

Topología algebraica basada en nudos

Józef H. Przytycki
George Washington University

Recibido May. 25, 2010 Aceptado Jun. 01, 2010

Abstract

In this paper we discuss several open problems in classical knot theory and we develop techniques that allow us to study them: Lagrangian tangles, skein modules and Burnside groups of links. We start from the definition of the Fox p -colorings, and rational moves on links. We formulate several elementary conjectures including the Nakanishi 4-move conjecture of 1979. In the second part we define a symplectic structure on the colorings of the boundary of a tangle and interpret a tangle as a Lagrangian in this structure. In the third part we discuss the skein modules, or as I prefer to say more generally, algebraic topology based on knots. We discuss, in more detail, skein modules related to the (deformations) of 3-moves and related to the Montesinos-Nakanishi 3-move problem. Finally, we show how to use Burnside groups of knots to disprove the 3-move conjecture.

Keywords: knot theory, Fox p -coloring, Lagrangian tangles, Nakanishi conjecture

MSC(2000): 57M25, 57M27

Resumen

En este artículo se discuten varios problemas abiertos en teoría de nudos. Además se definen las p -coloraciones de Fox y se discuten los movimientos racionales en entrelazados para introducir la estructura simpléctica sobre la frontera de un entrelazado, de tal forma que los entrelazados den lugar a lagrangianos en el espacio simpléctico. El objetivo final es abordar los módulos de madeja, discutiendo la topología algebraica basada en los nudos e introduciendo los módulos de madeja relacionados con los 3-movimientos y la conjetura de Montesinos-Nakanishi. Se introducirá al lector a todos estos temas haciendo un pequeño recorrido en el mundo de los módulos de madeja.

Palabras y frases claves: Nudo, coloración de Fox, n -movimiento, lagrangiano, módulo de madeja, conjetura de Nakanishi

1 Introducción

La teoría de nudos tiene más de 200 años de antigüedad: los primeros científicos que consideraron los nudos como objetos matemáticos fueron A. Vandermonde (1771) y C.F. Gauss (1794). No obstante el impresionante crecimiento de esta teoría, existen preguntas fundamentales que pueden ser formuladas de manera muy sencilla y de las cuales todavía no se tiene respuesta. En la primera sección del presente artículo se discutirán varios de estos problemas, describiendo con detalle la conjetura de Montesinos y Nakanishi. Estos problemas conducen a estructuras matemáticas sofisticadas (algunas de estas serán aquí descritas).

En la segunda sección se describirán las p -coloraciones de Fox y los movimientos racionales en entrelazados; para culminar en la introducción de la estructura simpléctica sobre la frontera de un entrelazado, de tal forma que los entrelazados dan lugar a lagrangianos en el espacio simpléctico.

Finalmente, la tercera sección nos introducirá a la historia de los módulos de madeja. En esta última se abordarán los módulos de madeja, o como prefiero decir de una manera más general, se discutirá sobre la topología algebraica basada en nudos. Se introduce con más detalle los módulos de madeja relacionados con los 3-movimientos y la conjetura de Montesinos-Nakanishi, se dará la definición general y se hará un pequeño recorrido en el mundo de los módulos de madeja.

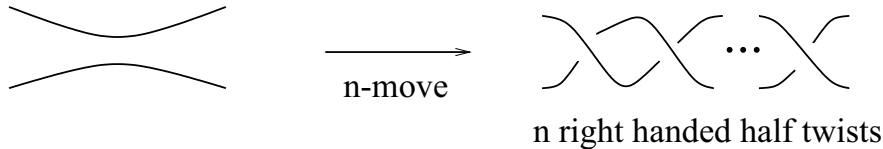
2 Problemas abiertos en teoría de nudos que cualquiera puede intentar resolver

2.1 n -movimientos y (m, n) -movimientos

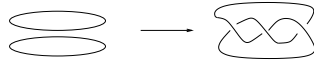
Los enlaces son círculos encajados en \mathbb{R}^3 , módulo deformaciones topológicas. Esto es, dos enlaces son equivalentes si se puede obtener uno a partir del otro mediante deformaciones en el espacio, sin permitir cortar y pegar. Los enlaces son representados en el plano mediante sus respectivos diagramas planos que son clases de isotopía de la proyección del enlace sobre \mathbb{R}^2 .

Primero debemos introducir el concepto de un n -movimiento sobre un enlace. Note que ésta no es una deformación topológica, así que puede que cambie el tipo de enlace con el que trabajaremos.

Definición 1. *Un n -movimiento sobre un enlace es un cambio local en el enlace como se ilustra en la siguiente figura*

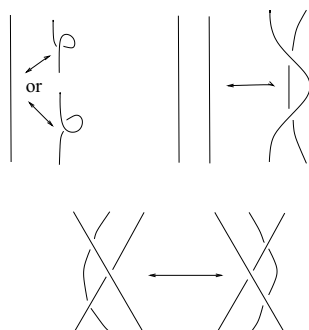


Convencionalmente la parte del enlace que queda afuera de la vecindad en el que efectuamos el movimiento queda intacta. El siguiente es un ejemplo de un 3-movimiento:



Definición 2. *Decimos que dos enlaces L_1, L_2 son equivalentes usando n -movimientos si podemos obtener uno a partir del otro a través de una sucesión finita de n -movimientos y sus inversos (a los que llamamos $-n$ -movimientos).*

Si trabajamos con los diagramas de enlaces, entonces las manipulaciones de los enlaces en el espacio se pueden traducir al respectivo diagrama a través del uso de movimientos de Reidemeister. Es decir, dos diagramas representan al mismo enlace en el espacio si y sólo si uno se puede obtener a partir del otro mediante movimientos de Reidemeister:



Así también decimos que dos diagramas D_1 y D_2 son equivalentes usando n -movimientos si uno se puede obtener a partir del otro mediante n -movimientos, sus inversos y mediante movimientos de Reidemeister. Para ilustrar esto nótese que el movimiento $\times \rightarrow \times$ es una consecuencia de un 3-movimiento y un movimiento de Reidemeister del tipo II (ver figura siguiente).



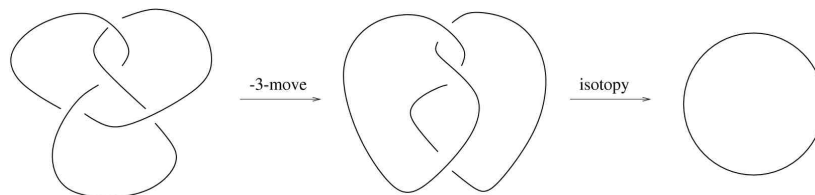
Conjetura 1 (Montesinos-Nakanishi). *Cualquier enlace es equivalente a un enlace trivial (unión disyunta de circunferencias), usando 3-movimientos.*

En 1981 Yasutaka Nakanishi presentó esta conjetura. Anteriormente José Montesinos había analizado los 3-movimientos y su relación con las cubiertas ramificadas diedrales de 3-variedades, también había formulado una pregunta relacionada con esta conjetura aunque diferente.

Ejemplo 1. *Los nudos trébol (derecho e izquierdo) son equivalentes usando 3-movimientos al enlace trivial de dos componentes:*



El nudo de figura ocho es equivalente usando 3-movimientos al nudo trivial:



Posteriormente, en esta sección, mostraremos que enlaces triviales con distinto número de componentes no son equivalentes usando 3-movimientos. Para llegar a esta conclusión necesitaremos un invariante de enlaces indiferente a los 3-movimientos y que distinga distintos enlaces triviales; tal invariante se denomina la 3-coloración de Fox. En esta sección hablaremos de este invariante de una manera muy simple y en la segunda sección hablaremos de su generalización, la n -coloración de Fox y de las coloraciones de Alexander-Burau-Fox. A continuación presentaremos algunas otras conjeturas relacionadas con la conjetura Montesinos-Nakanishi.

Conjetura 2. *Cualquier 2-entrelazado es equivalente usando 3-movimientos a uno de los cuatro 2-entrelazados de la figura siguiente. En estos permitimos componentes triviales adicionales.*



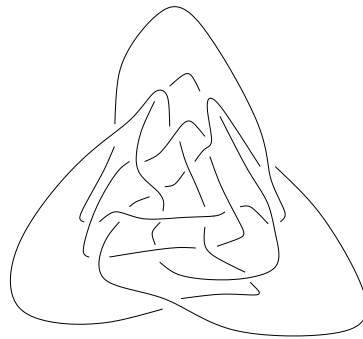
La conjetura de Montesinos-Nakanishi es una consecuencia de la conjetura 2. Más generalmente, si la conjetura 2 se cumple para alguna clase de 2-entrelazados, entonces la conjetura 1 se sigue para enlaces obtenidos mediante la cerradura de cualquier entrelazado de esa clase, sin introducir ningún cruce nuevo. Los entrelazados más interesantes y sencillos para los que se cumple la conjetura 2 son los entrelazados algebraicos en el sentido de Conway (en adelante los llamaremos entrelazados 2-algebraicos y presentaremos su generalización en la próxima sección). La Conjetura 2 se cumple para entrelazados 2-algebraicos por inducción, dejaremos esto como ejercicio de entrenamiento para el lector. La definición formal es la siguiente (compárese [10],[4]):

Definición 3. *Los entrelazados 2-algebraicos son la familia más pequeña de 2-entrelazados que satisface:*

- *Cualquier 2-entrelazado con a lo más un cruce es 2-algebraico.*
- *Si A y B son entrelazados 2-algebraicos entonces $r^i(A)*r^j(B)$ es 2-algebraico; donde r denota la rotación de 90° a lo largo del eje z y $*$ denota la composición (concatenación horizontal) de entrelazados. Por ejemplo*

Un enlace es 2-algebraico si se obtiene de un entrelazado 2-algebraico al unir los extremos sin introducir nuevos cruces.

Mis estudiantes Qi Chen y Tatsuya Tsukamoto demostraron la conjetura de Montesinos-Nakanishi para varias familias especiales de enlaces [9], [45], [42]. En particular Chen demostró que la conjetura es cierta para todos los enlaces de cinco trenzas, posiblemente excepto para una familia representada por el cuadrado del centro del grupo de 5-trenzas $\Delta^4 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^{10}$. También encontró un enlace que es la cerradura de una 5-trenza, con 20 cruces, equivalente por 3-movimientos a Δ^4 . Hasta ahora es el contraejemplo a la conjetura Montesinos-Nakanishi más pequeño que se conoce. Ver figura siguiente



Anteriormente en 1994, Nakanishi sugirió el doble paralelo de los anillos borromeos (tiene 24 cruces) como un contraejemplo posible (ver figura 1).

