

EINSTEIN Y EL ROL DE LAS MATEMÁTICAS EN LA FÍSICA *†‡

Michel Paty[§]

RESUMEN

Queremos hacer una especie de reconstrucción de las concepciones de Einstein acerca de la situación de la matemática en la física, tanto en la práctica del físico como según sus propias posturas epistemológicas. Hoy la física sería impensable sin el uso de la matemática como forma y como pensamiento. Pero existe mucha confusión, no solamente entre el público sino también entre los científicos, los filósofos y los historiadores de la ciencia, en cuanto al papel exacto de la matemática en la formulación de las teorías físicas. Los trabajos y el pensamiento de Einstein ofrecen una buena oportunidad para esclarecer esta relación.

Seguiremos la evolución de las concepciones de Einstein en sus investigaciones de física teórica, destacando dos periodos: antes y después de la elaboración de la teoría de la relatividad general. En los dos periodos, Einstein se muestra preocupado por el carácter físico de los conceptos y de las preocupaciones teóricas, de tal manera que la matematización sea la expresión misma de los conceptos así considerados. El físico, antes de la elaboración de la teoría de la relatividad general (esto es, antes de 1912), es cuidadoso en distinguir nítidamente, en el pensamiento, lo conceptual (físico) y lo formalizado (pensado comúnmente como “lo formal”, simplemente matemático). Esta separación intelectual va a ser cuestionada con el problema de la relatividad generalizada y con la necesidad de recurrir a la geometría no-euclídea y a los tensores.

* **Recibido** Enero de 2006; **aprobado** Enero de 2006.

† Este artículo originalmente estaba en portugués (resumen e introducción) y en francés (el resto del texto). Susana Gómez G., Corporación Universitaria Minuto de Dios, hizo la traducción del portugués, y Maribel Anacona, Universidad del Valle, la del francés. La versión final fue revisada por Germán Guerrero Pino (Universidad del Valle) y verificada por el autor.

‡ En este artículo se basó mi conferencia de clausura del Seminario Paulista de História e de Educação Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, USP, São Paulo 10-12 de octubre del 2005. La conferencia la ofrecí en portugués y el texto de la misma estaba en portugués y francés.

§ Director de investigación emérito del *Centre National de la Recherche Scientifique* (CNRS), (Equipo REHSEIS, UMR 7596, CNRS y Universidad Paris 7 – Denis Diderot), París, Francia, y Profesor Invitado en el Departamento de Filosofía, FFLCH, Universidad de São Paulo (SP), Brasil.

La invención de la teoría de la relatividad general muestra (en el período de 1912 a 1915) un cambio en el papel efectivo de la matemática, evidenciando un “arrastre del pensamiento físico por las formas matemáticas” y una nueva estrategia en la elaboración de teorías físicas, cuando el objeto está muy alejado de las intuiciones sensibles. Este nuevo modo no significa una identificación entre el trabajo del físico y el del matemático. La diferencia está ejemplificada en el caso de la colaboración entre Einstein y Elie Cartan sobre el paralelismo distante al respecto de la búsqueda de una Teoría del campo unificado (1928-1931).

Finalmente, hacemos alusión a la cuestión de la relación entre “la geometría y la experiencia” y al debate de Einstein con los positivistas y empiristas lógicos.

Palabras clave: Elie Cartan, cálculo diferencial, cálculo tensorial, conceptualización física, covariancia, Albert Einstein, espacio-tiempo, empirismo lógico, equivalencia (principio de), formalización matemática, geometría y experiencia, geometría no euclídea, intuición sensible, paralelismo absoluto o distante, relación entre matemática y física, teoría electromagnética, teoría de la relatividad, teoría del campo unificado.

Queremos fazer uma especie de levantamento das concepções de Einstein acerca da situação da Matemática na Física, na prática do físico bem como segundo suas próprias colocações epistemológicas. Hoje, a física seria impensável sem o uso da matemática como forma e como pensamento. Mas existe muita confusão, não só no público mas mesmo entre os cientistas, os filósofos e os historiadores da ciência, enquanto ao papel exato da matemática na formulação das teorias físicas. Os trabalhos e o pensamento de Einstein oferecem uma boa oportunidade para esclarecer esta relação.

Seguiremos a evolução das concepções de Einstein nas suas pesquisas de física teórica, destacando dois períodos: antes e depois da elaboração da teoria da Relatividade Geral. Nos dois, Einstein se mostra preocupado pelo caráter físico dos conceitos ou grandezas e das preocupações teóricas, de tal maneira que a matematização seja a expressão mesma das propriedades das grandezas assim consideradas. O físico, antes da elaboração da teoria da Relatividade Geral (com efeito, antes de 1912), se mostra cuidadoso em distinguir nitidamente, no pensamento, o conceitual (físico) e o formalizado (pensado comunamente como « o formal », simplesmente matemático). Esta separação intelectual vai ser questionada com o problema da Relatividade Generalizada e com a necessidade de recorrer a Geometria não euclídiana e aos tensores.

A invenção da Teoria da Relatividade Geral mostra (no período 1912-1915) uma mudança no papel efectivo da matemática, evidenciando um «arrastamento do pensamento físico pelas formas matemáticas», e uma nova estratégia na elaboração de teorias físicas, quando o objeto está muito afastado

das intuições sensíveis. Este novo modo não significa uma identificação entre o trabalho do físico e este do matemático. A diferença está exemplificada no caso da colaboração entre Einstein e Elie Cartan sobre o paralelismo distante a respeito da busca de uma Teoria Unitária do Campo (1928-1931).

Por fim, evocamos a questão da relação entre «a Geometria e a Experiência», e o debate de Einstein com os Positivistas e Empiristas Lógicos.

Palavras chaves: Elie Cartan, cálculo diferencial, cálculo tensorial, conceptualização física, covariância, Albert Einstein, espaço-tempo, empirismo lógico, equivalência (princípio de), formalização matemática, geometria e experiência, geometria não euclidiana, intuição sensível, paralelismo absoluto ou distante, relação entre matemática e física, teoria eletromagnética, teoria da relatividade, teoria unitária do campo.

1. Introducción

Existe mucha confusión en las ideas difundidas entre el público acerca de la relación entre la teoría de la relatividad de Einstein y la matemática. A veces se dice (o por lo menos se decía) que la teoría de la relatividad general es una teoría matemática. En vida, Einstein era considerado por muchos como “un matemático” porque se necesita una formulación matemática sofisticada para expresar la teoría de la relatividad general. Se necesita de las geometrías no-euclidianas, de la teoría de los tensores, o del cálculo diferencial absoluto. Sin embargo, cuando se habla de sus primeros trabajos, antes de la relatividad general, no es raro oír decir que “Einstein no sabía de matemática”. Todos esos rumores reflejan una dificultad del público, pero a veces también de personas cultas, para situar exactamente la relación entre la física teórica o matemática y la matemática propiamente dicha.

Incluso entre los científicos, los filósofos y los historiadores de la ciencia hay siempre mucha discusión sobre el papel exacto de la matemática en la formulación de las teorías físicas. Los trabajos y el pensamiento de Einstein ofrecen una buena oportunidad para esclarecer esta relación.

Comenzaremos por una consideración preliminar muy breve sobre la matematización de la física moderna y clásica, tal como se fue realizando desde el inicio del siglo XVII hasta el inicio del siglo XX, y sobre el papel de la abstracción en la representación y en la inteligibilidad del concepto de mundo. Se puede decir, de una manera general, que la física de hoy sería impensable sin el uso de la matemática, como forma y como pensamiento. La física tomó este rumbo desde que se constituyó, a partir del siglo XVII, y de manera más sistemática desde su analitización por el cálculo diferencial e integral, comenzando en los inicios del siglo XVIII, afirmándose con la Mecánica Analítica de Lagrange (1788), y generalizándose a las demás

ramas de la física (óptica, teoría analítica del calor y termodinámica, electrodinámica y teoría electromagnética) en el siglo XIX¹.

