s)$ *(legge associativa);*

(E3) per ogni $p \in E$ *esiste un unico* $q \in E$*, detto ortocomplemento di* p*, tale* $p \oplus q$ *esiste e si ha* $p \oplus q = 1$ *(legge ortosupplementare);*

(E4) se $p \oplus 1$ *è definito allora* $p = 0$ *(zero-legge).*

Per la definizione di Effect algebra abbiamo seguito l'articolo [26]; alcuni autori chiamano le Effect algebre anche "unsharp ortoalgebre". Per le prossime definizioni seguiamo [24] e [25].

Definizione 1.4.2. *Una* ***Effect Algebra Generalizzata (GEA)*** *è un sistema* $(E, \oplus, 0)$ *soddisfacente le condizioni (E1) e (E2) e le seguenti condizioni*

(E3') se $a \oplus b = a \oplus c$ allora $b = c$ (legge di cancellazione);

(E4') se $a \oplus b = 0$ allora $a = b = 0$ (legge positiva);

(E5) per ogni $a \in E$ si ha $a \oplus 0 = a$.

Inoltre in E definiamo la seguente relazione d'ordine
$a \leq b$ if, for some $c \in E$, $c \oplus a = b$.

Definizione 1.4.3. *Una **Pseudo Effect Algebra Generalizzata (GPE)** è una effect algebra generalizzata non commutativa, dunque un sistema $(E, +, 0)$ per il quale valgono le seguenti condizioni*

(GPE1) $x + y$ e $(x + y) + z$ esistono se e solo se $y + z$ e $x + (y + z)$ esistono e in questo caso si ha $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(GPE2) Se $a + b$ esiste allora troviamo due elementi $e, d \in E$ tali che $b + e$ e $d + a$ esistono e si ha $a + b = d + a = b + e$;

(GPE3) se $x + y$ e $z + y$ esistono in E e sono uguali allora $x = z$. Se $y + x$ e $y + z$ esistono in E e sono uguali allora $x = z$;

(GPE4) Se $a + b$ esiste ed è $a + b = 0$ allora $a = b = 0$;

(GPE5) $\forall x \in E$ si ha che $0 + x$ e $x + 0$ esistono in E e si ha $x + 0 = x = 0 + x$.

Inoltre definiamo la seguente relazione d'ordine per ogni $a, b \in E$
$a \leq b$ se e solo se $a + c = b$ per qualche $c \in E$ se e solo se $d + a = b$ per qualche $d \in E$.
Da questa relazione segue che lo 0 è minimale in E.

Per una GPE definiamo la condizione (A) come segue

(A) E è un semireticolo inferiore e soddisfa la condizione $(RDP)_0$[1].

È semplice verificare che uno pseudo spazio di Vitali positivo è una GPE tale che $(E, \leq)$ è un reticolo; mentre ogni spazio di Vitali positivo è una GEA tale che $(E, \leq)$ è un reticolo.

Viceversa in [24, Propositione 5.4] è dimostrato che se $(E, +, 0)$ è una GPE tale che $(E, \leq)$ è un reticolo soddisfacente la $(RDP)_0$, oppure, equivalentemente, se E soddisfa la condizione (A) e ogni coppia di suoi elementi ha estremo superiore in E allora $(E, \leq, +, 0)$ è uno pseudo spazio di Vitali positivo.

[1] Se $c \leq a + b$ allora esistono $a_1 \leq a$ e $b_1 \leq b$ tali che $c = a_1 + b_1$

2 Teoremi di Rappresentazione e Teorema di Loomis-Sikorski

2.1 Teoremi di Rappresentazione

Siano E e F due pseudo spazi di Vitali. Una funzione f è detta un **omomorfismo** di E in F se:

1. per ogni coppia (x, y) di elementi sommabili di E si ha che $f(x), f(y)$ è una coppia di elementi sommabili di F e $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. per ogni $x, y \in E$, $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ e $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$

Segue che, se $f : E \longrightarrow F$ è un omomorfismo di pseudo spazi di Vitali, per ogni $x, y \in E$ con $x \leq y$ abbiamo $f(x) \leq f(y)$. In particolare $f(0) = 0$.
Siano G_1 e G_2 due ℓ-gruppi. Una funzione f è detta un **ℓ-omomorfismo** di G_1 in G_2 se per ogni coppia (x, y) di elementi di G_1 si ha:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ e $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

Il risultato principale che si trova in [25] è un Teorema di Rappresentazione per GPE. Per la dimostrazione di tale risultato, gli autori utilizzano una variante della cosidetta "word"tecnica, introdotta da Bear in [2] e Wyler in [44]. Riportiamo di seguito tale risultato.

Teorema 2.1.1. *Sia E una GPE soddifacente la condizione (A) allora E può essere isomorficamente immersa nel cono positivo di un ℓ-gruppo G, in modo che estremo inferiore e superiore sono preservati, ed è tale che la sua immagine è un sottoinsieme convesso di G e lo genera.*

Alla fine del capitolo precedente avevamo visto che, in particolare, gli pseudo spazi di Vitali positivi sono esempi i GPE soddisfacenti la condizione (A), quindi il suddetto Teorema vale anche per loro.
In [23] si è esteso tale risultato agli pseudo spazi di Vitali ottenendo il seguente Teorema.

Teorema 2.1.2. *Sia E uno pseudo spazio di Vitali. Allora esiste un ℓ-gruppo G ed un omomorfismo iniettivo di spazi di Vitali, $\overline{\phi}$, di E in G. Inoltre G può essere scelto tale che $\overline{\phi}(E^+)$ genera G.*

Dimostrazione. Dal Teorema 2.1.1 sappiamo che esiste un ℓ-gruppo G ed un omomorfismo iniettivo di pseudo spazi di Vitali, ϕ, di E^+ nel cono positivo di G tale che $\phi(E^+)$ è convesso e genera G. Ora estenderemo la ϕ ad una funzione iniettiva $\overline{\phi} : E \to G$.
Claim 1. S*e $x = y_1 \backslash y_2$ per qualche $y_1, y_2 \geq 0$ allora $\phi(y_1) - \phi(y_2) = \phi(x^+) - \phi(x^-)$. Analogamente se $x = y_1 / y_2$ per qualche $y_1, y_2 \geq 0$ allora $-\phi(y_1) + \phi(y_2) = -\phi(x^-) + \phi(x^+) = \phi(x^+) - \phi(x^-)$.*
Infatti

$y_1 \backslash y_2 = x = x^- / x^+ = 0 + (x^- / x^+)$
$y_1 \backslash y_2 = (x \wedge 0) + x^- + (x^- / x^+)$
$y_1 \backslash y_2 = (x \wedge 0) + x^+$
$y_1 = (x \wedge 0) + x^+ + y_2$
$(x \wedge 0) / y_1 = x^+ + y_2$
$((x \wedge 0)/0) + (0/y_1) = x^+ + y_2$
$x^- + y_1 = x^+ + y_2.$
Applicando ϕ otteniamo $\phi(y_1) - \phi(y_2) = \phi(x^+) - \phi(x^-)$ ed in modo analogo

anche l'altra uguaglianza. Infine se $a, b \in G$ sono tali che $a + b = b + a$ allora $a - b = -b + a$, infatti se $a - b = g$ allora $a = g + b$ e $b + a = b + g + b = a + b$, da cui $a = b + g$, e quindi $g = -b + a$. Questo prova l'ultima parte del claim.

Claim 2. *Definiamo $\overline{\phi} : E \to G$ attraverso $\overline{\phi}(x) = \phi(x^+) - \phi(x^-)$, per $x \in E$. Allora $\overline{\phi}$ è ben definita e $\overline{\phi}(x + y) = \overline{\phi}(x) + \overline{\phi}(y)$ per ogni coppia di $x, y \in E$ per cui la somma e definita in E.*

Dal Claim 1, $\overline{\phi}(x) := \phi(x^+) - \phi(x^-)$ è un'estensione di ϕ su tutto E ben definita e non dipende dalla rappresentazione di x come differenza di due elementi positivi.

Sia $z = x + y$. si ha:

$z^+ \backslash z^- = (x^- / x^+) + (y^+ \backslash y^-)$

$z^+ \backslash z^- = 0 + (x^- / x^+) + (y^+ \backslash y^-) + 0$

$z^+ \backslash z^- = (x \wedge 0) + x^- + (x^- / x^+) + (y^+ \backslash y^-) + y^- + (y \wedge 0)$

$z^+ \backslash z^- = (x \wedge 0) + x^+ + y^+ + (y \wedge 0)$

$z^+ = (x \wedge 0) + x^+ + y^+ + (y \wedge 0) + z^-$

$(x \wedge 0)/z^+ = x^+ + y^+ + (y \wedge 0) + z^-$

Posto $a = (y \wedge 0) + z^-$, si ha $a = a^+ \backslash a^-$. Allora

$((x \wedge 0)/0) + (0/z^+) = x^+ + y^+ + a^+ \backslash a^-$

$x^- + z^+ + a^- = x^+ + y^+ + a^+$.

Applicando ϕ all'ultima uguaglianza otteniamo $\phi(x^-) + \phi(z^+) + \phi(a^-) = \phi(x^+) + \phi(y^+) + \phi(a^+)$, che da $\phi(x^-) + \phi(z^+) = \phi(x^+) + \phi(y^+) + \phi(a^+) - \phi(a^-) = \phi(x^+) + \phi(y^+) - \phi(y \wedge 0) + \phi(z^-)$. Abbiamo allora $\overline{\phi}(z) = \phi(z^+) - \phi(z^-) = -\phi(x^-) + \phi(x^+) + \phi(y^+) - \phi(y^-) = \overline{\phi}(x) + \overline{\phi}(y)$.

Claim 3. *Se $a \backslash b$ esiste in E allora $\overline{\phi}(a \backslash b) = \overline{\phi}(a) - \overline{\phi}(b)$.*

Se a/b esiste in E allora $\overline{\phi}(a/b) = -\overline{\phi}(a) + \overline{\phi}(b)$.

La dimostarzione è banale.

Claim 4. *$\overline{\phi}$ preserva $\vee$ e $\wedge$.*

Sia $x = a \vee b$. Allora $|x| \geq a, b$ e $|x|\backslash a, |x|\backslash b \in E$. Dalla Proposizione 1.3.7 segue che $|x|\backslash(a \vee b) = (|x|\backslash a) \wedge (|x|\backslash b)$. Poiché ϕ preserva $\wedge$ in E^+, dall'ultima uguaglianza e dal Claim 3 abbiamo $\phi(|x|\backslash(a \vee b)) = \phi(|x|\backslash a) \wedge \phi(|x|\backslash b)$. Segue $\phi(|x|) - \overline{\phi}(a \vee b) = (\overline{\phi}(|x|) - \overline{\phi}(a)) \wedge (\overline{\phi}(|x|) - \overline{\phi}(b)) = \overline{\phi}(|x|) - (\overline{\phi}(a) \vee \overline{\phi}(b))$, da cui si da $\overline{\phi}(a \vee b) = \overline{\phi}(a) \vee \overline{\phi}(b)$.

Claim 5. *$\overline{\phi}$ è iniettiva.*

Sia $\overline{\phi}(x) = \overline{\phi}(y)$. Scegliamo $z \geq x, y$. Allora $z\backslash x, z\backslash y \in E$. Quindi $\phi(z\backslash x) = \overline{\phi}(z) - \overline{\phi}(y) = \phi(z\backslash y)$. Dall'iniettività della ϕ segue che $z\backslash x = z\backslash y$, da cui $x = y$.

□

Il Teorema 2.1.2 può essere ulteriormente specificato come segue.

Teorema 2.1.3. *Sia E uno pseudo spazio di Vitali. Esiste un unico ℓ-gruppo in cui E è isomorficamente immerso, tale che se $h : E \to K$, per qualche ℓ-gruppo K, preserva $+, \vee$ e $\wedge$, allora esiste un unico isomorfismo di ℓ-gruppi $\psi : G \to K$ tale che $h = \psi \circ \phi$.*

Dimostrazione. Dai Teoremi 2.1.1 e 2.1.2 sappiamo che esiste un ℓ-gruppo G ed un omomorfismo iniettivo di pseudo spazi di Vitali, ϕ, di E^+ nel cono positivo di G, e tale omomorfismo può essere esteso a tutto E. Indichiamo tale estensione ancora con ϕ. Poiché E^+ è una GPE, da [25, Teorema 6.2], segue che esiste un unico isomorfismo di ℓ-gruppi $\psi : G \to K$ tale che $h(x) = \psi(\phi(x)), \quad \forall x \in E^+$. Ripetendo i Claims 1-5 della dimostrazione del Teorema 2.1.2. si trova che $h(x) = \psi(\phi(x)), \quad \forall x \in E$. □

L'ℓ-gruppo in cui uno pseudo spazio di Vitali E può essere immerso è detto **gruppo rappresentativo** per E o anche **gruppo universale**. Osserviamo che uno pseudo spazio di Vitali E è commutativo (è uno spazio di Vitali) se e solo se il suo ℓ-gruppo rappresentativo è abeliano.

Proposizione 2.1.4. *Siano $x, y \in E, g \in G$, con G gruppo universale di E, tali che $x \leq y$ e $\overline{\phi}(x) \leq g \leq \overline{\phi}(y)$. Allora esiste un unico $z \in E$ tale che $x \leq z \leq y$ e $\overline{\phi}(z) = g$.*

Dimostrazione. Siano $\widehat{x} = \overline{\phi}(x), \widehat{y} = \overline{\phi}(y) \in G$. Allora $0 = g - \widehat{x} \leq \widehat{y} - \widehat{x} = \overline{\phi}(y \backslash x) = \phi(y \backslash x)$. Poiché $\phi(E^+)$ è un sottoinsieme convesso di G, esiste un unico $z_0 \in E^+$ tale che $0 \leq z_0 \leq y \backslash x$ e $\phi(z_0) = g - \widehat{x}$. Se poniamo $z = z_0 + x$, abbiamo $x \leq z \leq y$ e $\overline{\phi}(z) = \overline{\phi}(z_0) + \overline{\phi}(x) = g - \widehat{x} + \widehat{x} = g$. □

Definizione 2.1.5. *Un elemento $u \geq 0$ di uno pseudo spazio di Vitali E è detto essere uno **strong unit** per E se per ogni $x \in E$ esiste un intero $n \geq 1$ tale che $|x| \leq nu = u_1 + \cdots + u_n$ dove $u_1 = \ldots = u_n = u$.*
*Un elemento posisitivo u di un ℓ-gruppo G è detto essere uno **strong unit** per G se per ogni $g \in G$ esiste un intero $n \geq 1$ tale che $g \leq nu$. Inoltre se u è uno strong unit per G, la coppia (G, u)è detta un **unital ℓ-gruppo**.*

Diciamo che $h : (E, u) \to (F, w)$ è **un omomorfismo tra pseudo spazi di Vitali con strong unit** se è un omomorfismo tra spazi di Vitali e $h(u) = w$. Analogamente $k : (G_1, u_1) \to (G_2, u_2)$ è **un omomorfismo tra ℓ-gruppi con strong unit (oppure un unital ℓ-omomorfismo)** se è un ℓ-omomorfismo e $k(u_1) = u_2$.

In particolare abbiamo che per pseudo spazi di Vitali con strong unit il Teorema 2.1.2 diventa

Teorema 2.1.6. *Se* (E, u) *è uno pseudo spazio di Vitali con strong unit allora il gruppo universale di* E *è un unital* ℓ*-gruppo* (G, v)*, tale che, detta* ϕ *l'immersione di* E *in* G*, si ha che* $\phi(u) = v$*.*

Da quest'ultimo Teorema segue in particolare che possiamo identificare lo strong unit di E con quello del suo gruppo universale.

2.2 Pseudo spazi di Vitali Archimedei

Vediamo ora che grazie al Teorema di rappresentazione, uno pseudo spazio di Vitali con certe proprietà è necessariamente commutativo, quindi uno spazio di Vitali.

Definizioni 2.2.1. *Uno pseudo spazio di Vitali E è **Archimedeo** se, dati $a, b \in E$ tali che $na = \sum_{i=1}^{n} a_i$ (dove $a_i = a$) esiste in E e $na \leq b$ per ogni intero $n \geq 1$, segue che $a \leq 0$.*
*Uno pseudo spazio di Vitali E è **σ-Dedekind completo** (**σ-monotono completo**) se per ogni sua successione (per ogni sua successione monotona crescente) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata superiormente abbiamo che $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$ esiste in E.*

Osserviamo in particolare che per provare che uno pseudo spazio di Vitali è Archimedeo basta provare che $a, b \in E^+$ tali che $na = \sum_{i=1}^{n} a_i$ (dove $a_i = a$) esiste in E e $na \leq b$ per ogni intero $n \geq 1$ implica $a = 0$. Infatti il caso generale segue dal fatto che: se $a, b \in E$ e $na \leq b$ allora $na^+ = (na)^+ = na \vee 0 \leq b \vee 0 = b^+$ per ogni intero $n \geq 1$, implica $a^+ = 0$ e quindi $a = a^+ - a^- = -a^- \leq 0$.
Inoltre, essendo E un reticolo, la σ-completezza monotona equivale alla σ-Dedekind completezza.
Premettiamo una serie di proposizioni utili in seguito, in particolare indichiamo con f l'immersione di E nel suo gruppo rappresentativo.