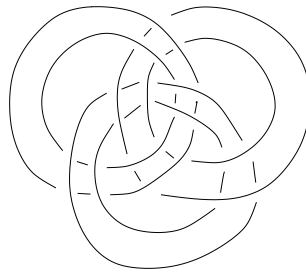
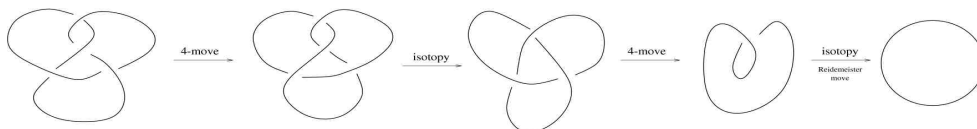


Figura 1:

Conjetura 3 (Nakanishi, 1979). *Cualquier nudo es equivalente al nudo trivial, usando 4-movimientos.*

Ejemplo 2. *Las reducciones de los nudos trébol y de figura ocho al nudo trivial se ilustra en la figura que viene a continuación*



Se sabe que no es cierto que cualquier enlace es equivalente usando 5-movimientos a enlaces triviales; uno puede demostrar por medio del polinomio de Jones que el nudo de figura 1 no es equivalente usando 5-movimientos a ningún enlace trivial. Sin embargo, podemos presentar un nuevo movimiento más sutil llamado $(2, 2)$ -movimiento $\begin{matrix} \times \times \\ \times \times \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix}$, de tal forma que un 5-movimiento es la combinación de un $(2, 2)$ -movimiento y de la reflexión de este, a la cual llamaremos un $(-2, -2)$ -movimiento $\begin{matrix} \times \times \\ \times \times \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix}$, esto se ilustra en la figura siguiente (compárese [18], [31]).

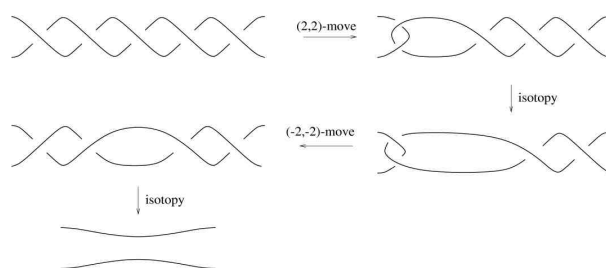
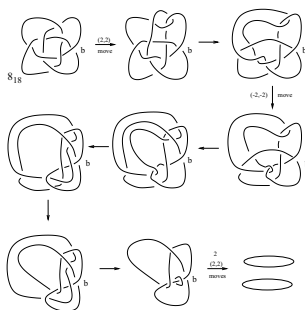


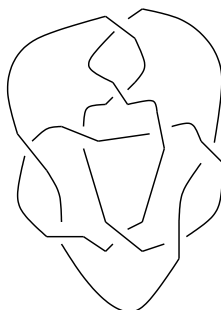
Figura 2:

Conjetura 4 (Harikae, Nakanishi, 1992). *Cualquier enlace es equivalente a un enlace trivial, usando $(2, 2)$ -movimiento .*

Como en el caso de los 3-movimientos, se puede demostrar usando inducción que la conjetura se cumple para enlaces 2-algebraicos (algebraicos en el sentido de Conway). También se sabe que la conjetura se cumple para todos los enlaces con hasta 8 cruces. La clave del argumento en esta demostración es notar (véase Conway [10]) que cualquier enlace con hasta 8 cruces (distinto a 8_{18} ver la nota 1 al pie de página) es 2-algebraico. La reducción del nudo 8_{18} al nudo trivial con dos componentes se debe a mis estudiantes Jarek Buczyński y Mike Veve. Ver figura siguiente



El nudo más pequeño que no se ha reducido todavía es el nudo 9_{49} (próxima figura). ¡Tal vez el lector lo pueda reducir!



Para establecer otra pregunta abierta (de la cual no estoy convencido que la respuesta sea positiva, por lo tanto no la llamaré una conjetura), definamos un (p, q) -movimiento (o un movimiento del tipo (p, q)) como una modificación local de un enlace como el mostrado en la figura 3. Decimos que dos enlaces L_1, L_2 son (p, q) -equivalentes si uno puede pasar de uno al otro mediante un número finito de movimientos de los tipos (p, q) , (q, p) , $(-p, -q)$ y $(-q, -p)$.

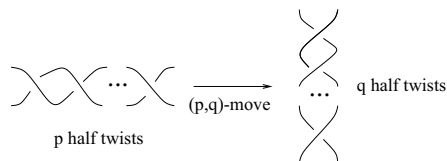


Figura 3:

Problema 1 ([26]; Problem 1.59(7), 1995). *¿Es cierto que cualquier enlace es equivalente usando $(2, 3)$ -movimientos a un enlace trivial?*

Ejemplo 3. *La reducción de los nudo trébol y de figura ocho se muestran en la figura 4. La reducción de los anillos Borromeanos se muestra en la figura 5.*

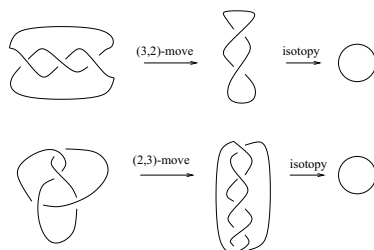


Figura 4:

En general, se puede usar un argumento inductivo muy sencillo para demostrar que los enlaces 2-algebraicos son equivalentes usando $(2, 3)$ -movimientos

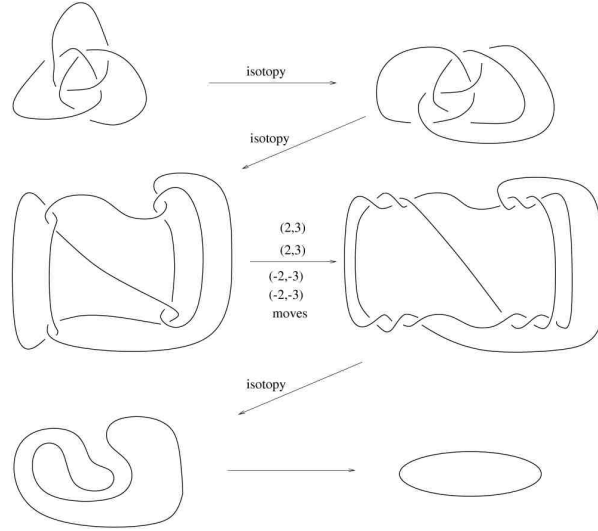


Figura 5:

a enlaces triviales. En la figura 6 se muestra por qué los anillos borromeos son 2-algebraicos.

Si se reemplazan los discos negros con los cruces adecuados se puede demostrar que todos los enlaces con hasta ocho cruces, excepto 8_{18} , son 2-algebraicos. Así, similarmente al caso de la equivalencia por $(2, 2)$ -movimientos, el único enlace con hasta 8 cruces que todavía tiene que verificarse es el nudo 8_{18} . Nadie ha intentado seriamente probar esto, tal vez el lector lo quiera intentar.

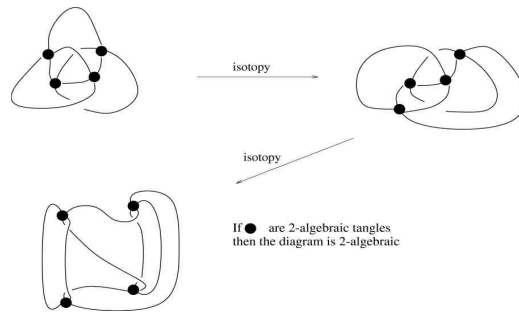


Figura 6:

Para demostrar que el nudo 8_{18} no es 2-algebraico uno debe considerar la cubierta ramificada de dos hojas de S^3 con dicho nudo como conjunto de ramificación, $M_{8_{18}}^{(2)}$. Montesinos demostró que los nudos algebraicos tienen como cubiertas a las variedades de gráficas de Waldhausen [28]. Bonahon y Siebenmann demostraron ([4], Chapter 5) que $M_{8_{18}}^{(2)}$ es una 3-variedad hiperbólica, así que no puede ser una gráfica.

2.2 Coloraciones de Fox

El invariante llamado 3-coloración que utilizaremos para mostrar que distintos enlaces triviales no son equivalentes usando 3-movimientos fue introducido por R.H. Fox¹ aproximadamente en 1956, mientras enseñaba teoría de nudos a los estudiantes de pregrado en Haverford College (“mientras intentaba hacer que el tema fuese más accesible para todos” [12]). Es un método agradable de codificar representaciones del grupo fundamental del complemento de un enlace en términos del grupo de simetrías de un triángulo equilátero, pero su representación no es necesaria para la definición ni para la mayor parte de las aplicaciones de las 3-coloraciones. (ver [11], [12], [16], [17]).

Definición 4. [3-coloración de Fox para el diagrama de un enlace] Consideremos la coloración del diagrama de un enlace utilizando los colores rojo (r), verde (v) y azul (a), de tal manera que cada arco del diagrama es coloreado con un color de modo que en cada cruce uno encuentre sólo arcos con un solo color o arcos con los tres colores. Dicha coloración se llama una 3-coloración de Fox. Si todo el diagrama tiene el mismo color decimos que es una coloración trivial. Definimos $tri(D)$ como el número de diferentes 3-coloraciones de Fox para D .

Ejemplo 4. $tri(\bigcirc) = 3$ puesto que el diagrama de un nudo trivial sólo tiene coloraciones triviales.

$tri(\bigcirc\bigcirc) = 9$ y, más generalmente, para el diagrama de un enlace con n componentes, U_n , se tiene $tri(U_n) = 3^n$.

Para un diagrama estándar de un nudo trébol tenemos tres coloraciones triviales y 6 coloraciones no triviales, una de ellas se ilustra en la figura que sigue (las demás se obtienen permutando los colores). Como consecuencia $tri(\text{trébol}) = 3 + 6 = 9$

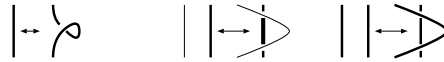


Note que los diferentes colores en la figura anterior se representan aquí mediante líneas con grosores diferentes.

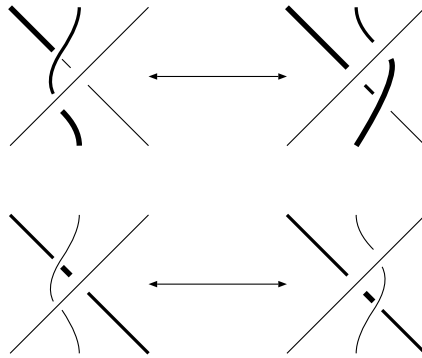
Las 3-coloraciones se definieron para diagramas de enlaces, pero además son un invariante de enlaces. La prueba consiste en mostrar que $tri(D)$ es inmutable a los movimientos de Reidemeister.

