Vol. XV, N$^{\underline{\text{o}}}$ 2, Diciembre (2007)
Matemáticas: 51–64

Matemáticas: Enseñanza Universitaria

Estabilidad de ecuaciones diferenciales estocásticas lineales anticipativas

Jorge A. León — Cinvestav-IPN
Norma B. Lozada-Castillo — Cinvestav-IPN
Alexander S. Poznyak — Cinvestav-IPN

Recibido Ene. 24, 2007 Aceptado Sept. 5, 2007

Abstract
In this paper we study sufficient contitions for the mean square stability and instability of linear stochastic differential equations in the Skorohod sense (i.e., the involved stochastic integral is defined using the chaos decomposition approach). Here the drift is in the chaos of orden 1 and the diffusion is a square integrable deterministic function. In order to obtain our results, it is estimated the L^2-norms of the kernels in the chaos decomposition of the solution.

Keywords: Itô-Wiener chaos decomposition, mean square stability, Skorohod integral

MSC(2000): 93E15 , 60H10

Resumen
En el presente trabajo se dan condiciones suficientes para la estabilidad e inestabilidad en media cuadrática de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas lineales en el sentido de Skorohod (i.e., la integral estocástica involucrada es definida a través de la descomposición en caos de Itô-Wiener). Aquí el coeficiente de deriva considerado tiene una descomposición en caos de orden 1, y el de difusión es determinista y cuadrado integrable. El análisis realizado se basa, principalmente, en estimar las normas en L^2 de los núcleos en la descomposición en caos de la solución fuerte de dichas ecuaciones.

Palabras y frases claves: Descomposición en caos de Itô-Wiener, estabilidad en media cuadrática, integral de Skorohod

1 Introducción

La palabra *estabilidad* se origina en el campo de la mecánica, donde al emplear este concepto se caracterizaba el equilibrio de un cuerpo rígido (Magnus [12]). El equilibrio era llamado *estable* si el cuerpo regresaba a su posición original, habiendo sido perturbado por un ligero movimiento respecto a su posición en reposo. Si el cuerpo después de este desplazamiento tendía hacia una nueva posición, entonces, su equilibrio era llamado *inestable*.

La definición básica de estabilidad de una solución de una ecuación diferencial ordinaria se debe al matemático ruso A. M. Lyapunov (1857-1918), quien en el año 1892 la planteó como parte de su tesis doctoral "*Problème Générale de la Stabilité du Mouvement*" [11]. La teoría de estabilidad de Lyapunov fue completada por diversos autores. El lector interesado puede consultar Afanasi'ev [1], Hahn [5], Sinha [16], entre otros. En estos trabajos se puede encontrar un extenso estudio para sistemas deterministas (ecuaciones diferenciales ordinarias).

Con la evolución de los modelos matemáticos surgieron los modelos estocásticos, para los cuales la estabilidad es una propiedad básica que también fue estudiada con grandes aportaciones (ver Kozin [8]). Es importante mencionar que para los sistemas estocásticas no se tiene una definición “global” del concepto de estabilidad, sino que existen numerosos trabajos en donde se pueden encontrar diferentes enfoques (ver Arnold [3], Has'minskiĭ [6], Kushner [9]). Una excelente recapitulación sobre este tema lo da Kozin en [8]. En la actualidad, el estudio del concepto de estabilidad para sistemas de ecuaciones estocásticas abarca ecuaciones diferenciales estocásticas con saltos markovianos (ver, por ejemplo, Chigansky [4] o Mao [17]), ecuaciones estocásticas con retardos (Rodkina [14], Nosov [15]; entre otros), etc.

Los trabajos anteriores hacen alusión a sistemas de ecuaciones estocásticas en el sentido de Itô. Es decir, consideran procesos adaptados a la filtración dada. Sin embargo, el cálculo clásico de Itô no se puede utilizar en el estudio de sistemas anticipativos, en donde el cálculo de variaciones o cálculo de Malliavin es la herramienta fundamental a utilizar. Incluso en el artículo de Alòs y Bonaccorsi [2], en el que se se estudia la estabilidad para un tipo de ecuación estocástica parcial adaptada, se utiliza el cálculo de Malliavin; pero en la literatura no existen textos donde se examine la estabilidad de sistemas de ecuaciones estocásticas no adaptadas hasta donde sabemos.

