Vol. XV Nº 1 Junio (2007)
Matemáticas: 109–118

**Matemáticas:**
**Enseñanza Universitaria**
©Escuela Regional de Matemáticas
Universidad del Valle - Colombia

# Distribución de la traza de la matriz de sumas de cuadrados y productos bajo el modelo normal mixto

María Eugenia Castañeda Daya K. Nagar

Recibido Sept. 19, 2005 Aceptado Sept. 27, 2006

**Abstract**

In this paper we derive the distribution of the trace of A, tr(A), where A stands for the sample sum of squares and products matrix when sampling from a mixture of two multivariate normal distributions.

**Keywords:** distribution; mixture normal; moment generating function; multivariate normal; zonal polynomials.

**MSC(2000):** Primary: 62H10, Secondary: 62H99.

**Resumen**

En este artículo se deriva la distribución de la traza de $A$, $\operatorname{tr}(A)$, donde $A$ es la matriz de sumas de cuadrados y productos cuando la muestra proviene de la mezcla de dos distribuciones normales multivariadas.

**Palabras y frases claves:** distribución; mezcla de normales; función generadora de momentos; normal multivariada; polinomio zonal.

## 1 Introducción

Sea $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N$ una muestra aleatoria de una distribución normal $p$-variada con vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianza $\Sigma$ definida positiva. Sea $A$ la matriz muestral de sumas de cuadrados y productos, $A = (a_{ij}) = \sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})'$, donde $N\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i$. Entonces $A$ tiene una distribución Wishart con $n = N - 1$ grados de libertad y matriz de parámetros $\Sigma = (\sigma_{ij})$. Sea $Y = \operatorname{tr}(A)$. Una gran variedad de pruebas estadísticas están asociadas con $Y$ y sus funciones. Cuando $\Sigma = \operatorname{Diag}(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{pp})$, los elementos de la diagonal de la matriz $A = (a_{ij})$ son independientes y $a_{ii} \sim \sigma_{ii}\chi_n^2$, $i = 1, \ldots, n$, por tanto la variable aleatoria $Y$ se distribuye como una combinación lineal de variables independientes chi-cuadrado (Gupta y Nagar [8, p. 107]). Además, la distribución asintótica de $(Y - n\operatorname{tr}(\Sigma))/\sqrt{2n\operatorname{tr}(\Sigma^2)}$ es normal estándar (Mathai [9]).

Las variables aleatorias, en la práctica, generalmente no tienen una distribución normal. Una alternativa para el modelo normal multivariado es el modelo normal mixto. La densidad normal mixta se define como

$$f(\boldsymbol{x}) = \epsilon N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma, \boldsymbol{x}) + (1-\epsilon)N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma, \boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p, \tag{1}$$

donde

$$N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{x}) = \frac{\exp\left\{-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})/2\right\}}{(2\pi)^{p/2}\det(\Sigma)^{1/2}},$$

y $1-\epsilon$, $0<\epsilon<1$, se conoce como grado de contaminación.

El modelo de mezcla de normales es muy común en situaciones prácticas, donde los datos se pueden considerar provenientes de dos o más poblaciones normales mezcladas en diferentes proporciones. Este modelo tiene una amplia aplicación en estudios experimentales en varias ramas de la medicina, la biología y la agronomía (Everitt y Hand [4], y Titterington, Smith y Makov [19]). Estudios sobre crecimiento de plantas (Rao [14]), presión sanguínea de humanos (Cicchinelli [5]), excreción de una droga (Murphy y Bolling [12]), límites auditivos de humanos (Orlando [13]), estudios genéticos (McLachlan y Basford [10]), y estudios sobre variedades de cebada y col (McLachlan y Basford [10]), son algunos ejemplos de problemas que se han analizado por varias técnicas estadísticas y matemáticas, suponiendo un modelo normal mixto. También se han usado en estudios de identificación de outliers (Aitkin y Wilson [1]). Otros resultados sobre teoría de distribuciones y la robustez de ciertas pruebas estadísticas bajo el modelo normal mixto se pueden leer en Amey [2], Gupta y Kabe [6, 7], Nagar y Castañeda [15], y Srivastava [16].

En este artículo se deriva la distribución de $Y$ cuando la muestra proviene de la mezcla de dos distribuciones normales multivariadas. Se obtienen dos representaciones de la distribución de $Y$ a partir de su función generadora de momentos. En la sección 2 se obtiene la función generadora de momentos de $Y$, en la sección 3 se deriva la distribución en términos de la función hipergeométrica confluente y en la sección 4 se obtiene una representación en términos de polinomios zonales.