Aunque de manera diferente cada una de ellas, las teorías de la relatividad de Einstein (Especial, 1905; General, 1915) también hacen uso del cálculo diferencial. Pero fue a partir de la elaboración de la última (de la teoría de la relatividad general) que Einstein percibió la importancia mucho mayor del pensamiento matemático, no solamente en la formulación de la teoría física, sino en la posibilidad misma de su elaboración, la cual precisaba de las teorías matemáticas más complejas de su tiempo, tales como el cálculo diferencial absoluto o tensorial y las geometrías no-euclidianas (hasta necesitar crear nuevas matemáticas, como es el caso de la teoría del campo unificado). Si se piensa bien, la teoría cuántica también utiliza una matemática nueva y refinada además del simple cálculo diferencial (espacios de Hilbert, de funciones y de operadores).

En este cuadro general, queremos esencialmente explorar cómo fue que funcionó, en el pensamiento físico de Einstein y en sus innovaciones teóricas y conceptuales, el uso de las teorías matemáticas. También pondremos en correspondencia este uso con su epistemología al respecto de la relación entre, por un lado, los conceptos y las teorías de la física en su forma simbólica y matemática, y, por otro lado, lo “real físico” de los objetos y de los fenómenos del mundo material. Estudiaremos sucesivamente los siguientes problemas: el carácter físico de los conceptos de la física (cómo se asegura o se establece este carácter); el estatuto, a este respecto, del espacio-tiempo o “universo de Minkowski”, esto es, si el espacio y el tiempo físicos se dejan describir como una geometría de cuatro dimensiones, y, en caso afirmativo, cuál sería la particularidad de una tal geometría; la invención de la teoría de la relatividad general muestra (en el período de 1912 a 1915) un cambio en el papel efectivo de la matemática, evidenciando un “arrastre del pensamiento físico por las formas matemáticas”, y una nueva estrategia en la elaboración de teorías físicas, cuando el objeto está muy alejado de las intuiciones sensibles. Este nuevo modo no significa una identificación entre el trabajo del físico y el del matemático. La diferencia está ejemplificada en el caso de la colaboración entre Einstein y Elie Cartan sobre el paralelismo distante al respecto de la búsqueda de una teoría del campo unificado.

2. Conceptos físicos con expresión matemática. Antes de la teoría de la relatividad general

Los conceptos de la física poseen la característica de presentarse bajo la forma de magnitudes que tienen expresión matemática y las leyes que los

¹ Paty [1994b].

rigen, dotadas de un sentido físico, se formulan bajo la forma de ecuaciones que relacionan estas magnitudes entre sí en razón misma de su forma matemática. Las obligaciones que su particularidad de seres físicos implica (es decir, de servir a la descripción de fenómenos físicos) determina la forma exacta de estas ecuaciones (por ejemplo, la ley de causalidad diferencial para la aceleración en mecánica, o las leyes de Maxwell del electromagnetismo).

Desde luego, toda magnitud matemática no es una magnitud física, aunque ella aparezca en una formulación física. Las magnitudes físicas que expresan propiedades físicas son funciones de variables que juegan el rol de conceptos; pero estas variables no son necesariamente en sí mismas, *ipso facto*, magnitudes o conceptos físicos. Ellas pueden jugar provisionalmente este rol, pero cabe preguntarse hasta qué punto lo son. La diferencia puede estar relacionada con aquella otra entre física matemática y física teórica². Para acercarse a una teoría verdaderamente física (descriptiva de los fenómenos por sus conceptos y sus relaciones), es adecuado que tales variables puedan ser ellas mismas afectadas por una significación física. Las ecuaciones expresarán luego una homogeneidad desde el punto de vista de la física. Es obvio que cuando nosotros hablamos de significación o de contenidos *físicos*, no reducimos este término a la puesta en correspondencia directa con la experiencia o la observación, a la manera empirista: el carácter físico puede ser garantizado por las mediaciones relacionadas con la estructura teórica de las relaciones entre los conceptos.

Lo anterior puede ser aclarado por el rol del matemático y del físico en los trabajos innovadores de Einstein antes de la teoría de la Relatividad general. Dos casos ejemplifican la exigencia fundamental de que los principios y los conceptos implicados en una teoría física sean efectivamente físicos, dado que su estatus era ambiguo a este respecto.

El primer caso es el de la probabilidad (denotada W) tal como ella aparece en la fórmula fundamental de Boltzmann de la termodinámica expresando la entropía (S) ($S=k \text{ Log } W$). Einstein sustituyó (en 1903) el sentido puramente combinatorio (matemático) de la función de probabilidad por el sentido (referido a situaciones físicas, y en consecuencia físico) de *frecuencia* en el tiempo para un sistema que está en un cierto estado. Ahora, frecuencia implicaba fluctuaciones, y tales fluctuaciones podían ser calculadas y también buscadas en la experiencia: fue una vía en la dirección de predicciones teóricas sobre las relaciones entre las cantidades. Todas sus contribuciones en física atómica y cuántica (las cuales no vamos a detallar aquí) se siguen de esta consideración física³.

² Paty [1994b, 1996 y 1999].

³ Véase Paty [1993 y 2006, por publicarse].

El segundo caso es el de la teoría de la relatividad restringida, motivada por la necesidad, surgida de razones bien precisas, de reformar la teoría electromagnética (y junto con ella la mecánica). Esta reforma se obtuvo como consecuencia del establecimiento de una nueva cinemática (teoría de las propiedades del espacio, del tiempo y de las cantidades derivadas de estas últimas, como la velocidad, antes que de toda consideración dinámica y de interacciones). La nueva cinemática resultó de la *dependencia* de los conceptos de espacio y de tiempo, que aparecen en la mecánica y en el electromagnetismo, a *principios físicos*, tales como el principio de la relatividad y el principio de velocidad constante de la luz en el vacío, los cuales son característicos de esos campos de fenómenos. Esta dependencia pareció ser, para Einstein, una condición para volver *físicas* estas cantidades, que hasta entonces habían permanecido ambiguas en la definición newtoniana como «absolutas, verdaderas y matemáticas», (y, de hecho, simples parámetros o variables, sin condiciones para su uso). La teoría de la relatividad especial (o restringida) es la consecuencia directa de esta exigencia⁴.

10

Habiendo modificado las magnitudes consideradas físicas por la imposición de la condición de tener que respetar los dos principios indicados (lo que se puede traducir por: extender de aquí en adelante el principio de relatividad de la mecánica al electromagnetismo), Einstein obtenía como consecuencia las fórmulas de transformación para dos sistemas de inercia en movimiento relativo (fórmulas de transformación de Lorentz).

Detallemos un poco, de paso, el alcance de este procedimiento y de los resultados desde el punto de vista de la significación física, o de los “contenidos físicos”.

Las ecuaciones de transformación, deducidas, admiten en ellas mismas el contenido, o la “significación” física de las magnitudes pertinentes: ninguna consideración de dinámica había intervenido y las magnitudes transformadas resultaron simplemente de la nueva acepción de los conceptos-magnitudes de espacio y tiempo. La “significación física” se refiere en realidad al sentido que hay que darle a las distancias espaciales y a los intervalos de tiempo de tal manera que ellos resulten de las fórmulas de transformación. El carácter físico de los tiempos y las distancias expresados en cada uno de los sistemas de referencia se debe a que estas fórmulas, que expresan relaciones entre magnitudes, se basan ellas mismas en propiedades físicas. La definición del concepto físico de tiempo conlleva la elección de un conjunto de convenciones, de reglas operacionales, y de interpretaciones (en particular, su sometimiento a los dos principios, que condicionan su matematización y participan de su conceptualización física). Pero Einstein indica muy claramente que el rol de

⁴ Einstein [1905], véase Paty [1993], Cap. 2-4 y [1994c].

las convenciones no debe ser particularmente privilegiado: siendo las coordenadas espaciales y temporales magnitudes definidas físicamente, las ecuaciones de transformación “contienen enunciados físicos exactamente definidos sobre el comportamiento de las reglas y los relojes”. Las transformaciones suministran magnitudes reales: “no tiene sentido creer que el reemplazo de la transformación de Galileo por la de Lorentz sea un simple asunto de convención puramente formal”⁵.

