EGYTENGELYŰ EREDŐ REOLÓGIA, ÉS RELAXÁCIÓ MINT DEVIATORIKUS KÚSZÁS

Fülöp Tamás
MTA KFKI RÉSZECSKE- ÉS MAGFIZIKAI KUTATÓINTÉZET, BUDAPEST
BME ENERGETIKAI GÉPEK ÉS RENDSZEREK TANSZÉK, BUDAPEST
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Jelen írás arról számol be, hogy ha egy szilárd közeg akár deviatorikus, akár gömbi szempontból reológiai viselkedésű, akkor egytengelyű terhelés során a feszültség és a megnyúlás között egy bonyolultabb, eredő reológiai kapcsolat lép föl. Így például a legegyszerűbb reológiai esetben, a gömbi szempontból HOOKE-*, deviatorikusan* KELVIN-*modell (Hooke-rugalmasság plusz torzulási viszkozitás) esetén az eredő egytengelyű reológia egy* POYNTING–THOMSON-*modell. Ezért már egy ilyen egyszerű reológiájú közeg is mutat relaxációs viselkedést. Ez a relaxáció tehát deviatorikus kúszásból fakad.*

1. A KELVIN+HOOKE-MODELL EREDŐ EGYTENGELYŰ REOLÓGIÁJA

Érdemes a legegyszerűbb, legátláthatóbb esettel kezdeni a tárgyalást: tekintsünk egy KELVIN+HOOKE-modellt, azaz mely deviatorikus szempontból egy KELVIN-típusú

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} = \alpha^{\mathrm{d}} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{d}} + \beta^{\mathrm{d}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{d}}, \tag{1}$$

gömbi szempontból pedig egy HOOKE-féle

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}} = \alpha^{\mathrm{s}} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{s}} \tag{2}$$

konstitúciós összefüggésnek tesz eleget, ahol a tenzorok $^{\mathrm{d}}$ deviatorikus (nyom nélküli) és $^{\mathrm{s}}$ gömbi (szférikus, spherical) részének definíciója

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}} = \frac{1}{3}\left(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\right)\mathbf{I}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{s}} = \frac{1}{3}\left(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\mathbf{I}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{d}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{s}}, \tag{3}$$

a felülpont pedig idő szerinti deriválást jelöl. Az együtthatókat szokásos a

$$\alpha^{\mathrm{d}} = 2G, \qquad \beta^{\mathrm{d}} = 2\eta, \qquad \alpha^{\mathrm{s}} = 3K \tag{4}$$

alakban írni.

A szilárdtestmechanikai laboratóriumi egytengelyű húzó- és nyomókísérletek olyan folyamatok, amelyek során jó közelítéssel teljesül, hogy a feszültségtenzor és a deformációtenzor helyfüggetlen és — egy alkalmas DESCARTES-térkoordináta-rendszer szerint — minden időpillanatban a következő alakú mátrixokkal jellemezhető:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{\parallel} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sigma^{\parallel} & & \\ & \sigma^{\parallel} & \\ & & \sigma^{\parallel} \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{\mathrm{d}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\sigma^{\parallel} & & \\ & -\sigma^{\parallel} & \\ & & -\sigma^{\parallel} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\parallel} & & \\ & \varepsilon^{\perp} & \\ & & \varepsilon^{\perp} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{s}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \varepsilon^{\parallel}+2\varepsilon^{\perp} & & \\ & \varepsilon^{\parallel}+2\varepsilon^{\perp} & \\ & & \varepsilon^{\parallel}+2\varepsilon^{\perp} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{d}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\left(\varepsilon^{\parallel}-\varepsilon^{\perp}\right) & & \\ & -\left(\varepsilon^{\parallel}-\varepsilon^{\perp}\right) & \\ & & -\left(\varepsilon^{\parallel}-\varepsilon^{\perp}\right) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

(Az $\varepsilon^{\parallel}$ tengelyirányú deformációkomponenst gyakran ε-ként, az $\varepsilon^{\perp}$ keresztirányú komponenst pedig $-\varepsilon_k$ -ként írják.) Az ilyen folyamatokra az (1) tenzoregyenlet egyetlen független skalár egyenletre vezet:

$$\sigma^{\parallel} = \alpha^{\mathrm{d}}\left(\varepsilon^{\parallel} - \varepsilon^{\perp}\right) + \beta^{\mathrm{d}}\left(\dot{\varepsilon}^{\parallel} - \dot{\varepsilon}^{\perp}\right) \tag{7}$$

a (2) összefüggés pedig a

$$\sigma^{\parallel} = \alpha^{\mathrm{s}}\left(\varepsilon^{\parallel} + 2\varepsilon^{\perp}\right) \tag{8}$$

egyenletre egyszerűsödik.