## 2 Función generadora de momentos

Como $Y$ es una función de la matriz muestral $A$ de sumas de cuadrados y productos, la función generadora de momentos de $Y$ se puede obtener a partir de la distribución de $A$ bajo el modelo normal mixto. Srivastava y Awan [17] y Tan [18] mostraron que la densidad de $A$, bajo el modelo normal mixto, es una combinación lineal de densidades Wishart no centradas con coeficientes binomiales

$$f(A)=\sum_{r=0}^{N}\binom{N}{r}\epsilon^{r}(1-\epsilon)^{N-r}W_p(n,\Sigma,c_r^2\Sigma^{-1}\nu\,\nu';A), \tag{2}$$

donde $n=N-1$, $c_r^2=r\frac{(N-r)}{N}$ y $\nu=(\mu_1-\mu_2)$. Aquí $W_p(n,\Sigma,c_r^2\Sigma^{-1}\nu\,\nu';A)$, representa la densidad Wishart no centrada con $n$ grados de libertad y matriz de parámetros de no centralidad $c_r^2\Sigma^{-1}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}'$, definida como

$$\begin{aligned} K_p(n,\Sigma,\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{etr}\left(-\frac{\Sigma^{-1}A}{2}\right)\det(A)^{(n-p-1)/2}\\ \times{}_0F_1\left(\frac{n}{2};\frac{c_r^2}{4}\Sigma^{-1}A\Sigma^{-1}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}'\right),\ A>0, \end{aligned} \tag{3}$$

donde

$$K_p(n,\Sigma,\boldsymbol{\nu}) = \left[2^{pn/2}\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)\det(\Sigma)^{n/2}\operatorname{etr}\left(\frac{c_r^2\Sigma^{-1}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}'}{2}\right)\right]^{-1}, \tag{4}$$

$$\Gamma_p(a) = \pi^{p(p-1)/4}\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(a-\frac{j-1}{2}\right),\ \operatorname{Re}(a) > \frac{p-1}{2}$$

y ${}_0F_1(\cdot;\cdot)$ es la función de Bessel de argumento matricial. La definición y propiedades de la distribución Wishart no centrada se pueden encontrar en Gupta y Nagar [8, p. 113]. La función generadora de momentos de $Y$ está dada por

$$M(t) = \sum_{r=0}^{N}\epsilon^r(1-\epsilon)^{N-r}M_r(t), \tag{5}$$

donde

$$\begin{aligned} M_r(t) &= K_p(n,\Sigma,\boldsymbol{\nu})\int_{A>0}\exp\left[t\operatorname{tr}(A)-\frac{\operatorname{tr}(\Sigma^{-1}A)}{2}\right]\det(A)^{(n-p-1)/2} \\ &\qquad\times {}_0F_1\left(\frac{n}{2};\frac{c_r^2}{4}\Sigma^{-1}A\Sigma^{-1}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}'\right)dA. \end{aligned} \tag{6}$$

Usando el resultado (Gupta y Nagar [8]),

$$\begin{aligned} &\int_{X>0}\operatorname{etr}(-XZ)\det(X)^{a-(p+1)/2}\,{}_0F_1(a;XT)\,dX \\ &= \Gamma_p(a)\det(Z)^{-a}\,{}_1F_1(a;a;Z^{-1}T) = \Gamma_p(a)\det(Z)^{-a}\operatorname{etr}(Z^{-1}T), \end{aligned}$$

donde $Z>0$, $\operatorname{Re}(a)>(p-1)/2$, la integral en la expresión (6) se puede evaluar como

$$\begin{aligned} &\int_{A>0}\exp\left[t\operatorname{tr}(A)-\frac{\operatorname{tr}(\Sigma^{-1}A)}{2}\right]\det(A)^{(n-p-1)/2} \\ &\qquad\qquad\times{}_0F_1\left(\frac{n}{2};\frac{c_r^2}{4}\Sigma^{-1}A\Sigma^{-1}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}'\right)dA \\ &= 2^{np/2}\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)\det(\Sigma^{-1}-2tI_p)^{-n/2} \\ &\quad\times\operatorname{etr}\left[\frac{c_r^2}{2}\Sigma^{-1}\left(\Sigma^{-1}-2tI_p\right)^{-1}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}'\right],\ I_p-2t\Sigma>0. \end{aligned} \tag{7}$$