La invarianza bajo los movimientos R_1 y R_2 se muestra en la figura siguiente:

¹Ralph Hartzler Fox nació el 24 de marzo de 1913 en Morrisville, Pa. El asistió a la universidad Swarthmore dos años mientras estudiaba piano en el Conservatorio de Música Leefson de Filadelfia. Obtuvo su maestría en Johns Hopkins University y el doctorado en Princeton University en 1939 bajo la supervisión de Solomon Lefschetz. Fox se casó mientras todavía era un estudiante con Cynthia Atkinson. Tuvieron un hijo, Robin. El año posterior a su graduación del doctorado lo pasó en el Instituto para Estudios Avanzados de Princeton. Fue profesor en las universidades de Illinois y Syracuse antes de regresar a formar parte del profesorado de Princeton en 1945, en el cual permaneció hasta su muerte el 23 de diciembre de 1973 en el Hospital Graduado de University of Pennsylvania, mientras le practicaban una cirugía a corazón abierto.



La invarianza bajo los movimientos R_3 se ilustra a continuación:



La siguiente propiedad de las 3-coloraciones de Fox es la clave para demostrar que diferentes enlaces triviales no son equivalentes usando 3-movimientos.

Lema 1 ([29]). *tri(D) es invariante mediante un 3-movimiento.*

La demostración del lema se ilustra con el siguiente gráfico:



Este lema también explica el hecho de que el nudo trébol sólo tiene 3-coloraciones de Fox triviales: éste es equivalente usando 3-movimientos al nudo trivial con dos componentes (Ejemplo 4).

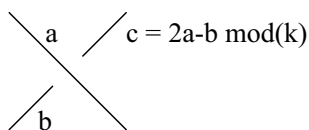
En la siguiente sección ubicaremos la teoría de las coloraciones de Fox en un contexto más general (y sofisticado), y la aplicaremos al análisis de los 3-movimientos (así como de los movimientos de los tipos (2,2) y (2,3)) para n -entrelazados. La interpretación de las coloraciones de entrelazados como lagrangianos en espacios simplécticos será nuestra principal (y nueva) herramienta. Posteriormente discutiré otro motivo para estudiar los 3-movimientos: Estudiar los módulos de madeja basados en 3-movimientos.

3 Aproximación lagrangiana de las p -coloraciones de Fox de entrelazados.

En esta sección introducimos una estructura simpléctica sobre la frontera de un entrelazado de tal manera que el entrelazado produzca lagrangianos en el espacio

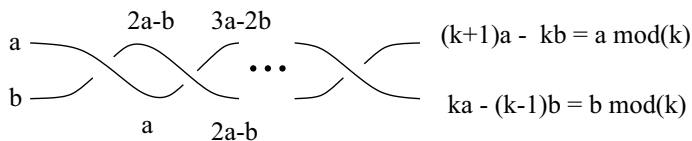
de las coloraciones de Fox. Estos lagrangianos pueden utilizar para analizar movimientos en entrelazados si consideramos el espacio de sus coloraciones y además la coloración en los puntos de la frontera del entrelazado; de esto se hablará en detalle en esta sección posteriormente. Primero definiremos las k -coloraciones de Fox.

Definición 5. (i) Decimos que el diagrama de un enlace (o entrelazado) tiene una k -coloración si cada uno de los segmentos del diagrama se puede colorear (etiquetar) con uno de los números $0, 1, \dots, k - 1$ (formando un grupo \mathbb{Z}_k) de tal manera que, en cada uno de los cruces, la suma de los colores de los arcos correspondientes al segmento del nudo que pasa por abajo es dos veces el color del segmento que pasa por arriba, módulo k ; ver la figura siguiente:



(ii) El conjunto de las k -coloraciones de un diagrama forma un grupo abeliano, denotado $Col_k(D)$. La cardinalidad del grupo se denotará $col_k(D)$. Para un entrelazado de n hilos T , cada k -coloración de T induce una coloración de los puntos en la frontera de T , así tenemos el homomorfismo $\psi : Col_k(T) \rightarrow \mathbb{Z}_k^{2n}$.

Es un ejercicio agradable mostrar que $Col_k(D)$ es inmutable a los movimientos de Reidemeister y también de los k -movimientos como lo sugiere el gráfico que sigue



Enfoquemonos ahora en el hecho de que un k -movimiento preserva el espacio de las k coloraciones de Fox y a las conjeturas descritas relacionadas con la trivialización de enlaces. Hemos discutido la conjetura de los 3-movimientos y la de los 4-movimientos para nudos (esta última no se cumple para enlaces).² Como ya se ha establecido, no se puede simplificar cualquier enlace utilizando 5-movimientos, pero un 5-movimiento es una combinación de $(2, 2)$ movimientos y estos movimientos pueden ser suficientes para reducir cualquier enlace. De manera similar, no cualquier enlace se puede reducir via 7-movimientos, pero

²Kawauchi sugirió que para enlaces uno debería conjeturar que cualesquiera dos enlaces homotópicos son equivalentes usando 4-movimientos.

un 7-movimiento es la combinación de $(2, 3)$ -movimientos³ lo cual podría ser suficiente para la reducción.

Consideremos ahora el caso de un p -movimiento, donde p es un número primo. Sugerimos considerar *movimientos racionales*, esto es, la sustitución de un $\frac{p}{q}$ -entrelazado racional de Conway en lugar del entrelazado identidad⁴. Para nosotros es importante notar que $Col_p(D)$ es preservado por los $\frac{p}{q}$ -movimientos. La figura 7 ilustra el hecho de que $Col_{13}(D)$ es inalterable ante $\frac{13}{5}$ -movimientos.

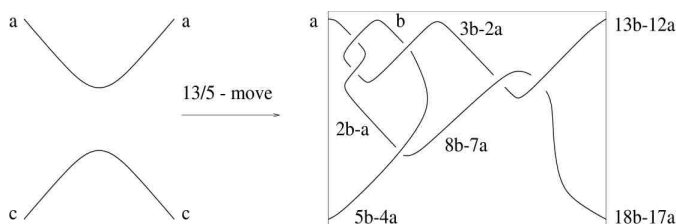


Figura 7:

También notemos que los (m, q) -movimientos son equivalentes a los $\frac{mq+1}{q}$ -movimientos (figura 8) así que el espacio de las $(mq + 1)$ -coloraciones de Fox también es invariante.

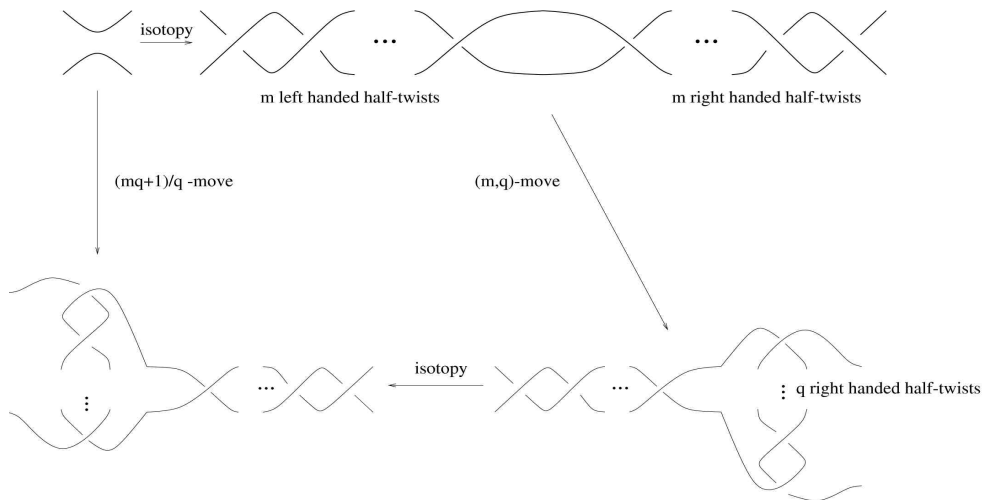


Figura 8:

³Para ser más precisos: un 7-movimiento es una combinación de los movimientos $(-3, -2)$ y $(2, 3)$; ver figura 2.

⁴Este movimiento fue considerado por primera vez por J. M. Montesinos; véase Y. Uchida [48].

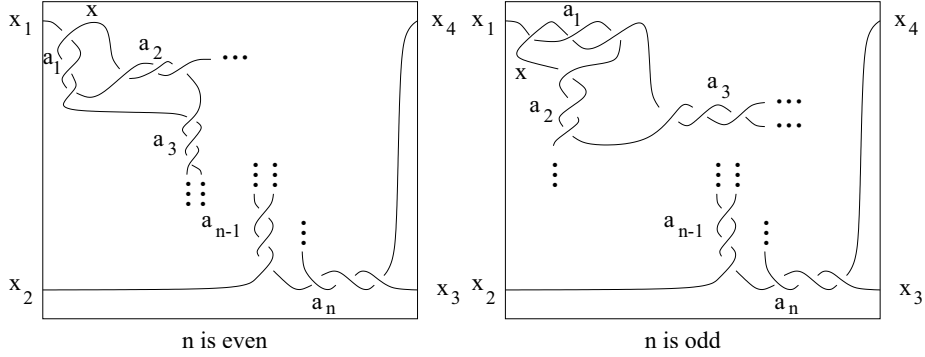


Figura 9:

Los 2-entrelazados mostrados en la figura 9 se denotarán conforme a la convención de Conway $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Un entrelazado racional es un $\frac{p}{q}$ -entrelazado si $\frac{p}{q} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \dots + \frac{1}{a_1}}$.⁵ Conway demostró que dos entrelazados racionales son isotópicos en su entorno (con la frontera fija) si y sólo si sus pendientes son iguales (véase [25]).

Para una coloración de Fox de un $\frac{p}{q}$ -entrelazado racional con colores en las orillas x_1, x_2, x_3, x_4 (figura 9), se tiene $x_4 - x_1 = p(x - x_1)$, $x_2 - x_1 = q(x - x_1)$ y $x_3 = x_2 + x_4 - x_1$. Para una coloración no trivial ($x_1 \neq x$) se tiene $\frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{p}{q}$.