Tűzzük ki célul, hogy a (7)–(8) egyenletekből kiküszöböljük $\varepsilon^{\perp}$-t. Ehhez (7)-et írjuk a

$$\sigma^{\parallel} = \left(\alpha^{\mathrm{d}}\varepsilon^{\parallel} + \beta^{\mathrm{d}}\dot{\varepsilon}^{\parallel}\right) - \left(\alpha^{\mathrm{d}}\varepsilon^{\perp} + \beta^{\mathrm{d}}\dot{\varepsilon}^{\perp}\right), \tag{9}$$

(8)-at pedig a

$$\sigma^{\parallel} = \alpha^{\mathrm{s}}\varepsilon^{\parallel} + 2\alpha^{\mathrm{s}}\varepsilon^{\perp} \tag{10}$$

alakba. A (10) egyenlet időderiváltjának β^{d}-szereséhez adjuk hozzá a (10) egyenlet α^{d}-szeresét [azaz hattassuk a (10) egyenletre az $\alpha^{\mathrm{d}} + \beta^{\mathrm{d}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ időderiváló operátort]:

$$\alpha^{\mathrm{d}}\sigma^{\parallel} + \beta^{\mathrm{d}}\dot{\sigma}^{\parallel} = \alpha^{\mathrm{s}}\left(\alpha^{\mathrm{d}}\varepsilon^{\parallel} + \beta^{\mathrm{d}}\dot{\varepsilon}^{\parallel}\right) + 2\alpha^{\mathrm{s}}\left(\alpha^{\mathrm{d}}\varepsilon^{\perp} + \beta^{\mathrm{d}}\dot{\varepsilon}^{\perp}\right). \tag{11}$$

Adjuk ehhez az egyenlethez (9) $2\alpha^{\mathrm{s}}$-szeresét, hogy az $\varepsilon^{\perp}$-ra vonatkozó tagok kiessenek:

$$\left(\alpha^{\mathrm{d}} + 2\alpha^{\mathrm{s}}\right)\sigma^{\parallel} + \beta^{\mathrm{d}}\dot{\sigma}^{\parallel} = 3\alpha^{\mathrm{s}}\alpha^{\mathrm{d}}\varepsilon^{\parallel} + 3\alpha^{\mathrm{s}}\beta^{\mathrm{d}}\dot{\varepsilon}^{\parallel}, \tag{12}$$

azaz, $\sigma^{\parallel}$ együtthatóját 1-re normálva

$$\sigma^{\parallel} + \frac{\beta^{\mathrm{d}}}{\alpha^{\mathrm{d}} + 2\alpha^{\mathrm{s}}}\dot{\sigma}^{\parallel} = \frac{3\alpha^{\mathrm{s}}\alpha^{\mathrm{d}}}{\alpha^{\mathrm{d}} + 2\alpha^{\mathrm{s}}}\varepsilon^{\parallel} + \frac{3\alpha^{\mathrm{s}}\beta^{\mathrm{d}}}{\alpha^{\mathrm{d}} + 2\alpha^{\mathrm{s}}}\dot{\varepsilon}^{\parallel}. \tag{13}$$

Az egytengelyű húzó- vagy nyomóerőt jellemző $\sigma^{\parallel}$ és a megnyúlást-összenyomódást jellemző $\varepsilon^{\parallel}$ között tehát egy olyan eredő reológiai összefüggés teljesül, mely

$$\sigma^{\parallel} + \tau\dot{\sigma}^{\parallel} = \alpha\varepsilon^{\parallel} + \beta\dot{\varepsilon}^{\parallel} \tag{14}$$

alakú, azaz egy POYNTING–THOMSON-modell. Az eredő modell három együtthatóját a három eredeti konstitúciós együttható a

$$\tau = \frac{\beta^{\mathrm{d}}}{\alpha^{\mathrm{d}} + 2\alpha^{\mathrm{s}}}, \qquad \alpha = \frac{3\alpha^{\mathrm{s}}\alpha^{\mathrm{d}}}{\alpha^{\mathrm{d}} + 2\alpha^{\mathrm{s}}}, \qquad \beta = \frac{3\alpha^{\mathrm{s}}\beta^{\mathrm{d}}}{\alpha^{\mathrm{d}} + 2\alpha^{\mathrm{s}}} \tag{15}$$