Proposizione 2.2.2. *Se $f(a_1) + \cdots + f(a_n) = f(b)$ dove $a_1, \ldots, a_n, b \in E^+$ allora $a_1 + \cdots + a_n$ esiste in E ed è uguale a b.*

Dimostrazione. Usiamo l'induzione su n. Per $n = 1$ la proposizione risulta vera. Supponiamo allora che sia vera per $i \leq n$, e consideriamo:

$f(a_1) + \cdots + f(a_n) + f(a_{n+1}) = f(b)$.

Così, posto $c = f(a_1) + \cdots + f(a_n)$ abbiamo $0 \leq c \leq f(b)$, quindi poiché $f(E)$ è un insieme convesso e $c \in f(E)$, abbiamo che esiste $x \in E$ tale che $c = f(x)$ con $0 \leq x \leq b$.

Allora $f(x) = f(a_1) + \cdots + f(a_n)$ e dall'ipotesi d'induzione segue che $a_1 + \cdots + a_n$ esiste in E ed è uguale a x. Infine, essendo $f(b) = f(x) + f(a_{n+1})$ sempre per l'ipotesi induttiva si ha che $x + a_{n+1}$ esiste in E ed è uguale a b, segue allora la tesi. $\square$

Proposizione 2.2.3. *Se $f(a_1) + \cdots + f(a_n) \leq f(b)$ dove $a_1, \dots, a_n, b \in E^+$ allora $a_1 + \cdots + a_n$ esiste in E ed è minore o uguale a b.*

Dimostrazione. Ricordiamo che $f(E)$ è un sottoinsieme convesso di G, allora $f(a_1) + \cdots + f(a_n) \leq f(b)$ implica che esiste $c \in G^+$ tale che $f(a_1) + \cdots + f(a_n) + c = f(b)$, ma $c \in G$ implica che esistono $x_1, \dots, x_m \in E^+$ tali che $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} f(x_i) = c$, dunque:

$f(a_1) + \cdots + f(a_n) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} f(x_i) = f(b)$, dalla proposizione precedente segue allora che $a_1 + \cdots + a_n + \sum_{i=1}^{m} x_i$ esiste in E ed è uguale a b, allora $a_1 + \cdots + a_n$ esiste in E ed è minore o uguale a b. $\square$

Teorema 2.2.4. *Ogni σ-Dedekind completo pseudo spazio di Vitali E è Archimedeo.*

Dimostrazione. Sia $a \in E^+$ tale che na è definito in E e $na \leq b$ per ogni $n \geq 1$. La successione $(na)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata superiormente, allora $\displaystyle\bigvee_{n=1}^{\infty} na$ esiste in E. Per $k \geq 1$, abbiamo: $ka + a = (k+1)a \leq \displaystyle\bigvee_{n=1}^{\infty} na$, poiché $a \leq \displaystyle\bigvee_{n=1}^{\infty} na$

abbiamo che $\bigvee_{n=1}^{\infty} na - a$ è definito in E e:

$ka \leq \bigvee_{n=1}^{\infty} na - a$ per ogni $k \geq 1$.

Segue che:

$\bigvee_{k=1}^{\infty} ka = \bigvee_{n=1}^{\infty} na \leq \bigvee_{n=1}^{\infty} na - a \leq \bigvee_{n=1}^{\infty} na$

che implica $a = 0$. $\square$

Teorema 2.2.5. *Sia $(E, \leq, +, 0)$ uno pseudo spazio di Vitali, e G il suo gruppo rappresentativo (tramite l'isomorfismo di pseudo spazi di Vitali f) . Allora E è Archimedeo se e solo G è Archimedeo.*

Dimostrazione. Se G è Archimedeo, poiché E è immerso in G, anche E è Archimedeo.

Sia E Archimedeo. Assumiamo che $ng \leq v$ per $g, v \in G^+$ e $n \geq 1$. Poiché $f(E^+)$ genera G, esistono $x_1, \ldots, x_n \in E^+$ tali che $v = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$. Procediamo per induzione su n. Per $n = 1$, abbiamo $v = f(x_1)$, allora $0 \leq g \leq v = f(x_1)$ implica, dalla convessità di $f(E^+)$, che esiste un unico $x \in E^+$, con $0 \leq x \leq x_1$, tale che $f(x) = g$. Poiché $nf(x) \leq f(x_1)$ per ogni $n \geq 1$ dalla precedente Proposizione, otteniamo che nx è definito in E per ogni $n \geq 1$ e $nx \leq x_1$. Segue $x = 0$ e quindi $g = 0$.

Sia la tesi verificata per $k \leq n$. Assumiamo $ng \leq v = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) + f(x)$ per $n \geq 1$, dove $x = x_{n+1} \in E^+$. Allora $ng - f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ per ogni $n \geq 1$. Usando lo stesso ragionamento di [16, Proposition 4.1], riusciamo a provare che $(ng - f(x)) \vee 0 = 0$ per ogni $n \geq 1$. Quindi $ng \leq f(x)$, per $n \geq 1$. Così, applicando l'ipotesi induttiva, possiamo concludere che $g = 0$. $\square$

Finalmente possiamo provare il risultato principale di questo paragrafo.

Teorema 2.2.6. *Ogni σ-Dedekind completo pseudo spazio di Vitali E è commutativo.*

Dimostrazione. Sia G il gruppo rappresentativo di E. Dal Teorema precedente, se E è σ-Dedekind completo allora è Archimedeo, come abbiamo visto questo implica che anche G è Archimedeo, così, come provato in [4, Pag. 317], segue che G è un ℓ-gruppo commutativo. Ovviamente questo implica che anche E è commutativo (poiché $E \subseteq G$). $\square$

2.3 Stati su un pseudo spazio di Vitali e Teorema di Loomis-Sikorski

Sia (E, u) uno pseudo spazio di Vitali con strong unit. Uno **stato su** E è un'applicazione $s : E \to \mathbb{R}$ tale che (i) $s(a + b) = s(a) + s(b)$ per ogni $a, b \in E$ sommabili, (ii) $s(x) \geq 0$ se $x \geq 0$ e (iii) $s(u) = 1$. Denotiamo con $\mathcal{S}(E, u)$ l'insieme di tutti gli stati su E. Uno **stato** s su E è detto **discreto** se $s(E) = \{s(a) : a \in E\} \subseteq \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ per qualche intero $n \geq 1$. Se $s_1, s_2 \in \mathcal{S}(E, u)$, chiamiamo loro **combinazione convessa** lo stato $s = \lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2$ per ogni $\lambda \in [0, 1]$. Uno **stato** s si dice **estremale** se $s = \lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2$ per $0 < \lambda < 1$ implica $s = s_1 = s_2$.

Denotiamo con $\partial\mathcal{S}(E, u)$ l'insieme di tutti gli stati estremali di E.

Analoghe definizioni si possono dare per un ℓ-gruppo, un' effect algebra o una MV-algebra.

Se definiamo in E la topologia debole dicendo che una rete $\{s_\alpha\}_\alpha$ di stati converge allo stato s se per ogni $x \in E$ si ha $s_\alpha(x) \to s(x)$, allora $\mathcal{S}(E, u)$ è uno spazio topologico compatto di Hausdorff, così da [30, Teorema 5.17] segue che ogni stato può essere visto come limite di una combinazione convessa di stati estremali su E. Inoltre, come in [17], si ha che s è uno stato estremale se e solo se $s(a \wedge b) = \min\{s(a), s(b)\} \quad (a, b \in E)$ da cui segue che $\partial\mathcal{S}(E, u)$ è uno spazio compatto.

Detto (G, v) l'unital gruppo universale di E, si può dimostrare che ogni stato (stato estremale,stato discreto) su (E, u) può essere univocamente esteso ad uno stato (stato estremale,stato discreto) sul suo gruppo universale (G, v). Viceversa la restrizione ad E di ogni stato (stato estremale, stato discreto) di (G, v) è uno stato (stato estremale, stato discreto) su (E, u). Se (E, u) è uno spazio di Vitali con order unit $u > 0$, allora $\mathcal{S}(E, u)$ è non vuoto in quanto ogni ℓ-gruppo abeliano ammette uno stato (cfr. [30, Corollario 4.4]).

Daremo di seguito alcune definizioni e teoremi utili per la dimostrazione del teorema principale di questo paragrafo. Se Ω è uno spazio compatto di Hausdorff, l'insieme $C(\Omega)$ delle funzioni reali continue su Ω può essere strutturato in modo da essere un ℓ-gruppo con strong unit la funzione 1. Da [30, Corollario 9.14] segue che ogni σ-Dedekind completo unital ℓ-gruppo abeliano (G, u) è tale che, detto

$A = \{f \in C(\partial\mathcal{S}(G, u)) : f(s) \in s(G), \forall s \quad \text{discreto} \in \partial\mathcal{S}(G, u)\}$

esiste una naturale applicazione $\theta : G \to C(\partial\mathcal{S}(G, u))$, dove $\theta(g)(s) = s(g) \quad \forall s \in \partial\mathcal{S}(G, u)$, che risulta essere un isomorfismo (di ℓ-gruppi con strong unit) di (G, u) su $(A, 1)$.

Definizione 2.3.1. *Un **g-spazio di Vitali** è un sistema non vuoto $\mathcal{V}$ di funzioni limitate definite su un insieme Ω tali che:*

(i) $1 \in \mathcal{V}$

(ii) Se $f, g \in \mathcal{V}$ e $f(\omega) \leq g(\omega)$, per ogni $\omega \in \Omega$, allora $g - f \in \mathcal{V}$.

(iii) Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di $\mathcal{V}$ per la quale esiste $f \in \mathcal{V}$ tale che $f_n \leq f$ (puntualmente) $\forall n \geq 1$, allora $\sup_n f_n \in \mathcal{V}$.

Segue che $(\mathcal{V}, \max, \min, +, 0, 1)$ è uno pseudo spazio di Vitali σ-Dedekind completo con strong unit 1, dove $+$ denota la somma puntuale tra elementi di $\mathcal{V}$ dove questa è definita in $\mathcal{V}$.

Teorema 2.3.2 (Loomis-Sikorski). *Sia (E, u) uno spazio di Vitali σ-Dedekind completo con strong unit u. Allora esiste un g-spazio di Vitali*

$\mathcal{V}$ di funzioni limitate definite su uno spazio compatto di Hausdorff Ω e un σ-omomorfismo suriettivo (di spazi di Vitali) $h : \mathcal{V} \to E$ tale che $h(1) = u$.

Dimostrazione. Poniamo $\Omega = \partial\mathcal{S}(G, u)$, il quale è omeomorfo a $\partial\mathcal{S}(E, u)$ e quindi possiamo identificarli. Definiamo $\mathcal{V}$ l'insieme delle funzioni limitate f definite su $\partial\mathcal{S}(E, u)$ per le quali esiste un $b \in E$ tale che $\{s \in \partial\mathcal{S}(E, u), f(s) \neq \widehat{b}(s)\}$, dove $\widehat{b} : \partial\mathcal{S}(E, u) \to \mathbb{R}$ tale che $\widehat{b}(s) = s(b)(s \in \partial\mathcal{S}(E, u))$, è un sottoinsieme magro di $\partial\mathcal{S}(E, u)$; e scriviamo $f \sim b$.
Con metodi analoghi a quelli usati in [18] possiamo dimostrare che
(1) Se $f_1, f_2 \in \mathcal{V}$ sono tali che $f_1 \leq f_2$ allora se $b_1, b_2 \in E$ sono tali che $f_i \sim b_i, i = 1, 2$ allora $b_1 \leq b_2$.
(2) Se $b_1, b_2 \in E$ sono tali che $f \sim b_i, i = 1, 2$ allora $b_1 = b_2$.
(3)Se $f, g \in \mathcal{V}$ e $f \leq g$, puntualmente, allora $g - f \in \mathcal{V}$. Inoltre $\mathcal{V}$ contiene $\{\widehat{a} : a \in E\}$.
(4) Se $f, g \in \mathcal{V}$ e $f \leq n - g$, per qualche intero $n \geq 1$, allora $f + g \in \mathcal{V}$.
(5) L'estremo superiore di ogni successione crescente limitata superiormente di $\mathcal{V}$ è un elemento di $\mathcal{V}$.
(6) Se $f, g \in \mathcal{V}$ e $a, b \in E$ sono tali che $f \sim a, g \sim b$, allora $\max\{f, g\} \sim a \vee b$ e $\min\{f, g\} \sim a \wedge b$.
Le precedenti proprietà provano che $\mathcal{V}$ è un g-spazio di Vitali; infine posto $h : \mathcal{V} \to E$ tale che $h(f) = b$ se e solo se $f \sim b$, definiamo il σ-omomorfismo cercato. $\square$

2.4 Stati su GPE e Teorema di Loomis-Sikorski

Per gli pseudo spazi di Vitali positivi vale anche un teorema di Loomis-Sikorski differente, derivante dal fatto che questi sono casi particolari di GPE. Diamo ora alcune definizioni e risultati utili in seguito.
Sia K un insieme compatto e convesso (i.e. $\forall x, y \in K, \lambda x + (1-\lambda)y \in K \quad \forall \lambda \in [0,1]$). Una funzione $f : K \to \mathbb{R}$ è detta **affine** se $\forall x, y \in K$ e $\lambda \in [0,1]$ si ha $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
Indichiamo con $\mathrm{Aff}(K)$ l'insieme di tutte le funzioni reali affini su K.
Diciamo che una GPE $(T, +, 0)$ ha:
(1)la **Riesz interpolation property (RIP)** se $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in T$ tali che $a_1, a_2 \leq b_1, b_2$ esiste $c \in T$ tale che $a_1, a_2 \leq c \leq b_1, b_2$.
(2)la **Riesz decomposition property** (RDP) se $a_1, a_2, b_1, b_2 \in T$ sono tali che $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$, esistono allora $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} \in T$ per cui si ha $a_1 = c_{11} + c_{12}, a_2 = c_{21} + c_{22}, b_1 = c_{11} + c_{21}, b_2 = c_{12} + c_{22}$.
(3)la **Riesz decomposition property 1** $(RDP)_1$ se per $a_1, a_2, b_1, b_2 \in T$ tali che $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$, esistono allora $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} \in T$ per cui si ha $a_1 = c_{11} + c_{12}, a_2 = c_{21} + c_{22}, b_1 = c_{11} + c_{21}, b_2 = c_{12} + c_{22}$ e $c_{12} \mathbf{com} c_{21}$, cioé che per ogni $e \leq c_{12}$ e $d \leq c_{21}$ si ha $e + d = d + e$, ovvero commutano.
(4)la **Riesz decomposition property 2** $(RDP)_2$ se $a_1, a_2, b_1, b_2 \in T$ sono tali che $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$, esistono allora $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} \in T$ per cui si ha $a_1 = c_{11} + c_{12}, a_2 = c_{21} + c_{22}, b_1 = c_{11} + c_{21}, b_2 = c_{12} + c_{22}$ e $c_{12} \wedge c_{21} = 0$.

Ovviamente tali definizioni valgono anche per gli ℓ-gruppi positivi e i pseudo spazi di Vitali positivi. Inoltre valgono le seguenti relazioni
$(RDP)_2 \Rightarrow (RDP)_1 \Rightarrow (RDP) \Rightarrow (RIP)$.

Infine se $(T, +, 0)$ è una GPE commutativa $(RDP)_1$ e (RDP) sono equivalenti; invece in un ℓ-gruppo abeliano $(RDP)_1$, (RDP) e (RIP) sono equivalenti.
Siano (E, u) e (F, v) due GPE con strong unit. Una funzione f è detta un **omomorfismo** di E in F se:

1. per ogni coppia (x, y) tali che $a + b$ esiste in E si ha che $f(x) + f(y)$ esiste in F e $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

2. $f(u) = v$

Sia (E, u) una GPE con strong unit e $(RDP)_1$ e (G, u) il suo gruppo rappresentante.
Uno **stato su** E è un'applicazione $s : E \to [0, +\infty[$ tale che (i) $s(a + b) = s(a) + s(b)$ per ogni $a, b \in E$ sommabili e (ii) $s(u) = 1$. Denotiamo con $\mathcal{S}(E, u)$ l'insieme di tutti gli stati su E. Uno **stato** s su E è detto **discreto** se $s(E) = \{s(a) : a \in E\} \subseteq \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ per qualche intero $n \geq 1$. Se $s_1, s_2 \in \mathcal{S}(E, u)$, chiamiamo loro **combinazione convessa** lo stato $s = \lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2$ per ogni $\lambda \in [0, 1]$. Uno **stato** s si dice **estremale** se $s = \lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2$ per $0 < \lambda < 1$ implica $s = s_1 = s_2$.
Denotiamo con $\partial\mathcal{S}(E, u)$ l'insieme di tutti gli stati estremali di E.
Se definiamo in E la topologia debole come per i pseudo spazi di Vitali, ancora segue che $\mathcal{S}(E, u)$ è uno spazio topologico compatto di Hausdorff e ogni stato può essere visto come limite di una combinazione convessa di stati estremali su E. Inoltre si vede che se E soddisfa la $(RDP)_2$ allora $\partial\mathcal{S}(E, u)$ è uno spazio compatto.
Infine ogni stato (stato estremale,stato discreto) su E può essere univocamente esteso ad uno stato (stato estremale,stato discreto) sul suo gruppo

universale G. Viceversa la restrizione ad E di uno stato (stato estremale, stato discreto) di G è uno stato (stato estremale, stato discreto) su E.
In particolare, in accordo con [30, Teorema 11.21], si prova che $\mathrm{Aff}(\mathcal{S}(G,u))$ è un reticolo se e solo se $\partial\mathcal{S}(G,u)$ è un compatto.

Interessante è il seguente risultato (cfr. [22, Teorema 4.1]).