Conjetura 5. *Sea p un número primo fijo, entonces*

- (i) *Cualquier enlace se puede reducir a un enlace trivial mediante $\frac{p}{q}$ -movimientos (donde q es cualquier entero).*
- (ii) *Existe una función $f(n, p)$ tal que cualquier entrelazado de n hilos se puede reducir a uno de los $f(n, p)$ modelos básicos de los entrelazados de n hilos (permitiendo componentes triviales adicionales) mediante $\frac{p}{q}$ -movimientos.*

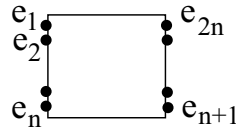
Primero observemos que es suficiente considerar $\frac{p}{q}$ -movimientos en los que $|q| \leq \frac{p}{2}$, puesto que a partir de estos se pueden crear otros $\frac{p}{q}$ -movimientos. A saber, tenemos $\frac{p}{p-q} = 1 + \frac{1}{-1+\frac{p}{q}}$ y $\frac{p}{-(p+q)} = -1 + \frac{1}{1+\frac{p}{q}}$. Por lo que los $\frac{p}{q}$ -movimientos generan a los $\frac{p}{-q \pm p}$ -movimientos. Además sabemos que cuando p es impar el $\frac{p}{1}$ -movimiento es una combinación de $\frac{p}{2}$ y $\frac{p}{-2}$ -movimientos (ver figura 2). Entonces, de hecho, las conjeturas de los 3-movimientos, (2,2)-movimientos y (2,3)-movimientos son casos particulares de la conjetura 5. Para el caso de $p = 11$ se tiene que $\frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2}$, $\frac{11}{3} = 4 - \frac{1}{3}$, $\frac{11}{4} = 3 - \frac{1}{4}$, $\frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5}$. Así tenemos la siguiente conjetura.

⁵El cociente $\frac{p}{q}$ se conoce como la pendiente del entrelazado y puede asociarse fácilmente con la pendiente del disco meridiano del toro sólido que es la cubierta doble del entrelazado racional.

Conjetura 6. *Cualquier enlace se puede reducir a un enlace trivial (con el mismo espacio de 11-coloraciones) usando movimientos del tipo $(2, 5)$ y $(4, -3)$, sus inversos y sus reflexiones.*

Pero, ¿qué podemos decir del número $f(n, p)$? sabemos que, puesto que los $\frac{p}{q}$ -movimientos preservan las p -coloraciones, entonces $f(n, p)$ está acotado inferiormente por el número de subespacios de las p -coloraciones de los $2n$ puntos en las orillas de la entrelazado de n hilos, inducidas por cada una de las p -coloraciones de Fox en el correspondiente diagrama. (esto es, por el número de subespacios $\psi(\text{Col}_p(T))$ en \mathbb{Z}_p^{2n}). En [31] se observa que para los entrelazados de 2 hilos este número es $p + 1$ (incluso para este caso particular los argumentos fueron complicados). Para $p = 3$ y $n = 4$ el número de subespacios que se encontraron a partir del trabajo del estudiante Tatsuya Tsukamoto fue 40, ver [42]. Posteriormente, en un trabajo conjunto entre Mietek Dąbkowski y Tsukamoto calcularon 1120 subespacios $\psi(\text{Col}_3(T))$ en entrelazados de 4 hilos. Hasta allí llegaba nuestro conocimiento en la primavera del 2000. El 2 y 3 de mayo escuchamos las conferencias impartidas por J.Dymara y T.Januszkiewicz en los edificios de Tits, en el Centro de Banach en Varsovia, y nos dimos cuenta de que aquel tema podría estar relacionado con nuestro trabajo, le preguntamos a Tadek Januszkiewicz si él encontraba alguna relación y le hablamos de los números hasta entonces calculados: 4, 40, 1120 para $p = 3$. Inmediatamente nos contestó que era muy probable que estuviésemos contando el número de lagrangianos en el espacio simpléctico \mathbb{Z}_3^{2n-2} y que la fórmula para contarlos era $\prod_{i=1}^{n-1} (p^i + 1)$. Fue fácil construir una forma simpléctica siguiendo el procedimiento de Janek Dymara. A continuación describiremos la construcción de ésta y terminaremos la discusión de los tipos de entrelazados para los cuales se ha demostrado que $f(n, p) = \prod_{i=1}^{n-1} (p^i + 1)$.

Consideremos $2n$ puntos en un círculo (o un cuadrado) y un campo \mathbb{Z}_p para las p -coloraciones de un punto. Las coloraciones de los $2n$ puntos crean un espacio lineal \mathbb{Z}_p^{2n} . Considere la base e_1, \dots, e_{2n} ,



donde $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ y el 1 se encuentra en el i -ésimo lugar. Sea $\mathbb{Z}_p^{2n-1} \subset \mathbb{Z}_p^{2n}$ el espacio de vectores $\sum a_i e_i$ que satisfacen $\sum (-1)^i a_i = 0$ (llamada condición alternante). Considere la base f_1, \dots, f_{2n-1} de \mathbb{Z}_p^{2n-1} donde $f_k = e_k + e_{k+1}$. Por último, considere la forma simétrica de entrelazados ϕ sobre \mathbb{Z}_p^{2n-1} de nulidad 1 dada por la matriz

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

esto es,

$$\phi(f_i, f_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } |j - i| \neq 1 \\ 1 & \text{si } j = i + 1 \\ -1 & \text{si } j = i - 1. \end{cases}$$

Note que el vector $e_1 + e_2 + \dots + e_{2n}$ ($= f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} = f_2 + f_4 + \dots + f_{2n}$) es ϕ -ortogonal a cualquier otro vector. Si consideramos $\mathbb{Z}_p^{2n-2} = \mathbb{Z}_p^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$, donde el subespacio \mathbb{Z}_p está generado por $e_1 + \dots + e_{2n}$, esto es, \mathbb{Z}_p consiste de coloraciones monocromáticas (i.e. triviales), entonces ϕ nos lleva a la forma simpléctica $\hat{\phi}$ en \mathbb{Z}_p^{2n-2} . Ahora podemos analizar subespacios isotrópicos W de $(\mathbb{Z}_p^{2n-2}, \hat{\phi})$, esto es, subespacios en los que $\hat{\phi}$ es 0 ($W \subset \mathbb{Z}_p^{2n-2}$, $\phi(w_1, w_2) = 0$ para $w_1, w_2 \in W$). Los subespacios maximales isotrópicos de \mathbb{Z}_p^{2n-2} con dimensión $(n - 1)$ son llamados *subespacios lagrangianos* (o subespacios maximales completamente degenerados) y el número de estos es $\prod_{i=1}^{n-1} (p^i + 1)$.

Para $\psi : Col_p T \rightarrow \mathbb{Z}_p^{2n}$, la condición local para las coloraciones de Fox (Fig. 3.1) garantiza que para cualquier entrelazado, T , $\psi(Col_p T) \subset \mathbb{Z}_p^{2n-1}$. También garantiza que el espacio de las coloraciones triviales, \mathbb{Z}_p , siempre está contenido en $Col_p T$. Entonces ψ induce $\hat{\psi} : Col_p T/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p^{2n-2} = \mathbb{Z}_p^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$.

Nos encontramos ahora con la pregunta fundamental: ¿Qué subespacios de \mathbb{Z}_p^{2n-2} son producidos por entrelazados con n hilos? Responderemos a esta pregunta a continuación.

Teorema 1. $\hat{\psi}(Col_p T/\mathbb{Z}_p)$ es un subespacio lagrangiano de \mathbb{Z}_p^{2n-2} para la forma simpléctica $\hat{\phi}$.

La pregunta natural podría ser, dado cualquier subespacio lagrangiano ¿existirá un entrelazado que lo produzca? La respuesta es negativa para $p = 2$ y positiva para $p > 2$ [13]. Lo que anteriormente parecía muy difícil de contestar, incluso para entrelazados de dos hilos, ahora es un corolario:

Corolario 1. Para cualquier p -coloración de un entrelazado que satisface la propiedad alternante (i.e. que es un elemento de \mathbb{Z}_p^{2n-1}) existe un entrelazado de n hilos y una p -coloración que producen la coloración dada en las orillas. En otras palabras: $\mathbb{Z}_p^{2n-1} = \bigcup_T \psi_T(Col_p(T))$. Además, el espacio $\psi_T(Col_p(T))$ es de dimensión n .

Podemos decir que entendemos el valor de la función $f(n, p)$ de nuestra conjetura, pero ¿cuándo podremos demostrar la conjetura 5 para $f(n, p) = \prod_{i=1}^{n-1} (p^i + 1)$? De hecho, sabemos que para $p = 2$ no todo lagrangiano se puede producir y, de hecho, $f(n, 2) = \prod_{i=1}^{n-1} (2^i + 1)$. Para entrelazados racionales de 2 hilos la conjetura 5 se sigue casi directamente de la definición. Del mismo modo, la generalización a los 2-entrelazados algebraicos (entrelazados algebraicos en el sentido de Conway) tampoco es muy difícil. Para poder usar inducción para entrelazados con n hilos, $n > 2$, generalizaremos el concepto de entrelazado algebraico:

Definición 6. (i) Los entrelazados algebraicos de n hilos, o n -entrelazados algebraicos, son la familia más pequeña de entrelazados de n hilos que satisfacen: (0) Cualquier entrelazado de n hilos con a lo más un cruce es algebraico. (1) Si A y B son n -entrelazados algebraicos, entonces $r^i(A) * r^j(B)$ es un n -entrelazado algebraico; donde r denota la rotación con ángulo $\frac{2\pi}{2n}$ del entrelazado, y $*$ denota la composición de entrelazados.

(ii) Si en la condición (1), B se restringe a entrelazados con no más de k cruces, obtenemos la familia de (n, k) -entrelazados algebraicos.

(iii) Si un entrelazado de m hilos, T , se obtiene a partir de un (n, k) -entrelazado algebraico (respectivamente de un entrelazado algebraico de n hilos) a través de cerrar parcialmente las $(2n - 2m)$ orillas de éste, sin introducir ningún nuevo cruce, entonces a T se le llama un entrelazado de m hilos (n, k) -algebraico (respectivamente algebraico de n hilos). Si $m = 0$ tenemos un enlace (n, k) -algebraico (respectivamente n -algebraico).

La conjetura 5, se ha demostrado cuando $p = 3$ para entrelazados 3-algebraicos, ver [42], $f(3, 3) = 40$, y para los entrelazados $(4, 5)$ -algebraicos ver [45], $f(4, 3) = 1120$. En particular, la conjetura de Montesinos-Nakanishi se cumple para enlaces 3-algebraicos y para enlaces $(4, 5)$ -algebraicos. Los 40 entrelazados de 3 hilos básicos se muestran en la figura 10.