El objetivo principal de este trabajo es dar condiciones suficientes para los conceptos de estabilidad e inestabilidad en media cuadrática de las ecuaciones estocásticas no adaptadas. Dada la complejidad que puede presentar dicho análisis con las herramientas del cálculo de Malliavin se consideró solamente ecuaciones lineales estocásticas en el sentido de Skorohod, con coeficiente de difusión determinista y de deriva con descomposición en caos de orden 1. La solución en $L^2(\Omega \times [0,T])$ de dichas ecuaciones fue obtenida por León y Pérez-Abreau [10] analizando su descomposición en caos de Itô-Wiener. Sin embargo para nuestros fines es necesario hacer una estimación más fina de la norma L^2 de los núcleos en la descomposición en caos de la solución, de la que se puede encontrar en [10] (ver Secciones 3 y 4).

El caso presentado se puede generalizar considerando una condición inicial aleatoria, una descomposición en caos mayor a uno del coeficiente de deriva o un coeficiente de difusión aleatorio; siendo una perspectiva de un trabajo en desarrollo y a futuro.

El trabajo es dividido de la siguiente forma. En la Sección 2 se presentarán conceptos básicos referentes a la descomposición en caos de Itô-Wiener, así como las propiedades de la ecuación a considerar. Los resultados principales se presentan en la Sección 3.

2 Preliminares

En esta sección se presentan las definiciones y los resultados básicos que usaremos en este artículo.

A lo largo del trabajo se considera un espacio de probabilidad completo

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde está definido un movimiento browniano $W = \{W_t \mid t \in [0,T]\}$, y T que puede ser un real positivo o igual a ∞. Si no se supone lo contrario, los resultados enunciados serán válidos para ambos casos de T. Además, en lo que sigue se supone que $\mathcal{F}$ es la σ álgebra generadada por W y los conjuntos nulos, es decir, $\mathcal{F} = \sigma\{W_t \mid t \in [0,T]\} \vee \mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{F} = \sigma\{W_t \mid t > 0\} \vee \mathcal{N}$) para $T < \infty$ (resp. $T = \infty$), donde $\mathcal{N}$ es la familia de todos los conjuntos de medida cero de Ω.

Para $n \in \mathbb{N}$, $L^2([0,T]^n)$ representa a la familia de funciones cuadrado integrable en $[0,T]^n$ (resp. en $\mathbb{R}_+^n$), si $T \in (0,\infty)$ (resp. $T = \infty$), con respecto a la medida de Lebesgue.

2.1 Elementos básicos del Cálculo de Malliavin

La siguiente definición dará el concepto central para la descomposición en caos. A saber, la integral múltiple.

Definición 2.1. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f \in L^2([0,T]^n)$, entonces, $I_n(f)$ es la integral múltiple de f con respecto al movimiento browniano W de orden n, la cual es definida como:*

$$I_n(f) = n! \int_0^T \int_0^{s_n} \cdots \int_0^{s_2} \tilde{f}(s_1, ..., s_n) dW_{s_1} \cdots dW_{s_n} \tag{1}$$

donde $\tilde{f}$ es la simetrización de f, esto es

$$\tilde{f}(s_1, ..., s_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(s_{\sigma(1)}, ..., s_{\sigma(n)}).$$

Aquí S_n es el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, ..., n\}$.

Una propiedad de las integrales múltiples es la siguiente fórmula producto (ver Itô [7])

$$I_n(f)I_1(g) = I_{n+1}(f \otimes g) + nI_{n-1}\left(\int_0^T f(s,\cdot)g(s)ds\right) \tag{2}$$

con $(f \otimes g)(t_1, \ldots, t_{n+1}) = f(t_1, \ldots, t_n)g(t_{n+1})$.

La herramienta principal que utilizaremos será la descomposición en caos de Itô-Wiener. Esta descomposición en caos es debida a Wiener [18] y a Itô [7].

Teorema 2.2. *Sea $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Entonces F tiene una representación en $L^2(\Omega)$ de la forma*

$$F = (EF) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n)$$

con $f_n \in L^2([0,T]^n)$. Además dicha descomposición es única si todas las funciones f_n son simétricas.

Al elemento $f_n \in L^2([0,T]^n)$ se le llama *núcleo* o *kernel de orden n*. Aquí, EF es la esperanza de la variable aleatoria F.

Particularmente, si $u \in L^2\big(\Omega \times [0,T]\big)$ entonces se puede encontrar una familia $\big\{f_n \in L^2([0,T]^{n+1}) \mid n \geq 0\big\}$, f_n simétrica en las primeras n variables, tal que:

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, t)) \tag{3}$$

para casi toda $t \in [0,T]$, donde $I_0(f_0(t)) = f_0(t) = E(u_t)$.