Teorema 2.4.1. *Sia (E,u) una GPE con strong unit e $(RDP)_1$ e (G,u) il suo gruppo rappresentante. Allora E è monotona σ-completa se e solo G lo è. Inoltre in tal caso E e G sono commutativi.*

In accordo con [30, Corollario 16.15] abbiamo un teorema di rappresentazione per po-gruppi (gruppi parzialmente ordinati) e quindi in particolare per gli ℓ-gruppi, per i quali lo enunciamo di seguito.

Teorema 2.4.2. *Sia (G,u) un monotono σ-completo unital ℓ-gruppo con la (RIP). Allora posto*
$A = \{f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{S}(G,u)) : f(s) \in s(G), \forall s \quad \text{discreto} \in \partial\mathcal{S}(G,u)\}$
abbiamo che esiste una naturale applicazione $\phi : G \to \mathrm{Aff}(\mathcal{S}(G,u))$ che definisce un isomorfismo di (G,u) su $(A,1)$.

Sia (E,u) una GPE con strong unit.
Un **g-effect tribe** è un sistema non vuoto $\mathcal{G}$ di funzioni limitate non negative, definite su un insieme non vuoto Ω tali che:

(i) $1 \in \mathcal{G}$

(ii) Se $f, g \in \mathcal{G}$ e $f(\omega) \leq g(\omega)$, per ogni $\omega \in \Omega$, allora $g - f \in \mathcal{G}$.

(iii) Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione monotona di $\mathcal{G}$ limitata superiormente da una funzione $f_0 \in \mathcal{G}$ allora $f = \lim_n f_n \in \mathcal{G}$.

Segue che $(\mathcal{G}, +, 0, 1)$ è una GPE σ-monotona completa, con strong unit 1.

Teorema 2.4.3. *Sia (E, u) una GPE σ-monotona completa con (RDP), con strong unit u. Allora esiste una g-effect tribe $\mathcal{G}$ con (RDP) di funzioni affini definite su uno spazio compatto e convesso Ω e un σ-omomorfismo suriettivo (di GPE con strong unit) $h : \mathcal{G} \to E$.*

Dimostrazione. In accordo con il Teorema 2.1.1, (E, u) può essere isomorficamente immersa nel cono positivo di un unital ℓ-gruppo (G, u) e lo genera. Quindi possiamo identificare E con una parte di G. Inoltre, dal Teorema 2.4.1, E è σ-monotona completa se e solo se lo è G e sono entrambi commutativi. Dal Teorema 2.4.2, sappiamo che (G, u) si può identificare con $(A, 1)$. In paricolare essendo $\mathcal{S}(G, u)$ omeomorfo a $\mathcal{S}(E, u)$ e $\partial\mathcal{S}(G, u)$ omeomorfo a $\partial\mathcal{S}(E, u)$, da [1, Pag. 49], abbiamo che $\partial\mathcal{S}(E, u)$ è uno spazio di Baire, cioé per esso vale il Teorema di Categoria di Baire. Infine, ogni $a \in E$ si può identificare con la funzione affine non negativa $\widehat{a}$ $\quad (\widehat{a}(s) = s(a) \quad \forall s \in \mathcal{S}(E, u))$. Poniamo $\Omega = \mathcal{S}(E, u)$ e $X = \partial\mathcal{S}(E, u)$. Sia f una funzione a valori reali definita su Ω e poniamo
$N(f) := \{x \in X : |f(x)| > 0\}$.
Infine indichiamo con $\mathcal{G}$ l'insieme delle funzioni f affini e limitate definite su Ω tali che esiste un $b \in E$ tale che $\{s \in \partial\mathcal{S}(E, u) : f(s) \neq \widehat{b}(s)\}$ è un sottoinsieme magro di $\partial\mathcal{S}(E, u)$; scriviamo in tal caso $f \sim b$.
Proviamo che $\mathcal{G}$ è una g-effect algebra con (RDP).
(1)Se $f_1, f_2 \in \mathcal{V}$ sono tali che $f_1 \leq f_2$ allora se $b_1, b_2 \in E$ sono tali che

$f_i \sim b_i, i = 1, 2$ allora $b_1 \leq b_2$.
Infatti abbiamo $\{s \in \partial\mathcal{S}(E,u) : 0 < \widehat{b}_1(s) - \widehat{b}_2(s)\} \subseteq N(f_1 - \widehat{b}_1) \cup N(f_2 - \widehat{b}_2)$.
Dal Teorema di categoria di Baire applicato a $\partial\mathcal{S}(E,u)$, segue che nessun suo aperto può essere magro, quindi $\widehat{b}_1(s) \leq \widehat{b}_2(s), \quad \forall s \in \partial\mathcal{S}(E,u)$. Segue dal Teorema di Krein-Mil'man (cfr. [30]) che $s(b_2 - b_1) \geq 0, \quad \forall s \in \mathcal{S}(E,u)$, e quindi da [30, Teorema 7.7] abbiamo $b_1 \leq b_2$. Tale punto implica
(2) se $b_1, b_2 \in E$ sono tali che $f \sim b_i, i = 1, 2$ allora $b_1 = b_2$.
(3)Banalmente Se $f, g \in \mathcal{G}$ e $f \leq g$, puntualmente, allora $g - f \in \mathcal{G}$. Inoltre $\mathcal{G}$ contiene $\{\widehat{a} : a \in E\}$.
(4) Se $g \in \mathcal{G}$ sono tali che $f \leq n - g$ per qualche intero $n \geq 1$ e $f \sim a, g \sim b$ allora da (1) segue che $a \leq (nu - b)$ dove nu è tale che $b + (nu - b) = nu$ da cui si ha che $a + b \in E$. Segue che $N(f + g \sim \widehat{a + b})$ e quindi $f + g \in \mathcal{G}$.
(5) Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione monotona di $\mathcal{G}$ limitata superiormente da una funzione $f_0 \in \mathcal{G}$. Per ogni n scegliamo $b_n \in E$ tale che $f_n \sim b_n$ e $a_0 \in E$ tale che $b_n \leq a_0$ e $f_0 \sim b_0$. Chiamiamo $f = \lim_n f_n, b = \bigvee_{n=1}^{\infty} b_n, b_0 = \lim_n \widehat{b}_n$.
Allora $b \in E$ e $\widehat{b} \in \mathcal{G}$. Abbiamo
$N(f - \widehat{b}) \subseteq N(f - b_0) \cup N(\widehat{b} - b_0)$
e facilmente si vede che
$N(f - b_0) \subseteq \bigcup_{n_1}^{\infty} N(\widehat{b}_n - f_n)$
è un sottoinsieme magro di $\partial\mathcal{S}(E,u)$.
Poiché $mu \geq b = \bigvee_{n=1}^{\infty} b_n$ per qualche intero m concludiamo che $\bigwedge_n (mu - b_n) = (mu - b)$ e $\bigwedge_n ((mu - b_n) - (mu - b)) = 0$, da cui segue che $N(\widehat{b} - b_0)$ è un sottoinsieme magro di $\partial\mathcal{S}(E,u)$, e quindi $f \in \mathcal{G}$.
(6) Infine vogliamo dimostrare che $\mathcal{G}$ ha la (RIP). Siano $\forall f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ tali

che $f_1, f_2 \leq g_1, g_2$ e $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in E$ tali che $f_i \sim a_i$ e $g_i \sim b_i, i = 1, 2$. Da (1) segue che $a_1, a_2 \leq b_1, b_2$. Sia ora $c \in E$ tale che $a_1, a_2 \leq c \leq b_1, b_2$ e definiamo $h_0 = \min\{\max\{f_1, f_2, \widehat{c}\}, g_1, g_2\}$. Allora $h_0 \in \mathcal{G}, f_1, f_2 \leq h_0 \leq g_1, g_2$ e $h(h_0) = c$. $\square$

Sia ora (E, u) un pseudo spazio di Vitali positivo con strong unit. Definiamo ora un **g-spazio di Vitali** come un sistema non vuoto $\mathcal{V}$ di funzioni positive e limitate definite su un insieme Ω tali che:

(i) $1 \in \mathcal{V}$

(ii) Se $f, g \in \mathcal{V}$ e $f(\omega) \leq g(\omega)$, per ogni $\omega \in \Omega$, allora $g - f \in \mathcal{V}$.

(iii) Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di $\mathcal{V}$ per la quale esiste $f \in \mathcal{V}$ tale che $f_n \leq f$ (puntualmente) $\forall n \geq 1$, allora $\sup_n f_n \in \mathcal{V}$.

Segue che $(\mathcal{V}, \max, \min, +, 0, 1)$ è uno spazio di Vitali σ-Dedekind completo con strong unit 1. Grazie al Teorema precedente sussiste la seguente versione del Teorema di Loomis-Sikorski

Teorema 2.4.4 (**Loomis-Sikorski**). *Sia (E, u) uno spazio di Vitali positivo, σ-Dedekind completo con strong unit u. Allora esiste un g-spazio di Vitali $\mathcal{V}$ di funzioni affini definite su uno spazio compatto e convesso Ω e un σ-omomorfismo suriettivo (di spazi di Vitali) $h : \mathcal{V} \to E$ tale che $h(1) = u$.*

2.5 Ideali e misure per pseudo spazi di Vitali

In questo paragrafo definiamo gli ideali degli pseudo spazio di Vitali e studiamo la loro relazione con gli ideali del gruppo universale. Infine diamo la definizione di misura su uno pseudo spazio di Vitali e ne studiamo i collegamenti con gli ideali.

Sia E uno pseudo spazio di Vitali. Un sottoinsieme non vuoto I di E si dice un **ideale** se:

(i)$\forall x, y \in I$ tali che $x + y$ è definito in E si ha $x + y \in I$,

(ii) $\forall x, y$ tali che $x \in I$ e $|y| \leq |x|$ si ha $y \in I$.

Segue da (ii) che $0 \in I$. Indicato con $\mathcal{I}(E)$ l'insieme degli ideali di E, facilmente si vede che $\{0\}, E \in \mathcal{I}(E)$.

Un ideale I si dice:

(1) **normale** se, $\forall x \in E$, $x + I = I + x$, dove $x + I = \{x + y : y \in I \quad \text{e} \quad x + y \quad \text{esiste in} \quad E\}$,

(2) **massimale** se non è contenuto in nessun altro ideale proprio di E.

Proposizione 2.5.1. *Sia I un ideale di E. Se $a, b \in I$ allora $a \vee b$ e $a \wedge b \in I$.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso $a, b \geq 0$. Poiché $0 \leq a \wedge b \leq b$, da (ii) segue che $a \wedge b$ e $b \backslash (a \wedge b) \in I$. Infine $(a \vee b) \backslash a = b \backslash (a \wedge b) \in I$, da cui segue $a \vee b = b \backslash (a \wedge b) + a \in I$.

Siano ora $a, b \in I$ arbitrari. Sappiamo che $a = a^+ \backslash a^-$ e $b = b^+ \backslash b^-$. Poiché $|a|, |b| \in I$, anche $a^+, a^-, b^+, b^- \in I$. Infine dal primo caso segue, $(a \vee b)^+ = a^+ \vee b^+ \in I$ e $(a \vee b)^- = a^- \wedge b^- \in I$ e quindi $a \vee b \in I$. Analogamente si prova che $a \wedge b \in I$. □

Sia G un ℓ-gruppo, indichiamo con $\mathcal{C}(G)$ e $\mathcal{L}(G)$ gli insiemi degli ℓ-

sottogruppi convessi e ℓ-ideali di G (ovvero gli insiemi dei sottogruppi e ideali di G chiusi rispetto alle operazioni $\vee$ e $\wedge$).

Teorema 2.5.2. *Siano E uno pseudo spazio di Vitali, G il suo gruppo rappresentativo ed I un suo ideale. Poniamo*
$\Phi(I) = \{x \in G : \exists 0 \leq x_i, y_j \in I, x = x_1 + \cdots + x_n - y_1 - \cdots - y_m\}. \quad (*)$
Allora $\Phi(I)$ è un ℓ-sottogruppo convesso di G generato da I. Inoltre $\Phi(I) \subseteq \Phi(J)$, per un altro ideale J di E, se e solo se $I \subseteq J$.
Sia ora K un ℓ-sottogruppo convesso di G e definiamo
$\Psi(K) := K \cap E. \quad (**)$
Si ha che $\Psi(K)$ è un ideale di E e $\Phi(\Psi(K)) = K$ e $\Psi(K_1) \subseteq \Psi(K_2)$, con $K_1, K_2 \in \mathcal{C}(G)$, se e solo se $K_1 \subseteq K_2$.
Le applicazioni $\Phi : \mathcal{I}(E) \to \mathcal{C}(G)$ e $\Psi : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{I}(E)$ definite da $(*), (**)$ sono l'una l'inversa dell'altra.
Infine $\Phi(I)$ è un ℓ-sottogruppo convesso e massimale di G se e solo se I è un ideale massimale di E; $\Phi(I)$ è un ℓ-ideale di G se e solo se I è un ideale normale di E.

Dimostrazione. Per provare la tesi procederemo per passi provando che $\Phi(I)$ verifica le verie tesi.
(1) Proviamo che se $0 \leq x \in \Phi(I)$, allora x si può scrivere come somma di elementi positivi di I. Infatti $x = x_1 + \cdots + x_n - y_1 - \cdots - y_m \leq x_1 + \cdots + x_n$, applicando la decomposizione di Riesz, valida negli ℓ-gruppi abbiamo che $x = x_1^0 + \cdots + x_n^0$ dove $0 \leq x_i^0 \leq x_i$ per ogni i, da cui segue $x_1^0, \ldots, x_n^0 \in I$, e quindi la tesi.
(2) Proviamo che se $x \leq 0$ e $x \in \Phi(I)$, allora x si può come somma di elementi negativi di I. Infatti essendo $x = x_1 + \cdots + x_n - y_1 - \cdots - y_m$

possiamo dire che $-x \leq y_m + \cdots + y_1$, da cui procedendo come in (1) si ha $-x = y_m^0 + \cdots + y_1^0$ con $0 \leq y_j^0 \leq y_j \in I$, da cui segue la tesi .

(3) Proviamo che se $x \in \Phi(I)$ allora $x^+, x^- \in \Phi(I)$. Infatti essendo $x = x_1 + \cdots + x_n - y_1 - \cdots - y_m \leq x_1 + \cdots + x_n$ segue che $x^+ = x \vee 0 \leq x_1 + \cdots + x_n$, allora sempre utilizzando la decomposizione di Riesz, x^+ si può scrivere come somma di elementi di I e questo basta per dire che $x^+ \in \Phi(I)$. Infine essendo $x \geq -y_1 - \cdots - y_m$ segue che $x \wedge 0 \geq -y_1 - \cdots - y_m$, quindi $x^- = -(x \wedge 0) \leq y_m + \cdots + y_1$, segue $x^- \in \Phi(I)$.

(4) $x \in \Phi(I)$ se e solo se $x^+, x^- \in \Phi(I)$ se e solo se $|x| \in \Phi(I)$. Segue facilmente da (2) e dalla decomposizione di Riesz.

(5) Proviamo che se $x, y \in \Phi(I)$ allora $x + y \in \Phi(I)$. Infatti $x + y = x_1 + \cdots + x_n - y_1 - \cdots - y_m + u_1 + \cdots + u_s - v_1 - \cdots - v_t \leq x_1 + \cdots + x_n + u_1 + \cdots + u_s$. Segue che $(x + y)^+ \leq x_1 + \cdots + x_n + u_1 + \cdots + u_s$, da cui $(x + y)^+ \in \Phi(I)$. In modo analogo si prova che $(x + y)^- \in \Phi(I)$, e quindi da (4) segue che $x + y \in \Phi(I)$.

(6) Se $|x| \leq |y|$ con $y \in \Phi(I)$ allora $|y| \in \Phi(I)$ e quindi con la stessa tecnica usata nei punti precedenti si prova che $|x| \in \Phi(I)$.

(7) Proviamo che se $x, y \in \Phi(I)$ allora $x \vee y \in \Phi(I)$. Prima proviamolo per $0 \leq x, y$. Allora $0 \leq x \wedge y \leq y \in \Phi(I)$ da cui segue $(x \wedge y)$ e $y - (x \wedge y) \in \Phi(I)$. Allora $(x \vee y) - x = y - (x \wedge y) \in \Phi(I)$, da (5) segue che $x \vee y \in \Phi(I)$.

Adesso siano x, y arbitrari. Da (4) abbiamo $0 \leq x^+, x^- \in \Phi(I)$, quindi da quanto detto prima segue che $(x \vee y)^+ = x^+ \vee y^+ \in \Phi(I)$ e $(x \vee y)^- = x^- \wedge y^- \in \Phi(I)$, da cui segue $(x \vee y) \in \Phi(I)$.

(8)Proviamo che se $x, y \in \Phi(I)$ allora $x \wedge y \in \Phi(I)$. Infatti essendo,da (6) e (7), $(x \wedge y)^+ = x^+ \wedge y^+ \in \Phi(I)$ e $(x \wedge y)^- = x^- \vee y^- \in \Phi(I)$ segue

$(x \wedge y) \in \Phi(I)$.

(9) Poiché ogni $x = x^+ \backslash x^- = x^+ - x^-$, abbiamo che $I \subseteq \Phi(I)$. Detto $\widehat{I}$ l' ℓ-sottogruppo convesso di G generato da I, abbiamo che $\widehat{I} \subseteq \Phi(I)$. D'altra parte se $x \in \Phi(I)$, abbiamo da (4) che $x^+, x^- \in \Phi(I)$ e quindi da (1) $x^+, x^- \in \widehat{I}$. Quindi $x \in \widehat{I}$ da cui segue $\widehat{I} = \Phi(I)$.