módon határozza meg. Az innen levezethető fordított irányú összefüggések, azaz az

$$\alpha^{\mathrm{d}} = \frac{2}{3}\frac{\alpha\beta}{\beta - \tau\alpha}, \qquad \beta^{\mathrm{d}} = \frac{2}{3}\frac{\beta^2}{\beta - \tau\alpha}, \qquad \alpha^{\mathrm{s}} = \frac{1}{3}\frac{\beta}{\tau} \tag{16}$$

képletek például olyankor lehetnek hasznosak, ha egy egytengelyű kísérlet során lemérjük a $\sigma^{\parallel}(t)$, $\varepsilon^{\parallel}(t)$ függvényeket, valamilyen kiértékeléssel meghatározzuk belőlük a τ, α, β egytengelyű reológiai paramétereket, és azokból kívánunk visszakövetkeztetni a deviatorikus és gömbi együtthatókra.

2. RELAXÁCIÓ – MINT DEVIATORIKUS KÚSZÁS

A KELVIN+HOOKE-modell egytengelyű eredője tehát egy POYNTING–THOMSON-modell, ez pedig egy olyan modell, amely megengedi a relaxáció jelenségét, azaz amikor $\varepsilon^{\parallel}$ értékét egy nemnulla állandó értéken tartjuk, és azt tapasztaljuk, hogy ez az állapot időfüggő, csökenő feszültséggel jár együtt. Ilyenkor ugyanis $\varepsilon^{\parallel} = \varepsilon^{\parallel}(0) = \text{const.}, \ \dot{\varepsilon}^{\parallel} = 0,$ és a (14) differenciálegyenlet megoldása $\sigma^{\parallel}(t)$-re

$$\sigma^{\parallel}(t) = \alpha\varepsilon^{\parallel}(0) + \left[\sigma^{\parallel}(0) - \alpha\varepsilon^{\parallel}(0)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{17}$$

alakú, azaz a feszültség a kezdeti értékről exponenciális csökkenéssel relaxál a statikus HOOKE-érték felé.

Ha egy ilyen relaxáció során az $\varepsilon^{\perp}$ keresztirányú deformációra is vetünk egy pillantást, a (8)-ból adódó

$$\varepsilon^{\perp} = \frac{1}{2}\left(\sigma^{\parallel} - \alpha^{\mathrm{s}}\varepsilon^{\parallel}\right) \tag{18}$$

összefüggés alapján azt láthatjuk, hogy $\sigma^{\parallel}$ időfüggésével együtt $\varepsilon^{\perp}$ is változik időben, tehát a tengelyirányú mozdulatlanság nem jár teljes mozdulatlansággal. Torzulási+gömbi szemszögből pedig úgy fogalmazhatunk, hogy a deviatorikus deformáció is változik időben, és folyamatosan zajlik egy deviatorikus kúszás, melyet a deviatorikus KELVIN-modell vezényel.

Megjegyzendő, hogy a kúszás fogalma itt nem abban a szűkebb értelemben van értve, hogy állandó nemnulla feszültséget tartva a deformáció változik, ahhoz az értékhez tartva, ami e feszültséghez HOOKE-rugalmasság esetén tartozik.[1] Abban az általánosabb értelemben van itt szó kúszásról, hogy a feszültség *lehet időfüggő*, de mindig a *pillanatnyi* feszültség szabja meg, hogy a deformáció épp mely értékhez igyekszik tartani: ha a feszültség mostantól kezdve nem változna, akkor az ennek megfelelő HOOKE-féle értékhez tart, ha ezután is változik, akkor mindig a pillanatnyi HOOKE-érték „a célja".

A csak közvetlen rugalmas választ plusz kúszást leírni tudó deviatorikus KELVIN-modell, összecsatolódva a még ennél is „feszesebb" (azaz csakis közvetlen rugalmas választ leíró) gömbi HOOKE-modellel, képes tehát egytengelyű *relaxáció* produkálására. Ugyanígy generálódik relaxáció az egytengelyű folyamatokon kívül minden más olyan folyamattípusban is, ahol a megfigyelt mennyiségek (feszültségek, deformációk) nem tisztán *deviatorikusak* és nem tisztán *gömbiek*, hanem a deviatorikus és a gömbi mennyiségek valamilyen *kombinációi*.