La igualdad (3) en $L^2(\Omega)$ permite caracterizar al dominio del operador δ (denotado por $Dom\delta$), utilizando *la descomposición en caos de Itô-Wiener*, es decir:

Definición 2.3. *Se dice que el proceso u dado por* (3) *es Skorohod integrable (denotado por $u \in Dom\delta$) si y sólo si*

$$\sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1}\big(f_n\big) \in L^2(\Omega). \tag{4}$$

En este caso se define la integral $\delta(u)$ de u con respecto a W, en el sentido de Skorohod como

$$\delta(u) = \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1}\big(f_n\big).$$

Se puede demostrar (ver Nualart [13]) que (4) implica que

$$E\big(\delta(u)^2\big) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)! \|\tilde{f}_m\|_{L^2([0,T]^{m+1})},$$

por lo que $u \in Dom\delta$ si y sólo si

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)! \|\tilde{f}_m\|^2_{L^2([0,T]^{m+1})} < \infty.$$

Aquí $||\cdot||_{L^2([0,T]^m)}$ denota la norma en $L^2([0,T]^m)$.

La integral de Skorohod es una extensión de la integral de Itô, en el sentido de que si u es un proceso adaptado de $L^2(\Omega \times [0,T])$, entonces $u \in Dom\delta$ y $\delta(u)$ coincide con la integral de Itô $\int_0^T u_s dW_s$. Por esto denotaremos a $\delta(u)$ como $\int_0^T u_s dW_s$.

2.2 Ecuación estocástica

La siguiente ecuación diferencial estocástica lineal no adaptada es la considerada en nuestro análisis:

$$\begin{aligned} dX_t &= A(t)X_t\,dt + B(t)X_t\,dW_t\,, \quad t \in (0,T] \\ X_0 &= x \end{aligned} \tag{5}$$

con

- $x \in \mathbb{R}$ y $0 < T < \infty$
- $A(t) = I_1(a^t(\cdot))$, donde $a \in L^2([0,T]^2)$
- B un proceso determinista en $L^2([0,T])$

León y Pérez-Abreu [10] examinan la existencia de una solución de una ecuación más general que (5) debido a que su condición inicial es una variable aleatoria $\mathcal{F}-$*medible* con descomposición en caos finita. La técnica usada en [10] es suponer que (5) tiene una solucion en $L^2(\Omega \times [0,T])$ e igualar los núcleos del mismo orden en ambos miembros de la ecuación. De esta forma se obtiene un sistema infinito de ecuaciones para los núcleos que se resuelve inductivamente. Finalmente se da una estimación de la norma L^2 de los núcleos encontrados para verificar que la solucion construida es, en efecto, un proceso en $L^2(\Omega \times [0,T])$. En este artículo necesitamos una estimación mas fina (ver Proposición 2.5).

Cabe mencionar que un proceso $X^T \in L^2(\Omega \times [0,T])$ es una solución de la ecuación (5) si $AX^T \in L^1([0,T])$ para casi toda $\omega \in \Omega$, $1_{[0,t]}BX^T \in Dom\delta$ y

$$X_t^T = x + \int_0^t A(s)X_s^T ds + \int_0^T 1_{[0,t]}(s)B(s)X_s^T dW_s$$

para $t \in [0,T]$.

Para dar la forma de la solución de (5), definamos lo siguiente

$$\begin{aligned} C_t &= \exp\left(\int_0^t \int_0^s a^s(r)B(r)\,dr\,ds\right) \\ h_t(r) &= \int_0^t a^s(r)\,ds \\ Y_{0,T}^t &= \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T h_t^2(r)\,dr\right). \end{aligned}$$

También utilizaremos la siguiente notación:

- $h^{\otimes m}$ es la m-ésimo producto tensorial de h consigo mismo.
- dados un vector $(t_1, ..., t_m) \in [0,T]^m$, y un subconjunto $\{i_1, ..., i_j\}$ de $\{1, ..., m\}$, con $j < m,\ i_1 < ... < i_j$, denotaremos al vector

  $$(t_1, .., t_{i_1-1}, t_{i_1+1}, ..., t_{i_j-1}, t_{i_j+1}, ..., t_m)$$

  por $(\hat{t}_{i_1}, ..., \hat{t}_{i_j})$.