La matematización de magnitudes, que es justificada solamente por las consideraciones físicas⁶, conduce a consecuencias formales que se pueden controlar en cada paso si corresponden apropiadamente a fenómenos físicos. Y nos vemos conducidos, tanto por las longitudes como por las duraciones, a la expresión de predicciones que pueden en principio ser confrontadas con la experiencia, y eso garantiza que las magnitudes empleadas posean una significación física.

3. Estatus del universo (espacio-tiempo) de Minkowski

El estatus que tiene para Einstein la teoría del espacio-tiempo de Minkowski, desde 1907 hasta 1912, es revelador del pensamiento físico clásico, el cual es cuidadoso en distinguir, en el pensamiento, lo conceptual (físico) y lo formalizado (pensado frecuentemente como “lo formal”, lo simplemente matemático). Esta separación intelectual va a ser cuestionada con el problema de la relatividad generalizada y con la necesidad de recurrir a la geometría no euclídeana y a los tensores.

Para Minkowski, el espacio-tiempo cuatridimensional (o “universo de Minkowski”) representaba el Universo real, y él era totalmente matemático. En esta concepción, de una parte, las cuatro dimensiones del matemático no son menos reales que las tres del físico; de otra parte, para designar el tejido de este “universo absoluto”, que existía a sus ojos independientemente de todo observador -al contrario de los antiguos conceptos de espacio y de tiempo-, Minkowski empleaba el término “substancia”⁷, que es completamente inmaterial⁸ y era, en el fondo, una suerte de éter. Incluso, esto es algo que vería bien Einstein, independiente de su interpretación diferente acerca del rol de la formalización matemática en física. Ese carácter le parecería, al contrario de Minkowski, como una limitación de la teoría de la relatividad restringida, y lo asimilaría ulteriormente en su crítica de los conceptos para

⁵ Einstein [1920]

⁶ Sobre las reflexiones epistemológicas de Einstein relacionadas con la naturaleza de la matematización, véase Paty [1993a], capítulos 7 y 9.

⁷ “*Substanz*” (*Ibid.*).

⁸ Minkowski era, además, partidario de la visión electromagnética del mundo.

justificar la necesidad de su superación, el éter como espacio absoluto y el continuo del espacio-tiempo.

La concepción de Einstein sobre el continuo espacio-tiempo de cuatro dimensiones no concuerda sino hasta cierto punto con la de Minkowski: él considera de otra manera su rol respecto a la física. El continuo no modifica sino en parte la concepción clásica, en la cual ya se podía considerar el tiempo como una cuarta dimensión agregada a las tres del espacio. Es a d'Alembert y a Lagrange a quienes se debe la primera formulación de esta idea: la mecánica, escribían ellos, puede ser vista como una geometría de cuatro dimensiones, siendo la cuarta el tiempo⁹. Además, probablemente es aquí dónde se origina la idea de formular algebraicamente el tiempo relativista como una cuarta dimensión del espacio, desarrollada por Poincaré y retomada por Minkowski¹⁰. Pero el continuo de cuatro dimensiones de la mecánica podía estar separado en un espacio y en un tiempo independientes el uno del otro, lo que no es mas el caso en la teoría de la relatividad restringida y la estructura del espacio-tiempo, definido por la métrica cuasi-euclidiana.

12

Einstein no se interesó sino progresivamente por la formulación de Minkowski, y no la adoptó plenamente sino hasta que ya estaba muy comprometido en el camino de la relatividad general. Él menciona por primera vez la notación de Minkowski de las cuatro coordenadas del espacio-tiempo en un texto de 1910, donde señala su interés en relación con lo formal, para la aplicación del cálculo vectorial en cuatro dimensiones (él indica que las transformaciones de Lorentz son rotaciones en el espacio de cuatro dimensiones)¹¹.

Pero es en su manuscrito de 1912, acerca de la relatividad restringida, que Einstein utiliza verdaderamente la teoría del espacio-tiempo, y consagra la tercera sección, intitulada "Algunos conceptos y proposiciones de la teoría de los vectores y de los tensores en cuatro dimensiones, necesarios para comprender la presentación de Minkowski de la teoría de la relatividad"¹². Él describe allí el formalismo de Minkowski, pero solamente luego de haber expuesto completamente la relatividad restringida según los razonamientos y con las notaciones que le eran habituales: él no formula de entrada la teoría a partir del formalismo, lo que hará por el contrario en numerosas exposiciones posteriores a la relatividad general. La transcripción propuesta

⁹ Véase Paty [1998].

¹⁰ Poincaré [1905], Minkowski [1907, 1908]. Minkowski, no hace referencia a Poincaré en el texto conocido de 1908, pero lo mencionaría por el contrario en su conferencia anterior, de 1907, que no fue publicada sino en 1915 luego de su muerte (Minkowski [1907]).

¹¹ Einstein [1910], p. 139.

¹² Einstein [1912]. Las citas siguientes se encuentran en el mismo texto (hasta la proxima llamada de nota).

de la teoría de la relatividad restringida en el formalismo del espacio-tiempo de cuatro dimensiones y de los tensores, corresponde a una transformación de “la descripción matemática de los procesos físicos” en una geometría (a cuatro dimensiones entre las cuales hay una coordenada imaginaria). El tiempo no se distingue desde el punto de vista formal, de las otras coordenadas, y “en lugar de preguntar ‘¿cómo cambian con el tiempo los sistemas físicos?’, plantea la pregunta: ¿cómo se constituye la entidad cuatridimensional en que consiste la totalidad de los estados sucesivos de un sistema?”. Minkowski “reemplaza, por así decir, la teoría de los cambios (la dinámica) de tres dimensiones por una especie de estática en cuatro dimensiones”.

Esta manera formal de ver el asunto era acorde con el problema que entonces Einstein tenía a la vista, el de la relatividad general: él adoptó el formalismo de Minkowski desde el momento en que le fue útil en el paso hacía la generalización de la teoría. El formalismo permitía directamente la expresión de magnitudes invariantes; esta ventaja se había manifestado en la formulación de la relatividad restringida, pero “La teoría de vectores y su extensión, la teoría de tensores (...), permite reconocer sin cálculo, si una ecuación o un sistema de ecuaciones tiene o no [la] propiedad [de transformarse de manera covariante]”. Presentando los conceptos del cálculo tensorial y expresando la electrodinámica en la notación covariante, Einstein se ejercitaba en el manejo del cálculo y se familiarizaba con esta herramienta matemática de la cual ya sabía que su importancia iba a ser decisiva para la Relatividad general.

Einstein señala, en este texto, que el vínculo del tiempo con el espacio es una propiedad física que enuncia la teoría de la relatividad y que el formalismo de espacio-tiempo expresa de forma inmediata. Pero el tiempo no es equivalente al espacio sino desde el punto de vista matemático: “Por su rol en las ecuaciones físicas, pero no por su significación física, el tiempo es equivalente a las otras coordenadas de espacio-tiempo”. Esta diferencia se expresa en el formalismo por el carácter de imaginario puro de la cuarta coordenada, y aparece desde que se supera el aspecto formal de la métrica para examinar el contenido físico real, señalado por la métrica. El elemento ds^2 (cuadrado del elemento diferencial del intervalo espacio-tiempo) no es positivo, al contrario de un cuadrado de distancia en el sentido de la geometría euclidiana, por el término negativo que proviene de la cuarta dimensión.

Para Einstein, aquello que el espacio-tiempo de Minkowski posee en común con un espacio (físico) euclidiano es, además de la forma, ser *físico* y no solamente matemático. Él mismo lo ha construido (en su trabajo de 1905) a través de sus coordenadas, relacionando a éstas con los cuerpos físicos (cuerpos y espacio de referencia), por lo demás rígidos. Este aspecto coincide con el espacio-tiempo de Minkowski tal como él lo comprendía,

mientras que la concepción de Minkowski era, por el contrario, puramente geométrica.