Abbiamo così provato che $\Phi(I)$ è l'ℓ-sottogruppo convesso di G generato da I.

(10) Ora assumiamo che $\Phi(I) \subseteq \Phi(J)$ e che $0 \leq x \in I$. Da (1) segue che $x = x_1 + \cdots + x_n$ con $0 \leq x_i \in J$ da cui segue $x \in J$.

(11) È banale vedere che $\Psi(K)$ è un ideale di E e che $\Phi(\Psi(K)) \subseteq K$. Se poi $0 \leq x \in K$, allora $x = x_1 + \cdots + x_n$ con $0 \leq x_i \in K \cap E$. Allora per ogni i abbiamo $x_i \in \Psi(K)$ e quindi $x \in \Phi(\Psi(K))$.

(12) Da (10) e (11) si ha che I è un ideale massimale se e solo se $\Phi(I)$ è un ℓ-sottogruppo massimale e da $(*)$ abbiamo che $\Phi(I)$ è un ℓ-ideale se e solo se I è un ideale normale. $\square$

Proposizione 2.5.3. *Sia I un ideale normale di E. Definiamo $a \sim_I b$ se e solo se esistono $x_1, x_2 \in I$ tali che $a \backslash x_1 = b \backslash x_2$.*

Allora $a \sim_I b$ se e solo se esistono $y_1, y_2 \in I$ tali che $y_1/a = y_2/b$. Inoltre si prova che $\sim_I$ è una congruenza e che $a \sim_I b$ se e solo se $a - b \in \Phi(I)$.

Si prova che il quoziente $E/I := \{[x]_I : x \in E\}$, dove $[x]_I = \{y \in E : x \sim_I y\}$, è un pseudo spazio di Vitali dove $[x]_I + [y]_I := [x' + y']_I$ se per qualche $x' \in [x]_I$ e $y' \in [y]_I$ la somma $x' + y'$ è definita. Infine la naturale immersione $f : E \to E/I$ definita da $x \to [x]_I$, è un omomorfismo surriettivo.

Dimostrazione. (1) È evidente che $\sim_I$ è una relazione riflessiva e simmetrica. Prima di provare che è transitiva proviamone altre proprietà.

(2) Proviamo che se $a_1 \sim_I a_2$, $b_1 \sim_I b_2$ e $a_1 + b_1, a_2 + b_2$ sono definite in E allora $(a_1 + b_1) \sim_I (a_2 + b_2)$. Per le ipotesi esistono $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$ tali che $a_1 \backslash x_1 = a_2 \backslash x_2$ e $b_1 \backslash y_1 = b_2 \backslash y_2$. Allora $a_1 + b_1 = (a_1 \backslash x_1) + x_1 + (b_1 \backslash y_1) + y_1 = (a_1 \backslash x_1) + (b_1 \backslash y_1) + x_1' + y_1 = (a_1 \backslash x_1) + (b_1 \backslash y_1) + z_1 = (a_2 \backslash x_2) + (b_2 \backslash y_2) + z_1$ dove $z_1 = x_1' + y_1 \in I$. In modo analogo si prova che $a_2 + b_2 = (a_2 \backslash x_2) + (b_2 \backslash y_2) + z_2$ per qualche $z_2 \in I$. Quindi $(a_1 + b_1) \backslash z_1 = (a_2 + b_2) \backslash z_2$ da cui $(a_1 + b_1) \sim_I (a_2 + b_2)$.
(3) Proviamo che se $0 \leq a, b \in E$ e $a - b \in \Phi(I)$ allora $a \sim_I b$. Allora $a - b = x - y$ dove $0 \leq x, y \in \Phi(I)$. Quindi $a + y' = b + x'$ per qualche $0 \leq x', y' \in \Phi(I)$. Dalla decomposizione di Riesz abbiamo che esistono $0 \leq a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in G$ per cui si ha $a = a_{11} + a_{12}, y' = a_{21} + a_{22}, b = a_{11} + a_{21}, x' = a_{12} + a_{22}$ e $a_{12} \wedge a_{21} = 0$, ovvero a_{12}, a_{21} e $-a_{12}, a_{21}$ commutano. Allora $a + a_{21} = b + a_{12}$. Ma $0 \leq a_{21} \leq b \wedge y'$ e $0 \leq a_{12} \leq a \wedge x'$, il che implica $a_{12}, a_{21} \in I$. Segue che
$a + a_{21} - a_{12} = b$
$a - a_{12} + a_{21} = b$
$(a \backslash a_{12}) + a_{21} = b$
$a \backslash a_{12} = b \backslash a_{21}$.
Quindi $a \sim_I b$.
(4) Proviamo che se $a, b \leq 0$, con $a, b \in E$, e $a - b \in \Phi(I)$ allora $a \sim_I b$. Allo stesso modo di (3) troviamo $0 \leq a_{12} \leq -a \in E$,$0 \leq a_{21} \leq -b \in E$, con $a_{12}, a_{21} \in I$ tali che $(-a) \backslash a_{12} = (-b) \backslash a_{21}$. Ma $a \leq -a_{12} \leq 0$ e $b \leq -a_{21} \leq 0$, che dalla convessità di E implica $-a_{12}, -a_{21} \in I$. D'altra parte $a \leq 0 \leq a_{12}$, $b \leq 0 \leq a_{21}$, il che implica $a_{12} + a, a_{21} + b \in E$. Inoltre, dalle relazioni precedenti segue $a_{12} + a = a_{21} + b$, da cui abbiamo $a_{12} + a = -(-a_{12}) + a = (-a_{12})/a = (-a_{21})/b$, ovvero $a \sim_I b$.

(5) È evidente che se $a \sim_I b$ allora $a - b \in \Phi(I)$. Viceversa siano $a, b \in E$ tali che $a - b \in \Phi(I)$. Sappiamo che l'ℓ-ideale $\Phi(I)$ di G definisce una congruenza $\sim_{\Phi(I)}$ definita da $g \sim_{\Phi(I)} h$ se e solo se $g - h \in \Phi(I)$. Questo implica che $a^+ \sim_{\Phi(I)} b^+$ e $a \wedge 0 \sim_{\Phi(I)} b \wedge 0$; da (3) segue che $a^+ \sim_I b^+$ e da (4) che $a \wedge 0 \sim_I b \wedge 0$. Finalmente, essendo $a = a^+ \backslash a^- = a^+ + (a \wedge 0)$ e $b = b^+ \backslash b^- = b^+ + (b \wedge 0)$, abbiamo $a \sim_I b$.
(6) La transitività di $\sim_I$ segue da quella di $\sim_{\Phi(I)}$ e da (5).
(7) Poiché $\sim_I$ è una congruenza l'operazione di somma in E/I è ben definita e da (5) è associativa. Inoltre abbiamo
(i)$[x]_I + [0]_I = [x]_I = [0]_I + [x]_I$
(ii)$[x]_I \wedge [y]_I = [x \wedge y]_I$
(iii)$[x]_I \leq [y]_I$ se e solo se esiste $r \in I$ tale che $x \backslash r \leq y$.
Quanto appena detto basta per dire che E/I è uno pseudo spazio di Vitali. Il resto del teorema segue banalmente. $\square$

Dato uno pseudo spazio di Vitali E diciamo che una **congruenza** $\sim$ è **forte** se è compatibile con le due differenze definite in E. Per esempio, se I è un ideale normale di E allora $\sim_I$ è una congruenza forte. Infatti se $a_1 \backslash x_1 = a_2 \backslash x_2, b_1 \backslash y_1 = b_2 \backslash y_2$ con $a_1 \backslash b_1, a_2 \backslash b_2 \in E$ allora $a_1 \backslash x_1 + x_1 = a_1 = a_1 \backslash b_1 + b_1 \backslash y_1 + y_1$ e $a_2 \backslash x_2 + x_2 = a_2 = a_2 \backslash b_2 + b_2 \backslash y_2 + y_2$. È facile dimostrare che $a_1 \backslash b_1 \sim_{\Phi(I)} a_2 \backslash b_2$, così dalla proposizione precedente segue che $a_1 \backslash b_1 \sim_I a_2 \backslash b_2$. Si procede analogamente per l'altra operazione di differenza.

Teorema 2.5.4. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra gli ideali normali di uno pseudo spazio di Vitali E e le congruenze forti data da: se I è un ideale normale allora $\sim_I$ è una congruenza forte e $[0]_I = I$. Viceversa se $\sim$*

è una congruenza forte allora $I_\sim := \{x \in E : x \sim 0\}$ *è un ideale normale di* E.

Dimostrazione. La prima parte del Teorema segue dalla Proposizione 2.4.3 e dall'osservazione successiva. Inoltre $I_1 = I_2$ se e solo se $\sim_{I_1}=\sim_{I_2}$.
Ora sia $\sim$ una congruenza forte e definiamo $I_\sim := \{x \in E : x \sim 0\}$. È evidente che $0 \in I_\sim$ e che $I_\sim$ è chiuso rispetto all'operazione di somma. Siano ora $0 \leq x \leq y \in I_\sim$ e scegliamo $u \in E^+$ tale che $u \geq y$. Se conderiamo l'intervallo $[0, u]$ possiamo definire in esso due operazioni $a \oplus b = (a \wedge (u - b)) + b$ e $a \odot b = a \backslash (a \vee (b/u))$ che ne fanno una pseudo MV-algebra. È possibile dimostrare che $a \leq b$ se e solo se $a \odot (u \backslash b) = 0$. Poiché $\sim$ é compatibile rispetto alle operazioni della pseudo MV-algebra abbiamo che $x = x \wedge y = x \odot ((u \backslash x) \oplus y) \sim x \odot ((u \backslash x) \oplus 0) = x \odot (u \backslash x) = 0$, il che implica che $I_\sim$ è un ideale.
Se $x, a \geq 0$, con $a \in I_\sim$, allora $x + a \sim x + 0 = x$ e $(x + a) \backslash x \in I_\sim$. Questo implica che $I_\sim^+ = I_\sim \cap E^+$ è un ideale normale di E^+. Dal Teorema 2.4.2, $\Phi(I_\sim^+)$ è un ℓ-ideale di G, allora si ha che $\Psi(\Phi(I_\sim^+)) = \Phi(I_\sim^+) \cap E$ è un ideale di E. Inoltre, sempre dal Teorema 2.4.2, abbiamo che $\Phi(\Psi(\Phi(I_\sim^+))) = \Phi(I_\sim^+) \subseteq \Phi(I_\sim)$ implica che $\Psi(\Phi(I_\sim^+)) = \Phi(I_\sim^+) \cap E \subseteq I_\sim$. Viceversa, se $x \in I_\sim$ allora $x^+, x^- \in I_\sim^+$, questo implica che $x = x^+ \backslash x^- \in \Phi(I_\sim^+) \cap E$. Quindi $\Phi(I_\sim^+) \cap E = I_\sim$, il che implica, essendo $\Phi(I_\sim) = \Phi(\Psi(\Phi(I_\sim^+))) = \Phi(I_\sim^+)$ un ℓ-ideale di G, che $I_\sim$ è un ideale normale di E.
Adesso proviamo che $\sim_1=\sim_2$ se e solo se $I_{\sim_1} = I_{\sim_2}$. Una direzione di tale equivalenza è banale, proviamo l'altra. Supponiamo $I_{\sim_1} = I_{\sim_2}$. Se $x \sim_1 y$ allora $x \wedge y \sim_1 x$ e $x \wedge y \sim_1 y$. Quindi $x \backslash (x \wedge y) \sim_1 x \backslash x$, da cui segue $x \backslash (x \wedge y) \in I_{\sim_1} = I_{\sim_2}$; ed in modo analogo si prova che $y \backslash (x \wedge y) \in I_{\sim_1} = I_{\sim_2}$.

Quanto visto implica che $x = (x \backslash (x \wedge y)) + (x \wedge y) \sim_1 (y \backslash (x \wedge y)) + (x \wedge y) = y$ e quindi $x = (x \backslash (x \wedge y)) + (x \wedge y) \sim_2 (y \backslash (x \wedge y)) + (x \wedge y) = y$, ovvero $x \sim_2 y$. $\square$

Dato un pseudo spazio di Vitali E chiamiamo **misura** un'applicazione $m : E \to \mathbb{R}$ tale che:
(i) $m(x+y) = m(x) + m(y)$ per ogni coppia x, y di elementi di E sommabili,
(ii)$m(x) \geq 0$ per ogni $x \in E^+$.
Studieremo in modo più completo le misure su uno spazio di Vitali nel capitolo successivo dove le definiamo semplicemente funzioni additive.
Come per gli stati su E, anche le misure possono essere estese in modo univoco al gruppo universale di E. In particolare detto G il gruppo universale di E e indicata con $\widehat{m}$ l'estensione di m su G, si vede che $Ker(\widehat{m}) = \{g \in G : \widehat{m}(|g|) = 0\}$ è un ℓ-sottogruppo di G. Quindi dal Teorema 2.4.2 abbiamo che $Ker(m) = \Psi(Ker(\widehat{m}))$ è un ideale normale di E. In particolare se $f : E \to F$ è un omorfismo di pseudo spazi di Vitali si vede che $Ker(f) = \{x \in E : f(|x|) = 0\} = \{x \in E : f(x) = 0\}$ è un ideale normale di E.
Da quanto detto in questo paragrafo ed in quello precedente segue

Teorema 2.5.5. *Sia I un ideale normale dello pseudo spazio di Vitale E. Indichiamo con G il gruppo universale di E e con ϕ l'immersione di E in G. Allora $G/\Phi(I)$ con l'immersione $\phi_I : E/I \to G/\Phi(I)$, definita da $\phi_I(x/I) := \phi(x)/\Phi(I)$, è un gruppo universale per E/I.*

Nella prossima Proposizione studiamo le proprietà dell'ideale normale $Ker(m)$ di E e dello spazio quoziente che determina (cfr. Proposizione 2.4.3).

Proposizione 2.5.6. *Sia m una misura su E. Allora per $a, b \in E$ si ha* *(i)* $m(0) = 0$.

(ii) *Se* $a\backslash b$ *esiste in* E *allora* $m(a\backslash b) = m(a) - m(b)$.
Se a/b *esiste in* E *allora* $m(a/b) = m(a) - m(b)$.

(iii) $m(a \vee b) + m(a \wedge b) = m(a) + m(b)$.

(iv) $a/Ker(m) = b/Ker(m)$ *se e solo se* $m(a) = m(a \wedge b) = m(b)$.

(v) *Esiste un'unica misura* $\widetilde{m}$ *su* $E/Ker(m)$ *tale che* $\widetilde{m}(a/ker(m)) = m(a)$ *per ogni* $a \in E$.

(vi) $E/Ker(m)$ *è uno spazio di Vitali*

Dimostrazione. (i) e (ii) sono evidenti.
(iii) segue dalla Proposizione 1.3.3 e dalla (ii).
(iv) Se $a/Ker(m) = b/Ker(m)$ allora $(a \wedge b)/Ker(m) = b/Ker(m)$, segue che $m(a) = m(b) = m(a \wedge b)$.
Supponiamo ora l'inverso. Abbiamo che $a = a\backslash(a \wedge b) + (a \wedge b)$ e $b = b\backslash(a \wedge b) + (a \wedge b)$. Quindi $(a\backslash(a \wedge b))/a = (a \wedge b) = (b\backslash(a \wedge b))/b$. Allora $a \sim_{Ker(m)} b$.
(v) Se $a_1, a_2 \in a/Ker(m)$ da (iv) abbiamo $m(a_1) = m(a_2) = m(a)$, quindi $\widetilde{m}$ è ben definita su $E/Ker(m)$. Ora assumiamo che $a/ker(m) \geq 0$, segue che esiste $p \in Ker(m)$ tale che $0\backslash p \leq a$, e questo da $\widetilde{m}(a/ker(m)) = m(a) \geq m(p) = 0$.
Sia $a/Ker(m)+b/Ker(m)$ definita in $E/Ker(m)$, da definizione questo implica che esistono $a', b' \in E$ tali che $a' \in a/Ker(m), b' \in b/Ker(m)$ e $a'+b'$ esiste in E. Allora $\widetilde{m}(a/Ker(m) + b/Ker(m)) = \widetilde{m}(a'/Ker(m) + b'/Ker(m)) = \widetilde{m}((a' + b')/Ker(m)) = m(a' + b') = m(a') + m(b') = \widetilde{m}(a/Ker(m)) +$

$\widetilde{m}(b/Ker(m))$. Quindi abbiamo provato che $\widetilde{m}$ è una misura su $E/Ker(m)$.

(vi) Indichiamo con $\widehat{m}$ l'estensione di m al gruppo universale G di E. Come in (v) possiamo definire una misura $\overrightarrow{m}$ su $G/Ker(\widehat{m})$. Dal Teorema 2.5.5 segue che il diagramma $E \hookrightarrow G, E \to E/Ker(m), E/Ker(m) \hookrightarrow G/Ker(\widehat{m})$ e $G \to G/Ker(\widehat{m})$ commuta.

