Geomatikai Közlemények VIII., 2005

A NEHÉZSÉGI ERŐTÉR POTENCIÁLFÜGGVÉNYÉNEK INVERZIÓS REKONSTRUKCIÓJA EÖTVÖS-INGA ADATOK ALAPJÁN

Dobróka Mihály[1], *Völgyesi Lajos*[2,3]

Inversion reconstruction of gravity potential based on torsion balance measurements - *Suggestion can be found here for the inversion reconstruction of gravity potential. The suggested method gives a possibility to determine deflections of the vertical based on torsion balance measurements. Accuracy of this method is better than the accuracy of the former interpolation methods, and it is possible to avoid some types of earlier interpolation problems.*

Keywords: inversion, deflection of the vertical, torsion balance measurements

A nehézségi erőtér potenciálfüggvényének inverziós rekonstrukciójára teszünk javaslatot. A javasolt módszerrel lehetőség nyílik Eötvös-inga mérési adatok felhasználásával függővonal-elhajlás meghatározására, az eddig alkalmazott interpolációs módszerek pontosságát felülmúló számítások elvégzésére és a korábban alkalmazott eljárások során felmerülő bizonyos problémák áthidalására.

Kulcsszavak: inverzió, függővonal-elhajlás, Eötvös-inga mérések

Bevezetés

Magyarországon az elmúlt 100 évben mintegy 60000 Eötvös-inga mérést végeztek. Mivel a mérések nyersanyag kutatás céljából történtek, ezért csak a W_{zx} és a W_{zy} horizontális gradienseket dolgozták fel. A geodéziában fontos W_{Δ} és W_{xy} görbületi adatok eddig feldolgozatlanok maradtak, pedig ezek jó lehetőséget teremtenek a függővonal-elhajlás meghatározására *(Völgyesi, 1993, 1995)*.

Az alábbiakban a nehézségi erőtér potenciálfüggvényének inverziós rekonstrukciójára teszünk javaslatot. Úgy véljük a javasolt módszerrel lehetőség nyílik az eddig alkalmazott interpolációs módszerek pontosságát felülmúló számítások elvégzésére és a korábban alkalmazott eljárások során felmerülő bizonyos problémák áthidalására. Az inverziós algoritmus ellenőrzésére szintetikus adatokon végeztünk vizsgálatot.

Az inverziós algoritmus

Vegyük fel a nehézségi erőtér $W(x,y)$ potenciálját valamely $\Psi_0 .... \Psi_P$ (ismert) bázisfüggvény rendszer szerinti sorfejtés alakjában:

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{P+1} \sum_{i=0}^{n-1} B_j \Psi_i(y) \Psi_l(x) \ ,$$

ahol

$j = \frac{n(n-1)}{2} + i$, $l = n - i - 1$ és B_j (ismeretlen) sorfejtési együtthatók. Az ismeretlenek száma: $M = \frac{P(P+1)}{2} + P + 1$. (Általánosságban a bázisfüggvények sokfélék lehetnek, a jelen dolgozatban azonban bázisfüggvényekként hatványfüggvényeket vagy Chebishev, Legendre, stb. polinomokat tételezünk fel.)

A direkt feladat megoldását (W_{Δ} és W_{xy} görbületi adatok elméleti értékeit) ezzel előállíthatjuk a

[1] *Miskolci Egyetem, Geofizikai Tanszék, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, E-mail: dobroka@gold.uni-miskolc.hu*
[2] *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Általános és Felsőgeodézia Tanszék H-1521 Budapest*
[3] *Magyar Tudományos Akadémia Felsőgeodéziai és Geodinamikai Kutatócsoport, E-mail: volgyesi@eik.bme.hu*

$$W_{xy}^{számított} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \sum_{n=1}^{P+1} \sum_{i=0}^{n-1} B_j \Psi_i^{'}(y) \Psi^{'}{}_l(x)$$

$$W_{\Delta}^{számított} = W_{yy} - W_{xx} = \sum_{n=1}^{P+1} \sum_{i=0}^{n-1} B_j \left\{ \Psi_i^{''}(y) \Psi_l(x) - \Psi_i(y) \Psi^{''}{}_l(x) \right\}$$