Además de la expresión del invariante, el interés heurístico del formalismo, que Einstein señala a partir de 1912, se nota particularmente en la escritura tensorial de las ecuaciones de Maxwell, que corresponde a una simplificación por la disminución del número de hipótesis independientes: “Los campos eléctricos y magnéticos pierden sus existencias separadas a través de la relatividad de los movimientos”. El formalismo tensorial expresa inmediatamente la propiedad de la electrodinámica que le había preocupado cerca de 1905: “Un campo que aparece, visto desde un sistema, como puramente eléctrico, tiene también componentes magnéticas si se lo ve desde otro sistema de inercia”¹³. Pero este formalismo va a revelarse de una potencia más considerable todavía, puesto que será la herramienta indispensable para construir la teoría de la relatividad general.

4. La invención de la teoría de la relatividad general y el «arrastre del pensamiento físico por las formas matemáticas» (Einstein, 1912-1915)

14

No nos extenderemos en detalle sobre la manera en que Einstein ha desarrollado la Teoría de la relatividad general queriendo formular una teoría relativista de la gravitación. Solamente insistiremos en la relación inédita que él instauró entre el pensamiento físico y el pensamiento matemático. Como en sus investigaciones anteriores, lo que plantea primero es un problema físico, intentando formularlo como tal desde el año 1907, a partir de una reflexión sobre su teoría de 1905. Él estimaba que allí el carácter *físico* era aún insuficiente. Considerando la invariancia bajo movimientos relativos, él se preguntaba por qué el principio de la relatividad debería privilegiar los movimientos de inercia (rectilíneos y uniformes), cuando tales movimientos son particulares y son seleccionados de manera antropocéntrica (con relación a nuestra situación, respectivamente a otros movimientos más generales y variados). Él constató igualmente que la gravitación escapaba a la invariancia relativista en el sentido de los movimientos de inercia, haciendo intervenir movimientos acelerados. Aquí se presentaba un hecho natural de una gran generalidad, expresado por la ley galileana de la caída de los cuerpos (la igualdad de las aceleraciones del movimiento de caída, a una altura dada y en un campo de gravedad uniforme). Esto parecía de un gran alcance, puesto que expresaba un lazo fundamental entre un movimiento uniformemente acelerado (el de caída libre) y el campo gravitacional uniforme que es la causa del primero: el vínculo de una *equivalencia* entre ellos.

¹³ Einstein [1921a], cap. 1. Véase Paty [1993], capítulo 2.

Einstein calificó más tarde ésta aproximación como “la idea más acertada de [su] vida”¹⁴: ella se presentó para su espíritu bajo la forma de una “experiencia del pensamiento” que resumía en una frase: “Si alguien cae, él no siente más su propio peso”¹⁵. La equivalencia podía ser restablecida por la igualdad de la masa inercial y de la masa gravitacional. Einstein se dio así cuenta que no se trataba tanto de incorporar el campo gravitacional a la teoría de la relatividad sino de utilizarlo como un medio de sobrepasar la covarianza privilegiada del movimiento de inercia hacia la de los movimientos cualesquiera.

Contamos, en este momento, con un aspecto epistemológico importante de las dos teorías de la relatividad (restringida y general): el efecto de arrastre, debido al carácter particular del “objeto” de la primera (la covarianza, pero sin dinámica particular), que conducía a modificar ésta teoría generalizándola, es decir extendiendo el enunciado de su principio fundamental (de relatividad, no restringido a las transformaciones de inercia, pero válido para movimientos acelerados cualesquiera), que conduce a definir para la teoría un nuevo objeto de naturaleza diferente de aquel de donde había partido, puesto que este objeto no era otro, en este caso, que la dinámica misma del campo gravitacional. Einstein expresaba el efecto de arrastre de la manera siguiente: “La teoría de la relatividad restringida, que no era otra cosa que el desarrollo sistemático de la electrodinámica de Maxwell y Lorentz, *apuntaba sin embargo más allá de sus propios límites*”¹⁶. Esos límites fueron, por así decir, esclarecidos por la noción de covarianza o de invariancia de las leyes, que era equivalente a un principio de objetividad. Esta objetividad se nota particularmente en esto “si es necesario, para describir la naturaleza, utilizar un sistema de coordenadas que introducimos arbitrariamente, entonces la elección de su estado de movimiento no debería sufrir la más mínima modificación; las leyes debían ser absolutamente independientes de esta elección (principio de relatividad generalizado)”¹⁷. Vemos aquí cómo el movimiento que hace avanzar el pensamiento por medio del trabajo teórico, si necesariamente pasa por este pensamiento (singular), resulta de una necesidad inmanente atada a aquello que designa el principio de objetividad.

Luego de esta problemática conceptual y teórica viene la extensa elaboración escalonada de 1907 a 1915: “Pero el camino ha sido más difícil de lo que habría podido pensarlo, puesto que exigía el abandono de la geometría euclidiana”¹⁸. Este abandono fue motivado por razones físicas: se recordará, de otra parte, que la distinción hecha con la relatividad restringida entre la

¹⁴ Einstein [1955].

¹⁵ Einstein [1922, 1955].

¹⁶ Einstein [1955]. (La cursiva es mía).

¹⁷ *Ibidem*.

¹⁸ Einstein [1919].

cinemática y la dinámica fue necesaria para su propia superación. Este avance corresponde al hecho que en la teoría de la relatividad general la dinámica gravitacional determina las propiedades del espacio-tiempo. Se expresa por la necesidad de abandonar la métrica (pseudo)-euclidiana del espacio-tiempo, identificando el potencial de gravitación con la métrica en cada punto. Ahora bien, se necesitó, para llegar allí, de un pensamiento propio de la cinemática; es decir, del *significado físico* de las coordenadas de espacio-tiempo, preliminar al tratamiento de la dinámica. La paradoja aparente es que, haciendo esto, la independencia de la cinemática con relación a la dinámica quedaba abolida.

16 Einstein se dio cuenta en 1912 que la teoría de superficies de Gauss podía ser útil y proporcionar la solución de la dificultad. Él se concentró entonces en la significación de las coordenadas de Gauss y, según sus propios términos, “hizo que los fundamentos de la geometría tuvieran una significación profunda”¹⁹. Él profesó enseguida la teoría de Ricci y la geometría de Riemann. Se puso en la tarea de desarrollar matemáticamente la noción de covariancia general, y de utilizar el tensor métrico para representar el campo gravitacional. En su toma de conciencia, en 1912, cuando él necesitaría abandonar la geometría euclidiana de los cuerpos rígidos, jugó un rol importante su concepción anterior de la significación física de las coordenadas (que había conducido al establecimiento de la cinemática de la relatividad restringida), puesto que ella lo orienta hacia la elección de un espacio de referencia diferente, cuya estructura se deja libre de determinaciones para adaptarse sobre medida a aquella que darían los campos gravitacionales²⁰.

Desde entonces, fue la utilización de la geometría de superficies, y después la de Riemann y el cálculo tensorial, las que iban a constituir el medio para sobrepasar las limitaciones que Einstein había encontrado en la construcción de la teoría general, cuando se apoyaba aún en los argumentos anteriores. Es destacable que una consideración de naturaleza formal haya podido suministrar el elemento fundamental que faltaba en la construcción. Pero se nota inmediatamente que lo “formal” está totalmente organizado en función de la expresión completa de la exigencia de covariancia, la cual está motivada por razones físicas –y fue, de verdad, la consideración de inicio de la teoría. El punto de vista formal que Einstein encontraba –y que debía ser en adelante tan importante en su física como en su epistemología- resultaba ser, de alguna

¹⁹ Einstein [1922].

²⁰ El problema de la deformación de una barra rígida arrastrada en un movimiento de rotación tuvo una gran importancia en su reflexión: el le dio una solución cinemática (deformación del espacio de referencia, constituido por la geometría física o práctica), y no dinámica por la acción de las fuerzas, privilegiada por los otros físicos.

manera, completamente adecuado para el programa de física que había establecido en 1907, y ofrecía la llave que abriría las últimas puertas. En el otoño de 1915, luego de percibir varios errores en sus trabajos anteriores, obtenía la ecuación de la relatividad general²¹ e indicaba las consecuencias sobre los tres fenómenos físicos que serían las primeras pruebas observacionales o experimentales de la teoría (perihelio de Mercurio, disminución de la velocidad de los relojes, corrimiento al rojo). Un poco más tarde indicaría cómo las ecuaciones de la relatividad general pueden ser obtenidas directamente a partir de un principio variacional, daría la prueba de la conservación de la energía-impulso y concluiría en la existencia, según la teoría, de ondas gravitacionales²².