Se m è identicamente uguale a zero, allora $E/Ker(m)$ è $0/Ker(m)$ e quindi $E/Ker(m)$ è commutativo. Adesso assumiamo che m sia diverso da zero, di conseguenza $\overrightarrow{m}$ è non nulla. Senza mancare di generalità possiamo assumere che $\widehat{m}(b) > 0$ per qualche $b \in G^+$. Sia $0 < g \in G$ e assumiamo che $ng/Ker(\widehat{m}) \leq b/Ker(\widehat{m})$ per ogni $n \geq 1$. Allora $0 \leq \overrightarrow{m}(ng/Ker(\widehat{m})) \leq \overrightarrow{m}(b/Ker(\widehat{m}))$ così che $0 \leq n\widehat{m}(g) \leq \widehat{m}(b)$, il che implica $\widehat{m}(g) = 0$ e quindi $g/Ker(\widehat{m}) = 0/Ker(\widehat{m})$. Resta così provato che $G/Ker(\widehat{m})$ è un ℓ-gruppo archimedeo e quindi commutativo. Quanto detto implica che $E/Ker(m)$ è uno spazio di Vitali. $\square$

3 Teoremi di convergenza per Spazi di Vitali

3.1 Funzioni localmente esaustive

Consideriamo in questa sezione gli spazi di Vitali, o pseudo spazi di Vitali commutativi. Tali strutture sono state studiate in maniera approfondita da C. Constantinescu in [8] e [9]. In particolare nell'ultimo paragrafo dimostriamo una serie di Teoremi di convergenza per funzioni additive a valori in uno spazio di Vitali, alcuni dei quali già dimostrati Constantinescu, usando però la tecnica dimostrativa di de Lucia-Traynor in [15] e de Lucia-Pap in [13].

A meno di esplicito riferimento, nel seguito indichiamo con E uno spazio di Vitali e con $(G, +, \mathcal{T})$, o piú semplicemente con G, un gruppo topologico commutativo di Hausdorff; inoltre indichiamo con $U(0)$ una base di intorni dello zero di G.

Ricordiamo che se G è un gruppo topologico si ha:

(i) per ogni $a \in G$ l' insieme degli intorni di a è costituito dagli insiemi $a + I$ dove I è un intorno dello zero di G;

(ii) l'insieme degli intorni chiusi e simmetrici di 0 costituisce una base per gli intorni di 0;

(iii) Se $\mathcal{V}$ è una base di intorni di 0 e U è un intorno di 0, esiste una successione $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{V}$ tali che
$\sum_{i=1}^{n} V_i \subseteq U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\sum_{i=n+1}^{n+k} V_i \subseteq V_n$ per ogni $n, k \in \mathbb{N}$.

Una funzione $u : E \to G$ si dice ***additiva*** se:
$\forall x, y \in E$ sommabili si ha $u(x + y) = u(x) + u(y)$.
Diciamo che una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di E appartiene a $\Lambda(E)$ se è limitata e crescente.
Diciamo che una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di E_+ appartiene a $\Sigma(E)$ se è finitamente sommabile e tale che $(\sum_{i=1}^{n} x_i)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$.
Diciamo che una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescente di elementi di E appartiene a $\Theta(E)$ se esiste $M \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che $(\sum_{m\in M, m\leq n} (x_{m+1} - x_m))_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$.
Si prova facilmente che (cfr. [9]):

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E) \Leftrightarrow (x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$,

2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta(E) \Leftrightarrow$ esiste una successione $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strettamente crescente tale che $(x_{k_n+1} - x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$,

3. ogni Λ-successione è una Θ-successione,

4. se $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente di E_+ allora $(y_i - y_{i+1})_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$,

5. per ogni successione crescente (risp. decrescente) $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la successione $(y_{i+1} - y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (risp. $(y_i - y_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$) risulta finitamente sommabile,

6. $\Sigma(E)$ è assorbente, ovvero se $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sono successioni di E tali che $(b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$ e $c_i \leq b_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}$, allora $(c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$.

Una funzione additiva $u : E \longrightarrow G$ si dice

1. ***localmente esaustiva*** se $(u(x_{n+1} - x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a zero per ogni Λ-successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di E.

2. ***σ-additiva*** se per ogni Λ-successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di E e per ogni intorno U dello zero di G $\exists m \in \mathbb{N}$ ed un maggiorante x di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $u([0, x - x_m]) \subset U$.

Una successione di funzioni additive $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si dice ***asintoticamente esaustiva*** se:
per ogni $U \in U(0)$ $\quad \exists i_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$ e $i \geq i_0$, esiste $j(i)$ tale che $\mu_i(a_j) \in U$, per $j \geq j(i)$.
Diciamo una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni additive ***uniformemente localmente esaustiva*** se, per ogni Λ-successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di E, $(u(x_{n+1} - x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a zero uniformemente al variare di u in $\mathcal{F}$.
Diciamo che una successione $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di funzioni finitamente additive di E in G è ***uniformemente asintoticamente esaustiva*** se:
per ogni $U \in U(0)$ $\quad \exists i_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$, esiste j_0 tale che, per ogni $i \geq i_0$, $\mu_i(a_j) \in U$ per $j \geq j_0$.
Infine diciamo una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni additive ***uniformemente σ-additiva*** se per ogni Λ-successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di E e per ogni intorno U dello zero di G $\exists m \in \mathbb{N}$ ed un maggiorante x di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $u([0, x - x_m]) \subset U$ uniformemente al variare di u in $\mathcal{F}$.
Diamo di seguito una serie di caratterizzazioni per funzioni uniformemente localmente esaustive, asintoticamente esaustive e uniformemente asintoticamente esaustive.

Proposizione 3.1.1. *[9, Proposizione 2.5] Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni additive di E in G. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(a) $\mathcal{F}$ è uniformemente localmente esaustiva;

(b) *per ogni* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$ *e ogni intorno* $U \in U(0)$ *esiste* $m \in \mathbb{N}$ *tale che* $u(x) \in U$ *per ogni* $u \in \mathcal{F}$ *e* $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0, x_{m+n} - x_m]$*;*

(c) *per ogni* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$ *e ogni intorno* $U \in U(0)$ *esiste* $m \in \mathbb{N}$ *tale che* $u(x_p - x_n) \in U$ *per ogni* $u \in \mathcal{F}$ *e* $n, p \in \mathbb{N}, m \leq n \leq p$*;*

(d) *per ogni* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$ *e ogni intorno* $U \in U(0)$ *esiste* $m \in \mathbb{N}$ *tale che* $u(x_{n+1} - x_n) \in U$ *per ogni* $u \in \mathcal{F}$ *e* $n \in \mathbb{N}, m \leq n$*;*

(e) *per ogni* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$ *e ogni intorno* $U \in U(0)$ *esiste una parte finita* $M \subseteq \mathbb{N}$ *tale che* $u(\sum_{n\in P} x_n) \in U$ *per ogni* $u \in \mathcal{F}$ *e* P *parte finita di* $\mathbb{N} \setminus M$*;*

(f) *per ogni* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$ *e ogni intorno* $U \in U(0)$ *esiste* $m \in \mathbb{N}$ *tale che* $u(x_n) \in U$ *per ogni* $u \in \mathcal{F}$ *e* $n \in \mathbb{N}, m \leq n$.

Nel seguito, dati una successione $\lambda = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$ e un suo estremo superiore x, indichiamo con $A_\lambda = \{x \in E : \exists y \quad \text{estremo superiore di} \quad \lambda \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad y - x_n \leq x\}$ e $A_{\lambda,x} = \{z \in [0, x] : x - z \in A_\lambda\}$. Osserviamo che, per costruzione, $A_\lambda \subseteq E_+$.

Proposizione 3.1.2. *Sia* $\Im = (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni additive di* E *in* G*, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1. $\Im$ *è asintoticamente esaustiva.*

2. $\forall U \in U(0) \quad \exists i_0 \in \mathbb{N}$ *tale che, per ogni* $\lambda = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$ *e* $i \geq i_0$*, esiste* $x_i \in A_\lambda$ *tale che* $\mu_i(A_{\lambda,x_i}) \in U$.

3. $\forall U \in U(0) \quad \exists i_0 \in \mathbb{N}$ *tale che,* $\forall \lambda = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$ *ed* $\forall i \geq i_0$, *esiste* $j(i) \in \mathbb{N}$ *tale che,* $\forall x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0, x_{j(i)+n} - x_{j(i)}]$, $\mu_i(x) \in U$.

4. $\forall U \in U(0) \quad \exists i_0 \in \mathbb{N}$ *per cui,* $\forall \lambda = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$ *e* $\forall i \geq i_0$ *esiste* $j(i) \in \mathbb{N}$ *tale che,* $\forall p, n \geq j(i)$, $\mu_i(x_p - x_n) \in U$.

5. $\forall U \in U(0) \quad \exists i_0 \in \mathbb{N}$ *per cui,* $\forall \lambda = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$ *e* $\forall i \geq i_0$ *esiste* $j(i) \in \mathbb{N}$ *tale che,* $\forall n \geq j(i)$, $\mu_i(x_{n+1} - x_n) \in U$.

Dimostrazione. 1. $\Longrightarrow$ 2.
Se la tesi non è verificata, esiste un $U \in U(0)$ per cui per ogni $i_0 \in \mathbb{N}$ esiste una successione $\lambda = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed $i \geq i_0$ tale che, per ogni $\overline{x} \in A_\lambda$ esiste $z \in A_{\lambda,\overline{x}}$ per cui si ha $\mu_i(z) \notin U$. Posto $y_1 = \overline{x}$ ed $y_2 = \overline{x} - z \in A_\lambda$, in corrispondenza di y_2 troviamo un $t \in A_{\lambda,y_2}$ tale che $\mu_i(t) \notin U$, allora posto $y_3 = y_2 - t$ e procedendo in modo analogo determiniamo una successione decrescente, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, di elementi di A_λ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $\mu_i(y_n - y_{n+1}) \notin U$. Poiché la successione $(y_n - y_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ appartiene a $\Sigma(E)$ perveniamo ad un assurdo.
2. $\Longrightarrow$ 3.
Fissato un $U \in U(0) \quad \exists i_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $\lambda = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$ ed $i \geq i_0$ esiste $x_i \in A_\lambda$ tale che $\mu_i(A_{\lambda,x_i}) \in U$. Da [9, Proposizione 2.5] osserviamo che in corrispondenza di $x_i \in A_\lambda$ troviamo $j(i) \in \mathbb{N}$ tale che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0, x_{j(i)+n} - x_{j(i)}] \subseteq A_{\lambda,x_i}$, da cui la tesi.
3. $\Longrightarrow$ 4.
Dalla 3. fissato $U \in U(0) \quad \exists i_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall \lambda = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$ ed $i \geq i_0$ esiste $j(i) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}}[0, x_{j(i)+n} - x_{j(i)}]$ si ha $\mu_i(x) \in U$. Allora $\forall p > n > j(i)$, possiamo trovare $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $p = j(i)+n_1$; essendo

la succ. λ crescente abbiamo che: $(x_p - x_n) \in [0, x_{j(i)+n_1} - x_{j(i)}]$, da cui segue la tesi.

4. $\Longrightarrow$ 5.

Banale.

5. $\Longrightarrow$ 1.

Fissato un $U \in U(0)$ $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $\lambda = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$, in corrispondenza di $(\sum_{i=1}^{n} x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$ ed $i \geq i_0$, dalla 4., esiste un $\overline{j(i)} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \overline{j(i)}$ si ha:

$\mu_i(\sum_{i=1}^{n+1} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i) = \mu_i(x_{n+1}) \in U,$

scelto $j(i) = \overline{j(i)} + 1$, la tesi è provata.

$\square$

Analogamente si prova che:

Proposizione 3.1.3. *Sia $\Im = (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni additive di E in G, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1. *$\Im$ è uniformemente asintoticamente esaustiva.*

2. *$\forall U \in U(0)$ $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $\lambda = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$ esiste $x \in A_\lambda$ tale che per ogni $i \geq i_0$ si ha $\mu_i(A_{\lambda,x}) \in U$.*

3. *$\forall U \in U(0)$ $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall \lambda = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$, $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall i \geq i_0$ e $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, x_{j_0+n} - x_{j_0}]$, $\mu_i(x) \in U$.*

4. *$\forall U \in U(0)$ $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall \lambda = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$, $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall i \geq i_0$ e $\forall p, n \geq j_0$, $\mu_i(x_p - x_n) \in U$.*

5. $\forall U \in U(0) \quad \exists i_0 \in \mathbb{N}$ *tale che,* $\forall \lambda = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E), \quad \exists j_0 \in \mathbb{N}$ *tale che,* $\forall i \geq i_0$ *e* $\forall n \geq j_0$, $\mu_i(x_{n+1} - x_n) \in U$.

Osservazioni 3.1.4. ***(i)*** *La nozione di* σ*-additività qui data è quella considerata da C. Constantinescu in [9, n.2 a pag. 23], ed in [8]. È importante osservare che la definizione di* σ*-additività secondo Constantinescu non coincide con quella usuale, come mostra il seguente esempio:*
sia $\mathcal{A}$ *l'insieme delle parti finite e cofinite di* $\mathbb{R}$ *e definiamo:*

$$\mu : X \in \mathcal{A} \to \begin{cases} cardX & \textit{Se } X \textit{ è finito} \\ -card(\mathbb{R} \setminus X) & \textit{Se } X \textit{ è cofinito.} \end{cases}$$

Tale funzione è numerabilmente additiva, proviamo che non lo è nel senso di Constantinescu. Infatti esistono $U = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *e la successione* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *di elementi di* $\mathcal{A}$*, dove* $X_n = \{1, \ldots, n\}$*, tali che,* $\forall m \in \mathbb{N}$ *e* $\forall X$ *maggiorante della successione, si ha:*
$\mu(X_{m+1} \setminus X_m) = \mu(\{m+1\}) = 1 \notin U$,
ovvero esiste un elemento di $[\emptyset, X \setminus X_m]$ *non appartenente ad* U.
Facilmente si vede che la σ*-additività nel senso di Constantinescu implica quella usuale.*
Notiamo infine che, secondo il punto di vista di Constantinescu, una funzione σ*-additiva in uno spazio di Vitali è esaustiva.*
(ii) *Dalla definizione segue che una successione di funzioni asintoticamente esaustive sono, tranne che un numero finito di esse, limitate e quindi possiamo dire che:*
una successione $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *di funzioni additive a valori reali è asintoticamente esaustiva se e solo per ogni intorno dello zero di* G *esiste* $i_0 \in \mathbb{N}$ *tale che per*

$i \geq i_0 \quad \mu_i$ è limitata e quindi localmente esaustiva.

Possiamo dire che la condizione necessaria non sussiste per successioni di funzioni additive a valori in uno Spazio di Banach, anzi possiamo provare che l'uniforme asintotica esaustività non implica la locale esaustività, come mostra il seguente esempio.

Sia L_∞ lo spazio di Banach delle funzioni numeriche definite in $[0,1]$ ed ivi essenzialmente limitate; sia R il σ-campo delle parti di $[0,1]$ misurabili secondo Lesbegue e sia c_X, per ogni $X \in R$, la funzione caratteristica di X.

Per ogni $i \in \mathbb{N}$ siano:

$\varphi_i : X \in R \longrightarrow \frac{1}{i} c_X \in L_\infty.$

La successione delle $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è uniformemente asintoticamente esaustiva, infatti data una successione $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di elementi di R a due a due disgiunti abbiamo che per ogni i e $j \in \mathbb{N}$ si ha :

$\|\varphi_i(X_j)\| \leq \frac{1}{i}.$

Allora $\forall \varepsilon \geq 0$ esiste $i_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ tale che, $\forall i \geq i_0$, si ha:

$\|\varphi_i(X_j)\| \leq \frac{1}{i} < \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}.$

Questa successione non è localmente esaustiva, infatti:

data una successione $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di insiemi di R a due a due disgiunti e con misura positiva, abbiamo $\forall i \in \mathbb{N} \quad \|\varphi_i(X_j)\| = \frac{1}{i}, \quad \forall j \in \mathbb{N}$, da cui la tesi.

(iii) *Infine, come mostra il seguente esempio, la locale esaustività di una successione di funzioni non implica l'uniforme asintotica esaustività.*

Per ogni $i \in \mathbb{N}$, poniamo:

$\mu_i : X \in P(\mathbb{N}) \longrightarrow \sum_{j\in X} \delta_{ij}.$

Si vede facilmente che le μ_i sono additive ed localmente esaustive, ma non sono unif. asintoticamente esaustive, infatti:

$\exists \varepsilon = 1$ *tale che* $\forall i_0 \in \mathbb{N}$ *esiste la successione* $(\{j\})_{j\in\mathbb{N}}$ *di elementi di* $P(\mathbb{N})$ *a due a due disgiunti tale che* $\forall j_0 \in \mathbb{N}$ *esistono* $i > i_0$ *e* $j > j_0$*, con* $i = j = \max\{i_0, j_0\}$*, tali che* $\mu_i(\{i\}) = 1$*, da cui la tesi.*

Date due successioni $\alpha, \gamma : \mathbb{N} \to E$, appartenenti a $\Lambda(E)$ diciamo che $\alpha \lessdot \gamma$ se:

$$i \leq j \Rightarrow \alpha(j) - \alpha(i) \leq \gamma(j) - \gamma(i). \tag{1}$$

Scriviamo invece $\alpha \leq \gamma$ se, $\forall i \in \mathbb{N}$, risulta $\alpha(i) \leq \gamma(i)$; inoltre con 0 indichiamo la successione identicamente nulla.
La seguente proposizione chiarisce il concetto di locale esaustività negli spazi di Vitali. In un certo senso è l'analoga di [12, pag. 176] e di [11, Proposizione(1.2) a pag. 26].