Sustituyendo (4) y (7) en (6) y simplificando, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.1.** *Sea $A$ la matriz de sumas de cuadrados y productos obtenida a partir de una muestra aleatoria de tamaño $N = n+1$ bajo el modelo (1). Sea $Y = \mathrm{tr}(A)$. Entonces la función generadora de momentos de $Y$ está dada por*

$$M(t) = \sum_{r=0}^{N} \binom{N}{r} \epsilon^r (1-\epsilon)^{N-r} M_r(t),\ I_p - 2t\Sigma > 0, \tag{8}$$

*donde*

$$\begin{aligned} M_r(t) &= \det(I_p - 2t\Sigma)^{-n/2} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{c_r^2 d^2}{2} + \frac{c_r^2}{2}\boldsymbol{\nu}'\Sigma^{-1/2}(I_p - 2t\Sigma)^{-1}\Sigma^{-1/2}\boldsymbol{\nu}\right), \end{aligned} \tag{9}$$

*con*

$$d^2 = \boldsymbol{\nu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2). \tag{10}$$

Sea $Q$ una matriz ortogonal tal que

$$Q'(I_p - 2t\Sigma)^{-1}Q = \mathrm{diag}((1-2t\lambda_1)^{-1}, \ldots, (1-2t\lambda_p)^{-1}),$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de $\Sigma$. Entonces

$$\det(I_p - 2t\Sigma)^{-n/2} = \prod_{i=1}^{p}(1-2t\lambda_i)^{-n/2}, \tag{11}$$

y

$$\begin{aligned} &\exp\left[\frac{c_r^2}{2}\boldsymbol{\nu}'\Sigma^{-1/2}(I_p - 2t\Sigma)^{-1}\Sigma^{-1/2}\boldsymbol{\nu}\right] \\ &\qquad = \exp\left[\frac{c_r^2}{2}\sum_{i=1}^{p} b_{ii}(1-2t\lambda_i)^{-1}\right], \end{aligned} \tag{12}$$

donde $b_{11}, \ldots, b_{pp}$ son los elementos de la diagonal de la matriz $Q'\Sigma^{-1/2}\boldsymbol{\nu}$ $\boldsymbol{\nu}'\Sigma^{-1/2}Q$. Sustituyendo (11) y (12) en (9) se obtiene

$$M_r(t) = \prod_{i=1}^{p}\left\{(1-2t\lambda_i)^{-n/2}\exp\left[c_r^2 t b_{ii}\lambda_i(1-2t\lambda_i)^{-1}\right]\right\},$$

donde $1 - 2t\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, p$. Ahora, si $X \sim \chi_m^2(\delta)$, entonces la función generadora de momentos de $X$ está dada por

$$M(t) = (1-2t)^{-m/2}\exp[\delta t(1-2t)^{-1}],$$

y la f.d.p. de $Y$ puede escribirse como

$$\sum_{r=0}^{N} \binom{N}{r} \epsilon^r (1-\epsilon)^{N-r} f_r(y), \; y > 0,$$

donde $f_r$ es la función de densidad de $\sum_{i=1}^p \lambda_i Y_i$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de $\Sigma$ y $Y_1, \ldots, Y_p$ son variables aleatorias independientes con distribución chi-cuadrado no central, $Y_i \sim \chi_n^2(c_r^2 b_{ii})$ para $i = 1, \ldots, p$.

## 3 La densidad y la función hipergeométrica confluente

En esta sección se expresa la f.d.p. de $Y$ en términos de la función hipergeométrica confluente $\mathbf{\Phi}_2^{(m)}$ en $m$ variables $z_1, \ldots, z_m$, la cual se define como

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Phi}_2^{(m)}[b_1, \ldots, b_m; c; z_1, \ldots, z_m] \\ &= \sum_{j_1, \ldots, j_m = 0}^{\infty} \frac{(b_1)_{j_1} \cdots (b_m)_{j_m} z_1^{j_1} \cdots z_m^{j_m}}{(c)_{j_1 + \cdots + j_m} j_1! \cdots j_m!}, \end{aligned} \tag{13}$$

donde el símbolo Pochammer $(a)_n$ se define como $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) = (a)_{n-1}(a+n-1)$ para $n = 1, 2, \ldots$, y $(a)_0 = 1$. Para profundizar en resultados y propiedades de esta función se puede consultar a Exton [3, p. 42].