En un artículo de síntesis más desarrollado sobre su teoría, de 1916, Einstein muestra muy bien cuál fue su línea de trabajo a partir del momento en que el aspecto formal y matemático se impuso a su razonamiento. Él recuerda allí, en primer lugar, cómo “el postulado de relatividad general exige que las ecuaciones de la física sean covariantes en relación con los cambios arbitrarios de coordenadas x_1, x_2, x_3 y x_4 ”²³, y cómo el problema planteado era el de obtener las ecuaciones conservando la propiedad de covariancia general²⁴. Esta era, afirma Einstein, una “tarea puramente matemática”, lo que nos remite al rol del formalismo matemático en esta construcción de la física teórica.

Einstein descubrió, con la relatividad general, que el formalismo tenía un rol realmente heurístico: se convierte en la herramienta indispensable no sólo para la expresión de magnitudes físicas -lo que fue siempre, a través de su matematización-, sino para el *descubrimiento* mismo de las leyes que pasan por su formalización.

El formalismo habría sido el instrumento que planteó el problema y su solución, pero él no substituiría el trabajo propiamente físico de conceptualización. De hecho Einstein no se preocupó por las ideas de Riemann sino hasta cuando

²¹ El 25 de noviembre (Einstein [1915]). La ecuación se escribe: $R^{\mu\nu} = -\kappa(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T)$, ó $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\kappa T^{\mu\nu}$. En la ecuación bajo su segunda forma, el primer miembro representa las magnitudes del campo (los 10 componentes g_{ik}); $R^{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, y R la curvatura escalar. El segundo miembro contiene el tensor energía-impulso ($T^{\mu\nu}$), que juega el papel de fuente del campo.

²² Einstein [1916]; él vuelve sobre este asunto un poco más tarde en Einstein [1918]. Poincaré es sin duda el primero en haber postulado tales ondas, él las llamaba “*ondes gravifiques*” (Poincaré [1905]). La expresión “*ondes gravifiques*”, en francés, fue formada por Poincaré antes de emplearse la ahora más corriente “ondas gravitacionales” introducida con la teoría de la relatividad general de Einstein.

²³ Einstein [1916], parte A, introducción.

²⁴ Ecuaciones llamadas «generalmente covariantes».

tuvo la necesidad a lo largo de su propia reflexión, que fue ante todo una reflexión sobre la física. Esto justifica la siguiente afirmación de 1920: “La forma matemática” de la teoría (y se trata sobre todo de la relatividad general) “es solamente un instrumento, y lo esencial es seguir de manera consistente el hilo de algunos principios simples a los que la experiencia física nos ha conducido...”²⁵.

Tal debía ser en adelante su actitud constante en lo sigue de sus investigaciones sobre la relatividad y el campo continuo unificado.

Einstein indica, recordando la vía por la cual la teoría de la relatividad general fue establecida: “ecuaciones de una complejidad de la clase semejante a las del campo gravitacional no pueden ser obtenidas sino a través del *descubrimiento de una condición matemática lógicamente simple que determina completamente o casi completamente las ecuaciones*. Desde que se dispone de tales condiciones formales suficientemente fuertes, no se tiene necesidad sino del conocimiento de un pequeño número de hechos para establecer la teoría”²⁶. En el caso de la gravitación, lo que determina casi completamente las ecuaciones es “la cuatri-dimensionalidad del espacio y su expresión por un tensor simétrico, junto a la invariancia con relación al grupo de transformaciones continuas”²⁷. El punto de vista de la simplicidad ha permitido, en este caso, conseguir una construcción formal ordenada del problema físico que, en cierto modo, filtra el vínculo con el tejido de la experiencia proponiendo una lectura directa del orden subyacente a los fenómenos. El punto de vista de la simplicidad toma para esto una forma conceptual, que es, en el caso evocado, la de una geometrización de la gravitación. Esta actitud de pensamiento sería también la que el tomaría en sus investigaciones sobre la teoría unificada del campo, pero también la que él habría querido tomar en lo que concierne a la teoría cuántica²⁸.

18

5. El trabajo conjunto entre Einstein y Elie Cartan

El hecho que el ensamblaje del físico, en su propio quehacer, reúna el del matemático y se deje llevar por el movimiento del pensamiento matemático mismo, único capaz de hacer saltar el obstáculo conceptual para atender otro contenido posible de conceptos físicos, no implica una identificación entre el trabajo del físico teórico y el del matemático. La aproximación sobre un objeto de interés común no excluye la diferencia, puesto que los propósitos del uno y del otro no son los mismos. El trabajo conjunto de Albert Einstein

²⁵ Einstein [1920].

²⁶ Einstein [1946].

²⁷ Einstein [1946]. (La cursiva es mía).

²⁸ Para la física cuántica, véase Paty [por publicarse].

y del matemático Elie Cartan entre 1928 y 1931 sobre el “paralelismo distante” (o “absoluto”), a propósito de la investigación de una teoría unificada del campo, es muy apropiado para ejemplificar la naturaleza del trabajo matemático en física teórica y la diferencia entre los propósitos y el “estilo de investigación” del matemático y del físico”²⁹.

Elie Cartan estaba interesado por la teoría de la relatividad general desde 1921 y se proponía dar una interpretación geométrica simple de la ecuación de Einstein de la Relatividad general y del “tensor de Einstein”. Utilizando sus propios trabajos sobre la estructura de grupos continuos (grupos de Lie) y sobre los sistemas de ecuaciones diferenciales totales³⁰, Cartan estuvo llevado a desarrollar la teoría de los espacios generalizados introduciendo la “torsión”, al lado de la curvatura, y creando el concepto de “espacio con conexión euclidiana”, del cual se deriva la noción de “paralelismo absoluto”³¹. El ejemplo más simple de un espacio de Riemann con “paralelismo absoluto” está dado (por Cartan mismo) por una esfera donde se considera “como paralelos dos vectores que formen el mismo ángulo con los meridianos que pasan por sus dos orígenes”³². Sólo hasta más tarde, él se reúne con Einstein para tratar este problema: cuando éste último encuentra allí una posible vía hacia la teoría del campo unificado (gravitacional y electromagnético).

En los trabajos de 1928 y 1929, Einstein utilizaba la noción de *Fernparallelismus* (paralelismo absoluto o distante) sin saber que tuvo su origen en Elie Cartan. Este último le escribía³³, por sugerencia de Paul Langevin, luego de haber leído estos artículos, recordando sus trabajos anteriores por los cuales él había propuesto y desarrollado la noción de espacio con conexión euclidiana, precisando que si hay paralelismo a la Levi-Civita, la torsión es nula, y que si hay paralelismo absoluto, la curvatura es nula (los espacios son sin curvatura y con torsión). Cartan indicaba que él había publicado un estudio sistemático de los tensores según la curvatura y la

²⁹ Para más detalles, véase Einstein & Cartan [1979], y el análisis hecho en Paty [1993], capítulo 5.

³⁰ O ‘sistemas de Pfaff’. Sobre estos trabajos matemáticos que extienden los de Sophus Lie, véase Cartan [1952-1955].

³¹ Elie Cartan ofrece seis comunicaciones sobre este tema en la Academia de Ciencias en 1922. Él intentó en vano convencer a Einstein, durante su estada en París, de asistir a la invitación de Paul Langevin. Él introduce allí la noción de «espacio conforme generalizado». En un «espacio conforme», no hay distancia, pero la noción de ángulo subsiste. En su memoria de 1923-1925, donde estas ideas son retomadas (Cartan [1923-1925]), Cartan presenta el paralelismo absoluto como una propiedad de los espacios a conexión afín sin curvatura. Se llama conexión al hecho que una dirección sea dada en cada punto de un espacio fibrado.

³² Elie Cartan, carta a Einstein del 8 de mayo de 1929, en Einstein, Cartan [1979] (carta 1, p. 4-8). El ejemplo es retomado por Cartan [1923-1925], en la parte de 1924.