Por [10], donde se usa la fórmula producto (2), la solución X^T en $L^2(\Omega \times [0,T])$ de la ecuación (5) tiene la forma

$$X_t^T = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(\phi_m^t) \tag{6}$$

donde los núcleos ϕ_k^t son dados de manera inductiva:

$$\phi_0^t = C_t Y_{0,T}^t x$$

$$\begin{aligned} n!\,\phi_n^t(t_1,...,t_n) = & \sum_{j=1}^{n} \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j\le n} (-1)^{j-1} B^{\otimes j}\left(t_{i_1},...,t_{i_j}\right) \cdot \\ & \cdot \left\{ \chi_{\{t_{i_i},...,t_{i_j}\le t\}} (n-j)!\phi_{n-j}^t\left(\hat{t}_{i_1},...,\hat{t}_{i_j}\right) \right\} \\ & + \; C_t\, Y_{0,T}^t h_t^{\otimes n}(t_1,...,t_n)x \end{aligned} \tag{7}$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Los cálculos de la siguiente proposición se presentará en el Apéndice 4, debido a que su demostración es bastante técnica y tediosa.

Proposición 2.4. *Los núcleos* (7) *se pueden reescribir como:*

$$\begin{aligned} & n!\,\phi_n^t(t_1,...,t_n) \\ & = \phi_0^t \left[\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j\le n} B^{\otimes j}\left(t_{i_1},...,t_{i_j}\right) \chi_{\{t_{i_1},...,t_{i_j}\le t\}} \cdot \right.\right. \\ & \left.\left. \cdot h_t^{\otimes n-j}\left(\hat{t}_{i_1},...,\hat{t}_{i_j}\right) \right] + h_t^{\otimes n}\left(t_1,...,t_n\right) \right], \quad n \ge 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Con la proposición anterior se concluye:

Proposición 2.5. *Sea X^T la solución de la ecuación* (5)*, definida por* (6) *y* (7)*. Entonces*

$$\mathbf{E}\left([X_t^T]^2\right) \;\le\; |\phi_0^t|^2 \exp\left((\|B_t\|_{L^2([0,T])} + \|h_t\|_{L^2([0,T])})^2\right) \tag{9}$$

con $B_t = B\chi_{[0,t]}$.

Demostración. Por (8) tenemos

$$\begin{aligned} & n!\|\phi_n^t\|_{L^2([0,T]^n)} \\ & \le |\phi_0^t| \left\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{1\le i_1<...<i_j\le n} \left[\|B_t\|_{L^2([0,T])}^j \|h_t\|_{L^2([0,T])}^{n-j} \right] + \|h_t\|_{L^2([0,T])}^n \right\} \\ & = |\phi_0^t| \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \|B_t\|_{L^2([0,T])}^j \|h_t\|_{L^2([0,T])}^{n-j} \\ & = |\phi_0^t| \Big(\|B_t\|_{L^2([0,T])} + \|h_t\|_{L^2([0,T])} \Big)^n. \end{aligned}$$

Por la desigualdad anterior se tiene

$$
\begin{aligned}
E\left([X_t^T]^2\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} n!\|\phi_n^t\|^2_{L^2([0,T])} \\
&\leq |\phi_0^t|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\|B_t\|_{L^2([0,T])} + \|h_t\|_{L^2([0,T])}\right)^{2n}}{n!} \\
&= |\phi_0^t|^2 \exp\left((\|B_t\|_{L^2([0,T])} + \|h_t\|_{L^2([0,T])})^2\right).
\end{aligned}
$$

□

3 Estabilidad de las soluciones

Aquí, analizaremos la estabilidad en media cuadrática y en probabilidad débil, así como también la inestabilidad en media cuadrática (i.e., cuando no hay estabilidad) de la solución del sistema (5). Cabe mencionar que la estabilidad que definiremos es con respecto a $X^T \equiv 0$ (i.e., la condicion inicial es cero).

Como ya se mencionó, son diversos los enfoques de estabilidad para las ecuaciones estocásticas. Los que usaremos aquí son:

Definición 3.1. *Considere el sistema (5). Se dice que la solución $X^T \equiv 0$ es:*

1. *Estable en probabilidad débil, si para toda $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe un $r \geq 0$ tal que*

$$P\{|X_t^T| > \varepsilon\} < \delta$$

para toda $|x| < r$ y para todo $t, T \in \mathbb{R}_+$ tales que $0 \leq t \leq T$.

2. *Estable en media cuadrática, si para toda $\varepsilon > 0$ existe un $r > 0$ tal que*

$$E\left(|X_t^T|^2\right) < \varepsilon$$

para toda $|x| < r$ y para todo $t, T \in \mathbb{R}_+$ tales que $0 \leq t \leq T$.

Observe que en el caso en que el proceso A es adaptado a la filtración generada por W, se tiene que $a^s(r) = 0$ para $r > s$. Por lo tanto, en este caso, la solución X^T de (5) es independiente de T y las Definiciones 3.1.1 y 3.1.2 coinciden con las dadas para sistemas adaptados. Por ejemplo, en este caso, tenemos que $X \equiv 0$ es estable en media cuadrática si para toda $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$E\left(|X_t|^2\right) < \varepsilon$$

para toda $|x| < r$ y $t > 0$.