Expandiendo $\exp[c_r^2 \sum_{i=1}^p b_{ii}(1-2t\lambda_i)^{-1}/2]$ en forma de serie, la expresión (9) se puede escribir como

$$M_r(t) = \exp\left(-\frac{c_r^2 d^2}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c_r^2}{2}\right)^k \sum_{\kappa} \prod_{i=1}^{p} \frac{b_{ii}^{k_i}(1-2t\lambda_i)^{-m_i}}{k_i!}, \tag{14}$$

donde $\kappa = (k_1, \ldots, k_p)$, $k_1 \geq \cdots \geq k_p \geq 0$, $k_1 + \cdots + k_p = k$ y $m_i = k_i + n/2$, $i = 1, \ldots, p$. Escribiendo $(1-2t\lambda_i)^{-m_i}$ como

$$\begin{aligned} (1-2t\lambda_i)^{-m_i} &= (1-2t\lambda_1)^{-m_i} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{m_i} \left(1 - \frac{1-\lambda_1\lambda_i^{-1}}{1-2t\lambda_1}\right)^{-m_i} \\ &= (1-2t\lambda_1)^{-m_i} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{m_i} \sum_{r_i=0}^{\infty} \frac{(m_i)_{r_i}}{r_i!} \left(\frac{1-\lambda_1\lambda_i^{-1}}{1-2t\lambda_1}\right)^{r_i}, \end{aligned}$$

donde $|(1-\lambda_1\lambda_i^{-1})/(1-2t\lambda_1)| < 1$ para $i = 2, \ldots, p$ en (14) se obtiene

$$\begin{aligned} M_r(t) &= \exp\left(-\frac{c_r^2 d^2}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c_r^2}{2}\right)^k \sum_{\kappa} \frac{b_{11}^{k_1} \cdots b_{pp}^{k_p}}{k_1! \cdots k_p!} \frac{\lambda_1^{m-m_1}}{\prod_{i=2}^p \lambda_i^{m_i}} \\ &\times \sum_{r_2, \ldots, r_p = 0}^{\infty} \frac{(m_2)_{r_2} \cdots (m_p)_{r_p}}{r_2! \cdots r_p!} \frac{(1-\lambda_1\lambda_2^{-1})^{r_2} \cdots (1-\lambda_1\lambda_p^{-1})^{r_p}}{(1-2t\lambda_1)^{m+r}} \end{aligned}$$

donde $m = m_1 + \cdots + m_p$ y $r = r_2 + \cdots + r_p$.

Sustituyendo la ecuación anterior en (8) e invirtiendo la expresión resultante, teniendo en cuenta que $(1-2t\lambda_1)^{-(m+r)}$ es la función generadora de momentos de una distribución gamma con parámetros $m+r$ y $2\lambda_1$, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.** *Sea $A$ la matriz de sumas de cuadrados y productos obtenida a partir de una muestra aleatoria de tamaño $N = n+1$ bajo el modelo (1). Sea $Y = \mathrm{tr}(A)$. Entonces la f.d.p. de $Y$ está dada por*

$$f(y) = \sum_{r=0}^{N} \binom{N}{r} \epsilon^r (1-\epsilon)^{N-r} f_r(y),\ y > 0,$$

*donde*

$$\begin{aligned} f_r(y) &= \exp\left(-\frac{c_r^2 d^2}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c_r^2}{2}\right)^k \sum_{\kappa} \frac{b_{11}^{k_1} \ldots b_{pp}^{k_p}}{k_1! \cdots k_p!} \frac{\exp(-y/2\lambda_1) y^{m-1}}{2^m \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_p^{m_p} \Gamma(m)} \\ &\quad \times \mathbf{\Phi}_2^{(p-1)} \left[ m_2, \ldots, m_p; m; \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{y}{2}, \ldots, \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_p}\right)\frac{y}{2} \right], \end{aligned}$$