Proposizione 3.1.5. *Data una funzione additiva* $\mu : E \to G$*, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1. μ *è localmente esaustiva.*
2. $\forall \gamma \in \Lambda(E)$ *risulta* $\lim_n \mu(\alpha(n+1) - \alpha(n)) = 0$ *uniformemente per* $\alpha \lessdot \gamma$.
3. $\forall \gamma \in \Lambda(E)$ $\quad \mu(\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione di Cauchy unif. per* $\alpha \lessdot \gamma$.
4. $\forall \gamma \in \Sigma(E)$ $\quad \mu(\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *è sommabile nel completamento* $\overline{G}$ *di* G *uniformemente per* $0 \leq \alpha \leq \gamma$.

Dimostrazione. 1. $\Rightarrow$ 2.
Poichè μ è localmente esaustiva, da [9, Proposizione 2.5], assegnato $\gamma \in \Lambda(E)$ ed $U \in U(0)$ esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(x) \in U \quad \forall x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, \gamma(m+n) - \gamma(m)]$.
Pertanto se è $\alpha \lessdot \gamma$ risulta:

$\mu(x) \in U \quad \forall x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, \alpha(m+n) - \alpha(m)],$
da cui segue la tesi.

2. $\Rightarrow$ 3.

Siano $U \in U(0)$ e $V \in U(0)$ tali che V è simmetrico e $V + V \subseteq U$. Sia $\gamma \in \Lambda(E)$, per la 2. esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che:

$\mu(x) \in V, \quad \forall x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0, \alpha(m+n) - \alpha(m)]$ e $\alpha \lessdot \gamma$.

Siano $p, q > m$, si ha:

$\mu(\alpha(p)) - \mu(\alpha(q)) = \mu(\alpha(p) - \alpha(m)) - \mu(\alpha(q) - \alpha(m)),$

poichè $\mu(\alpha(p) - \alpha(m)) \in V$ e $\mu(\alpha(q) - \alpha(m)) \in V$ si ha:

$\mu(\alpha(p)) - \mu(\alpha(q)) \in U, \quad \forall p, q > m$ e $\alpha \lessdot \gamma$

3. $\Rightarrow$ 4.

Sia $\gamma \in \Sigma(E)$, osserviamo che se è $0 \leq \alpha \leq \gamma$, allora $\alpha \in \Sigma(E)$ e risulta $(\sum_{i=1}^{n} \alpha(i))_{n\in\mathbb{N}} \lessdot (\sum_{i=1}^{n} \gamma(i))_{n\in\mathbb{N}}$, essendo entrambe le successioni in $\Lambda(E)$. Dalla 3. segue che, per $0 \leq \alpha \leq \gamma$, le successioni $(\mu(\sum_{i=1}^{n} \alpha(i)))_{n\in\mathbb{N}}$ sono uniformemente di Cauchy e quindi la 4.

4. $\Rightarrow$ 1.

Vogliamo provare che, $\forall \gamma \in \Lambda(E)$, abbiamo $\lim_n \mu(\gamma(n+1) - \gamma(n)) = 0$.

Data $\gamma \in \Lambda(E)$, abbiamo che

$\alpha = (\gamma(n+1) - \gamma(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E),$

allora dalla 4. abbiamo che la serie di termine generale $\mu(\alpha(n))$ è sommabile e quindi:

$\lim_n \mu(\alpha(n)) = \lim_n \mu(\gamma(n+1) - \gamma(n)) = 0.$

$\square$

3.2 Spazi di Vitali con la SIP

Sia X un insieme, indichiamo con $P(X)$ e $P_f(X)$ rispettivamente, gli insiemi dei sottoinsiemi e dei sottoinsiemi finiti di X.

Ricordiamo che se A è un'algebra di Boole, questa gode della Subsequential Interpolation Property se per ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di suoi elementi a due a due ortogonali esiste una sottosuccessione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed un $a \in A$ tale che $a_{k_n} \leq a$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $a \wedge a_m = 0$ per ogni $m \in \mathbb{N} \setminus \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Siano $\lambda = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$ e M una parte di $\mathbb{N}$, denotiamo con $S_{i\in M}x_i$ l'insieme $\{\sum_{i\in J} x_i : J \in P_f(M)\}$; se l'insieme $S_{i\in M}x_i$ è limitato, e con x indichiamo un suo maggiorante, scriviamo $S_{i\in M}x_i \leq x$. Si osservi che in tal caso per ogni $J \in P_f(M)$ si ha che $x - \sum_{i\in J} x_i$ è un maggiorante di $S_{i\in M\setminus J}x_i$, quindi per ogni $J \in P_f(M)$ risulta: $S_{i\in M\setminus J}x_i \leq x - \sum_{i\in J} x_i$. Sia x un maggiorante di $S_{i\in\mathbb{N}}x_i$ e sia M una parte di $\mathbb{N}$. Diciamo che $y \in E$ interpola $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rispetto a M e ad x se:

1. $y \leq x$
2. y maggiora $S_{i\in M}x_i$
3. $x - y$ maggiora $S_{i\in\mathbb{N}\setminus M}x_i$,

per denotare ciò scriviamo in breve $y \sim S_{i\in M}x_i \quad (x \sim S_{i\in\mathbb{N}}x_i)$.

Diciamo che lo spazio di Vitali E ha la ***SIP(Subsequential Interpolation Property)*** se comunque scelta una successione $\lambda = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$ si ha che: se x è un maggiorante di $S_{i\in\mathbb{N}}x_i$ e M una parte infinita di $\mathbb{N}$ esiste B parte infinita di M e $y \in E$ tale che $y \sim S_{i\in B}x_i \quad (x \sim S_{i\in\mathbb{N}}x_i)$, ovvero:

1. per ogni $F \in P_f(B)$ si ha che: $\sum_{i \in F} x_i \leq y \leq x$.

2. per ogni $G \in P_f(\mathbb{N} \setminus B)$ si ha che: $\sum_{i \in G} x_i \leq x - y$.

Osserviamo che in tale definizione di Subsequential Interpolation Property, l'elemento $y \in E$ che si determina dipende anche dal maggiorante che scegliamo per la successione e questo perché al contrario delle algebre di Boole gli spazi di Vitali non sono limitati superiormente.

Osservazione 3.2.1. *Sia $x \in E_+$ e $S_0 = \{(t, y) \in [0, x] \times [0, x] : (t, y) \in S, t + y \in [0, x]\}$ allora $[0, x]$ è uno sottospazio di Vitali di E. Se E ha la SIP anche $[0, x]$ ha la SIP. Infatti, sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma([0, x])$, si ha che: se $t \in [0, x]$ è un maggiorante di $S_{i \in \mathbb{N}} x_i$ ed A una parte infinita di $\mathbb{N}$, poiché E ha la SIP esistono B parte infinita di A e $y \in E$ tale che $y \sim S_{i \in B} x_i \quad (t \sim S_{i \in \mathbb{N}} x_i)$, dalle definizioni si trova in particolare che $0 \leq y \leq t \leq x$, da cui segue la tesi.*
Per ulteriori informazioni sulla SIP cfr. [9].

Per i prossimi Lemma, necessari per le dimostrazioni dei Teoremi di convergenza nel paragrafo successivo, abbiamo preso spunto dal lavoro [15].

Lemma 3.2.2. *Sia E uno spazio di Vitali con la SIP, e sia $\lambda = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un elemento di $\Sigma(E)$. Esistono allora una successione decrescente $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di E e una successione decrescente $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di parti di $\mathbb{N}$ tale che, $\forall i \in \mathbb{N}, \quad B_i \setminus B_{i+1}$ è infinito e $S_{i \in B_i \setminus B_{i+1}} x_i \leq y_i - y_{i+1}$.*

Dimostrazione. Detto x un maggiorante di λ, dalla SIP segue che per ogni sottoinsieme infinito A di $\mathbb{N}$ esiste un $B_1 \subset A$ infinito ed un $y_1 \in E$ tale che $y_1 \sim S_{n\in B_1} x_n \quad (x \sim S_{n\in\mathbb{N}} x_n)$. In particolare per ogni $t \in B_1$ si ha che $x_t \leq y_1 \leq x$. Consideriamo la successione $(x_i)_{i\in B_1} \subset [0, y_1]$, poiché $[0, y_1]$ è ancora uno spazio di Vitali con la SIP, procedendo come prima troviamo che, in corrispondenza di B_1, esiste un $B_2 \subset B_1$ infinito ed un $y_2 \in [0, y_1]$, tale che $y_2 \sim S_{n\in B_2} x_n \quad (y_1 \sim S_{n\in B_1} x_n)$. Procedendo per induzione segue la tesi. $\square$

Lemma 3.2.3. *Siano E uno spazio di Vitali con la SIP, $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni additive ed localmente esaustive di E in G, e $(e_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$. Allora per ogni intorno U dello zero di G e $J_0 \subset \mathbb{N}$ infinito, esiste $J \subset J_0$ infinito e $d \in E$ tali che $\forall i > 1$ esiste $F_i \in P_f(J)$ e si ha:*
$\displaystyle\sum_{j\in F} \mu_i(e_j) \in \mu_i(d) + U$, per ogni $F \in P_f(J)$ tale che $F_i \subset F$.

Dimostrazione. Dal Lemma 3.2.2 sappiamo che in corrispondenza della succ. $\lambda = (e_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$ esiste una successione $\alpha = (y_i - y_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ tale che ogni suo elemento maggiora le somme finite di infiniti elementi di λ. Osserviamo che $(y_1 - y_{i+1})_{i\in\mathbb{N}} \in \Lambda(E)$. Da [9, Proposizione 2.5] segue che, essendo μ_1 esaustiva, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\mu_1([0, y_{m+1} - y_{m+2}]) \subseteq U$. Posto $a_1 = y_{m+1} - y_{m+2}$ si ha che, essendo un elemento di α, maggiora le somme finite di infiniti elementi di λ e $\mu_1([0, a_1]) \subseteq U$. Sia H l'insieme degli elementi di λ maggiorati da a_1 e sia b_1 un elemento di H, si ha allora che per ogni $F \in P_f(H \setminus \{b_1\})$ risulta $\displaystyle\sum_{j\in F} e_j + b_1 \leq a_1$ e quindi $\displaystyle\sum_{j\in F} e_j \leq a_1 - b_1$. Consideriamo gli infiniti elementi di λ maggiorati da $a_1 - b_1$ e procediamo come nel caso precedente, utilizzando l'esaustività di μ_2 si determina $a_2 \in E$ tale che $a_2 \leq a_1 - b_1 \leq a_1$, a_2 maggiora le somme finite di infiniti elementi di λ e $\mu_2([0, a_2]) \subseteq U$. Procedendo per induzione si determina una successione decrescente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di E una sottosuccessione $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di λ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$:

1. $S_{i\geq k} b_i \leq a_k$

2. $a_{k+1} \leq a_k - b_k$

3. $\mu_k([0, a_k]) \subseteq U$.

Sia, per $k \in \mathbb{N}$, $\quad c_k = (a_k - a_{k+1}) - b_k$. Ovviamente è $c_k \leq a_k \leq a_1$. Indichiamo con M l'insieme numerabile $\{b_1, \ldots, b_n, \ldots\} \bigcup \{c_1, \ldots, c_n, \ldots\}$.Proviamo che M è una parte di E finitamente sommabile con l'insieme delle somme finite maggiorato da a_1:

1. i b_i sono elementi di λ e quindi $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è finitamente sommabile ed inoltre risulta $S_{i\in\mathbb{N}} b_i \leq a_1$.

2. osserviamo che essendo la successione $(a_1 - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescente e limitata la successione $(a_n - a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$ ne segue che anche $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$; inoltre per ogni $F \in P_f(\mathbb{N})$, posto $m = \max F$, abbiamo:
$\displaystyle\sum_{i\in F} c_i \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \leq \sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{m+1} \leq a_1.$

3. per ogni F e $F^1 \in P_f(\mathbb{N})$, detto $m = \max(F, F^1)$, si ha:
$\displaystyle\sum_{i\in F} c_i + \sum_{i\in F^1} b_i \leq \sum_{i=1}^{m} (c_i + b_i) = \sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{m+1} \leq a_1.$

Applicando la SIP all'insieme infinito $B = \{b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$ abbiamo che esiste un $d \in E$ tale che $d \leq a_1$ e una successione crescente $\beta = \{k_i : i \in \mathbb{N}\}$ di elementi di $\mathbb{N}$ tale che, detto $T = \{b_{k_i} : i \in \mathbb{N}\}$, si ha:
$\forall b \in T \quad b \leq d \quad$ e $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $j \notin \beta \quad c_n \leq a_1 - d$ e $b_j \leq a_1 - d$
nonché: $S_{b\in T} b \sim d \quad (S_{x\in M} x \sim a_1)$.
Allora, $\forall i > 1$, si ha:

$$d - \sum_{j \le i-1} b_{k_j} = d - \left[\sum_{k \le k_{i-1}} (b_k + c_k) - \sum_{k \le k_{i-1}, k \notin \beta} b_k - \sum_{k \le k_{i-1}} c_k \right] =$$
$$= d - \sum_{k \le k_{i-1}} (b_k + c_k) + \left[\sum_{k \le k_{i-1}, k \notin \beta} b_k + \sum_{k \le k_{i-1}} c_k \right] \le$$
poiché $i - 1 \le k_{i-1}$
$$\le d - \sum_{k \le i-1} (a_k - a_{k+1}) + \left[\sum_{k \le k_{i-1}, k \notin \beta} b_k + \sum_{k \le k_{i-1}} c_k \right] \le$$
$\le d - a_1 + a_{(i-1)+1} + a_1 - d = a_i.$

Possiamo allora scegliere $J_0 = \mathbb{N}$, in quanto lo scegliere $J_0 \subset \mathbb{N}$ equivale a scegliere una sottosuccessione estratta da λ. Posto $J = \{k_i : i \in \mathbb{N}\}$ abbiamo che: se $F \in P_f(\mathbb{N})$ e $F_i = \{1, \ldots, i-1\} \subseteq F$ si ha che
$d - \sum_{j \in F} b_{k_j} \le a_i$ da cui $\mu_i(d - \sum_{j \in F} b_{k_j}) \in \mu_i[0, a_i] \subseteq U$. Dall'additività di μ_i segue che $\sum_{j \in F} \mu_i(b_{k_j})) \in \mu_i(d) + U$ $\square$

Siano $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni di E in G e $\alpha = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di E. Diremo che α è **cofinal subsequentially approximately μ_i-summable** se per ogni $U \in U(0)$ e per ogni sottoinsieme infinito $J_0 \subset \mathbb{N}$ esistono un $J \subset J_0$ infinito, un $d(J) \in E$ ed un $i(J)$ tali che per $i \ge i(J)$ esiste un $F_i \subset J$ finito per cui, per ogni $F \supset F_i$ finito, si ha
$\sum_{j \in F} \mu_i(x_j) \in \mu_i(d(J)) + U.$
In modo analogo al Lemma 3.2.3 si prova:

Lemma 3.2.4. *Siano E uno spazio di Vitali con la SIP, $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni additive ed asintoticamente esaustive di E in G, allora ogni succ. $(e_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \Sigma(E)$ è cofinal subsequentially approximately μ_i-summable.*

3.3 Teoremi di convergenza

Siamo ora in grado di dimostrare per gli spazi di Vitali alcune versioni dei più noti Teoremi di convergenza. Alcuni di questi, come i Teoremi di Brooks-Jewett e Nikodym, sono stati provati anche in [9] ma con una dimostrazione differente.

Teorema 3.3.1 (Cafiero). *Siano E uno spazio di Vitali con la SIP,$(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni additive ed localmente esaustive di E in G. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(i) le $\mu_i, i \in \mathbb{N}$, sono uniformemente localmente esaustive.

(ii) per ogni $U \in U(0)$ e per ogni succ. $(e_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$ esistono i_0 e $j_0 \in \mathbb{N}$ tali che $\mu_i(e_{j_0}) \in U \quad \forall i \geq i_0$.

Dimostrazione. Che (i) implica (ii). è evidente. Proviamo quindi l'altra implicazione.

Fissato un intorno $U \in U(0)$ e data una succ. $(e_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$, dal Lemma 3.2.2, sappiamo che esiste una succ. $(y_i - y_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ tale che ogni suo elemento maggiora le somme finite di infiniti elementi di $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Allora per ogni $p \in \mathbb{N}$ esiste una sottosucc. $(e_j^p)_{j\in\mathbb{N}}$ di $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $e_j^p \leq y_p - y_{p+1}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Dal Lemma 3.2.3, per ogni $p \in \mathbb{N}$ esiste una sottosucc.$(b_j^p)_{j\in\mathbb{N}}$ di $(e_j^p)_{j\in\mathbb{N}}$ ed un $d_p \leq y_p - y_{p+1}$ tale che, $\forall i > 1$, esiste $F_i^p \in P_f(\mathbb{N})$ per cui: $\sum\limits_{j\in F} \mu_i(b_j^p) \in \mu_i(d_p) + U$ per ogni $F \in P_f(\mathbb{N})$ tale che $F_i^p \subset F$. Poiché la succ. $(d_{p+1})_{p\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$, per la (ii), esistono un $\overline{p} \in \mathbb{N}$ ed $i_p \in \mathbb{N}$ tale che $\mu_i(d_{\overline{p}}) \in U, \forall i \geq i_p$. Dunque esiste una sottosucc. $(b_j^{\overline{p}})_{j\in\mathbb{N}}$ di $(e_j^{\overline{p}})_{j\in\mathbb{N}}$, e quindi di $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$, tale che, $\forall i \geq i_p$, esiste $F_i^{\overline{p}} \in P_f(\mathbb{N})$ per cui si ha:

$$\sum_{j\in F}\mu_i(b_j^{\overline{p}}) \in U+U$$

per ogni $F \in P_f(\mathbb{N})$ tale che $F_i^{\overline{p}} \subset F$. Pertanto la matrice $[\mu_i(e_j)]_{i,j\in\mathbb{N}}$ verifica l'ipotesi (2) del [15, Teorema 5]. Se l'ipotesi (1) del [15, Teorema 5] non è verificata, allora esiste un $V \in U(0)$ tale che, $\forall j_0 \in \mathbb{N}$, esiste $j \geq j_0$ con $\{i \in \mathbb{N} : \mu_i(e_j) \notin V\}$ infinito. Si costruisce così una succ. crescente $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che, $\forall k \in \mathbb{N}$, si ha che $\{i \in \mathbb{N} : \mu_i(e_{j_k}) \notin V\}$ è infinito, ma ciò contraddice la (ii). Allora dal [15, Theorem 5] segue $\lim\limits_{ij}\mu_i(e_j) = 0$ per ogni succ. $(e_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$, e quindi la (i). □

Teorema 3.3.2 (Cafiero)**.** *Siano E uno spazio di Vitali con la SIP,$(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni additive ed asintoticamente esaustive di E in G. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(i) Le μ_i, con $i \in \mathbb{N}$, sono uniformemente asintoticamente esaustive.