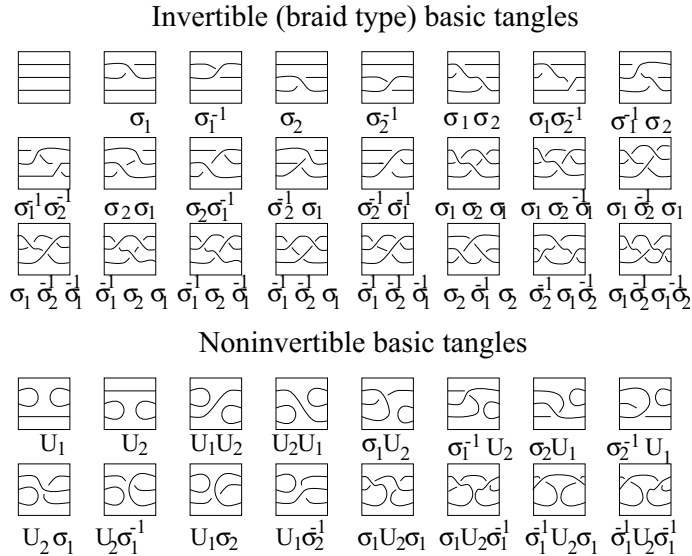


Figura 10:

Los entrelazados de 4 hilos más simples que no se pueden distinguir mediante las 3-coloraciones y para los cuales la equivalencia por 3-movimientos no está establecida todavía se muestran en la figura 11. Respecto a los $(2, 2)$ movimientos,

la equivalencia de los entrelazados de 2 hilos de la figura 12 es todavía un problema abierto.

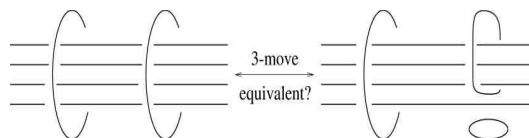


Figura 11:

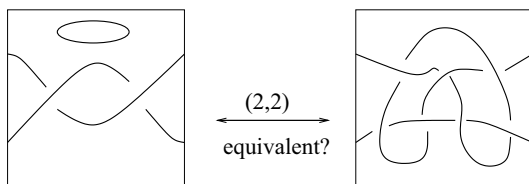


Figura 12:

Finalmente, mencionaremos dos de las generalizaciones de las k -coloraciones de Fox.

Para la primera generalización consideremos cualquier anillo conmutativo R con la identidad en lugar de Z_k . Construimos $Col_R T$ igual que antes, utilizando la relación $c = 2a - b$ (en R) como se ilustra en la figura de la definición 5. De manera similar se definen la forma simétrica de madejas ϕ en R^{2n-1} , la forma simpléctica $\hat{\phi}$ en R^{2n-2} y los homomorfismos ψ y $\hat{\psi}$. El teorema 1 se generaliza de la siguiente manera ([13]):

Teorema 2. *Sea R un dominio de ideales principales, entonces $\hat{\psi}(Col_R T/R)$ es un submódulo de lagrangianos virtuales de R^{2n-2} para la forma simpléctica $\hat{\phi}$. Esto es, $\hat{\psi}(Col_R T/R)$ es un submódulo de índice finito de un lagrangiano en R^{2n-2} .*

La segunda generalización nos lleva al estudio de los “racks” y los “quandles” [24], [15], pero nos restringiremos al caso abeliano, el de las coloraciones de Alexander-Burau-Fox (ABF)⁶. Una coloración de ABF utiliza colores tomados de un anillo, R , que tiene un elemento invertible t (e.g. $R = Z[t^{\pm 1}]$). La relación de la figura en la definición 5 se cambia por la relación $c = (1 - t)a + tb$ in R en cada uno de los cruces del diagrama de un enlace orientado:

⁶Este enfoque ya se vislumbraba en la carta de J. W. Alexander a O. Veblen, en 1919 [1]. Alexander fue probablemente influenciado por la tesis de P. Heegaard, 1898, de la cual revisó su traducción al frances [19]. Burau estuvo considerando una representación de las trenzas, aunque localmente la relación que estableció era la misma que la de Fox. De acuerdo con J. Birman, Burau supo de esta representación a través de Reidemeister o Artin [14], p.330.

$$\begin{array}{c}
 \swarrow \text{a} \quad \searrow \text{c}=(1-t)\text{a}+t\text{b} \\
 \nwarrow (1-t^{-1})\text{a}+t^{-1}\text{c}=\text{b} \quad \swarrow \text{c}=\text{b}
 \end{array}$$

Figura 13:

El espacio R^{2n-2} tiene una estructura natural hermítica [44], pero también se puede encontrar una estructura simpléctica y se puede demostrar el teorema 2 dentro de este contexto[13].

4 Introducción histórica de los módulos de madeja

En esta última sección se discutirá la topología algebraica basada en nudos. Aunque la idea fue también concebida por otras personas (principalmente por Vladimir Turaev), y ya la había vislumbrado en la década anterior John H. Conway (denotada entonces como “linear skein”), nosotros la consideramos como un pequeño hijo. Los módulos de madeja tienen su origen en la observación hecha por Alexander [2], de que sus polinomios (*polinomios de Alexander*) basados en los cruces, L_+ , L_- y L_0 en R^3 están relacionados linealmente (figura 14).

En nuestro caso, el inicio fué en Norman, Oklahoma en abril de 1987, cuando nos dimos cuenta de que la versión de multivariables del polinomio Jones-Conway (llamado Homflypt) que Hoste y Kidwell analizaron es, en realidad, un módulo de enlaces en un toro sólido (más generalmente, en la suma conexa de toros sólidos).

Un módulo de madeja es un objeto algebraico asociado a una variedad, que usualmente se construye como una combinación lineal formal de subvariedades encajadas (o inmersas en ésta), salvo relaciones definidas localmente. En un contexto más restringido, un módulo de madeja es un módulo asociado a una 3-variedad considerando combinaciones lineales de enlaces en la variedad, salvo relaciones (de madeja) elegidas adecuadamente. Estos son los objetos principales de la *topología algebraica basada en nudos*. Cuando elegimos las relaciones, se quiere obtener respuesta satisfactoria a las siguientes preguntas.

- (i) ¿Obtendremos un módulo accesible (computable)?
- (ii) ¿Qué tan precisos son nuestros módulos para distinguir 3-variedades y enlaces dentro de estas?
- (iii) ¿Reflejará el módulo la topología/geometría de la 3-variedad (e.g. superficies en una variedad, descomposición geométrica de la variedad)?
- (iv) ¿Admitirá el módulo alguna estructura adicional, (e.g. filtraciones, graduaciones, multiplicación, estructura de álgebra de Hopf)? ¿Dará lugar a una teoría topológica cuántica de campos (TQFT) al hacer un cociente de dimensión finita?

Uno de los módulos de madeja más sencillos es la q -modificación del primer grupo de homología de una 3-variedad M , denotado por $\mathcal{S}_2(M; q)$. Está basado en la relación de madeja (entre enlaces con collar no orientados de M): $L_+ = qL_0$; también satisface la relación debida al collar: $L^{(1)} - qL$, donde $L^{(1)}$ denota un enlace obtenido a partir de L al torcer el collar de L una vuelta en sentido positivo. Este módulo de madeja definido tan sencillamente ya “distingue” superficies no separantes en M . Estas superficies son responsables de la parte de torsión de nuestro módulo de madeja [38]. Se encuentra también un patrón más general: la mayoría de los módulos de madeja detectan ciertas superficies en la variedad.

Los módulos de madeja más estudiados utilizan relaciones de madeja que trabajan bien dentro de la teoría clásica de nudos (relaciones que definen invariantes de polinomios para enlaces en R^3).

- (1) El Módulo de Madeja del Corchete de Kauffman, (MMCK). Este módulo está definido por la *relación de madeja*, $L_+ = AL_- + A^{-1}L_\infty$, denotado $S_{2,\infty}(M)$, y es el mejor entendido dentro de los módulos de madeja del tipo de Jones. Este se puede interpretar como una cuantización del anillo de caracteres de las representaciones en $SL(2, C)$ del grupo fundamental de M , [6], [7], [41]. Para $M = F \times [0, 1]$, el MMCK es un álgebra (generalmente no conmutativa); si F es compacta, está finitamente generada [5] y no tiene divisores del cero [41]. El centro del álgebra está generado por los componentes de la frontera de F [8], [41]. Los toros incompresibles y las 2-esferas en M producen torsión en el MMCK. Es fundamental averiguar qué otro tipo de superficies también producen torsión (si es que éstas existen).

- (2) Los módulos de madeja basados en la relación Jones-Conway (o relación de Homflypt). Este módulo está definido por la relación de madeja $v^{-1}L_+ - vL_- = zL_0$, donde L_+, L_-, L_0 son enlaces con orientación, ver Fig.4.1. Estos módulos de madeja se denotan $S_3(M)$ y generalizan a los módulos de madeja basados en la relación sugerida por Conway. Para $M = F \times [0, 1]$, $S_3(M)$ es un *algebra de Hopf* (generalmente no es conmutativa ni co-conmutativa), [47], [34]. $S_3(F \times [0, 1])$ es un módulo libre y puede interpretarse como una cuantización [20], [46], [33], [47]. $S_3(M)$ se relaciona con el conjunto algebraico de las representaciones en $SL(n, C)$ del grupo fundamental de la variedad M , [43].

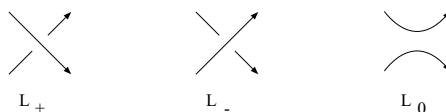


Figura 14:

- (3) Los módulos de madeja basados en la relación del *polinomio de Kauffman*

$L_{+1} + L_{-1} = x(L_0 + L_\infty)$ (ver fig.4.2) y en la relación de collar $L^{(1)} - aL$. Se denotan por $S_{3,\infty}$ y se sabe que son libres para $M = F \times [0, 1]$.

- (4) Módulos de madeja de homotopías. En estos módulos de madeja $L_+ = L_-$ para los cruces dentro de la misma componente. El ejemplo más estudiado es el de los módulos de madeja de la q -homotopía con la relación $q^{-1}L_+ - qL_- = zL_0$ para cruces entre diferentes componentes. Para $M = F \times [0, 1]$ los módulos son cuantizaciones, [21], [47], [39], además Kaiser observó que se pueden entender casi completamente utilizando la técnica de los toros singulares de Lin.
- (5) Los módulos de madeja basados en la filtración de Vassiliev-Gusarov. Si añadimos los nudos singulares, denotados por \mathcal{K} , a la familia de los nudos, y resolvemos un cruce singular mediante la relación $K_{cr} = K_+ - K_-$, esto nos permite definir la filtración de Vassiliev-Gusarov: $\dots \subset C_3 \subset C_2 \subset C_1 \subset C_0 = R\mathcal{K}$, donde C_k está generado por nudos con k puntos singulares. El k -ésimo módulo de madeja de Vassiliev-Gusarov se define como el cociente: $W_k(M) = R\mathcal{K}/C_{k+1}$. La completación del espacio de nudos con respecto a la filtración de Vassiliev-Gusarov, $\hat{R}\mathcal{K}$, es un *álgebra de Hopf* (para $M = S^3$). Los duales de las funciones de los módulos de madeja de Vassiliev-Gusarov se llaman *invariantes de tipo finito* o *invariantes de Vassiliev* de nudos; [35].
- (6) Módulos de madeja definidos por relaciones que modifican los n -movimientos. Se denotan por $S_n(M)$, donde $S_n(M) = R\mathcal{L}/(b_0L_0 + b_1L_1 + b_2L_2 + \dots + b_{n-1}L_{n-1})$. Para el caso de enlaces no orientados podemos agregar a la relación el término $b_\infty L_\infty$, para obtener $S_{n,\infty}(M)$, y también posiblemente una relación de enlaces con collar. El caso $n = 4$, sobre el cual estamos trabajando, será descrito con mayor detalle a continuación.