Az eredő reológiában generálódó relaxáció egy kellemes hír a szilárd közegek reológiai modellezése számára. Ha ugyanis egy közegtípusra egy egytengelyű (vagy bármely más nem tisztán deviatorikus) folyamat során relaxáció jelenségét figyeljük meg, nem szükséges egyből legalább POYNTING–THOMSON-modellre gondolni mind a deviatorikus, mind a gömbi konstitúciós összefüggéseket illetően (mondván, hogy a POYNTING–THOMSON-modell a létező legegyszerűbb reológiai modell[2], amely relaxációt is képes leírni). Az ugyanis $3 + 3 = 6$ anyagi együtthatóval járna, ennyi együttható kísérleti meghatározása azonban igencsak komoly kihívás. Szerencsére azonban erre nem feltétlenül van szükség, mert az itt látottak szerint egy sokkal kevesebb paraméterrel jellemzett modellpár is megmagyarázhatja az észlelt relaxációt. Természetesen gondos és célzatos vizsgálatokra lehet szükség annak eldöntésére, hogy egy közegtípust milyen konstitúciós összefüggésekkel lehet kielégítően modellezni: kiderülhet az is, hogy mégiscsak szükség van POYNTING–THOMSON- vagy általánosabb modellekre, de az is, hogy elegendőek bizonyos egyszerűbb modellek a deviatorikus és a gömbi szektorban.[3]

Ha tehát egy egytengelyű kísérletre jól illeszkedik a (14) egyenlet, azaz egy eredő POYNTING–THOMSON-modell, akkor (16) segítségével egy KELVIN–HOOKE-modell tehető mögéje, és a relaxáció elemibb magyarázatot nyer: egyszerűen kúszásként magyarázható.

[1] ASSZONYI CS. meglátása szerint a kísérletekben állandónak tartott terhelő *erő* nem is jelent állandó *feszültséget*, a keresztmetszet időfüggése miatt, illetve eleve többértelműséget okoz, hogy CAUCHY-, PIOLA-KIRCHHOFF-I- vagy PIOLA-KIRCHHOFF-II-féle feszültségről beszélünk-e.

[2] a termodinamikailag is megengedettek közül [ASSZONYI–FÜLÖP–VÁN–SZARKA–HORVÁTH (2008)]

[3] A tudományos megismerés módszertanában ismeretes az „OCCAM (OCKHAM) borotvájának" nevezett elv, miszerint ha két elmélet is kielégítően magyaráz egy jelenséget, akkor válasszuk azt, amelyik az egyszerűbb.

3. MAGASABBRENDŰ REOLÓGIAI MODELLEK EGYTENGELYŰ EREDŐJE

Most pedig következzen az általános módszer, mellyel tetszőleges lineáris, időderiváltakat véges rendig tartalmazó konstitúciós összefüggések esetén meghatározható az egytengelyű eredő reológia. A konstitúciós összefüggések legyenek tehát most általában

$$\mathcal{S}^{\mathrm{d}}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} = \mathcal{E}^{\mathrm{d}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{d}}, \tag{19}$$

$$\mathcal{S}^{\mathrm{s}}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}} = \mathcal{E}^{\mathrm{s}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{s}} \tag{20}$$

alakúak, ahol az $\mathcal{S}^{\mathrm{d}}$, $\mathcal{S}^{\mathrm{s}}$, $\mathcal{E}^{\mathrm{d}}$, $\mathcal{E}^{\mathrm{s}}$ időderiváló operátorok mind $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ valamilyen polinomjai.[4] Példaként érdemes kiírni a tehetetlenségi POYNTING–THOMSON–tehetetlenségi POYNTING–THOMSON-esetet, azaz a

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} + \tau^{\mathrm{d}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{d}} = \alpha^{\mathrm{d}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{d}} + \beta^{\mathrm{d}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{d}} + \gamma^{\mathrm{d}}\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{d}}, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}} + \tau^{\mathrm{s}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{s}} = \alpha^{\mathrm{s}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{s}} + \beta^{\mathrm{s}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{s}} + \gamma^{\mathrm{s}}\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{s}} \tag{22}$$

összefüggéspárt, mely azért érdekes, mert a tenzoriális belső változós nemegyensúlyi termodinamika ezt a modellpárt tünteti ki, mint egy univerzális általános reológiai keretet [ASSZONYI–VÁN–SZARKA (2007)], [VÁN–ASSZONYI (2008)], [VÁN (2008)]. E modellpár együtthatóit jelölik a

$$\tau^{\mathrm{d}} = \tau, \qquad \alpha^{\mathrm{d}} = 2G, \qquad \beta^{\mathrm{d}} = 2\eta, \qquad \gamma^{\mathrm{d}} = \theta, \tag{23}$$

$$\tau^{\mathrm{s}} = \tau_{\mathrm{o}}, \qquad \alpha^{\mathrm{s}} = 3K, \qquad \beta^{\mathrm{s}} = 3K_v, \qquad \gamma^{\mathrm{s}} = \theta_{\mathrm{o}} \tag{24}$$

módon is.