³³ Elie Cartan, carta a Einstein del 8 de mayo de 1929. *Ibid.*

torsión, y que encontró que “uno de los que suministra la torsión tiene precisamente todos los caracteres matemáticos del potencial electromagnético”³⁴. Desde entonces comenzó un intercambio continuo de correspondencia, de hecho una verdadera colaboración por correspondencia, entre Cartan y Einstein sobre estas cuestiones. Einstein invitó particularmente a Cartan a escribir un artículo que describa históricamente la elaboración de la noción de paralelismo absoluto³⁵.

La correspondencia entre Einstein y Cartan es admirable en varios aspectos: por su contenido científico, por su lado profundamente humano, por el respeto mutuo que se profesan los dos hombres, por lo que ella revela sobre sus estilos respectivos de trabajo, por la manera en la que se ve al matemático (Elie Cartan) y al físico teórico (Einstein) intentando comprenderse sin conseguirlo a veces fácilmente puesto que sus preocupaciones y lenguajes son diferentes. Ella es altamente instructiva sobre las relaciones efectivas (en la práctica misma del trabajo intelectual) entre las matemáticas y la física en la elaboración teórica.

20 Einstein no estuvo interesado en el paralelismo absoluto sino hasta cuando en 1928 lo necesitó para sus trabajos sobre el campo unitario. Él constató que si se le agrega a la métrica riemanniana el paralelismo absoluto (o distante), se obtiene un lote de ecuaciones de campo casi totalmente determinadas por consideraciones formales; se requiere sin embargo restringir las posibilidades para no conservar sino aquellas que son físicamente aceptables³⁶. Estas restricciones constituyen lo esencial del objeto de la correspondencia entre el físico y el matemático. Expresadas como propiedades geométricas, ellas serían concebidas por Einstein como la transcripción de leyes físicas; pero no se puede llegar ahí sino quedándose en el interior del formalismo matemático. Einstein encontró que la caracterización legítima de una métrica de Riemann con paralelismo absoluto era “*la más simple que puede producirse en física*”³⁷. Einstein escogió un sistema de ecuaciones bien preciso viendo la aplicación en física, al cual debía en lo sucesivo de aferrarse en lo relacionado con los espacios de paralelismo absoluto.

En la teoría de Cartan, si se mira el universo como un espacio de cuatro dimensiones dotado no solamente de curvatura sino también de torsión, el tensor energía se generaliza pasando de diez a cuarenta componentes: un vector de dieciséis componentes, que expresa la curvatura del universo, y

³⁴ Véase la memoria de Cartan [1923-1925]; Cartan [1952-1955], vol. 1-2, p. 850, 852.

³⁵ Cartan [1930].

³⁶ Einstein, carta a Elie Cartan del 10 de mayo de 1929. Estas ecuaciones son dadas en Einstein [1930].

³⁷ Einstein, carta a Elie Cartan del 25 de agosto de 1929 (la cursiva es mía).

pares que expresan la torsión (los otros 24 componentes), atados a cada elemento de volumen del universo. (Recordemos que el universo de Einstein de la relatividad general puede ser considerado como un universo euclidiano deformado, pero sin torsión). Desde entonces fue posible expresar las leyes de conservación, ligadas a los desplazamientos, en los espacios diferentemente deformados.

Elie Cartan admiraba que Einstein hubiera llegado a formular su sistema de veintidós ecuaciones –que comportan las del campo gravitacional y las del campo electromagnético-³⁸, cuando aún, por su parte, se esforzaba por demostrar la solución matemática en toda su generalidad y por determinar si no existía otro sistema de ecuaciones que el encontrado por Einstein, en su aproximación más “intuitiva”: “y yo estoy muy asombrado”, escribe a su corresponsal, “que usted haya llegado a encontrar 22 ecuaciones!”³⁹. Einstein reconocía haberlas supuesto, pero no haberlas demostrado. Cada uno de ellos intentaba clarificar para el otro su manera de ver el problema. Einstein insistía sobre lo que sugiere el punto de vista físico en cuanto a las propiedades de las soluciones (por ejemplo, se debe exigir una solución que no sea singular). Cartan insistía sobre una u otra dificultad matemática. Einstein buscaba (en la vena de la teoría de la relatividad general) un “principio heurístico”, considerando que la teoría sería tanto mejor si ella restringe las posibilidades, al menos que ella no entre en conflicto con la realidad⁴⁰. Cartan había propuesto en este sentido la noción de “grado de determinación” (o de “generalidad”) de estos sistemas, que debería expresarse por el número de identidades independientes (y sobre la cual no nos podemos detener aquí). Einstein tenía dificultades para comprender esta noción, solicitaba explicaciones, haciéndose discípulo del matemático, volvía sobre su problema, paciente y obstinado, escribía a su sabio corresponsal: “Yo tengo mucha suerte de tenerlo como colaborador. Usted tiene exactamente lo que me hace falta: una tan gran facilidad en matemáticas...”⁴¹.

La diferencia de sus respectivas exigencias se puede resumir brevemente así: Cartan quería la generalidad, Einstein quería las restricciones. Si éste exploraba las propiedades matemáticas de un sistema teórico, era siempre esperando que fuera posible encontrar un sentido físico correspondiente a sus características formales.

³⁸ Estas son las ecuaciones lineales con relación a las primeras derivadas de las componentes del tensor de torsión y las cuadráticas con relación a las componentes del tensor mismo.

³⁹ Elie Cartan, Carta a Albert Einstein, 3 de diciembre de 1929, en Einstein & Cartan [1979].

⁴⁰ Einstein a Cartan, 8 de diciembre de 1929: «Ella es como el retrato hablado de un criminal buscado: entre más precisa sea, ella es mejor».

⁴¹ *Ibid.*

Einstein abandonó finalmente esta dirección de búsqueda cuando se dio cuenta de que no podía llegar así a escribir las ecuaciones del movimiento para los campos: “Parece”, escribe a Cartan, “que esta estructura no tiene nada que hacer con el verdadero carácter del espacio”⁴².

6. Reflexión crítica

Para ser un tanto menos incompletos nos hace falta evocar, después del pensamiento científico del físico tal como se nota en su práctica investigativa, el aspecto reflexivo de este pensamiento, es decir aquello que él piensa acerca del rol de las matemáticas en la física. Pero este estudio sobrepasa los límites que nosotros nos hemos propuesto aquí, y debemos renunciar a él, remitiendo al lector a otros textos que lo abordan, particularmente en lo concerniente a las ideas de unidad y de simplicidad⁴³. Para terminar, nosotros nos contentaremos con evocar rápidamente la cuestión de la relación entre “la geometría y la experiencia”, y el debate de Einstein con los positivistas y empiristas lógicos a este respecto.

22 La cuestión de la relación de la geometría con la experiencia ha sido muy discutida entre los matemáticos, los físicos y los filósofos en los siglos XIX y XX, primero con ocasión de la aparición de las geometrías no euclidianas y de la no-unicidad de la geometría, luego con la formulación de la teoría de la relatividad general. Ella está ligada a la “naturaleza de las hipótesis que fundamentan la geometría”, según la expresión de Bernhard Riemann, y a la constitución física del espacio en las regiones no accesibles directamente, es decir, a la determinación de la métrica; pero también a la crítica de la concepción kantiana del conocimiento y de lo “sintético *a priori*”, sea en la dirección empirista (de Hermann von Helmholtz), o en la convencionalista de Henri Poincaré⁴⁴.

En un sentido la teoría de la relatividad general de Einstein aportaba la respuesta al llamado de Riemann, presentándose como la instancia teórica y conceptual que permitía suministrar una respuesta (experimental y racional) a partir de su confrontación con los datos de la experiencia. La determinación de la naturaleza de la geometría no era más una confrontación directa entre una geometría abstracta (que podía considerarse como pura, o axiomática, después de Hilbert⁴⁵) y los datos de la experiencia física sobre el espacio y los cuerpos. La teoría física en cuestión incorporaba una “geometría física”,

⁴² Einstein, carta a Elie Cartan del 21 de mayo de 1932. En este momento, Einstein trabajaba con W. Mayer sobre otra pista.