*y $\mathbf{\Phi}_2^{(p-1)}$ se define como en (13).*

## 4 La densidad y los polinomios zonales

Expresando $\det(I_p - 2t\Sigma)^{-n/2}$ en términos de polinomios zonales

$$\begin{aligned} \det(I_p - 2t\Sigma)^{-n/2} &= \eta^{np/2} \det(\Sigma)^{-n/2} (1-2\eta t)^{-n/2} \\ &\quad \times \det(I_p - (1-2\eta t)^{-1}(I_p - \eta\Sigma^{-1}))^{-n/2} \\ &= \eta^{np/2} \det(\Sigma)^{-n/2} (1-2\eta t)^{-n/2} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \frac{(n/2)_\kappa C_\kappa(I_p - \eta\Sigma^{-1})}{(1-2\eta t)^k k!}, \end{aligned} \tag{15}$$

donde $\kappa = (k_1, \ldots, k_p)$, $k_1 + \cdots + k_p = k$, $k_1 \geq \cdots \geq k_p \geq 0$ y $C_\kappa$ es un polinomio zonal de orden $k$ (Muirhead [11, p. 227 ], Gupta y Nagar [8, p. 29]). Además $0 < \eta < \infty$ y se elige de manera que la serie dada en (15) sea convergente, es decir, $||I_p - \eta\Sigma^{-1}|| < 1 - 2\eta t$. Ahora

$$\begin{aligned} &\frac{c_r^2}{2} \boldsymbol{\nu}' \Sigma^{-1} (\Sigma^{-1} - 2tI_p)^{-1} \Sigma^{-1} \boldsymbol{\nu} \\ &= \frac{c_r^2}{2} \eta (1-2\eta t)^{-1} \boldsymbol{\nu}' \Sigma^{-1} (I_p - (1-2\eta t)^{-1}(I_p - \eta\Sigma^{-1}))^{-1} \Sigma^{-1} \boldsymbol{\nu} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{j,r} (1-2\eta t)^{-j}, \quad ||I - \eta\Sigma^{-1}|| < 1, \end{aligned}$$

donde

$$\alpha_{j,r} = \frac{c_r^2}{2}\eta\boldsymbol{\nu}'\Sigma^{-1}(I_p - \eta\Sigma^{-1})^{j-1}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\nu}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\exp\left[\frac{c_r^2}{2}\boldsymbol{\nu}'\Sigma^{-1/2}(I_p - 2t\Sigma)^{-1}\Sigma^{-1/2}\boldsymbol{\nu}\right] &= \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,r}(1-2\eta t)^{-j}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\beta_{j,r}(1-2\eta t)^{-j}, \qquad (16)
\end{aligned}$$

donde $\beta_0 = 1$, y

$$\beta_{j,r} = \frac{1}{j}\sum_{\ell=1}^{j}\ell\alpha_{\ell,r}\beta_{j-\ell,r}, \quad j = 1, 2, \ldots\ . \qquad (17)$$

Reemplazando (15) y (16) en (9) se obtiene que

$$\begin{aligned}
M_r(t) &= \exp\left(-\frac{c_r^2 d^2}{2}\right)\eta^{np/2}\det(\Sigma)^{-n/2} \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{j,r}\sum_{\kappa}\frac{(n/2)_\kappa C_\kappa(I_p - \eta\Sigma^{-1})}{(1-2\eta t)^{n/2+j+k}k!}. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Sustituyendo (18) en (8) e invirtiendo la expresión resultante, teniendo en cuenta que $(1-2\eta t)^{-(n/2+j+k)}$ es la función generadora de momentos de una distribución gamma con parámetros $n/2 + j + k$ y $2\eta$, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.** *Sea $A$ la matriz de sumas de cuadrados y productos obtenida a partir de una muestra aleatoria de tamaño $N = n + 1$ bajo el modelo (1). Entonces la f.d.p. de $Y = \mathrm{tr}(A)$ está dada por*

$$f(y) = \sum_{r=0}^{N}\binom{N}{r}\epsilon^r(1-\epsilon)^{N-r}f_r(y),\ y > 0,$$

*donde*

$$\begin{aligned}
f_r(y) &= \eta^{np/2}\det(\Sigma)^{-n/2}\exp\left(-\frac{c_r^2 d^2}{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{j,r} \\
&\quad \times \sum_{\kappa}\frac{(n/2)_\kappa C_\kappa(I_p - \eta\Sigma^{-1})}{k!}\frac{y^{n/2+j+k-1}\exp(-y/2\eta)}{(2\eta)^{n/2+j+k}\Gamma\left(n/2+j+k\right)}
\end{aligned}$$

*con $\beta_{0,r} = 1$ y $\beta_{j,r}$ se calcula a partir de (17).*

**Agradecimientos:** Esta investigación fue financiada por el Comité para el Desarrollo de la Investigación, Universidad de Antioquia bajo el proyecto de investigación no. IN505CE.

## Referencias

[1] M. Aitkin and G. T. Wilson: Mixture models, outliers, and the EM algorithm. Technometrics. Vol 2, 1980, pp. 325–331.