Los ejemplos (1)-(5) nos dan una descripción breve de los módulos de madeja estudiados ampliamente hasta este momento. Ahora presentaré otros dos ejemplos que sólo recientemente se han considerado con mayor detalle. El primer ejemplo está basado en una modificación del 3-movimiento y el segundo en la modificación del (2,2)-movimiento. El primero lo han trabajado Tsukamoto y Veve. Denotaremos al módulo de madeja descrito en este ejemplo por $S_{4,\infty}$ porque la relación incluye a 4 madejas en posición horizontal y los segmentos paralelos verticales (L_∞)

Definición 7. Sea M una 3-variedad orientada, sea \mathcal{L}_{fr} el conjunto de enlaces con collar no orientados en M (incluyendo el enlace vacío, \emptyset) y R un anillo conmutativo con identidad. Definimos el módulo de madeja del tipo $(4, \infty)$ de la siguiente manera: $S_{4,\infty}(M; R) = R\mathcal{L}_{fr}/I_{(4,\infty)}$, donde $I_{(4,\infty)}$ es el submódulo de $R\mathcal{L}_{fr}$ generado por la relación de madeja: $b_0L_0 + b_1L_1 + b_2L_2 + b_3L_3 + b_\infty L_\infty = 0$ y la relación de enlaces con collar: $L^{(1)} = aL$ donde a, b_0, b_3 son elementos



Figura 15:

invertibles en R y b_1, b_2, b_∞ son elementos arbitrarios fijos de R (ver la figura 15).

La generalización de la conjetura de Montesinos-Nakanishi dice que $\mathcal{S}_{4,\infty}(S^3, R)$ está generado por enlaces triviales y que, para entrelazados de n hilos, el módulo de madeja está generado por $f(n, 3)$ entrelazados básicos (posiblemente con componentes triviales). Esto proporcionaría un conjunto que genera el módulo de madeja para S^3 o D^3 (con $2n$ puntos en las orillas). En [42] analizamos extensamente la posibilidad de que los enlaces triviales, T_n , sean linealmente independientes. Esto puede suceder si $b_\infty = 0$ y $b_0 b_1 = b_2 b_3$. Lo cual nos lleva a la siguiente conjetura:

Conjetura 7. (1) Existe un polinomio invariante de enlaces orientados, $P_1(L) \in Z[x, t]$, el cual satisface:

- (i) Las condiciones iniciales: $P_1(T_n) = t^n$, donde T_n es un enlace trivial con n componentes.
- (ii) La relación de madeja $P_1(L_0) + xP_1(L_1) - xP_1(L_2) - P_1(L_3) = 0$ donde L_0, L_1, L_2, L_3 es un cuarteto estándar de madejas no orientadas (esto es, L_{i+1} se obtiene de L_i mediante una media vuelta con la mano derecha en los extremos de L_i ; ver figura 15).

(2) Existe un polinomio invariante de enlaces orientados, $P_2(L) \in Z[A^{\pm 1}, t]$, el cual satisface:

- (i) Las condiciones iniciales: $P_2(T_n) = t^n$.
- (ii) Las relaciones del collar: $P_2(L^{(1)}) = -A^3 P_2(L)$ donde $L^{(1)}$ se obtiene de un enlace con collar L al torcer el collar media vuelta en sentido positivo.
- (iii) La relación de madeja: $P_2(L_0) + A(A^2 + A^{-2})P_2(L_1) + (A^2 + A^{-2})P_2(L_2) + AP_2(L_3) = 0$.

Las conjeturas anteriores suponen que $b_\infty = 0$ en nuestra relación de madeja.

Supongamos por un momento que b_∞ sea invertible en R . Utilizando el “denominador” de nuestra relación de madeja (16) obtenemos la relation que nos permite calcular el efecto que tiene agregar una componente trivial al enlace L (se agregará t^n para el enlace trivial de n componentes, T_n):

$$(*) \quad (a^{-3}b_3 + a^{-2}b_2 + a^{-1}b_1 + b_0 + b_\infty t)L = 0$$

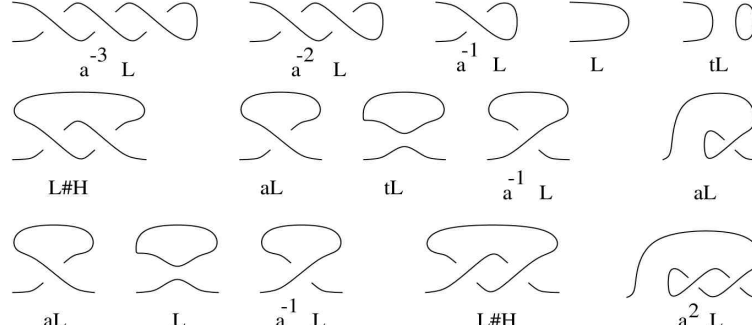


Figura 16:

Al considerar el “numerador” de la relación y su reflejo (ver figura 16), obtenemos fórmulas para los sumandos del enlace de Hopf y, ya que éste es anfiqueiral, lo podemos eliminar en las ecuaciones obteniendo la fórmula (**):

$$b_3(L\#H) + (ab_2 + b_1t + a^{-1}b_0 + ab_\infty)L = 0.$$

$$b_0(L\#H) + (a^{-1}b_1 + b_2t + ab_3 + a^2b_\infty)L = 0.$$

$$(**) \quad ((b_0b_1 - b_2b_3)t + (a^{-1}b_0^2 - ab_3^2) + (ab_0b_2 - a^{-1}b_1b_3) + b_\infty(ab_0 - a^2b_3))L = 0.$$

Posiblemente las únicas relaciones en el módulo sean (*) y (**). Más precisamente nos preguntamos si $\mathcal{S}_{4,\infty}(S^3; R)$ es el anillo cociente $R[t]/(\mathcal{I})$, donde \mathcal{I} es el ideal generado por (*) y (**) donde $L = t$ y t^i representa el enlace trivial con i componentes. La sustitución que satisface esta relación es: $b_0 = b_3 = a = 1$, $b_1 = b_2 = x$, $b_\infty = y$. Lo cual nos puede guiar para encontrar un polinomio invariante de enlaces no orientados en S^3 con valores en $Z[x, y]$ y a la relación de madeja $L_3 + xL_2 + xL_1 + L_0 + yL_\infty = 0$.

Y ¿cómo se relaciona esto con las coloraciones de Fox? una de estas relaciones ya ha sido mencionada, es el uso de las 3-coloraciones para estimar el número de tipos básicos de entrelazados de n hilos (mediante $\prod_{i=1}^{n-1} (3^i + 1)$) para el módulo de madeja $\mathcal{S}_{4,\infty}$. También estamos convencidos de que $\mathcal{S}_{4,\infty}(S^3; R)$ contiene toda la información sobre el espacio de 7-coloraciones de Fox. Esto sería una generalización al hecho de que el polinomio de corchetes de Kauffman contiene información acerca de las 3-coloraciones y de que el polinomio de Kauffman contiene información acerca de las 5-coloraciones. De hecho, François Jaeger dijo saber cómo obtener el espacio de p -coloraciones a partir de una pequeña relación de madeja (del tipo de $(\frac{p+1}{2}, \infty)$). Desafortunadamente François murió prematuramente en 1997 y no sabemos cómo demostrar esta afirmación ⁷.

⁷Si $|Col_p(L)|$ denota el orden del espacio de las p -coloraciones de Fox para el enlace L , entonces entre los $p + 1$ enlaces que difieren en L_0, L_1, \dots, L_{p-1} , y L_∞ , existen p de estos que

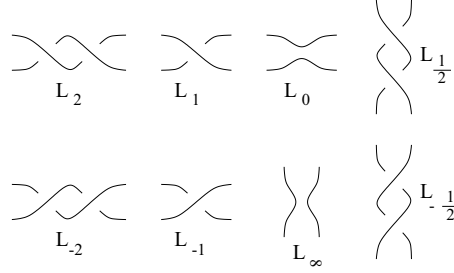


Figura 17:

Finalmente, describiremos brevemente el módulo de madeja relacionado con la conjetura de los $(2, 2)$ -movimientos. Puesto que un $(2, 2)$ -movimiento es equivalente al movimiento racional del tipo $\frac{5}{2}$, denotaremos a este módulo de madeja como $\mathcal{S}_{\frac{5}{2}}(M; R)$.