(ii) per ogni $U \in U(0)$ e per ogni succ. $(e_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$ esistono i_0 e $j_0 \in \mathbb{N}$ tali che $\mu_i(e_{j_0}) \in U \quad \forall i \geq i_0$.

Dimostrazione. Che (i) implica (ii) è evidente. Proviamo quindi l'altra implicazione.

Vogliamo provare che sono verificate le condizioni del [15, Theorem 5], per la successione doppia $(\mu_i(e_j))_{i.j\in\mathbb{N}}$. Infatti se tali condizioni sono verificate abbiamo che: $\lim\limits_{ij}\mu_i(e_j) = 0$; per l'asintotica esaustività fissato un $U \in U(0)$ si ha che $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall i \geq i_0$, esiste $j(i)$ tale che $\mu_i(e_j) \in U$, per $j \geq j(i)$. Poiché $\lim\limits_{ij}\mu_i(e_j) = 0$, in corrispondenza di U troviamo un $i_1 \geq i_0$ ed un j_1 tali che, $\forall i \geq i_1$ e $j \geq j_1$, $\quad \mu_i(e_j) \in U$. Allora, $\forall i \geq i_0$ e $j = \max\{j_1, j(i_0), \ldots, j(i_1)\}$, $\mu_i(e_j) \in U$, ovvero la tesi.

Se l'ipotesi (1) del [15, Theorem 5] non è verificata, esiste un $V \in U(0)$ tale che $\forall j_0 \in \mathbb{N}$ esiste $j \geq j_0$ per cui $\{i \in \mathbb{N} : \mu_i(e_j) \notin V\}$ è infinito. Si può quindi costruire una sottosuccessione $(e_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ di $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tale che, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} : \mu_i(e_{j_k}) \notin V\}$ è infinito , ma ciò contraddice la (ii).
Proviamo adesso che anche la condizione (2) del [15, Theorem 5] è verificata. Dal Lemma 3.2.2, sappiamo che data la successione $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ esiste una succ. $(y_i - y_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ tale che ogni suo elemento maggiora le somme finite di infiniti elementi di $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Allora, $\forall p \in \mathbb{N}$, esiste una sottosucc. $(e_j^p)_{j\in\mathbb{N}}$ di $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $e_j^p \leq y_p - y_{p+1}$, per ogni $j \in \mathbb{N}$. Dal Lemma 3.2.4, $\forall p \in \mathbb{N}$, esistono una sottosucc. $(b_j^p)_{j\in\mathbb{N}}$ di $(e_j^p)_{j\in\mathbb{N}}$, un $d_p \leq y_p - y_{p+1}$ ed un $i_0^p \in \mathbb{N}$ tali che, $\forall i > i_0^p$, esiste $F_i^p \in P_f(\mathbb{N})$ per cui: $\displaystyle\sum_{j\in F} \mu_i(b_j^p) \in \mu_i(d_p) + U$, per ogni $F \in P_f(\mathbb{N})$ tale che $F_i^p \subset F$. Poiché la succ. $(d_{p+1})_{p\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$, dalla (ii) esistono $\overline{p} \in \mathbb{N}$ ed $i_{\overline{p}} \in \mathbb{N}$ tale che $\mu_i(d_{\overline{p}}) \in U \quad \forall i \geq i_{\overline{p}}$. Allora esistono una sottosucc. $(b_j^{\overline{p}})_{j\in\mathbb{N}}$ di $(e_j^p)_{j\in\mathbb{N}}$ ed $i_0 = \max\{i_0^{\overline{p}}, i_{\overline{p}}\}$ tali che, $\forall i \geq i_0$, esiste $F_i^{\overline{p}} \in P_f(\mathbb{N})$ per cui: $\displaystyle\sum_{j\in F} \mu_i(b_j^{\overline{p}}) \in U+U$, per ogni $F \in P_f(\mathbb{N})$ tale che $F_i^{\overline{p}} \subset F$. Pertanto la successione $[\mu_i(e_j)]_{i,j\in\mathbb{N}}$ verifica l'ipotesi (2). □

DaL Teorema 3.3.1 segue immediatamente il classico risultato di Brooks-Jewett.

Teorema 3.3.3 (Brooks-Jewett). *Siano E uno spazio di Vitali con la SIP,e $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni additive e localmente esaustive di E in G. Se $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è puntualmente convergente in E, allora $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è uniformemente localmente esaustiva.*

Dimostrazione. Se la successione $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a zero, allora la condizione (ii) del Teorema di Cafiero 3.3.1 è verificata e dunque segue la tesi. Consideriamo ora il caso generale. Se la tesi non è vera, esistono un $U \in U(0)$ ed una successione $(e_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$ tali che, per ogni i_0 e $j_0 \in \mathbb{N}$, esiste un $i \geq i_0$ tale che $\mu_i(e_{j_0}) \notin U$. Si può dunque costruire una successione crescente di interi $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tale che:

$(*)\quad \mu_{k_j}(e_{k_j}) \notin U \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

Per semplicità di notazione possiamo supporre $\mu_j(e_j) \notin U, \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Sia $V \in U(0)$ tale che $V + V \subseteq U$, per l'esaustività delle μ_i, per ogni $i \in \mathbb{N}$, procedendo per induzione, possiamo costruire una successione crescente di indici $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tale che:

$(**)\quad \mu_{k_j}(e_{k_{j+1}}) \in V \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

Ne segue che $(\mu_{k_j} - \mu_{k_{j+1}})_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni additive e localmente esaustive, che converge puntualmente a zero, ed inoltre risulta $\mu_{k_j}(e_{k_{j+1}}) - \mu_{k_{j+1}}(e_{k_{j+1}}) \notin V \quad \forall j \in \mathbb{N}$, e ciò per quanto già visto è assurdo. $\square$

Dal Teorema 3.3.2 oltre al Teorema di Brooks-Jewett, segue il Teorema di Phillips

Teorema 3.3.4 (Phillips e Brooks-Jewett)**.** *Siano E uno spazio di Vitali con la SIP,$(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni additive ed asintoticamente esaustive di E in G e puntualmente di Cauchy. Allora si ha:*

1. *Ogni successione $(e_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$ è tale che $\lim_{ij} \mu_i(e_j) = 0$ e $\mu_i(e_j)$ è uniformemente asintoticamente esaustiva e uniformemente di Cauchy rispetto a j.*

2. *$\sum_{j\in A} \mu_i(e_j)$ è di Cauchy rispetto a i, uniformemente per $A \subseteq \mathbb{N}$ per cui la somma esiste.*

3. *Se le μ_i sono localmente esaustive, allora $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è uniformemente localmente esaustiva.*

Dimostrazione. La 1. segue da [40, Corollario 4] poiché, dal Lemma 3.2.4, ogni successione $(e_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$ è cofinal subsequentially approximately μ_i-summable.
La 2. segue dalla 1. di questo Teorema e da [40, corollario 3] osservando che poiché $(e_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$, detta $(\triangle_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una partizione di $\mathbb{N}$ fatta da sottoinsiemi finiti e disgiunti tale che : se $k \in \triangle_i$ e $k' \in \triangle_{i'}$ con $i \geq i'$ allora $k \geq k'$, abbiamo $(\sum_{j\in\triangle_i} e_j)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma(E)$.
La 3. segue dal Teorema di Brooks-Jewett per funzioni localmente esaustive. □

Poiché ogni funzione σ-additiva, nel senso di Constantinescu, è localmente esaustiva dal Teorema di Brooks-Jewett segue

Teorema 3.3.5 (di convergenza di Nikodym). *Siano E uno spazio di Vitali con la SIP,$(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni σ-additive di E in G puntualmente convergente a μ. Allora si ha:*

(i) $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ *è uniformemente σ-additiva.*

(ii) μ *è σ-additiva.*

Dimostrazione. Da [8, Proposizioni 2.14 e 2.15] , abbiamo che la successione $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è uniformemente esaustiva se e solo se uniformemente σ-additiva. Poiché una funzione σ-additiva è esaustiva dal Teorema di Brooks-Jewett segue che la nostra successione è uniformemente esaustiva e quindi la (i).
Da [8, Proposizione 2.16] segue la (ii). □

4 Appendice

4.1 Teorema sulle matrici

Indichiamo con $[x_{ij}]_{i,j\in\mathbb{N}}$ una matrice di elementi di G. Diciamo che tale matrice tende a zero se risulta $\lim_{i,j} x_{ij} = 0$, ossia se per ogni $U \in U(0)$, esiste una coppia $(i_0, j_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tale che $x_{ij} \in U, \quad \forall (i,j) \geq (i_0, j_0)$.

Teorema 4.1.1 ([15])**.** *La matrice $[x_{ij}]_{i,j\in\mathbb{N}}$ tende a zero se:*

(i) $\forall U \in U(0)$, *esiste un $j_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $j \geq j_0$ esiste un $i_0(j) \in \mathbb{N}$ per cui si ha, $\forall i \geq i_0(j), \quad x_{ij} \in U$.*

(ii) $\forall U \in U(0)$*e per ogni sottoinsieme infinito $J_0 \subset \mathbb{N}$ esistono un sottoinsieme infinito $J \subset J_0$ ed $i(J) \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $i \geq i(J)$, è possibile trovare una parte finita F_i di J per cui: $\sum_{j\in F} x_{ij} \in U$ se F una parte finita di J contenente F_i .*

Dimostrazione. Osserviamo che: se una matrice verifica le ipotesi del teorema, ciò accade per ogni sua sottomatrice; inoltre $[x_{ij}]_{i,j\in\mathbb{N}}$ tende a zero se e solo se per tutte le successioni crescenti di numeri naturali, $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e per ogni intorno U dello zero di G ci sono elementi della forma $x_{n_i m_i}$ arbitrariamente piccoli. Per quanto appena osservato, per semplicità, possiamo scrivere $[x_{ij}]$ in luogo di $[x_{n_i m_j}]$.

Siano $U \in U(0)$ e $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di intorni simmetrici dello zero tali che :

$$\sum_{i=1}^{n} U_i \subseteq U, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Come primo passo utilizziamo l'ipotesi (i). Scegliamo U_1 come intorno dello zero e sia $n_1 = j_0$ esiste allora $i_0(n_1) > n_1$ tale che:

$x_{in_1} \in U_1, \quad \forall i \geq i_0(n_1)$.

Scegliamo U_2 come intorno dello zero e sia $n_2 = j_0$ con $n_2 > i_0(n_1) > n_1$ esiste allora $i_0(n_2) > n_2$ tale che:

$x_{in_2} \in U_2, \quad \forall i \geq i_0(n_2)$.

Risulta quindi:

$x_{in_1} \in U_1, \quad \forall i \geq n_2$

$x_{in_2} \in U_2, \quad \forall i \geq i_0(n_2) > n_2$.

Supponiamo di aver determinato $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ e $i_0(n_k) > n_k$ tali che:

$x_{in_p} \in U_p, \quad \forall i \geq n_{p+1} \quad p = 1, \ldots, k-1$

$x_{in_k} \in U_k, \quad \forall i \geq i_0(n_k) > n_k$.

e scegliamo U_{k+1} come intorno dello zero e $j_0 = n_{k+1} > i_0(n_k)$, allora esiste $i_0(n_{k+1}) > n_k$ tale che:

$x_{in_{k+1}} \in U_{k+1}, \quad \forall i \geq i_0(n_{k+1})$.

Si ha allora:

$x_{in_p} \in U_p, \quad \forall i \geq n_{p+1} \quad p = 1, \ldots, k$

$x_{in_{k+1}} \in U_{k+1}, \quad \forall i \geq i_0(n_{k+1}) > n_k$.

Quindi per induzione costruiamo una successione crescente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che:

$x_{in_k} \in U_k, \quad \forall i \geq n_{k+1}$.

Posto $J_1 = \{n_1, \ldots, n_k, \ldots\}$, sia $i \in J_1$ e sia $F \subseteq J_1 \cap [1, i[$, risulta allora, se è $i = n_k$:

$$\sum_{j\in F} x_{ij} = \sum_{j\in F} x_{n_k j} \in U_1 + \ldots + U_{k-1} \subseteq U.$$

Abbiamo così che $\forall i \in J_1$ e $F \subseteq J_1 \cap [1, i[$ risulta $\sum_{j\in F} x_{ij} \in U$.

Come secondo passo, utilizziamo l'ipotesi (ii); dunque in corrispondenza di J_1 troviamo un J appartenente alle parti infinite di J_1 ed $i(J) \in \mathbb{N}$, in particolare possiamo prendere $i(J) \in J$, tali che per ogni, $i \geq i(J)$, esiste $F_i \in P_f(J)$ per cui si ha:

$\sum_{j \in F} x_{ij} \in U$ se è $F_i \subseteq F \in P_f(J)$,

nonché, se è $F \in P_f(J)$ con $F \cap F_i = \emptyset$,

$\sum_{j \in F} x_{ij} \in U + U$.

Infatti, se è $F \in P_f(J)$ con $F \cap F_i = \emptyset$, detto $\overline{F} = F \cup F_i$ questo appartiene ancora alle parti finite di J e abbiamo per quanto detto in precedenza:

$\sum_{j \in \overline{F}} x_{ij} \in U$ ed $\sum_{j \in F_i} x_{ij} \in U$,

da cui essendo

$\sum_{j \in \overline{F}} x_{ij} = \sum_{j \in F} x_{ij} + \sum_{j \in F_i} x_{ij}$

si ha:

$\sum_{j \in F} x_{ij} = \sum_{j \in \overline{F}} x_{ij} - \sum_{j \in F_i} x_{ij} \in U - U$,

ricordando che U è simmetrico segue che, se $F \in P_f(J)$ con $F \cap F_i = \emptyset$, si ha

$\sum_{j \in F} x_{ij} \in U + U$.

Poniamo $i_1 = i(J)$. Per quanto detto sopra, posto $j(i_1) = \max F_{i_1}$, risulta per F finito ed incluso in $J \setminus [1, j(i_1)] \subseteq J \setminus F_{i_1}$:

$\sum_{j \in F} x_{i_1 j} \in U + U$.

Posto $i_2 = \max\{i_1, j(i_1)\}$, abbiamo che $i_2 \geq i_1 = i(J)$, quindi esiste un $F_{i_2} \in P_f(J)$ tale che

$\sum_{j \in F} x_{i_2 j} \in U + U$

se è $F \in P_f(J)$ con $F \cap F_{i_2} = \emptyset$.

Posto $j(i_2) = \max(F_{i_2} \cup \{j(i_1)\})$, per quanto detto in precedenza, abbiamo che

$$\sum_{j\in F} x_{i_2 j} \in U+U$$
per F finito ed incluso in $J\setminus[1,j(i_2)]\subseteq J\setminus F_{i_2}$.

Procedendo per induzione si costruiscono due successioni strettamente crescenti $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(j(i_k))_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di J tali che, per $k\in\mathbb{N}$, si ha:

$i_{k+1}\geq j(i_k)$ e $\sum_{j\in F} x_{i_k j}\in U+U$

per F finito ed incluso in $J\setminus[1,j(i_k)]$.

Poniamo $J_2=\{i_1,\ldots,i_k,\ldots\}\subseteq J\subseteq J_1$. Allora si ha per $k\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{j\in F} x_{i_k j}\in U+U$$
per F finito e incluso in $J_2\setminus[i,j(i_k)]\subseteq J_2\setminus[1,i_k]=J_2\cap]i_k,+\infty[$.

ossia per ogni $i\in J_2$ risulta:

$$\sum_{j\in F} x_{ij}\in U+U$$
per F finito ed incluso in $J_2\cap]i,+\infty[$.

Abbiamo così costruito una matrice $[x_{ij}]_{i,j\in J_2}$ tale che se F è una parte finita di J_2 risulta:

$$(*)\sum_{j\in F} x_{ij}\in\begin{cases} U & \text{Se } F\subseteq J_2\cap[1,i[\\ U+U & \text{Se } F\subseteq J_2\cap]i,+\infty[. \end{cases}$$

Come ultimo passo, utilizzando di nuovo la (ii) otteniamo J_3 parte infinita di J_2 e $i(J_3)\in J_2$ tali che, se è $i\geq i(J_3)$, esiste F_i, parte finita di J_3, per cui si ha:

$$\sum_{j\in F} x_{ij}\in U$$
se F è una parte finita di J_3 contenente F_i.