Ahora podemos establecer los resultados principales de este artículo.

Teorema 3.2. *Supongamos que*

$\underline{a}$ $\int_0^\infty B^2(s)ds < \infty$

$\underline{b}$ $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty |a^s(r)ds| \right)^2 dr < \infty$

Entonces la solución (6) *de la ecuación* (5) *es* estable en media cuadrática *y* estable en probabilidad débil.

Demostración. Primero notemos que por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^t B(r)\Big(\int_r^t a^s(r)ds\Big)dr \leq & \Big(\int_0^\infty B(r)^2dr\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty \big(\int_r^\infty |a^s(r)|ds\big)^2dr\Big)^{1/2}\\ \leq & \Big(\int_0^\infty B(r)^2dr\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty \big(\int_0^\infty |a^s(r)|ds\big)^2dr\Big)^{1/2}\\ < & \infty\end{aligned}$$

por lo que se concluye que:

$$\sup_{t<T}\exp\left((\|B_t\|_{L^2([0,T])}+\|h_t\|_{L^2([0,T])})^2\right) < \infty$$

y

$$\sup_{t<T}\exp\left(\int_0^t\int_0^s a^s(r)B(r)drds\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T h_t^2(r)dr\right) < \infty.$$

Recordemos que $X_0^T = x \in \mathbb{R}$ es la condición inicial de (5), luego dado un $\varepsilon > 0$ se tiene por (9)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left([X_t^T]^2\right) \leq & |\phi_0^t|^2 \exp\left((\|B_t\|_{L^2([0,T])}+\|h_t\|_{L^2([0,T])})^2\right)\\ = & \left[exp\left(\int_0^t\int_0^s a^s(r)B(r)drds\right)\cdot exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T h_t^2(r)dr\right)\cdot|X_0|\right]^2\cdot\\ & \cdot\left[\exp\left((\|B_t\|_{L^2([0,T])}+\|h_t\|_{L^2([0,T])})^2\right)\right] < \varepsilon\end{aligned}$$

si $|x|$ es suficientemente pequeña. Por tanto se tiene la *estabilidad en media cuadrática.*

Por otra parte de las *desigualdades de Chebychev y Hölder* se sigue que la *estabilidad en media cuadrática* implica la *estabilidad en probabilidad débil.* □

Teorema 3.3. *La solución* (6) *del sistema de ecuaciones estocásticas no adaptada* (5) *es inestable en media cuadrática si*

$$\int_0^t\int_0^s a^s(r)B(r)drds \to \infty \quad cuando \quad t\to\infty.$$

Demostración. Por (6) se tiene

$$\mathbf{E}([X_t^T]^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|\phi_n^t\|^2_{L^2([0,T])^n}$$

de donde

$$\mathbf{E}\left([X_t^T]^2\right) \geq |\phi_0^t|^2$$

Es decir

$$\mathbf{E}\left([X_t^T]^2\right) \geq \exp\left(2\int_0^t \int_0^s a^s(r)B(r)drds\right) \exp\left(\int_0^T h_t^2(r)dr\right) \cdot x^2.$$

Además observemos que $\exp\left(\int_0^T h_t^2(r)dr\right) > 1$, por lo que se tiene que:

$$\mathbf{E}\left([X_t^T]^2\right) \geq \exp\left(2\int_0^t \int_0^s a^s(r)B(r)drds\right) \cdot x^2.$$

Así, por nuestra hipótesis, se concluye que la solución (6) del sistema de ecuaciones estocásticas no adaptada (5) no es *estable en media cua-drática*, es decir, es *inestable en media cuadrática.* □

4 Apéndice

Demostración de la Proposición 2.4. Observemos que por (7) se tiene

$$\begin{aligned} 1!\,\phi_1^t(t_1) &= C_t\, Y_{0,T}^t\, x\, h_t(t_1) \,+\, B(t_1)\,\chi_{\{t_1<t\}}\, 1!\,\phi_0^t \\ &= \phi_0^t\, h_t(t_1) \,+\, B(t_1)\,\chi_{\{t_1<t\}}\, 1!\,\phi_0^t \\ &= \phi_0^t \left[B(t_1)\,\chi_{\{t_1<t\}} \,+\, h_t(t_1)\right] \end{aligned}$$