Definición 8. Sea M una 3-variedad, sea \mathcal{L}_{fr} el conjunto de enlaces con collar no orientados en M (incluyendo al enlace vacío, \emptyset) y R cualquier anillo conmutativo con identidad. Definimos el módulo de madeja del tipo $\frac{5}{2}$ como sigue: $\mathcal{S}_{\frac{5}{2}}(M; R) = R\mathcal{L}_{fr}/(I_{\frac{5}{2}})$ donde $I_{\frac{5}{2}}$ es el submódulo de $R\mathcal{L}_{fr}$ generado por la relación de madeja: (i) $b_2L_2 + b_1L_1 + b_0L_0 + b_\infty L_\infty + b_{-1}L_{-1} + b_{-\frac{1}{2}}L_{-\frac{1}{2}} = 0$, su reflexión: (i') $b'_2L_2 + b'_1L_1 + b'_0L_0 + b'_\infty L_\infty + b'_{-1}L_{-1} + b'_{-\frac{1}{2}}L_{-\frac{1}{2}} = 0$ y la relación de collar: $L^{(1)} = aL$, donde $a, b_2, b'_2, b_{-\frac{1}{2}}, b'_{-\frac{1}{2}}$ son elementos invertibles en R y $b_1, b'_1, b_0, b'_0, b_{-1}, b'_{-1}, b_\infty$, y b'_∞ son elementos arbitrarios fijos de R . Los enlaces $L_2, L_1, L_0, L_\infty, L_{-1}, L_{\frac{1}{2}}$ y $L_{-\frac{1}{2}}$ se ilustran en la figura 17.⁸

Si rotamos la ilustración de la relación (i) obtenemos: (i') $b_{-\frac{1}{2}}L_2 + b_{-1}L_1 + b_\infty L_0 + b_0L_\infty + b_1L_{-1} + b_2L_{-\frac{1}{2}} = 0$ Uno puede utilizar (i) y (i') para eliminar $L_{-\frac{1}{2}}$ y obtener: $(b_2^2 - b_{-\frac{1}{2}}^2)L_2 + (b_1b_2 - b_{-1}b_{-\frac{1}{2}})L_1 + ((b_0b_2 - b_\infty b_{-\frac{1}{2}})L_0 + (b_{-1}b_2 - b_1b_{-\frac{1}{2}})L_{-1} + (b_\infty b_2 - b_0b_{-\frac{1}{2}})L_\infty = 0$. Así que, ya sea que trabajemos con la relación más corta (básicamente la del cuarto módulo de madeja descrito anteriormente), o ya sea que todos los coeficientes son cero (suponiendo que no hay divisores de cero en R) se obtiene que $b_2 = \varepsilon b_{-\frac{1}{2}}$, $b_1 = \varepsilon b_{-1}$, y $b_0 = \varepsilon b_\infty$. De manera similar obtenemos: $b'_2 = \varepsilon b'_{-\frac{1}{2}}$, $b'_1 = \varepsilon b'_{-1}$, y $b'_0 = \varepsilon b'_\infty$, en la que $\varepsilon = \pm 1$. Para simplificar

tienen el mismo orden que $|Col_p(L)|$ y el restante tiene orden p veces más grande [31]. Esto nos lleva a la relación del tipo (p, ∞) . La relación entre el polinomio de Jones (o el corchete de Kauffman) y $Col_3(L)$ es de la forma: $Col_3(L) = 3|V(e^{\pi i/3})|^2$ y la fórmula que relaciona el polinomio de Kauffman y $Col_5(L)$ es de la forma: $Col_5(L) = 5|F(1, e^{2\pi i/5} + e^{-2\pi i/5})|^2$. Esto parece sugerir que la fórmula que Jaeger descubrió incluye sumas gaussianas.

⁸Nuestra notación esta basada en la notación de Conway para entrelazados racionales. Aunque difiere de esta por un signo. La razón de esto es que la convención de Conway para un cruce positivo prácticamente no se suele utilizar en el contexto de las relaciones de madeja.

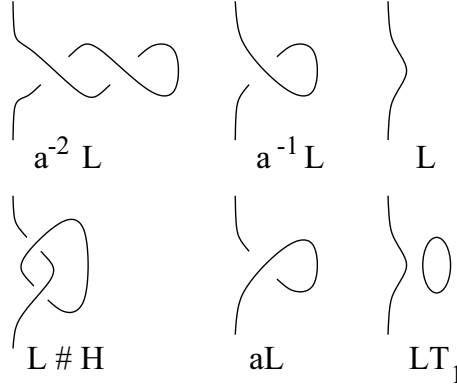


Figura 18:

la situación supongamos que $\varepsilon = 1$. Podemos obtener más relaciones entre los coeficientes a partir del cálculo del coeficiente con el enlace de Hopf y usando su propiedad de anfiqueiralidad. A saber, comparando los diagramas en la figura 18 y el de su reflejo:

$$L \# H = -b_2^{-1}(b_1(a + a^{-1}) + a^{-2}b_2 + b_0(1 + T_1))L$$

$$L \# H = -b_2'^{-1}(b_1'(a + a^{-1}) + a^2b_2' + b_0'(1 + T_1))L.$$

¿Será el caso de que las igualdades anteriores proporcionan las únicas relaciones restantes entre los coeficientes (para S^3)? A continuación haremos una pregunta mucho más sencilla, supongamos que $a = 1, b_x = b'_x$ y denotemos t^n por T_n (sobra).

Pregunta 1. *Existirá un polinomio invariante de enlaces no orientados en S^3 , $P_{\frac{5}{2}}(L) \in Z[b_0, b_1, t]$, que cumpla con las siguientes condiciones?*

(i) *Condiciones iniciales: $P_{\frac{5}{2}}(T_n) = t^n$, donde T_n es un enlace trivial con n componentes.*

(ii) *Las relaciones de madeja:*

$$P_{\frac{5}{2}}(L_2) + b_1 P_{\frac{5}{2}}(L_1) + b_0 P_{\frac{5}{2}}(L_0) + b_0 P_{\frac{5}{2}}(L_\infty) + b_1 P_{\frac{5}{2}}(L_{-1}) + P_{\frac{5}{2}}(L_{-\frac{1}{2}}) = 0.$$

$$P_{\frac{5}{2}}(L_{-2}) + b_1 P_{\frac{5}{2}}(L_{-1}) + b_0 P_{\frac{5}{2}}(L_0) + b_0 P_{\frac{5}{2}}(L_\infty) + b_1 P_{\frac{5}{2}}(L_1) + P_{\frac{5}{2}}(L_{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Note que al sustraer las relaciones de madeja podemos obtener la (interesante) identidad:

$$P_{\frac{5}{2}}(L_2) - P_{\frac{5}{2}}(L_{-2}) = P_{\frac{5}{2}}(L_{\frac{1}{2}}) - P_{\frac{5}{2}}(L_{-\frac{1}{2}}).$$

Todavía nadie ha estudiado seriamente el módulo de madeja $\mathcal{S}_{\frac{5}{2}}(M; R)$ así que cualquier información que el lector obtenga sería un nuevo avance, incluso sería un gran avance obtener la tabla de polinomios $P_{\frac{5}{2}}(L)$ con L un enlace sencillo. ¡Les deseamos buena suerte en el intento!

5 Adendum sobre la conjetura de los 3-movimientos de Montesinos-Nakanishi

Los cálculos preliminares de Mietek Dąbkowski (21 de febrero, 2002) muestran que la conjetura de los 3-movimientos de Montesinos-Nakanishi no se cumple para el enlace de Chen (ver figuras asociadas a la Conjetura 4). A continuación les presentamos el texto del resumen que se envió al congreso de “Nudos en Montreal” organizada por Steve Boyer y Adam Sikora en abril del mismo año. Autores: Mieczyslaw Dąbkowski, Józef H. Przytycki (GWU). Título: Contraejemplos a la conjetura de Montesinos-Nakanishi de los 3-movimientos.

En 1981 Yasutaka Nakanishi preguntó si los 3-movimientos pueden desanudar a cualquier nudo. Esta pregunta se denominó *la conjetura de Montesinos-Nakanishi* en la lista de problemas de Kirby. A partir de entonces, Q.Chen, Y. Nakanishi, J. Przytycki y T. Tsukamoto han obtenido varias repuestas parciales a esta pregunta. Nakanishi y Chen presentaron ejemplos que ellos no pudieron reducir al enlace trivial (los anillos Borromeos y la cerradura del cuadrado del centro del quinto grupo de trenzas, $\bar{\gamma}$, respectivamente). En 1999 la única herramienta con que se contaba para analizar la equivalencia mediante 3-movimientos eran las 3-coloraciones de Fox (se sabe que los 3-movimientos no cambian el número de 3-coloraciones de Fox). Ésta permitió distinguir enlaces triviales con diferente número de componentes pero no distingue los ejemplos de Nakanishi y Chen de enlaces triviales. El grupo de 3-coloraciones de un enlace L corresponde al primer grupo de homología con coeficientes en \mathbb{Z}_3 de la cubierta doble ramificada de un enlace L , $M_L^{(2)}$, i.e.

$$Tri(L) = H_1(M_L^{(2)}, \mathbb{Z}_3) \oplus \mathbb{Z}_3$$

Nosotros hemos encontrado invariantes de los 3-movimientos más sensibles que utilizan homotopía en lugar de homología, y para ello consideramos el grupo fundamental de $M_L^{(2)}$.

Definimos el n -ésimo grupo de Burnside para un enlace como el cociente del grupo fundamental de la cubierta doble ramificada del enlace, módulo todas las relaciones de la forma $a^n = 1$. Para $n = 2, 3, 4, 6$ este grupo cociente es finito.

El tercer grupo de Burnside de un enlace se mantiene inmutable a los 3-movimientos. En la demostración utilizamos la presentación “médula” del grupo obtenida a partir del diagrama; esto es, los arcos del diagrama son los generadores y por cada cruce obtenemos una relación de la forma $c = ab^{-1}a$ donde a corresponde al arco que pasa por arriba en cada cruce y b y c son los segmentos que representan al arco que pasa por abajo.

La conjetura de Montesinos-Nakanishi de los 3-movimientos no se cumple para el ejemplo de Chen, $\hat{\gamma}$.

Para mostrar que el tercer grupo de Burnside correspondiente a $\hat{\gamma}$ es diferente de cualquier grupo de Burnside correspondiente a cualquier enlace trivial es suficiente mostrar que el elemento P , $P = wtu^{-1}w^{-1}t^{-1}$ donde $u = xy^{-1}zt^{-1}$ y $w = x^{-1}yz^{-1}t$ del grupo libre de Burnside $B(4, 3) = \{x, y, z, t : (a)^3\}$ no es

trivial. Logramos probar esto último con la ayuda del programa GAP (21 de febrero, 2002). Posteriormente hemos confirmado nuestros calculos utilizando el programa Magnus.

6 Notas históricas acerca de la bibliografía

6.1 Una carta de J.W. Alexander

Me gustaría agradecer a Jim Hoste por darme una copia de la carta de J.W. Alexander a Oswald Veblen escrita en 1919 [1] y que se conserva en la biblioteca del Congreso de los Estados Unidos.

Para que se perciba mejor la carta de Alexander, cito un fragmento del principio de ésta: “When looking over Tait on knots among other things, He really doesn’t get very far. He merely writes down all the plane projections of knots with a limited number of crossings, tries out a few transformations that he happens to think of and assumes without that if he is unable to reduce one knot to another with a reasonable number of tries, the two are distinct. His invariant, the generalization of the Gaussian invariant ... for links is an invariant merely of the particular projection of the knot that you are dealing with, - the very thing I kept running up against in trying to get an integral that would apply. The same is true of his “Beknottedness”.

Here is a genuine and rather jolly invariant: take a plane projection of the knot and color alternate regions light blue (or if you prefer, baby pink). Walk all the way around the knot and ...”