Nos, egytengelyű folyamatok [ld. (5)–(6)] esetén (19) az egyetlen skalár

$$\mathcal{S}^{\mathrm{d}}\sigma^{\parallel} = \mathcal{E}^{\mathrm{d}}\left(\varepsilon^{\parallel} - \varepsilon^{\perp}\right) \tag{25}$$

egyenletre, (20) pedig a

$$\mathcal{S}^{\mathrm{s}}\sigma^{\parallel} = \mathcal{E}^{\mathrm{s}}\left(\varepsilon^{\parallel} + 2\varepsilon^{\perp}\right) \tag{26}$$

egyenletre egyszerűsödik. Az előző szakaszban látott lépések általános megfelelőjeként hattassuk $2\mathcal{E}^{\mathrm{s}}$-t (25)-re, $\mathcal{E}^{\mathrm{d}}$-t pedig (8)-ra, és adjuk össze a két eredményt. Észrevéve, hogy $\mathcal{E}^{\mathrm{s}}\mathcal{E}^{\mathrm{d}} = \mathcal{E}^{\mathrm{d}}\mathcal{E}^{\mathrm{s}}$, — és hogy általánosabban is, bármely két, állandó együtthatókkal rendelkező véges rendű lineáris differenciáloperátor felcserélhető, — az összeg az

$$\left(\mathcal{S}^{\mathrm{s}}\mathcal{E}^{\mathrm{d}} + 2\mathcal{S}^{\mathrm{d}}\mathcal{E}^{\mathrm{s}}\right)\sigma^{\parallel} = 3\mathcal{E}^{\mathrm{d}}\mathcal{E}^{\mathrm{s}}\varepsilon^{\parallel} \tag{27}$$

[4] $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ egy polinomja egy $c_0 + \ldots + c_n\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n$ alakú differenciáloperátor, állandó c_i együtthatókkal; mely tehát egy $f(t)$ függvényre hatva a $c_0 f + \ldots + c_n\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}$ eredményt adja. A polinom n foka a differenciáloperátor rendje. Az $\mathcal{S}^{\mathrm{d}}$, $\mathcal{S}^{\mathrm{s}}$, $\mathcal{E}^{\mathrm{d}}$, $\mathcal{E}^{\mathrm{s}}$ operátorok általában mind különböző rendűek lehetnek.

alakba írható. A bal oldalon $\sigma^{\shortparallel}$ együtthatóját a konvenció szerint 1-re normálva, a végeredmény:

$$\frac{1}{\alpha^{\rm d}+2\alpha^{\rm s}}\left(\mathcal{S}^{\rm s}\mathcal{E}^{\rm d}+2\mathcal{S}^{\rm d}\mathcal{E}^{\rm s}\right)\sigma^{\shortparallel}=\frac{3}{\alpha^{\rm d}+2\alpha^{\rm s}}\,\mathcal{E}^{\rm d}\mathcal{E}^{\rm s}\,\varepsilon^{\shortparallel}. \tag{28}$$