Es decir, (8) se satisface para $k = 1$. Procediendo por inducción podemos suponer que la igualdad (8) se cumple para cada natural menor que k con $k > 1$. Para probar que es también válida para k utilizamos (7) de nuevo para obtener que

$$\begin{aligned} k!\,\phi_k^t(t_1,...,t_k) = &\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_j\leq k} (-1)^{j-1} B^{\otimes j}\left(t_{i_1},...,t_{i_j}\right) \\ &\cdot\left\{\chi_{\{t_{i_1},...,t_{i_j}\leq t\}}(k-j)!\phi_{k-j}^t\left(\hat{t}_{i_1},...,\hat{t}_{i_j}\right)\right\} \\ &+\left[(-1)^{k-1}B^{\otimes k}\left(t_1,...,t_k\right)\left\{\chi_{\{t_1,...,t_k\leq t\}}\phi_0^t\right\}\right] \\ &+\,\phi_0^t h_t^{\otimes k}(t_1,...,t_k). \end{aligned}$$

Para los próximos cálculos, consideremos la siguiente notación en $[0, T]$

$$\{s_1,...,s_{k-j}\} = \{t_1,...,t_k\} \setminus \{t_{i_1},...,t_{i_j}\}$$

y recordemos que

$$B_t^{\otimes j}(t_{i_1},...,t_{i_j}) \doteq B^{\otimes j}(t_{i_1},...,t_{i_j})\,\chi_{\{t_{i_1},...,t_{i_j}\leq t\}}.$$

Retomando los cálculos, por hipótesis inductiva se tiene

$$\begin{aligned}
&k!\,\phi_k^t(t_1,...,t_k)\\
&= \Bigg[\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_j\leq k}(-1)^{j-1}B_t^{\otimes j}(t_{i_1},...,t_{i_j})\cdot\ \phi_0^t\Big\{\,h_t^{\otimes k-j}(\hat{t}_{i_1},...,\hat{t}_{i_j})\\
&\quad+\sum_{l=1}^{k-j}\sum_{1\leq m_1<...<m_l\leq k-j}B_t^{\otimes l}(s_{m_1},...,s_{m_l})h_t^{\otimes k-(j+l)}(\hat{s}_{m_1},...,\hat{s}_{m_l})\Big\}\Bigg]\\
&\quad+\Big[(-1)^{k-1}B_t^{\otimes k}(t_1,...,t_k)\,\phi_0^t\Big]+\phi_0^t h_t^{\otimes k}(t_1,...,t_k),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
&k!\,\phi_k^t(t_1,...,t_k)=\phi_0^t\Big[h_t^{\otimes k}(t_1,...,t_k)\,+\,(-1)^{k-1}B_t^{\otimes k}(t_1,...,t_k)\Big]\\
&+\Bigg[\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{1\leq i_1<...<i_j\leq k}(-1)^{j-1}B_t^{\otimes j}(t_{i_1},...,t_{i_j})\phi_0^t\,h_t^{\otimes(k-j)}(\hat{t}_{i_1},...,\hat{t}_{i_j})\Bigg]\\
&+\Bigg[\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{1\leq i_1<...<i_j\leq k}(-1)^{j-1}B_t^{\otimes j}(t_{i_1},...,t_{i_j})\\
&\cdot\Big[\sum_{l=1}^{k-j}\sum_{1\leq m_1<...<m_l\leq k-j}B_t^{\otimes l}(s_{m_1},...,s_{m_l})\cdot\ h_t^{\otimes k-(j+l)}(\hat{s}_{m_1},...,\hat{s}_{m_l})\Big]\phi_0^t\Bigg].
\end{aligned}\tag{10}$$

Observemos que, considerando la definición de los elementos $\{s_i\}$, el término $l = k-j$ del último sumando de la igualdad anterior cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{1\leq i_1<...<i_j\leq k}(-1)^{j-1}B_t^{\otimes j}(t_{i_1},...,t_{i_j})\\
&\quad\cdot\Big[\sum_{1\leq m_1<...<m_{k-j}\leq k-j}B_t^{\otimes k-j}(s_{m_1},...,s_{m_{k-j}})\Big]\\
&\quad= B_t^{\otimes k}(t_1,...,t_k)\cdot\Big[\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}(-1)^{j-1}\Big]\\
&\quad= (-1)B_t^{\otimes k}(t_1,...,t_k)\cdot\Big[\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j-1-(-1)^k\Big]\\
&\quad= (-1)B_t^{\otimes k}(t_1,...,t_k)[0^k-1-(-1)^k]\\
&\quad= B_t^{\otimes k}(t_1,...,t_k)[1-(-1)^{k-1}].
\end{aligned}\tag{11}$$