Consideriamo la matrice $[x_{ij}]_{i,j\in J_3}$ e scegliamo x_{ii} con $i\geq i(J_3)$. Allora da (*) si ha:

$$x_{ii} = \sum_{j \in F_i \cup \{i\}} x_{ij} - \sum_{j \in F_i, j < i} x_{ij} - \sum_{j \in F_i, i < j} x_{ij} \in U + U + (U + U).$$

e ciò completa la dimostrazione. $\square$

4.2 Categorie ed Equivalenze

In questo paragrafo introduciamo il concetto di categorie, esposto in maniera esauriente da S. Mac Lane in [34], grazie al quale possiamo ancor meglio intendere la natura della relazione tra gli pseudo spazi di Vitali ed i loro gruppi universali.

Una **categoria** è caratterizzata da due elementi: gli **oggetti** e le **arrows (o morfismi)**. Gli oggetti sono, in generale, insiemi, mentre le arrows sono funzioni tra gli oggetti, le cui caratteristiche cambiano di categoria in categoria, tali che ad ogni oggetto è sempre associata un'arrow (che è la funzione identità) e possono essere composte tra loro.

Esempio.

Un esempio semplice di categoria sono le cosidette categorie discrete che hanno come uniche arrows le funzioni identità dei propri oggetti. Da tale definizione segue che ogni insieme X, con la funzione identità $i_X : a \in X \to a \in X$, può essere considerato una categoria.

Un **functor** è un morfismo di categorie. Precisamente, siano C e B due categorie, un functor $T : C \to B$ è un a funzione che ad ogni oggetto c di C associa un oggetto Tc di B ed ad ogni arrow $f : c \to c'$, dove c, c' sono oggetti di C, associa l'arrow $Tf : Tc \to Tc'$ tra oggetti di B.

Allora un **isomorfismo di categorie** è un functor biiettivo sia rispetto agli oggetti che alle arrows. In pratica due categorie C e B sono isomorfe se esistono due functor $T : C \to B$ e $S : B \to C$ tali che $T \circ S$ e $S \circ T$ sono functor identità.

Siano C e B due categorie. Diciamo un functor T **full** se per ogni coppia di oggetti $c, c' \in C$ ed ogni arrow $g : Tc \to Tc'$ di B esiste un arrow $f : c \to c'$

tale che $g = Tf$. È facile vedere che se componiamo due full functor otteniamo ancora un full functor.
Diciamo un functor $T : C \to B$ **faithful (oppure un'immersione)** se se per ogni coppia di oggetti $c, c' \in C$ ed di arrows $f_1, f_2 : c \to c'$ l'uguaglianza $Tf_1 = Tf_2 : Tc \to Tc'$ implica $f_1 = f_2$. Ancora è facile veder che se componiamo due faithful functor otteniamo ancora un faithful functor.
Per capire meglio le proprietà di un full e faithful functor, data una categoria X e due suoi oggetti x, x', indichiamo con $hom(x, x')$ l'insieme di tutte le arrows di X che hanno come dominio x e codominio x'.
Dato allora $T : C \to B$, indichiamo, per ogni coppia di oggetti $c, c' \in C$, con $T_{(c,c')} : hom(c, c') \to hom(Tc, Tc')$ che ad ogni $f \in hom(c, c')$ associa $Tf \in hom(Tc, Tc')$. Allora se T è full le $T_{(c,c')}$ sono suriettive per ogni coppia di oggetti $c, c' \in C$. Mentre se T è faihful le $T_{(c,c')}$ sono iniettive per ogni coppia di oggetti $c, c' \in C$. Dunque se un functor è full e faithful stabilisce una biiezione tra le arrows delle due categorie.
Siano A, X due categorie e $F : X \to A$ e $G : A \to X$ due functor. Un **adjunction** è una biiezione ϕ, che ad ogni arrow (di A) $f : Fx \to a$ assegna un'arrow (di X) $\phi f : x \to Ga$ in modo che per ogni coppia di arrows $h : x' \to x$ e $k : a \to a'$, e $g : x \to Ga$ si ha
$\phi^{-1}(gh) = \phi^{-1}g \circ Fh, \quad \phi^{-1}(Gk \circ g) = k \circ \phi^{-1}g.$
In tal caso diremo che F è **left adjoint** per G e G è **right adjoint** per F.
Date due categorie C, B e due functor $S, T : C \to B$, chiamiamo **trasformazione naturale di S in T** una funzione $\tau : S \to T$ che ad ogni $c \in C$ assegna un'arrow di B, $\tau c : Sc \to Tc$, in modo che per ogni arrow di C, $f : c \to c'$, il diagramma $\tau c : Sc \to Tc$, $Tf : Tc \to Tc'$, $\tau c' : Sc' \to Tc'$ e

$Sf : Sc \to Sc'$ sia commutativo.

Infine se ogni τc è invertibile parliamo allora di **isomorfismo naturale** e scriviamo $S \cong T$.

Diciamo che un functor $S : A \to C$ è un' **equivalenza di categorie** se esiste un functor $T : C \to A$ ed isomorfismi naturali $S \circ T \cong 1 : C \to C$ e $T \circ S \cong 1 : A \to A$.

Sia $\mathcal{PVS}$ la categoria i cui oggetti sono pseudo spazi di Vitali e i morfismi sono gli omomorfismi di pseudo spazi di Vitali.

Sia $\mathcal{LG}$ la categoria i cui oggetti sono le coppie (G, G_0), dove G è un ℓ-gruppo e G_0 un suo un pseudo sottospazio di Vitali convesso che lo genera, e i morfismi $\phi : (G, G_0) \longrightarrow (G', G'_0)$ sono ℓ-gruppi omomorfismi $\phi : G \longrightarrow G'$ tali che $\phi(G_0) \subseteq G'_0$.

Teorema 4.2.1. *Per ogni oggetto (G, G_0) della categoria $\mathcal{LG}$ poniamo $\Gamma(G, G_0) = G_0$ e per ogni morfismo $\phi : (G, G_0) \longrightarrow (G', G'_0)$ poniamo $\Gamma(\phi) = \phi|G_0$. Allora Γ definisce un'equivalenza di categoria tra $\mathcal{LG}$ e $\mathcal{PVS}$.*

Dimostrazione. È evidente che Γ è un functor. Sia (G, G_0) un oggetto della categoria $\mathcal{LG}$. G_0 può ovviamente essere visto come un pseudo spazi di Vitali, affermiamo allora che G con l'immersione $i_{G_0} : G_0 \to G$ è un gruppo universale di G_0. Ovviamente G è un gruppo rappresentativo per G_0. Inoltre se $h : G_0 \to K$ è un omomorfismo di gruppo di G_0 in K ℓ-gruppo, utilizzando la proprietà di decomposizione di Riesz, valida per gli ℓ-gruppi, possiamo estendere h a tutto G. Dunque G è un gruppo universale per G_0. Si vede facilmente che Γ è un faithful functor, poiché se $\Gamma(h_1) = \Gamma(h_2)$ per i morfismi $h_1, h_2 : (G, G_0) \longrightarrow (G', G'_0)$ allora $h_1 = h_2$. Per provare che Γ è full, supponiamo che f è sia un omomorfismo di $\Gamma(G, G_0)$ in $\Gamma(G', G'_0)$. Poiché

vale la decomposizione di Riesz e G_0 genera G, utilizzando una tecnica simile a quella della dimostrazione del Teorema 2.1.2, possiamo estendere f a un omomorfismo di ℓ-gruppi $\widehat{f} : G \to G'$.
Viceversa se E è un pseudo spazio di Vitali, dal Teorema 2.1.4, segue che esiste un unico ℓ-gruppo universale G per E; chiamiamo $\phi : E \to G$ l'immersione di E in G e poniamo $\Sigma(E) = (G, \phi(E))$. Per la costruzione del gruppo universale Σ è il left-adjoint del functor Γ. Da [34, Teorema IV 4.1] segue la tesi. $\square$

Sia $\mathcal{UPVS}$ la categoria i cui oggetti sono pseudo spazi di Vitali con strong unit ed i morfismi sono gli omomorfismi di pseudo spazi di Vitali.
Sia $\mathcal{ULG}$ la categoria i cui oggetti sono le triadi (G, G_0, u), dove (G, u) è un ℓ-gruppo con strong unit e G_0 un suo un pseudo sottospazio di Vitali convesso che lo genera e tale che $u \in G_0$, e i morfismi $\phi : (G, G_0, u) \longrightarrow (G', G'_0, u')$ sono ℓ-gruppi omomorfismi $\phi : G \longrightarrow G'$ preservanti gli strong unit e tali che $\phi(G_0) \subseteq G'_0$.
Possiamo definire il functor $\Gamma_1 : \mathcal{ULG} \to \mathcal{UPVS}$ che assegna ad ogni triade (G, G_0, u) l'oggetto $\Gamma(G, G_0, u) = (G_0, u)$ che è uno pseudo spazio di Vitali con strog unit. Allora, come nel Teorema 4.2.1, è facile vedere che Γ definisce una equivalenza tra le categorie degli ℓ-gruppi con strong unit e quella degli pseudo spazi di Vitali con strong unit.
Segue da quanto già detto in questo paragrafo

Teorema 4.2.2. *Sia* $h : \Gamma(G, G_0) \to \Gamma(H, H_0)$ *un omomorfismo tra pseudo spazi di Vitali. Allora* h *può essere esteso ad un unico isomorfismo* $\widehat{h} : (G, G_0) \to (H, H_0)$. *Inoltre* h *è iniettivo se esolo se lo è* $\widehat{h}$*; se* h *è suriettivo lo è anche* $\widehat{h}$.

Se $h : \Gamma(G, G_0, u) \to \Gamma(H, H_0, v)$*, allora* $\widehat{h}$ *è suriettivo se e solo se* $h([0, u]) = [0, v]$.

Dimostrazione. Per il Teorema 4.2.1, h può essere esteso ad un unico isomorfismo $\widehat{h} : (G, G_0) \to (H, H_0)$. Assumiamo che h sia iniettiva. Se $\widehat{h}$ non è iniettiva esiste $g \in G \setminus \{0\}$ tale che $\widehat{h}(g) = 0$. In particolare possiamo assumere $g \in G_0$, cadendo così in contraddizione a causa della iniettività della h.

Supponiamo ora che h sia suriettiva, allora ogni $b \in H$ può essere espresso nella forma $b = c_1 + \cdots + c_n - d_1 - \cdots - d_m$ dove $0 \leq c_i, d_j \in H_0$. Allora esistono $0 \leq a_i, b_j \in G_0$ tali che $h(a_i) = c_i$ e $h(b_j) = d_j$. Questo implica $\widehat{h}(g) = b$ dove $g = a_1 + \cdots + a_n - b_1 - \cdots - b_m \in G$.

Sia ora $\widehat{h} : (G, G_0, u) \to (H, H_0, v)$ suriettiva e sia $h_0 \in [0, v]$. Allora esiste $g \in G^+$ tale che $\widehat{h}(g) = h_0$ e $\widehat{h}(g \wedge u) = h_0 \wedge v = h_0$. Ma dalla convessità di G_0 si ha $g \wedge u \in G_0$, quindi segue $h(g \wedge u) = h_0$. □

5 Bibliografia

Riferimenti bibliografici

[1] E.M. Alfsen, *Compact Convex Sets and Boundary Integrals*, Springer-Verlag, Berlin 1971.

[2] R. Bear, *Free sums of groups and their generalizations. An analysis of the associative law*, Amer. J. Math., **71** (1949), 706-742.

[3] M.K. Bennett, D.J. Foulis, *Interval and scale Effect algebras*, Advan. Math. **19** (1997), 200-215.

[4] G. Birkoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 25 (Amer. math. Soc., Providence, RI,(1997).

[5] J.K. Brooks and R. S. Jewett , *On finitely vector measures*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **67** (1970), 1294-1298 (I).

[6] F. Cafiero, *Sulle famiglie di funzioni finitamente additive d'insieme uniformemente continue*, Rend. Acc. dei Lincei.(8) **12** (1952),155-162.

[7] C. Constantinescu, *Spaces of Measures*, de Gruyter, Berlin, 1984.

[8] C. Constantinescu, *Some properties of Spaces of Measures (summary)*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XXXV (1987), 39-62.

[9] C. Constantinescu, *Some Properties of Spaces of Measures*, Atti del Sem. Mat. Fis. Univ. di Modena Suppl. XXXV.

[10] C.C. Chang, *Algebraic analysis of many-valued logic*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 74-80.

[11] P. de Lucia, *Funzioni Finitamente Additive a valori in un gruppo topologico*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana,n.29, Pitagora editore Bologna, 1983.

[12] P. de Lucia,*Convergence Theorems in Orthomodular Poset*, Atti del Sem. Mat. Fis. Univ. di Modena Suppl. XLVI , 1998, 171-179.

[13] P. de Lucia and E. Pap, *Convergence Theorems for set functions*, (Ed. E. Pap) Handbook of Measure Theory, North Holland (2002), 125-178.

[14] P. de Lucia and S. Salvati, *A Cafiero characterization of uniform boundedness*, Rend. Circ. Mat. di Palermo, Supp.II **40** (1996),121-128.

[15] P. de Lucia - T. Traynor, *Non commutative group valued measures on a orthomodular poset*, Math Japonica **40**,N.2 (1994), 309-315.

[16] A. Dvurečenskij, *Pseudo MV-algebras are interval in ℓ-group*, J. Austral. Math. Soc. **72** (2002), 427-445

[17] A. Dvurečenskij, *States on pseudo MV-algebras*, Studia Logica **68** (2001),301-327.

[18] A. Dvurečenskij, *Loomis and Sikorski theorem for σ-complete MV-algebras and ℓ-group*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **68** (2000), 261-277

[19] A. Dvurečenskij, *On Loomis and Sikorski's theorem for MV-algebras and BCK-algebras*, preprint 15/1999, (August 20,1999).

[20] A. Dvurečenskij, M.G. Graziano, *Remarks on representationsof minimal clans*, Tatra Mt. Math. Publ. **15** (1998),31-53.

[21] A. Dvurečenskij, S. Pulmannová, *New trends in quantum structures*, Kluwer Academic Press Publishers ordrecht and Ister Science, Bratislava, (2000).

[22] A. Dvurečenskij, F. Ventriglia, *On two versions of the Loomis-Sikorski Theorem for algebraic structures*, manuscript.

[23] A.Dvurečenskij, F. Ventriglia, *Representations of pseudo Vitali spaces and Loomis-Sikorski Theorem*, manuscript.

[24] A. Dvurečenskij, T. Vetterlein, *Algebras in positive cone of po-groups*, Order **19**, (2002), 127-146.

[25] A. Dvurečenskij, T. Vetterlein, *Generalized pseudo effect algebras*, in A. Di Nola and G. Gerla (eds), Lectures on Soft Computing and Fuzzy Logic, Springer-Verlag, Berlin, 89-111.

[26] D.J. Foulis, M.K. Bennett, *Effect algebras and unsharp quantum logics*, Found. Phys. **24** (1994), 1325-1346.

[27] F.J. Freniche, *The Vitali Hahn-Saks theorem for Boolean algebras with subsequential interpolation property*, Proc. Amer. Math. Soc. **92** (1984),362-366.

[28] L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, Oxford, (1963).

[29] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Pseudo MV-algebras*, Multiple Val. Logic **6** (2001),95-135.

[30] K.R. Goodearl, *Partially Ordered Abelian Groups with Interpolation*, Math, Surveys and Monographs n.20, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island,1986.

[31] M.G. Graziano, *Ideals of minimal clans*, Dem. Math. **30** (1997), 859-868.

[32] M.G. Graziano, *Uniformities of Fréchet-Nikodym Type on Vitali Spaces*, Semigroup. Forum vol.61 (2000),91-115.

[33] F. Kôpka, F. Chovanec, *D-posets*, Math. Slovaca **44** (1994),21-34.

[34] S. Mac Lane, *Categories for the Working mathematician*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.

[35] D.Mundici, R. Cignoli, I.M.L. d'Ottaviano, *Algebraic Foundations of many-valued Reasoning*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 2000.

[36] V.V. Rama Rao, *A common abstraction of boolean rings and lattice ordered groups I*, Monatshefte Math. **73** (1969), 411-421.

[37] K. D Schmidt, *A common abstraction of boolean rings and lattice ordered groups*, Compositio Mathematica, tome 54, n.1 (1985),51-62.

[38] K. D Schmidt, *Jordan decompositons of generalized vector mesures*, Pitman Research Notes in Matematics Series, N.214, Harlow (1989).

[39] K.L.N. Swamy, *Dually residuated lattice ordered semigroups*, Math. Ann. **159** (1965),105-114.

[40] T. Traynor, *A diagonal Theorem in non Commutative Groups and its consequences*, Ricerche di Mat. **41** (1992),77-87.

[41] F. Ventriglia, *Cafiero and Brooks-Jewett Theorem for Vitali Spaces*, Preprint 38, giugno 2006.

[42] F. Ventriglia, *Asymptotically exaustive functions in Vitali spaces*, Preprint 11, marzo 2007.

[43] H. Weber, *Compactness in spaces of group-valued contents, the Vitali-Hahn-Saks theorem and Nikodym's boundedness theorem*, Rocky Mountain J.Math. **16** (1986), 253-275.

[44] O. Wyler, *Clans*, Compositio Math. **17** (1966-67), 172-189.