alakban. A k-ik mérési pontban (x_k, y_k) az

$$S_{kj} = \Psi_i^{'}(y_k) \Psi^{'}{}_l(x_k) \quad \text{és} \quad Q_{kj} = \Psi_i^{''}(y_k) \Psi_l(x_k) - \Psi_i(y_k) \Psi^{''}{}_l(x_k)$$

jelöléssel a számított Eötvös-inga adatok:

$$W_{xy}^{(k)} = \sum_{j=1}^{M} B_j S_{kj} \quad \text{és} \quad W_{\Delta}^{(k)} = \sum_{j=1}^{M} B_j Q_{kj} \ ,$$

ahol

S_{kj}, Q_{kj} ismert mátrix elemek (a j indexet i és l értéke egyértelműen meghatározza).

A mért és a számított adatok eltérésvektorának elemei ezzel

$$e_k = W_{xy_{mért}}^{(k)} - \sum_{j=1}^{M} B_j S_{kj} \quad \text{és} \quad f_k = W_{\Delta_{mért}}^{(k)} - \sum_{j=1}^{M} B_j Q_{kj} \quad .$$

A minimalizálandó függvény legyen pl. az eltérésvektor L_2 normája:

$$E = \sum_{k=1}^{N_1} e_k^2 + \sum_{k=1}^{N_2} f_k^2 \quad ,$$

ahol

N_1 a W_{xy} ill. N_2 a W_{Δ} mérési adatok száma. Vektor írásmódot alkalmazva vezessük be a

$$\vec{d}^{(mért)} = \left\{ W_{xy}^{(1)}, \ldots, W_{xy}^{(N_1)}, W_{\Delta}^{(1)}, \ldots, W_{\Delta}^{(N_2)} \right\}, \quad G_{kj} = \begin{cases} S_{kj} & k \le N_1 \\ Q_{kj} & N_1 < k \le N_1 + N_2 \end{cases}$$

és az

$$\vec{e} = \vec{d}^{(mért)} - \underline{\underline{G}}\vec{B} \quad ,$$

$$E = (\vec{e}, \vec{e}) = \sum_{k=1}^{N} e_k^2$$

jelöléseket, ahol

$N = N_1 + N_2$.

Az így definiált inverz feladat megoldását a $\frac{\partial E}{\partial B_l} = 0$, $(l = 1, \ldots, M)$ feltételrendszer alapján felállított

$$\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} \vec{B} = \underline{\underline{G}}^T \vec{d}^{(mért)}$$

egyenletrendszerből kapjuk:

$$\vec{B} = \left(\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} \right)^{-1} \underline{\underline{G}}^T \vec{d} \quad .$$

Az inverz probléma tehát lineáris, megoldásával a sorfejtési együtthatók $\vec{B}$ vektora meghatározható. Mivel Eötvös-inga adataink a potenciálfüggvény második deriváltjaival modellezhetők, a B_0, B_1, B_2 együtthatókra (konstans tag, x-ben ill. y-ban lineáris tagok együtthatói) a fentiekben nincs egyenlet!

A B_0 konstans a továbbiak szempontjából nem lényeges (a potenciál csak egy additív konstans erejéig meghatározott), B_1, B_2 előállítása azonban további információ bevonásával, pl. függővonal elhajlás adatok felhasználásával lehetséges az alábbi megfontolás alapján:

A függővonal elhajlás két horizontális összetevője:

$$\xi = \Phi - \varphi, \qquad \eta = (\Lambda - \lambda)\cos\varphi \quad ,$$

ahol

Φ, Λ a szintfelületi, φ, λ az ellipszoidi földrajzi koordináták, amelyekre

$$g\xi = -W_x + U_x \quad \text{és} \quad g\eta = -W_y + U_y \quad .$$

Itt U az ellipszoidi normáltér ismert potenciálfüggvénye, g az átlagos nehézségi gyorsulás.