⁴³ Paty [1993].

⁴⁴ Riemann [1854], Helmholtz [1868] y Poincaré [1902].

⁴⁵ Hilbert [1899].

su ingrediente inicial (con las coordenadas espacio-temporales), pero tomada en la red transformada de las relaciones de la teoría física que cambiaba la significación de las coordenadas (escapando a la imposición del espacio rígido euclidiano), y les otorgaba un contenido físico transformado (por la métrica expresada en cada punto en función de los campos de materia en estos puntos). El debate que había enfrentado a von Helmholtz y a Poincaré (empirismo contra convencionalismo) se sustituía por el de Hans Reichenbach y Albert Einstein (empirista lógico contra realista crítico).

La posición de Einstein, desarrollada en varios artículos, en armonía con su trabajo sobre la teoría de la relatividad (restringida y general), expresa toda la importancia conceptual de la teoría física del espacio (-tiempo) en la manera de considerar este problema: éste no puede a partir de ahora ser concebido sobre el modo de una relación inmediata entre la geometría (o, más generalmente, las matemáticas) y los datos de la experiencia. La teoría física es un intermediario *sui generis*, indispensable en la consideración del problema: la experiencia se confronta con el conjunto de la estructura teórica de los conceptos físicos, que debe ser considerada como un todo, y que hace intervenir la idea de completitud teórica (al menos relativa). Esta cuestión, sobre la cual nosotros debemos renunciar a extendernos aquí por falta de espacio⁴⁶, hace, con pleno derecho, parte de la cuestión del rol de las matemáticas en la física: ella pertenece a la parte reflexiva, epistemológica, de esta relación, y Einstein le consagró a lo largo de los años, páginas notables, nutridas de las lecciones de su propio trabajo⁴⁷.

23

Referencias Bibliográficas

- Cartan, Elie [1923-1925]. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* 40, 1923, 325-412; 41, 1924, 1-25; 42, 1925, 17-88. Egalement, in Cartan [1952-1955], vol. 3, 1, p. 659-746; 799-823; vol. 3, 2, p.921-992.
- Cartan, Elie [1930]. Notice historique sur la notion de parallélisme absolu, *Mathematische Annalen* 102, 1930, 698-706. Egalement, in Cartan [1952-1955], vol. 3, 2, p. 1121-1129.
- Cartan, Elie [1952-1955]. *Oeuvres complètes*, 3 tomes en 5 volumes, Gauthier-Villars, Paris, 1952-1955.
- Cartan, Elie [1974]. *Notices sur les travaux scientifiques*, suivi de *Le parallélisme absolu et La théorie unitaire du champ*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

⁴⁶ Paty [1993], capítulos 6, 7 y 9.

⁴⁷ Ver particularmente Einstein [1921a, 1926, 1949].

- Helmholtz, Hermann L.F. von [1868]. Ueber die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen, *Nachrichten von der königlichen Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, n° 9, 1868. Repris in Helmholtz [1882-1895], vol.2, p. 618-639. Trad. angl., On the facts underlying geometry, in Helmholtz [1978], p. 39-71.
- Helmholtz, Hermann L.F. von [1978]. *Epistemological writings*. The Paul Hertz/Moritz Schlick centenary edition of 1921 with notes and commentary by the editors; newly transl. by Malcolm F. Lowe. Ed. with an Introduction and bibliography by R.S. Cohen and Y. Elkana, Reidel, Dordrecht and Boston, 1978.
- Einstein, Albert [1905]. Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik*, ser. 4, XVII, 1905, 891-921.
- Einstein, Albert [1907]. Ueber das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen, *Jahrbuch der Radioaktivität*, IV, 1907, 411-462 ; V, 1908, 98-99 (Berichtigungen, errata). Engl. Tr. in CW. Trad. fr in OC.
- Einstein, Albert [1910]. Le principe de relativité et ses conséquences dans la physique moderne, *Archives des sciences physiques et naturelles* (Genève), 4 è série, xxx, 1910, 5-28 (publication originale en français dans une traduction de E. Guillaume).
- Einstein, Albert [1912]. [Manuscrit sur l'introduction à la relativité, en allemand, non publié en raison de la guerre, préparé en 1912 pour le *Manuel de radiologie* de Erich Marx, Leipzig. 72 p. Archives Einstein. Publié comme :] Einstein's Manuscript on the Special Theory of Relativity, in Martin Klein et al, eds., *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 4, *The Swiss Years: Writings 1912-1914* (Princeton, NJ, Princeton University Press 1995), pp. 9-108.
- Einstein, Albert [1915h]. Die Feldgleichungen der Gravitation, *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, 1915, part 2, 844-847.
- Einstein, Albert [1916b]. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik*, ser. 4, XLIX, 1916, 769-822. [Edité également en opuscule, avec un «Einleitung», Barth, Leipzig, 1916]. English transl., The foundation of the generalized theory of relativity in CW. Trad. fr. : Les fondements de la théorie de la relativité générale, in OC.
- Einstein, Albert [1916l]. Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation, *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, 1916, part 1, 688-696. English transl., in CW.
- Einstein, Albert [1918i]. Ueber Gravitationswellen, *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, 1918, part 1, 154-167.
- Einstein, Albert [1919d]. My theory, *The Times* (London), November 28, 1919, 13; repris sous le titre What is the theory of relativity? in Einstein [1954d], p. 222-227. Original allemand: Was ist Relativitätstheorie?, in Einstein [1934a], p. 127-131. Trad. fr.: Qu'est-ce que la théorie de la relativité?, in OC, Einstein 1989-, vol. 5, p. 96-99.
- Einstein, Albert [1920g]. Grundgedanken und Methoden der Relativitätstheorie in ihrer Entwicklung dargestellt, manuscrit inédit (Bibliothèque Pierpont Morgan, New York, cf. Archives Einstein) [Les idées fondamentales et les méthodes de la théorie de la relativité exposées selon leur développement]. [Trad. angl.

- inédite par John Stachel, Fundamental ideas and methods of the theory of relativity presented in their evolution, aimablement communiquée par son auteur].
- Einstein, Albert [1921a]. *Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie*, Vieweg, Braunschweig, 1922. Trad. angl., par Edwin Plimpton Adams, *The Meaning of relativity: four lectures delivered at Princeton University*, Princeton University Press, Princeton (N.J.), 1922.
- Einstein, Albert [1921b]. Geometrie und Erfahrung [conférence devant l'Académie des sciences de Prusse, Berlin, 27 janvier 1921, complétée ensuite], *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, 1921, part 1, 123-130; également in Einstein 1953 k, éd. 1960, p. 119-127. Trad. fr., La géométrie et l'expérience, in Einstein 1972 b, p. 75-91; autre tr. fr. in Einstein 1989-, vol. 5, p. 70-81. Engl. transl., "Geometry and experience", in Einstein 1922 k, p. 25-56, et in Einstein 1954 d (ed. 1981), p. 227-240.
- Einstein, Albert [1922]. How I created the theory of relativity [conférence prononcée en allemand à l'université de Kyoto, le 14 décembre 1922. Texte anglais d'après une transcription en japonais in Jun Ishiwara, Einstein kyozyu kôen-roko (The record of professor Einstein's lectures, Tokyo, 1923 ; reprinted, Tokyo 1971)], traduit par Yoshimasa Ono, *Physics To day*, august 1982; reprod. in Weart, Spencer and Philipps, Melba (eds.), *History of physics, Readings from Physics To day*, number 2, American Institute of Physics, New York, 1985, p. 243-245.
- Einstein, Albert, Lorentz, Hendryk Antoon, Minkowski, Hermann, Weyl, Hermann, Lorentz, Hendryk Antoon, Minkowski, Hermann, Weyl, Hermann [1922m]. *Das relativitätsprinzip*, 4^{ème} éd., Teubner, Leipzig, 1922. Engl. transl., *The principle of relativity*, with notes by Arnold Sommerfeld, transl. by W. Perrett and G.B. Jeffery, Methuen, London, 1923.
- Einstein, Albert [1926]. Geometria no euclidea y fisica, *Revista mathematica hispano-america* (Buenos-Aires), ser. 2, 1926, 72-76. [Communication à l'Académie des sciences de Buenos Aires, le 16 avril 1925, en allemand. Trad. en espagnol.]
- Einstein, Albert [1930]. Auf die Riemann-Metrik und den Fern-Parallelismus gegründete einheitliche Feldtheorie, *Mathematische Annalen* 102, 1930, 685-697.
- Einstein, Albert [1946c]. Autobiographisches. Autobiographical notes, in Schilpp, P.A. (ed), *Albert Einstein, philosopher and scientist*, The Library of Living Philosophers, Open Court, La Salle (Ill.), 1949, p. 1-95. [Texte rédigé en 1946. Trad. fr., Eléments autobiographiques, in OC, Einstein 1989-, vol. 5, p. 19-54.
- Einstein, Albert [1949]. Reply to criticism. Remarks concerning the essays brought together in this cooperative volume, in Schilpp 1949, p. 663-693.
- Einstein, Albert [1955c]. Erinnerungen, *Schweizerische Hochschulzeitung* (Zurich) 28, 1955, numéro spécial, 145. Tr. fr., Esquisse autobiographique, in OC, Einstein 1989-, vol. 5, p. 13-19.
- Einstein, Albert & Cartan, Elie [1979]. *Letters on absolute parallelism, 1929-1932*, edited by Robert Debever. Original texts, and english translations by Jules