Példaként tekintsük (28)-at a (21)–(22) tehetetlenségi POYNTING–THOMSON–tehetetlenségi POYNTING–THOMSON-esetben: a vonatkozó behelyettesítések, beszorzások, és a megfelelő tagok csoportosítása után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\sigma^{\shortparallel}+\frac{\beta^{\rm d}+2\beta^{\rm s}+\tau^{\rm s}\alpha^{\rm d}+2\tau^{\rm d}\alpha^{\rm s}}{\alpha^{\rm d}+2\alpha^{\rm s}}\,\dot{\sigma}^{\shortparallel}+\\
&\quad+\frac{\gamma^{\rm d}+2\gamma^{\rm s}+\tau^{\rm s}\beta^{\rm d}+2\tau^{\rm d}\beta^{\rm s}}{\alpha^{\rm d}+2\alpha^{\rm s}}\,\ddot{\sigma}^{\shortparallel}+\\
&\qquad+\frac{\tau^{\rm s}\gamma^{\rm d}+2\tau^{\rm d}\gamma^{\rm s}}{\alpha^{\rm d}+2\alpha^{\rm s}}\,\dddot{\sigma}^{\shortparallel}=\frac{3\alpha^{\rm s}\alpha^{\rm d}}{\alpha^{\rm d}+2\alpha^{\rm s}}\,\varepsilon^{\shortparallel}+\frac{3\left(\alpha^{\rm s}\beta^{\rm d}+\alpha^{\rm d}\beta^{\rm s}\right)}{\alpha^{\rm d}+2\alpha^{\rm s}}\,\dot{\varepsilon}^{\shortparallel}+\\
&\qquad\qquad+\frac{3\left(\alpha^{\rm d}\gamma^{\rm s}+\beta^{\rm s}\beta^{\rm d}+\alpha^{\rm s}\gamma^{\rm d}\right)}{\alpha^{\rm d}+2\alpha^{\rm s}}\,\ddot{\varepsilon}^{\shortparallel}+\\
&\qquad\qquad+\frac{3\left(\beta^{\rm d}\gamma^{\rm s}+\beta^{\rm s}\gamma^{\rm d}\right)}{\alpha^{\rm d}+2\alpha^{\rm s}}\,\dddot{\varepsilon}^{\shortparallel}+\frac{3\gamma^{\rm s}\gamma^{\rm d}}{\alpha^{\rm d}+2\alpha^{\rm s}}\,\ddddot{\varepsilon}^{\shortparallel}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Láthatóan, ez az eredő reológiai modell már egy olyan „monstrum”, amelyben a feszültség harmadik, és a deformáció negyedik deriváltjáig bezárólag jelennek meg deriváltak. Természetesen a (29) képlet speciális esetként tartalmazza az előző szakaszban tekintett KELVIN–HOOKE-esetet is, és az összes többi egyszerűbb speciális eset (pl. a POYNTING–THOMSON–POYNTING–THOMSON-modellpár) eredő reológiai egyenlete is leolvasható belőle.

4. AZ EGYTENGELYŰ EREDŐ MINT REOLÓGIAI ELEMKAPCSOLÁS

Az iménti levezetés annak analógiája, ahogyan [FÜLÖP (2008)] tetszőleges véges, lineáris reológiai modellek soros és párhuzamos kapcsolásainak eredő egyenleteit származtatja. Érdekes és nem haszontalan megjegyezni, hogy igazából többről is van itt szó, mint analógiáról. Ezek a lépések ugyanis *pontosan* annak felelnek meg, ahogyan az ember a

$$(D\sim D\sim S)\,||\,(D\sim D\sim S)\,||\,(D\sim D\sim S) \tag{30}$$

kapcsolás reológiai egyenletét vezetheti le, ahol D a deviatorikus, S a gömbi reológiai modell, és $\sim$ a soros, $||$ pedig a párhuzamos kapcsolást jelöli. Ez az állítás egyszerűen belátható abból, ahogyan [FÜLÖP (2008)] differenciáloperátorosan származtatja kapcsolások soros és párhuzamos eredőjét.

A (30) kapcsolás szemlélteti tehát az egytengelyű eredő modellt, mégpedig nemcsak kvalitatíve, hanem kvantitatíve is, tehát a (29) egyenlet minden konstansát is pontosan reprodukálva.

Köszönetmondás

Köszönet illeti Asszonyi Csabát, a probléma felvetéséért és a hasznos diszkussziókért. Jelen írást az OTKA K81161 számú pályázata támogatta.

Irodalom

Asszonyi, Cs. – Fülöp, T. – Ván, P. – Szarka, Z. – Horváth, R. (2008): Reológiai alapmodellek és összekapcsolásuk, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **6**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest, pp. 53–92.

Asszonyi, Cs. – Ván, P. – Szarka, Z. (2007): Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **5**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

Fülöp, T. (2008): Reológiai elemkapcsolások, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia. In: Asszonyi, Cs. (szerk.), Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **6**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

Ván, P. (2008): Objective time derivatives in nonequilibrium thermodynamics, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* **57** (2008) 127–131.

Ván, P. – Asszonyi, Cs. (2008): Izotrop kontinuumok anyagtörvényei és speciális esetei, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia. In: Asszonyi, Cs. (szerk.), Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **6**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.