Az első deriváltak a függővonal elhajlásból:

$$W_x = -g\xi + U_x \quad \text{és} \quad W_y = -g\eta + U_y \quad .$$

A potenciál sorfejtéses előállításából

$$W_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \sum_{n=1}^{P+1}\sum_{i=0}^{n-1} B_j \Psi_i^{'}(x)\Psi_l(y) = B_1 + F(x,y)$$

$$W_y = \frac{\partial W}{\partial y} = \sum_{n=1}^{P+1}\sum_{i=0}^{n-1} B_j \Psi_i(x)\Psi_l^{'}(y) = B_2 + G(x,y) ,$$

ahol

$F(x,y)$, $G(x,y)$ ismert (a benne szereplő $B_j\ (j \geq 3)$ együtthatók a fentiek szerint adottak).

Ha pl. $(x = x_1,\ y = y_1)$ -ben ismert a (ξ_1, η_1) függővonal elhajlás értéke, akkor

$$B_1 = -F(x_1,y_1) + U_x(x_1,y_1) - g\xi_1 \quad \text{és} \quad B_2 = -G(x_1,y_1) + U_y(x_1,y_1) - g\eta_1 \quad .$$

Az így előállított sorfejtési együtthatókkal (additív konstanstól eltekintve) a potenciál függvény az ismert bázisfüggvények felhasználásával a vizsgált (mérésekkel lefedett terület) bármely pontjában meghatározható.

Sajnos azonban ez az algoritmus ilyen formában nem mindig használható. Ha ugyanis (mint a fentiekben jeleztük) bázisfüggvényekként hatványfüggvényeket vagy polinomokat (Chebishev, Legendre, stb.) használunk a sorfejtési együtthatók függetlensége nem biztosított. A potenciálfüggvény

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{P+1}\sum_{i=0}^{n-1} B_j y^i x^{n-i-1}$$

szerinti előállítása esetén az indexek szerkezete pl. P=4 -re (M=15):

n	i	$j=\frac{n(n-1)}{2}+i$	x és y hatványai	W_{xy} *-ban szerepel*	W_Δ *-ban szerepel*	*Bármelyikben szerepel*
1	0	0	*konstans*	-	-	-
2	0	1	x	-	-	-
	1	2	y	-	-	-
3	0	3	x^2	-	+	+
	1	4	xy	+	-	+
	2	5	y^2	-	+	+
4	0	6	x^3	-	+	+
	1	7	x^2y	+	+	+
	2	8	xy^2	+	+	+
	3	9	y^3	-	+	+
5	0	10	x^4	-	+	+
	1	11	x^3y	+	+	+
	2	12	x^2y^2	+	+	+
	3	13	xy^3	+	+	+
	4	14	y^4	-	+	+

A $\underline{\underline{G}}$ Jacobi mátrix első három oszlopában minden mérési ponthoz tartozóan konstansok szerepelnek a

n	i	l	$j=\frac{n(n-1)}{2}+i$	x és y hatványai	*Jacobi mátrix* W_{xy} *-ból*	*Jacobi mátrix* W_Δ *-ból*
3	0	2	3	x^2	*0*	*-2*
	1	1	4	xy	*1*	*0*
	2	0	5	y^2	*0*	*+2*

táblázat tanúsága szerint. E három oszlop tehát nem lineárisan független, így a normálegyenlet $\underline{\underline{G}}^T\underline{\underline{G}}$ mátrixa szinguláris lesz, az inverz feladat nem megoldható! A probléma megoldása az Eötvös inga adatok és függővonal elhajlás adatok együttes inverziójával lehetséges.

Az első derivált adatok a függővonal elhajlásból származtathatók:

$$W_x^{mért} = -g\xi^{mért} + U_x \quad \text{és} \quad W_y^{mért} = -g\eta^{mért} + U_y \quad .$$

A potenciál sorfejtéses előállításával ezek számított értéke

$$W_x^{számított} = \frac{\partial W}{\partial x} = \sum_{n=1}^{P+1}\sum_{i=0}^{n-1} B_j \Psi_i^{'}(x)\Psi_{\,l}(y) = \sum_{j=1}^{M} B_j R_{kj}$$

$$W_y^{számított} = \frac{\partial W}{\partial y} = \sum_{n=1}^{P+1}\sum_{i=0}^{n-1} B_j \Psi_i\,(x)\Psi^{'}_{\,l}(y) = \sum_{j=1}^{M} B_j Z_{kj}$$

ahol

$$R_{kj} = \Psi_i^{'}(x_k)\Psi_{\,l}(y_k)\,,\quad Z_{kj} = \Psi_i\,(x_k)\Psi^{'}_{\,l}(y_k)\,,\quad (j = \frac{n(n-1)}{2} + i)$$