[2] A. K. A. Amey: Robustness of the multiple correlation coefficient when sampling from mixture of two multivariate normal populations. Communications in Statistics-Simulation and Computation. Vol 19, n. 4, 1990, pp. 1443–1457.

[3] H. Exton: Multiple Hypergeometric Functions and Applications, Ellis Horwood, Chichester, 1976.

[4] B. S. Everitt and D. J. Hand: Finite mixture distributions. Monographs on Applied Probability and Statistics, Chapman & Hall, London-New York, 1981.

[5] A. L. Cicchinelli: The composite of two Gaussian distributions as a model for blood pressure distributions in man. Ph. D. Dissertation, University of Michigan, 1963.

[6] A. K. Gupta and D. G. Kabe: On some non-central distribution problems for the mixture of two normal populations. Metrika. Vol. 38, 1991, pp. 1–10.

[7] A. K. Gupta and D. G. Kabe: Distributions of Hotelling's $T^2$ and multiple and partial correlation coefficients for the mixture of two multivariate Gaussian populations. Statistics. Vol 32, n. 4, 1999, pp. 331–339.

[8] A. K. Gupta and D. K. Nagar, Matrix Variate Distributions, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.

[9] A. M. Mathai: Moments of the trace of a noncentral Wishart matrix. Communications in Statistics-Theory and Methods. Vol 9, n. 8, 1980, pp. 795–801.

[10] G. J. McLachlan and K. E. Basford: Mixture Models: Inference and Applications to Clustering, Marcel Dekker, Inc., New York, 1988.

[11] R. J. Muirhead: Aspects of Multivariate Statistical Theory, John Wiley & Sons, New York, 1982.

[12] E. A. Murphy and D. R. Bolling: Testing of single locus hypotheses where there is incomplete separation of the phenotypes. American Journal of Human Genetics. Vol 19, 1967, pp. 322-334.

[13] A. M. Orlando: A mixing analysis of bekesy-tested air-conduction an bone-conduction human hearing thresholds, Ph.D. Dissertation, Yale University, 1970.

[14] C. R. Rao: The utilization of multiple measurements in problems of biological classification. Journal of the Royal Statistical Society, Series B. Vol 10, 1948, pp. 159–203.

[15] D. K. Nagar and María Eugenia Castañeda: Distribution of correlation coefficient under mixture normal model. Metrika, Vol 55, n. 3, 2002, pp. 183–190.

[16] M. S. Srivastava: On the distribution of Hotelling's $T^2$ and multiple correlation $R^2$ when sampling from a mixture of two normals. Communications in Statistics-Theory and Methods. Vol 12, n. 13, 1983, pp. 1481–1497.

[17] M. S. Srivastava and H. M. Awan: On the robustness of Hotelling's $T^2$-test and distribution of linear and quadratic forms in sampling from a mixture of two multivariate normal populations. Communications in Statistics-Theory and Methods. Vol. 11, n. 1, 1982, pp. 81–107.

[18] W. Y. Tan: On the distribution of the sample covariance matrix from a mixture of normal densities. South African Statistical Journal. Vol 12, 1978, pp. 47–55.

[19] D. M. Titterington, A. F. M. Smith and U. E. Makov: Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions, John Wiley & Sons, New York, 1985.

[20] S. Farlow: Partial differential equations for scientists and engineers. Dover, New York, 1982.

[21] Gilbarg, G, and Trudinger, N. S. : Elliptic partial differential equation of second order, second edition. Springer,1983.

[22] L. Gărding: The Dirichlet problem. The mathematical intelligencer. Vol 2, n. 1, 1979, pp. 43-53

[23] K. Gustafson and T. Abe: The third boundary condition –was it Robin's? The mathematical intelligencer. Vol 20, n. 1, 1998, pp. 63-71

[24] K.Gustafson: Partial differerential equations and Hilbert space methods, John Wiley & Sons, New York, 1987

[25] Payne, L. E. : Some isoperimetric inequalities in the torsion problem for multiple connected regions. Studdies in mathematical analysis and related topics, pp. 270-280, 1962.

[26] Pólya, G. and Szegö, G. : Isoperimetric inequalities in mathematical physics. Annals of mathematics studies, No. 27, Princeton Univ. Press. 1951.

*Dirección de los autores:* María Eugenia Castañeda, Universidad de Antioquia, mariac@matematicas.udea.edu.co. — Daya K. Nagar, Universidad de Antioquia, nagar@matematicas.udea.edu.co.