6.2 Una entrevista con W. Thurston

En agosto de 1983 A. Mednykh no pudo asistir al Congreso Internacional de Matemáticas en Varsovia así que me envió una lista de preguntas para W. Thurston. Me reuní con Thurston y le hice las preguntas a las cuales el respondió amable y ampliamente. Entonces escribí las respuestas (en ocasiones con mis comentarios). En particular, Thurston conjeturó que la variedad con el volumen más pequeño es una cirugía en el nudo de la figura ocho. Yo comenté que posiblemente una variedad sobre la que había discutido en [3] tenía el volumen más pequeño. Después las tabulaciones extensivas de J. Weeks [49] y de V. Matveev y A. Fomienko [27] le dieron credibilidad a esta conjetura, la cual es aún un problema abierto ⁹ [23].

Agradecimientos

El autor agradece al profesor Zbigniew Oziewicz por su generosa hospitalidad en Cuautitlán. También agradece a Edna Fanny Jasso Hernandez de la Universidad

⁹La conjetura la demostró recientemente D.Gabai

Nacional Autónoma de México, traductora inicial, y a Lara Simone Suarez Lopez de la Universidad Nacional de Colombia, quien finalizó la traducción.

Este trabajo fue parcialmente financiado por la Universidad Nacional de Colombia, DIB, proyecto número 8003215.

Referencias

- [1] J. W. Alexander. Carta a Oswald Veblen, 1919. *Publicaciones de Oswald Veblen*, 1881-1960.
- [2] J. W. Alexander, Topological invariants of knots and links, *Trans. Amer. Math. Soc.* 30, 1928, 275-306.
- [3] S. Betley, J. H. Przytycki, T. Zukowski. Hiperbolic structures on Dehn fillings of some punctured-torus bundles over S^1 . *Kobe J. Math.*, 3(2). 1986, 117-147.
- [4] F. Bonahon, L. Siebenmann, Geometric splittings of classical knots and the algebraic knots of Conway, to appear in L.M.S. Lecture Notes Series, 75.
- [5] D. Bullock, A finite set of generators for the Kauffman bracket skein algebra, *Math.Z.*, 231(1), 1999, 91-101.
- [6] D. Bullock, Rings of $Sl_2(C)$ -characters and the Kauffman bracket skein module, *Comment. Math. Helv.* 72, 1997, 521-542.
- [7] D. Bullock, C. Frohman, J. Kania-Bartoszyńska, Understanding the Kauffman bracket skein module, *J. Knot Theory Ramifications* 8(3), 1999, 265–277.
- [8] D. Bullock, J. H. Przytycki, Multiplicative structure of Kauffman bracket skein module quantizations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(3), 2000, 923–931.
- [9] Q. Chen, The 3-move conjecture for 5-braids, Knots in Hellas' 98; The Proceedings of the International Conference on Knot Theory and its Ramifications; Volume 1. In the Series on Knots and Everything, Vol. 24, September 2000, pp. 36-47.
- [10] J. H. Conway, An enumeration of knots and links, *Computational problems in abstract algebra* (ed. J. Leech), Pergamon Press (1969) 329 - 358.
- [11] R. H. Crowell, *Knots and Wheels*, National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M.) Yearbook, 1961.
- [12] R. H. Crowell, R. H. Fox, *An introduction to knot theory*, Ginn and Co., 1963.
- [13] J. Dymara, T. Januszkiewicz, J. H. Przytycki, Symplectic structure on Colorings, Lagrangian tangles and Tits buildings, preprint, May 2001.

- [14] M. Epple. Geometric aspects in the development of knot theory. *History of topology*(ed. I. M. James), 301-357, North-Holland, Amsterdam, 1999.
- [15] R. Fenn, C. Rourke. Racks and links in codimension two. *Journal of knot theory and its ramifications*, 1(4) 1992, 343-406.
- [16] R. H. Fox, A quick trip through knot theory, *Top. 3-manifolds*, Proc. 1961 Top.Inst.Univ.Georgia(ed.M.K.Fort,jr), 120-167. Englewood Cliffs. N.J.: Princenton-Hall, 1962.
- [17] R. H. Fox, Metacyclic invariants of knots and links. *Canadian J. Math.*, XXII(2) 1970, 193-201.
- [18] T. Harikae, Y. Uchida, Irregular dihedral branched coverings of knots, in *Topics in knot theory*, N.A.T.O. A.S.I. series C, 399, (ed. M.Bozhüyük) Kluwer Academic Publisher (1993), 269-276.
- [19] P. Heegaard. *Forstudier til en Topologisk Teori for de algebraiske Fladers Sammenheng*. PhD thesis, Kobenhavn, 1898. Traduccion francesa: Sur l'Analysis situs, *Soc. Math. France Bull.*, 44(1916), 161-242. Traduccion inglesa (A. Przybyszewska): J.H. Przytycki, Knot theory from Vandermonde to Jones, Preprint 43, Odense University 1993.
- [20] J. Hoste, M. Kidwell, Dichromatic link invariants, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 321(1), 1990, 197-229; see also the preliminary version of this paper: "Invariants of colored links", preprint, March 1987.
- [21] J. Hoste, J. H. Przytycki, Homotopy skein modules of oriented 3-manifolds, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1990, 108, 475-488.
- [22] J. Hoste, J. H. Przytycki. A survey of skein modules of 3-manifolds. in *Knots 90*, Proceedings of the International Conference on Knot Theory and Related Topics, Osaka (Japan), August 15-19, 1990), Editor A. Kawauchi, Walter de Gruyter 1992, 363-379.
- [23] An interview with W. Thurston, Warsaw, August 1983.
- [24] D. Joyce. A classifying invariant of knots: the knot quandle. *Jour. Pure Appl. Alg* 23, 1982, 37-65.
- [25] A. Kawauchi, A survey of Knot Theory, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1996.
- [26] R. Kirby, Problems in low-dimensional topology; Geometric Topology (Proceedings of the Georgia International Topology Conference, 1993), Studies in Advanced Mathematics, Volume 2 part 2., Ed. W.Kazez, AMS/IP, 1997, 35-473.

- [27] A. T. Fomenko. V.S. Matveev. Isoenergetic surfaces of Hamiltonian systems, the enumeration of three-dimensional manifolds in order of growth of their complexity, and the calculation of the volumes of closed hyperbolic manifolds (Russian). *Uspekhi Mat. Nauk* 43 (1988), no. 1(259), 5-22, 247; translation in *Russian Math. Surveys* 43 (1988), no. 1, 3-24.
- [28] J. M. Montesinos. Variedades de Seifert que son cubiertas ciclicas ramificadas de dos hojas *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 18, 1973, 1-32.
- [29] J. H. Przytycki, t_k -moves on links, In *Braids*, ed. J.S.Birman and A .Ligobor, Contemporary Math. Vol. 78, 1988, 615-656.
- [30] J. H. Przytycki, Elementary conjectures in classical knot theory, in *Quantum Topology*, Ed. L.J.Kauffman, R.A.Baadhio, Series on Knots and Everything - Vol.3, World Scientific, 1993, 292-320.
- [31] J. H. Przytycki, 3-coloring and other elementary invariants of knots, Banach Center Publications, Vol. 42, *Knot Theory*, 1998, 275-295.
- [32] J. H. Przytycki, Skein modules of 3-manifolds, *Bull. Polish Acad. Science*, 39(1-2), 1991, 91-100.
- [33] J. H. Przytycki, M-F Skein module of links in a handlebody, *Topology* 90, Proc. of the Research Semester in Low Dimensional Topology at OSU, Editors: B.Apanasov, W.D.Neumann, A.W.Reid, f1.10, L.Siebenmann, De Gruyter Verlag, 1992; 315-342.
- [34] J. H. Przytycki, Quantum group of links in a handlebody *Contemporary Math: Deformation Theory and Quantum Groups with Applications to Mathematical Physics*, M.Gerstenhaber and J.D.Stasheff, Editors, Volume 134, 1992, 235-245.
- [35] J. H. Przytycki, Vassiliev-Gusarov skein modules of 3-manifolds and criteria for periodicity of knots, *Low-Dimensional Topology*, Knoxville, 1992 ed.: Klaus Johannson, International Press Co., Cambridge, MA 02238, 1994, 157-176.
- [36] J. H. Przytycki, Algebraic topology based on knots: an introduction, *Knots 96*, Proceedings of the Fifth International Research Institute of MSJ, edited by Shin'ichi Suzuki, 1997 World Scientific Publishing Co., 279-297.
- [37] J. H. Przytycki, Fundamentals of Kauffman bracket skein modules, *Kobe Math. J.*, 16(1), 1999, 45-66.
- [38] J. H. Przytycki, A q-analogue of the first homology group of a 3-manifold, *Contemporary Mathematics* 214, Perspectives on Quantization (Proceedings of the joint AMS-IMS-SIAM conference on Quantization, Mount Holyoke College, 1996); Ed. L.A.Coburn, M.A.Rieffel, AMS 1998, 135-144.

- [39] J. H. Przytycki, Homotopy and q-homotopy skein modules of 3-manifolds: an example in Algebra Situs, *Knots, Braids, and Mapping Class Groups: Papers dedicated to Professor Joan Birman*, Ed. J. Gilman, W. Menasco and X. S. Lin, International Press, AMS/IP Series on Advanced Mathematics, vol 24, Co., Cambridge, MA, 2001, 143-170.
- [40] http://en.wikipedia.org/wiki/Ralph_Fox
- [41] J. H. Przytycki, A. S. Sikora, On Skein Algebras and $Sl_2(C)$ -Character Varieties, *Topology*, 39(1), 2000, 115-148.
- [42] J. H. Przytycki, T. Tsukamoto, The fourth skein module and the Montesinos-Nakanishi conjecture for 3-algebraic links, *J. Knot Theory Ramifications*, 10(7), 2001, 959-982.
- [43] A. S. Sikora, PSL_n -character varieties as spaces of graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353, 2001, 2773-2804.
- [44] S. Squier. The Burau representation is unitary. *Proc. Amer. Math. Soc* 90(2), 1984, 199-202.
- [45] T. Tsukamoto, Ph. D. Thesis: The fourth Skein module for 4-algebraic links George Washington University, 2000.
- [46] V. G. Turaev, The Conway and Kauffman modules of the solid torus, *Zap. Nauchn. Sem. Lomi* 167 (1988), 79-89. English translation: *J. Soviet Math.*, 52, 1990, 2799-2805.
- [47] V. G. Turaev, Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4(24), 1991, 635-704.
- [48] Y. Uchida, Proc. of Knots 96 ed. S. Suzuki 1997, 109-113 *Knots 96*, Proceedings of the Fifth International Research Institute of MSJ, edited by Shin'ichi Suzuki, 1997 World Scientific Publishing Co., 109-113.
- [49] J. Weeks, *Hiperbolic structures on 3-manifolds*. PhD Thesis, Princenton Univ., 1985.

Dirección del autor

Józef H. Przytycki — Department of Mathematics, George Washington University, Washington D.C.

e-mail: przytyck@gwu.edu