A mért adatok vektorát az első deriváltak (mért függővonal elhajlási adatokból származtatott értékeivel) kiegészítve:

$$\vec{d}^{(mért)} = \left\{ W_{xy}^{(1)},...,W_{xy}^{(N_1)}, W_{\Delta}^{(1)},...,W_{\Delta}^{(N_2)}, W_{x}^{(1)},...,W_{x}^{(N_3)}, W_{y}^{(1)},...,W_{y}^{(N_4)} \right\}$$

Hasonló szerkezetben állíthatjuk elő a számított adatok vektorát, amihez szükséges a Jacobi mátrix szerkezetét is kiterjesztenünk az alábbiak szerint:

$$G_{kj} = \begin{cases} S_{kj} & k \le N_1 \\ Q_{kj} & N_1 < k \le N_1 + N_2 \\ R_{kj} & N_1 + N_2 < k \le N_1 + N_2 + N_3 \\ Z_{kj} & N_1 + N_2 + N_3 < k \le N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \end{cases} .$$

A számított adatok ezzel:

$$d_k^{számított} = \sum_{j=1}^{M} B_j G_{kj} \text{ ill. } \vec{d}^{(számított)} = \underline{\underline{G}}\vec{B} \quad ,$$

ahol

$$\vec{e} = \vec{d}^{(mért)} - \underline{\underline{G}}\vec{B} \quad ,$$

$$E = (\vec{e}, \vec{e}) = \sum_{k=1}^{N} e_k^2$$

és $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$.

Az így definiált inverz feladat megoldását ismét a $\frac{\partial E}{\partial B_l} = 0$, $(l = 1,...,M)$ alapján kapjuk:

$$\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}}\,\vec{B} = \underline{\underline{G}}^T \vec{d}^{(mért)}$$

ahonnan

$$\vec{B} = \left(\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}}\right)^{-1} \underline{\underline{G}}^T \vec{d}$$

Ez az algoritmus numerikusan stabil, amit az alábbi tesztekkel igazolunk.

Tesztelés szintetikus adatokkal

A teszt területet az x,y koordináták -1, +1 intervallumán definiáltuk és felvettük a

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{P+1} \sum_{i=0}^{n-1} B_j y^i x^{n-i-1} \quad (P = 4,\ M = 15)$$