- Leroy and Jim Ritter, Princeton University Press et Académie royale de Belgique, Princeton, 1979.
- Helmholtz, Hermann L.F. von [1868]. Ueber die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen, *Nachrichten von der königlichen Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, n° 9, 1868. Repris in Helmholtz [1882-1895], vol.2, p. 618-639. Trad. angl., On the facts underlying geometry, in Helmholtz [1978], p. 39-71.
- Helmholtz, Hermann L.F. von [1882-1895]. *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 3 vols., Leipzig, 1882-1895.
- Helmholtz, Hermann L.F. von [1978]. *Epistemological writings*. The Paul Hertz/Moritz Schlick centenary edition of 1921 with notes and commentary by the editors; newly transl. by Malcolm F. Lowe. Ed. with an Introduction and bibliography by R.S. Cohen and Y. Elkana, Reidel, Dordrecht and Boston, 1978.
- Hilbert, David [1899]. *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Stuttgart, 1899. [10 éd. augm. ultérieures.] Trad. angl. par Leo Unger, *Foundations of geometry*, 2 ème éd. angl. rev. et augm. par Paul Bernays, Open Court, La Salle (Ill.), 1971; 1980, 1988 (2ème éd.). Trad. fr. (éd. critique) par Paul Rossier, *Les fondements de la géométrie*, Dunod, Paris, 1972.
- Minkowski, Hermann [1907]. Das Relativitätsprinzip (exposé présenté à Göttingen le 5.11.1907, publication posthume, par les soins de Arnold Sommerfeld), *Annalen der Physik*, 47, 1915, 927-938.
- Minkowski, Hermann [1908]. Raum und Zeit (exposé présenté à la 80 ème assemblée des scientifiques et médecins allemands, Cologne le 21.9.1908), *Physikalische Zeitschrift* 10, 1909, 104-111. Trad. angl. : Space and time, in Einstein *et al.* [1923], p. 73-91.
- Paty, Michel [1993]. *Einstein philosophe, La physique comme pratique philosophique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1993.
- Paty, Michel [1994b]. Le caractère historique de l'adéquation des mathématiques à la physique, in Garma, Santiago; Flament, Dominique; Navarro, Victor (eds.), *Contra los titanes de la rutina.- Contre les titans de la routine [Encuentro en Madrid de investigadores hispano-franceses sobre la historia y la filosofia de la matematica Rencontre à Madrid de chercheurs hispano-français sur l'histoire et la philosophie de la mathématique, 18-22.11.1991]*, Comunidad de Madrid/C.S.I.C., Madrid, 1994, p. 401-428.
- Paty, Michel [1994c]. Sur l'histoire du problème du temps: le temps physique et les phénomènes, in Klein, Etienne et Spiro, Michel (éds.), *Le temps et sa flèche*, Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1994, p. 21-58; 2è éd., 1995 ; ré-éd., Collection Champs, Flammarion, Paris, 1996, p. 21-58.
- Paty, Michel [1996]. Poincaré et le principe de relativité, in Greffe, Jean-Louis; Heinzmann, Gerhard et Lorenz, Kuno (éds.), *Henri Poincaré. Science et philosophie. Science and philosophy. Wissenschaft und Philosophie. Congrès international, Nancy, France, 14-18 mai 1994*, Akademie Verlag, Berlin/Albert Blanchard, Paris, 1996, p. 101-143.
- Paty, Michel [1998]. Les trois dimensions de l'espace et les quatre dimensions de l'espace-temps in Flament, Dominique (éd.), *Dimension, dimensions I*, Série

- Documents de travail, Fondation Maison des Sciences de l'Homme, Paris, 1998, p. 87-112.
- Paty, Michel [1999]. La place des principes dans la physique mathématique au sens de Poincaré, in Sebestik, Jan et Soulez, Antonia (éds.), *Actes du Colloque France-Autriche Paris, mai 1995, Interférences et transformations dans la philosophie française et autrichienne (Mach, Poincaré, Duhem, Boltzmann), Fundamenta philosophiæ* (Nancy/éd. Kimé, Paris) 3 (2), 1998-1999, 61-74.
- Paty, Michel [2005j]. Einstein 1905 : intelligibilité rationnelle et création scientifique, *Cahiers rationalistes*, 2005. (sous presse). (Trad. en espagnol :) [2006h]. Einstein 1905: Intelligibilidad racional y creación científica, Traducción en castellano por Juliana Gristelli, Conferencia inaugural, *Evento conmemorativo de los 100 años de la Teoría de la Relatividad*, 26-30 Septiembre de 2005, Universidad del Valle, Cali (Colombia).
- Paty, Michel [2006a]. Champ continu et quanta : Les deux approches théoriques de la matière selon Einstein, Conférence, *Colloque La science einsteinienne : ses origines, son contenu et sa portée*, 12, 13 et 14 décembre 2005, Faculté des Sciences Humaines, Université de Tunis, 13-15 décembre 2005. (Trad. en portugais :) [2005e]. Campo continuo e quanta : as duas abordagens teóricas da matéria segundo Einstein. A relação da teoria com seu objeto. Trad. em português do original em francês por Zília Mara Scarpari, *Ciência & Ambiente* (UFSM, Santa Maria, RS, Br), n°30, 2005, «Einstein», 35-35.
- Paty, Michel [2006b]. Einstein's scientific style in the exploration of the quantum domain (a view on the relationship between theory and its object), *Symposium «Einstein in Context» (Section « Einstein and the quantum revolution »)*, *International Congress of History of Science*, Beijing, July 2005, à paraître.
- Paty, Michel [à paraître]. *Einstein, les quanta et le réel. Critique et construction théorique*.
- Poincaré, Henri [1902]. *La science et l'hypothèse* (1902), Flammarion, Paris, 1902 ; 1968.
- Poincaré, Henri [1905] Sur la dynamique de l'électron (adunanza del 23 luglio 1905 [reçu le 23 juillet 1905]), *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* XXI, 1906, p. 129-176. Egalement in Poincaré [1950-1965], vol. 9, p. 494-550.
- Riemann, Bernhard [1854]. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen [Mémoire présenté le 10 juin 1854 à la Faculté philosophique de Göttingen], *Abhandlungender königlichen Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, vol. 13, 1867; également in Riemann [1902], p. 272-287. Trad. fr. par J. Houel, Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie, in tr. fr. de Riemann [1876], p. 280-297 [ré-éd 1968] et in Riemann [1898], p. 280-299.
- Riemann, Bernhard [1876]. *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, édité par Dedekind, Richard et Weber, Heinrich, Leipzig, 1876; 2 ème éd., 1892. Tr. fr.: *Oeuvres mathématiques*, trad. fr. par L. Laugel [de Riemann 1876], avec une préface de M. Hermitte et un essai de M. Félix Klein, Paris, 1898. Nouveau tirage, Paris, 1968.