Por otra parte, notemos que, para $l = k - j - 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k-2} \sum_{1\le i_1<...<i_j\le k} (-1)^{j-1} B_t^{\otimes j}(t_{i_1},...,t_{i_j}) \\
&\quad \cdot \Big[\sum_{1\le m_1<...<m_l\le k-j} B_t^{\otimes l}(s_{m_1},...,s_{m_l}) \cdot\ h_t^{\otimes k-(j+l)}(\hat{s}_{m_1},...,\hat{s}_{m_l}) \Big] \\
&\quad = \sum_{p=1}^{k} h_t(t_p) B_t^{\otimes k-1}(\hat{t}_p) \sum_{j=1}^{k-2} \sum_{1\le i_1<...<i_j\le k-1} (-1)^{j-1} \\
&\quad = \sum_{p=1}^{k} h_t(t_p) B_t^{\otimes k-1}(\hat{t}_p) \sum_{j=1}^{k-2} (-1)^{j-1} \binom{k-1}{j} \\
&\quad = (-1) \sum_{p=1}^{k} h_t(t_p) B_t^{\otimes k-1}(\hat{t}_p) \left[\sum_{j=0}^{k-1} \Big[(-1)^j \binom{k-1}{j} \Big] - 1 - (-1)^{k-1} \right] \\
&\quad = \sum_{p=1}^{k} h_t(t_p) B_t^{\otimes k-1}(\hat{t}_p) \big[1 - (-1)^{k-2} \big]. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Ahora, tomando (11) y (12) en (10) se tiene

$$\begin{aligned}
&k!\, \phi_k^t(t_1,...,t_k) = \phi_0^t \Big[h_t^{\otimes k}(t_1,...,t_k) \ +\ B_t^{\otimes k}(t_1,...,t_k) \Big] \\
&+ \left[\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{1\le i_1<...<i_j\le k} (-1)^{j-1} B_t^{\otimes j}(t_{i_1},...,t_{i_j}) \phi_0^t\, h_t^{\otimes(k-j)}(\hat{t}_{i_1},...,\hat{t}_{i_j}) \right] \\
&+ \left[\sum_{j=1}^{k-2} \sum_{1\le i_1<...<i_j\le k} (-1)^{j-1} B_t^{\otimes j}(t_{i_1},...,t_{i_j}) \right. \\
&\left. \cdot \Big[\sum_{l=1}^{k-j-1} \sum_{1\le m_1<...<m_l\le k-j-1} B_t^{\otimes l}(s_{m_1},...,s_{m_l}) \cdot\ h_t^{\otimes(k-(j+l))}(\hat{s}_{m_1},...,\hat{s}_{m_l}) \Big] \phi_0^t \right] \\
&= \phi_0^t \left[h_t^{\otimes k}(t_1,...,t_k) \ +\ B_t^{\otimes k}(t_{i_1},...,t_{i_j}) + \sum_{p=1}^{k} h_t(t_p) B^{\otimes k}(\hat{t_p}) \big[1 - (-1)^{k-2} \big] \right] \\
&+ \left[\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{1\le i_1<...<i_j\le k} (-1)^{j-1} B_t^{\otimes j}(t_{i_1},...,t_{i_j}) \cdot\ \phi_0^t\, h_t^{\otimes(k-j)}(\hat{t}_{i_1},...,\hat{t}_{i_j}) \right] \\
&+ \left[\sum_{j=1}^{k-3} \sum_{1\le i_1<...<i_j\le k} (-1)^{j-1} B_t^{\otimes j}(t_{i_1},...,t_{i_j}) \right.
\end{aligned}$$

$$\cdot \Big[\sum_{l=1}^{k-j-2} \sum_{1\le m_1<...<m_l\le k-j} B_t^{\otimes l}(s_{m_1},...,s_{m_l})\cdot h_t^{\otimes k-(j+l)}(\hat{s}_{m_1},...,\hat{s}_{m_l})\Big]\phi_0^t\Big].$$

Procediendo como en (11) y (12), consideramos el sumando $j = k - q \quad (q \geq 1)$ en el segundo término y el $l = k - q - j$ en el último término, para obtener la siguiente recurrencia sobre el índice j:

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le i_1\le...\le i_{k-q}\le k} (-1)^{k-q-1} B_t^{\otimes k-q}(t_{i_1},...,t_{i_{k-q}})\cdot h_t^{\otimes q}(\hat{t}_{i_1},...,\hat{t}_{i_{k\text{-}q}})\\
&\quad + \Big[\sum_{j=1}^{k-q-1} \sum_{1\le i_1\le...\le i_j\le k} (-1)^{j-1} B_t^{\otimes j}(t_{i_1},...,t_{i_j})\\
&\qquad \cdot \sum_{1\le m_1\le...\le m_{k-q-j}} h_t^{\otimes q}(\hat{s}_{m_1},...,\hat{s}_{m_{k-q-j}}) B_t^{\otimes k-q-j}(s_{m_1},...,s_{m_{k-q-j}})\Big]\\
&\quad = \sum_{1\le i_1,...,\le i_q\le k} B_t^{\otimes k-q}(\hat{t}_{i_1},...,\hat{t}_{i_q})\, h_t^{\otimes q}(t_{i_1,...,t_{i_q}}).
\end{aligned}$$

Así se tiene que (8) también vale para k, lo cual implica el resultado.

Agradecimientos Este trabajo de investigación de los autores fue parcialmente financiado por los proyectos CONACyT No. 45684-F, No. 194471 y No. 47048-F.

Referencias

[1] Afanasi'ev, V. and Kolmanovskiĭ, V. N. B. and Nosov, V. R. : Mathematical Theory of Control Systems Design. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1996.

[2] Alòs, E. and Bonaccorsi, S. : Stability for stochastic partial differential equations with Dirichlet white-noise boundary conditions. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, Vol. 5, n. 4, 2002, pp. 465-481.

[3] Arnold, L. : Stochastic Differential Equations. John Wiley, Inc., USA, 1974.

[4] Chigansky, P. : Stability of the nonlinear filter for slowly switching Markov chains. Stochastic Processes and their Applications, Vol. 116, 2006, pp. 1185-1194.

[5] Hahn, W.: Stability of Motion. Springer-Verlag, New York, 1967.

[6] Has'minskiĭ, R. Z. : Stochastic Stability of Diferrential Equations. Sijthoff & Noordhoff International Publishers B.V., Alphen aan den Rijn, The Netherlands Rockville, Maryland, USA, 1980.

[7] Itô, K. : Multiple Wiener integrals. J. Math. Soc. Japan, Vol. 3, 1951, pp. 157-1169.

[8] Kozin, F. : A survey of stability of stochastic systems. Automatica, Vol. 5, 1969, pp. 95-112.

[9] Kushner H. J. : Stochastic Stability and Control. Academic Press Inc., USA, 1967.

[10] León, J. A. and Pérez-Abreu, V. : Strong solutions of stochastic bilinear equations with anticipating drift in the first Wiener chaos. Stochastic Processes, A Festschirift in Honour of Gopinath Kallianpur, Springer-Verlag, 1993, pp. 235-243.

[11] Ljapunov, A. M. : Problème Générale de la Stabilité du Mouvement. Kharkov, Moscow, 1892.Reimpresión, GITTL, 1950.

[12] Magnus, Von K. : Zur Entwcklung des Stabilitätsbegriffes in der Mechanik. Naturwissenschaften, Vol. 46, 1956, pp. 590-595.

[13] Nualart, D. : The Malliavin Calculus and Related Topics, Probability and its Applications. Springer-Verlag, 1995.

[14] Rodkina, A. : On asymptotic stability of nonlinear sotchastic systems with delay. Cubo, Vol. 7, n. 1, 2005, pp. 23-42.

[15] Rodkina, A. and Nosov, V. : On stability of stochastic delay cubic equations. Dynamic Systems and Applications, Vol. 15, n. 2, 2006, pp. 193-203.

[16] Sinha and Pradip, K. : Multivariable Control: An Introduction. Marcel Dekker, Inc., 1984.

[17] Yuan, Chenggui and Mao, Xuerong. : Asymptotic stability in distribution of stochastic differential equations with Markovian switching. Stochastic Processes and their Applications, Vol. 103, 2003, pp. 277-291.

[18] Wiener, N. : The homogeneous chaos. Amer. Journ. Math., Vol. LV, n. 4, 1938.

Dirección de los autores
Jorge A. León — Departamento de Control Automático, Cinvestav-IPN, Av. IPN 2508, México D.F., 07360, México.
e-mail: `jleon@ctrl.cinvestav.mx`
Norma B. Lozada-Castillo — Departamento de Control Automático, Cinvestav-IPN, Av. IPN 2508, México D.F., 07360, México.
e-mail: `nlozada@ctrl.cinvestav.mx`

Alexander S. Poznyak — Departamento de Control Automático, Cinvestav-IPN, Av. IPN 2508, México D.F., 07360, México
e-mail: apoznyak@ctrl.cinvestav.mx