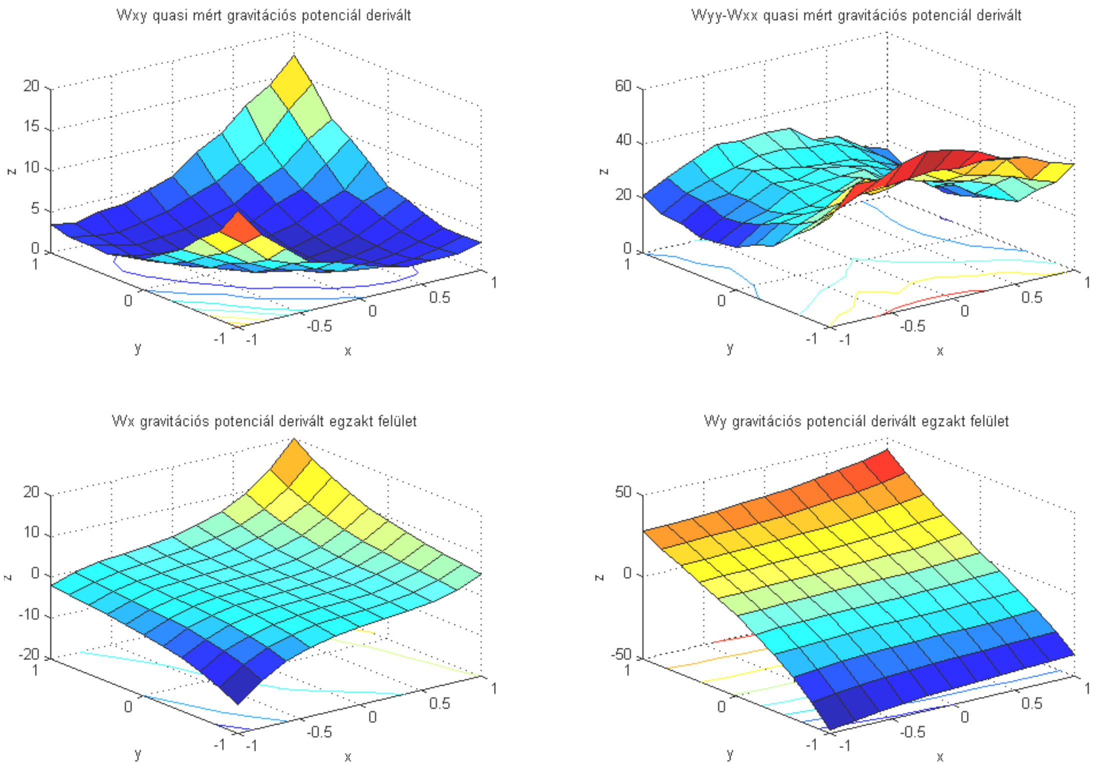
potenciálfelületet a

$$\vec{B} = \{0.1, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 15.0, 0.5, 0.5, 0.5, -1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5\}$$

sorfejtési együtthatókkal! A szintetikus adatrendszert a következőképpen állítjuk elő:

1.) $N_1 = 121$ „mérési” pontban ($\Delta x = \Delta y = 0.2$) számítjuk W_Δ és W_{xy} értékeit és 5% véletlen zajjal (Gauss eloszlás) terheljük.
2.) $N_2 = 9$ „mérési” pontban ($\Delta x = \Delta y = 1.0$) számítjuk W_x és W_y értékeit és 5% véletlen zajjal (Gauss eloszlás) terheljük.

Az így kapott $N = 2*(N_1 + N_2) = 260$ adatot felhasználva együttes inverziót végzünk a Gauss-féle legkisebb négyzetek (LSQ) módszerével a példában szereplő mindössze 15 ismeretlen meghatározására (a feladat tehát jelentősen túlhatározott). A bemenő adatrendszert az *1. ábra* mutatja.



1. ábra. A W_{xy} és W_Δ bemenő adatrendszer (5% zajjal terhelve) és az egzakt W_x, W_y felülete

Az inverziós eredmény minősítésére használt mennyiségek *(Dobróka et al., 1991)*:

adattérbeli (relatív) távolság:

$$D_d = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{d_k^{mért} - d_k^{számított}}{d_k^{számított}}\right)^2}$$

paramétertérbeli távolság:

$$D_m = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{m_k^{becsült} - m_k^{felvett}}{m_k^{felvett}}\right)^2}$$

paraméter kovariancia mátrix (főátlóban a paraméter becslési hibák):

$$\underline{\underline{COV\,(\vec{m})}} = \sigma^2\left(\underline{\underline{G}}^T\,\underline{\underline{G}}\right)^{-1}$$

paraméter korrelációs mátrix:

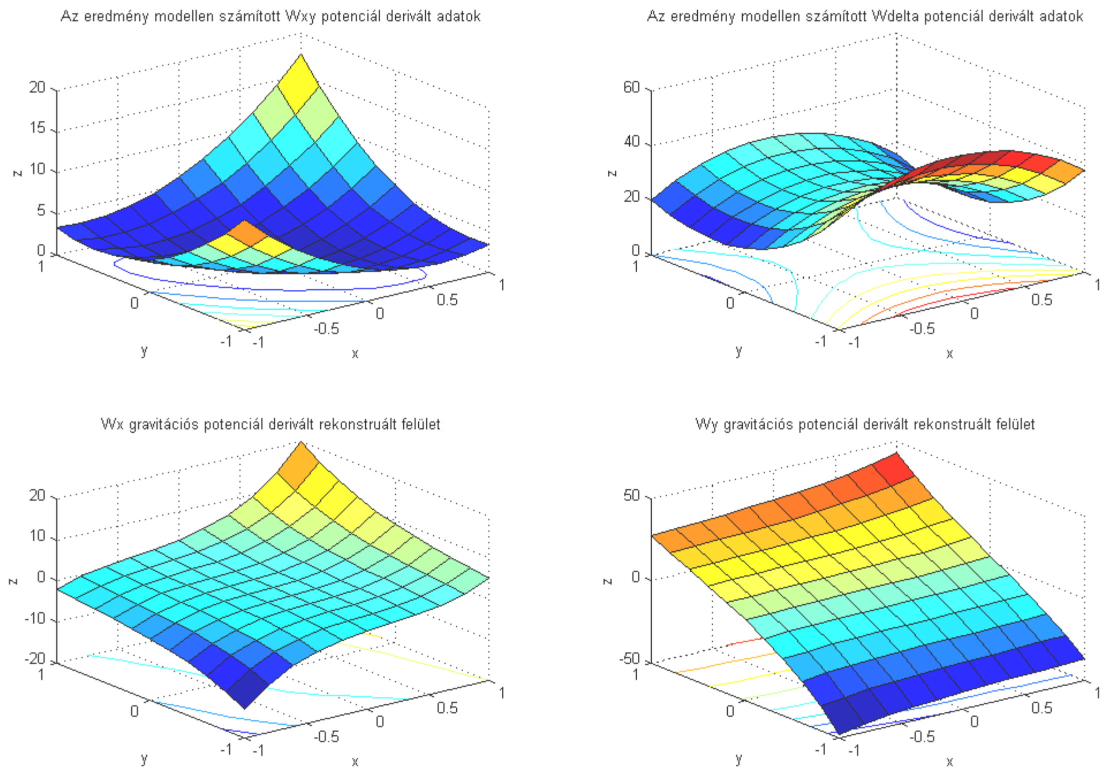
$$corr_{ij} = \frac{\mathrm{cov}_{ij}}{\sqrt{\mathrm{cov}_{ii}\,\mathrm{cov}_{jj}}}$$

A paramétervektor elemeinek induló értékeit (start modell) minden esetben zérusnak vettük. Az inverzió eredményeként kapott (becsült) sorfejtési együtthatókat az *I. táblázatban* mutatjuk be. A táblázat első sorában összehasonlításul bemutatjuk a teszt céljára felvett együtthatókat, a harmadik sor pedig a %-osan kifejezett paraméterbecslési hibát mutatja.

I. táblázat. A paraméter vektor elemei

felvett	0.5	0.5	0.5	0.5	15.0	0.5	0.5	0.5	-1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
becsült	0.497	0.499	0.524	0.497	14.996	0.494	0.502	0.499	-1.492	1.492	1.478	1.502	1.505	1.479	1.442
hiba	0.440	0.445	1.408	0.185	1.954	0.418	0.241	0.241	0.753	0.753	0.483	0.273	0.306	0.273	0.612

A táblázat tanúsága szerint a (viszonylag) nagyszámú Eötvös inga adat és néhány függővonal elhajlási adat együttes inverziójára kidolgozott eljárás meglehetősen pontos paraméterbecslést eredményezett. Ezt a *2. ábra* is igazolja, különösen az *1. ábrával* való összehasonlítás után.



2. ábra. Az inverzió után az eredmény modellen számított W_{xy} és W_{Δ} adatrendszer valamint a rekonstruált W_x és W_y felület (ebből számítható a függővonal elhajlás bármely x,y pontban)

Az algoritmus stabilitását jól jellemzi a *II. táblázatban* bemutatott korrelációs mátrix. A főátlón kívüli elemek viszonylag kis korrelációt mutatnak az egyes ismeretlenek között.

II. táblázat. A korrelációs mátrix elemei (korrelációs átlag: 0.180)

1	0.0034	0.062	0.0103	0.0449	-0.1038	-0.0365	-0.092	-0.0073	0.0122	-0.0146	0.0182	0.0379	0.002
0.0034	1	0.0058	0.0125	0.0017	-0.0202	-0.0787	-0.0451	-0.0097	0.0007	0.052	0.0201	-0.0264	0.0037
0.062	0.0058	1	-0.0232	0.0942	0.3517	-0.0255	0.0135	-0.0501	-0.7302	0.0412	-0.0946	-0.024	0.0464
0.0103	0.0125	-0.0232	1	-0.0159	0.0359	0.1904	0.2023	0.0196	-0.0114	-0.3487	-0.1151	-0.352	-0.0092
0.0449	0.0017	0.0942	-0.0159	1	0.2313	-0.0221	0.0112	0.0017	0.3586	0.013	-0.0704	-0.0055	-0.5278
-0.1038	-0.0202	0.3517	0.0359	0.2313	1	0.1179	0.1659	0.0271	-0.1136	-0.079	0.038	0.1209	-0.0116
-0.0365	-0.0787	-0.0255	0.1904	-0.0221	0.1179	1	0.5696	0.1105	0.0206	0.2455	0.2451	0.0799	0.0225
-0.092	-0.0451	0.0135	0.2023	0.0112	0.1659	0.5696	1	0.0536	0.0318	0.0719	0.2467	0.2393	0.0199
-0.0073	-0.0097	-0.0501	0.0196	0.0017	0.0271	0.1105	0.0536	1	0.0855	0.0578	0.0258	-0.0232	-0.3429
0.0122	0.0007	-0.7302	-0.0114	0.3586	-0.1136	0.0206	0.0318	0.0855	1	0.046	0.1054	0.0673	-0.0769
-0.0146	0.052	0.0412	-0.3487	0.013	-0.079	0.2455	0.0719	0.0578	0.046	1	0.5395	0.0774	0.0528
0.0182	0.0201	-0.0946	-0.1151	-0.0704	0.038	0.2451	0.2467	0.0258	0.1054	0.5395	1	0.5419	0.0834
0.0379	-0.0264	-0.024	-0.352	-0.0055	0.1209	0.0799	0.2393	-0.0232	0.0673	0.0774	0.5419	1	0.0373
0.002	0.0037	0.0464	-0.0092	-0.5278	-0.0116	0.0225	0.0199	-0.3429	-0.0769	0.0528	0.0834	0.0373	1

Az I. táblázat adatai alapján az átlagos becslési hiba 0.58%, a II. táblázat főátlón kívüli elemeinek átlaga (a korrelációs norma) 0.180 – tehát az inverziós algoritmus igen stabil.

Összefoglalás

A bemutatott módszer a potenciálfüggvény nagyszámú Eötvös-inga adat és néhány (pl. csillagászati) függővonal elhajlás adat együttes inverziójának felhasználásával történő meghatározására nyújt lehetőséget. Az így rekonstruált potenciálfüggvényből számos gyakorlati fontosságú „teret”, (pl. függővonal elhajlást) a vizsgálati terület bármely pontján leszármaztathatunk. Az eljárás előnye, hogy mindezt egy jelentősen túlhatározott inverz probléma megoldásával tehetjük.

Köszönetnyilvánítás

A nehézségi erőtér potenciálfüggvényének inverziós rekonstrukciójával kapcsolatos kutatások a T-037929 sz. OTKA anyagi támogatásával folynak.

Hivatkozások

Dobróka M, Gyulai Á, Ormos T, Csókás J, Dresen L (1991) Joint inversion of seismic and geoelectric data recorded in an under-ground coal mine. *Geophysical Prospecting* 39, 643-665.

Völgyesi L (1993) Interpolation of deflection of the vertical based on gravity gradients. *Periodica Polytechnica Civ.Eng.*, 37; 2, 137-166.

Völgyesi L (1995) Test Interpolation of deflection of the vertical in Hungary based on gravity gradients. *Periodica Polytechnica Civ.Eng.*, 39; 1, 37-75.

* * *

Dobróka M, Völgyesi L (2005): A nehézségi erőtér potenciálfüggvényének inverziós rekonstrukciója Eötvös-inga adatok alapján. Geomatikai Közlemények VIII, pp. 223-230.

Dr. Lajos VÖLGYESI, Department of Geodesy and Surveying, Budapest University of Technology and Economics, H-1521 Budapest, Hungary, Műegyetem rkp. 3.
Web: http://sci.fgt.bme.hu/volgyesi E-mail: volgyesi@eik.bme.hu